

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ по дисциплине
«Математика»

Направление подготовки/специальность 21.03.02 Землеустройство и кадастры
Направленность (профиль)/специализация Профиль "Геодезическое обеспечение
землеустроительных и кадастровых работ"

Ставрополь 2026

Содержание.

Раздел 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема 1. Матрицы. Операции над матрицами

Тема 2. Умножение матриц

Тема 3. Детерминант матрицы

Тема 4. Обратная матрица. Системы линейных уравнений

Тема 5. Метод Гаусса для решения систем уравнений

Тема 6. Правило Крамера

Тема 7. Аналитическая геометрия (плоскость)

Тема 8. Аналитическая геометрия (пространство)

Раздел 2. Основы математического анализа

Тема 9. Пределы

Тема 10. Производная и дифференциал функции

Тема 11. Применение производной

Тема 12. Применение производной к исследованию функции

Тема 13. Построение графиков функций

Тема 14. Функция нескольких переменных. Производная и дифференциал функции нескольких переменных

Раздел 3. Интегральное исчисление функции одной переменной

Тема 15. Неопределенный интеграл. Таблица интегралов

Тема 16. Методы интегрирования

Тема 17. Интегрирование тригонометрических функций

Тема 18. Определенный интеграл. Вычисление определенного интеграла

Тема 19. Применение определенного интеграла

Тема 20. Несобственный интеграл

Раздел 4. Интегральное исчисление функции нескольких переменных

Тема 21. Кратные интегралы

Тема 22. Поверхностный интеграл

Раздел 5. Дифференциальные уравнения

Тема 23. Основы дифференциальных уравнений

Тема 24. Линейные дифференциальные уравнения

Раздел 6. Ряды

Тема 25. Числовые ряды. Сравнительный тест. Признак Даламбера. Признак Коши. Признаки сходимости рядов

Тема 26. Ряды Маклорена и Тейлора. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Тема 27. Применение рядов

Тема 1. Матрицы. Действия над матрицами

Определение. Матрицей размера $m \times n$, где m - число строк, n - число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij} , где i - номер строки, а j - номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Основные действия над матрицами.

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m=n$), то матрица называется **квадратной**.

Определение. Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется **единичной матрицей**.

Определение. Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**.

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

Определение. Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной матрицей**.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Определение. Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

$$C = A + B = B + A.$$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha (A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$

$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$$

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти $2A + B$.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Тема 2 Умножение матриц

Операция умножения матриц.

Определение: Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C;$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

Свойства операции умножения матриц.

1) Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение $AB=BA$ выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными**.

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

Очевидно, что для любых матриц выполняется следующее свойство:

$$A \cdot O = O; O \cdot A = O,$$

где O – **нулевая** матрица.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна**, т.е. если определены произведения AB и $(AB)C$, то определены BC и $A(BC)$, и выполняется равенство:

$$(AB)C=A(BC).$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения $A(B+C)$ и $(A+B)C$, то соответственно:

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = (2 \ 4 \ 1)$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 4 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = (2 \ 4 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (3+10 \ 4+12) = (13 \ 16).$$

Тема 3 Определитель матриц

Определители.(детерминанты).

Определение. Определителем квадратной матрицы $A =$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по

элементам матрицы по формуле:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}, \quad \text{где}$$

M_{1k} – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Определитель единичной матрицы равен 1.

Для указанной матрицы A число M_{ik} называется **дополнительным минором** элемента матрицы a_{ik} . Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

Определение. **Дополнительный минор** произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Свойство 1. Важным свойством определителей является следующее соотношение:

$$\det A = \det A^T;$$

Свойство 2. $\det (A \pm B) = \det A \pm \det B.$

Свойство 3. $\det (AB) = \det A \cdot \det B$

Свойство 4. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 5. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Определение: Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

Свойство 6. Если в матрице A строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

Свойство 7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

Свойство 9. Если для элементов какой-либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

$$= -5 + 18 + 6 = 19.$$

Пример: Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $\det(AB)$.

1-й способ: $\det A = 4 - 6 = -2$; $\det B = 15 - 2 = 13$; $\det(AB) = \det A \cdot \det B = -26$.

$$2\text{-й способ: } AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}, \quad \det(AB) = 7 \cdot 18 - 8 \cdot 19 =$$

126 –

$$- 152 = -26.$$

Тема 4 Обратная матрица. Системы линейных уравнений

Миноры.

Выше было использовано понятие дополнительного минора матрицы. Дадим определение минора матрицы.

Определение. Если в матрице A выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется **минором** матрицы A . Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s .

Заметим, что вышесказанное применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным.

Если вычеркнуть из исходной квадратной матрицы A выделенные строки и столбцы, то определитель полученной матрицы будет являться дополнительным минором.

Алгебраические дополнения.

Определение. Алгебраическим дополнением минора матрицы называется его дополнительный минор, умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы.

В частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его дополнительный минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Теорема Лапласа. Если выбрано s строк матрицы с номерами $i_1, \dots, i_s$, то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.

Обратная матрица.

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

Определение. Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A , то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1} .

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы.

Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

$$AX = E \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}, i=(1,n), j=(1,n),$$

$$e_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$e_{ij} = 1, \quad i = j.$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \dots + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ \vdots \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \dots + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \dots + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases},$$

Решив эту систему, находим элементы матрицы X .

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1} .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Однако, такой способ не удобен при нахождении обратных матриц больших порядков, поэтому обычно применяют следующую формулу:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},$$

где M_{ji} - [дополнительный минор](#) элемента a_{ji} матрицы A .

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1} .

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$M_{11}=4; \quad M_{12}= 3; \quad M_{21}= 2; \quad M_{22}=1$$

$$x_{11}= -2; \quad x_{12}= 1; \quad x_{21}= 3/2; \quad x_{22}= -1/2$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Свойства обратных матриц.

Укажем следующие свойства обратных матриц:

- 1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

$$2) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$3) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$

Систему уравнений можно записать:

$$A \cdot X = B.$$

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Для применения данного метода необходимо находить [обратную матрицу](#), что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} .

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$\begin{aligned} a_{11}^{-1} &= \frac{5}{30}; & a_{12}^{-1} &= \frac{1}{30}; & a_{13}^{-1} &= \frac{1}{30}; \\ a_{21}^{-1} &= -\frac{10}{30}; & a_{22}^{-1} &= -\frac{14}{30}; & a_{23}^{-1} &= \frac{16}{30}; \\ a_{31}^{-1} &= \frac{5}{30}; & a_{32}^{-1} &= \frac{19}{30}; & a_{33}^{-1} &= -\frac{11}{30}; \end{aligned} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: $x=1$; $y=2$; $z=3$.

Тема 5 Системы алгебраических уравнений, Алгебраические преобразования. Метод Жордана-Гаусса.

Метод Гаусса.

(Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик)

Метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1-го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

- 1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения
- 2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения

И т.д.

Получим:

[illegible]

$$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j} \quad i = 2, 3, \dots, n; \quad j = 2, 3, \dots, n+1.$$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } x_3 = 2; x_2 = 5; x_1 = 1.$$

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = 40 \\ 6z = 18 \end{cases} \text{ , откуда получаем: } z = 3; y = 2; x = 1.$$

Тема 6 Системы уравнений.

Определение. Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.,$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Определение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

Определение. Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если более одного.

Определение. Для системы линейных уравнений матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
 называется матрицей системы, а матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$
 называется расширенной матрицей системы

Определение. Если $b_1, b_2, \dots, b_m = 0$, то система называется **однородной**. однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

Элементарные преобразования систем.

К элементарным преобразованиям относятся:

- 1) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.
- 2) Перестановка уравнений местами.
- 3) Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x .

Теорема Кронекера – Капелли.

(условие совместности системы)

(Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик)

Теорема: Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.
 $\text{Rg}A = \text{Rg}A^*$.

Очевидно, что система (1) может быть записана в виде:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Доказательство.

1) Если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы A , а значит добавление этого столбца в матрицу, т.е. переход $A \rightarrow A^*$ не изменяют ранга.

2) Если $\text{Rg}A = \text{Rg}A^*$, то это означает, что они имеют один и тот же базисный минор. Столбец свободных членов – линейная комбинация столбцов базисного минора, т.е. верна запись, приведенная выше.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}. \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0 \quad \text{Rg}A = 2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Rg}A^* = 3.$$

Система несовместна.

Пример. Определить [совместность](#) системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0; \quad \text{Rg}A = 2;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \quad \text{Rg}A^* = 2.$$

Система совместна. Решения: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

Тема 7 Правило Крамера

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. Система из n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$x_2 = \Delta_2 / \Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$$x_3 = \Delta_3 / \Delta = 3.$$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным [выше](#) матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10; \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases} \quad \text{Ответ: } x = 0; y = 0; z = -2.$$

Тема 8 Аналитическая геометрия

Уравнение линии на плоскости.

Как известно, любая точка на плоскости определяется двумя координатами в какой-либо системе координат. Системы координат могут быть различными в зависимости от выбора базиса и начала координат.

Определение. Уравнением линии называется соотношение $y = f(x)$ между координатами точек, составляющих эту линию.

Отметим, что уравнение линии может быть выражено параметрическим способом, то есть каждая координата каждой точки выражается через некоторый независимый параметр t .

Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

Уравнение прямой на плоскости.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой**.

В зависимости от значений постоянных A, B и C возможны следующие частные случаи:

- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ { $By + C = 0$ } – прямая параллельна оси Ox
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ { $Ax + C = 0$ } – прямая параллельна оси Oy
- $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Oy
- $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали.

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.

Составим при $A = 3$ и $B = -1$ уравнение прямой: $3x - y + C = 0$. Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки A .

Получаем: $3 - 2 + C = 0$, следовательно $C = -1$.

Итого: искомое уравнение: $3x - y - 1 = 0$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$; т.е. $y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k**.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2)$, компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ называется направляющим вектором прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку $A(1, 2)$.

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: $Ax + By + C = 0$. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$$1 \cdot A + (-1) \cdot B = 0, \text{ т.е. } A = B.$$

Тогда уравнение прямой имеет вид: $Ax + Ay + C = 0$, или $x + y + C/A = 0$.

при $x = 1, y = 2$ получаем $C/A = -3$, т.е. искомое уравнение:

$$x + y - 3 = 0$$

Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ $C \neq 0$, то, разделив на $-C$, получим:
 $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ где}} \\ a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ox , а b – координатой точки пересечения прямой с осью Oy .

Пример. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$$C = 1, \quad -\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$$

Нормальное уравнение прямой.

Если обе части уравнения $Ax + By + C = 0$ разделить на число $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, которое называется **нормирующим множителем**, то получим

$$\boxed{x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0} -$$

нормальное уравнение прямой.

Знак $\pm$ нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы $\mu \cdot C < 0$.

p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ – угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox .

Пример. Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 65 = 0$. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

уравнение этой прямой в отрезках:

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$

$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

нормальное уравнение прямой:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13} \quad \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0; \quad \cos \varphi = 12/13; \sin \varphi = -5/13; p = 5.$$

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2 .

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a = b = 1$; $ab/2 = 8$; $a = 4$; -4 .

$a = -4$ не подходит по условию задачи.

Итого: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ или $x + y - 4 = 0$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, -3)$ и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x - 0}{-2 - 0} = \frac{y - 0}{-3 - 0}; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \quad 3x - 2y = 0.$$

Тема 9. Пределы

Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

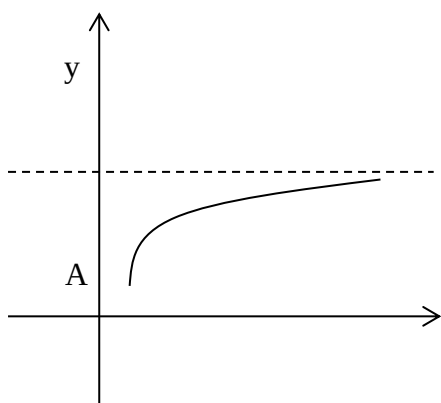
Определение. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x , $|x| > M$ выполняется неравенство

$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в окрестности бесконечности.

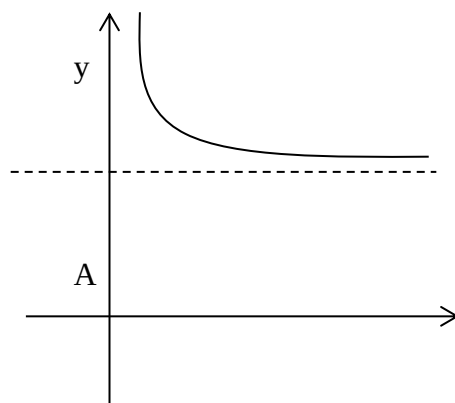
Записывают: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Графически можно представить:



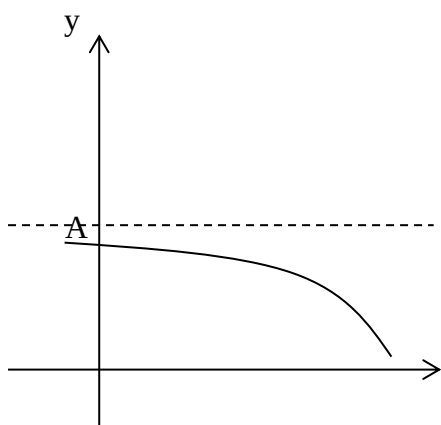
0

x



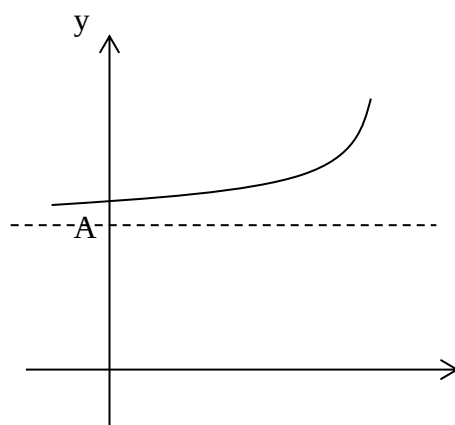
0

x



0

x



0

x

Аналогично можно определить пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ для любого $x > M$ и

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ для любого $x < M$.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim_{x \rightarrow a} C = C$, где $C = \text{const}$.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \rightarrow a$.

Теорема 2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Следствие. $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Теорема 4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ при $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. Если $f(x) > 0$ вблизи точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то $A > 0$.

Аналогично определяется знак предела при $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Теорема 6. Если $g(x) \leq f(x) \leq u(x)$ вблизи точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} u(x) = A$, то и

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **ограниченной** вблизи точки $x = a$, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| < M$ вблизи точки $x = a$.

Теорема 7. Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \rightarrow a$, то она ограничена вблизи точки $x = a$.

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, т.е. $|f(x) - A| < \varepsilon$, тогда

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| \text{ или}$$

$$|f(x)| < \varepsilon + |A|, \text{ т.е.}$$

$$|f(x)| < M, \text{ где } M = \varepsilon + |A|$$

Теорема доказана.

Бесконечно малые функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow a$, где a может быть числом или одной из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x . При различных значениях a функция может быть бесконечно малой или нет.

Пример. Функция $f(x) = x^n$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ и не является бесконечно малой при $x \rightarrow 1$, т.к. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ при $x \rightarrow a$ имела предел, равный A , необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки $x = a$ выполнялось условие

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$ ($\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$).

Свойства бесконечно малых функций:

- 1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ тоже бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.
- 2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ тоже бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.
- 3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow a$.
- 4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Используя понятие бесконечно малых функций, приведем доказательство некоторых теорем о пределах, приведенных выше.

Доказательство теоремы 2. Представим $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad B = \lim_{x \rightarrow a} g(x), \text{ тогда}$$

$$f(x) \pm g(x) = (A + B) + \alpha(x) + \beta(x)$$

$A + B = \text{const}$, $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая, значит

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A + B = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Представим $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad B = \lim_{x \rightarrow a} g(x), \text{ тогда}$$

$$f(x) \cdot g(x) = A \cdot B + A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x)$$

$A \cdot B = \text{const}$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые, значит

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} A \cdot B + 0 = A \cdot B = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Теорема доказана.

**Бесконечно большие функции и их связь с
бесконечно малыми.**

Определение. Предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, где a - число, **равен бесконечности**, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что неравенство

$$|f(x)| > M$$

выполняется при всех x , удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \Delta$$

Записывается $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

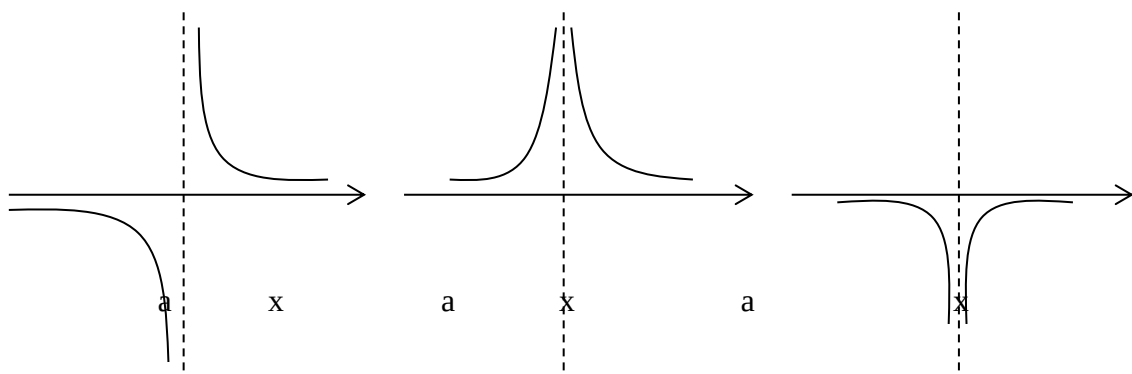
Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)| > M$ на $f(x) > M$, то получим:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

а если заменить на $f(x) < M$, то:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



Определение. Функция называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow a$, где a – число или одна из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. Если $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ (если $x \rightarrow \infty$) и не обращается в ноль, то

$$y = \frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty$$

Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$. Будем обозначать эти функции α , β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по скорости их убывания, т.е. по скорости их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $f(x) = x$.

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция β .

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = A$, $A \neq 0$, $A = \text{const}$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают $\alpha \sim \beta$.

Пример. Сравним бесконечно малые при $x \rightarrow 0$ функции $f(x) = x^{10}$ и $f(x) = x$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{10}}{x} = \lim_{x \rightarrow a} x^9 = 0$$

т.е. функция $f(x) = x^{10}$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $f(x) = x$.

Определение. Бесконечно малая функция α называется **бесконечно малой порядка k** относительно бесконечно малой функции β , если предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Пример. Если $\alpha = x \sin x$, $\beta = x$, то при $x \rightarrow 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^2} = 1$, т.е. функция α – бесконечно малая порядка 2 относительно функции β .

Пример. Если $\alpha = x \sin \frac{1}{x}$, $\beta = x$, то при $x \rightarrow 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta}$ не существует, т.е. функция α и β несравнимы.

Свойства эквивалентных бесконечно малых.

$$1) \alpha \sim \alpha, \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \right)$$

$$2) \text{ Если } \alpha \sim \beta \text{ и } \beta \sim \gamma, \text{ то } \alpha \sim \gamma, \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \right)$$

$$3) \text{ Если } \alpha \sim \beta, \text{ то } \beta \sim \alpha, \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = 1 \right)$$

$$4) \text{ Если } \alpha \sim \alpha_1 \text{ и } \beta \sim \beta_1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k, \text{ то и } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = k \text{ или } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Следствие: а) если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta}$

б) если $\beta \sim \beta_1$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta_1}$

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$

Так как $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$ и $\sin 7x \sim 7x$ при $x \rightarrow 0$, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x}$.

Так как $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2$ при $x \rightarrow 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$.

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \infty$.

Если α и β - бесконечно малые при $x \rightarrow a$, причем β - бесконечно малая более высокого порядка, чем α , то $\gamma = \alpha + \beta$ - бесконечно малая, эквивалентная α . Это можно доказать следующим равенством $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) = 1$.

Тогда говорят, что α - **главная часть** бесконечно малой функции γ .

Пример. Функция $x^2 + x$ - бесконечно малая при $x \rightarrow 0$, x - главная часть этой функции. Чтобы показать это, запишем $\alpha = x^2$, $\beta = x$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1.$$

Некоторые замечательные пределы.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ где } P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

$Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right)}{x^m \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m} \right)} = x^{n-m} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$$

Итого: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{при } n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{при } n = m \\ \infty, & \text{при } n > m \end{cases}$

Первый замечательный предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Второй замечательный предел.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{(x - x_0) \cos x \cos x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\cos x \cos x_0} = 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\pi/4 - x)}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\sin(\pi/4 - x)}{2\sqrt{2}(\pi/4 - x)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \left\{ \begin{array}{l} y = \pi/2 - x \\ x = \pi/2 - y \\ \pi - 2x = \pi - \pi + 2y \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi/2 - y)}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}$$

Пример. Найти предел.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x+3} = \left\{ \begin{array}{l} y = x-1 \\ x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y+4}{y} \right)^{y+4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^y \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^4 = \\ &= \left\{ z = \frac{y}{4} \right\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{4z} = \left(\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z \right)^4 = e^4 \end{aligned}$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$$x^2 - 6x + 8 = 0;$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0;$$

$$\begin{aligned} D &= 36 - 32 = 4; \\ x_1 &= (6 + 2)/2 = 4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 64 - 48 = 16; \\ x_1 &= (8 + 4)/2 = 6; \end{aligned}$$

$$x_2 = (6 - 2)/2 = 2;$$

$$x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x} \quad \text{домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное}$$

$$\text{выражение: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2 - 1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} =$$

$$= \frac{2}{-1 \cdot (1+1)} = -1.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \{x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)\} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}.$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3), \text{ т.к.}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad | \quad x - 1 \\ \hline \overline{x^3 - x^2} \quad | \quad x^2 - 5x + 6 \\ - 5x^2 + 11x \\ - 5x^2 + 5x \\ \hline 6x - 6 \\ 6x - 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = -2$

Пример. Найти предел.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2h) - 2\sin(a+h) + \sin a}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{2a+2h}{2} \cos \frac{2h}{2} - 2\sin(a+h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin(a+h)(\cosh-1)}{h^2} = \\ &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \sin(a+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2} = 2\sin a \cdot (-1/2) = -\sin a \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x - 2)}{(x - 2)^3(3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{(x - 2)(3x + 2)} - \text{не определен, т.к. при}$$

стремлении x к 2 имеют место различные односторонние пределы $-\infty$ и $+\infty$.

Методические указания для проведения практических занятий

Содержание

Раздел 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема 1. Матрицы. Действия над матрицами

Тема 2 Умножение матриц

Тема 3 Определитель матриц

Тема 4 Обратная матрица. Системы линейных уравнений

Тема 5 Системы алгебраических уравнений, Алгебраические преобразования. Метод Жордана-Гаусса.

Тема 6 Системы уравнений.

Тема 7 Правило Крамера

Тема 8 Аналитическая геометрия

Раздел 2. Основы математического анализа

Тема 9. Пределы

Матрицы. Действия над матрицами

Пример 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, необходимо найти $2A$

+ B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Реши и проверь себя по ответам:

1. если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, а $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, тогда $2A+B$

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 11 \\ -3 & -2 & 14 \end{pmatrix}$

2. если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, а $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, тогда $4A-8B$

Ответ : $\begin{pmatrix} -20 & 4 \\ -8 & -32 \end{pmatrix}$

3. если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, тогда $2A-4B$

Ответ: $\begin{pmatrix} -22 & -12 & -8 & -10 \\ 16 & -6 & 18 & 10 \end{pmatrix}$

4. Найти сумму и разность матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \text{ вычислить матрицу}$$

$2A$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Умножение матриц

Пример 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$.

Вам нужно найти транспонированную матрицу и $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = (2 \ 4 \ 1)$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 4 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = (2 \ 4 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример 3. Найти произведение матриц $A = (1 \ 2)$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (3 + 10 \quad 4 + 12) = (13 \ 16).$$

Реши и проверь себя с помощью ответов:

Если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, а $B = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, тогда BA ?

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}$

Определитель матрицы

Пример 1. Вычислить определители второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-6) - (-5) \cdot 3 = -24 + 15 = -9$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Пример 2. Для вычисления определителя четвертого порядка, разложим его по элементам 1-й строки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 15 \\ -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 15 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 15 \\ 6 & -8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix} = (-90 - 360 - 14 + 80 +$$

$$+ 210 + 27) + (45 + 270 + 56 - 60 - 105 - 108) + 2(-9 - 180 - 64 + 12 + 72 + 120) - 2(-7 - 60 - 96 + 18 + 40 + 56) = -147 + 98 + 2(-49) - 2(-49) = -49.$$

Вычислим этот определитель, предварительно преобразовав его так, чтобы на 1-й строке получить нули, кроме элемента a_{11} , чтобы уйти из определителя 4-го порядка к одному определителю 3-го порядка

Для этого сложите 1-й столбец со 2-м, далее 1-й столбец, умноженный на (-2) и последовательно сложите с 3-м и 4-м столбцами

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 7 \\ 6 & -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -3 & 7 \\ -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -9 - 14 + 0 - 0 - 35 + 9 = -49.$$

Мы получили тот же результат.

Пример 3. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

$$= -5 + 18 + 6 = 19.$$

Пример 4. Пусть даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти определитель $\det(AB)$.

1-й метод: $\det A = 4 - 6 = -2$; $\det B = 15 - 2 = 13$; $\det(AB) = \det A \cdot \det B = -26$.

$$2\text{-й метод: } AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix},$$

$$\det(AB) = 7 \cdot 18 - 8 \cdot 19 = 126 - 152 = -26.$$

Пример 5. Найти определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6 - 4) - 1(9 - 1) + 2(12 - 2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0 - 2) - 1(0 - 6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значением определителя является $-10 + 6 - 40 = -44$.

Реши и проверь себя по ответам:

Если $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$, тогда $2\Delta_1 + \Delta_2$?

Ответ: 24.

Определение. Ранг матрицы-это заказ из крупнейших ненулевой минор.

Обозначим: $r(A)$, $R(A)$, $\text{Rang } A$.

Пример 6.

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Потому что все миноры равны ноль, тогда

$r(A)=0$.

Пример 7.

Найти ранг матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Матрица содержит один ненулевой элемент — $b_{11}=1$, который является минором 1-го порядка. Все детерминанты более высокого порядка, составленные из элементов этой матрицы будут содержать 0-е строки, и, следовательно, равны 0. Поэтому, $r(B)=1$.

Пример 8.

Найти ранг матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

минор определитель матрицы 3 –го порядка равна 0, потому что он содержит пропорциональные столбцы, поэтому, $r(C)<3$.

Для того, чтобы доказать, что $r(C)=2$, достаточно найти по крайней мере один минор 2-го порядка, не 0, на пример, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. so, $r(C)=2$.

Пример 9.

Найти ранг матрицы $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\Delta_E = 1 \neq 0$, отсюда, $r(E)=3$.

Пример 10.

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Теоретически, ранг этой матрицы может принимать значения от 1 до 4, потому что из элементов матрицы можно создать миноры до 4-го порядка включительно. Но вместо вычисления всех возможных миноров 4-го, 3-го и др. порядка, применим к матрице и эквивалентное преобразование. Во-первых, убедимся в том, что в первом столбце все элементы, кроме первого, будут равны 0. Для этого мы пишем вместо второй строки сумму с первой, и вместо третьего разницу между третьей и первой удвоенной:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда из третьей строки вычтем вторую и четвертую добавим ко второй:

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После вычеркивания нулевых строк получим матрицу размерности 2×5 , для которой максимальное значение порядка минора, и, следовательно, максимальное значение-ранг 2:

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Минор матрицы $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, следовательно,, $r(\tilde{\tilde{A}}) = r(A) = 2$.

Реши и проверь себя по ответам:

1. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Ответ: 2

2. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ответ: 2

3. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Ответ: 3

Обратная матрица и системы линейных уравнений

Пример 1. для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу.

Решение. Находим сначала детерминант матрицы A

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0, \text{ Итак, обратная матрица существует и мы ее}$$

можем найти по формуле: $A^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где A_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) -

алгебраические дополнения элементов a_{ij} заданной матрицы. тогда:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 2) = -6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 2) = -6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6,$$

$$\text{В результате } A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти обратную матрицу A^{-1} .

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$\begin{array}{llll} M_{11}=4; & M_{12}=3; & M_{21}=2; & M_{22}=1 \\ x_{11}=-2; & x_{12}=1; & x_{21}=3/2; & x_{22}=-1/2 \end{array}$$

$$\text{отсюда, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} .

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$\begin{aligned} a_{11}^{-1} &= \frac{5}{30}; & a_{12}^{-1} &= \frac{1}{30}; & a_{13}^{-1} &= \frac{1}{30}; \\ a_{21}^{-1} &= -\frac{10}{30}; & a_{22}^{-1} &= -\frac{14}{30}; & a_{23}^{-1} &= \frac{16}{30}; \\ a_{31}^{-1} &= \frac{5}{30}; & a_{32}^{-1} &= \frac{19}{30}; & a_{33}^{-1} &= -\frac{11}{30}; \end{aligned} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{16}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Давайте проверим:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Найдем матрицу X .

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{16}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Окончательно решение системы: $x=1; y=2; z=3$.

Реши и проверь себя по ответам:

1. найти обратную матрицу для матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\{1, 2, 3, 4\}$.

3. Решить систему матричным методом

$$x_1 - x_2 + x_3 = 6,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 5.$$

Ответ: $\{1, -2, 3\}$

Системы алгебраических уравнений, Алгебраические преобразования.

Метод Жордана-Гаусса

Пример 1. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = -40, \text{ получим: } z = 3; y = 2; x = 1. \\ 6z = 18 \end{cases}$$

Пример 2. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Подготовить расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}, \text{отсюда: } x_3 = 2; x_2 = 5; x_1 = 1.$$

Реши и проверь себя по ответам:

Решить систему, состоящую из уравнений $x + y - 3z = 2$, $3x - 2y + z = -1$, $2x + y - 2z = 0$ by Gauss:

Ответ: $\{-0,7; -1,2; -1,3\}$

Системы уравнений

[illegible]

Для решения системы, состоящей из уравнений:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{основная матрица системы,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{—столбец неизвестных,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{— столбец свободных членов.}$$

Теорема (теорема Kronecker-Kapelly). Система (1) имеет решение, тогда и только тогда если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

Пример 1.

Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 5y = -9 \end{cases}.$$

Единственным решением является пара чисел $x = 1, y = 2$.

Пример 2.

Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}.$$

Решением этой системы будут любые два числа x и y , удовлетворяющих условию $y = 3 - x$. Например, $x=1, y=2$; $x=0, y=3$ и т. д.

Пример 3.

Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

Очевидно, что эта система не имеет решений, поскольку разность двух чисел не может принять два значения разницы.

Пример 4.

Используя теорему Кронекера-Капелли:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8, \end{cases}$$

Используя элементарные преобразования для преобразования расширенной

матрицы этой системы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{pmatrix} \sim$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 1 & 16 & -11 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 16 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{4} \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 16 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 54 & -36 & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 16 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :6 \\ + \end{matrix} \sim$$

[illegible]

Когда $r < n$, система является неопределенной

Найти сумму корней системы уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

Ответ: 2

Правило Крамера

Пример 1. Найти решение системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$x_2 = \Delta_2 / \Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$$x_3 = \Delta_3 / \Delta = 3.$$

Реши и проверь себя по ответам:

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{Ответ: } \{1, 2, 3, 4\}.$$

2 Решить методом Крамера следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -2, \end{aligned}$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0.$$

Ответ: {1, 2, 3, -1}

Аналитическая геометрия.

Линейные операции над векторами в координатах.

Пусть дан набор векторов в прямоугольной системе координат,

$\vec{a}(x_A, y_A, z_A); \vec{b}(x_B, y_B, z_B)$, тогда линейные операции над ними в координатах имеют вид: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B); \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_A; \alpha y_A; \alpha z_A)$

Пример 1 : Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a}(0, 1, 1); \vec{b}(1, 1, 0)$

Решение: находим координаты вектора $2\vec{b}$. Умножим каждую координату вектора $\vec{b}$ на число 2. получим вектор $(2, 2, 0)$. Складывая соответствующие координаты векторов, получим вектор $\vec{c}(2, 3, 1)$.

Реши и проверь себя по ответам:

1. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$. Ответ (-2, 1, 1)
2. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$. Ответ (2, -3, 1)
3. Найти координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$. Ответ (-1, -1, 2)
4. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 0, 0)$. Ответ (-2, -1, 1)
5. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 3); \vec{b}(-1, 1, 0)$. Ответ (-2, 1, 3)

Solve:

1. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.

2. Найти координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.
3. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 15); \vec{b}(-1, 7, 0)$.
4. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 8); \vec{b}(-1, 1, 4)$.
5. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 7\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.
6. Найти координаты вектора $\vec{c} = 13\vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.
7. Find the coordinates of the vector $\vec{c} = 6\vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.
8. Найти координаты вектора $\vec{c} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.
9. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 7); \vec{b}(-3, 1, 0)$.
10. Найти координаты вектора $\vec{c} = 5\vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.
11. Найти координаты вектора $\vec{c} = 12\vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.
12. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 5); \vec{b}(7, 1, 0)$.
13. Найти координаты вектора $\vec{c} = 4\vec{a} - 8\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.
14. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -6, 1); \vec{b}(-1, 6, 0)$.
15. Найти координаты вектора $\vec{c} = 13\vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.

Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением векторов и называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

Если мы рассмотрим векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a); \vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в прямоугольной системе координат, тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;$$

С помощью получившегося равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};$$

Пример 2. Вычислить $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$10\vec{a} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13,$$

$$\text{Поскольку } \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4, \quad \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Пример 3. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$,

$$\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}.$$

$$\vec{a} = (1, 2, 3), \quad \vec{b} = (6, 4, -2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8:$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}.$$

$$\cos \varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \quad \varphi = \arccos \frac{2}{7}.$$

Пример 4. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \pi/3$.

$$15\vec{a} \cdot \vec{a} - 18\vec{a} \cdot \vec{b} - 10\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{b} \cdot \vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos \frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15 \cdot 16 - 28 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} +$$

$$+ 12 \cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$$

Пример 5. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$,

$$\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}.$$

$$\text{that is } \vec{a} = (3, 4, 5), \quad \vec{b} = (4, 5, -3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 + 20 - 15 = 17 :$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}.$$

$$\cos \varphi = \frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{17}{50}; \quad \varphi = \arccos \frac{17}{50}.$$

Пример 6. при каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны?

$$\vec{a} = (m, 1, 0); \quad \vec{b} = (3, -3, -4)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3m - 3 = 0; \Rightarrow m = 1.$$

Пример 7. Найти скалярное произведение $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$, если

$$|\vec{a}| = 1, \quad |\vec{b}| = 2, \quad |\vec{c}| = 3, \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned} (2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c})(5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}) &= 10\vec{a} \cdot \vec{a} + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 14\vec{a} \cdot \vec{c} + 15\vec{a} \cdot \vec{b} + 18\vec{b} \cdot \vec{b} + 21\vec{b} \cdot \vec{c} + \\ &+ 20\vec{c} \cdot \vec{a} + 24\vec{b} \cdot \vec{c} + 28\vec{c} \cdot \vec{c} = 10 \vec{a} \cdot \vec{a} + 27\vec{a} \cdot \vec{b} + 34\vec{a} \cdot \vec{c} + 45\vec{b} \cdot \vec{c} + 18\vec{b} \cdot \vec{b} + 28\vec{c} \cdot \vec{c} = 10 + \\ &+ 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547. \end{aligned}$$

Пример 8. Найти угол между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$, где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ - единичные векторы и угол между $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ равен 120° (120°).

$$\begin{aligned} \text{Решение.: let } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}) \cdot (\mathbf{m} - \mathbf{n}) = 2 \mathbf{m}^2 - 4\mathbf{n}^2 + 2\mathbf{m}\mathbf{n} = \\ &= 2 - 4 + 2\cos 120^\circ = -2 + 2(-0.5) = -3; \mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{a}^2}; \mathbf{a}^2 = (2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}) \cdot (2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}) = \\ &= 4 \mathbf{m}^2 + 16\mathbf{m}\mathbf{n} + 16 \mathbf{n}^2 = 4 + 16(-0.5) + 16 = 12, \text{ so } \mathbf{a} = \sqrt{12}. \mathbf{b} = \sqrt{\mathbf{b}^2}; \mathbf{b}^2 = \\ &= (\mathbf{m} - \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{m} - \mathbf{n}) = \mathbf{m}^2 - 2\mathbf{m}\mathbf{n} + \mathbf{n}^2 = 1 - 2(-0.5) + 1 = 3, \text{ so } \mathbf{b} = \sqrt{3}. \text{ В итоге: } \cos \varphi = \frac{-3}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}} \\ &= -1/2, \Rightarrow \varphi = 120^\circ. \end{aligned}$$

Реши и проверь себя по ответам:

1. Косинус угла между векторами $\vec{a} \{2;1;3\}$ и $\vec{b} \{0;1;1\}$ is...

$$\text{Ответ: } \frac{4}{\sqrt{28}}$$

2. Косинус угла между векторами $\vec{a} \{-2;1;3\}$ и $\vec{b} \{0;1;1\}$ is...

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{28}}$

3. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - единичные векторы, и $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$, тогда скалярное произведение $(3\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ это...

Ответ: $-\frac{1}{2}$

4. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - единичные векторы, и $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$, тогда скалярное произведение $(3\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ это...

Ответ: $-\frac{3}{2}$

5. Работа силы $\vec{F} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ для прямолинейного движения материальной точки из положения А (-1; 2; 0) в положение (2; 1; 3) будет равно...

Ответ: 3

6. Работа силы $\vec{F} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ для прямолинейного движения материальной точки из положения А (-1; 3; -3) в положение В (2; 1; 3) будет равно...

...Ответ: 3

7. Косинус угла между векторами $\vec{a} \{2; 1; 0\}$ и $\vec{b} \{0; -1; 1\}$ равен

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{10}}$

8. Косинус угла между векторами $\vec{a} \{2; -1; 0\}$ и $\vec{b} \{0; 1; 1\}$ is...

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{10}}$

9. Если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, и $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$ тогда скалярное произведение $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ есть...

Ответ: -1

10. Если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, и $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$ тогда скалярное произведение $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ есть...

Ответ : -3.

Векторное произведение векторов

Определение. Векторным произведением векторов и называется вектор, удовлетворяющий следующим условиям:

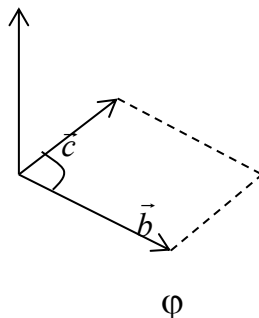
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\sin \varphi \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ правая тройка векторов.

обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ or $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.



Если векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в Декартовой прямоугольной системе координат, единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

Геометрический смысл векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример 9. Найти векторное произведение двух векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

отсюда, $\vec{a} = (2, 5, 1)$; $\vec{b} = (1, 2, -3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Пример 10. Зная векторы $\overrightarrow{AB}(-3, -2, 6)$ и $\overrightarrow{BC}(-2, 4, 4)$, вычислить длину высоты AD в треугольнике ABC .

Решение. Обозначив площадь треугольника ABC через S , получим: $S = 1/2 BC$

AD . Тогда $AD = 2S/BC$, $BC = \sqrt{BC^2} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4^2} = 6$,

$S = 1/2 |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, отсюда, вектор $\overrightarrow{AC}$ имеет координаты

$$\overrightarrow{AC}(-5, 2, 10). \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & 6 \\ -5 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \vec{i} (-20 - 12) - \vec{j} (30 - 30) + \vec{k} (-6 - 10) =$$

$$= -16(2\vec{i} + \vec{k}). \quad |\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = \sqrt{16^2(2^2 + 1)} = 16\sqrt{5}; \quad S = 8\sqrt{5},$$

$$AD = \frac{16\sqrt{5}}{6} = \frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

Реши и проверь себя по ответам:

1. найти площадь основания BCD пирамиды ABCD если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Ответ: $\sqrt{510}/2$ кв.ед.

2. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

Ответ: $S_{\Delta} = \frac{\sqrt{65}}{2}$ (units²).

3. Чтобы найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $\vec{a} \wedge \vec{b} = 30^\circ$.

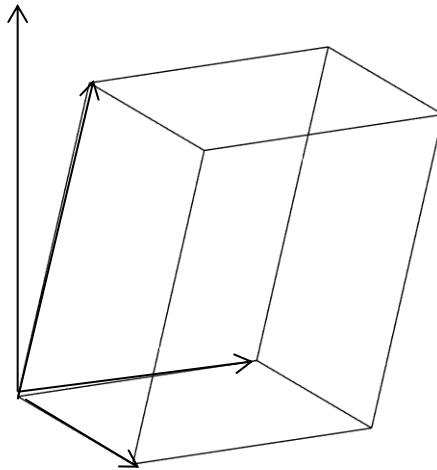
Ответ: 4.

Смешанное произведение векторов.

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, это число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ and $\vec{c}$

обозначается: $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ or $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ это значение по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равен

$$\frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

Пример 11. Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -6; 1)$$

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AC} = (4; -3; -2)$

$$\overrightarrow{AD} = (-4; -2; 2)$$

Найдем смешанное произведение векторов:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример 12. Найти объем пирамиды и длину высоты, размещенной на грани BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

$$\overrightarrow{BA} = (-2; -3; -4)$$

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BD} = (1; 4; -3)$

$$\overrightarrow{BC} = (4; -1; -2)$$

Объем пирамиды равен:

$$V = \frac{1}{6} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-2(-8-3) + 3(-2+12) - 4(-1-16)) =$$

$$= \frac{1}{6}(22 + 30 + 68) = 20(\tilde{m}^3)$$

Чтобы найти длину высоты пирамиды будем сначала находить площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8-3) - \vec{j}(-2+12) + \vec{k}(-1-16) = -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$

$$|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{11^2 + 10^2 + 17^2} = \sqrt{121 + 100 + 289} = \sqrt{510}$$

$$S_{\text{осн}} = \sqrt{510} / 2 (\text{units}^2)$$

$$\text{Поскольку, } V = \frac{S_{\text{осн}} \cdot h}{3}; \quad h = \frac{3V}{S_{\text{осн}}} = \frac{120}{\sqrt{510}} = \frac{4\sqrt{510}}{17} (\text{units})$$

Реши и проверь себя по ответам:

1. Даны векторы a(11,10,2) and b(4,0,3). Найти единичный вектор с ортогональный векторам a и b и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов a, b, c являлась правой.

$$\text{Ответ: } x = \frac{6}{5\sqrt{5}}, y = -\frac{1}{\sqrt{5}}, z = -\frac{8}{5\sqrt{5}}.$$

2. Найти объем пирамиды ABCD если A(3,4,5), B(1,2,1), C(-2,-3,6), D(3,-6,-3).

Ответ: 42.

3. Найти объем пирамиды ABCD если $A(-7,-5,6)$, $B(-2,5,-3)$, $C(3,-2,4)$, $D(1,2,2)$.

Ответ: $77/3$

4. Найти объем пирамиды ABCD если $A(1,3,1)$, $B(-1,4,6)$, $C(-2,-3,4)$, $D(3,4,-4)$.

Ответ: 3

5. Найти объем пирамиды ABCD если $A(2,4,1)$, $B(-3,-2,4)$, $C(3,5,-2)$, $D(4,2,-3)$.

Ответ: $25/3$.

Различные типы уравнений прямых

Пример 13. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.

Когда $A = 3$ и $B = -1$, то уравнение прямой линии: $3x - y + C = 0$. Для нахождения коэффициента C подставляем в выражение координаты заданной точки A . Получим: $3 - 2 + C = 0$, hence $C = -1$. Итого: искомое уравнение: $3x - y - 1 = 0$.

Пример 14. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$.

Применяя формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

Пример 15: Линия задана общим уравнением прямой $12x - 5y - 65 = 0$.

Необходимо записать различные уравнения прямой

уравнение линии в отрезках:

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$
$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (разделить на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

нормальное уравнение прямой:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13} \quad \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0; \quad \cos\varphi = 12/13; \sin\varphi = -5/13; p = 5.$$

Реши и проверь себя по ответам:

1. Написать уравнение прямой, проходящую через точку $A(3,1)$ и наклоненную к линии $2x+3y-1=0$ под углом 45° .

Ответ: $x-5y+2=0$ и $5x+y-16=0$.

2. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2, -3)$ и $O(0,0)$.

Ответ: $\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0}$; $\frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}$; $3x-2y=0$.

3. Прямые отсекает на координатных осях равные положительные сегменты.

Записать уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими линиями, равен 8см^2 . Ответ: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ или $x+y-4=0$.

4. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $(1, -1)$ и проходящей через точку $A(1, 2)$. Ответ: $x+y-3=0$

5. Установлено общее уравнение прямой $x-y+1=0$. Найти уравнение линии в отрезках. Ответ: $-\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$, $a=-1$, $b=1$.

6. найти угловой коэффициент прямой $2x-y+3=0$. Ответ 2.

7. Сумма отрезков, отсекаемых прямой $-\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ на координатных осях равна...? Ответ: -7

8. Угловой коэффициент прямой $3x-2y+3=0$ is? Ответ: $\frac{3}{2}$

9. Сумма отрезков, отсекаемых прямой $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ на координатных осях равна...? Ответ 6.

10. Каков угловой коэффициент прямой линии $4x-y=0$? Ответ: 4.

Условия параллельности, перпендикулярности прямых, расстояние от точки до прямой

Угол между прямыми на плоскости

Определение. Если заданы линии $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, тогда острый угол между прямыми линиями, определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Напомним, что прямые, заданные общими уравнениями, параллельны, если коэффициенты при x и y пропорциональны друг другу!

Расстояние от точки до прямой.

Теорема. если дана точка $M(x_0, y_0)$, тогда расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример. Показать. Что линии $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.

Найдем: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1 k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны

Пример. Найти угол между прямыми: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

$$k_1 = -3; \quad k_2 = 2 \quad \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2 - (-3)}{1 - (-3)2} \right| = 1; \quad \varphi = \pi/4.$$

Реши и проверь себя по ответам:

1. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(3,1)$ и наклоненной к прямой линии $2x+3y-1=0$ под углом 45° . Ответ: $x - 5y + 2 = 0$ и $5x + y - 16 = 0$.
2. При каком значении параметра t прямые линии, определяемые уравнениями $3tx-8y+1=0$ и $(1+t)x-2ty=0$ параллельны? Ответ: $t_1 = 2$, $t_2 = -2/3$.

3. Даны вершины треугольника ABC: A (4; 3) , B (-3; -3) , C (2; 7).

Расстояние от точки A до прямой BC это число ...? Ответ: $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

4. Найти расстояние между параллельными прямыми $2x + y - 2 = 0$ and

$6x + 3y + 1 = 0$. Ответ: $\frac{7}{3\sqrt{5}}$.

5. Имеют ли прямые $3x - 2y + 1 = 0$ и $2x + 5y - 12 = 0$ общую точку? Ответ: yes.

Пределы

Предел функции в точке и на бесконечности.

Одной из основных операций в теории функций-это операция, лимитирующая процесс (операция нахождения предела переменных). Это действие основано на понятии предела функции в точке или на бесконечности.

Дана функция $y = f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки x_0 и в точке x_0 может быть определена или не определена.

Определение. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех x таких, что

$$0 < |x - a| < \Delta$$

верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Определение. Если $f(x) \rightarrow A_1$ при $x \rightarrow a$ только при $x < a$, то $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = a$ **слева**, а если $f(x) \rightarrow A_2$ при $x \rightarrow a$ только при $x > a$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = a$ **справа**.

Определение. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x , $|x| > M$ выполняется неравенство

$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Лимит от постоянной величины я в любой точке равен этой константе.

Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Основные теоремы о пределах.

Рассмотрим класс функций $y = f(x)$ которые в предельной точке x_0 стремятся к нулю.

Определение. Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow a$, где a может быть числом или одной из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x . При различных значениях a функция может быть бесконечно малой или нет.

Аналогично определяется бесконечно малая величина в $x \rightarrow x_0 + 0$; $x \rightarrow x_0 - 0$; $x \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$.

Пример : $\alpha_1(x) = x^2$ если $x \rightarrow 0$, $\alpha_2(x) = x - 2$ если $x \rightarrow 2$; $\alpha_3(x) = \sin x$ если $x \rightarrow \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\alpha_4(x) = \frac{1}{2x-3}$ если $x \rightarrow \infty$.

Отношение двух бесконечно малых величин называется неопределенным выражением или неопределенностью типа $\left[\frac{0}{0} \right]$

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется **бесконечно малой** более высокого порядка, чем функция β .

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = A$, $A \neq 0$, $A = \text{const}$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают $\alpha \sim \beta$.

Замечательные пределы

При раскрытии неопределенностей удобно использовать следующие Замечательные пределы

1. Первый замечательный предел. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Эта формула позволяет раскрывать неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Например: вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x} = \left[\frac{0}{0}\right]$, Используя первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \cdot \frac{6x}{4x} = \frac{6}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = \frac{6}{4} \cdot 1 = \frac{3}{2} = 1,5$.

При раскрытии неопределенностей если под знаком предела бесконечно-малые величины, то вы можете заменить их эквивалентными. Это упрощает раскрытие неопределенностей $\left[\frac{0}{0}\right]$.

В предыдущем примере $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x}$ функция $\sin 6x$ заменена эквивалентной функцией $6x$, получаем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$.

2. Второй замечательный предел записывается как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{1/y} = e$ (4.6); or $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$, $e \approx 2,718281$

Второй замечательный предел используется для раскрытия неопределенности вида $[1^\infty]$. Например: 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = [1^\infty]$ тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2$.

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^2 = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^2 = e^2$.

Вычислить пределы функций.

a) Find $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 1}{7x^5 + 2x + 3}$.

Решение. Прежде всего, найдем пределы числителя и знаменателя дроби.

Функции $5x^2 + 1$ и $7x^5 + 2x + 3$ являются бесконечно большими. Следовательно,

$\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2 + 1) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (7x^5 + 2x + 3) = \infty$.

Поэтому, имеем дело с неопределенностью типа $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Для раскрытия этой неопределенности выделим в числителе и в знаменателе X в старшей степени в качестве множителя и уменьшим степень

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 1}{7x^5 + 2x + 3} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 \left(\frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5} \right)}{x^5 \left(7 + \frac{2}{x^4} + \frac{3}{x^5} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}}{7 + \frac{2}{x^4} + \frac{3}{x^5}} = \frac{0}{7} = 0.$$

Ответ. 0.

b) Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}.$

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ в этом случае, нужно разложить числитель и знаменатель на множитель и сократить дробь на общий множитель (найти квадратные корни квадратного трехчлена с использованием дискриминанта и применить теорему о разложении квадратного трехчлена на множители).

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+16}{x-4} = \frac{2+16}{2-4} = -9.$$

Ответ. -9.

c) Найти $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}.$

решение. Чтобы вычислить этот предел, подставим значение аргумента в функцию, стоящую под знаком предела.

$$\text{Получим } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(-1)^2 + 14 \cdot (-1) - 32}{(-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 8} = \frac{-45}{15} = -3.$$

Ответ. -3.

d) Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2}.$

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, Вам необходимо умножить числитель и знаменатель на выражение сопряженное числителю, и тогда сократить дробь на общий множитель.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

е) Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, Вам необходимо выбрать первый замечательный предел: $\lim_{A \rightarrow 0} \frac{\sin A}{A} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \sin kx}{kx} = k \cdot 1 = k.$$

Ответ. k

г) Найти $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\{0 \cdot \infty\}$ в этом случае произведение должно быть преобразовано в частное, то есть изменить неопределенность $\{0 \cdot \infty\}$ на неопределенность $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} &= \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \left[\sin \frac{\pi x}{2} = 1, \text{ при } x=1 \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \\ &= \left[\begin{array}{l} y = x-1, \\ y \rightarrow 0, x = y+1 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{\cos \frac{\pi}{2}(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{\cos \left(\frac{\pi}{2}y + \frac{\pi}{2} \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{-\sin \frac{\pi}{2}y}. \end{aligned}$$

Выделим первый замечательный предел, то есть, умножим числитель и знаменатель на $\frac{\pi}{2}$. получим

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\frac{\pi}{2}y}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}y} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Ответ. $\frac{2}{\pi}$.

i) **Найти** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\{1^\infty\}$ в этом случае, Вам необходимо выбрать второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{x-1}{x+1} - 1 \right) \right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{-2}{x+1} \right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[1 + \frac{1}{\frac{x+1}{-2}} \right]^{\frac{x+1}{-2}} \right)^{\frac{-2}{x+1}x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x+1}} = e^{-2}.$$

Ответ. e^{-2} .

g) **Найти** $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{1}{x-2}}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\{1^\infty\}$ in this case, в этом случае, Вам необходимо выбрать второй замечательный предел: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{1}{x-2}} = \left[\begin{array}{l} y = x-2, \\ x = y+2, y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} (3(y+2)-5)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+3y)^{\frac{1 \cdot 3}{y \cdot 3}} = e^3.$$

Ответ. e^3 .

h) **Найти** $\lim_{x \rightarrow 5/2} (3x-5)^{\frac{1}{x-2}}$.

Решение. Подставим значение $x = \frac{5}{2}$ в функцию, стоящую под знаком предела.

Получим $\lim_{x \rightarrow 5/2} (3x-5)^{\frac{1}{x-2}} = \left(3 \cdot \frac{5}{2} - 5\right)^{\frac{1}{5/2-2}} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Ответ. $\frac{25}{4}$.

Содержание.

Тема 10. Производная и дифференциал функции

Тема 11. Применение производных к исследованию функции

Раздел 3. Дифференциальное исчисление функции многих переменных

Тема 12. Функция нескольких переменных. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Раздел 4. Интегральное исчисление функций одной переменной

Тема 13. Неопределенный интеграл

Тема 14. Методы интегрирования

Тема 15. Определенный интеграл Вычисление определенного интеграла

Тема 16. Приложения определенного интеграла Несобственные интегралы

Раздел 5. Интегральное исчисление функции многих переменных

Тема 17. Кратные интегралы

Тема 18. Криволинейные и поверхностные интегралы

Раздел 6. Дифференциальные уравнения

Тема 19. Простейшие дифференциальные уравнения

Тема 20. Линейные дифференциальные уравнения

Тема 10. Производная и дифференциал функции

Пример .

Найти производные заданных функций

а) $y = 4x^3 + 3\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$;

Решение:

$$y = 4x^3 + 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-2};$$

$$y' = 4 \cdot 3x^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - 2(-2)x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3}.$$

б) $y = \sin x \cdot e^x$;

Решение:

Используем формулу $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

$$y' = (\sin x)' \cdot e^x + \sin x \cdot (e^x)' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x.$$

в) $y = \frac{x^2}{\cos x}$;

Решение:

Используем формулу $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$y' = \frac{(x^2)' \cos x - x^2 (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}.$$

г) $y = \sin(x^2 + 3)$;

Решение:

Используем формулу $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

$$y = \sin u, \text{ где } u = x^2 + 3;$$

$$y' = (\sin u)'_u \cdot u' = \cos u \cdot 2x = \cos(x^2 + 3) \cdot 2x.$$

д) $y = (x^2 + e^x)^{10}$;

Решение:

Используем формулу $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

$$y = u^{10}, \text{ где } u = x^2 + e^x;$$

$$y' = 10u^9 \cdot (x^2 + e^x)' = 10(x^2 + e^x)^9 \cdot (2x + e^x).$$

е) $y = x^2 \cdot e^{\sin x}$;

Решение:

$$y' = (x^2)' e^{\sin x} + x^2 (e^{\sin x})' = 2x e^{\sin x} + x^2 e^{\sin x} (\sin x)' = 2x e^{\sin x} + x^2 e^{\sin x} \cos x.$$

Пример .

Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

а) $y = \ln(\cos x)$;

Решение:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x;$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = (-\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\cos^2 x}.$$

б) $y = x e^x$.

Решение:

$$y' = e^x + x e^x,$$

$$y'' = e^x + e^x + x e^x = 2e^x + x e^x.$$

Пример .

Найти дифференциал функции y , если $y = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

Решение:

Воспользуемся свойством логарифма частного для упрощения формулы:

$$y = \ln(\sin x) - \ln x.$$

Используем формулу $dy = y' \cdot dx$.

$$y' = \frac{1}{\sin x} (\sin x)' - \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x};$$

$$dy = \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) dx.$$

Самостоятельно: Найти производную сложной функции

$$y = \frac{x^2 - 7x + 3}{(x-1)^2}; \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = ?$$

$$y = \sqrt[3]{4x} - \frac{5}{\sqrt{x}} - \ln 5$$

$$y = \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^2 5x$$

$$y = e^{-x} \arcsin x$$

$$y = -\frac{1}{60(1-3\cos x)^2}$$

$$y = \frac{1}{5^{x^2}}$$

$$y = \ln^2(\sqrt{1+e^x} - 1)$$

$$y = 2^{\arctg x^3}$$

$$y = e^{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2x}}$$

$$y = \arccos \ln \frac{1}{x^2}$$

Тема 11. Применение производных к исследованию функции

На отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ может достигать наименьшего или наибольшего значения либо в критических точках, либо на концах отрезка $[a, b]$.

Пример. Найти экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$.

Решение. Так как $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3)$, то критические точки функции $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Экстремумы могут быть только в этих точках. Так как при переходе через точку $x_1 = 2$ производная меняет знак плюс на минус, то в этой точке функция имеет максимум. При переходе через точку $x_2 = 3$ производная меняет знак минус на плюс, поэтому в точке $x_2 = 3$ у функции минимум. Вычислив значения функции в точках $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, найдем экстремумы функции: максимум $f(2) = 14$ и минимум $f(3) = 13$.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что областью определения функции является область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

В свою очередь, видно, что прямые $x = 1$, $x = -1$ являются вертикальными асимптотами кривой.

Областью значений данной функции является интервал $(-\infty; \infty)$.

Точками разрыва функции являются точки $x = 1$, $x = -1$.

Находим критические точки.

Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

Критические точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$.

Найдем вторую производную функции

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$0 < x < 1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

Находим промежутки возрастания и убывания функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает

$$\begin{aligned}
-1 < x < 0, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\
0 < x < 1, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\
1 < x < \sqrt{3}, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\
\sqrt{3} < x < \infty, & \quad y'' > 0, \text{ функция возрастает}
\end{aligned}$$

Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой максимума, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой минимума. Значения функции в этих точках равны соответственно $-3\sqrt{3}/2$ и $3\sqrt{3}/2$.

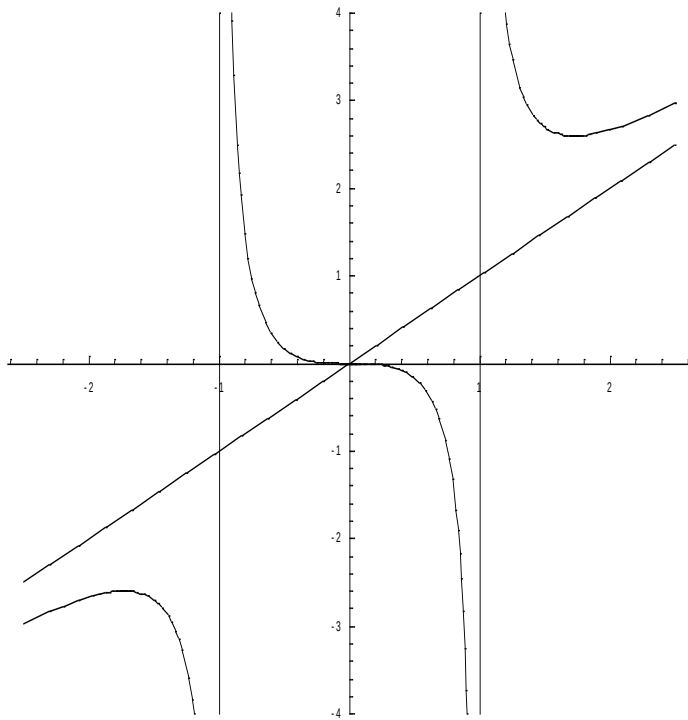
Про вертикальные асимптоты было уже сказано выше. Теперь найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты — $y = x$.

Построим график функции:



Пример .

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3x - x^3$ на отрезке $[0; 3]$

Решение. Функция достигает наибольшего и наименьшего значения либо в критических точках, принадлежащих заданному отрезку, либо на концах этого отрезка. Найдем критические точки (т.е. точки в которых производная равна нулю или не существует):

$$y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$$

$$y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 1 \in [0; 3] \quad \text{и} \quad x = -1 \notin [0; 3]$$

Найдем значение функции в этих точках и на концах отрезка

$$y(1) = 2; \quad y(0) = 0; \quad y(3) = -18$$

Выберем из предложенных значений наибольшее и наименьшее.

Итак, наибольшее значение функции на заданном отрезке равно 2 и достигается при $x = 1$, $y_{\text{наиб}}(1) = 2$, а наименьшее значение равно -18 при $x = 3$, $y_{\text{наим}}(3) = -18$.

Пример .

Исследовать функцию $y = \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение.

Общая схема исследования функций:

Найти область определения функции.

Исследовать поведение функции на концах области определения. Найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в этих точках. Найти вертикальные асимптоты.

Выяснить, является функция четной, нечетной, периодической.

Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.

Найти наклонные асимптоты графика функции.

Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.

Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.

Построить схематический график функции, используя все полученные результаты.

1. Функция не определена, если $x - 1 = 0$, ($x = 1$)

Область определения: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$

2. Т.к. $x=1$ - точка разрыва функции исследуем поведение функции в этой точке слева и справа

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty$$

Т.к. пределы равны ∞ значит $x=1$ точка разрыва второго рода.

Следовательно, прямая $x=1$ - вертикальная асимптота.

Проверим функцию на четность, нечетность. Напомним, что функция $y = f(x)$ называется четной (нечетной) если выполнены два условия:

Область определения симметрична относительно начала координат

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

Если $y = f(x)$ четная, то график симметричен относительно оси ординат, а для нечетной – относительно начала координат.

$$f(-x) = \frac{(-x+2)^3}{4(-x-1)^2} = -\frac{(x-2)^3}{4(x+1)^2}$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. общего вида.

Функция не является периодической

4. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат

с ОХ: $y = 0$ при $x = -2$;

с ОУ: $x = 0$ при $y = 2$;

Найдем промежутки знакопостоянства функции

$$y < 0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} < 0 \Rightarrow x+2 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2);$$

$$y > 0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} > 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x \in (-2; 1) \cup (1; +\infty)$$

5. Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^3}{4x(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{4};$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4}x \right] = [\infty - \infty] = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 2$$

$$y = \frac{1}{4}x + 2 - \text{наклонная асимптота.}$$

Для $x \rightarrow -\infty$ k и b вычисляются аналогично

6. Найдем точки экстремума функции и промежутки монотонности.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной y' : если в некотором интервале $y' > 0$, то в этом интервале функция возрастает, а если $y' < 0$, то функция убывает в этом интервале.

Функция $y = f(x)$ может иметь экстремум только в тех точках, которые принадлежат области определения и в которых ее производная равна нулю или не существует. Если y' меняет знак с “+” на “-” при переходе через исследуемую точку, то эта точка максимума, если y' меняет знак с “-” на “+” при переходе через исследуемую точку, то эта точка является точкой минимума. Если y' не меняет знак при переходе через точку x_0 , в этой точке экстремума нет.

Найдем все точки из области определения функции $y = f(x)$, в которых производная (y') обращается в ноль или не существует.

$$y' = \frac{3(x+2)^2(x-1)^2 - 2(x-1)(x+2)^3}{4(x-1)^4} = \frac{(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^3}.$$

$$y' = 0 \text{ при } x_1 = -2, x_2 = 7;$$

$$y' \text{ не существует при } x = 1$$

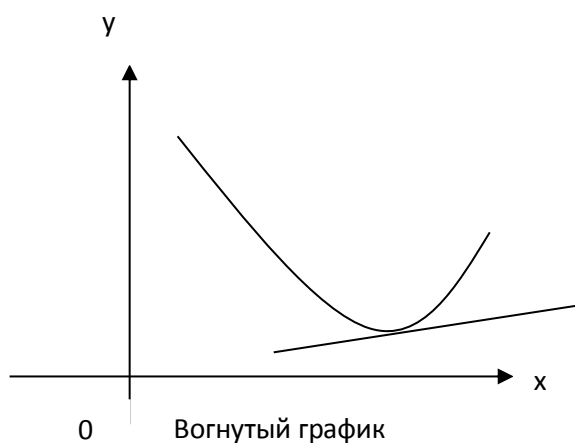
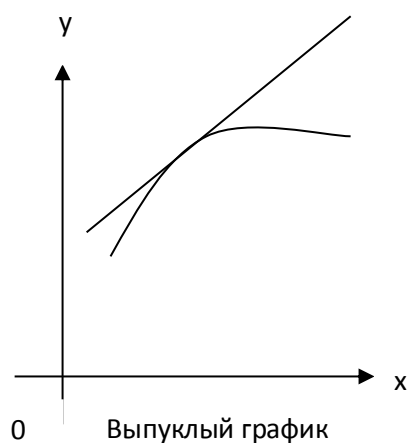
Составим таблицу

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 7)$	7	$(7; +\infty)$
y'	+	0	+	не существует	-	0	+
y		0		не существует		≈ 5	
	возрастает		возрастает		убывает	min	возрастает

Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$, $(7; +\infty)$ и убывает на интервале $(1; 7)$. Точка $x = 7$ есть точка минимума $y_{\min} = y(7) = \frac{729}{144}$

7. Найдем точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости функции

Напомним, что график функции $y = f(x)$ называется выпуклым на интервале $(a; b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит ниже любой своей касательной. График функции $y = f(x)$ называется вогнутым на интервале $(a; b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит выше любой своей касательной.



Точки, в которых функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называются точками перегиба.

Перегиб возможен в точках, в которых y'' равна нулю или не существует. Если $y'' < 0$ на интервале $(a; b)$, то график функции является выпуклым ($\cap$) на этом интервале, если же $y'' > 0$, то на интервале $(a; b)$ график вогнутый ($\cup$).

Найдем точки перегиба $y = f(x)$:

$$y'' = \frac{[2(x+2)(x-7) + (x+2)^2](x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^6} = \frac{54(x+2)}{4(x-1)^4} = \frac{27(x+2)}{2(x-1)^4}$$

$$y'' = 0 \text{ при } x = -2$$

$$y'' \text{ не существует при } x = 1$$

Составим таблицу

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	-	0	+	не существует	+
y	$\cap$	0	$\cup$	не существует	$\cup$

Точка $(-2; 0)$ - точка перегиба.

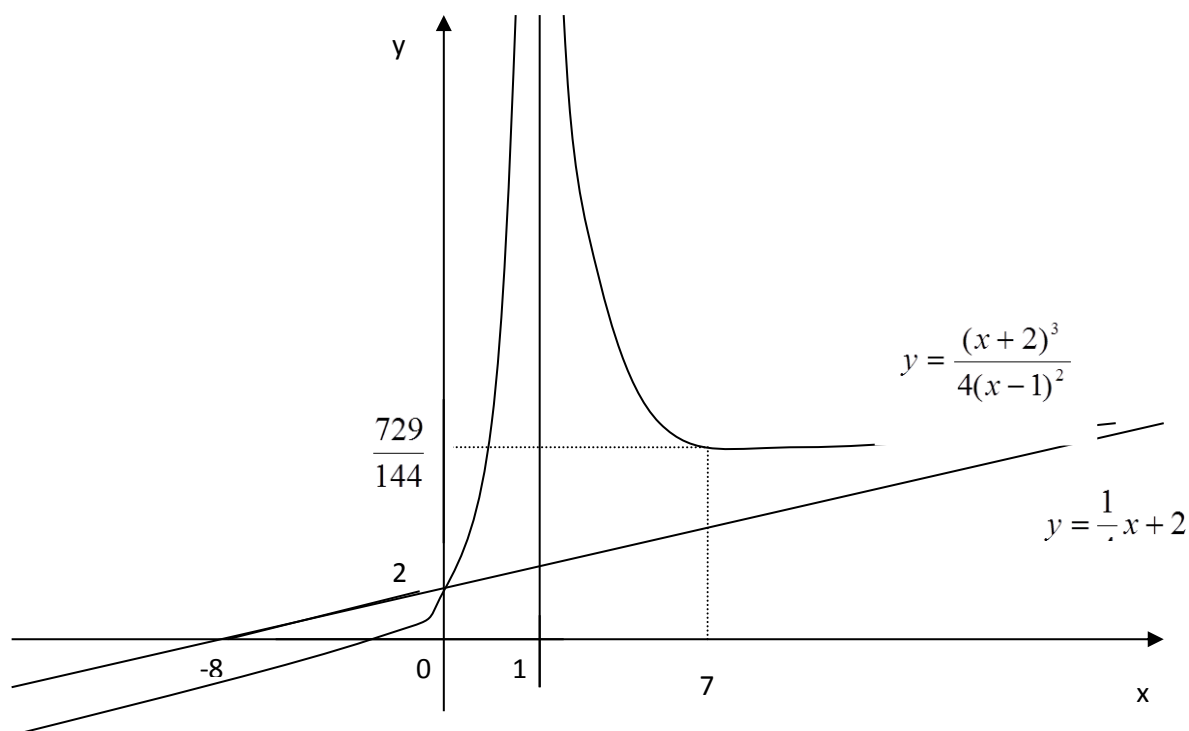
Дополнительные точки:

$$y(-3) \approx -0,01$$

$$y(3) \approx 7,8$$

$$y(-6) \approx -0,3$$

8. Построим график функции, используя результаты исследования.



Замечание:

При построении графика масштабы по оси OX и OY могут не совпадать.

Самостоятельно найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2x - x^2$ на отрезке $[0; 1]$.

Тема 13. Неопределенный интеграл

1 $\int dx = x + C;$

2 $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1;$

$$\begin{aligned}
3 \quad & \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C; \\
4 \quad & \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \qquad 4a \quad \int e^x dx = e^x + C; \\
5 \quad & \int \sin x dx = -\cos x + C; \\
6 \quad & \int \cos x dx = \sin x + C; \\
7 \quad & \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C; \\
8 \quad & \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C; \\
9 \quad & \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C; \\
10 \quad & \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| \sqrt{x^2 \pm a^2} + x \right| + C; \\
11 \quad & \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \\
12 \quad & \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;
\end{aligned}$$

Задание 1: Вычислить интеграл:

$$\begin{array}{lll}
\text{а) } \int \left(x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7 \right) dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}; & \text{в) } \int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx; \\
\text{г) } \int 3^{2-7x} dx; & \text{д) } \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx; & \text{е) } \int e^x \cdot \sin e^x dx; \\
\text{ж) } \int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx; & \text{з) } \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}} dx; & \text{и) } \int \frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x} dx; \\
\text{к) } \int x \cdot \operatorname{tg} x^2 dx; & \text{л) } \int \frac{3^x}{9^x+4} dx; & \text{м) } \int x^2 \cdot \cos x dx; \\
\text{н) } \int \arccos x dx; & \text{о) } \int \frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x} dx; & \text{п) } \int \frac{x^6}{x^2-x+1} dx; \\
\text{р) } \int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}; & \text{с) } \int \frac{3x dx}{\sqrt{3x^2-2} + \sqrt[4]{3x^2-2}}; & \text{т) } \int \cos 3x \cos 5x dx; \\
\text{у) } \int \sin^4 x dx; & \text{ф) } \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}; &
\end{array}$$

Решение:

а) Найдем интеграл, применив свойства неопределенного интеграла и формулы (1) и (2) табличного интегрирования:

$$\begin{aligned} \int \left(x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7 \right) dx &= \int \left(x^5 + 4 \cdot x^{-3} - x^{\frac{2}{3}} - 7 \right) dx = \int x^5 dx + 4 \int x^{-3} dx - \int x^{\frac{2}{3}} dx - 7 \int dx = \\ &= \frac{x^{5+1}}{5+1} + 4 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - 7x + C = \frac{x^6}{6} + 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 7x + C = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{x^2} - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5} - 7x + C; \end{aligned}$$

Интегралы (б – л) решим методом замены переменной.

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}} \left| \begin{array}{l} t = 1 + 2x; \\ dt = 2dx; \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt[4]{t^3}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{3}{4}} dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + C = 2(1+2x)^{\frac{1}{4}} + C = 2\sqrt[4]{1+2x} + C;$$

$$\text{в) } \int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^5 \\ dt = 5x^4 dx \\ x^4 dx = \frac{1}{5} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{5} dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{\sin^2 t} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (12)}

$$= -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} t + C = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} x^5 + C;$$

$$\text{г) } \int 3^{2-7x} dx = \left| \begin{array}{l} t = 2 - 7x, \\ dt = -7dx, \\ dx = -\frac{1}{7} dt \end{array} \right| = \int 3^t \cdot \left(-\frac{1}{7} \right) dt = -\frac{1}{7} \int 3^t dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (4)}

$$= -\frac{1}{7} \cdot \frac{3^t}{\ln 3} + C = -\frac{1}{7} \cdot \frac{3^{2-7x}}{\ln 3} + C;$$

$$\text{д) } \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{1}{1+x^2} dx \end{array} \right| = \int t dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$= \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C;$$

$$\text{е) } \int e^x \cdot \sin e^x dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \sin t dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (5)}

$$= -\cos t + C = -\cos e^x + C;$$

$$\text{ж) } \int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (8)}

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2} + C;$$

$$\text{з) } \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{(e^x)^2-(\sqrt{7})^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x, \\ dt = e^x dx, \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-(\sqrt{7})^2}} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (10)}

$$= \ln \left| \sqrt{t^2-(\sqrt{7})^2} + t \right| + C = \ln \left| \sqrt{e^{2x}-7} + e^x \right| + C;$$

$$\text{и) } \int \frac{\sin 5x dx}{9-\cos^2 5x} = \left| \begin{array}{l} t = \cos 5x \\ dt = -5 \sin 5x dx \\ \sin 5x dx = -\frac{1}{5} dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{5} dt}{9-t^2} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2-3^2} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (9)}

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3} \right| + C = \frac{1}{30} \ln \left| \frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3} \right| + C;$$

$$\kappa) \int x \cdot \operatorname{tg} x^2 dx = \int \frac{x \sin x^2}{\cos x^2} dx = \left. \begin{array}{l} t = \cos x^2 \\ dt = -2x \sin x^2 dx \\ x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (3)}

$$= -\frac{1}{2} \ln |t| + C = -\frac{1}{2} \ln |\cos x^2| + C;$$

$$\text{л)} \int \frac{3^x}{9^x + 4} dx = \int \frac{3^x}{(3^x)^2 + 2^2} dx = \left. \begin{array}{l} t = 3^x \\ dt = 3^x \ln 3 dx \\ 3^x dx = \frac{1}{\ln 3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{dt}{t^2 + 2^2} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (7)}

$$= \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2 \ln 3} \operatorname{arctg} \frac{3^x}{2} + C;$$

Самостоятельно: Найти интегралы, приводящиеся к табличным:

а) $\int (4 + 3x^2)^6 x dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}};$

в) $\int 2^x \sin 2^x dx;$

г) $\int \frac{x^3}{9 + x^8} dx;$

д) $\int \cos(5 - 2x) dx;$

е) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx;$

ж) $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} dx;$

Тема 14. Методы интегрирования

Задание 1: Вычислить интеграл:

$$b) \int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx;$$

$$e) \int e^x \cdot \sin e^x dx;$$

$$и) \int \frac{\sin 5x}{4 - \cos^2 5x} dx;$$

$$н) \int \arccos x dx;$$

$$o) \int \frac{x^2 + 3x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx;$$

$$п) \int \frac{x^6}{x^2 - x + 1} dx;$$

$$p) \int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2 \sin x)};$$

$$c) \int \frac{3x dx}{\sqrt{3x^2 - 2} + \sqrt[4]{3x^2 - 2}};$$

$$т) \int \cos 3x \cos 5x dx;$$

$$y) \int \sin^4 x dx;$$

$$ф) \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}};$$

$$м) \int x^2 \cdot \cos x dx;$$

Найдем интегралы (м – н) методом интегрирования по частям, используя формулу $\int U \cdot V' dx = U \cdot V - \int U' \cdot V dx$ (13):

$$\begin{aligned} m) \int x^2 \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} U = x^2; \quad U' = 2x \\ V' = \cos x; \quad V = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} U = 2x; \quad U' = 2 \\ V' = \sin x; \quad V = -\cos x \end{array} \right| = x^2 \cdot \sin x - (2x \cdot (-\cos x) - \int 2 \cdot (-\cos x) dx) = \end{aligned}$$

{для нахождения интеграла применим формулу (6)}

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C;$$

$$н) \int \arccos x dx = \left| \begin{array}{l} U = \arccos x; \quad U' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ V' = 1; \quad V = x \end{array} \right| = x \cdot \arccos x - \int x \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

{второе слагаемое вычислим с помощью замены, применив формулу (2)}

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ -x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\text{в итоге получаем } \int \arccos x dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C;$$

Самостоятельно вычислить интеграл $\int 2x \cos x dx$

Тема 15. Определенный интеграл Вычисление определенного интеграла

Пример. Вычислить определенный интеграл.

Решение. Поскольку при решении определенного интеграла используются табличные интегралы и правила как и при решении неопределенного интеграла, то результат вычислений данного задания получим как разность между полученной первообразной, вычисленной при значениях верхнего и нижнего пределов интегрирования.

$$\int_1^4 (x - x^2 + 4x - 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right) \Big|_1^4 = 4,5$$

Самостоятельно вычислить определенные интегралы:

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^2} dx;$$

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)^6 x dx;$$

Найти верхний предел, если $\int_1^* e^x dx = 1 - e.$,

Найти нижний предел интегрирования, если $\int_*^2 2\pi dx = 4\pi.$,

Найти нижний предел интегрирования, если $\int_*^3 (3x + 3) dx = \frac{45}{2}.$,

Найти нижний предел интегрирования, если $\int_*^2 3e^x dx = 3.$,

Найти путь, пройденный телом за 3 сек. от начала движения, если скорость тела $v(t) = 3t + 5$.

Найти верхний предел, если $\int_{-2}^* \frac{dx}{4 + x^2} = \frac{\pi}{4}.$

Найти верхний предел, если $\int_0^* 3x^2 dx = 27.$

Найти верхний предел, если $\int_{-3}^* (x + 3)^2 dx = \frac{8}{3}.$

Найти верхний предел, если $\int_0^* (x+3)^2 dx = \frac{98}{3}$.

Найти верхний предел, если $\int_{-1}^* (4-5x) dx = 4,5$.

Найти нижний предел интегрирования, если $\int_*^3 x^2 dx = 9$.

Найти путь, пройденный телом за промежуток времени $[0;1]$ сек., если скорость тела $v(t) = 3t^2 + 2t + 1$ (м/с).

Найти путь, пройденный телом за промежуток времени $[0;2]$ сек., если скорость тела $v(t) = 4t^3 + 1$ (м/с).

Вычислить:

в) $\int_0^1 \frac{x dx}{(5x^2 + 1)^2};$

е) $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 4} dx$

и) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg 3x \, dx;$

Тема 16. Приложения определенного интеграла Несобственные интегралы

Задание: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

а) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4}};$

Решение:

а) Несобственный интеграл I рода.

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 4 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \\ x_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 4 \\ x_2 = -\infty \Leftrightarrow t_2 = \infty \end{array} \right| = \int_4^{\infty} \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_4^b \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(t^{\frac{1}{2}} \Big|_4^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\sqrt{t} \Big|_4^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} (\sqrt{b} - 2) = \infty$$

- интеграл расходится.

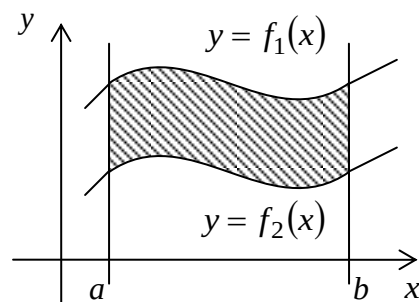
Задание : Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$;

Решение:

а) Существуют несколько формул для вычисления площадей плоских фигур.

Площадь фигуры, заданной в декартовой системе координат, ограниченной линиями $y = f_1(x)$ - сверху, $y = f_2(x)$ - снизу, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$



$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$$

определяется формулой (14);

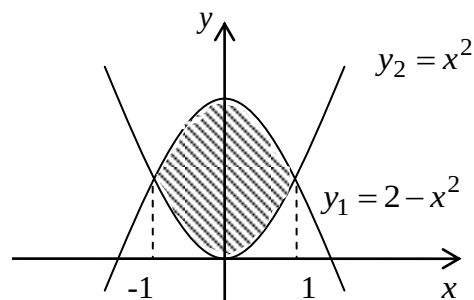
В нашем случае линии, ограничивающие фигуру, заданы в декартовых координатах, поэтому мы будем использовать формулу (14).

Найдем координаты точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 1 \Rightarrow a = -1; \quad b = 1.$$

$$S = \int_{-1}^1 ((2 - x^2) - x^2) dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx =$$



$$= 2 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) = \frac{8}{3};$$

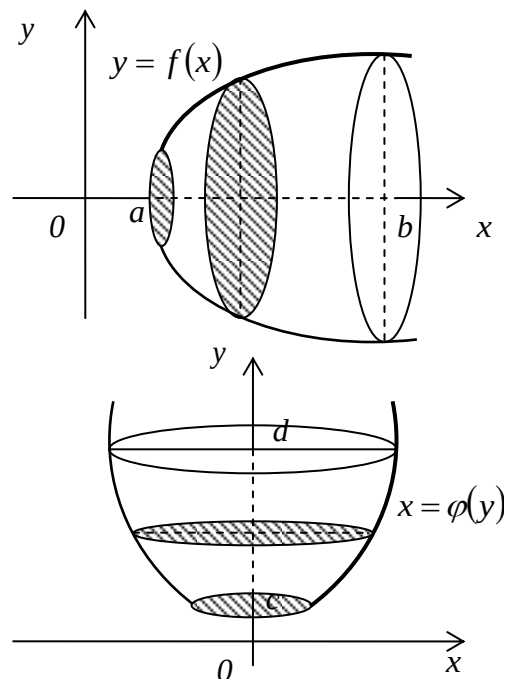
Задание: Вычислить: объем тела, полученного вращением фигуры $y = \sin x$; $y = 0$; $0 \leq x \leq \pi$, вокруг оси Ox .

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a; b]$. Тогда объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу Ox , определяется

формулой:
$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (20).$$

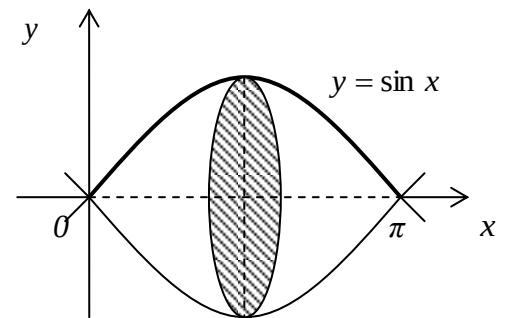
Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \phi(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ ($c < d$), то объём тела, образованного вращением этой трапеции

вокруг оси Oy , по аналогии с формулой (20), равен:
$$V_y = \pi \int_c^d \phi^2(y) dy \quad (21).$$



В условиях нашей задачи $y = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$

.



$$V_x = -\pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \left\{ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right\} =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos 2x dx \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \left(\left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Самостоятельно.: 1) Вычислить площади фигур, ограниченные линиями:

$$y = x^2, \quad y = 2 - x^2;$$

2) Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

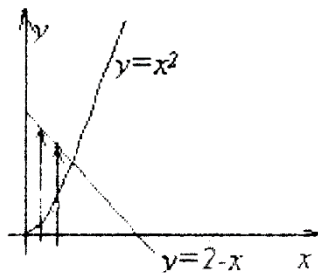
$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$$

Тема 17. Кратные интегралы

Задача1. Записать двойной интеграл в виде повторного и изменить порядок интегрирования, если область интегрирования $D: y = x^2; y = 2 - x; x \geq 0$.

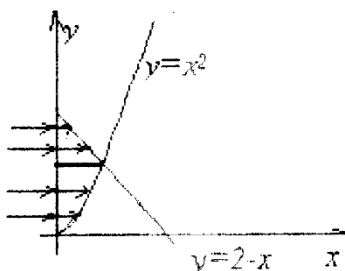
Решение. Область интегрирования D является правильной (простой) в направлении оси OY , т.к. любая прямая, параллельная оси OY , пересекает границу области D не более чем двух точках. Первую точку пересечения с линией $y = x^2$ назовем точкой входа, а линию - линией входа, ее уравнение $y = x^2$. Вторую точку пересечения с линией $y = 2 - x$ назовем точкой выхода, а линию - линией выхода. Тогда повторный интеграл в правой части составлен из двух определенных: первый берется по переменному y , оси которого OY параллельны секущие прямые, он называется внутренним. Пределы

интегрирования в нем зависят от x и совпадают с ординатами точек пересечения секущих с линией входа (нижний предел) и линией выхода (верхний предел интегрирования). При внутреннем интегрировании переменное x считается постоянным, поэтому его результатом является функция, которая после подстановки пределов интегрирования зависит от x . Второй интеграл по x берется от этой функции по переменному x , а пределы интегрирования в нем равны наименьшему (для нижнего) и наибольшему (для верхнего) значению проекций точек области D на ось OX :



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy$$

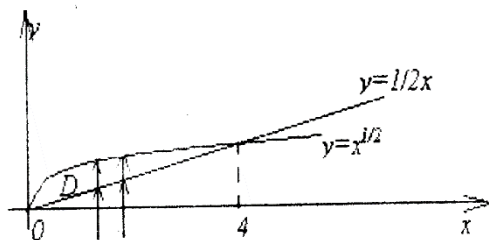
При изменении порядка интегрирования линия входа в область D имеет уравнение $x=0$, а линия выхода разбивается на две части, одна из которых имеет уравнение $\tilde{o} = \sqrt{o}$, а вторая – уравнение $\tilde{o} = 2 - o$. По свойству аддитивности двойного интеграла он разбивается на два, в каждом из которых сделана замена на повторный с внутренним интегрированием по переменному x , а внешним интегрированием по переменному y :



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{2-y}^0 f(x, y) dx$$

Задача 2. Вычислить двойной интеграл по области D , ограниченной графиками данных функций

$$\iint_D (x^2 - xy) dx dy; \quad y = \sqrt{x}; \quad y = \frac{1}{2}x.$$



Решение. Область интегрирования D является правильной (простой) в направлении оси OY , поэтому заменяем двойной интеграл повторным с внутренним интегралом по y , а внешним – по x . Линией входа в D является прямая $\phi = \frac{1}{2}\tilde{\phi}$, линией выхода – парабола $\phi = \sqrt{\tilde{\phi}}$. Вычисляем внутренний интеграл при постоянном x , применяя формулу Ньютона-Лейбница с нижним пределом $\frac{1}{2}\tilde{\phi}$ и верхним пределом $\sqrt{\tilde{\phi}}$. Находим точки пересечения параболы и прямой из решения системы

$$\begin{aligned} \phi &= \sqrt{\tilde{\phi}} \\ \phi &= \frac{1}{2}\tilde{\phi} \end{aligned} \quad \sqrt{\tilde{\phi}} = \frac{1}{2}\tilde{\phi}, \quad \tilde{\phi}^2 - 4\tilde{\phi} = 0, \quad \tilde{\phi}_1 = 0, \quad \tilde{\phi}_2 = 4$$

Полученные абсциссы точек пересечения и дают пределы интегрирования во

внутреннем интеграле.

Процесс сведения двойного интеграла к двухкратному сводится к следующему:

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2 - xy) dx dy &= \int_0^4 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} (x^2 - xy) dy = \int_0^4 \left(x^2 y - x \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} dx = \\ &= \int_0^4 \left(x^2 \sqrt{x} - x \frac{x}{2} - \left(x^2 \frac{1}{2} x - x \frac{1}{2} \frac{1}{4} x^2 \right) \right) dx = \int_0^4 \left(x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{8} x^3 \right) dx = \\ &= \left(\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{6} x^3 - \frac{3}{32} x^4 \right) \Big|_0^4 = \frac{2}{7} 128 - \frac{1}{6} 64 - \frac{3}{32} 256 = \frac{40}{21}.\end{aligned}$$

Самостоятельно

1. Изменить порядок интегрирования $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f(x, y) dx$.
2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy dx dy$ по области D, определяемой условиями $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = \frac{5}{2} \end{cases}$.

Тема 18. Криволинейные и поверхностные интегралы

Пример

1) Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода:

$$\int_L (x^3 + y) dl, \text{ где } L: y = x^3; 0 \leq x \leq 1.$$

Решение. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода может быть сведено к вычислению определенного интеграла, причем способ такого сведения зависит от представления кривой интегрирования L. Если L задана уравнением $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$, где функция $y = \varphi(x)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(x)$ для $x \in [a, b]$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$$

Если L задана параметрически: $x = \tilde{\alpha}(t)$, $y = \tilde{\alpha}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, где функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные $\tilde{\alpha}'(t)$, $y'(t)$, для $t \in [\alpha, \beta]$ то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Если L задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$ и функция $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную $\rho'(\varphi)$ для $\varphi \in [\alpha, \beta]$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi$$

В рассмотренном примере используется явное задание кривой L уравнением $y = x^3$. Поэтому, используя первый способ сведения интеграла по длине дуги к определенному, получим:

$$\begin{aligned} \int_L (x^3 + y) dl &= \int_0^1 (x^3 + x^3) \sqrt{1 + \left((x^3)'\right)^2} dx = 2 \int_0^1 (x^3 + y) \sqrt{1 + \left((x^3)'\right)^2} dx = \\ &= 2 \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \left. \begin{array}{l} t^2 = 1 + 9x^4 \\ 2tdt = 36x^3 dx \\ x_1 = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x_2 = 1 \Rightarrow t = \sqrt{10} \end{array} \right| = \\ &= 2 \int_1^{\sqrt{10}} \frac{1}{18} t \sqrt{t^2} dt = \frac{1}{9} \int_1^{\sqrt{10}} t^2 dt = \left. \frac{1}{9} \frac{t^3}{3} \right|_1^{\sqrt{10}} = \frac{1}{27} (\sqrt{1000} - 1). \end{aligned}$$

2) Вычислить работу силы $\vec{F} = x^2 \vec{i} + (x - y) \vec{j}$ при перемещении материальной точки по кривой $y = x^2$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

Решение. Работа переменной силы $\vec{F}(P(x, y), Q(x, y))$ по перемещению материальной точки по плоской кривой L с уравнением $y = \varphi(x)$ вычисляется с помощью криволинейного интеграла 2-го рода по координатам

$$A = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

который сводится к определенному интегралу с учетом способа задания кривой L . В приведенном примере кривая L задана явно уравнением

$y = x^2, 0 \leq x \leq 1$. Поэтому, по аналогии с переходом к определенному интегралу в предыдущем примере, достаточно заменить:

$y = x^2, dy = 2x dx$. Получим:

$$A = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_L x^2 dx + (x - y) dy = \int_0^1 x^2 dx + (x - x^2) 2x dx = \\ = \int_0^1 (3x^2 - 2x^3) dx = \left(x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример

Найти поверхностный интеграл 2-го рода $I = \iint_{\sigma} z^2 dydz + xz dydz + y dx dy$, где замкнутая поверхность σ состоит из внешней стороны части поверхности параболоида $\sigma_1 : x^2 + y^2 = 4 - z, z \geq 0$, а также из части плоскости $\sigma_2 : z = 0$.

Решение. Применяем формулу Остроградского-Гаусса к поверхностному интегралу 2-го рода I :

$$I = \iint_{\sigma} P dydz + Q dx dz + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

В векторной форме формула Остроградского-Гаусса имеет вид:

$$\vec{I} = \iint_{\sigma} \vec{a}_n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV,$$

где в левой части – поток Π векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность σ , а

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Но тогда $I = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a}(M) dV$, где векторное поле $\vec{a}(M)$ имеет вид:

$$\vec{a}(M) = z^2 \vec{i} + xz \vec{j} + y \vec{k}. \text{ Но } \operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial z^2}{\partial x} + \frac{\partial (xz)}{\partial y} + \frac{\partial y^2}{\partial z} = 0.$$

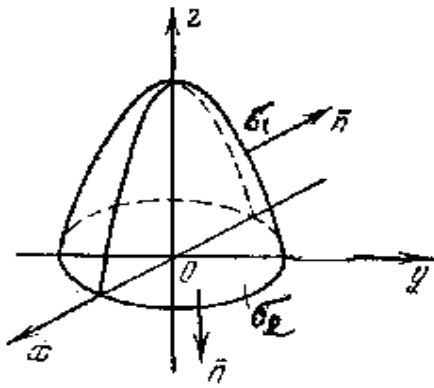


Рис. 3.

Следовательно, $I = \iiint_V 0 dV = 0$.

Пример Выяснить, является ли векторное поле

$\vec{a}(M) = (x + y)\vec{i} + (z - y)\vec{j} + 2(x + z)\vec{k}$ потенциальным.

Решение. Векторное поле $\vec{a}(M)$ – потенциально, если в каждой точке M из области определения поля $\text{rot } \vec{a}(M) = \vec{0}$. Находим

$$\text{rot } \vec{a}(M) = [\nabla, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k},$$

В этой формуле для удобства запоминания метода вычисления ротора использован формальный оператор Гамильтона «набла»:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

действующий по правилу нахождения векторного произведения в прямоугольных декартовых координатах.

Для других типов полей, исследуемых в задании 8, приведем их определения:

Соленоидальное поле $\vec{a}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ в каждой точке М области V удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M) = 0.$$

Гармоническое поле $\vec{a}(M)$ является в каждой точке области V одновременно потенциальным и соленоидальным, то есть $\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \vec{0}$ и $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$

В нашем случае $\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0.$ Тогда

$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = (0-1)\vec{i} + (0-2)\vec{j} + (0-1)\vec{k} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \neq \vec{0},$ следовательно, поле $\vec{a}(M)$ не является потенциальным.

Самостоятельно: Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L \frac{x}{y} d\ell,$

если L – дуга окружности $x = 2 \sin t, y = 2 \cos t, \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$

Тема 19. Простейшие дифференциальные уравнения

Пример. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{ydy}{y^2+1} = \frac{-xdx}{1-x^2}.$

Решение. Поскольку в уравнении переменные уже разделены. То достаточно проинтегрировать его правую и левую части. Получим

$$\int \frac{ydy}{y^2+1} = -\int \frac{xdx}{1-x^2}, \ln(y^2+1) = 0.5 \ln|x^2-1| + 0.5 \ln c \quad \text{Ответ: } y = \pm \sqrt{c|x^2-1|-1}$$

Пример. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$$

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду $y(1-x^2)dy = -x(y^2+1)dx.$ Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{ydy}{y^2+1} = \frac{-xdx}{1-x^2}. \quad \text{Интегрируем обе части последнего равенства:}$$

$\int \frac{ydy}{y^2+1} = -\int \frac{x dx}{1-x^2}, \ln(y^2+1) = 0.5 \ln|x^2-1| + 0.5 \ln c$. На основе свойств логарифмов и

метода потенцирования, получаем ответ $y = \pm \sqrt{c|x^2-1|-1}$

Пример. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

а) $(xy+y)dx + (xy+x)dy = 0$.

Решение. Попробуем разделить переменные интегрирования. Для этого вынесем за скобки общий множитель: $y(x+1)dx + x(y+1)dy = 0$, разнесем

слагаемые: $y(x+1)dx = -x(y+1)dy$; выражая $\frac{dy}{dx}$ из полученного уравнения

убедимся в том, что $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$ и, значит, наше уравнение является

дифференциальным уравнением в разделяющихся переменных. Разделим

переменные. $\left(\frac{1}{x}+1\right)dx = -\left(\frac{1}{y}+1\right)dy$.

Проинтегрируем получившееся выражение по соответствующим

переменным: $\int \left(\frac{1}{x}+1\right)dx = -\int \left(\frac{1}{y}+1\right)dy$.

Получим $\ln|x|+x = -\ln|y|-y + \ln C, \Rightarrow \ln|xy| + \ln e^{x+y} = \ln C$.

Таким образом, мы убедились в том, что $xye^{x+y} = C$ - общий интеграл заданного уравнения.

Ответ: $xye^{x+y} = C$.

б) $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$.

Решение. Убедимся в том, что переменные разделить не удастся. Поэтому поделим обе части уравнения на x .

$y' = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$ - Убедимся в том, что производная $\frac{dy}{dx}$ в представленном уравнении зависит только от отношения $\frac{y}{x}$, то есть $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ и, значит, это однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Будем решать его с помощью соответствующей замены.

Введем новую переменную $\frac{y}{x} = U$; $y' = U'x + U$.

$$U'x + U = \sin U + U;$$

$$U'x = \sin U;$$

$$\frac{dU}{\sin U} = \frac{dx}{x}; \text{ проинтегрируем выражение}$$

$$\int \frac{dU}{\sin U} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{U}{2} \right| = \ln |x| + \ln C;$$

$$\left| \operatorname{tg} \frac{U}{2} \right| = |x|C;$$

$$\left| \operatorname{tg} \frac{y}{2x} \right| = |x|C;$$

$y = 2x \cdot \operatorname{arctg} x C$ - общее решение уравнения.

Ответ: $y = 2x \cdot \operatorname{arctg} x C$.

Задание 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = x^2$.

Решение. Так как производная в данном случае является функцией, зависящей только от переменной x , то его решение может быть получено в результате последовательного интегрирования:

$$y'' = x^2 \Rightarrow y' = x^3 / 3 + C_1 \Rightarrow y = x^4 / 12 + C_1 x + C_2.$$

Ответ. $y = x^4 / 12 + C_1 x + C_2$.

Решить самостоятельно и проверить себя по ответу:

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1.

1.1. $e^{x+3y}dy = xdx$. (Ответ: $e^{3y} = 3(C - xe^{-x} - e^{-x})$.)

1.2. $y'\sin x = y \ln y$. (Ответ: $\ln y = C \operatorname{tg}(x/2)$.)

1.3. $y' = (2x - 1) \operatorname{ctg} y$. (Ответ: $\ln |\cos y| = x - x^2 + C$.)

1.4. $\sec^2 x \operatorname{tg} y dy + \sec^2 y \operatorname{tg} x dx = 0$. (Ответ: $C = \operatorname{tg} y \operatorname{tg} x$.)

Тема 20. Линейные дифференциальные уравнения

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}; y(0) = 1; y'(0) = 1$.

Решение. $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$ - неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами 2-ого порядка. Решение будем искать в виде суммы решений: общего решения однородного уравнения $\bar{y}$ и частного решения неоднородного уравнения y^* , которое будем искать по виду правой части. Начнем с отыскания $\bar{y}$.

$$y'' + 2y' - 3 = 0 \quad \text{Составим характеристическое уравнение:}$$

$$k^2 + 2k - 3 = 0; \quad k_1 = 1; k_2 = -3.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения: $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$.

y^* будем искать в виде $A \cdot e^{2x}$. y^* - частное решение уравнения, поэтому оно превращает его в верное числовое тождество. Подставим его в уравнение и вычислим A . $(y^*)' = 2Ae^{2x}; (y^*)'' = 4Ae^{2x}$.

$4Ae^{2x} + 4Ae^{2x} - 3Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow A = 0,2$. Значит $y^* = 0,2e^{2x}$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения $y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + 0,2e^{2x}$. Для вычисления частного решения определим значения констант исходя из начальных условий:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + 0,2e^{2x}; \quad y' = C_1 e^x - 3C_2 e^{-3x} + 0,4e^{2x}; \quad y(0) = 1; y'(0) = 1;$$

$$1 = C_1 e^0 + C_2 e^{-3 \cdot 0} + 0,2e^{2 \cdot 0}; \quad 1 = C_1 e^0 - 3C_2 e^{-3 \cdot 0} + 0,4e^{2 \cdot 0};$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + 0,2 \\ 1 = C_1 - 3C_2 + 0,4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0,75 \\ C_2 = 0,05 \end{cases}$$

Ответ: $y = 0.75e^x + 0.05e^{-3x} + 0,2e^{2x}$.

Самостоятельно:

1) $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$

2) $y''' + 3y'' + 2y' = 0$

Раздел 7. Элементы теории поля

Тема 21. Теория поля.

Скалярное и векторное поля. Поверхности уровня и градиент скалярного поля. Векторное поле, векторные линии. Дивергенция векторного поля.

Циркуляция и ротор векторного поля

Раздел 8. Ряды

Тема 22. Числовые ряды

Числовой ряд. Сумма ряда. Необходимый признак сходимости ряда. Остаток ряда. Знакопостоянные ряды. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости. Признак сравнения. Признак Даламбера. Признак Коши. Интегральный признак Коши. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.

Тема 23. Степенные и функциональные ряды

Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена.

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора

Раздел 9. Элементы Теории функции комплексного переменного

Тема 24. Теория функции комплексного переменного

Понятие комплексного числа, основные определения. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Геометрическое изображение комплексных чисел. Действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме. Элементарные функции комплексного переменного.

Раздел 10. Основы вероятностного анализа

Тема 25. Теория вероятностей

Основные определения. Классическое определение вероятности. Элементы

комбинаторики. Операции над событиями и основные теоремы. Формула полной вероятности и формула Байеса. Повторные независимые испытания. Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин.

Тема 26. Элементы математической статистики

Доверительные интервалы. Генеральная совокупность. Приложения. Статистические таблицы.

Тема 21. Теория поля.

Пример 1. а) Найти величину и направление наибольшего изменения поля

$$U(M) = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2 \quad \text{в точке } M_0(1,1,1).$$

Решение. Доказано, что скалярное поле $U(M)$ имеет в данной точке M_0

максимальную производную по направлению $\frac{\partial U}{\partial l}(M_0)$, которая равна

модулю градиента поля U в этой точке:

$$\max \frac{\partial U}{\partial l}(M_0) = |\text{grad}U(M_0)|,$$

если за вектор $\vec{l}$, указывающий направление дифференцирования, взять направление вектора $\text{grad}U(M_0)$. Поэтому в задаче требуется найти сам вектор

$$\text{grad}U(M_0) = \frac{\partial U}{\partial x}(M_0)\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)\vec{k}.$$

Приведем соответствующие вычисления:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(M) = 10xyz - 7y^2z + 5yz^2, \quad \frac{\partial U}{\partial x}(M_0) = 10 - 7 + 5 = 8,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(M) = 5x^2z - 14xyz + 5xz^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(M_0) = 5 - 14 + 5 = -4,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(M) = 5x^2y - 7xy^2 + 10xyz, \quad \frac{\partial U}{\partial z}(M_0) = 5 - 7 + 10 = 8,$$

$$\text{grad}U(M_0) = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \text{grad}U}(M_0) = \max \frac{\partial U}{\partial l}(M_0) = |\text{grad}U(M_0)| = \sqrt{8^2 + (-4)^2 + 8^2} = 12$$

б) Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}(M) = (x+y)\vec{i} + (z-y)\vec{j} + 2(x+z)\vec{k}$ потенциальным.

Решение. Векторное поле $\vec{a}(M)$ – потенциально, если в каждой точке M из области определения поля $\text{rot } \vec{a}(M) = \vec{0}$. Находим

$$\text{rot } \vec{a}(M) = [\nabla, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k},$$

В этой формуле для удобства запоминания метода вычисления ротора использован формальный оператор Гамильтона «набла»:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

действующий по правилу нахождения векторного произведения в прямоугольных декартовых координатах.

Для других типов полей, исследуемых в задании 8, приведем их определения:

Соленоидальное поле $\vec{a}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ в каждой точке M области V удовлетворяет условию

$$\text{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M) = 0.$$

Гармоническое поле $\vec{a}(M)$ является в каждой точке области V одновременно потенциальным и соленоидальным, то есть $\text{rot} \vec{a}(M) = \vec{0}$ и $\text{div} \vec{a}(M) = 0$

В нашем случае $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial R}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial R}{\partial y} = 0$. Тогда

$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = (0-1)\vec{i} + (0-2)\vec{j} + (0-1)\vec{k} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \neq \vec{0}$, следовательно, поле $\vec{a}(M)$ не является потенциальным.

Пример 2: Найти производную скалярного поля

$U(x, y, z) = \ln(1+x^2+y^2) - \sqrt{x^2+z^2}$ в точке $M(3; 1; 4)$ по направлению

- вектора $\vec{s} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$
- нормали к поверхности $\sigma: x^2 + 6x + 9y^2 + z^2 = 4z$, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz
- перпендикулярному к поверхности уровня функции $U(x, y, z)$, проходящей через точку $M_1(0, 0, 1)$.

Решение:

Производную по направлению ищем по формуле:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = (\operatorname{grad} U \cdot \vec{l}^0) = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \cos \gamma$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{1+x^2+y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_M = \frac{6}{11} - \frac{3}{5} = -\frac{3}{55}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_M = \frac{2}{11}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_M = -\frac{4}{5}$$

а. Найдем вектор $\vec{l}^0 = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}$, т.е. $\vec{l}^0 = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$,

Т.к. $|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$, тогда получаем $\vec{l}^0 = \left\{ \frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}} \right\}$.

Таким образом

$$\left. \frac{\partial U}{\partial l} \right|_M = -\frac{3}{55} \cdot \frac{2}{\sqrt{17}} + \frac{2}{11} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{17}} \right) - \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{17}} \right) = \frac{52}{55\sqrt{17}} = \frac{52\sqrt{17}}{935}.$$

б. Найдем вектор $\bar{l}^0 = \cos \alpha \cdot \bar{i} + \cos \beta \cdot \bar{j} + \cos \gamma \cdot \bar{k}$, т.е. $\bar{l}^0 = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|}$, где $\bar{N}$ - вектор нормали к поверхности σ .

$$F(x, y, z) = x^2 + 6x + 9y^2 + z^2 - 4z = 0$$

$$\text{Тогда } \bar{N} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\},$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_M = (2x + 6)|_M = 12$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_M = 18y|_M = 18$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_M = (2z - 4)|_M = 4$$

$$\text{Получаем } \bar{N} = \{12, 18, 4\}, |\bar{N}| = \sqrt{12^2 + 18^2 + 4^2} = 22, \bar{l}^0 = \left\{ \frac{6}{11}, \frac{9}{11}, \frac{2}{11} \right\}.$$

Заметим, что $\cos \gamma > 0$, то найденный вектор образует острый угол с осью Oz , следовательно, требование задачи выполнено.

Таким образом

$$\left. \frac{\partial U}{\partial l} \right|_M = -\frac{3}{55} \cdot \frac{6}{11} + \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{11} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{11} = -\frac{16}{605}.$$

в. Найдем поверхность уровня функции $U(x, y, z)$, проходящей через точку M_1 :

$$U(x, y, z) = C = \ln(1 + 0 + 0) - \sqrt{0 + 1} = -1.$$

$$\text{Получаем поверхность } \sigma_1: \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2} = -1.$$

Аналогично предыдущему пункту находим вектор $\bar{l}^0 = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|}$, где $\bar{N}$ - вектор

перпендикулярный поверхности уровня σ_1

$$F(x, y, z) = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2} + 1 = 0$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_M = \frac{6}{11} - \frac{3}{5} = -\frac{3}{55},$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_M = \frac{2}{11},$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_M = -\frac{4}{5}$$

$$\vec{N} = \left\{ -\frac{3}{55}, \frac{2}{11}, -\frac{4}{5} \right\}, |\vec{N}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{55}\right)^2 + \left(\frac{2}{11}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{2045}}{55},$$

$$\vec{l}^0 = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{2045}}, \frac{10}{\sqrt{2045}}, -\frac{44}{\sqrt{2045}} \right\}$$

Таким образом

$$\left. \frac{\partial U}{\partial l} \right|_M = \left(-\frac{3}{55}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{2045}}\right) + \frac{2}{11} \cdot \frac{10}{\sqrt{2045}} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{44}{\sqrt{2045}}\right) = \frac{2045}{55\sqrt{2045}} = \frac{\sqrt{2045}}{55}.$$

Пример 3. Найти градиент скалярного поля $U(x, y, z)$

а. $U(x, y, z) = x^2 - y^2 + y \cdot z - x$

б. $U(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Построить поверхности уровня для заданных значений $U(x, y, z) = 0, \pm 1$.

Решение

а. По определению градиента скалярного поля $\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{k}$.

Находим частные производные функции $U(x, y, z)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x - 1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -2y + z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = y$$

Таким образом $\text{grad}U = (2x - 1) \cdot \vec{i} + (-2y + z) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$.

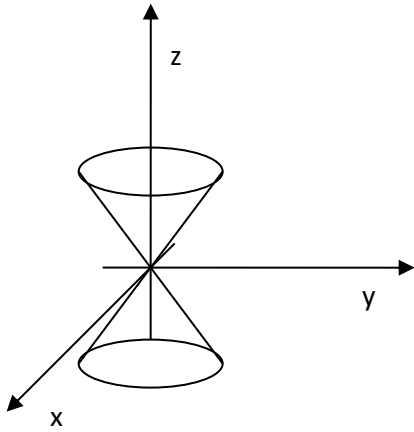
б. Аналогично пункту а), получим:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -2z$$

Таким образом $\text{grad}U = 2x \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} - 2z \cdot \vec{k}$.

Построим поверхности уровня: $U(x, y, z) = 0$

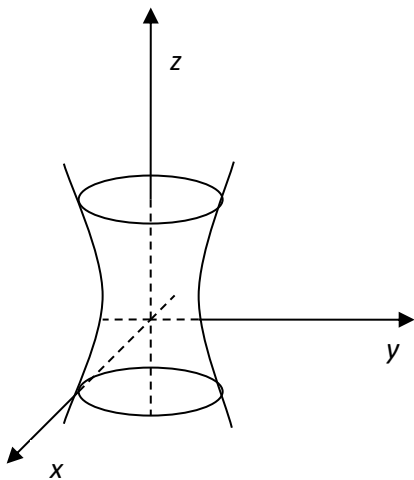
Тогда $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 = z^2$ - конус с вершиной в начале координат.



Если $U(x, y, z) = \pm 1$, то $x^2 + y^2 = z^2 \pm 1$:

$$U(x, y, z) = 1$$

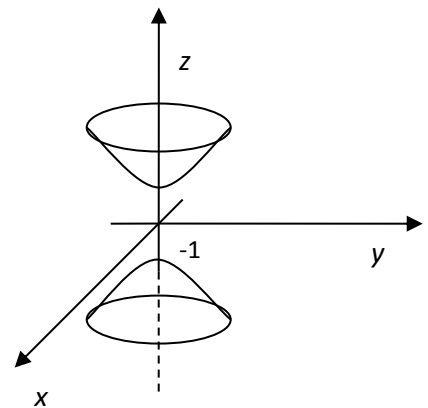
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$



Однополостный
гиперболоид вращения
вокруг оси Oz

$$U(x, y, z) = -1$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1$$



Двуполостный
гиперболоид вращения
вокруг оси Oz

Пример 4. Доказать, что векторное поле $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$ является потенциальным.

Решение:

Необходимым и достаточным условием потенциальности поля является равенство нулю вихря поля. В нашем случае

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1)\vec{i} - (1-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = \vec{0}.$$

Таким образом, поле является потенциальным.

Тема 22. Числовые ряды

Пример 1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 4n + 3}{100n^2 + 1} \right)^2.$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 4n + 5}{3^n \cdot (n+1)}.$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n \cdot (2n+3)}.$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{15n^2 + 6n + 4}{3n + 2 + 12n^2} \right)^n.$

д) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}.$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt[3]{n^7} + n}.$

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \right)$

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3} + 5}.$

Решение.

а) В данном случае $a_n = \left(\frac{n^2 - 4n + 3}{100n^2 + 1} \right)^2.$

Вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 4n + 3}{100n^2 + 1} \right)^2 = \left(\frac{1}{100} \right)^2 \neq 0.$

Следовательно, ряд расходится.

б) Поскольку в записи общего члена ряда есть показательная функция 3^n , то используем признак Даламбера.

Для рассматриваемого ряда

$$a_n = \frac{n^2 - 4n + 5}{3^n \cdot (n+1)}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 4(n+1) + 5}{3^{n+1} \cdot ((n+1)+1)}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - 4(n+1) + 5}{3^{n+1} \cdot ((n+1)+1)} : \frac{n^2 - 4n + 5}{3^n \cdot ((n+1)+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - 4(n+1) + 5}{n^2 - 4n + 5} \cdot \frac{3^n \cdot (n-1)}{3^{n+1} \cdot ((n+1)+1)} = \frac{1}{3} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, по признаку Даламбера, исходный ряд сходится.

в) Так как в записи общего члена ряда есть факториал ($n!$), то используем признак Даламбера. Для исследуемого ряда

$$a_n = \frac{n!}{5^n \cdot (2n+3)}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1} \cdot (2(n+1)+3)}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{5^{n+1} \cdot (2(n+1)+3)} : \frac{n!}{5^n \cdot (2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{5^n}{5^{n+1}} \cdot \frac{2n+3}{(2(n+1)+3)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)}{n! \cdot 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{5} = \infty. \end{aligned}$$

В пределе получили бесконечность, следовательно, исследуемый ряд расходится.

г) Воспользуемся радикальным признаком Коши. Здесь

$$a_n = \left(\frac{15n^2 + 6n + 4}{3n + 2 + 12n^2} \right)^n.$$

Вычислим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{15n^2 + 6n + 4}{3n + 2 + 12n^2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{15n^2 + 6n + 4}{3n + 2 + 12n^2} \right) = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} > 1.$$

Полученное значение больше 1, следовательно, ряд расходится.

д) Исследуем данный ряд с помощью интегрального признака Коши.

Составим соответствующий интеграл и вычислим его

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx = \left. \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ x = 2 \Rightarrow t = \ln 2 \\ x = b \Rightarrow t = \ln b \end{array} \right| = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t^2} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} \Big|_{\ln 2}^{\ln b} \right) =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Интеграл сходится, следовательно, исследуемый ряд сходится.

е) Составим ряд, эквивалентный исходному, оставив в числителе и знаменателе лишь старшие степени n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{2\sqrt[3]{n^7}+n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{n^{7/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/3-1/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/6}}.$$

Полученный ряд эквивалентен исходному, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}+3}{2\sqrt[3]{n^7}+n} : \frac{1}{n^{11/6}} = \frac{1}{2} \neq 0, \neq \infty$$

Таким образом, исходный ряд и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/6}}$ сходятся и расходятся

одновременно. Т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/6}} \left(\frac{11}{6} > 1 \right)$ сходится, следовательно, исходный ряд также сходится.

ж) Так как $\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{n^{4/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}}$ расходится $\left(\frac{5}{6} < 1\right)$, следовательно, исходный ряд также расходится.

з) Оценим общий член ряда:

$$0 < \sin^2 n < 1 \Rightarrow 0 < \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3} + 5} < \frac{1}{\sqrt{n^3} + 5}.$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3} + 5} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится $\left(\frac{3}{2} > 1\right)$, следовательно, эквивалентный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3} + 5}$

также сходится. Т.к. из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего, то исходный ряд сходится.

Пример2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n}{(x-2)^n n^3}.$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \cdot 3^{n+1}}{|x-2|^{n+1} \cdot (n+1)^3} : \frac{(n+1) \cdot 3^n}{|x-2|^n \cdot n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \cdot 3^{n+1} \cdot |x-2|^n \cdot n^3}{(n+1)3^n \cdot |x-2|^{n+1} \cdot (n+1)^3} = \frac{3}{|x-2|}.$$

Ряд сходится, если $\frac{3}{|x-2|} < 1 \Rightarrow |x-2| > 3$

$$x-2 > 3 \text{ или } x-2 < -3;$$

$$x > 5 \text{ или } x < -1,$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty).$$

Ряд расходится, если $\frac{3}{|x-2|} > 1 \Rightarrow x \in (-1; 5).$

Неопределенный случай: $\frac{3}{|x-2|} = 1$, т.е. $x = 5$ или $x = -1$,

Пусть $x = 5$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)3^n}{3^n n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - сходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^3}$ сходится как эквивалентный сходящемуся ряду.

Пусть $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)3^n}{(-3)^n n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n^3}$.

Этот ряд – знакочередующийся. Исследуя его на абсолютную сходимость (рассматриваем ряд, состоящий из абсолютных величин), получим ряд как и при $x = 5$, а он сходится. Т.к. ряд, состоящий из абсолютных величин, сходится, то данный ряд сходится абсолютно.

Получили, что $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$ - область сходимости ряда.

Тема 23. Степенные и функциональные ряды

Пример 1. Найти три первые (отличные от 0) члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши $y' - e^{-x}y = 2x$, $y(0) = 1$.

Решение.

Для представления решения в виде ряда Маклорена необходимо найти первые три отличные от нуля значения $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0), \dots$. По условию задачи $y(0) = 1$. Выразим из уравнения y' :

$$y' = e^{-x}y + 2x; \quad (*)$$

$$y'(0) = e^{-0} \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1.$$

Найдем y'' , продифференцировав обе части равенства (*) по x :

$$y'' = (e^{-x}y + 2x)' = -e^{-x}y + e^{-x}y' + 2;$$

$$y''(0) = -e^{-0} \cdot 1 + e^{-0} \cdot 1 + 2 = 2.$$

Окончательно получим:

$$y = 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{2}{2!} x^2 = 1 + x + x^2.$$

Пример 2. Вычислить с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ интеграл $\int_0^1 x \cdot \sin \sqrt{x} dx$.

Решение. Запишем разложение функции $y = x \cdot \sin \sqrt{x}$ в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned}\sin \sqrt{x} &= \left| t = \sqrt{x} \right| = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} - \dots + \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \\ &= \frac{\sqrt{x}}{1!} - \frac{\sqrt{x^3}}{3!} + \frac{\sqrt{x^5}}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n-1}{2}}}{(2n-1)!} + \dots \\ x \sin \sqrt{x} &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1!} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n-1}{2}+1}}{(2n-1)!} + \dots\end{aligned}$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \cdot \sin \sqrt{x} dx &= \int_0^1 \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1!} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx = \\ &= \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{3! \cdot \frac{7}{2}} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{5! \cdot \frac{9}{2}} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n+1}{2}+1}}{(2n-1)! \left(\frac{2n+1}{2} + 1 \right)} + \dots \right) \Bigg|_0^1 = \\ &= \frac{1}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6 \cdot \frac{7}{2}} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2}} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{11}{2}} - \dots = \\ &= \frac{2}{5} - \frac{1}{21} + \frac{1}{540} - \frac{1}{27720} - \dots \approx \frac{2}{5} - \frac{1}{21} + \frac{1}{540} (\pm 10^{-3}) = \\ &= \frac{1512 - 180 + 7}{3780} = \frac{1339}{3780} = 0,354 (\pm 10^{-3}).\end{aligned}$$

Заметим, что при вычислении интеграла получаем знакочередующийся ряд.

Мы отбрасываем при вычислении все слагаемые, начиная со слагаемого,

меньшего по абсолютной величине заданной точности $\left(\frac{1}{27720} < 10^{-3} \right)$.

Тема 24. Теория функции комплексного переменного

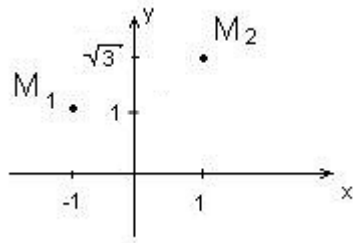
Задание 1.

1) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

2) Найти: а). $\bar{z}_1 \cdot z_2^2$; б). $\frac{z_2}{z_1}$; в). $\sqrt[3]{z_1}$

Решение.

1) Изобразим числа на комплексной плоскости. При этом числу $z_1 = -1 + i$ будет соответствовать точка $M_1(-1; 1)$, числу $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ - точка $M_2(1; \sqrt{3})$.



Для нахождения модуля и аргумента заданных чисел воспользуемся формулами:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ и } \varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{при } x > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{при } x < 0, y > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{при } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Получим:

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi_1 = \arg z_1 = \operatorname{arctg} \frac{-1}{1} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4},$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2, \quad \varphi_2 = \arg z_2 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической и показательной применим формулы:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ и } z = re^{i\varphi}.$$

Используя ранее полученные результаты, получим:

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right),$$

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}},$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$z_2 = 2 e^{i \frac{\pi}{3}}.$$

$$\begin{aligned}
 2) \text{ а) } \bar{z}_1 \cdot z_2^2 &= (-1-i) \cdot (1+\sqrt{3}i)^2 = (-1-i) \cdot (1^2 + 2\sqrt{3}i + (\sqrt{3}i)^2) = (-1-i) \cdot (1+2\sqrt{3}i-3) = \\
 &= (-1-i) \cdot (2\sqrt{3}i-2) = -2\sqrt{3}i + 2 - 2\sqrt{3}i^2 + 2i = -2\sqrt{3}i + 2 + 2\sqrt{3} + 2i = \\
 &= (2+2\sqrt{3}) + (2-2\sqrt{3})i;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 б) \frac{z_2}{z_1} &= \frac{1+\sqrt{3}i}{-1+i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-i-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i^2}{(-1)^2-i^2} = \frac{-1-i-\sqrt{3}i+\sqrt{3}}{1+1} = \\
 &= \frac{-1+\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i;
 \end{aligned}$$

в) Применим формулу $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, \dots, (n-1).$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right)$$

$$\text{при } k=0: \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi/4}{3} + i \sin \frac{3\pi/4}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right);$$

$$\text{при } k=1: \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right);$$

$$\begin{aligned}
 \text{при } k=2: \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 4\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 4\pi}{3} \right) &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) = \\
 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{12} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Задание 2. Определить вид кривой $z = 5tgt - 3i \sec t$.

Решение.

$$z(t) = x(t) + iy(t) = 5tgt - 3i \sec t.$$

$$\text{Откуда } \begin{cases} x = 5tgt, \\ y = -3 \sec t. \end{cases}$$

$$\text{Выразим } t \text{ из каждого уравнения: } \begin{cases} t = \operatorname{arctg} \frac{x}{5}, \\ t = \arccos \left(-\frac{3}{y} \right). \end{cases}$$

Исключим t из уравнений:

$$\arccos\left(-\frac{3}{y}\right) = \operatorname{arctg} \frac{x}{5}.$$

$$\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{y}\right)\right) = \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{5}\right),$$

$$\cos\left(\pi - \arccos \frac{3}{y}\right) = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5^2}}, \quad -\frac{3}{y} = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5^2}},$$

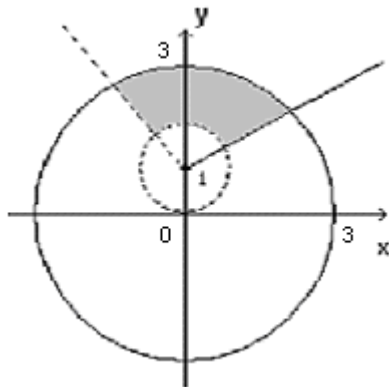
$$\frac{25y^2}{9} = x^2 + 25,$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1 \text{ - уравнение гиперболы.}$$

Задание 3. Построить область плоскости z , определяемую данными неравенствами:

$$\begin{cases} 1 < |z - i| \leq 3, \\ \frac{\pi}{6} \leq \arg(z - i) < \frac{2\pi}{3}; \end{cases}$$

Искомым множеством является пересечение кольца $1 < |z - i| \leq 3$ и внутренней части угла $\frac{\pi}{6} \leq \arg(z - i) < \frac{2\pi}{3}$:



Тема 25. Теория вероятностей

Задача 1. Бросается 4 монеты. Какова вероятность того, что три раза выпадет «решка»?

Решение. Подбрасывание монеты будем считать одним опытом. По условию задачи производится 4 одинаковых испытания. Вероятность успеха (выпадение «решки») в каждом испытании равна $p = 0.5$; $q = 1 - p = 0.5$.

Требуется найти, что среди проведенных испытаний будет $k = 3$ успешных. Для решения задачи воспользуемся формулой биномиального закона распределения дискретной случайной величины. $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. В условиях нашей задачи $P_4(3) = C_4^3 0.5^3 0.5^{4-3} = 4 * 0.5^4 = 0.25$.

Ответ: 0.25.

Задача 2. Монета подброшена 5 раз. Какова вероятность, что герб появится не более 2 раз?

Решение: В этой задаче $n = 5$, $p = 0,5$. По формуле Бернулли находим вероятность события $m \leq 2$.

$$\begin{aligned} P(m \leq 2) &= P(m = 0 \text{ или } m = 1 \text{ или } m = 2) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = \\ &= C_5^0 (0,5)^0 (0,5)^5 + C_5^1 (0,5)^1 (0,5)^4 + C_5^2 (0,5)^2 (0,5)^3 = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} = 0,5. \end{aligned}$$

Задача 3. Вероятность поражения мишени при каждом выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах мишень будет поражена ровно 8 раз. Изменится ли вероятность попадания, если число выстрелов и поражений мишени увеличится в 10 раз?

Решение. Вероятность поражения мишени при одном выстреле постоянна $p = 0.75 \Rightarrow q = 1 - 0.75 = 0.25$; $n = 10$; $k = 8$. Воспользовавшись формулой Бернулли, найдем:

$$P_{10}(8) = \frac{10!}{8!2!} 0.75^8 0.25^2 = 45 * 0.1001 * 0.0625 = 0.281;$$

Тема 26. Элементы математической статистики

Задача 1. Дан ряд распределения дискретной случайной величины Y .

Определить значение x и вычислить математическое ожидание дискретной случайной величины Y .

Y	5	6	7	10
p	0,1	0,1	x	0,3

Решение. Найдем значение x из условия $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, $0,1 + 0,1 + x + 0,3 = 1 \Rightarrow x = 0,5$.

Зная x , становится возможным вычисление математического ожидания.

$$M(Y) = \sum_{i=1}^n Y_i p_i = 5 * 0,1 + 6 * 0,1 + 7 * 0,5 + 10 * 0,3 = 7,6$$

Ответ: $x = 0,5$; $M(Y) = 7,6$.

Задача 2. $DX = 3$. Используя свойства дисперсии, найдите $D(4X-2)$.

Решение. $D(AX + B) = A^2 D(X) \rightarrow D(4X - 2) = 4^2 D(X) = 16 \cdot 3 = 48$.

Ответ: 48.

Мода – значение признака, наиболее часто встречающееся в ряду распределения. Мода определяется различными способами в зависимости от вида вариационного ряда. В дискретном вариационном ряду мода – вариант с максимальной частотой в изучаемой совокупности.

Пример 3. По данным статистического наблюдения получены значения величины $X = \{5, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 5, 2, 1, 4, 2, 1, 1, 6\}$. Определить моду.

Построим вариационный ряд

X	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	4	4	5
	5	6											

Соответствующий сгруппированный вариационный ряд имеет вид:

X	1	2	3	4	5	6
F	6	3	1	2	2	1

Значение признака X , имеющего наибольшую частоту (6) равно 1.

Следовательно, для данного вариационного ряда мода = 1.

Пример 4. Даны 5 наблюдений над случайной величиной скорости автомобилей на одном из участков шоссе (км/ч):

$X_1 = 85.9; X_2 = 89.1; X_3 = 72.3; X_4 = 82.5; X_5 = 70.6$. Требуется вычислить дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Решение. Из условия известно, что $n = 5; X_1 = 85.9; X_2 = 89.1;$

$X_3 = 72.3; X_4 = 82.5; X_5 = 70.6$. По имеющимся данным вычислим:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{5} (85.9 + 89.1 + 72.3 + 82.5 + 70.6) = 80.8,$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{5} \cdot 271.49 = 54.29,$$

$$\sqrt{S_X^2} = \sqrt{54.29} = 7.37.$$

Задача 5. Случайная величина X - число лет, которые служащие проработали в торговой компании; Y - сколько отпусков за это время они брали в этой компании. Результаты наблюдений над случайными величинами X и Y : приведены в следующей таблице:

X	2	3	4	5
Y	3	4	6	8

Построить уравнения прямых регрессий Y по X и X по Y . Найти выборочный коэффициент линейной корреляции r_{XY}^* .

Решение. Из условия находим:

$$n = 4; \bar{X} = \frac{1}{4} (2 + 3 + 4 + 5) = 3.5; \bar{Y} = \frac{1}{4} (3 + 4 + 6 + 8) = 5.25; \overline{XY} = \frac{1}{4} (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 8) = 20.5;$$

$$S_X^2 = \frac{1}{4} [(2 - 3.5)^2 + (3 - 3.5)^2 + (4 - 3.5)^2 + (5 - 3.5)^2] = 1.25;$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{4} [(3 - 5.25)^2 + (4 - 5.25)^2 + (6 - 5.25)^2 + (8 - 5.25)^2] = 3.69;$$

Воспользовавшись предложенными формулами, вычислим коэффициенты прямых регрессий Y по X и X по Y .

$$\rho_{Y/X} = \frac{20.5 - 3.5 \cdot 5.25}{1.25} = 1.7; \rho_{X/Y} = \frac{20.5 - 3.5 \cdot 5.25}{3.69} = 0.58.$$

И по формулам построим уравнения прямых регрессий и выборочный коэффициент линейной корреляции.

$$Y_X - 5.25 = 1.7(X - 3.5) \Rightarrow Y_X = 1.7X - 0.7;$$

$$X_Y - 3.5 = 0.58(Y - 5.25) \Rightarrow X_Y = 0.58Y + 0.45.$$

$$r_{XY}^* = \sqrt{1.7 \cdot 0.58} = 0.99.$$

Пример 6: Фермер имеет 9 коров, количество отелов которых представлено в таблице.

Определить медиану.

Расчёт медианы осуществляется на основании следующего алгоритма:

Коровы	1	2	3	4	5	6	7	8	9
№ п/п									
Количество отелов	4	2	1	5	2	3	4	3	1

Решение задачи начинается с определения вида ряда. Поскольку варианты принимают значения отдельных чисел, ряд будет дискретным.

Внимание! Наиболее распространенной ошибкой является то, что медиана находится для неранжированного ряда, т.о. медиана, равная двум отелам (корова №5), не будет правильным решением.

Для дискретного ряда необходимо построить ранжированный ряд. Он будет иметь вид: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5

Если количество членов ряда нечетное, в ранжированном ряду находится его середина, чтобы количество вариантов по обе стороны было одинаковым. В примере это будет варианта № 5 (3 отела), справа и слева от которой расположено по 4 варианты.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «Математика»

для студентов направления подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры
направленность (профиль) «Геодезическое обеспечение землеустроительных и
кадастровых работ»

Ставрополь, 2025

Содержание

Раздел 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема 1. Матрицы. Действия над матрицами

Тема 2 Умножение матриц

Тема 3 Определитель матриц

Тема 4 Обратная матрица. Системы линейных уравнений

Тема 5 Системы алгебраических уравнений, Алгебраические преобразования. Метод Жордана-Гаусса.

Тема 6 Системы уравнений.

Тема 7 Правило Крамера

Тема 8 Аналитическая геометрия

Тема 9 Пределы

Матрицы. Действия над матрицами

Упражнения: Сложить матрицы

- 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 11 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
- 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 22 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 31 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- 5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 31 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- 6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 31 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- 7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 32 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- 8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$
- 9) $A = \begin{pmatrix} 1 & 24 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 14 & 2 \end{pmatrix}$
- 10) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 13 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Умножение матриц

Пример. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Начнем решать по действиям:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*1+2*1+3*2 & 1*2+2*1+3*4 & 1*3+2*3+3*5 \\ 1*1+1*1+3*2 & 1*2+1*1+3*4 & 1*3+1*3+3*5 \\ 2*1+4*1+5*2 & 2*2+4*1+5*4 & 2*3+4*3+5*5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 16 & 24 \\ 8 & 15 & 21 \\ 16 & 28 & 43 \end{pmatrix}.$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \\ 6 & 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 16 & 24 \\ 8 & 15 & 21 \\ 16 & 28 & 43 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \\ 6 & 5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}.$

Упражнения: Умножьте матрицы

1) $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 76 & 10 & 21 \\ 75 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 11 & 21 \\ 15 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 130 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 10 & 10 & 21 \\ 35 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 36 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 67 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 11 & 21 \\ 15 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

$$7) \begin{pmatrix} 90 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 11 & 21 \\ 15 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

$$8) \begin{pmatrix} 88 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 98 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 90 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

$$9) \begin{pmatrix} 65 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 19 & 23 & 28 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 90 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

$$10) \begin{pmatrix} 87 & 10 & 21 \\ 5 & 62 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 65 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 19 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

Определитель матриц

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Решение. Для вычисления определителя третьего порядка, мы будем использовать известную формулу Саррюса (или треугольников), который может быть написан по следующей формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{23}a_{12} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{33}a_{21}a_{12} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1*5*9 + 7*6*2 + 3*8*4 - 7*5*3 - 9*4*2 - 1*8*6 = 0$$

Ответ: 0.

Упражнения: Вычислить определитель матриц

1) $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 67 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 11 & 21 \\ 15 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 90 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 130 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 88 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 98 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 10 & 10 & 21 \\ 35 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 65 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 19 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 36 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 87 & 10 & 21 \\ 5 & 62 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

Обратная матрица и системы линейных уравнений

Пример. Решить систему матричным методом.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение:

Для использования матричного метода вычислим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \text{ где } A_{ij} - \text{это алгебраические дополнения к}$$

$$\text{элементам матрицы } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 5 - 1 + 10 - 6 = 12 \neq 0$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 5) = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(10 - 2) = -8$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 5 = 8$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3 + 1) = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \cdot 12 & 3 \cdot 3 & (-3) \cdot 3 \\ -8 \cdot 12 & 5 \cdot 3 & (-1) \cdot 3 \\ 4 \cdot 12 & (-4) \cdot 3 & 8 \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ -84 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Упражнения. Решить систему используя обратную матрицу .

$$1 \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} 2x + 2y - 4z = 6 \\ x + 3y - 5z = 6 \\ 3x - 2y + 6z = 6 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 22 \\ x - 3y - 6z = -9 \\ 2x + 4y - 4z = 10 \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} 2x - 7y + 5z = 9 \\ x + 5y - 5z = -2 \\ 4x - 2y + 7z = 24 \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} 2x - y - z = 14 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} x + 3y + 4z = 17 \\ 2x - 3y + 5z = 16 \\ 3x + 4y - z = 7 \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Системы алгебраических уравнений, Алгебраические преобразования. Метод Жордана-Гаусса.

Пример. Решить систему методом Гаусса, для этого сделаем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольной форме.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right)$$

Таким образом, данная система эквивалентна системе

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + \frac{5}{4}x_3 = -\frac{3}{4} \\ -3x_3 = -15 \end{array} \right., \text{ вычисляем } x_3 = 5, \quad x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \cdot 5 = -\frac{28}{4} = -7$$

$$x_1 = 12 - 7 - 5 = 0$$

Ответ : $x_1 = 0$, $x_2 = -7$, $x_3 = 5$

Упражнения. Решить систему методом Гаусса.

$$1 \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{array} \right.$$

$$6 \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y - 4z = 6 \\ x + 3y - 5z = 6 \\ 3x - 2y + 6z = 6 \end{array} \right.$$

$$2 \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{array} \right.$$

$$7 \left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y + 5z = 22 \\ x - 3y - 6z = -9 \\ 2x + 4y - 4z = 10 \end{array} \right.$$

$$3 \left\{ \begin{array}{l} 2x - 7y + 5z = 9 \\ x + 5y - 5z = -2 \\ 4x - 2y + 7z = 24 \end{array} \right.$$

$$8 \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{array} \right.$$

$$4 \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{array} \right.$$

$$9 \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - z = 14 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{array} \right.$$

$$5 \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 4z = 17 \\ 2x - 3y + 5z = 16 \\ 3x + 4y - z = 7 \end{array} \right.$$

$$10 \left\{ \begin{array}{l} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{array} \right.$$

Правило Крамера

Пример. Решить систему методом Крамера.

Главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \text{ Запишем определитель по первой строке элементов с помощью}$$

$$\text{формулы: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

Запишем и вычислим вспомогательные детерминанты

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 12 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} +$$
$$+ 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} +$$
$$+ 12 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 12 \cdot 8 + 12 = -84$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 12 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 + 12 + 12 \cdot 4 = 60$$

$$\text{So } x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{0}{12} = 0 \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = -\frac{84}{12} = -7 \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{60}{12} = 5$$

Ответ: (0; -7; 5)

Упражнения. Решить систему методом Крамера

$$1 \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} 2x + 2y - 4z = 6 \\ x + 3y - 5z = 6 \\ 3x - 2y + 6z = 6 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 22 \\ x - 3y - 6z = -9 \\ 2x + 4y - 4z = 10 \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} 2x - 7y + 5z = 9 \\ x + 5y - 5z = -2 \\ 4x - 2y + 7z = 24 \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} 2x - y - z = 14 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} x + 3y + 4z = 17 \\ 2x - 3y + 5z = 16 \\ 3x + 4y - z = 7 \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Аналитическая геометрия

Пример 1. Доказать, что векторы перпендикулярны $\vec{a} = \{-7; 1; 2\}, \vec{b} = \{3; 2; -1\}$?

Решение: два вектора перпендикулярны, если их скалярное произведение равно 0, скалярное произведение векторов определяется проекциями на оси координат, вычисляется по формуле:

$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$ где $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\} \Rightarrow$ вычислим скалярное произведение: $(\vec{a}, \vec{b}) = -7 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -21 \neq 0 \Rightarrow$ векторы не перпендикулярны

Пример 2. Доказать, что векторы компланарны

$\vec{a} = \{-1; 2; -1\}, \vec{b} = \{0; 2; 1\}, \vec{c} = \{2; 0; 3\}$?

Пример 2. Доказать, что векторы компланарны

Решение: три вектора компланарны, если смешанное произведение векторов равно 0, смешанное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \text{ где } \vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}, \vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\} \Rightarrow \text{ВЫЧИСЛИМ}$$

смешанное произведение векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 4 + 0 - (-4) - 0 - 0 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{векторы не компланарны.}$$

Упражнения. Вычислить скалярное и векторное произведение двух заданных трех элементов векторов.

1) $\vec{a} = \{1; 3; -1\}, \vec{b} = \{3; -2; 3\}.$

2) $\vec{a} = \{2; 1; 4\}, \vec{b} = \{4; 1; 3\}.$

3) $\vec{a} = \{0; 1; 2\}, \vec{b} = \{1; 3; -2\}.$

4) $\vec{a} = \{1; 2; 1\}, \vec{b} = \{3; 1; 2\}.$

5) $\vec{a} = \{2; 1; 7\}, \vec{b} = \{2; 4; -3\}.$

6) $\vec{a} = \{-4; 1; 5\}, \vec{b} = \{1; 3; 1\}.$

7) $\vec{a} = \{3; -1; 2\}, \vec{b} = \{2; 3; -1\}.$

8) $\vec{a} = \{-4; -1; 5\}, \vec{b} = \{1; -3; 1\}.$

9) $\vec{a} = \{9; 1; 2\}, \vec{b} = \{-1; 1; 4\}.$

10) $\vec{a} = \{8; 2; 3\}, \vec{b} = \{-2; 8; 0\}.$

Пределы

Вычислить пределы функций

Вариант 1

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^5 - 4x^4 + 2}{3x^5 - 2x - 1};$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 7x + 10}; \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 7x + 10};$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x+4} - 3}{\sqrt{2x-1} - 1};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{4x};$

Вариант 2

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 4x^2 + 6}{3x^3 + 10x^2 + 5x};$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 13x - 7}{x^2 - 9x + 14}; \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 13x - 7}{x^2 - 9x + 14};$

в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{4x+1} - 3};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x;$

Вариант 3

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{5x^4 - 3x - 2}$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 40x + 128}{x - 8}; \lim_{x \rightarrow 8} \frac{3x^2 - 40x + 128}{x - 8};$

в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{4x^2};$

Вариант 4

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 6}{2x^3 + 10x^2 + 5x};$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 + x - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{4}{3}} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 + x - 4};$

в) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{1+x} - 3}{2 - \sqrt[3]{x}};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{3x};$

Вариант 5

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{5x^4 + 8x - 6};$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 51x + 10}{x - 10}; \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{5x^2 - 51x + 10}{x - 10};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x};$

Вариант 6

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 - 3x^2 + 1}{3x^5 - 2x + 3};$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6};$

в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{2x-1} - 3};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 8x}{2x};$

Вариант 7

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 6}{3x^3 + 10x^2 + 4x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 6x + 5}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 6x + 5};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \operatorname{tg} 2x};$$

Вариант 8

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x - 2}{5x^3 + 3x^2 - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \frac{2x^2 - 7x + 3}{5x^2 - 16x + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{5x^2 - 16x + 3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{\sqrt{x-2} - 1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$$

Вариант 9

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3 + (x-1)^3}{x^3 + 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{3x^2 + 5x - 2}{2x^2 + 3x - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{2x^2 + 3x - 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1}}{x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$$

Вариант 10

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x - 4}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8}{2x - 4};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\arcsin 4x};$$

Тема 10. Производная и дифференциал функции

Вариант 1

1. Найти производные

$$\text{а) } y = 3x^2 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} + 3,$$

$$\text{б) } y = \sin x \cdot \operatorname{arctg} x,$$

$$\text{в) } y = \frac{\cos x}{x - \sqrt[3]{x}},$$

$$\text{г) } y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 + 1}},$$

$$\text{д) } y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x,$$

$$\text{е) } y = \arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{ж) } y = (1 + \ln \sin x)^2,$$

$$\text{з) } y = 2^{\frac{1}{\ln x}},$$

$$\text{и) } y = x \operatorname{arctg} \sqrt{x},$$

$$\text{к) } y = e^{\sin x},$$

$$\text{л) } y = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\text{м) } y = \operatorname{ctg} e^x.$$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

$$\text{а) } x^3 + \operatorname{arctg}(e^y) + y(x-1) = 0,$$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$y = x \cos 2x$$

Вариант 2

1. Найти производные

$$\text{а) } y = 4x^5 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{x^3} - \sqrt[3]{3},$$

$$\text{б) } y = \sqrt{x} \sin x,$$

$$\text{в) } y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x},$$

$$\text{г) } y = \operatorname{ctg}(2x \sin \frac{1}{2}),$$

$$\text{д) } y = (\arccos x + \arcsin x)^2,$$

$$\text{е) } y = \operatorname{arctg} \ln(2x+3),$$

$$\text{ж) } y = \operatorname{tg} \frac{e^x}{x},$$

$$\text{з) } y = \sin 3x \cos 5x,$$

$$\text{и) } y = \ln(1 + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$\text{к) } y = \operatorname{tg}^2 6x - 2^x,$$

$$\text{л) } y = x \cdot 10^{\sqrt{x}},$$

$$\text{м) } y = x + e^{\sin x},$$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

$$y \sin x = \cos xy$$

$$y = \sqrt{1+x^2}$$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

1. Найти производные

а) $y = x^{10} - 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{2}$,

б) $y = e^x \operatorname{tg} x$,

в) $y = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x} - 1}$,

г) $y = \operatorname{tg} \frac{x+1}{2}$,

д) $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$,

е) $y = \ln(1-2x)$,

ж) $y = \sin 2^x + 3^{\sin x}$,

з) $y = \frac{1}{x^2} \ln x$,

1. Найти производные

а) $y = 7x^4 - \sqrt[7]{x^2} - \frac{1}{x^4} + \sqrt{7}$,

б) $y = e^x \operatorname{ctg} x$,

в) $y = \frac{\sqrt[3]{x} + 7}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$,

г) $y = \cos x - \frac{1}{3} \sin 2x$,

д) $y = \frac{x-1}{\ln x}$,

е) $y = x^2 e^x$,

ж) $y = \operatorname{tg}^2 6x - e^{\frac{1}{x}}$,

з) $y = \ln \frac{\sin x}{\cos 2x}$,

Вариант 3

и) $y = \operatorname{arctg} x \cdot \ln x$,

к) $y = e^{-x^2}$,

л) $y = 10^{\operatorname{tg} x}$,

м) $y = \sin 3x \cos 5x$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $e^{x-y} = \frac{x}{y}$,

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = \ln(\operatorname{tg} x)$

Вариант 4

и) $y = x \arcsin \frac{2x-1}{5}$,

к) $y = (e^{-\sqrt{x}} + 1)(1 + e^{2x})$,

л) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} e^x}$,

м) $y = 3x^3 \arcsin x + (x^2 + 2)\sqrt{x}$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $x^2 y = \arcsin yx$,

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = x^2 a^x$

Вариант 5

1. Найти производные

$$а) y = 8x^3 - 3\sqrt[5]{x^4} - \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{3},$$

$$б) y = x \arctg x,$$

$$в) y = \frac{x}{\sin x},$$

$$г) y = tg\sqrt{x} + \frac{1}{ctg(2x-1)},$$

$$д) y = \ln \frac{x}{e^x},$$

$$е) y = \arcsin \sqrt{x} \cdot \ln x,$$

$$ж) y = x^2 10^{-x+2}$$

$$з) y = \arctg(x^2 - 3x + 1),$$

$$и) y = \arcsin x \cdot 9^{-x},$$

$$к) y = ctg \frac{\ln x + 1}{2 - \ln x},$$

$$л) y = (1 + \sqrt{1+x})^2$$

$$м) y = \cos^3 \sqrt{e^x}$$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

$$а) \arcsin \frac{x}{y} - yx = 0,$$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Вариант 6

1. Найти производные:

$$а) y = x^{10} - 3\sqrt[3]{x^7} + \frac{1}{x^2} - \sqrt[3]{10}$$

$$б) y = e^x \arcsin x$$

$$в) y = \frac{e^x}{\cos x}$$

$$г) y = 3 \sin(3x-1)$$

$$д) y = (1 - 2\sqrt[3]{x})^2$$

$$е) y = \frac{1}{4} tg^4 x + \frac{1}{2} tg^2 x$$

$$ж) y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln 2x}$$

$$з) y = 10^{1-\sin 2x}$$

$$и) y = \arcsin \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$к) y = \sin^2 2x \cos \frac{x}{2}$$

$$л) y = 3^{\arctg 3x}$$

$$м) y = \ln \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

$$а) \frac{y}{x} = \arctg(xy)$$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$y = \ln \sin x$$

Вариант 7

1. Найти производные:

$$а) y = 10x^5 - \frac{1}{4x^4}$$

$$б) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \sin x$$

$$в) y = \frac{tgx}{\sqrt{x}}$$

$$г) y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$д) y = \ln(1 - ctgx)$$

$$е) y = e^{-x} + 10^{\ln x}$$

$$\text{ж)} \quad y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

$$\text{з)} \quad y = \sin^2 3x \cos^3 2x$$

$$\text{и)} \quad y = \arcsin e^x + \arccos \frac{1}{2^x}$$

$$\text{к)} \quad y = \operatorname{tg} 3^{\ln x}$$

$$\text{л)} \quad y = x \sqrt{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}}$$

$$\text{м)} \quad y = \operatorname{arctg} x^2 - \ln \sin x$$

$$2. \text{ Найти } \frac{dy}{dx} :$$

$$\text{а)} \quad xy = \ln(e^{x+y} - 2)$$

$$3. \text{ Найти } \frac{d^2 y}{dx^2} :$$

$$y = \frac{x^3}{x-1}$$

Вариант 8

1.

Найти производные:

$$\text{а)} \quad y = 7x^5 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{2}$$

$$\text{б)} \quad y = \sqrt[3]{x} \cos x$$

$$\text{в)} \quad y = \frac{\sin x}{\cos x + 1}$$

$$\text{г)} \quad y = \frac{1}{\cos^2 2x}$$

$$\text{д)} \quad y = (\operatorname{arctg} x + x)^2$$

$$\text{е)} \quad y = \operatorname{tg} 5x \sin 7x$$

$$\text{ж)} \quad y = \cos^2 2x \sin^2 3x$$

$$\text{з)} \quad y = (1 + \arcsin x)^2$$

$$\text{и)} \quad y = \frac{10^x + 10^{-x}}{2x}$$

$$\text{к)} \quad y = \ln(x^2 - 4x)$$

$$\text{л)} \quad y = \operatorname{ctg}(\ln 2x)$$

$$\text{м)} \quad y = e^{\sin x + \cos x}$$

$$2. \text{ Найти } \frac{dy}{dx} :$$

$$\text{а)} \quad e^x \operatorname{tg} y - x^2 + y^3 = 0$$

$$3. \text{ Найти } \frac{d^2 y}{dx^2} :$$

$$y = \frac{\ln x}{x}$$

Вариант 9

1. Найти производные:

$$\text{а)} \quad y = 3x^{12} + 4\sqrt[3]{x^7} - \frac{1}{x^2} + \sqrt[4]{10}$$

$$\text{б)} \quad y = (\sqrt{x} - 4) \sin x$$

$$\text{в)} \quad y = \frac{e^x}{\operatorname{arctg} x}$$

$$\text{г)} \quad y = \sin(3x - 5)$$

$$\text{д)} \quad y = e^{x^2-3} \operatorname{tg} x$$

$$\text{е)} \quad y = \ln \frac{\sin x}{\sqrt{x}-1}$$

$$\text{ж)} \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{з)} \quad y = e^x \operatorname{tg} \frac{e^x}{\sqrt{x^4-1}}$$

$$\text{и)} \quad y = \sin^2 x^2$$

$$\text{к)} \quad y = 3^{\ln(x+1)}$$

$$\text{л)} \quad y = \frac{\arcsin(\ln x)}{\ln(\arcsin x)}$$

$$\text{м)} \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$2. \text{ Найти } \frac{dy}{dx} :$$

а) $\frac{x}{y} = \arcsin xy$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:
 $y = x\sqrt{1+x^2}$

Вариант 10

1. Найти производные:

а) $y = 7x^3 + \frac{1}{2x^2} + \sqrt{x + \sqrt[3]{5}}$

б) $y = (x^3 + 1)\sin x$

в) $y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

г) $y = \frac{tgx}{\sin x + 3}$

д) $y = 2^{x+\sin x}$

е) $y = \arccos \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

ж) $y = \ln(tg^2 2x)$

з) $y = e^{-\sqrt{x}+x}$

и) $y = \arctg(e^{x+2})$

к) $y = \sin^2 x^2$

л) $y = \arctg \sqrt[3]{x^2 - 2}$

м) $y = x^4 e^{\sqrt{x^2+4}}$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $\ln y = \cos xy - 7$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = x \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$

Вариант 11

1. Найти производные:

а) $y = 5x^7 + \sqrt[6]{x^5} - \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{3}$

б) $y = (\sqrt[3]{x} + 1)\arctg x$

в) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt[5]{x} - x}$

г) $y = \arctg(4x^2 + 1)$

д) $y = \sin^3 x + 2\sin x + x^3$

е) $y = \arcsin \frac{x+1}{x}$

ж) $y = 3^{\arctg(x^2+1)} + \sqrt{2}$

з) $y = \cos \ln(x^2 + 1)$

и) $y = x \arcsin \arctg \sqrt{x}$,

к) $y = 2^{\sin x}$,

л) $y = \frac{e^x + 2e^{-x}}{4}$,

м) $y = \arctg(\cos x)$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = x \sin 3x$

Вариант 12

1. Найти производные:

а) $y = 4x^9 - \sqrt[7]{x^3} + \frac{1}{x^4} - \sqrt[3]{2}$

б) $y = e^x \arctg x$

в) $y = \frac{\arctg x}{x - x^3}$

г) $y = \sin\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$

д) $y = (\arctg x + e^x)^2$

$$\text{е) } y = \log_2 \frac{x+1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{ж) } y = \arcsin(\operatorname{tg}^2 x)$$

$$\text{з) } y = \log_2(x^2 + 4x - 2)$$

$$\text{и) } y = \ln(3 - \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$\text{к) } y = \operatorname{ctg}^2 7x + (\sqrt{7})^x,$$

$$\text{л) } y = x^6 \cdot 2^{\sqrt{x}},$$

$$\text{м) } y = x + 5e^{\operatorname{tg} x},$$

$$2. \text{ Найти } \frac{dy}{dx}:$$

$$\text{а) } 2y \ln y = x$$

$$3. \text{ Найти } \frac{d^2 y}{dx^2}:$$

$$y = \sqrt{1 - 3x^2}$$

1. Найти производные:

$$\text{а) } y = 9x^5 - 7\sqrt[3]{x^8} + \frac{3}{x^8} - 2\sqrt[4]{5}$$

$$\text{б) } y = \sqrt{x} \cos x$$

$$\text{в) } y = \frac{\operatorname{arctg} x}{e^x - \sin x}$$

$$\text{г) } y = \log_7 \sin x$$

$$\text{д) } y = \sqrt{1 - \sin x} + 2$$

$$\text{е) } y = 2^{\log_3 x}$$

$$\text{ж) } y = \operatorname{arctg} \frac{3-x}{x-2}$$

$$\text{з) } y = e^{\operatorname{arctg} x^2}$$

Вариант 13

$$\text{и) } y = \arcsin x \cdot \lg x,$$

$$\text{к) } y = 3^{-x^2},$$

$$\text{л) } y = 2^{x \operatorname{ctg} x},$$

$$\text{м) } y = \sin x \cos 2x$$

$$2. \text{ Найти } \frac{dy}{dx}:$$

$$\text{а) } \sqrt{x} + \sqrt{y} = x + y$$

$$3. \text{ Найти } \frac{d^2 y}{dx^2}:$$

$$y = \ln(\operatorname{ctg} x)$$

1. Найти производные:

$$\text{а) } y = -7x^3 + 2\sqrt[5]{x^3} + \frac{4}{x^8} - 3\sqrt[3]{4}$$

$$\text{б) } y = e^x \operatorname{ctg} x$$

$$\text{в) } y = \frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\arcsin x}$$

$$\text{г) } y = \log_5(\sqrt[3]{x} + 2x)$$

$$\text{д) } y = (\sin x + \sqrt[3]{x^2})^2$$

$$\text{е) } y = \log_2 \sin x$$

$$\text{ж) } y = \sin \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{з) } y = e^{\sqrt[4]{2-3x}}$$

Вариант 14

$$\text{и) } y = x \arccos \frac{2x+1}{9},$$

$$\text{к) } y = (e^{\sqrt{x}} - 2)(1 + e^{3x}),$$

$$\text{л) } y = \frac{1}{\operatorname{arctg} 2^x},$$

$$\text{м) } y = 2x^3 \arcsin x - (x^3 - 1)\sqrt{x}.$$

$$2. \text{ Найти } \frac{dy}{dx}:$$

$$\text{а) } y = 1 + xe^y + \sin e^y$$

$$\text{Найти } \frac{d^2 y}{dx^2}:$$

$$y = x^4 3^x$$

Вариант 15

1. Найти производные:

а) $y = -5x^4 - 3\sqrt[4]{x^5} + \frac{5}{x^7} - \sqrt[5]{6}$

б) $y = e^x \operatorname{arctg} x$

в) $y = \frac{e^x}{\operatorname{arctg} x}$

г) $y = \sin(5x^2 + 1)$

д) $y = \ln(1 + 2 \sin x)$

е) $y = \operatorname{arctg} \ln x$

ж) $y = \arcsin \frac{\sqrt{1-3x}}{x}$

з) $y = \sin \sqrt{1+x^2}$

и) $y = 3^{-x} \arccos x,$

к) $y = \operatorname{tg} \frac{\ln x}{2-x},$

л) $y = (1 - 2\sqrt{1+x})^3$

м) $y = \sin^4 \sqrt{e^x}$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $x = \sin(xy) + \operatorname{arctg} y$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$y = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Тема 11. Применение производных к исследованию функции

Вариант 1

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x+6}{x^2+13}; [-5;5]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x}{(x-1)^2}$$

Вариант 2

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x}{2} + \cos x; [0; \pi]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^3 + 16}{x}$$

Вариант 3

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x-3}{x^2+16}; [-5;10]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2}$$

Вариант 4

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x+3}{x^2+7}; [-3;7]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x-1}{x^2-2x}$$

Вариант 5

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x}{2} - \sin x; \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

Вариант 6

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x}{x^2 + 16}; [-3; 7]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Вариант 7

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}} - \cos x; [-\pi; \pi]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$$

Вариант 8

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x - 4}{x^2 + 6}; [-4; 6]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{4x^2}{x^3 - 1}$$

Вариант 9

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \cos x; [-\pi; \pi]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x}{3 + x^2}$$

Вариант 10

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \cos x - \frac{x}{\sqrt{2}}; \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{2x}{1 + x^2}$$

Вариант 11

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = 3x + x^3 - 1 - 3x^2; [-1; 2]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^3 + 3}{x}$$

Вариант 12

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = x^2 e^{-x} + \sqrt{3}; [-1; 4]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^2 + 4}{x}$$

Вариант 13

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{1}{2} + x^5 - \frac{5}{3}x^3; [0; 2]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$$

Вариант 14

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x^2}{1+x} - \sqrt{2}; [-\frac{1}{2}; 4]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x}{x^2 + 5}$$

Вариант 15

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = 2x^2 - \ln x + \frac{1}{2}; [\frac{1}{4}; 1]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{2x - 8}{(x - 3)^3}$$

Тема 12. Функция нескольких переменных. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Тема 13. Неопределенный интеграл

Вариант 1.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^2 - 2x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}};$

в) $\int \frac{x^2}{(1+3x^3)^2} dx;$

г) $\int \frac{x}{1+3x^2} dx;$

д) $\int \frac{\cos x}{1-2 \sin x} dx;$

е) $\int e^{-x^2} x dx;$

ж) $\int \sin 2x dx;$

з) $\int \left(\cos \frac{x}{3} + 1 \right) dx;$

и) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}};$

Вариант 2.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^4 - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3} - 11 \right) dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}};$

в) $\int \frac{x dx}{(5x^2 + 1)^2};$

г) $\int 7^x \sqrt{3 \cdot 7^x + 4} dx;$

д) $\int \frac{x^2}{1+3x^3} dx;$

е) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 4} dx;$

ж) $\int \sin 5x dx;$

з) $\int \frac{dx}{1+3x^2};$

и) $\int tg 3x dx;$

Вариант 3.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^2 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x} - 3 \right) dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}};$

в) $\int \frac{x^2}{(1-4x^3)^2} dx;$

г) $\int \frac{x dx}{x^2 + 5};$

д) $\int \frac{\cos 3x}{1 + \sin 3x} dx;$

е) $\int e^{-2x^2} \cdot x dx;$

ж) $\int a^{3x} dx;$

з) $\int (2 + \sin 2x) dx;$

и) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx;$

Вариант 4.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\text{a) } \int \left(1 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{7}{x^4} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}};$$

$$\text{в) } \int \frac{x dx}{(3+x^2)^3};$$

$$\text{г) } \int \frac{\arctg 2x}{1+4x^2} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{x^2}{1+4x^3} dx;$$

$$\text{е) } \int \frac{e^x}{1-2e^x} dx;$$

$$\text{ж) } \int e^{-x^3} x^2 dx;$$

$$\text{з) } \int \sin 2x dx;$$

$$\text{и) } \int \frac{dx}{\cos^2 3x};$$

Вариант 5.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\text{a) } \int \left(x^4 - \frac{1}{2}x + \sqrt[3]{3x} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \frac{x dx}{(1+x^2)^5};$$

$$\text{в) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}};$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{x+3};$$

$$\text{д) } \int \frac{\cos x}{1+3\sin x} dx;$$

$$\text{е) } \int e^{2x} dx;$$

$$\text{ж) } \int 2^{-x^2} x dx;$$

$$\text{з) } \int (1 - \sin 3x) dx;$$

$$\text{и) } \int \frac{dx}{\cos^2 4x};$$

Вариант 6.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\text{a) } \int \left(2x^7 - \frac{3}{\sqrt{x}} + e^x \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \frac{x^2 dx}{(1+3x^3)^3};$$

$$\text{в) } \int \sqrt{1-5x} dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{e^x}{e^x + 4} dx;$$

$$\text{е) } \int e^{\sin 2x} \cos 2x dx;$$

$$\text{ж) } \int 2^{-x^2} x dx;$$

$$\text{з) } \int \frac{dx}{\sin^2 3x};$$

$$\text{и) } \int \operatorname{tg} 2x dx;$$

Вариант 7.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\text{a) } \int \frac{x^3 - 2\sqrt{x^3} + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx;$$

$$\text{б) } \int \frac{x^2 dx}{(1-2x^3)^2};$$

$$\text{в) } \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\text{г) } \int \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{x}{4x^2 - 3} dx;$$

$$\text{е) } \int e^{\cos 3x} \sin 3x dx;$$

$$\text{ж)} \int 2^{-3x^2} x dx;$$

$$\text{з)} \int \sin \frac{x}{5} dx;$$

$$\text{и)} \int \frac{dx}{\cos^2 3x};$$

Вариант 8.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} + 1 \right) dx;$$

$$\text{б)} \int \sqrt{2x+3} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{x}{(1+4x^2)^2} dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{dx}{5-x};$$

$$\text{д)} \int \frac{dx}{4x-x \ln x};$$

$$\text{е)} \int x e^{x^2-3} x dx;$$

$$\text{ж)} \int x \cos 2x^2 dx;$$

$$\text{з)} \int \left(1 - \sin \frac{x}{5} \right) dx;$$

$$\text{и)} \int \operatorname{ctg} 2x dx;$$

Вариант 9.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \left(2 - 3\sqrt[5]{x^4} + \frac{1}{x^3} \right) dx;$$

$$\text{б)} \int \frac{x dx}{(1+3x^2)^5};$$

$$\text{в)} \int \sqrt{1-2x} dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{x^2}{1+2x^3} dx;$$

$$\text{д)} \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx;$$

$$\text{е)} \int e^{-x^3} x^2 dx;$$

$$\text{ж)} \int \sqrt{3^x} \sqrt{5^x} dx;$$

$$\text{з)} \int \frac{x^3}{\sin^2 x^4} dx;$$

$$\text{и)} \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos x} dx;$$

Вариант 10.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \left(\sqrt{x} - 2x^3 - \frac{1}{x^2} \right) dx;$$

$$\text{б)} \int (1 - \sin 2x)^5 \cos 2x dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{г)} \int \frac{x^3 dx}{1+4x^4};$$

$$\text{д)} \int \frac{\sin x}{1+2 \cos x} dx;$$

$$\text{е)} \int 2^{-x^3} x^2 dx;$$

$$\text{ж)} \int (e^x + 1)^2 dx;$$

$$\text{з)} \int e^x \sin e^x dx;$$

$$\text{и)} \int \cos 3x dx;$$

Вариант 11.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$a) \int (4x+1)^2 dx$$

$$б) \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$$

$$в) \int \frac{2x}{(5+x^2)^2} dx$$

$$г) \int \frac{\arctg^2 3x}{1+9x^2}$$

$$д) \int \frac{x^4}{1+5x^5} dx$$

$$е) \int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^6}} dx$$

$$ж) \int \frac{\text{ctg}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} dx$$

$$з) \int \cos 5x \cdot dx$$

$$и) \int \frac{dx}{\sin^2 2x}$$

Вариант 12.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$a) \int \left(x^5 - \frac{1}{x^2} + 5 \right) dx$$

$$б) \int \frac{dx}{\sin(5x+1)}$$

$$в) \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$г) \int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx$$

$$д) \int \frac{x^2}{1+4x^3} dx$$

$$е) \int \frac{3\arctg^2 x}{1+x^2}$$

$$ж) \int \frac{dx}{\sin^2(5x-1)}$$

$$з) \int \frac{x^2+1}{(x^3+3x-1)^2} dx$$

$$и) \int \frac{2dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$$

Вариант 13.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$a) \int (3x - e^{2x} + 1) dx$$

$$б) \int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$$

$$в) \int \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx$$

$$г) \int \frac{dx}{2+x}$$

$$д) \int \frac{\cos 3x}{1+\sin 3x} dx$$

$$е) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

$$ж) \int 3^{x^2} \cdot x \cdot dx$$

$$з) \int \text{tg}(8x) dx$$

$$и) \int \frac{dx}{\sin^2(2x)}$$

Вариант 14.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$a) \int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{x} dx$$

$$б) \int \frac{dx}{3-x}$$

$$в) \int \frac{\sqrt{3}}{9x^2-3} dx$$

$$г) \int \sin(4-x) dx$$

$$д) \int e^{5x+1} dx$$

$$е) \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$$

$$ж) \int \frac{\sin x}{1+5\cos x} dx$$

$$з) \int e^{4x^2} \cdot x \cdot dx$$

$$и) \int \frac{2^x}{1+2^{2x}} dx$$

Вариант 15.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int \frac{3\sqrt{x} + 4x^2 - 5}{2x^2} dx$

б) $\int \frac{dx}{1-4x}$

в) $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}$

г) $\int \sin(5-3x) dx$

д) $\int e^{2x-2} dx$

е) $\int \frac{dx}{10x^2-1}$

ж) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

з) $\int e^{x^2} \cdot x \cdot dx$

и) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

Тема 14. Методы интегрирования

Вариант 1.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int x e^{-2x} dx;$$

$$\int x^2 \ln x dx;$$

Вариант 2.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int (x+3)e^{2x} dx;$$

$$\int x \arccos x dx;$$

Вариант 3.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int x e^x dx;$$

$$\int x \arcsin 5x dx;$$

Вариант 4.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int (x+2) \cos 5x dx;$$

$$\int \arcsin 4x dx;$$

Вариант 5.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int (x+5)e^{2x} dx;$$

$$\int x^7 \ln x dx;$$

Вариант 6.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int x \cos 2x dx;$$

$$\int 3x^2 \ln(x+2) dx;$$

Вариант 7.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int x \sin 3x dx;$$

$$\int x \cdot \arctg x dx;$$

Вариант 8.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int e^{2x} \cos x dx;$$

$$\int \arctg 3x dx;$$

Вариант 9.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int (1-x^2) \sin 3x dx;$$

$$\int \ln(x^2+5) dx;$$

Вариант 10.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int e^{-2x} (2x+5) dx;$$

$$\int (\sin^2 x + 1) x dx;$$

Вариант 11.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int e^{-2x} \cdot x \cdot dx$$

$$\int (x - 3) \cdot \cos 3x \, dx$$

Вариант 12.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int (x + 1) \cdot \cos 2x \, dx$$

$$\int e^{-5x} \cdot x \cdot dx$$

Вариант 13.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int (x^2 + 1) \cdot \ln x \, dx$$

$$\int (x + 5) \cdot e^x \, dx$$

Вариант 14.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int (x + 1) \cdot \ln x \, dx$$

$$\int x \cdot \cos 2x \, dx$$

Вариант 15.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int (x + 1) \cdot e^{-x} \, dx$$

$$\int (x + 1)^2 \cdot \ln x \, dx$$

Тема 15. Определенный интеграл Вычисление определенного интеграла

Вариант 1.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x}};$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - 2 \sin x} dx;$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{x}{3} + 1 \right) dx;$$

Вариант 2.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}};$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+3x^3} dx;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+3x^2};$$

Вариант 3.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_0^1 a^{3x} dx;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 + \sin 2x) dx;$$

$$\int_1^{\frac{1}{e}} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx;$$

Вариант 4.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}};$$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(3+x^2)^3};$$

Вариант 5.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(1+x^2)^5};$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}};$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1+3\sin x} dx;$$

Вариант 6.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x+3};$$

$$\int_0^3 \left(x^4 - \frac{1}{2}x + \sqrt[3]{3x} \right) dx;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 4x};$$

Вариант 7.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \sin 3x) dx;$$

$$\int_1^2 e^{2x} dx$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x+3};$$

Вариант 8.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+4x^3} dx;$$

$$\int_0^1 2^{-x^2} x dx$$

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(1+x^2)^5};$$

Вариант 9.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_0^1 e^{-x^3} x^2 dx;$$

$$\int_1^2 \left(1 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{7}{x^4} \right) dx;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \, dx;$$

Вариант 10.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 3x};$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1-2e^x} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3x}{1+\sin 3x} dx;$$

Вариант 11.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int_1^2 \frac{x \, dx}{x^2 + 5};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3x}{1 + \sin 3x} dx;$$

$$\int_0^1 e^{-2x^2} \cdot x dx$$

Вариант 12.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int_0^1 \left(x^2 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x} - 3 \right) dx; \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}; \quad \int_0^1 \frac{x^2}{(1-4x^3)^2} dx;$$

Вариант 13.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int_0^1 \left(x^4 - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3} - 11 \right) dx;$$

$$\int_1^2 7^x \sqrt{3 \cdot 7^x + 4} dx;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x \, dx;$$

Вариант 14.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int_0^1 \left(x^2 - 2x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx;$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2} dx;$$

$$\int_1^2 \sin 2x \, dx;$$

Вариант 15.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int_0^2 \frac{x^2}{(1+3x^3)^2} dx;$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} x dx$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}};$$

Тема 16. Приложения определенного интеграла Несобственные интегралы

Вариант 1.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$a) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x};$$

$$б) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Вариант 2.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$a) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}};$$

$$б) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4}.$$

Вариант 3.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$a) \int_0^{\infty} e^{-x} dx;$$

$$б) \int_0^1 \ln x dx.$$

Вариант 4.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}.$$

Вариант 5.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$a) \int_2^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4};$$

$$б) \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Вариант 6.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$a) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}};$$

$$б) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+1)^4}.$$

Вариант 7.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8};$$

$$б) \int_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

Вариант 8.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$a) \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}.$$

$$б) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}.$$

Вариант 9.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{x + x^2}.$$

Вариант 10.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{a) } \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}};$$

$$\text{б) } \int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 5)^3}}.$$

Вариант 11.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} e^x dx$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Вариант 12.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \cos x \cdot dx$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - x}}$$

Вариант 13.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$$\text{б) } \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$$

Вариант 14.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$a) \int_0^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx$$

$$б) \int_1^e \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$$

Вариант 15.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$a) \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$$

$$б) \int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$$

Тема 17. Кратные интегралы

Вариант 1.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_{-1}^0 dx \int_{-8x^2}^{-2x+6} f(x,y) dy$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D xy^2 dx dy$, $D: y = x^2, y = 2x$

Вариант 2.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y) dy$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D xy^3 dx dy$, $D: y = x^3, y \geq 0, y = 4x$

Вариант 3.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_0^1 dy \int_{-4y-4}^{-8y^3} f(x,y) dx$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D (x+y) dx dy$, $D: y^2 = x, y = x$

Вариант 4.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_0^1 dx \int_{8x^3}^{4x+4} f(x,y) dy$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D (x^3 - 2y) dx dy$, $D: y = x^2 - 1, y = 0$

Вариант 5.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_{-1}^0 dy \int_{2y-6}^{8y^3} f(x, y) dx$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D (1+y) dx dy$, $D: y^2 = x, 5y = x$

Вариант 6.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_{-1}^0 dx \int_{4x-4}^{8x^3} f(x, y) dy$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D (x+y) dx dy$, $D: y = x^2 - 1, y = -x^2 + 1$

Вариант 7.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_0^1 dy \int_{8y^3}^{2y+6} f(x, y) dx$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D x(y-1) dx dy$, $D: y = 5x, y = x, x = 3$

Вариант 8.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_0^1 dx \int_{-2x-6}^{-8x^3} f(x, y) dy$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D (x-2) dx dy$, $D: y = x, y = \frac{1}{2}x, x = 2$

Вариант 9.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_{-1}^0 dy \int_{-8y^3}^{-4y+4} f(x, y) dx$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D xy dx dy$, $D: y = x^3, y = 0, x = 2$

Вариант 10.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_0^1 dx \int_{-4x-4}^{-8x^3} f(x, y) dy$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D (x+y) dx dy$,

$D: y = x^3, y = 8, y = 0, x = 3$

Вариант 11.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_{-1}^0 dy \int_{4y-4}^{8y^3} f(x, y) dx$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D xy^2 dx dy$, $D: y = x, y = 0, x = 1$

Вариант 12.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_{-5}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{-6y-y^2}} f(x, y) dx$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D e^y dx dy$, $D: y = \ln x, y = 0, x = 2$

Вариант 13.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_3^5 dx \int_{-\sqrt{8x-x^2}}^0 f(x, y) dy$

2. Вычи Вариант 14.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_{-3}^{-1} dy \int_{-\sqrt{-4y-y^2}}^0 f(x, y) dx$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D xy dx dy$, $D: y = \sqrt{x}, y = 0, x + y = 2$

слить двойной интеграл по области $D \iint_D y(1+x^2) dx dy$, $D: y = x^3, y = 3x$

Вариант 15.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_1^7 dy \int_0^{\sqrt{8y-y^2}} f(x, y) dx$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D (x^3 + 3y) dx dy$,

$D: x + y = 1, y = x^2 - 1, x \geq 0$

Тема 18. Криволинейные и поверхностные интегралы

Подготовить рефераты по данной теме с обязательным разбором решения примера на нахождение криволинейного или поверхностного интеграла.

Тема 19. Простейшие дифференциальные уравнения

Вариант 1.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$(x^2 - y^2)y' = 2xy;$
$y'' = \sin x$

Вариант 2.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

a) $xy' = y \ln(y/x);$
б) $ydx - 2x dy = 2y^4 dy;$

Вариант 3.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2;$
$y'' = \frac{1}{x}$

Вариант 4.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$xy' + y = 5;$
$y' - y(1 + x) = x;$

Вариант 5.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$xy' + xe^{y/x} - y = 0;$
$y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Вариант 6.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$x^2 y' - y^2 = x^2;$	$y'' = \frac{6}{x^3}$
-----------------------	-----------------------

Вариант 7.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$xy' = y \ln(y/x);$
$(1 + e^x)yy' = e^x;$

Вариант 8.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$(x + 2y)dx + xdy = 0;$
$ydx - 2xdy = 2\delta^4 dy;$

Вариант 9.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2};$	
$y'' = 3\sin x$	

Вариант 10.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$(1 - x^2)y' = xy;$	$y'' = \frac{-4}{x^3}$
---------------------	------------------------

Вариант 11.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$y' \cos x = (y + 1)\sin x;$	$y'' = \frac{3}{\cos^2 x}$
------------------------------	----------------------------

Вариант 12.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$\sin xy' = y \cos x + 2 \cos x;$	$y'' = -\frac{2}{\cos^2 x};$
-----------------------------------	------------------------------

Вариант 13.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$(x^2 - y^2)y' = 2xy;$	$y'' = \frac{1}{x}$
------------------------	---------------------

Вариант 14.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$a)(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2;$	$y'' = \frac{4}{x}$
----------------------------------	---------------------

Вариант 15.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$xy' + y = 5;$	$y'' = \sin 3x$
----------------	-----------------

Тема 20. Линейные дифференциальные уравнения

Найти решение дифференциального уравнения, и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

Вариант 1.

$$y'' - 6y' - 7y = 0$$

$$y'' - 6y' - 7y = x^2 - x; y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Вариант 2.

$$y'' + 4y = 0$$

$$y'' + 4y = x^2 - 3; y(0) = 2, y'(0) = -1.$$

Вариант 3.

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

$$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3, \quad y(0) = \frac{4}{3}, \quad y'(0) = \frac{1}{27}.$$

Вариант 4.

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

$$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3, \quad y(0) = 4/3, \quad y'(0) = 1/27.$$

Вариант 5.

$$y'' - 4y' + 13y = 0,$$

$$y'' - 4y' + 13y = 26x + 5, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Вариант 6.

$$y'' - 4y' = 0,$$

$$y'' - 4y' = 6x^2 + 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

Вариант 7.

$$y'' - 2y' = 0,$$

$$y'' - 4y' = 6x^2 + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Вариант 8.

$$y'' + 4y = 0$$

$$y'' + 4y = x^2 - 5; y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

Вариант 9.

$$y'' + 4y = 0$$

$$y'' + 4y = x^2 - 7; y(0) = 0, y'(0) = -1.$$

Вариант 10.

$$y'' - 3y' = 0,$$

$$y'' - 3y' = 6x^2 + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Вариант 11.

$$y'' - 6y' - 7y = 0$$

$$y'' - 6y' - 7y = x^2 - 2x; y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Вариант 12.

$$y'' + 2y = 0$$

$$y'' + 4y = x^2 - 3; y(0) = -2, y'(0) = -1.$$

Вариант 13.

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

$$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 1, \quad y(0) = 1/3, \quad y'(0) = 1/2.$$

Вариант 14.

$$y'' - 4y' + 13y = 0,$$

$$y'' - 4y' + 13y = 6x + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Вариант 15.

$$y'' - 2y' = 0,$$

$$y'' - 4y' = 6x^2 + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$