МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению лабораторных работ
по дисциплине
«Математические методы теории сигналов»
для студентов
для студентов специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем
Специализация «Разработка автоматизированных систем в защищенном исполнении»

Ставрополь
2026

Лабораторная работа 1

Исследование характеристик сигналов при их векторном представлении

Цель работы – приобретение навыков определения и исследования характеристик сигналов, используемых при их векторном представлении.

Теоретическая часть

При решении ряда задач, связанных с анализом и преобразованием сигналов, целесообразно отображать эти сигналы векторами некоторого векторного пространства. Это, как правило, позволяет упростить решение.

Рассмотрим основные характеристики сигналов, используемых при их векторном представлении.

Одной из фундаментальных характеристик сигналов, используемых при их векторном представлении, является норма сигнала. Чаще всего полагают, что вещественные аналоговые сигналы имеют норму $\|s\|_B$:

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2 \, dt} \qquad (1.1)$$

(из двух возможных значений корня выбирается положительное значение).

Для комплексных сигналов норма вычисляется по формуле

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s|^2 \, dt}, \qquad (1.2)$$

где * – символ комплексно-сопряженной величины.

Квадрат нормы сигнала: рассмотренным понятием энергии

$\|s\|_2$, $В^2с$, совпадает с ранее

$$E = s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt \quad (1.3)$$

Для импульсных сигналов, т. е. сигналов существующих лишь в пределах конечного отрезка времени (0, T), формулы (1.1) – (1. 3) можно переписать в виде:

$$\|s\| = \sqrt{\int_0^T s^2(t)dt} \quad (1.4)$$

$$\|s\| = \sqrt{\int_0^T s^2(t)dt}, \quad (1.5)$$

$$E = \|s\|^2 = \int_0^T s^2(t)dt \quad (1.6)$$

Теперь рассмотрим еще одну фундаментальную характеристику сигналов, используемых при их векторном представлении, – расстояние между сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$:

$$\sqrt{\int_0^T}$$

.

$$d\left[s_1(t), s_2(t)\right] = \|s_1 - s_2\| = \tag{1.7}$$

Отсюда следует, что квадрат расстояния между сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$:

(1.8)

$$d^2\left[s_1(t), s_2(t)\right] = \|s_1 - s_2\|^2 = \int_0^T \left[s_1(t) - s_2(t)\right]^2 dt$$

.

Рассмотрим понятие энергии суммы двух сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$:

$$\infty \infty \infty \infty$$

$$E = \int \left[s1(t) + s2(t) \right]^2 dt = \int s1(t \qquad (1.9)$$

$$)^2 dt + \int s2(t)^2 dt + 2 \int s1(t) s2(t) dt$$

$$=$$

$$-\infty -\infty -\infty -\infty$$

$$= Es + Es + 2 \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t) dt.$$

$$12 \qquad 1\ 2$$

Из (1.9) следует, что в отличие от самих сигналов их энергии неаддитивны, т. е. энергия суммарного сигнала содержит в себе так называемую взаимную энергию E_{ss}

$$E = 2 \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t) dt .$$

, $В^2с$:

$$12 \; s \; s \qquad 1\ 2 \qquad (1.10)$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла в правой части формулы (1.10),

называется скалярным произведением сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$:

$$(s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, s_2(t)\, dt \qquad (1.11)$$

Скалярное произведение (s, s) сигнала $s(t)$ самого на себя равно квадрату нормы сигнала

$$(s, s) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, s(t)\, dt = \|s\|^2$$

Соотношение (1.11) позволяет ввести в рассмотрение косинус угла между сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$ при выбранной метрике (1.7):

$$\cos\psi = \frac{(s_1 s_2)}{\|s_1\| \|s_2\|}. \qquad (1.12)$$

Угол ψ между двумя сигналами должен лежать в интервале от 0 до 180° при этом если:

– угол ψ = 90°, то сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ ортогональны;

– угол ψ = 180°, то сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ противоположны.

Пример 1. В качестве иллюстрации предположим, что имеются два смещенных во времени экспоненциальных импульса напряжения:

$$s_1(t) = 5\exp\left(-10^5 t\right),$$

$$s_2(t) = 5\exp\left[-10^5\left(t - 2\cdot10^{-6}\right)\right].$$

Найдем скалярное произведение этих сигналов, а также угол ψ между ними. Квадраты модулей (энергии) этих сигналов одинаковы

$$\|s_1\|^2 = \|s_2\|^2 = 25\int_0^\infty \exp\left(-10^5 t\right)dt = 1,25\cdot10^{-4}\ \text{В}^2\cdot\text{с}$$

Скалярное произведение, рассчитанное по формуле (1.11) составит:

$$(s_1, s_2) = 24\int_0^\infty \exp\left(-10^5 t\right)\cdot\exp\left[-10^5\left(t - 2\cdot10^{-6}\right)\right]dt = 1,023\cdot10^{-4}\ \text{В}^2\cdot\text{с}$$

$$\left|\begin{matrix}\end{matrix}\right|$$

0

Отсюда $\cos\psi = 0{,}819$ и $\psi = 35^{o}$.

Оборудование и материалы

Для выполнения лабораторной работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 MB Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов 256).

Для выполнения лабораторной работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа Mathcad 13 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении лабораторной работы запрещается:

– самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;

– нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т. д.;

– принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо немедленно сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Указания по порядку выполнения работы

Методику выполнения работы рассмотрим на следующем примере.

Пример. Заданы два сигнала $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Сигнал $s_1(t)$ представляет собой отрезок синусоиды с амплитудой U = 2 В, обращающейся в нуль на концах отрезка времени [0, τ], где τ = 1 мс = 10^{-3} с (аналитическое описание сигнала представлено формулой (1.16)). Сигнал $s_2(t)$ представляет собой прямоугольный импульс высотой A = 1,5 В и длительностью τ = 1 мс.

Требуется для сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ определить:

- нормы и квадраты норм;
- расстояние и квадрат расстояния между сигналами;
- скалярное произведение;
- косинус угла и угол между сигналами;
- энергию суммы и взаимную энергию;

Рассмотрим решение поставленной задачи в математическом пакете Mathcad:

1. Запускаем математический пакет Mathcad. Согласно аналитическому определению и заданным параметрам вводим определение первого сигнала и строим его график (рисунок 1.1).

$$U := 2 \qquad \tau := 1$$

$$s1(t) := \begin{cases} U \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{\tau}\right) & \text{if } 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

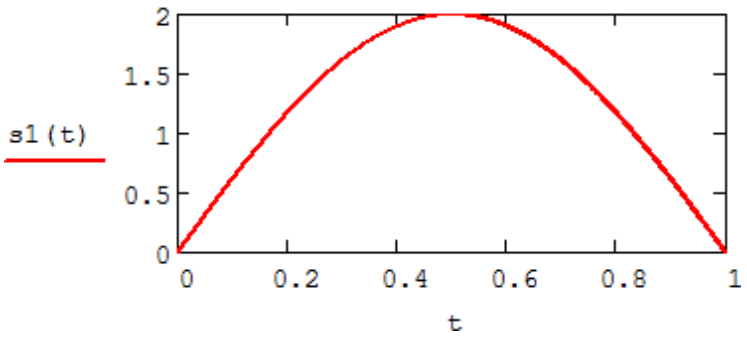


Рисунок 1.1 – Определение и график сигнала $s_1(t)$

Длительность первого сигнала равна 1 мс (T_{S1} = 1 мс).

2. Согласно заданным параметрам вводим определение второго сигнала

$s2(t) = 1{,}5,\ 0 \le t \le \tau$ и строим его график (рисунок 1.2).

$$A := 1.5$$

$$s2(t) := \begin{cases} A & \text{if } 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

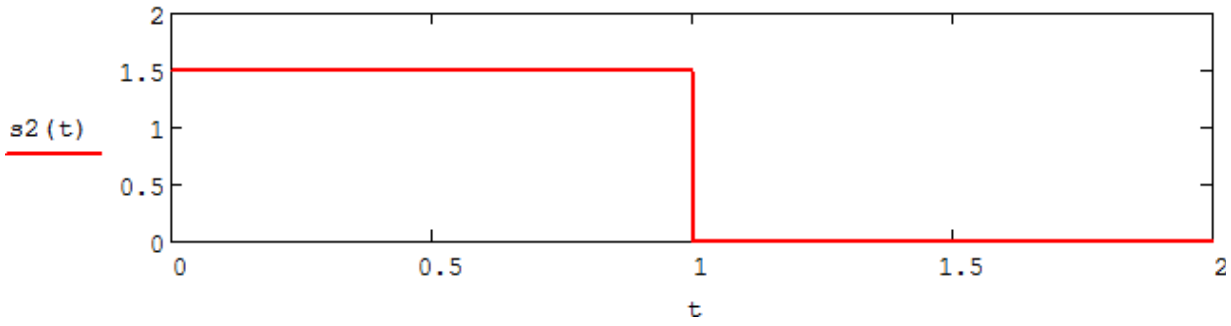


Рисунок 1.2 – Определение и график сигнала $s_2(t)$

Длительность второго сигнала равна 1 мс (T_{S2} = 1 мс).

Примечание – Так как сигнал $s_2(t)$ имеет ту же длительность, что и сигнал $s_1(t)$, то повторно определять параметр τ в программе Mathcad не нужно.

3. По формуле (1.4) определяем нормы и квадраты норм сигналов $s1(t)$ и $s2(t)$ (рисунок 1.3).

$$||s1|| := \sqrt{\int_0^{\tau} s1(t)^2\,dt} = 1.414 \qquad ||s2|| := \sqrt{\int_0^{\tau} s2(t)^2\,dt} = 1.5$$

$$||s1||^2 = 2 \qquad ||s2||^2 = 2.25$$

Рисунок 1.3 – Определение норм и квадратов норм сигналов

4. По формуле (1.7) определяем расстояние и квадрат расстояния между сигналами $s1(t)$ и $s2(t)$ (рисунок 1.4).

$$ds1_s2 := \sqrt{\int_0^{\tau} (s1(t) - s2(t))^2\,dt} = 0.656$$

$$ds1_s2^2 = 0.43$$

Рисунок 1.4 – Определение расстояния и квадрата расстояния между сигналами

5. По формуле (1.1) находим скалярное произведение сигналов $s1(t)$ и $s2(t)$ (рисунок 1.5).

$$s1_s2 := \int_0^{\tau} s1(t) \cdot s2(t)\,dt = 1.91$$

Рисунок 1.5 – Определение скалярного произведения сигналов $s1(t)$ и $s2(t)$

6. По формуле (1.12) вычисляем косинус угла и угол между сигналами $s1(t)$ и $s2(t)$ (рисунок 1.6).

$$\cos\psi := \frac{s1_s2}{||s1|| \cdot ||s2||} = 0.9 \qquad \psi := \frac{180}{\pi}\,\mathrm{acos}(\cos\psi) = 25.8$$

Рисунок 1.6 – Определение расстояния и квадрата расстояния между сигналами

Примечание – Коэффициент $180\,\pi$ в формуле при вычислении угла между

сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$ на рисунке 1.6 позволяет перейти от результата в радианах к градусам.

7. По формулам (1.9) и (1.10) определяем энергию суммы и взаимную энергию двух сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ (рисунок 1.7).

$$E12 := \int_0^{\tau} (s1(t) + s2(t))^2 \, dt = 8.07$$

$$Es1s2 := 2 \cdot \int_0^{\tau} s1(t) \cdot s2(t) \, dt = 3.82$$

Рисунок 1.7 – Определение энергии суммы и взаимной энергии двух сигналов

Порядок выполнения работы

1. Запустить Mathcad.
2. Требуется для сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ определить:

– нормы и квадраты норм;

– расстояние и квадрат расстояния между сигналами;

– скалярное произведение;

– косинус угла и угол между сигналами;

– энергию суммы и взаимную энергию;

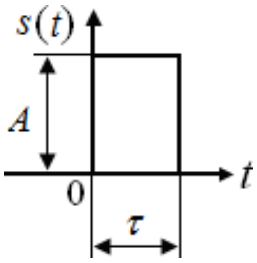
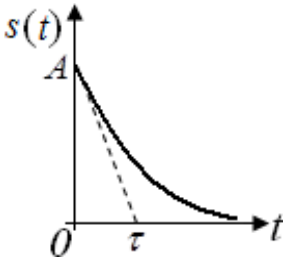
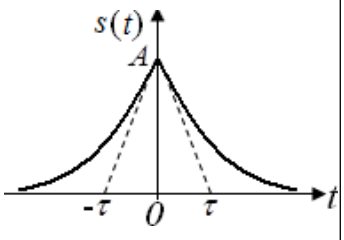
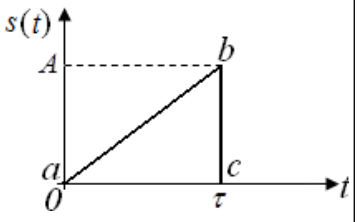
Исследовать влияние изменения параметров сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ на характеристики, используемые при их векторном представлении.

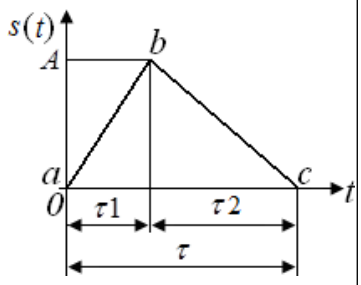
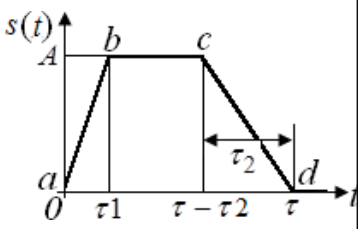
3. Сохранить результаты выполнения индивидуального задания.
4. Сформировать отчет по лабораторной работе.
5. Защитить работу.

Варианты заданий

Номер варианта соответствует номеру фамилии студента в списке учебной группы (подгруппы).

Таблица 1.1 – Название, графическое и аналитическое определение сигналов, исследуемых на лабораторной работе

Название	Графическое определение	Математическая модель в Mathcad и параметры
Прямоугольный импульс		$s(t) := \begin{cases} A & \text{if } 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ Параметры импульса: A – высота прямоугольного импульса; τ – длительность прямоугольного импульса. *Примечание* – Ключевое слово «otherwise» используется в контексте для задания значения сигнала «во всех остальных случаях»
Односторонний экспоненциальный импульс		$s(t) := \begin{cases} A \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} & \text{if } t \ge 0 \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases}$ Параметры имульса: A – высота одностороннего экспоненциального импульса; τ – постоянная времени одностороннего экспоненциального импульса
Двусторонний экспоненциальный импульс		$s(t) := A \cdot e^{\frac{-\lvert t \rvert}{\tau}}$ Параметры импульса: A – высота двустороннего экспоненциального импульса; τ – постоянная времени двустороннего экспоненциального импульса
Пилообразный импульс		$s(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ \left(A \cdot \frac{t}{\tau}\right) & \text{if } 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{if } t \ge \tau \end{cases}$ Параметры импульса: A – высота пилообразного импульса; τ – длительность пилообразного импульса. *Примечание* – Отрезок ab

		называется прямым ходом пилообразного импульса, отрезок bc – обратным ходом пилообразного импульса
Треугольный импульс		$s(t) := \begin{cases} 0 \text{ if } t < 0 \\ \left(A \cdot \frac{t}{\tau 1}\right) \text{ if } 0 \le t \le \tau 1 \\ \left[A \cdot \left(1 - \frac{t - \tau 1}{\tau 2}\right)\right] \text{ if } \tau 1 \le t \le \tau \\ 0 \text{ if } t > \tau \end{cases}$ Параметры импульса: A – высота треугольного импульса; τ1 и τ2 – длительность фронта и длительность среза треугольного импульса; τ = τ1 + τ2 – длительность треугольного импульса. *Примечание* – Отрезок ab называется фронтом, а отрезок bc – срезом треугольного импульса
Трапецеидальный импульс		$s(t) := \begin{cases} 0 \text{ if } t < 0 \\ \left(A \cdot \frac{t}{\tau 1}\right) \text{ if } 0 \le t \le \tau 1 \\ A \text{ if } \tau 1 \le t \le \tau - \tau 2 \\ \left[A \cdot \left(1 - \frac{t - \tau + \tau 2}{\tau 2}\right)\right] \text{ if } \tau - \tau 2 \le \\ 0 \text{ if } t > \tau \end{cases}$ Параметры импульса: A – высота трапецеидального импульса; τ – длительность трапецеидального импульса; τ1 – длительность фронта трапецеидального импульса; τ2 – длительность среза трапецеидального импульса. *Примечание* – Отрезок ab называется фронтом трапецеидального импульса, отрезок bc – вершиной трапецеидального импульса, отрезок cd – срезом

		трапецеидального импульса

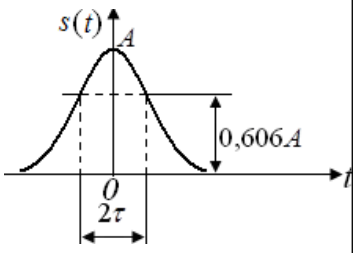
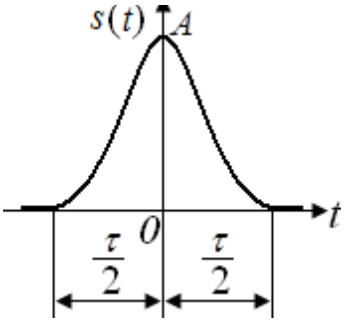
Колоколообразный импульс		$s(t) := A \cdot e^{\frac{-1}{2}\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$ Параметры импульса: A – высота колоколообразного импульса; 2τ – интервал времени между точками перегиба колоколообразного импульса. Примечание – Значение параметра 2τК определяется также по уровню 0,606АК.
Косинус-квадратный импульс		$s(t) := \begin{cases} A\cdot\cos\left(\frac{\pi}{\tau}\cdot t\right)^2 & \text{if } \frac{-\tau}{2} \le t \le \frac{\tau}{2} \\ 0 \text{ if } \lvert t\rvert > \frac{\tau}{2} \end{cases}$ Параметры импульса: A – высота косинус-квадратного импульса; τ – длительность косинус-квадратного импульса. *Примечание* – Значение параметра τ/2 определяется также по уровню 0,5А

Таблица 1.2 – Варианты индивидуальных заданий

Вар	Обозначение сигнала	Тип сигнала	Параметры импульсных сигналов
1	$s1(t)$	Трапецеидальный импульс	A = 2 В, τ = 3 мс, τ1 = 1 мс, τ2 = 1 мс
	$s2(t)$	Косинус-квадратный импульс	A = 2 В, τ = 6 мс
2	$s1(t)$	Двусторонний экспоненциальный импульс	A = 2 В, τ = 2 мс
	$s2(t)$	Пилообразный импульс	A = 2 В, τ = 2 мс
3	$s1(t)$	Треугольный импульс	A = 2 В, τ1 = 1 мс, τ2 = 1 мс
	$s2(t)$	Колоколообразный импульс	A = 2 В, τ = 2 мс

4	$s1(t)$	Односторонний экспоненциальный импульс	A = 2 В, τ = 2 мс
	$s2(t)$	Косинус-квадратный импульс	A = 2 В, τ = 6 мс
5	$s1(t)$	Пилообразный импульс	A = 2 В, τ = 5 мс
	$s2(t)$	Треугольный импульс	A = 2 В, τ1 = 2 мс, τ2 = 3 мс
6	$s1(t)$	Двусторонний экспоненциальный импульс	A = 3 В, τ = 2 мс
	$s2(t)$	Косинус-квадратный импульс	A = 2 В, τ = 8 мс

7	$s1(t)$	Трапецеидальный импульс	A = 2 В, τ = 4 мс, τ1 = 1 мс, τ2 = 1 мс
	$s2(t)$	Треугольный импульс	A = 4 В, τ1 = 1 мс, τ2 = 3 мс
8	$s1(t)$	Односторонний экспоненциальный импульс	A = 3 В, τ = 2 мс
	$s2(t)$	Пилообразный импульс	A = 3 В, τ = 6 мс
9	$s1(t)$	Пилообразный импульс	A = 2 В, τ = 4 мс
	$s2(t)$	Колоколообразный импульс	A = 3 В, τ = 2 мс
10	$s1(t)$	Односторонний экспоненциальный импульс	A = 2 В, τ = 4 мс
	$s2(t)$	Колоколообразный импульс	A = 3 В, τ = 2 мс
11	$s1(t)$	Трапецеидальный импульс	A = 2 В, τ = 5 мс, τ1 = 1 мс, τ2 = 1 мс
	$s2(t)$	Колоколообразный импульс	A = 3 В, τ = 2 мс
12	$s1(t)$	Пилообразный импульс	A = 2 В, τ = 4 мс

	$s2(t)$	Треугольный импульс	A = 2 В, τ1 = 2 мс, τ2 = 2 мс
13	$s1(t)$	Трапецеидальный импульс	A = 4 В, τ = 5 мс, τ1 = 2 мс, τ2 = 2 мс
	$s2(t)$	Двусторонний экспоненциальный импульс	A = 4 В, τ = 3 мс
14	$s1(t)$	Треугольный импульс	A = 4 В, τ1 = 1 мс, τ2 = 3 мс
	$s2(t)$	Косинус-квадратный импульс	A = 4 В, τ = 8 мс
15	$s1(t)$	Трапецеидальный импульс	A = 2 В, τ = 5 мс, τ1 = 2 мс, τ2 = 2 мс
	$s2(t)$	Односторонний экспоненциальный импульс	A = 2 В, τ = 2 мс

Примечание – Графическое и аналитическое определение параметров исследуемых сигналов приведено в таблице 1.1.

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе оформляется в виде документа Word и должен включать:

1. Название лабораторной работы.
2. Цель лабораторной работы.
3. Формулировку индивидуального задания и результат его выполнения.
4. Краткие выводы по результатам выполнения лабораторной работы.

Контрольные вопросы

1. Как определить норму вещественного сигнала?
2. Как определить норму комплексного сигнала?
3. С чем совпадает квадрат нормы сигнала?
4. Как определить расстояние между сигналами?
5. Как определить энергию суммы двух сигналов?
6. Как определить взаимную энергию двух сигналов?
7. Как проверить корректность определения энергии суммы двух сигналов на рисунке 1.7?
8. Как определить скалярное произведение двух сигналов?
9. Как определить косинус угла между сигналами?
10. Чему равна энергия и норма импульса косинусоидальной формы:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \omega_0 t < -\pi/2; \\ U_m \cos(\omega_0 t), & -\pi/2 < \omega_0 t < \pi/2; \\ 0, & \omega_0 t > \pi/2. \end{cases}$$

11. Как должны соотноситься собой высота прямоугольного импульса A и амплитуда U отрезка синусоиды (пример 2) чтобы между сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$ был достигнут минимум расстояния?
12. Сигнал $u(t)$ представляет собой симметричный треугольный импульс высотой U и длительностью τ. Сигнал $v(t)$ – вписанный в сигнал $u(t)$ импульс прямоугольной формы высотой A (рисунок 1.8). Какова должна быть амплитуда прямоугольного импульса, чтобы расстояние между этими двумя сигналами было минимальным?

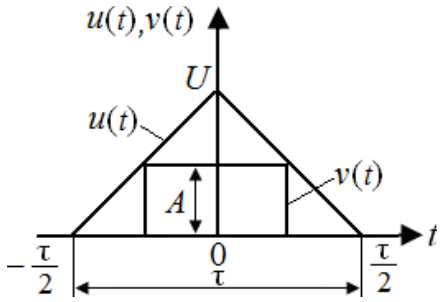


Рисунок 1.8 – Временные диаграммы сигналов $u(t)$ и $v(t)$

13. Какова методика выполнения индивидуального задания?

14. Какие выводы можно сделать по результатам выполнения индивидуального задания?

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

1. Кологривов, В. А. Прикладные математические методы в радиотехнике. В 2-х частях: учебное пособие / В. А. Кологривов. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. - Ч. 1. – Аналоговые системы. – 159 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=209003

2. Умняшкин, С. В. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов: учебное пособие / С. В. Умняшкин. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Техносфера, 2012. – 368 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233733

3. Каганов В.И., Битюков В.К. Основы радиоэлектроники и связи: учебное пособие. – М.: Горячая линия - Телеком, 2012. – 542 с. http://www.iprbookshop.ru/12017

4. Акулиничев, Ю. П. Теория и техника передачи информации: учебное пособие / Ю. П. Акулиничев, А. С. Бернгардт. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. – 209 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=208952

5. Андреев Р.Н., Краснов Р.П., Чепелев М.Ю. Теория электрической связи: курс лекций. Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия - Телеком, 2014. – 230 с. http://www.iprbookshop.ru/2508

Лабораторная работа 2

Исследование спектрального анализа и синтеза периодических сигналов

Цель работы: – приобретение навыков спектрального анализа и синтеза периодических сигналов.

Формируемые компетенции или их части

ОПК-2	Способность корректно применять при решении профессиональных задач соответствующий математический аппарат алгебры, геометрии, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей, математической статистики, математической логики, теории алгоритмов, теории информации, в том числе с использованием вычислительной техники.
ОПК-3	Способность применять языки, системы и инструментальные средства программирования в профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

В общем случае периодический сигнал $s(t)$ описывается соотношением

$$s(t) = s(t + nT)\text{'} \quad (2.1)$$

где T – постоянная величина, называемая периодом, с;

n – любое целое число (положительное или отрицательное).

Периодический сигнал $s(t)$ может быть разложен в ряд Фурье. Чтобы такое разложение существовало, фрагмент сигнала $s(t)$ длительностью в один период должен удовлетворять условиям Дирихле:

– не должно быть разрывов второго рода (с уходящими в бесконечность ветвями функции);

– число разрывов первого рода (скачков) должно быть конечным;

– число экстремумов должно быть конечным (в качестве примера функции, которая на конечном интервале имеет бесконечное

число экстремумов, можно привести sin(l/x) в окрестности нуля).

Различают три формы записи ряда Фурье: синусно-косинусная форма, вещественная форма и комплексная форма.

Синусно-косинусная форма ряда Фурье имеет следующий вид:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1} \left[a \cos(k\omega t) + b \sin(k\omega t) \right]$$

$$\left[\qquad \qquad \right]$$

$$k\,1\;k\,1$$

(2.2)

где k = 1, 2, …, ∞ – номер гармоники спектра Фурье периодического сигнала;

$\omega_1 = 2\pi / T$ – основная круговая частота периодического сигнала (частота первой гармоники), рад/с;

$k\omega_1$ – круговая частота k-й гармоники, рад/с;

a_k – коэффициент k-й «косинусной» составляющей спектра Фурье периодического сигнала, В;

b_k – коэффициент k-й «синусной» составляющей спектра Фурье периодического сигнала, В;

$a_0 / 2$ – постоянная составляющая спектра Фурье периодического сигнала, представляющая собой среднее значение сигнала на периоде, В.

Использованные в (2.2) коэффициенты a_k, b_k (k = 1, 2, …, ∞) и a_0 определяются по формулам:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega_1 t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega_1 t)\, dt$$

(2.3) (2.4)

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)dt, \qquad (2.5)$$

$$a_0 =$$

Примечание – Пределы интегрирования в формулах (2.3) – (2.5) не обязательно должны быть от $-T/2$ до $T/2$. Интегрирование может производиться по любому интервалу длиной T, результат от этого не изменится. Конкретные пределы выбираются из соображений удобства вычислений; например, может оказаться удобнее выполнять интегрирование от 0 до T или от $-T$ до 0.

На основе анализа (2.2) видно, что базисные функции синусно-косинусной формы ряда Фурье можно представить в виде:

$$\left\{1,\ \ldots,\cos \right\} \ldots \quad \cos\omega_1 t,\ \cos 2\omega_1 t, \qquad (2.6)$$

$$\sin\omega t,\ \sin 2\omega t,$$

Примечание – Все функции системы (2.6) попарно ортогональны на интервале (–$T/2$; $T/2$) или (0; T), а частоты косинусоидальных и синусоидальных составляющих образуют арифметическую прогрессию.

Таким образом, в общем случае спектр периодического сигнала $s(t)$ при

использовании синусно-косинусной формы ряда Фурье состоит из постоянной составляющей $a_0/2$ и бесконечного множеств коэффициентов $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ ($k = 1, 2, \ldots, \infty$) при «косинусных» и «синусных» составляющих спектра.

В частном случае, если сигнал $s(t)$ является четной функцией, то все

коэффициенты b_k будут равны нулю и, в формуле ряда Фурье будут присутствовать только «косинусные» слагаемые.

Если сигнал $s(t)$ является нечетной функцией, равны нулю будут, наоборот, косинусные коэффициенты слагаемые. a_k, и в формуле останутся лишь «синусные»

Некоторое неудобство синусно-косинусной формы ряда Фурье состоит в том, что для каждого значения индекса суммирования k (то есть для каждой

гармоники с частотой $k\omega_1$) в формуле (2.2) фигурируют два слагаемых – синус и косинус. Поскольку справедливо соотношение:

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t - \phi),$$

где $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ – амплитуда гармонического сигнала, В;

$\phi = arctg(b/a)$ – начальная фаза гармонического сигнала, радианы или градусы, то ряд (2.2) можно также представить в компактной форме:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t - \phi_k). \qquad (2.7)$$

Формула (2.7) представляет вещественную форму записи ряда Фурье. Если сигнал $s(t)$ является четной функцией, фазы ϕ_k могут принимать только значения 0 и π, а если $s(t)$ – функция нечетная, то возможные значения для фазы равны ±π/2.

Обратный переход от вещественной к синусно-косинусной форме записи ряда Фурье осуществляется на основе соотношений:

$$a_k = A_k \cos\phi_k, \quad b_k = A_k \sin\phi_k. \qquad (2.8)$$

Сравнивая между собой вещественную к синусно-косинусную форму записи ряда Фурье, отметим, что:

– при использовании синусно-косинусной формы разложения периодического сигнала в тригонометрический ряд (2.2) коэффициенты a_k и b_k зависят от выбора начала отсчета, а при пользовании вещественной формы разложения (2.7) амплитуды гармоник A_k не зависят от выбора начала отсчета и определяются только видом сигнала $s(t)$, а аргументы гармоник ϕ_k зависят от начала отсчета при выборе пределов интегрирования в формулах (2.3) – (2.5);

– при сдвиге начала отсчета вдоль оси времени t на $\pm t_0$ амплитуды A_k сохраняются, а фазы ϕ_k получают приращение $\pm k\omega_1 t_0$

(теорема сдвига).

Комплексная форма представления ряда Фурье является наиболее общей и получается из вещественной формы представлением косинуса в виде полусуммы комплексных экспонент (такое представление вытекает из формулы $\overset{\text{Эйлера}}{e^{jx}} = \cos x + j \sin x$):

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right).$$

Применив данное преобразование к вещественной форме ряда Фурье, получим суммы комплексных экспонент с положительными и отрицательными показателями:

$$s(t) = a_0 + \sum A_k \left[\exp(jk\omega t + j\phi) + \exp(- jk\omega t - j\phi) \right]$$

$$\overline{2}_{k=1} 2 \overline{\quad} \lfloor 1\, k\, 1\, k \rfloor \qquad (2.9)$$

Будем трактовать экспоненты со знаком «минус» в показателе как члены ряда с отрицательными номерами. В рамках этого же общего подхода постоянное слагаемое $a_0/2$ станет членом ряда с нулевым номером. В результате получится комплексная форма записи ряда Фурье:

$$s(t) = C\, e^{jk\omega_1 t}$$

$$\sum \cdot k \qquad k=-\infty \qquad (2.10)$$

Комплексные коэффициенты ряда $C._k$ связаны с амплитудами A_k и фазами ϕ_k, фигурирующими в вещественной форме записи ряда Фурье (2.7), следующими соотношениями:

$$C = \frac{1}{} A\, e^{j\phi}, A = 2 \left| C \right| \text{ и } \left| \phi = \arg(C._k) \right.$$

$$k \quad 2 \quad k\, k\, k \qquad k \qquad k$$

Несложно выглядят и формулы связи $C._k$ с коэффициентами a_k и b_k синусно-косинусной формы ряда Фурье (2.2):

$$C = a_k - j\, b_k, a = 2$$

$$\overline{\quad} \quad \overline{\quad} \qquad \text{Re}(C) \text{ и } b$$

$= -2\,\mathrm{Im}(C_k)$

k

$k\,2\,2\,k\,k$

Отсюда сразу же следует и формула непосредственного расчета коэффициентов

.

C_k ряда Фурье в комплексной форме:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\exp(-jk\omega_1 t)\,dt,$$

где k – любое целое число.

Формула (2.11) определяет комплексный спектр периодического сигнала.

(2.11)

Если $s(t)$ является четной функцией, коэффициенты ряда C_k будут чисто вещественными, а если $s(t)$ – функция нечетная, коэффициенты ряда окажутся чисто мнимыми.

Совокупность амплитуд гармоник ряда Фурье часто называют амплитудным спектром периодического сигнала (спектр), а совокупность их фаз – фазовым спектром периодического сигнала (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Характеристики периодических сигналов

Термин	Определение	Математическая формула и обозначение величины
Период периодического сигнала (период)	Параметр, равный наименьшему интервалу времени, через который повторяются мгновенные значения периодического сигнала	T
Частота периодического сигнала (частота)	Параметр, представляющий собой величину, обратную периоду периодического сигнала	$F_1 = \frac{1}{T}$, $\omega_1 = 2\pi F_1 = \frac{2\pi}{T}$
Комплексный спектр периодического сигнала	Комплексная функция дискретного аргумента, равного целому числу значений частоты периодического сигнала, представляющая собой значения коэффициентов комплексного ряда Фурье для периодического сигнала	$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\exp(-jk\omega_1 t)dt$, где k – любое целое число

Амплитудный спектр периодического сигнала (спектр)	Функция дискретного аргумента, представляющая собой модуль комплексного спектра периодического сигнала	$A_k = \left\| \dot{C}_k \right\| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\left\{\dot{C}_k\right\} + \mathrm{Im}^2}$ $\left\{C_k\right\}$
Фазовый спектр периодического сигнала	Функция дискретного аргумента, представляющая собой аргумент комплексного спектра периодического сигнала	$\phi_k = \arg\left\{\dot{C}_k\right\} = -arctg \dfrac{\mathrm{Im}\left\{\dot{C}_k\right\}}{\mathrm{Re}\left\{\dot{C}_k\right\}}$
Гармоника	Гармонический сигнал с амплитудой и начальной фазой, равными соответственно значениям амплитудного и фазового спектра периодического сигнала при некотором значении аргумента	$s_k(t) = A_k \cos(k\omega_1 t + \phi_k)$

Если анализируемый сигнал $s(t)$ является вещественным, то его амплитудный и фазовый спектры обладают соответственно четной и нечетной симметрией:

$$A_{-k} = A_k, \quad \phi_{-k} = -\phi_k,$$

а коэффициенты комплексного ряда Фурье – комплексно-сопряженной симметрией:

$$\dot{C}_{-k} = \dot{C}_k^*,$$

где * – символ математической операции комплексного сопряжения.
Спектральной диаграммой периодического сигнала принято называть графическое изображение коэффициентов ряда Фурье для заданного сигнала. Различают амплитудные и фазовые спектральные диаграммы (рисунки 2.1 и 2.2).

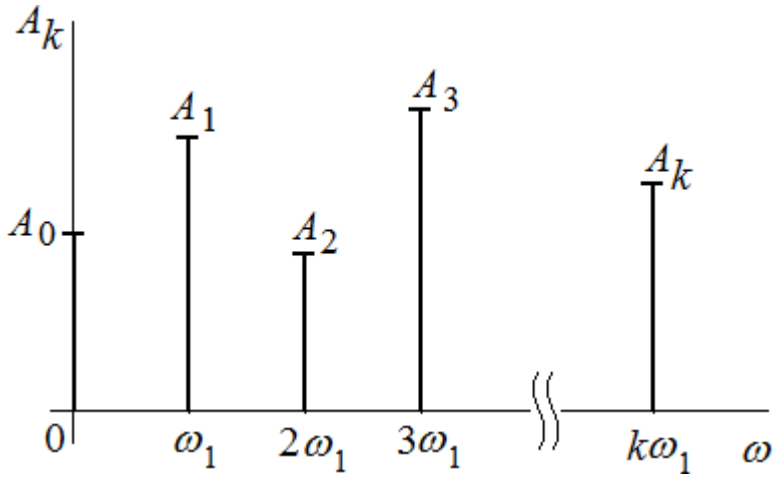


Рисунок 2.1 – Амплитудная спектральная диаграмма периодического сигнала

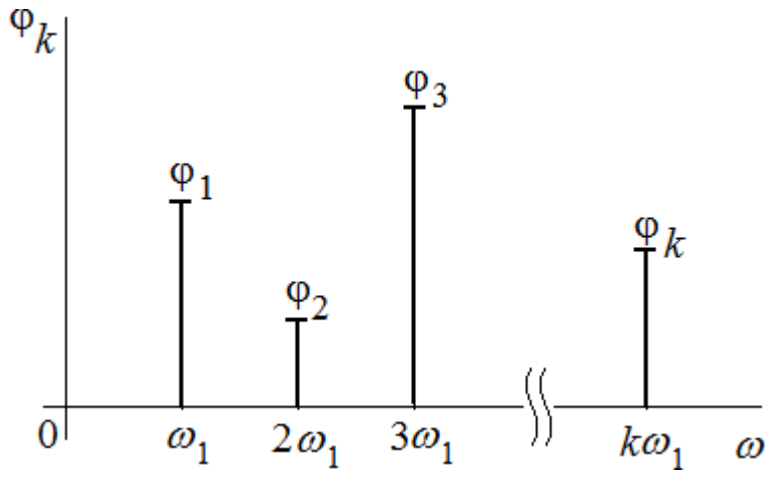


Рисунок 2.2 – Фазовая спектральная диаграмма периодического сигнала

Сформулируем основные свойства спектральных диаграмм периодических сигналов:

– первое свойство спектров, изображенных на рисунках 2.1 и 2.2, состоит в том, спектральные диаграммы периодического сигнала являются дискретными функциями частоты, поэтому их называют также линейчатым.

– второе свойство спектров, изображенных на рисунках 2.1 и 2.2, состоит в том, что эти спектры являются гармоническими. Это значит, что они состоит из равноотстоящих спектральных линий, т. к. частоты гармоник находятся в

простых кратных соотношениях (все гармоники спектра имеют частоты $k\omega_1$ /

кратные частоте первой гармоники ω_1

$= 2\pi\ T$).

Примечание – Конечно, отдельные гармоники, иногда даже первая, могут отсутствовать, т. е. амплитуды их могут равняться нулю, но это, однако, не нарушает гармоничности спектра.

Итак, ряд Фурье представляет данный периодический сигнал $s(t)$ суммой

гармонических колебаний (синусоид и косинусоид) кратных частот с соответствующим образом подобранными амплитудами и фазами. Если ограничится конечным числом членов ряда (2.2) и (2.7), то получим

периодический сигнал $_{sN}(t)$ являющийся приближенным изображением

сигнала $s(t)$:

$$s(t) = {}^{a_0} + \lceil a\cos(k\omega t) + \tag{2.12}$$

$$b\sin(k\omega t) \tag{2.13}$$

$$\sum_{N} \lfloor {}^{\overline{2}}_{k\,1\,k\,1} \rfloor$$

$$k=1$$

$$s(t) = {}^{a_0} + A\cos(k\omega t - \phi)$$

$$2$$

$$\sum_{N} {}^{\overline{\quad}}_{k\,1\,k\,k=1}$$

С увеличением числа членов N приближение, разумеется, улучшается, и в пределе, при $N \to \infty$ приближенные равенства (2.12) и (2.13) переходят в точные (2.2) и (2.7), соответственно.

При этом существенно, что приближения (2.12) и (2.13) есть всегда наилучшие приближения для любого N, т. е. когда возникает необходимость

аппроксимировать периодическую функцию тригонометрическим полиномом, то наименьшее квадратичное отклонение получится, если коэффициенты полинома будут определены по формулам (2.3) – (2.5).

Известно, что если существует интеграл $\int_{-T/2}^{T/2} [s(t)]^2 dt$, то средняя квадратическая погрешность

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [s(t) - P_N(t)]^2 dt,$$

где $P_N(t)$ – произвольный тригонометрический многочлен вида

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)],$$

при каждом N принимает наименьшее значение, когда в качестве коэффициентов a_k, b_k многочлена $P_N(t)$ берутся соответствующие коэффициенты Фурье (2.3) – (2.5) a_k и b_k функции $s(t)$, т. е. когда тригонометрический многочлен $P_N(t)$ есть частичная сумма

$$s(t) \equiv {}^{0} + \lceil a \cos(k\omega t) \qquad \sum_{N} \overline{2} \lfloor_{k1\,k1} \rfloor$$

$$+ b \sin(k\omega t) \rceil \qquad k=1 \qquad (2.14)$$

ряда Фурье функции $s(t)$.

Следует учитывать, что при усечении рядов Фурье определенное искажение функций существует всегда. Но при малой доле энергии отсекаемой части сигнала (при быстром затухании спектров функций с ростом номера гармоники) этот эффект, получивший название эффекта Гиббса, может быть и малозаметен. На скачках и разрывах функций эффект Гиббса проявляется наиболее ярко, что может весьма существенно сказаться на качестве и точности обработки сигналов:

– крутизна перепадов «размывается», т. к. она не может быть больше, чем крутизна (в нулевой точке) последней сохраненной гармоники ряда (2.12) или (2.13);

– по обе стороны «размытых» перепадов появляются выбросы и затухающие осцилляции с частотой, равной частоте последнего сохраненного или первого отброшенного члена ряда (2.12) или (2.13).

Более подробно проявление эффекта Гиббса будет рассмотрено далее в примере спектрального анализа и синтеза периодической последовательности прямоугольных импульсов.

Теорема Парсеваля. Определив среднюю мощность сигнала $s(t)$, представленного в виде ряда Фурье (2.2), за период колебаний T, получим:

$$P_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \qquad (2.15)$$

При выводе формулы (2.15) использовано соотношение

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)dt = \frac{1}{2}$$

Соотношение (2.15) представляет собой математическую запись теоремы Парсеваля, из которой следует, что если периодический сигнал $s(t)$ разлагается в ряд Фурье, то средняя за период мощность этого сигнала заключается в сумме мощностей постоянной составляющей и гармоник спектра Фурье.

При использовании вещественной формы записи ряда Фурье (2.7) равенство Парсеваля (2.15) можно, также переписать в виде

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{1}\right)^{\infty}\frac{2}{}$$

или

$$P_{cp} = P_0 + \sum P_k$$

$$P_{cp} = T\int s(t)dt$$

$$= \left|\ 2\ \right| + 2\sum A_k$$

$$0\ k=1$$

$$\left(\ \right)_{k=1}$$

(2.16)

$$\infty$$

,

(2.17)

где $\left(\frac{a_0}{1}\right)^2$ – мощность, постоянной составляющей спектра Фурье;

$$P_0 = \left|\ \overline{2}\ \right|$$

$$\left(\ \right)$$

$P_k = \frac{1}{2}A^2$ – мощность k-ой гармоники спектра Фурье.

И, наконец, для комплексного ряда Фурье равенство Парсеваля принимает вид:

$$P_{cp} = \int s(t)dt = \sum C_k \overline{T}$$

(2.18)

Множество величин спектром мощности периодического сигнала.

Следует учитывать, что при усечении рядов Фурье N членами (гармониками), равенства Парсеваля принимают форму неравенств:

$$P_{cp} = T \int s(t)dt \geq \sum_{k=1}^{N} \left(a_k + b_k \right)$$

(2.19)

(2.20)

(2.21)

Оборудование и материалы

Для выполнения лабораторной работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 MB Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов 256).

Для выполнения лабораторной работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 13 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении лабораторной работы **запрещается**:

– самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;

– нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т.д.;

– принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Указания по порядку выполнения работы

Методику выполнения работы рассмотрим на примере спектрального анализа и синтеза в усеченном базисе Фурье (ограничиться рассмотрением десяти гармоник т. е. N =10) периодической последовательности прямоугольных импульсов с высотой A = 1 В, длительностью τ = 0,2 с и периодом T = 1 с (рисунок 2.3).

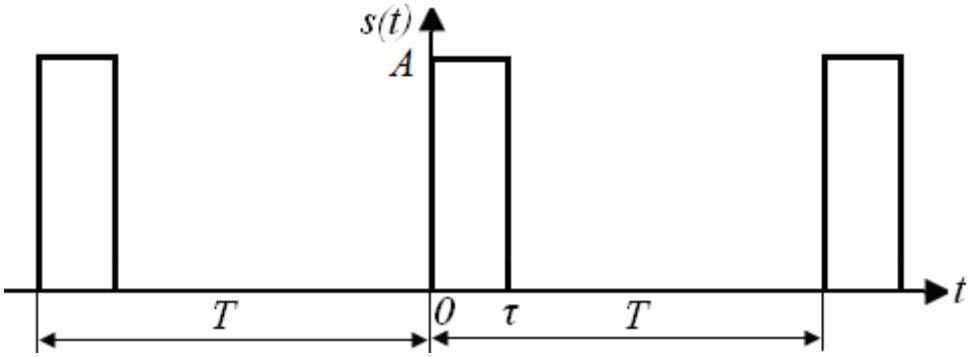


Рисунок 2.3 – Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Требуется для сигнала $s(t)$ определить:

– ω_1 – основную круговую частоту периодического сигнала (частоту первой

гармоники), рад/с;

– a_k – коэффициент k-той косинусной составляющей спектра Фурье периодического сигнала, В;

– b_k – коэффициент k-той синусной составляющей спектра Фурье периодического сигнала, В;

– $a_0/2$ – постоянную составляющую спектра Фурье периодического сигнала, В;

– A_k – амплитуду k-той гармоники спектра Фурье периодического сигнала, В;

– ϕ_k – начальную фазу k-той гармоники спектра Фурье периодического сигнала, радианы или градусы;

– амплитудную и фазовую спектральные диаграммы периодического сигнала (построить линейчатые спектры);

– восстановленный по усеченному ряду Фурье сигнал $s_N(t)$ являющийся приближенным изображением сигнала $s(t)$;

– расстояние и квадрат расстояния между сигналами $s_N(t)$ и $s(t)$ за период колебаний T, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$;

– среднюю мощность сигнала $s(t)$ за период колебаний T;

– сумму мощностей постоянной составляющей и гармоник спектра Фурье, $В^2$, и выполнение неравенства Парсеваля;

– tm – момент времени, когда восстановленный по усеченному ряду Фурье сигнал $s_N(t)$ принимает максимальное значение (исследование эффекта Гиббса), с;

– Δ – максимальное значение абсолютной ошибки восстановления сигнала, обусловленное наличием эффекта Гиббса, В;

– Δ% – максимальное значение относительной ошибки восстановления сигнала, выраженное в процентах, обусловленное наличием эффекта Гиббса;

– исследовать, как влияет изменение количества гармоник усеченного ряда Фурье на изменение параметров эффекта Гиббса – *tm*, Δ и Δ%.

Рассмотрим решение поставленной задачи в математическом пакете

Mathcad.

В приводимом ниже документе Mathcad приняты следующие обозначения:

– s(t) – функция, описывающая зависимость отдельного импульса, составляющего периодическую последовательность импульсов, от текущего времени в пределах одного периода T;

– sN(t) – периодическая функция, восстановленная (спектральный синтез) по результатам спектрального анализа (разложению в ряд Фурье) функции s(t) по N гармоникам;

– T – период, с;

– τ – длительность импульсов, с;

– A – высота импульса, В;

– N – число рассчитываемых гармоник спектра периодической последовательности импульсов (задача спектрального анализа);

– a_k ,b_k – коэффициент k-той косинусной и синусной составляющей спектра Фурье периодического сигнала (формула (2.2)), k = 1, 2, 3, ... , N;

– A_k ,ϕ$_k$ – амплитуда и начальная фаза k-той гармоники спектра Фурье периодического сигнала (формула (2.7)), k = 1, 2, 3, ... , N;

– a_0, A_0 – удвоенное значение постоянной составляющей спектра Фурье периодического сигнала (формулы (2.2) и (2.7));

– tm – момент времени, когда восстановленный по усеченному ряду Фурье сигнал sN(t) принимает максимальное значение (исследование эффекта Гиббса);

– Δ – максимальное значение абсолютной ошибки восстановления сигнала, обусловленное наличием эффекта Гиббса;

– Δ% – максимальное значение относительной ошибки

восстановления сигнала, обусловленное наличием эффекта Гиббса;

Решение:

1. Запускаем математический пакет Mathcad. Согласно форме сигнала $s(t)$ (таблица 2.3) и заданным параметрам вводим определение сигнала и строим его график в пределах одного периода (рисунок 2.4).

$A := 1 \qquad \tau := 0.2 \qquad T := 1$

$$s(t) := \begin{cases} A & \text{if } 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{if } \tau \le t \le T \end{cases}$$

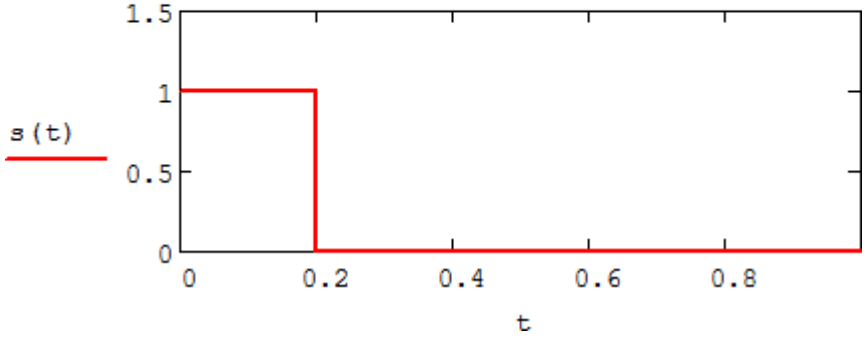


Рисунок 2.4 – Определение и график сигнала $s(t)$ в пределах одного периода

2. Вычисляем основную круговую частоту периодического сигнала (частоту первой гармоники), рад/с, (рисунок 2.5).

$$\omega 1 := \frac{2 \cdot \pi}{T} = 6.283$$

Рисунок 2.5 – Вычисляем основную круговую частоту периодического сигнала (частоту первой гармоники)

Как видно из рисунка 2.5, частота первой гармоники составляет 6,283 рад/с.

3. Задаем количество гармоник усеченного ряда Фурье (N = 10), формируем ранжированную переменную k (k = 0, 1, 2, … , 10) и вычисляем коэффициент a_k k-той косинусной составляющей спектра Фурье периодического сигнала (рисунок 2.6).

$$a_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \cos(k \cdot \omega 1 \cdot t)\ dt$$

Рисунок 2.6 – Вычисляем коэффициент k-той косинусной составляющей спектра Фурье периодического сигнала

4. Вычисляем коэффициент b_k *k*-той синусной составляющей спектра Фурье периодического сигнала (рисунок 2.7).

$$b_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \sin(k \cdot \omega 1 \cdot t)\ dt$$

Рисунок 2.7 – Вычисляем коэффициент *k*-той синусной составляющей спектра Фурье периодического сигнала

5. Отображаем в виде векторов a_k и b_k рассчитанные значения коэффициентов (рисунок 2.8).

$a =$

	0
0	0.4
1	0.303
2	0.094
3	-0.062
4	-0.076
5	$-1.411 \cdot 10^{-7}$
6	0.05
7	0.027
8	-0.023
9	-0.034
10	$-5.581 \cdot 10^{-7}$

Рисунок 2.8 – Рассчитанные значения коэффициентов a_k и b_k

6. Вычисляем постоянную $a_0/2$ спектра Фурье периодического составляющую сигнала (рисунок 2.9).

$$a_0 := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t)\ dt = 0.4 \qquad \frac{a_0}{2} = 0.2$$

Рисунок 2.9 – Вычисляем постоянную составляющую спектра Фурье периодического сигнала

Примечание – Строго говоря, можно было повторно и не вычислять постоянную составляющую спектра Фурье периодического сигнала, т. к.

удвоенное значение этой составляющей совпадает со значением элемента вектора ^{a} (рисунок) при значении индекса $k = 0$.

7. Вычисляем и отображаем амплитуды A_k , В, и начальные фазы ϕ_k , рад, гармоник спектра Фурье периодического сигнала (рисунок 2.10).

Примечания

– На рисунке 2.10 функция `atan2(x,y)` возвращает угол, отсчитанный от оси `x` против хода часовой стрелки до направления на точку с координатами `x` и `y`. Результат выражается в радианной мере в диапазоне между –π и π, включая и –π.

– При вычислении начальных фаз ϕ_k гармоник было использовано ограничение на абсолютную величину *k*-й синусной составляющей спектра

| |

Фурье периодического сигнала bk ▯10^{-3} т. к. без этого ограничения, например,

$$A_k := \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}$$

$$\varphi_k := \begin{cases} \operatorname{atan2}(a_k, b_k) & \text{if } |b_k| \geq 10^{-3} \\ 0 & \text{if } |b_k| < 10^{-3} \end{cases}$$

$A =$

	0
0	0.4
1	0.374
2	0.303
3	0.202
4	0.094
5	$1.137 \cdot 10^{-6}$
6	0.062
7	0.086
8	0.076
9	0.042
10	$2.325 \cdot 10^{-6}$

$\varphi =$

	0
0	0
1	0.628
2	1.256
3	1.885
4	2.513
5	0
6	0.629
7	1.256
8	1.884
9	2.512
10	0

для пятой гармоники имеем $b5 = -1{,}128 \cdot 10^{-6}$, $a5 = -1{,}411 \cdot 10^{-7}$ и `atan2(a5,b5)=-1,659` рад или –97,127 градусов, что является ошибкой.

Рисунок 2.10 – Амплитуды и начальные фазы гармоники спектра Фурье периодического сигнала

8. Строим амплитудную и фазовую спектральные диаграммы периодического сигнала (рисунки 2.11 и 2.12).

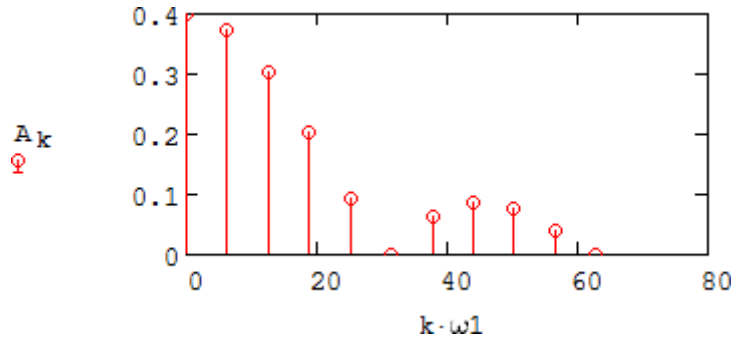


Рисунок 2.11 – Амплитудная спектральная диаграмма периодического сигнала

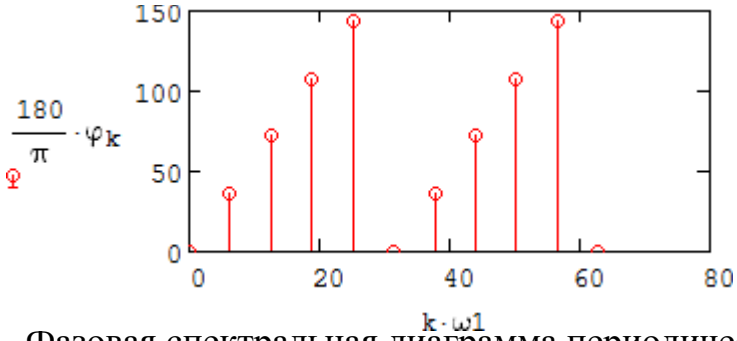


Рисунок 2.12 – Фазовая спектральная диаграмма периодического сигнала

Примечания

– На рисунках 2.11 и 2.12 вдоль оси абсцисс отложена круговая частота k-й гармоники, рад/с;

– На рисунке 2.11 вдоль оси ординат отложена амплитуда k-й гармоники, включая и удвоенное значение постоянной составляющей (A_0) спектра Фурье периодического сигнала в вольтах.

– На рисунке 2.12 вдоль оси ординат отложена начальная фаза k-той гармоники спектра Фурье периодического сигнала в градусах.

9. Находим, восстановленный по усеченному ряду Фурье сигнал $s_N(t)$, являющийся приближенным изображением сигнала $s(t)$, и строим его временную диаграмму в пределах двух периодов и временную диаграмму исходного сигнала (рисунок 2.13).

$s(t)$ в пределах, заданного в пределах

одного периода

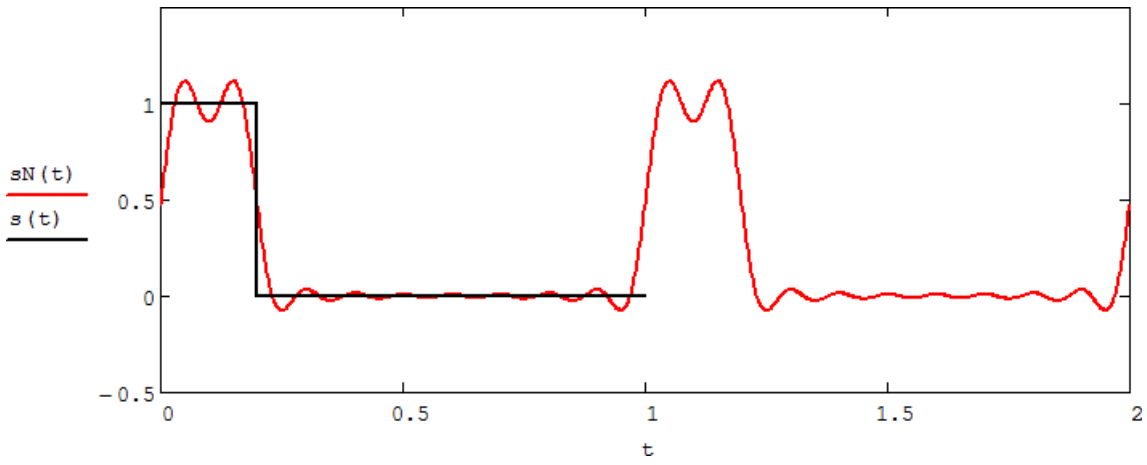


Рисунок 2.13 – Восстановленный по усеченному ряду Фурье сигнал $s_N(t)$ и исходный сигнал $s(t)$, заданный в пределах одного периода

10. Расстояние и квадрат расстояния между сигналами колебаний $s_N(t)$ и $s(t)$ за период T (рисунок 2.14).

$$ds_sN := \sqrt{\int_0^T (sN(t) - s(t))^2 \, dt} = 0.1 \qquad ds_sN^2 = 0.01$$

Рисунок 2.14 – Определение расстояния и квадрата расстояния между сигналами $sN(t)$ и $s(t)$

11. Квадрат расстояния между сигналами $s_N(t)$ и $s(t)$ за период колебаний T (рисунок 2.15), выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$.

$$Es := \int_0^T s(t)^2 \, dt = 0.2 \qquad \varepsilon := \frac{ds_sN^2}{Es} \cdot 100 = 5.009$$

Рисунок 2.15 – Квадрата расстояния между сигналами $sN(t)$ и $s(t)$, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$

Делаем вывод о том, что если ограничиться рассмотрением десяти гармоник спектра Фурье, то квадрат расстояния между сигналами $sN(t)$ и $s(t)$ составляет примерно 5% относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$.

12. Находим среднюю мощность сигнала $s(t)$ за период колебаний T (рисунок 2.16).

$$Pcp := \frac{1}{T} \cdot \int_0^T s(t)^2 \, dt = 0.2$$

Рисунок 2.16 – Средняя мощность сигнала $s(t)$ за период колебаний T

13. Вычисляем сумму мощностей постоянной составляющей и гармоник спектра Фурье и проверяем выполнение неравенства Парсеваля (рисунок 2.17).

$$P0 := \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 = 0.04 \qquad P_k := \frac{1}{2} \cdot (A_k)^2 \qquad P =$$

	0
0	0.08
1	0.07
2	0.046
3	0.02
4	$4.372 \cdot 10^{-3}$
5	$6.466 \cdot 10^{-13}$
6	$1.943 \cdot 10^{-3}$
7	$3.738 \cdot 10^{-3}$
8	$2.866 \cdot 10^{-3}$
9	$8.628 \cdot 10^{-4}$
10	$2.702 \cdot 10^{-12}$

$$P\Sigma := P0 + \sum_{k=1}^{N} P_k = 0.19$$

Рисунок 2.17 – Сумма мощностей постоянной составляющей и десяти гармоник спектра Фурье

Сравнивая между собой Pcp (рисунок 2.16) и PΣ (рисунок 2.16) убеждаемся в том, что Pcp > PΣ, т. е. неравенство Парсеваля выполняется.

14. Как видно из рисунка 2.13, последовательность прямоугольных импульсов плохо подходит для представления рядом Фурье – она содержит скачки, а сумма любого числа гармонических составляющих с любыми амплитудами всегда будет непрерывной (и более того – бесконечно дифференцируемой во всех точках) функцией. Поэтому поведение ряда Фурье в окрестностях разрывов представляет особый интерес. На временной диаграмме, представленной на рисунке 2.13, хорошо видно, что в окрестности точки разрыва суммирование десяти членов ряда Фурье дает наклонный участок. В

самой точке разрыва (в момент времени $t = 0$) ряд Фурье сходится к полусумме правого и левого пределов:

$$x(t \quad \underline{1}\lceil \lim s(t) + \lim s(t) \rceil = \underline{1}(0+1) =$$

$$0{,}5 \cdot$$

$$2 \quad t \to t\text{-}0 \quad t \to t\text{+}0 \quad 2$$

$$\lfloor \; 0\,0 \; \rfloor$$

Здесь $s(t)$ – исходный сигнал, $sN(t)$ – сумма усеченного ряда Фурье для него. На примыкающих к разрыву участках сумма усеченного ряда Фурье дает заметные пульсации. Это явление, присущее рядам Фурье для любых сигналов с разрывами первого рода (скачками), как отмечалось ранее, называется эффектом Гиббса. В ряде работ, например, показано, что амплитуда первого (самого большого) выброса составляет примерно 9 % от величины скачка. Убедимся в этом самостоятельно и определим момент времени *tm*, с, когда

восстановленный по усеченному ряду Фурье сигнал $sN(t)$ принимает первое после момента времени $t = 0$ максимальное значение (рисунок 2.18).

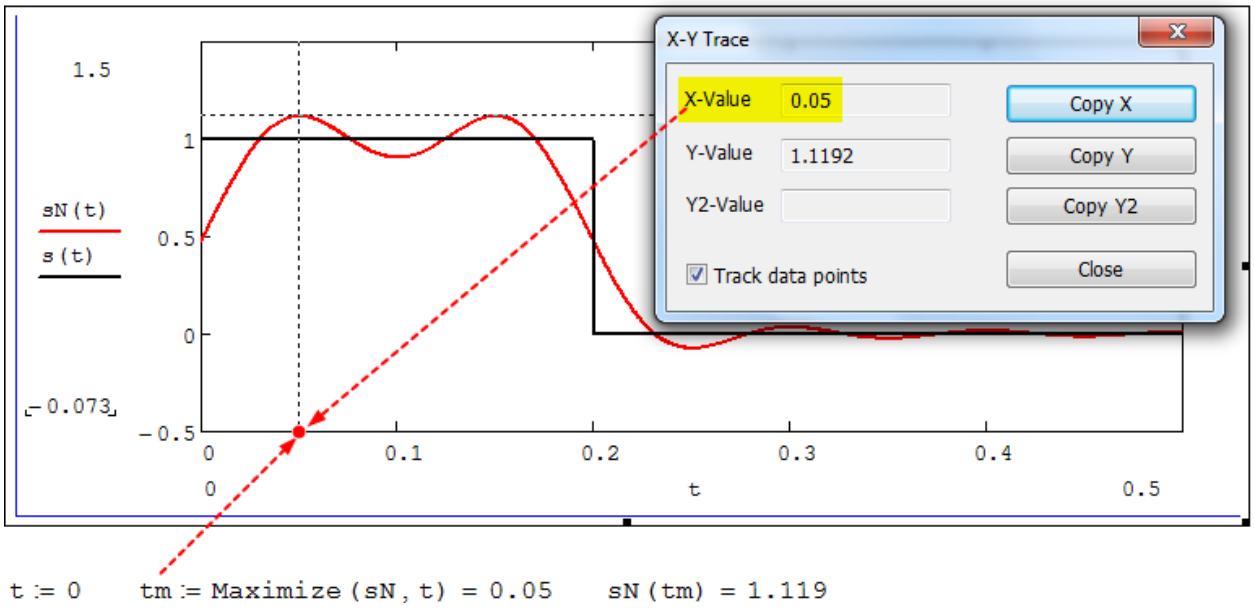


Рисунок 2.18 – Момент времени, когда восстановленный по усеченному ряду

Фурье сигнал $s_N(t)$ принимает максимальное значение

Примечание – На рисунке 2.18 реализовано два способа определения момента времени tm:

– первый способ основан на использовании окна трассировки графика «X- Y Trace»;

– второй способ основан на использовании встроенной в Mathcad функции Maximize(f, var1), которая возвращает значение переменной var1 при котором функция f(var1) принимает максимальное значение. Для того, чтобы исключить неоднозначность определения параметра tm (на рисунке 2.18 у функции $sN(t)$ имеется несколько максимумов) перед обращением к функции Maximize(f, var1) задано начальное приближение этого параметра `t:= 0`, т. е. поиск параметра tm производится в начале системы координат при t равном нулю.

15. Вычисляем максимальное значение абсолютной ошибки Δ восстановления сигнала, обусловленное наличием эффекта Гиббса (рисунок 2.19).

$$\Delta := |sN(tm) - s(tm)| = 0.119$$

Рисунок 2.19 – Максимальное значение абсолютной ошибки восстановления сигнала, обусловленное наличием эффекта Гиббса

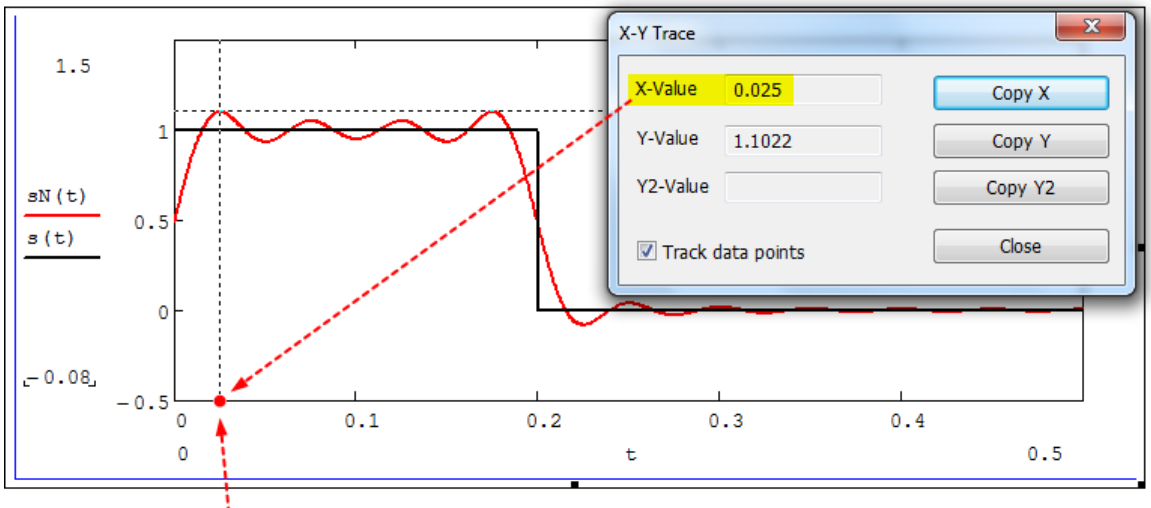
16. Определяем максимальное значение относительной ошибки восстановления сигнала Δ%, обусловленное наличием эффекта Гиббса, выраженное в процентах (рисунок 2.20).

$$\Delta\% := \frac{\Delta}{s(tm)} \cdot 100 = 11.917$$

Рисунок 2.20 – Максимальное значение относительной ошибки восстановления сигнала, обусловленное наличием эффекта Гиббса, выраженное в процентах

Как видно из рисунка 2.20, в рассматриваемом примере, вследствие эффекта Гиббса амплитуда первого (самого большого) выброса составляет примерно 12 % от величины скачка.

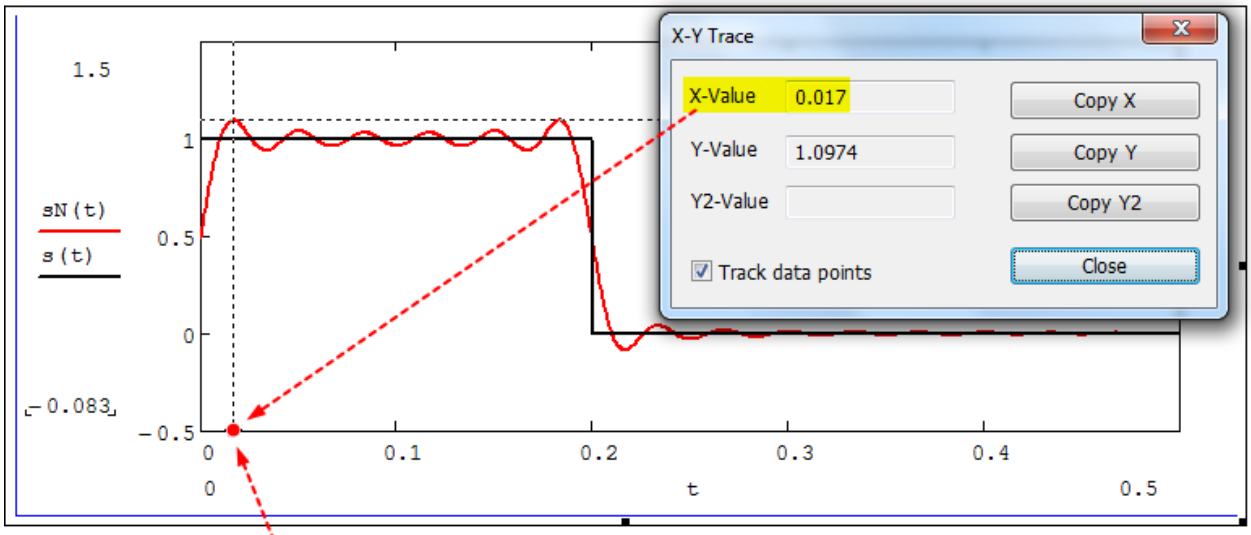
17. Исследуем, как повлияет на параметры эффекта Гиббса, изменение количества гармоник спектра сигнала. Увеличим количество гармоник в два и три раза (N = 20 и N = 30). Результат восстановления сигнала и Параметры эффекта Гиббса показаны на рисунках 2.21 и 2.22.



$t := 0.025 \quad tm := \text{Maximize}(sN, t) = 0.025 \quad sN(tm) = 1.102$

$\Delta := |sN(tm) - s(tm)| = 0.102 \quad \Delta\% := \frac{\Delta}{s(tm)} \cdot 100 = 10.218$

Рисунок 2.21 – Параметры эффекта Гиббса при числе гармоник $N = 20$



$t := 0.04 \quad tm := \text{Maximize}(sN, t) = 0.017 \quad sN(tm) = 1.098$

$\Delta := |sN(tm) - s(tm)| = 0.098 \quad \Delta\% := \frac{\Delta}{s(tm)} \cdot 100 = 9.764$

Рисунок 2.22 – Параметры эффекта Гиббса при числе гармоник $N = 30$

Анализ графика и данных, представленных на рисунках 2.21 и 2.22, свидетельствует о том, что при увеличении количество гармоник в два и три раза (т. е. с 10 до 20 и 30) количество пульсаций восстановленного сигнала тоже удвоилось (утроилось), а амплитуда первого (самого большого) выброса составляет примерно 10 % от величины скачка, то есть, практически, не изменилась. Таким образом, исследованный детерминированный,

периодический сигнал – периодическая последовательность прямоугольных импульсов (рисунок 2.3) может быть задан функцией $s(t)$ (временной подход) или представлен в виде линейчатого спектра амплитуд и фаз гармоник в базисе Фурье (рисунки 2.11 и 2.12) (спектральный подход).

Примечание – В ходе исследования влияния изменение количества гармоник спектра Фурье сигнала на параметры эффекта Гиббса одновременно были исследованы и другие параметры (таблица 2.2).

Из анализа данных, приведенных в таблице 2.2 можно сделать выводы о степени влияния изменение количества гармоник спектра Фурье сигнала на

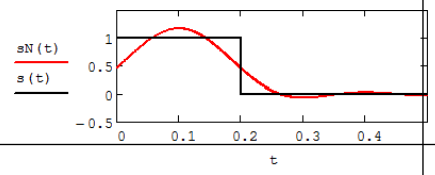
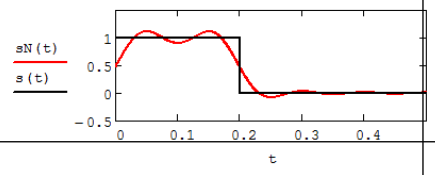
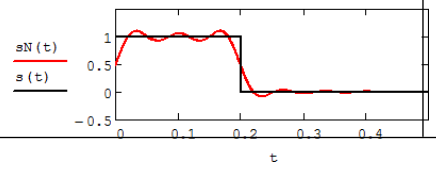
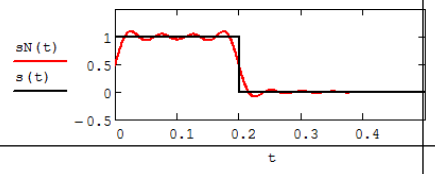
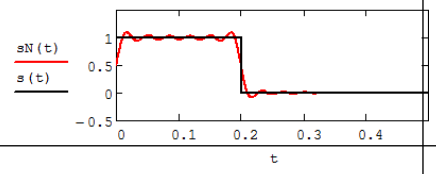
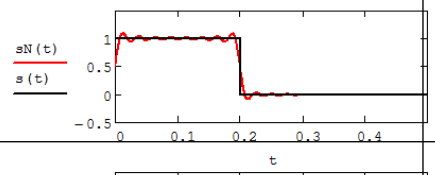
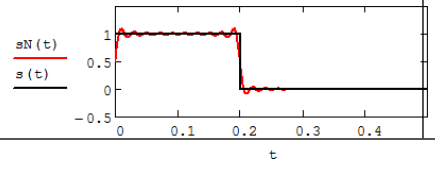
качество восстановления по усеченному ряду Фурье сигнала $_{sN}(t)$,

выполнение неравенства Парсеваля и параметры эффекта Гиббса сигнала $_{sN}(t)$

.

Таблица 2.2 – Результаты исследования спектрального анализа и синтеза периодического сигнала

N, ед.	Графики восстановленного по усеченному ряду Фурье	Квадрат расстояния между сигналами sN	Сумма мощностей постоянной составляющей и гармоник	Параметры эффекта Гиббса	
				tm, с	Δ%

	сигнала $s_N(t)$ и исходного сигнал $s(t)$, заданного в пределах одного периода	(t) и s (t) за период колебаний T, %	спектра Фурье, $В^2$		
5		9,720	0,181	0,1	17,223
10		5,009	0,190	0,05	11,917
15		3,389	0,193	0,033	10,73
20		2,526	0,195	0,025	10,218
30		1,688	0,197	0,017	9,764
40		1,265	0,197	0,012	9,557
50		1,013	0,198	0,009	9,441

Порядок выполнения работы

1. Запустить Mathcad.
2. Определить в программе Mathcad для заданного периодического сигнала

$s(t)$ в соответствии с вариантом индивидуального задания (таблица 2.3):

– ω_1 – основную круговую частоту периодического сигнала (частоту первой гармоники), рад/с;

– a_k – коэффициент k-й «косинусной» составляющей спектра Фурье периодического сигнала, В;

– b_k – коэффициент k-й «синусной» составляющей спектра Фурье периодического сигнала, В;

– $a_0/2$ – постоянную составляющую спектра Фурье периодического сигнала, В;

– A_k – амплитуду k-й гармоники спектра Фурье периодического сигнала, В;

– ϕ_k – начальную фазу k-й гармоники спектра Фурье периодического сигнала, радианы или градусы;

– амплитудную и фазовую спектральные диаграммы периодического сигнала (построить линейчатые спектра);

– восстановленный по усеченному ряду Фурье сигнал $s_N(t)$ являющийся приближенным изображением сигнала $s(t)$;

– расстояние и квадрат расстояния между сигналами $s_N(t)$ и $s(t)$ за период колебаний T, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$;

– среднюю мощность сигнала $s(t)$ за период колебаний T;

– сумму мощностей постоянной составляющей и гармоник спектра Фурье и проверить выполнение неравенства Парсеваля;

– tm – момент времени, когда восстановленный по усеченному ряду Фурье сигнал $s_N(t)$ принимает максимальное значение (исследование эффекта Гиббса);

– Δ – максимальное значение абсолютной ошибки восстановления сигнала, обусловленное наличием эффекта Гиббса;

– Δ% – максимальное значение относительной ошибки восстановления сигнала, обусловленное наличием эффекта Гиббса;

3. Исследовать влияние изменения количества гармоник спектра Фурье сигнала на качество восстановления по усеченному ряду Фурье сигнала выполнение неравенства Парсеваля и параметры эффекта Гиббса сигнала. Результаты исследования оформить в виде таблицы 2.2.

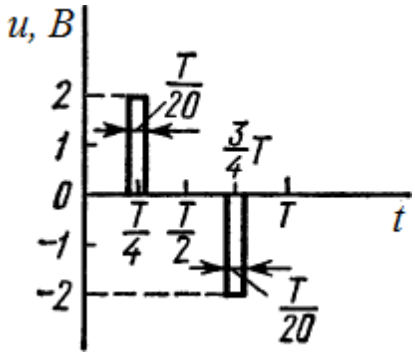
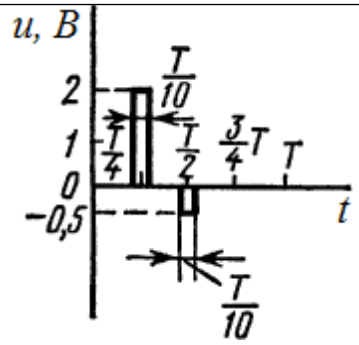
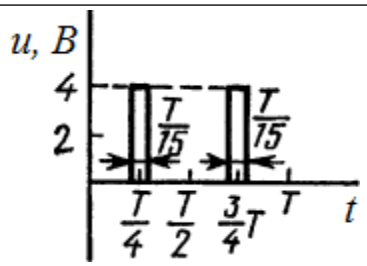
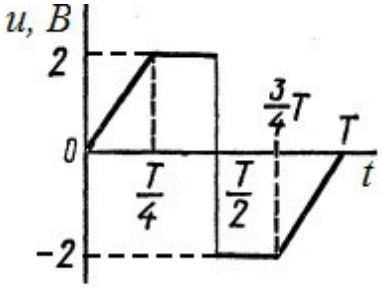
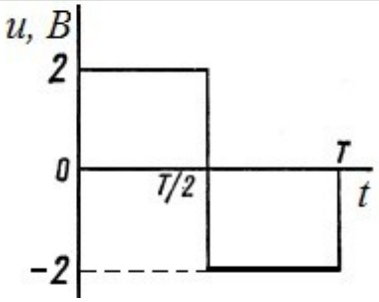
$s_N(t)$, $s_N(t)$

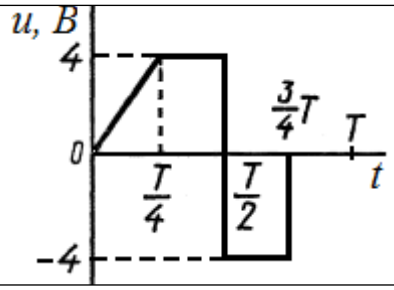
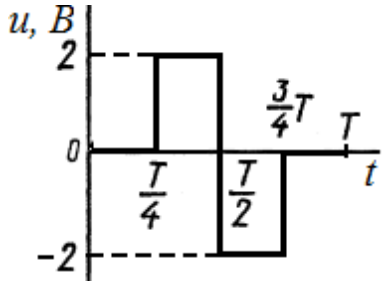
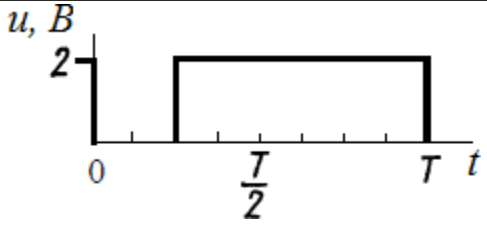
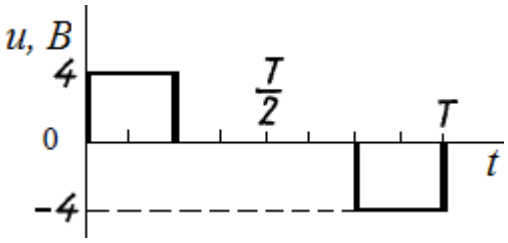
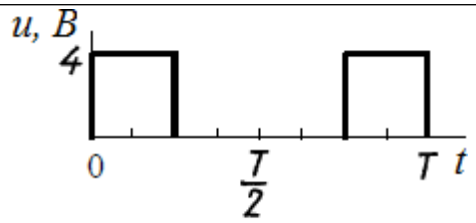
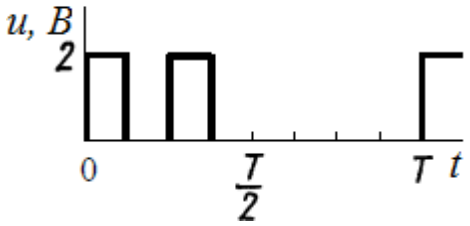
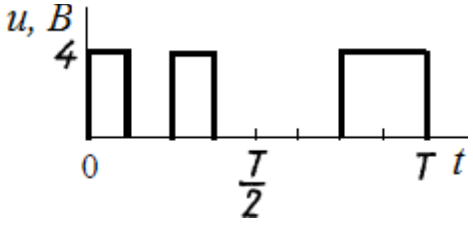
4. Сохранить результаты спектрального анализа и синтеза заданного периодического сигнала.
5. Сформировать отчет по лабораторной работе.
6. Защитить работу.

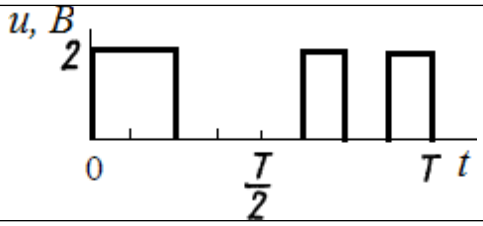
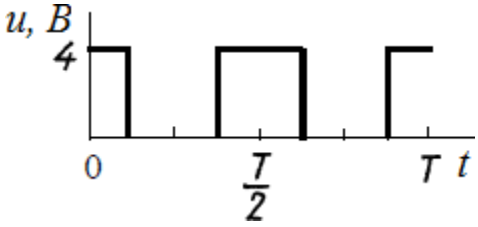
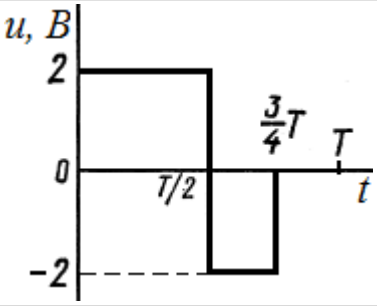
Варианты заданий

Номер варианта соответствует номеру фамилии студента в списке учебной группы (подгруппы).

Таблица 2.3 – Варианты исследуемых сигналов

Вариант	Тип сигнала	T, с
1		$20 \cdot 10^{-3}$
2		$10 \cdot 10^{-3}$
3		$15 \cdot 10^{-3}$
4		$4 \cdot 10^{-3}$
5		$2 \cdot 10^{-3}$

6		$20\cdot10^{-3}$
7		$10\cdot10^{-3}$
8		$8\cdot10^{-3}$
9		$16\cdot10^{-3}$
10		$8\cdot10^{-3}$
11		$24\cdot10^{-3}$
12		$32\cdot10^{-3}$

13		$40 \cdot 10^{-3}$
14		$8 \cdot 10^{-3}$
15		$16 \cdot 10^{-3}$

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе оформляется в виде документа Word и должен включать:

– название лабораторной работы;

– цель и программу лабораторной работы;

– формулировку индивидуального задания и результат его выполнения;

– краткие выводы по результатам выполнения лабораторной работы.

Контрольные вопросы

1. Какой сигнал называется периодическим?
2. В чем заключается основная идея спектрального анализа периодических сигналов?

3. Что такое спектр периодического сигнала?

4. Каким требованиям должна удовлетворять периодическая функция времени $s(t)$ для того, чтобы еѐ можно было подвергнуть спектральному анализу по Фурье?

5. Что такое период периодического сигнала?

6. Что такое основная частота периодического сигнала?

7. Как выглядит запись ряда Фурье для периодических сигналов $s(t)$ на интервале времени $-\infty \le t \le \infty$ (синусно-косинусная, комплексная и вещественная формы)?

8. Каковы базисные функции синусно-косинусной формы ряда Фурье?

9. Как определить постоянную составляющую спектра Фурье периодического сигнала? Каков смысл этого параметра?

10. Как определить коэффициент k-й «косинусной» («синусной») составляющей спектра Фурье периодического сигнала?

11. Какие выводы можно сделать из сравнения между собой вещественной к синусно-косинусной формы записи ряда Фурье?

12. Что такое амплитудный спектр периодического сигнала?

13. Что такое амплитудная спектральная диаграмма периодического сигнала?

14. Что такое фазовый спектр периодического сигнала?

15. Что такое фазовая спектральная диаграмма периодического сигнала?

16. Что такое гармоника?

17. Продолжите фразу: «Если анализируемый сигнал s(t) является вещественным, то ...».

18. Каковы основные свойства спектральных диаграмм периодических сигналов?

19. Продолжите фразу: «Когда возникает необходимость аппроксимировать периодическую функцию тригонометрическим полиномом, то наименьшее квадратичное отклонение получится, если ...».

20. Как формулируется равенство Парсеваля?

21. Что называется спектром мощности периодического сигнала?

22. Чем обусловлен эффект Гиббса при спектральном синтезе периодических сигналов? Как проявляется этот эффект?

23. Какие параметры эффекта Гиббса сигнала были исследованы в лабораторной работе?

24. Какова методика выполнения индивидуального задания?

25. Какие выводы можно сделать по результатам выполнения индивидуального задания?

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

1. Кологривов, В. А. Прикладные математические методы в радиотехнике. В 2-х частях: учебное пособие / В. А. Кологривов. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. - Ч. 1. – Аналоговые системы. – 159 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=209003

2. Умняшкин, С. В. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов: учебное пособие / С. В. Умняшкин. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Техносфера, 2012. – 368 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233733

3. Каганов В.И., Битюков В.К. Основы радиоэлектроники и связи: учебное пособие. – М.: Горячая линия - Телеком, 2012. – 542 с. http://www.iprbookshop.ru/12017

4. Богомолов, С. И. Введение в системы радиосвязи и радиодоступа: учебное пособие / С.И. Богомолов; Министерство образования и науки Российской Федерации, Томский Государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники (ТУСУР). – Томск: Эль Контент, 2012. – 152 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=208609

5. Вадутов О.С. Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / Вадутов О.С. – Томск: Томский политехнический университет, 2014. – 102 с. http://www.iprbookshop.ru/34676

Лабораторная работа 3

Исследование спектрального анализа и синтеза сигналов на основе преобразования Фурье

Цель работы:– приобретение навыков спектрального анализа и синтеза сигналов на основе преобразования Фурье.

Формируемые компетенции или их части

ОПК-2	Способность корректно применять при решении профессиональных задач соответствующий математический аппарат алгебры, геометрии, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей, математической статистики, математической логики, теории алгоритмов, теории информации, в том числе с использованием вычислительной техники.
ОПК-3	Способность применять языки, системы и инструментальные средства программирования в профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Любой детерминированный сигнал может быть задан в аналитической форме в виде $s(t)$, где независимая переменная t – время. Однако существует и другой способ описания произвольного детерминированного сигнала. Математическое представление сигнала по второму способу имеет вид $S(f)$, где независимая переменная f – частота (размерность f , Гц, обратна размерности t, с). Эти два представления сигнала связаны друг с другом прямым

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft}\, dt \qquad (3.2)$$

и обратным

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft}\, df \qquad (3.1)$$

преобразованием Фурье. Следовательно, использование методов обработки сигнала требует знания свойств преобразования Фурье. Этим объясняется

исключительная важность приобретение навыков спектрального анализа и синтеза сигналов на основе преобразования Фурье.

Две функции $s(t)$ и $S(f)$, связанные преобразованием Фурье, называют функциями, сопряженными по Фурье. Это преобразование принято обозначать специальным символом. Например, вместо (3.1) и (3.2) можно написать:

$$S(f) = \Phi\{s(t)\}, \quad (3.3)$$

$$s(t) = \Phi^{-1}\{S(f)\}. \quad (3.4)$$

где Φ – символ прямого Фурье-преобразования;

Φ^{-1} – символ обратного Фурье-преобразования.

Чтобы интегральное преобразование Фурье было применимо, сигнал $s(t)$ должен удовлетворять следующим требованиям:

– должны выполняться условия Дирихле;

– сигнал должен быть абсолютно интегрируемым. Это означает, что интеграл от его модуля на интервале $-\infty < t < \infty$ должен быть конечной величиной:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty .$$

Примечание – Привлечение математического аппарата обобщенных функций предоставляет возможность выполнения Фурье-анализа и для некоторых сигналов, не удовлетворяющих перечисленным требованиям.

Поясним физический смысл приведенных выражений прямого и обратного преобразований Фурье. Согласно (3.2) детерминированный сигнал

произвольной формы, описываемый вещественной функцией $s(t)$,

представляется бесконечной суммой гармонических колебаний. Сами эти колебания бесконечно малы по амплитуде и отличаются по частоте бесконечно малую величину. Это отличие по частоте составляет df, а амплитуда

составляющей $S(f)df$, где $S(f)$ есть спектральная плотность размерностью

В/Гц. Поскольку $S(f)$ есть непрерывная функция, то спектр одиночного

импульса является сплошным.

Если анализируемый сигнал $s(t)$ – вещественная функция, то соответствующая спектральная функция импульса $S(f)$ является «сопряженно-симметричной» относительно нулевой частоты. Это означает, что значения спектральной функции импульса $S(f)$ на частотах f и $-f$ являются комплексно-сопряженными по отношению друг к другу:

$$S(-f) = S^{*}(f)$$

Если $s(t)$ – четная функция, то, как и в случае ряда Фурье, его спектр будет чисто вещественным и, следовательно, будет являться четной функцией. Если, напротив, $s(t)$ – функция нечетная, то спектральная функция импульса $S(f)$ будет чисто мнимой и нечетной.

Модуль спектральной функции сигнала называют амплитудным спектром, а ее аргумент – фазовым спектром сигнала:

$$|S(f)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 S(f) + \mathrm{Im}^2 S(f)}. \quad (3.5)$$

$$\arg S(f) = arctg \frac{\mathrm{Im}\, S(f)}{\mathrm{Re}\, S(f)}. \quad (3.6)$$

Легко показать, что для вещественного сигнала $s(t)$ амплитудный спектр является четной, а фазовый – нечетной функцией частоты:

$$\left|S(-f)\right| = \left|S(f)\right|,$$

$$\arg S(-f) = -\arg S(f).$$

Пример расчета спектральной функции импульсного сигнала и соответствующие графики амплитудного и фазового спектра сигнала будут приведены далее.

Итак, прямое интегральное преобразование Фурье (3.1) ставит в соответствие сигналу, заданному во времени, его спектральную функцию. При этом осуществляется переход из временной области в частотную область. Прямое и обратное интегральное преобразование Фурье (3.1) и (3.2) являются обратимыми, поэтому представление сигнала в частотной области

(спектральная функция сигнала $S(f)$) содержит ровно столько же информации, сколько и исходный сигнал $s(t)$, заданный во временной области. При частоте $f = 0$ из формулы (3.1) следует результат, позволяющий по «площади импульса» быстро определить центральное значение спектральной функции импульса на нулевой частоте:

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)dt,$$

Определим энергию сигнала исходя из его спектрального и временного представления. При активной нагрузке в один Ом соответственно имеем для спектрального представления сигнала

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \qquad (3.7)$$

и для временного представления сигнала

$$E_t = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt \qquad (3.8)$$

В соответствии с равенством Парсеваля значения энергии, полученные по обоим методам – спектральному и временному – должны быть равны: $E_f = E_t$. Однако поскольку полоса пропускания реальных физических устройств обработки

сигналов всегда ограничена, то вместо (3.7) следует записать:

$$E_f = \int_{-f_в}^{f_в} |S(f)|^2 df \qquad (3.9)$$

и соответственно получить $E_f < E_t$, где $f_в$ – верхняя граничная частота полосы пропускания физического устройства обработки сигналов, например, усилителя. Введем параметр $k = E_f / E_t$, который назовем коэффициентом уменьшения энергии импульса по причине ограничения полосы пропускания физического устройства обработки сигналов. При этом появляется возможность решить и

обратную задачу: исходя из допустимой величины коэффициента k, определить минимально возможное значение частоты $f_{\text{В}}$.

Заменив в (3.2) бесконечные пределы интегрирования конечными, получим новый сигнал

$$s_{\varepsilon}(t) = \int_{-f_{\text{В}}}^{{}^{\text{В}}} S(f)\, e^{j2\pi ft}\, dt. \qquad (3.10)$$

Очевидно, что максимальное значение погрешности $\varepsilon(t, f_{\text{В}}) = \left| s_{\varepsilon}(t, f_{\text{В}}) - s(t) \right|$

восстановления сигнала при ограничении полосы пропускания физического устройства обработки сигналов интервалом частот $(-f_{\text{В}}, f_{\text{В}})$ будет тем больше, чем меньшее ширина полосы пропускания физического устройства обработки сигналов:

$$\Delta F = 2 f_{\text{В}}. \qquad (3.11)$$

С учетом этого в качестве количественной меры погрешности восстановления сигнала при ограничении полосы пропускания физического устройства обработки сигналов интервалом частот $(-f_{\text{В}}, f_{\text{В}})$ будем использовать

соотношение квадрата расстояния между сигналами $s_{\varepsilon}(t)$ и $s(t)$, выраженного в

процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$:

$$\frac{\left\| s_{\varepsilon}(t, f_{\text{В}}) - s(t) \right\|}{\left\| s_{\varepsilon}(t, f) - s(t) \right\|^2}.$$

$$\varepsilon^2(f_{\text{В}}) = \cdot 100 = {}^{\text{В}} \quad s(t)^2 E_t \quad \| \quad \| \cdot 100 \tag{3.12}$$

Очевидно, что в пределе при $f_{\text{В}} \to \infty$ имеем

$$\lim \sigma^2 (f) = 0 \cdot \quad f \to \infty \quad \varepsilon_{\text{В}} \tag{3.13}$$

В лабораторной работе необходимо исследовать влияние изменение верхней граничной частоты полосы пропускания физического устройства обработки

ε

сигналов $f_{\text{В}}$ на относительную среднеквадратическая погрешность $\sigma^2(f)$

восстановления исходного сигнала $s(t)$ по его спектральной функции с учетом

ограничения полосы пропускания физического устройства обработки сигналов интервалом частот ($-f_{В}, f_{В}$).

Оборудование и материалы

Аппаратура. Для выполнения лабораторной работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 MB Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов

Ÿ 256).

Программное обеспечение. Для выполнения лабораторной работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 10 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении лабораторной работы **запрещается**:

– самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;

– нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т.д.;

– принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Указания по порядку выполнения работы

Методику выполнения работы рассмотрим на следующем примере. Задан импульсный сигнал $s(t)$, представляющий собой отрезок синусоиды с

амплитудой $U = 2$ В, обращающейся в нуль на концах отрезка времени $[0, \tau]$, где $\tau = 1$ мс $= 10^{-3}$ с. Аналитическое описание сигнала представлено формулой

$$s(t) = U \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t\right), \qquad (3.12)$$

$$0 \le t \le \frac{\tau}{2}$$

Требуется определить:

1. Спектральную функцию сигнала $s(t)$;
2. Модуль и аргумент спектральной функции сигнала $s(t)$;
3. Построить графики амплитудного и фазового спектра сигнала $s(t)$;
4. Для семи значений коэффициента уменьшения энергии импульса по причине ограничения полосы пропускания физического устройства обработки сигналов k = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 0,95; 0,99:

– верхнюю граничную частоту полосы пропускания физического устройства обработки сигналов $f_В$, Гц;

– временную диаграмму исходного сигнала $s(t)$ и сигнала $s_\varepsilon(t)$,

представляющего результат восстановления исходного непрерывного сигнала $s(t)$ по его спектральной функции $S(f)$ при ограничении полосы пропускания физического устройства обработки сигналов интервалом частот $(-f_В, f_В)$;

– временную диаграмму функции $\varepsilon(t) = s_\varepsilon(t) - s(t)$, представляющую

модуль разности между сигналами $s_\varepsilon(t)$ и $s(t)$;

– квадрат расстояния между сигналами $s_\varepsilon(t)$ и $s(t)$;

– квадрат расстояния между сигналами $s_\varepsilon(t)$ и $s(t)$, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$.

Рассмотрим решение поставленной задачи в математическом пакете Mathcad:

1. Запускаем Mathcad. Согласно (3.8) и заданным параметрам вводим математическое определение сигнала $s(t)$ и строим его график (рисунок 3.1).

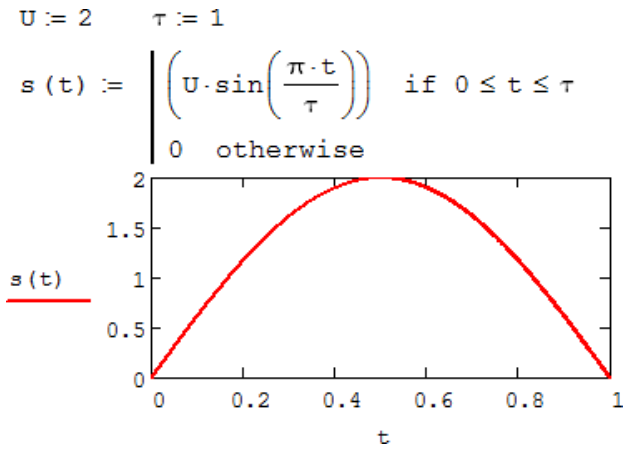


Рисунок 3.1 – Определение и график сигнала $s(t)$

2. Находим модуль и аргумент спектральной функции сигнала $s(t)$ и строим графики амплитудного и фазового спектра сигнала $s(t)$ (рисунки 3.2 и 3.3).

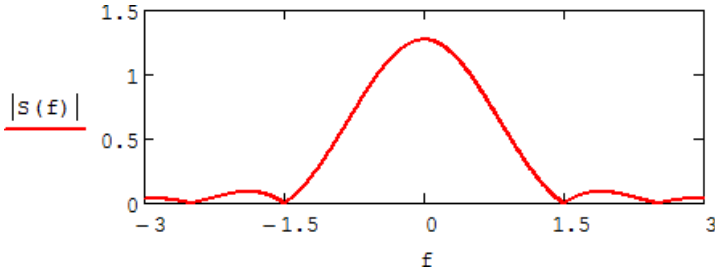


Рисунок 3.2 – Амплитудный спектр сигнала $s(t)$

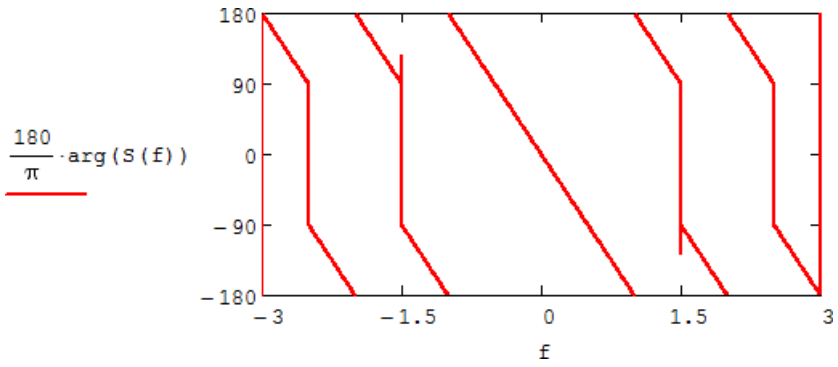


Рисунок 3.3 – Фазовый спектр сигнала $s(t)$

2. Задаем начальное приближение верхней граничной частоты полосы пропускания физического устройства обработки сигналов $f_В$ = 0,3 Гц, первое значение коэффициента уменьшения энергии импульса по причине ограничения полосы пропускания физического устройства обработки сигналов k = 0,5 и находим, используя блок Given в сочетании с функцией Find,

соответствующую верхнюю граничную частоту полосы пропускания физического устройства обработки сигналов f_B, Гц (рисунок 3.4).

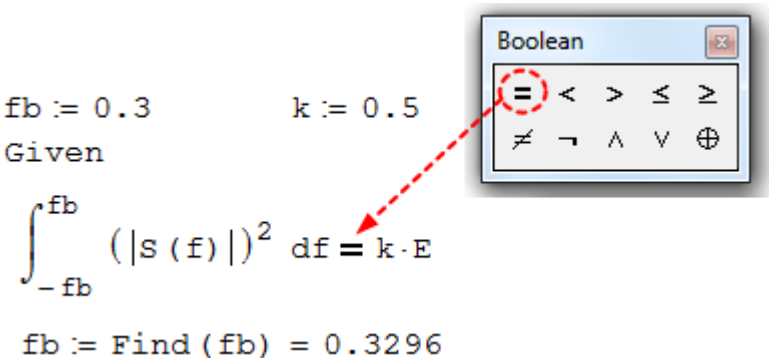


Рисунок 3.4 – Определяем верхнюю граничную частоту спектра f_B = 0,3296 кГц

3. Вычисляем по формуле (3.8) сигнал $s_\varepsilon(t)$, представляющий результат восстановления исходного непрерывного сигнала $s(t)$ по его спектральной функции $S(f)$ при ограничении полосы пропускания физического устройства обработки сигналов интервалом частот (–0,3296, 0,3296) кГц и строим его временную диаграмму (рисунок 3.5).

$$s\varepsilon(t) := \int_{-fb}^{fb} S(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \, df$$

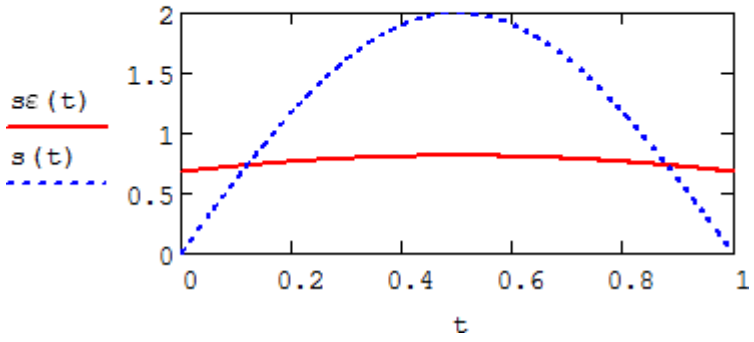


Рисунок 3.5 – Определение и графики сигналов $s(t)$ и $s_\varepsilon(t)$

4. Находим временную диаграмму функции $\varepsilon(t) = s_\varepsilon(t) - s(t)$,

представляющую модуль разности $s_\varepsilon(t)$ и $s(t)$ и строим еѐ между сигналами временную диаграмму (рисунок 3.6).

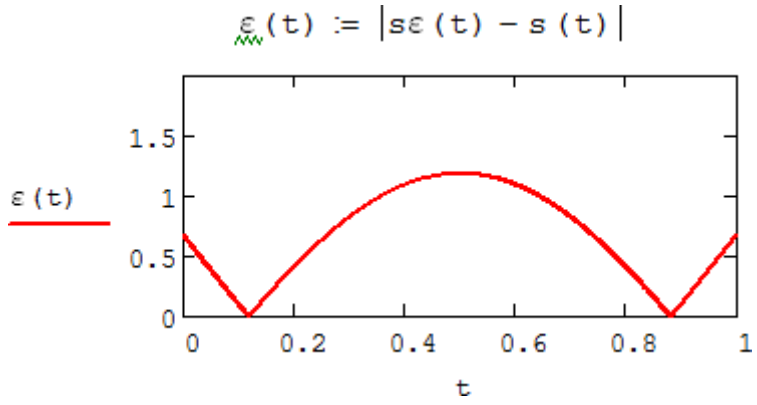


Рисунок 3.6 – Определение и временная диаграмма функции $\varepsilon(t) = s_\varepsilon(t) - s(t)$

5. Вычисляем квадрат расстояния между сигналами $s_\varepsilon(t)$ и $s(t)$ (рисунок 3.7).

$$dsε_s := \sqrt{\int_0^\tau (sε(t) - s(t))^2 \, dt} = 0.767 \qquad dsε_s^2 = 0.5883$$

Рисунок 3.7 – Определение расстояния и квадрата расстояния между сигналами $s_\varepsilon(t)$ и $s(t)$

6. Вычисляем квадрат расстояния между сигналами $s_\varepsilon(t)$ и $s(t)$, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$ (рисунок 3.8).

$$Es := \int_0^\tau s(t)^2 \, dt = 2 \qquad ε2 := \frac{dsε_s^2}{Es} \cdot 100 = 29.4172$$

Рисунок 3.8 – Квадрата расстояния между сигналами $s_\varepsilon(t)$ и $s(t)$, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$

Делаем вывод о том, что при ограничении полосы пропускания физического устройства обработки сигналов интервалом частот (–0,3296, 0,3296) кГц

квадрат расстояния между сигналами $s\varepsilon(t)$ относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$. 29,42% и $s(t)$ составляет примерно

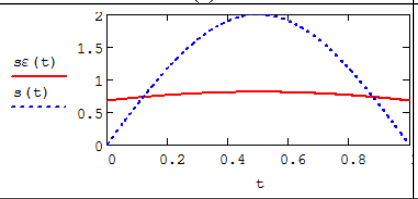
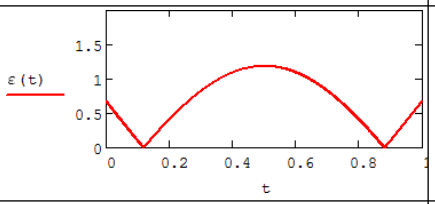
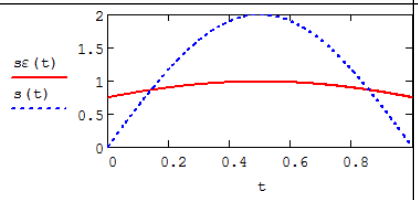
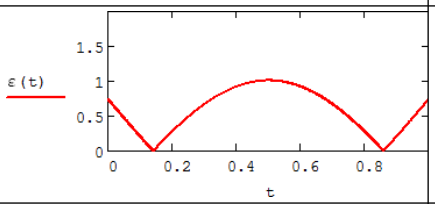
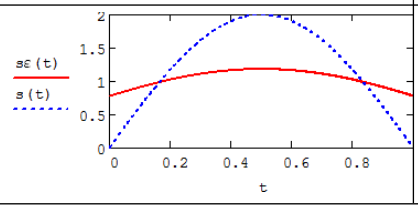
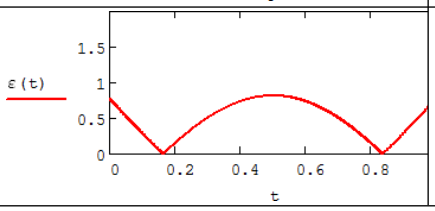
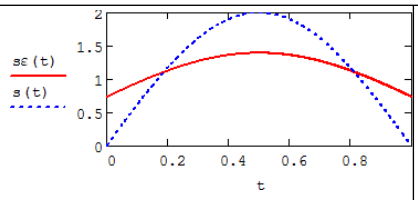
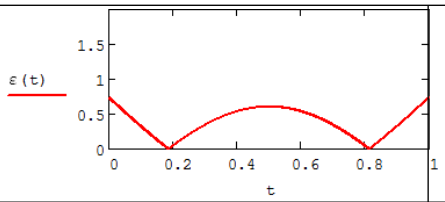
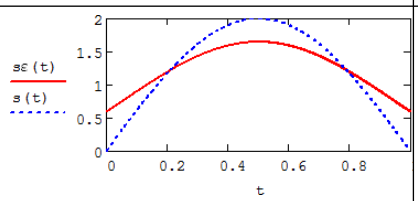
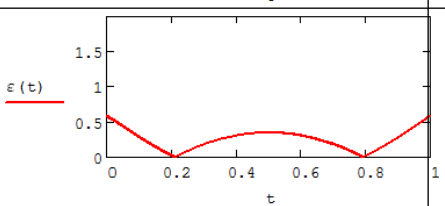
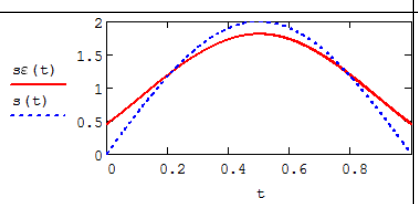
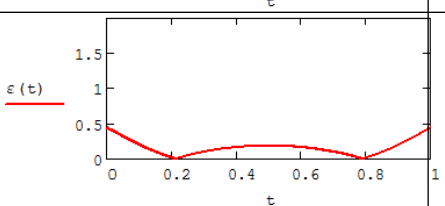
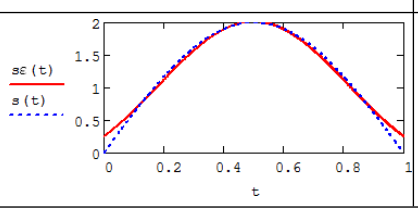
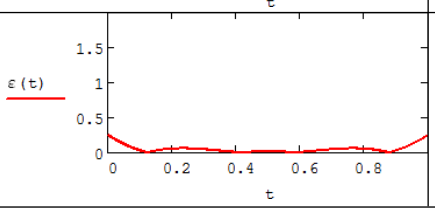
7. Исследуем, как повлияет на результаты исследования, изменение коэффициента уменьшения энергии импульса *k*. Результаты проведенных исследований оформим в виде таблицы 3.1.

По данным таблицы построим зависимость квадрата расстояния между сигналами $s_\varepsilon(t)$ и $s(t)$, выраженного в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$, от значения коэффициента k (рисунок 3.9). Из рисунка 3.9 можно сделать вывод о том, что с ростом коэффициента k квадрат расстояния между сигналами $s_\varepsilon(t)$ и $s(t)$, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$ убывает практически по линейному закону.

Найдем по заданным эмпирическим данным, представленным в виде графика $\varepsilon 2(k)$ на рисунке 3.9, методом наименьших квадратов значения коэффициентов a и b линейной зависимости $\varepsilon^{2}{}_{app}(k) = ak + b$. Тогда получим $a = -58{,}5728$ и $b = 57{,}1108$. Построим график аппроксимирующей зависимости $\varepsilon^{2}{}_{app}(k) = ak + b$ на рисунке 3.9 (пунктирная линия). Убеждаемся в том, что зависимость $\varepsilon 2(k)$, построенная по заданным эмпирическим данным и аппроксимирующая линейная зависимость $\varepsilon^{2}{}_{app}(k)$ практически совпадают.

Таблица 3.1 – Результаты исследования спектрального анализа

и синтеза импульсного сигнала

k	fв, кГц	Графики сигналов $s_\varepsilon(t)$ и s(t)	График функции $\varepsilon(t) = \lvert s_\varepsilon(t) - s(t) \rvert$,	ε, %
0,5	0,3296			29,42
0,6	0,4097			21,42
0,7	0,5016			14,84
0,8	0,6148			9,24
0,9	0,7767			4,17
0,95	0,9114			1,78
0,99	1,1818			0,27

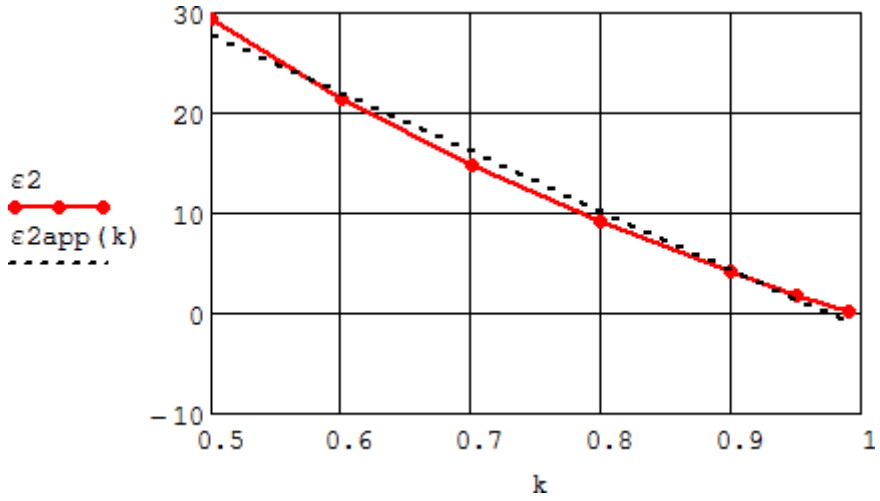


Рисунок 3.9 – Зависимость квадрата расстояния между сигналами $s_\varepsilon(t)$ и $s(t)$, выраженного в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$, от значения коэффициента k и аппроксимирующая линейная зависимость

$$\varepsilon^{2}app(k) = -58{,}5728k + 57{,}1108$$

Порядок выполнения работы

1. Запустить Mathcad.
2. Определить в программе Mathcad для заданного сигнала $s(t)$ в

соответствии с вариантом индивидуального задания (таблица 3.2):

1) Спектральную функцию сигнала s(t);

2) Модуль и аргумент спектральной функции сигнала s(t);

3) Построить графики амплитудного и фазового спектра сигнала s(t);

4) Для семи значений коэффициента уменьшения энергии импульса по причине ограничения полосы пропускания физического устройства обработки сигналов k = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 0,95; 0,99:

– верхнюю граничную частоту полосы пропускания физического устройства обработки сигналов fВ, Гц;

– временную диаграмму исходного сигнала s(t) и сигнала $s_\varepsilon(t)$, представляющего результат восстановления исходного непрерывного сигнала s(t) по его спектральной функции S(f) при ограничении полосы пропускания физического устройства обработки сигналов интервалом частот (–fВ, fВ);

– временную диаграмму функции $\varepsilon(t) = |s_\varepsilon(t) - s(t)|$, представляющую модуль разности между сигналами $s_\varepsilon(t)$ и s(t);

– квадрат расстояния между сигналами $s_\varepsilon(t)$ и s(t);

– квадрат расстояния между сигналами $s_\varepsilon(t)$ и s(t), выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала s(t).

3. Исследовать, как влияет изменение верхней граничной частоты полосы пропускания физического устройства обработки сигналов fВ на квадрат расстояния между сигналами $s_\varepsilon(t)$ и $s(t)$, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$ и построить соответствующую таблицу по аналогии с таблицей 3.1.

4. Построить зависимость квадрата расстояния между сигналами $s_\varepsilon(t)$ и $s(t)$,

выраженного в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$, от значения коэффициента k. Сформулировать выводы.

5. Сохранить результаты выполнения индивидуального задания.

6. Сформировать отчет по лабораторной работе.
7. Защитить работу.

Варианты заданий

Номер варианта (таблица 3.2) соответствует номеру фамилии студента в списке учебной группы (подгруппы).

Таблица 3.2 – Варианты индивидуальных заданий

Вариант	Название сигнала	Параметры сигнала
1	Косинус-квадратный импульс	A = 2 В, τ = 6 мс
2	Пилообразный импульс	A = 2 В, τ = 2 мс
3	Колоколообразный импульс	A = 2 В, τ = 2 мс
4	Треугольный импульс	A = 2 В, τ1 = 1 мс, τ2 = 1 мс
5	Двусторонний экспоненциальный импульс	A = 3 В, τ = 2 мс
6	Косинус-квадратный импульс	A = 2 В, τ = 8 мс
7	Трапецеидальный импульс	A = 2 В, τ = 4 мс, τ1 = 1 мс, τ2 = 1 мс
8	Односторонний экспоненциальный импульс	A = 3 В, τ = 2 мс
9	Пилообразный импульс	A = 2 В, τ = 4 мс
10	Колоколообразный импульс	A = 3 В, τ = 2 мс
11	Трапецеидальный импульс	A = 2 В, τ = 5 мс, τ1 = 1 мс, τ2 = 1 мс
12	Треугольный импульс	A = 2 В, τ1 = 2 мс, τ2 = 2 мс
13	Двусторонний экспоненциальный импульс	A = 4 В, τ = 3 мс
14	Косинус-квадратный импульс	A = 4 В, τ = 8 мс
15	Односторонний экспоненциальный импульс	A = 2 В, τ = 2 мс

Примечание – Графическое и аналитическое определение параметров исследуемых сигналов приведено в таблице 1.1.

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе оформляется в виде документа Word и должен включать:

1. Название лабораторной работы.
2. Цель лабораторной работы.
3. Формулировку индивидуального задания и результат его выполнения.
4. Краткие выводы по результатам выполнения лабораторной работы.

Контрольные вопросы

1. Как записываются формулы прямого и обратного преобразования Фурье?

2. Что такое спектральная функция импульса?

3. Каков физический смысл выражений прямого и обратного преобразований Фурье?

4. Каким требованиям должна удовлетворять сигнал $s(t)$ ля того, чтобы его можно было подвергнуть спектральному анализу по Фурье?

5. Продолжите фразу: «Если анализируемый сигнал – вещественная функция, то соответствующая спектральная функция импульса является ...».

6. Продолжите фразу: «Если анализируемый сигнал – четная функция, то, как и в случае ряда Фурье, его спектр будет ...».

7. В каком случае спектральная функция импульса будет чисто мнимой и нечетной?

8. Как определить амплитудный и фазовый спектр сигнала?

9. Как можно быстро определить центральное значение амплитуды спектральной функции сигнала?

10. Как решить задачу спектрального синтеза сигнала?

11. Как формулируется и записывается равенство Парсеваля?

12. Какова методика выполнения индивидуального задания?

13. Каковы особенности спектральных функций исследованных импульсных сигналов?

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

1. Кологривов, В. А. Прикладные математические методы в радиотехнике. В 2-х частях: учебное пособие / В. А. Кологривов. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. - Ч. 1. – Аналоговые системы. – 159 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=209003

2. Умняшкин, С. В. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов: учебное пособие / С. В. Умняшкин. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Техносфера, 2012. – 368 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233733

3. Богомолов, С. И. Введение в системы радиосвязи и радиодоступа: учебное пособие / С.И. Богомолов; Министерство образования и науки Российской Федерации, Томский Государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники (ТУСУР). – Томск: Эль Контент, 2012. – 152 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=208609
4. Вадутов О.С. Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / Вадутов О.С. – Томск: Томский политехнический университет, 2014. – 102 с. http://www.iprbookshop.ru/34676
5. Масалов, Е.В. Радиотехнические системы: учебное пособие / Е.В. Масалов. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. – Ч. 1. – 109 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=208715

Лабораторная работа 4

Исследование корреляционных характеристик сигналов

Цель работы: – приобретение навыков исследования корреляционных характеристик сигналов.

Формируемые компетенции или их части

ОПК-2	Способность корректно применять при решении профессиональных задач соответствующий математический аппарат алгебры, геометрии, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей, математической статистики, математической логики, теории алгоритмов, теории информации, в том числе с использованием вычислительной техники.
ОПК-3	Способность применять языки, системы и инструментальные средства программирования в профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Наряду со спектральным подходом к описанию сигналов часто на практике оказывается необходимой количественная характеристика, которая давала бы представление:

- о скорости изменения сигнала во времени;
- о длительности сигнала без разложения его на гармонические составляющие;
- о степени сходства различных сигналов.

В качестве такой характеристики широко используется корреляционная функция сигнала.

Корреляционная функция (КФ; английский термин — correlation function, CF) детерминированного сигнала с конечной энергией представляет собой интеграл (в бесконечных пределах) от произведения двух копий сигнала, сдвинутых друг относительно друга на время τ:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt \qquad (4.1)$$

Как следует из (4.1), корреляционная функция показывает степень сходства между сигналом и его сдвинутой копией – чем больше значение

корреляционной функции, тем это сходство сильнее. Кроме того, корреляционная функция обладает следующими свойствами:

– значение КФ при $\tau = 0$ равно энергии сигнала, то есть интегралу от его квадрата:

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = E; \quad (4.2)$$

– КФ является четной функцией своего аргумента τ:

$$R(\tau) = R(-\tau); \quad (4.3)$$

– значение КФ при $\tau = 0$ является максимально возможным значением:

$$|R(\tau)| \le R(0); \quad (4.4)$$

– с ростом абсолютного значения аргумента τ значение КФ сигнала с конечной энергией затухает:

$$\left| \lim_{\tau \to \infty} R(\tau) \right| = 0; \quad (4.5)$$

– если сигнал $s(t)$ не содержит особенностей в виде дельта-функций, его КФ не может иметь разрывов (то есть, обязана быть непрерывной функцией).

– если сигнал – напряжение, то размерность его КФ равна $В^2с$.

С учетом свойств (4.2) и (4.4) вводится понятие нормированной корреляционной функции $r(\tau)$:

∞ .

$$r(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt} = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt \quad (4.6)$$

В случае периодического сигнала (и вообще любого сигнала с бесконечной энергией) воспользоваться определением КФ в виде формулы (4.1) не удастся. Поэтому КФ периодического сигнала с периодом T вычисляют, усредняя произведение сдвинутых копий в пределах одного периода:

$$R(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t-\tau)dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} s(t)s(t-\tau)dt \quad (4.7)$$

Набор свойств КФ периодического сигнала (4.7) несколько меняется:

– значение при $\tau = 0$ равно не энергии, а средней мощности анализируемого сигнала:

$$R(0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt = P;$$

$$T _ T/2 \; ср \quad (4.8)$$

– свойство четности сохраняется:

$$R(\tau) = R(-\tau); \quad (4.9)$$

– значение КФ при $\tau = 0$ по-прежнему является максимально возможным:

$$|R(\tau)| \le R(0); \quad (4.10)$$

– КФ периодического сигнала является периодической функцией с тем же периодом, что и сам сигнал:

$$R(\tau) = R(\tau - kT), \quad (4.11)$$

где k – любое целое число;

– если сигнал не содержит дельта-функций, его КФ будет непрерывной функцией;

– размерность КФ периодического сигнала – квадрат размерности сигнала ($В^2$, если сигнал – напряжение);

Рассмотрим понятие взаимная корреляционная функция. Если КФ показывает степень сходства между сдвинутыми копиями одного и того же сигнала, то взаимная корреляционная функция (ВКФ; английский термин – cross-correlation function, CCF) позволяет измерить аналогичную величину для сдвинутых экземпляров двух разных сигналов.

Общий вид формулы (4.1) для КФ сохраняется, но под интегралом стоит

произведение двух разных сигналов, один из которых задержан на время τ:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2(t-\tau) dt \quad (4.12)$$

Примечание – КФ является частным случаем ВКФ, когда оба сигнала одинаковы: $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$.

При замене переменной $t = t - \tau$ в формуле (4.12), получаем:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) \cdot s_1(t-\tau)dt = R_{21}(-\tau) \quad (4.13)$$

Отсюда следует, что для ВКФ не выполняется условие четности, $R_{12}(\tau) \neq R_{12}(-\tau)$, и значения ВКФ не обязаны иметь максимум при $\tau = 0$. Таким образом, значение ВКФ при $\tau = 0$ ничем не выделяется и максимум ВКФ может быть расположен в любом месте оси τ. Следует также учитывать, что для ВКФ справедливы неравенства: $\sqrt{E_1}$ $\sqrt{E_1}$

$$|R_{12}(\tau)| \leq \quad \text{и} \quad R_{21}(\tau) \leq \quad , \quad (4.14)$$

где E_1 и E_2 – энергии сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

С ростом абсолютного значения запаздывания τ взаимная корреляционная функция сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ с конечной энергией затухает:

$$\lim_{\tau \to \infty} |R_{12}(\tau)| = 0;$$

Примечания

1. Если сигналы – напряжение, то размерность их ВКФ равна $В^2 \cdot с$.
2. Для периодических сигналов понятие ВКФ обычно не применяется, хотя оно может быть введено в случае, если сигналы

одинаковый период. $s_1(t)$ и $s_2(t)$ имеют

С учетом этих особенностей полная ВКФ сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ вычисляется, как правило, отдельно для положительных и отрицательных запаздываний:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2(t-\tau)dt. \qquad R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) \cdot s_1(t-\tau)dt \qquad (4.15)$$

Рассмотрим связь между корреляционными функциями и спектрами сигналов. Поскольку как корреляционные функции, так и спектры являются интегральными преобразованиями анализируемых сигналов, логично предположить, что эти характеристики как-то связаны друг с другом. Для выявления этой связи подвергнем взаимную корреляционную функцию

преобразованию Фурье, считая, что сигналам $s_1(t)$ и $s_2(t)$ соответствуют спектральные функции $S_1(f)$ и $S_2(f)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t-\tau) e^{-j2\pi f\tau} dt d\tau = \quad (4.16)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j2\pi f t} \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t-\tau) e^{j2\pi f(t-\tau)} d(t-\tau) dt = S_1(f) \cdot S_2^*(f),$$

где * – символ математической операции комплексного сопряжения. Полученный результат (4.16) очень прост: ВКФ связана преобразованием Фурье с так называемым взаимным спектром сигналов. Взаимный спектр $S_{12}(f)$ для сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ представляет собой произведение их спектральных функций, одна из которых подвергнута комплексному сопряжению:

$$S_{12}(f) = S_1(f) \cdot S_2^*(f).$$

Отсюда можно сделать очень важный вывод: если спектры сигналов не перекрываются, то их взаимный спектр равен нулю на всех частотах, а значит,

равна нулю и их ВКФ при любых временных сдвигах τ. Таким образом, сигналы с неперекрывающимися спектрами заведомо являются некоррелированными и, наоборот, если спектры сигналов перекрываются, то они коррелированы.

Приняв $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$, получаем аналогичный результат для КФ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)e^{-j2\pi f\tau} dt d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)e^{j2\pi f(t-\tau)} d(t-\tau)dt = S(f)\cdot S^*(f) = \left|S(f)\right|^2 . \quad (4.17)$$

Итак, в соответствии с (4.17), КФ сигнала связана прямым преобразованием Фурье с квадратом модуля спектральной функции, или с энергетическим спектром сигнала.

Отсюда следует еще один важный факт: КФ сигнала не зависит от его фазового спектра. Следовательно, сигналы, амплитудные спектры которых одинаковы, а

фазовые различаются, будут иметь одинаковую КФ. Еще одно следствие заключается в том, что по КФ нельзя восстановить исходный сигнал (опять же из-за утраты информации о фазе сигнала).

Можно показать, что существует и обратная связь квадрата модуля спектральной функции с КФ сигнала:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot S^*(f) e^{j 2\pi f \tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 e^{j 2\pi f \tau} df \qquad (4.18)$$

Результаты (4.17) и (4.18) принципиально важны по двум причинам. Во- первых, оказывается возможным оценивать корреляционные свойства сигналов, исходя из распределения их энергии по спектру. Чем шире полоса частот сигнала, тем уже основной лепесток автокорреляционной функции и тем быстрее изменяется сигнал с течением времени.

Во-вторых, формула (4.17) указывает путь экспериментального определения энергетического спектра. Часто удобнее вначале получить корреляционную функцию, а затем, используя преобразование Фурье, найти энергетический спектр сигнала. Такой прием получил распространение при исследовании свойств сигналов с помощью быстродействующих ЭВМ в реальном масштабе времени.

Числовой характеристикой, служащей для оценки скорости изменения сигнала во времени, является интервал корреляции сигнала τ_K, с:

$$\int_{\infty} R(\tau) \qquad (\tau$$

)

$$\tau_K = \frac{0}{(\ )}$$

$$= \int r$$

d

(τ)

τ

$d\tau\ R$

$0\ 0$

Из (4.19) следует, что интервал корреляции есть:

∞ (4.19)

– ширина основания прямоугольника высоты $R\ (0)$, равновеликого с площадью, заключенной под модулем кривой корреляционной функции для задержки τ , изменяющейся в пределах от 0 до ∞;

– площади, заключенной под модулем кривой нормированной корреляционной функции для задержки τ, изменяющейся в пределах от 0 до ∞.

Рассмотрим свойства КФ дискретных сигналов. При периоде дискретизации (или интервале, шаге дискретизации – sample time) сигнала $\Delta t_д$ = *const* вычисление КФ дискретного сигнала $\{s(k_\Delta t_д)\}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, выполняется по интервалам $\Delta\tau = \Delta t_д$ и обычно записывается, как дискретная функция номеров n сдвига отсчетов $n\Delta\tau$ или $n\Delta t_д$:

$$R(n\Delta t_д) = \Delta t_д \sum_{k=-\infty}^{\infty} sk \cdot sk\text{-}n \qquad (4.20)$$

Дискретные сигналы обычно задаются в виде числовых массивов определенной длины с нумерацией отсчетов $k = 0, 1, \ldots, K$ при $\Delta t_д = 1$, а вычисление дискретной КФ в единицах энергии выполняется в одностороннем варианте с учетом длины массивов данных. Если используется весь массив дискретных отсчетов сигнала и число отсчетов КФ равно числу отсчетов этого массива, то вычисление КФ выполняется по формуле:

$$R(n) = \frac{K}{} s \cdot s$$

$$\sum_{k\,k} \qquad K - \overset{-n}{k} = 0 \tag{4.21}$$

Множитель $K/(K-n)$ в формуле (4.21) является поправочным коэффициентом на постепенное уменьшение числа перемножаемых и суммируемых значений по мере увеличения сдвига n. Без этой поправки для нецентрированных сигналов в значениях КФ появляется тренд суммирования средних значений.

При измерениях в единицах мощности сигнала множитель заменяется на $K/(K-n)$

множитель $1/(K-n)$.

Оборудование и материалы

Аппаратура. Для выполнения лабораторной работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с

тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 MB Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов

Ÿ 256).

Программное обеспечение. Для выполнения лабораторной работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 13 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении лабораторной работы **запрещается**:

– самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;

– нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т.д.;

– принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Указания по порядку выполнения работы

Методику выполнения работы рассмотрим на следующем примере. Заданы два сигнала $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Сигнал $s_1(t)$ представляет собой прямоугольный импульс высотой A_1 = 1 В и длительностью T_1 = 10 мс, центрированный относительно начала отсчета времени (t = 0). Сигнал $s_2(t)$ представляет собой пилообразный импульс высотой A_2 = 1 В и длительностью T_2 = 15 мс.

Аналитическое описание сигнала $s_2(t)$ представлено формулой:

$$s(t) = A^{t}, 0 \le t \le T2.$$

$$\frac{}{2\,2\,T2} \quad (4.17)$$

Примечание – Графическое и аналитическое определение параметров исследуемых сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ приведено в таблице 1.1.

Требуется для сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$:

– определить по формуле (4.1) корреляционную функцию сигнала $s_1(t)$;

– определить по формуле (4.16) интервал корреляции сигнала $s_1(t)$;

– построить корреляционную функцию сигнала $s_1(t)$ и показать на ней интервал корреляции этого сигнала;

– определить и построить квадрат модуля спектральной функции

$$\left| \quad \right|$$

(энергетический спектр) $S_1(f)^2$ сигнала $s_1(t)$;

– определить и построить корреляционную функцию сигнала $s_1(t)$, вычисленную по формуле (4.15);

– определить и построить взаимную корреляционную функцию сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

Рассмотрим решение поставленной задачи в математическом пакете Mathcad:

1. Запускаем Mathcad. Согласно заданным параметрам вводим математическое определение сигнала $s_1(t)$ и строим его график (рисунок 4.7).

$A1 := 1 \quad T1 := 10 \quad s1(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ A1 & \text{if } 0 \le t \le T1 \\ 0 & \text{if } t > T1 \end{cases}$

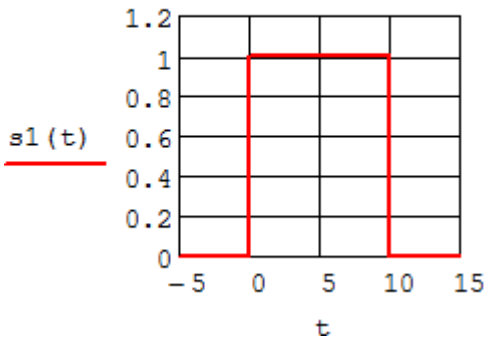


Рисунок 4.7 – Определение и график сигнала $s_1(t)$

2. Согласно (4.26) и заданным параметрам вводим математическое определение сигнала $s_2(t)$ и строим его график (рисунок 4.8).

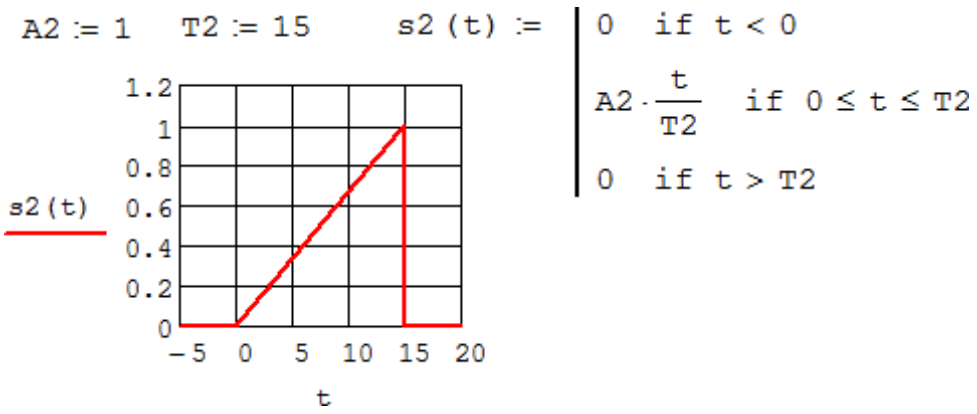


Рисунок 4.8 – Определение и график сигнала $s_1(t)$

3. Вычисляем корреляционную функцию $R_1(\tau)$ сигнала $s_1(t)$ и строим еѐ график (рисунок 4.6).

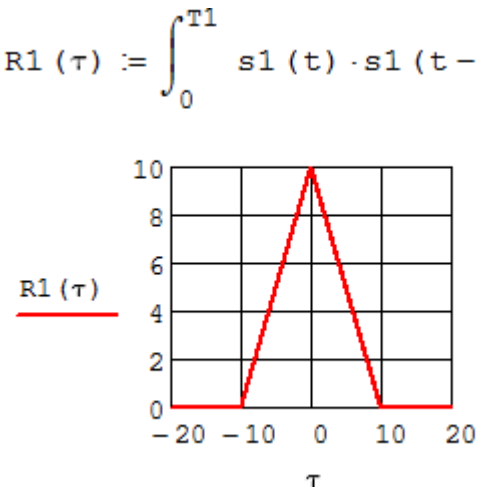


Рисунок 4.9 – Определение и график корреляционной функции сигнала $s_1(t)$

4. Определим интервал корреляции сигнала $s_1(t)$. Согласно определению интервалом корреляции τ_K сигнала считается величина ширины центрального пика КФ от максимума до первого пересечения нулевой линии. В данном случае из графика корреляционной функции сигнала $s_1(t)$ (рисунок 4.9) для сигнала $s_1(t)$ очевидно имеем $\tau_K = 10$ мс.

5. Вычисляем взаимную корреляционную функцию $R_{12}(\tau)$ сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, строим еѐ график (рисунок 4.10).

$$R12(\tau) := \int_0^{T2} s1(t) \cdot s2(t-\tau)\ dt$$

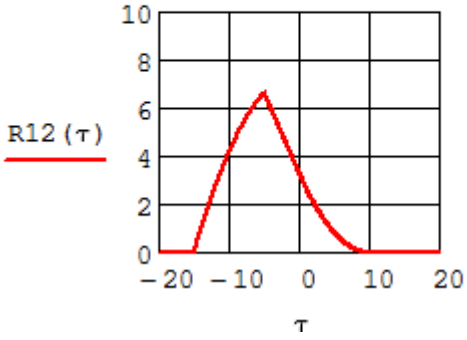


Рисунок 4.10 – Определение и график взаимной корреляционной функции сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$

6. Подтвердим связь между преобразованием Фурье корреляционной функцией сигнала $s_1(t)$ с квадратом модуля его спектральной функции:

$$\int R(\tau) e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau = S(f).$$

(4.11)

7. Определяем спектральную функцию сигнала $s_1(t)$ (рисунок 4.11).

Рисунок 4.11 – Определение спектральной функции сигнала $s_1(t)$

8. Находим квадрат модуля спектральной функции сигнала $s_1(t)$ и строим его энергетический спектр (рисунок 4.12).

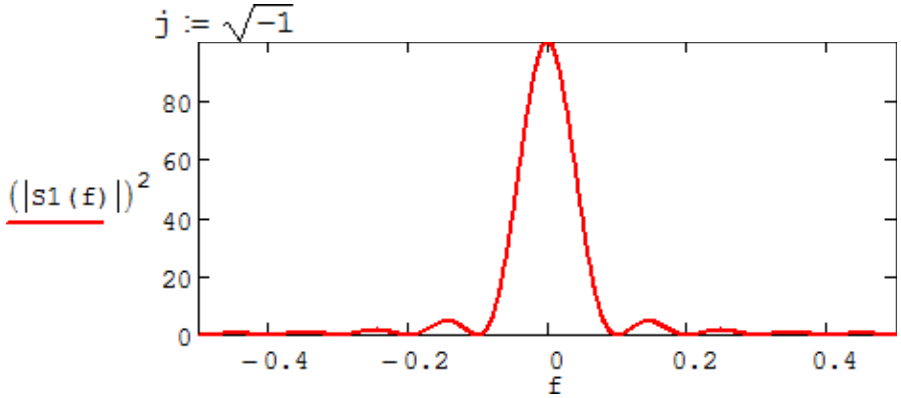


Рисунок 4.12 – Энергетический спектр сигнала $s_1(t)$

9. Находим прямое преобразование Фурье от корреляционной функции сигнала $s_1(t)$ (рисунок 4.13).

$$R(f) := \int_{-T1}^{T1} R(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} \, d\tau$$

Рисунок 4.13 – Определение прямого преобразования Фурье от корреляционной функции сигнала $s_1(t)$

9. Строим график функции $R(f)$, представляющей собой прямое преобразование Фурье от корреляционной функции сигнала $s_1(t)$ (рисунок 4.14).

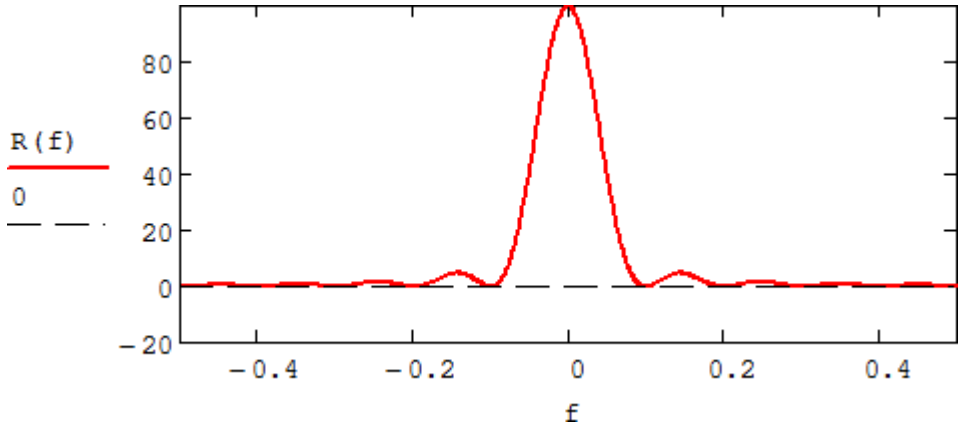


Рисунок 4.14 – График функции $R(f)$

Сравнивая между собой энергетический спектр сигнала $s_1(t)$ (рисунок 4.12) и график функции $R(f)$, представляющей собой прямое преобразование Фурье от корреляционной функции сигнала $s_1(t)$, (рисунок 4.14) убеждаемся в том, что они совпадают. Следовательно, на основе эксперимента доказано, что прямое преобразованием Фурье корреляционной функции сигнала действительно совпадает с квадратом модуля спектральной функции, или с энергетическим спектром сигнала.

Порядок выполнения работы

1. Запустить программу MathCAD.
2. Определить для заданных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ в соответствии с вариантом индивидуального задания (таблица 4.1):

– корреляционную функцию;

– интервал корреляции;

– взаимную корреляционную функцию;

– связь, определяемую формулой (4.6), между корреляционной функцией $R_1(\tau)$ сигнала $s_1(t)$ с квадратом модуля его спектральной функции (энергетическим спектром) $|S1(f)|^2$.

3. Сохранить результаты выполнения индивидуального задания.
4. Сформулировать выводы и оформить отчет по лабораторной работе.
5. Защитить работу.

Варианты заданий

Номер варианта (таблица 4.1) соответствует номеру фамилии студента в списке учебной группы (подгруппы).

Таблица 4.1 – Варианты индивидуальных заданий

Вариант	Обозначение сигнала	Тип сигнала	Параметры импульсных сигналов
1	$s1(t)$	Трапецеидальный импульс	A = 2 В, τ = 3 мс, τ1 = 1 мс, τ2 = 1 мс
	$s2(t)$	Косинус-квадратный импульс	A = 2 В, τ = 6 мс
2	$s1(t)$	Двусторонний экспоненциальный импульс	A = 2 В, τ = 2 мс
	$s2(t)$	Пилообразный импульс	A = 2 В, τ = 2 мс
3	$s1(t)$	Треугольный импульс	A = 2 В, τ1 = 1 мс, τ2 = 1 мс
	$s2(t)$	Колоколообразный импульс	A = 2 В, τ = 2 мс

4	$s1(t)$	Односторонний экспоненциальный импульс	A = 2 В, τ = 2 мс
	$s2(t)$	Косинус-квадратный импульс	A = 2 В, τ = 6 мс
5	$s1(t)$	Пилообразный импульс	A = 2 В, τ = 5 мс
	$s2(t)$	Треугольный импульс	A = 2 В, τ1 = 2 мс, τ2 = 3 мс
6	$s1(t)$	Двусторонний экспоненциальный импульс	A = 3 В, τ = 2 мс
	$s2(t)$	Косинус-квадратный импульс	A = 2 В, τ = 8 мс
7	$s1(t)$	Трапецеидальный импульс	A = 2 В, τ = 4 мс, τ1 = 1 мс, τ2 = 1 мс
	$s2(t)$	Треугольный импульс	A = 4 В, τ1 = 1 мс, τ2 = 3 мс

8	$s1(t)$	Односторонний экспоненциальный импульс	A = 3 В, τ = 2 мс
	$s2(t)$	Пилообразный импульс	A = 3 В, τ = 6 мс
9	$s1(t)$	Пилообразный импульс	A = 2 В, τ = 4 мс
	$s2(t)$	Колоколообразный импульс	A = 3 В, τ = 2 мс
10	$s1(t)$	Односторонний экспоненциальный импульс	A = 2 В, τ = 4 мс
	$s2(t)$	Колоколообразный импульс	A = 3 В, τ = 2 мс
11	$s1(t)$	Трапецеидальный импульс	A = 2 В, τ = 5 мс, τ1 = 1 мс, τ2 = 1 мс
	$s2(t)$	Колоколообразный импульс	A = 3 В, τ = 2 мс
12	$s1(t)$	Пилообразный импульс	A = 2 В, τ = 4 мс
	$s2(t)$	Треугольный импульс	A = 2 В, τ1 = 2 мс, τ2 = 2 мс
	$s1(t)$	Трапецеидальный импульс	A = 4 В, τ = 5 мс, τ1 = 2 мс, τ2 = 2 мс

13	$s2(t)$	Двусторонний экспоненциальный импульс	A = 4 В, τ = 3 мс
14	$s1(t)$	Треугольный импульс	A = 4 В, τ1 = 1 мс, τ2 = 3 мс
	$s2(t)$	Косинус-квадратный импульс	A = 4 В, τ = 8 мс
15	$s1(t)$	Трапецеидальный импульс	A = 2 В, τ = 5 мс, τ1 = 2 мс, τ2 = 2 мс
	$s2(t)$	Односторонний экспоненциальный импульс	A = 2 В, τ = 2 мс

Примечания

1. Графическое и аналитическое определение параметров исследуемых сигналов приведено в таблице 1.1.

2. При определении взаимной корреляционной функции двух сигналов конечной, но различной длительности, необходимо в программе MathCAD верхний предел интегрирования по времени в формуле (4.4) задавать равным длительности наиболее протяженного во времени сигнала.

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен включать:

1. Название лабораторной работы.
2. Цель лабораторной работы.
3. Формулировку индивидуального задания и результат его выполнения.
4. Краткие выводы по результатам выполнения лабораторной работы.

Контрольные вопросы

1. Что такое корреляционная функция сигнала?
2. Каков физический смысл корреляционной функции сигнала?
3. Каковы свойства корреляционной функции сигнала?
4. Как вычисляется корреляционная функция периодического сигнала?
5. Каковы свойства корреляционной функции периодического сигнала?
6. Как определить взаимную корреляционную функцию двух сигналов?
7. Каковы свойства взаимной корреляционной функции двух сигналов?
8. Как выглядит схема коррелятора? Как он работает?
9. Каковы прикладные аспекты применения взаимной корреляционной функции двух сигналов?
10. При каких условиях можно определить взаимную корреляционную функцию двух периодических сигналов?
11. Как определить взаимный спектр $S_{12}(f)$ для сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$?
12. В каких случаях сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ будут некоррелированными?
13. Какова связь между корреляционными функциями и спектрами сигналов?
14. Почему по корреляционной функции нельзя восстановить исходный сигнал?

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

1. Кологривов, В. А. Прикладные математические методы в радиотехнике. В 2-х частях: учебное пособие / В. А. Кологривов. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. - Ч. 1. – Аналоговые системы. – 159 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=209003

2. Умняшкин, С. В. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов: учебное пособие / С. В. Умняшкин. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Техносфера, 2012. – 368 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233733

3. Каганов В.И., Битюков В.К. Основы радиоэлектроники и связи: учебное пособие. – М.: Горячая линия - Телеком, 2012. – 542 с. http://www.iprbookshop.ru/12017
4. Акулиничев, Ю. П. Теория и техника передачи информации: учебное пособие / Ю. П. Акулиничев, А. С. Бернгардт. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. – 209 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=208952
5. Андреев Р.Н., Краснов Р.П., Чепелев М.Ю. Теория электрической связи: курс лекций. Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия - Телеком, 2014. – 230 с. http://www.iprbookshop.ru/2508

Лабораторная работа 5

Исследование амплитудной модуляции и детектирования АМ-сигналов

Цель работы: – приобретение навыков исследования сигналов с амплитудной модуляцией и особенностей их детектирования.

Формируемые компетенции или их части

ОПК-2	Способность корректно применять при решении профессиональных задач соответствующий математический аппарат алгебры, геометрии, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей, математической статистики, математической логики, теории алгоритмов, теории информации, в том числе с использованием вычислительной техники.
ОПК-3	Способность применять языки, системы и инструментальные средства программирования в профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Сигналы от источников сообщений передаются по каналам электрической связи к приемникам и далее к получателям сообщений. Как правило, информационные сигналы являются низкочастотными и ограниченными по ширине спектра. Каналы электрической связи, напротив, являются высокочастотными, широкополосными и рассчитаны на передачу сигналов от множества источников одновременно с частотным разделением каналов. Перенос спектра сигналов из низкочастотной области в выделенную для их передачи область высоких частот выполняется операцией модуляции.

Допустим, что низкочастотный сигнал, подлежащий передаче по каналу связи, задается функцией $s(t)$. В канале связи для передачи данного сигнала выделяется определенный диапазон высоких частот. На входе канала связи в специальном передающем устройстве формируется вспомогательный, как правило, непрерывный во времени периодический высокочастотный сигнал $u(t) = f(t; a_1, a_2, \dots a_m)$. Совокупность параметров a_k, $k = 1, 2, \dots , m$ определяет форму вспомогательного сигнала. Значения параметров a_k в отсутствие модуляции являются величинами постоянными. Если на один из этих параметров перенести сигнал $s(t)$, т. е. сделать его значение пропорционально

зависимым от значения $s(t)$ во времени (или по любой другой независимой переменной), то форма сигнала $u(t)$ приобретает новое свойство. Она несет информацию, тождественную информации в сигнале $s(t)$. Поэтому сигнал $u(t)$ называют несущим сигналом, несущим колебанием или просто несущей (carrier), а процесс переноса информации на параметры несущего сигнала – его модуляцией (modulation). Информационный сигнал $s(t)$ называют модулирующим (modulating signal), результат модуляции – модулированным сигналом (modulated signal). Обратную операцию выделения модулирующего сигнала из модулированного колебания называют демодуляцией (demodulation). Основным видом несущих сигналов являются гармонические колебания:

$$u(t) = U\cos(2\pi ft + \phi), \quad (5.1)$$

которые имеют три свободных параметра: U – амплитуда, f – частота и ϕ – начальная фаза. В зависимости от того, на какой из данных параметров переносится информация о сигнале $s(t)$, различают амплитудную (АМ, amplitude modulation – AM), частотную (ЧМ, frequency modulation – FM) или фазовую (ФМ, phase modulation – PM) модуляцию несущего сигнала [2].

АМ соответствует переносу информации о сигнале $s(t)$ на амплитуду несущего сигнала

$$U \equiv U(t) = U\lceil\lfloor s(t)\rceil\rfloor, \quad (5.2)$$

при постоянных значениях параметров несущей частоты f и фазы ϕ.

Примечание – Амплитудная модуляция была первым видом модуляции, освоенным на практике. В настоящее время АМ применяется в основном только для радиовещания на низких частотах (не выше коротких волн) и для передачи изображения в телевизионном вещании. Это обусловлено низким КПД использования энергии модулированных сигналов.

АМ-сигнал представляет собой произведение огибающей $U(t)$ и гармонического колебания высокой частоты. Форма записи амплитудно- модулированного

сигнала:

$$u(t) = U(t)\cos(2\pi f_0 t + \phi_0), \quad (5.3)$$

$$U(t) = U0 + k_{AM} \cdot s(t), \quad (5.4)$$

где $U(t)$ – огибающая АМ-сигнала, В;

f_0 – частота несущего сигнала, Гц;

ϕ_0 – начальная фаза несущего сигнала, рад;

U_0 – постоянная амплитуда несущего колебания при отсутствии модулирующего сигнала $s(t)$, В;

k_{AM} – коэффициент пропорциональности.

Определение понятия АМ-сигнал особенно наглядно для тональной модуляции, когда модулирующий сигнал является гармоническим колебанием:

$$s(t) = S_m \cos(2\pi f_S + \phi_S), \quad (5.5)$$

где S_m – амплитуда модулирующего сигнала, В;

f_S – частота модулирующего сигнала, Гц;

ϕ_S – начальная фаза модулирующего сигнала, рад.

С учетом (5.5) выражение (5.4) для огибающая АМ-сигнала перепишем в виде

$$U(t) = U0 + k_{AM} \cdot s(t) = U0 + \Delta U \cos(2\pi f_S + \phi_S), \quad (5.6) \text{ где } \Delta U =$$

$k_{AM} \cdot S_m$ – амплитуда изменения огибающая АМ-сигнала, В.

Таким образом, мгновенное значение модулированного сигнала для тональной модуляции принимает вид

$$u(t) = U_0 \left[1 + M \cos(2\pi f_S + \phi_S)\right] \cos(2\pi f_0 t + \phi_0), \quad (5.7) \text{ где } M = \Delta U$$

$/U_0 = k_{AM} \cdot S_m / U_0$ – коэффициент амплитудной модуляции.

Значение коэффициента M характеризует глубину амплитудной модуляции. Значение M должно находиться в пределах от 0 до 1 для всех гармоник модулирующего сигнала. При значении $M < 1$ форма огибающей несущего колебания полностью повторяет форму модулирующего сигнала $s(t)$, что можно видеть на рисунке 5.1. Малую глубину модуляции $M << 1$ для основных гармоник модулирующего сигнала применять нецелесообразно, т. к. при этом мощность передаваемого информационного сигнала будет много меньше

мощности несущего колебания, следовательно, мощность передатчика будет использоваться неэкономично.

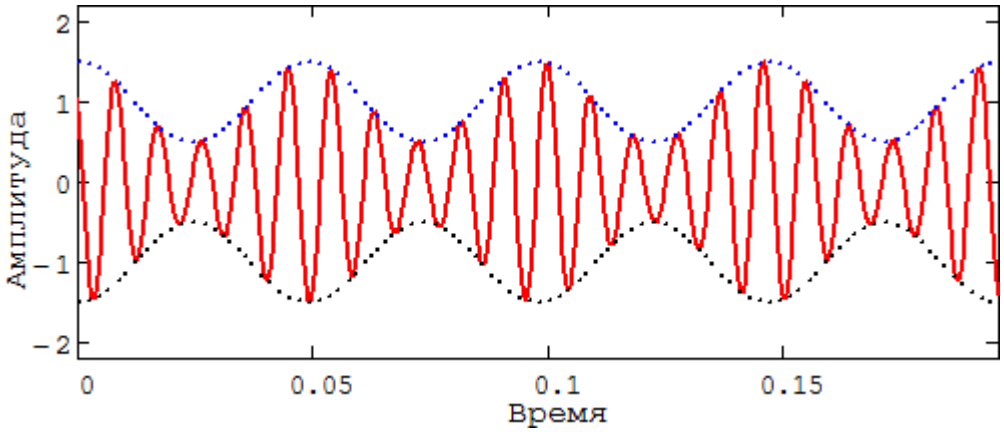


Рисунок 5.1 – АМ-сигнал (5.7) при $M = 0{,}5$

На рисунке 5.2 приведен пример глубокой модуляции, при которой значение M стремится к единице. Стопроцентная модуляция ($M = 1$) может приводить к искажениям сигналов при перегрузках передатчика, если он имеет ограниченный динамический диапазон по амплитуде несущих частот или ограниченную мощность передатчика (увеличение амплитуды несущих колебаний в пиковых интервалах сигнала $U(t)$ в два раза требует увеличения мощности передатчика в четыре раза).

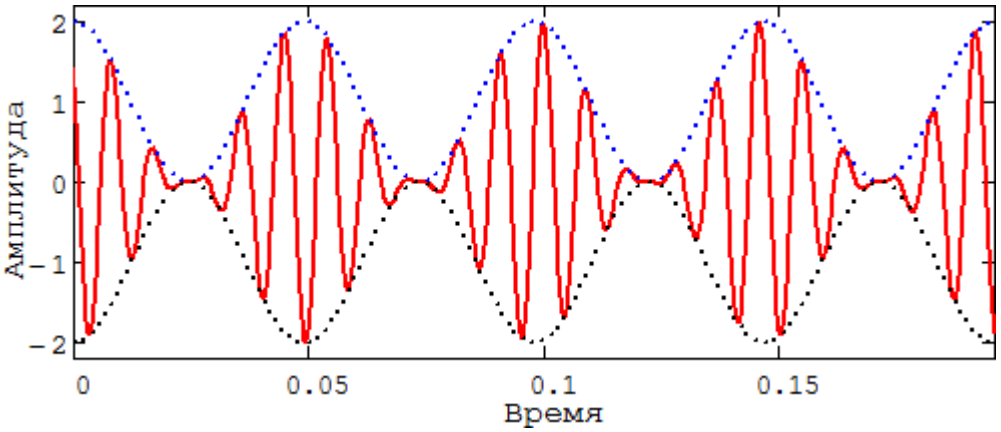


Рисунок 5.2 – АМ-сигнал (5.7) при M = 1

При $M > 1$ возникает, так называемая, перемодуляция, пример которой приведен на рисунке 5.3. Форма огибающей при перемодуляции искажается относительно формы модулирующего сигнала, и после демодуляции, если применяются ее простейшие методы, информация может быть искажена.

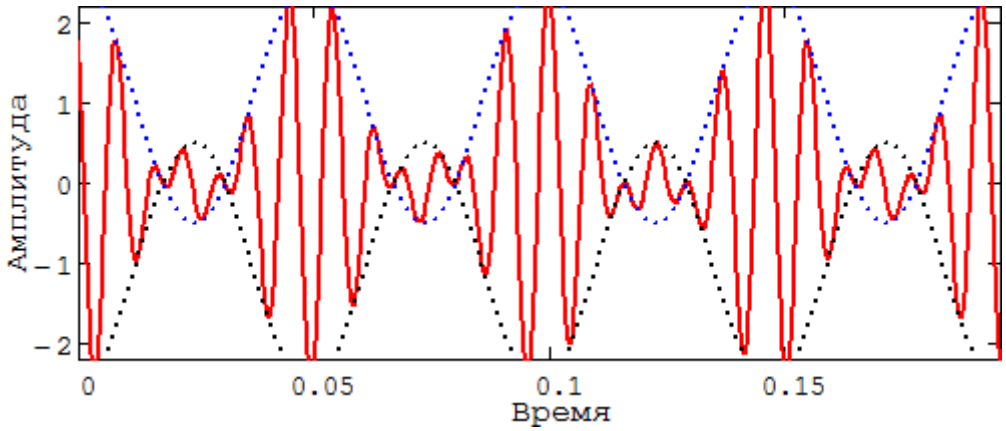


Рисунок 5.3 – АМ-сигнал (5.7) при $M = 1{,}5$

Из анализа временных диаграмм, представленных на рисунках 5.1 – 5.3, можно сделать вывод, что при амплитудной модуляции не удается обеспечить широкий динамический диапазон сигналов, передаваемых по каналам систем электрической связи.

С учетом формулы [3]:

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right],$$

$$u(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$$

из выражения (5.7) получаем:

$$+ \frac{MU_0}{2}\cos\left[2\pi(f_0 + f_S)t + \phi_0 + \phi_S\right] +$$

(5.8)

MU^2 (5.9)

$\pm\ ^0 \cos\lceil\lfloor 2\pi(f_0 - f_S)t + \phi_0 - \phi_S\rceil\rfloor.$

2

Отсюда следует, что модулирующее колебание с частотой f_S перемещается в область несущей частоты f_0 и расщепляется на два колебания, симметричные относительно частоты f_0, с частотами соответственно $(f_0 + f_S)$ – верхняя боковая частота, и $(f_0 - f_S)$ – нижняя боковая частота (рисунок 5.4 для сигнала, приведенного на рисунке 5.1).

Начальная фаза верхней боковой частоты спектра АМ-сигнала при тональной модуляции равна сумме начальной фазы несущей ϕ_0 и начальной ϕ_S фазы модулирующего колебания, а начальная фаза нижней боковой частоты – равна

разности начальной фазы несущей ϕ_0 колебания.

и начальной ϕ_S фазы модулирующего

Таким образом, амплитуды колебаний на боковых частотах (верхней и нижней) одинаковы, и при стопроцентной модуляции равны половине амплитуды колебаний несущей частоты.

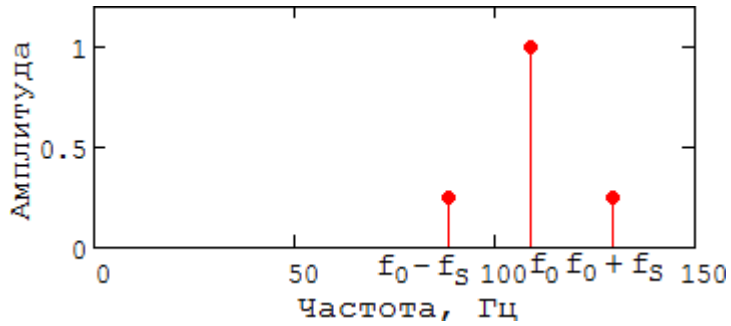


Рисунок 5.4 – Амплитудно-частотный спектр для АМ-сигнала, приведенного на рисунке 5.1 (f_0 = 109 Гц, f_S = 20, 45 Гц, M = 0,5)

Ширина спектра модулированного сигнала в этом случаев равна удвоенной частоте модулирующего сигнала:

$$\Delta f_{AM} = 2 f_S \text{ . (5.10)}$$

В частном случае, для АМ-сигнала спектр, которого показан на рисунке 5.4, ширина спектра модулированного сигнала составляет

$$\Delta f_{AM} = 2 \cdot 20,45 = 40,90 \text{ Гц.}$$

Оценим мощность АМ-сигнала. Из формулы (5.7) следует, что амплитуда огибающей АМ-сигнала изменяется от $U_{min} = U_0 (1 - M)$ до $U_{max} = U_0 (1 + M)$, следовательно средняя за период высокой частоты мощность АМ-сигнала изменяется соответственно от $P_{min} = P_0 (1 - M)^2$ до $P_{max} = P_0 (1 + M)^2$, где

–

$P = {}^{1}U^{2}$ – мощность несущего сигнала. Параметр $P_{\max}$ определяет значение

$0\,2\,0$

пиковой мощности для АМ-сигнала.

В соответствии с (1.13) для определения средней мощности АМ-сигнала $u(t)$ необходимо выполнить усреднение функции его мгновенной мощности $p(t)$:

$$P = \int_0^{T_{ср}} p(t)dt \quad (5.11)$$

$$= \lim_{T_{ср} \to \infty} \frac{1}{T}$$

Для того, чтобы определить мгновенную мощность $p(t)$ АМ-сигнала $u(t)$ введем следующие индексы:

– cf (carrier frequency) – несущая частота;

– usf (upper side frequency) – верхняя боковая частота;

– lsf (lower side frequency) – нижняя боковая

частота, составляющие АМ-сигнал в правой

части выражения (5.9):

$$u(t) = u_{cf}(t) + u_{usf}(t) + u_{lsf}(t). \quad (5.12)$$

Тогда, мгновенная мощность $p(t)$ сигнала $u(t)$ определяется выражением:

$$p(t) = u^2_{cf}(t) + u^2_{usf}(t) + u^2_{lsf}(t) + 2u_{cf}u_{usf}(t) + 2u_{cf}u_{lsf}(t) + \cdot \quad (5.13)$$

$$= u^2 + 2u_{usf}(t)u_{lsf}(t).$$

В результате усреднения (5.11) все взаимные мощности модулированного сигнала становятся равными нулю (их спектры не перекрываются), при этом:

$$P_c = P_{cf}(t) + P_{usf}(t) + P_{lsf}(t) = \frac{U^2(MU_0)^2}{2} \cdot \frac{0}{4^0} \quad (5.14)$$

Очевидно, доля мощности боковых частот в единицах мощности несущей частоты:

$$\alpha = \frac{P_{usf}(t) + P_{lsf}(t)}{P_{cf}(t)} 100 = \frac{M^2}{2} 100 = M^2 50\%, \quad (5.15)$$

т. е. не превышает 50% даже при стопроцентной модуляции (M = 1).

Под полезной мощностью АМ-сигнала понимают мощность боковых частот, несущих передаваемую (полезную) информацию. Тогда, КПД АМ определяется отношением мощности боковых частот к общей мощности модулированного сигнала:

$$\eta = \frac{P_{usf}(t) + P_{lsf}(t)}{} 100 =$$

$$M^{2}. \qquad \frac{100\%}{\dfrac{}{P_{\text{ср}}}} \qquad \frac{}{2 + M^{2}} \quad (5.16)$$

График КПД АМ, построенный по формуле (5.16) показан на рисунке 5.5.

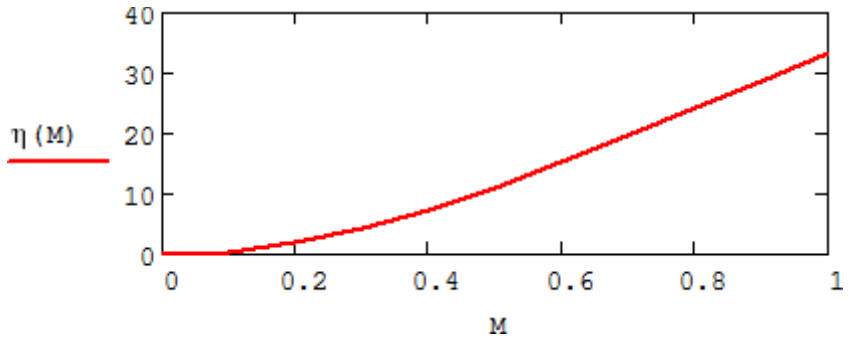


Рисунок 5.5 – График КПД АМ, построенный по формуле (5.16)

Как можно видеть на рисунке 5.5, даже при $M = 1$ КПД АМ составляет только 33%, а при практическом использовании обычно меньше 20%.

При $M = 1$ $P_{max} = 4P_0$, $P_{ср} = 1{,}5P_0$, отношение средней мощности $P_{ср}$ к максимальной (пиковой) P_{max}

$$\beta = \frac{P_{ср}}{P_{max}}, \qquad (5.17)$$

равно 0,375. Соотношения (5.14) – (5.17) также указывают на существенные недостатки рассмотренного вида модуляции. Из равенства $P_{ср} = 1{,}5P_0$ (при $M = 1$) следует, что только третья часть мощности передатчика затрачивается на излучение боковых составляющих АМ-сигнала (рисунок 5.5), несущих передаваемую информацию, а две трети мощности – на излучение сигнала несущей частоты. Равенство $P_{max} = 4P_0$ и низкий уровень отношения $P_{ср} / P_{max} = 0{,}375$ указывают на плохое использование мощности передатчика при АМ, который приходится рассчитывать на пиковое значение мощности сигнала P_{max} , т. е. на режим его кратковременной работы.

При нахождении корреляционной функции (КФ) модулированного колебания $u(t) = U(t)\cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$ будем исходить из условия абсолютной

интегрируемости функции u(t) (сигнал с конечной энергией), что позволяет применять определение (7.1):

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t-\tau)dt \qquad (5.18)$$

Как показано в [4] постоянная фаза сигнала не влияет на форму КФ АМ-сигнала и при $u(t) = U(t)\cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$ получаем:

(5.19)

$$\cos 2\pi f t \cdot \cos 2\pi f(t-\tau) = \frac{1}{2}\cos 2\pi f\tau + \frac{1}{2}\cos 2\pi f(2t-\tau),$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2}\cos 2\pi f\tau \int_0^{2\pi} U(t)U(t-\tau)dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} U(t)U(t-\tau)\cos 2\pi f(2t-\tau)dt \qquad (5.20)$$

Второй интеграл в правой части формулы (5.20) КФ существенно меньше первого (произведение медленно меняющейся функции $U(t)U(t-\tau)$ и сильно осциллирующего члена с частотой $2f_0$) и им можно пренебречь. Первый интеграл представляет собой КФ сигнала $U(t)$. Отсюда имеем:

$$R(\tau) = R(\tau)\frac{1}{2}\cos 2\pi f$$

$$U - 0\tau^{2} \quad (5.21)$$

Второй множитель ($1 \overline{\cos 2\pi f \tau}$) в формуле (5.21) представляет собой КФ

$2\ 0$

гармонического колебания с частотой f_0 и единичной амплитудой.

Итак, КФ АМ-сигнала равна произведению корреляционных функций огибающей и высокочастотного заполнения.

С учетом (5.21) полная энергия АМ-сигнала при многотональной модуляции за счет усреднения по высокочастотным колебаниям:

$$R(0) = {}^{1} R(\tau). \quad (5.22)$$

$2\ U$

При бесконечной энергии АМ-сигнала его КФ может быть вычислена по формуле:

$$R \quad \underline{1} \quad .$$

$$u(t)u(t - \tau)dt$$

$$(\tau$$

$$\int$$

$$)$$

$$T \to \infty \ T$$

$$0$$

$$=$$

$$\text{li}$$

$$\text{m}$$

(5.23)

На рисунке 5.6 приведена типичная форма КФ АМ-сигнала при тональной модуляции

При детектировании АМ-сигналов (рисунок 5.7, *а*) необходимо получить сигнал (рисунок 5.7, *б*), совпадающий по форме с огибающей АМ-сигнала. Иными словами, например, из спектра АМ-сигнала при тональной модуляции (рисунок 5.8, *а*), состоящего из несущей и двух боковых составляющих,

сдвинутых относительно несущей частоты f_0 на модулирующую частоту $\pm f_S$, необходимо выделить модулирующую частоту f_S (рисунок 5.8, *б*).

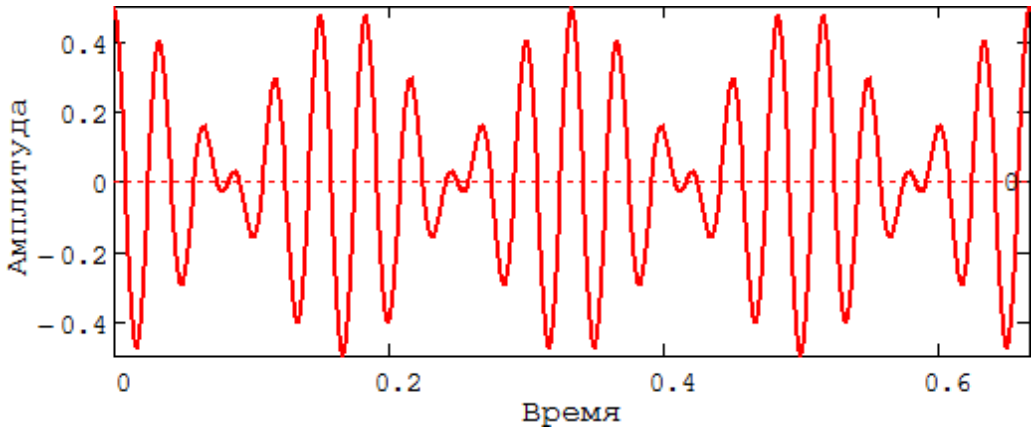
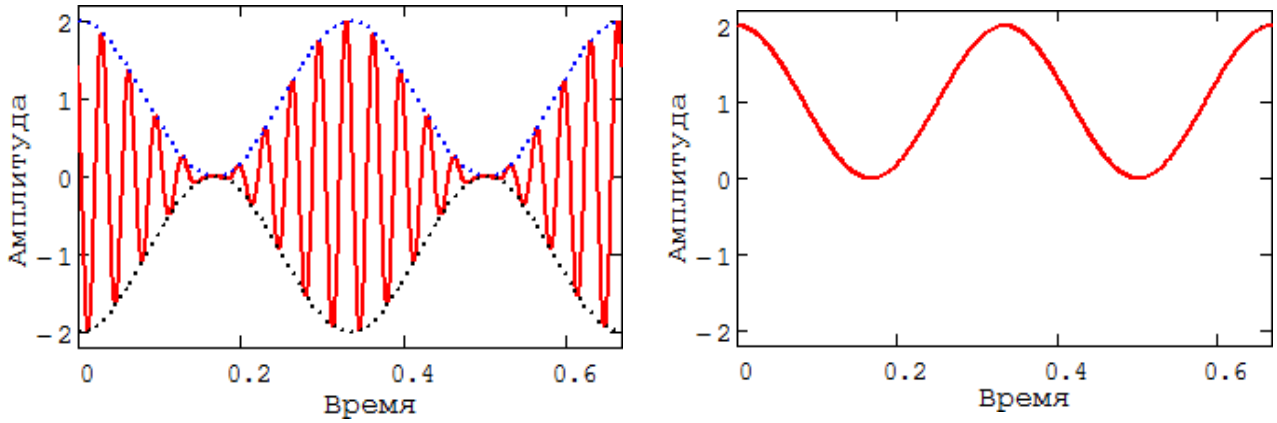


Рисунок 5.6 – Форма автокорреляционных функций АМ-сигнала при тональной модуляции для: U_0 = 1 В, f_0 = 30 Гц, f_S = 3 Гц и M = 1

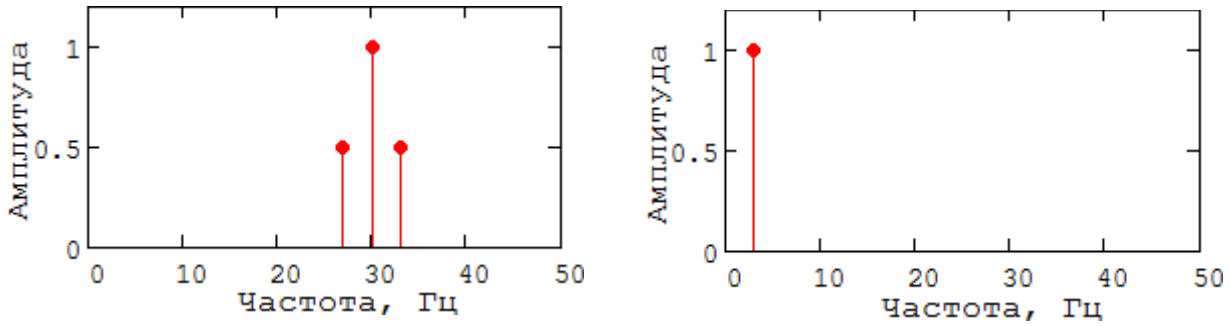


а) *б*)

Рисунок 5.7 – Демодуляция АМ-сигнала при тональной модуляции: а) АМ-сигнал при тональной модуляции ((U_0 = 1 В, f_0 = 30 Гц, f_S = 3 Гц и M = 1); б) огибающая АМ-сигнала

Любой детектор АМ колебаний содержит элемент, где происходит преобразование спектра и фильтр нижних частот (ФНЧ), который выделяет

требуемый спектр частот, несущих полезную информацию. Элементом, в котором осуществляется преобразование спектра, может быть как управляемое (транзистор и пр.), так и неуправляемое (диод) нелинейное сопротивление, или линейное сопротивление с переменными параметрами.

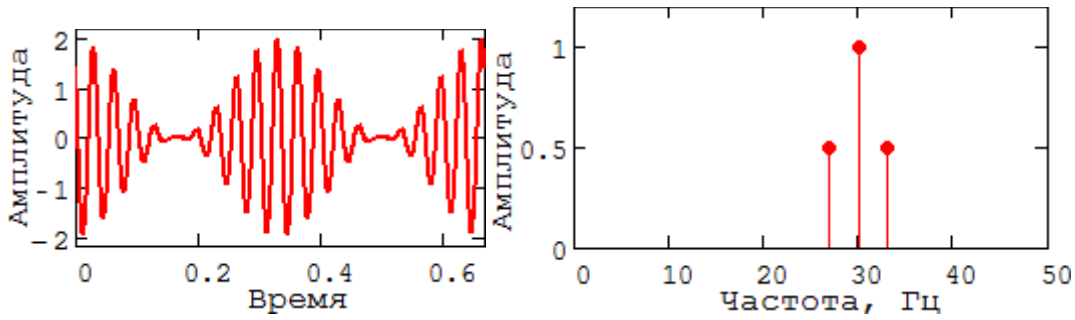


а) *б*)

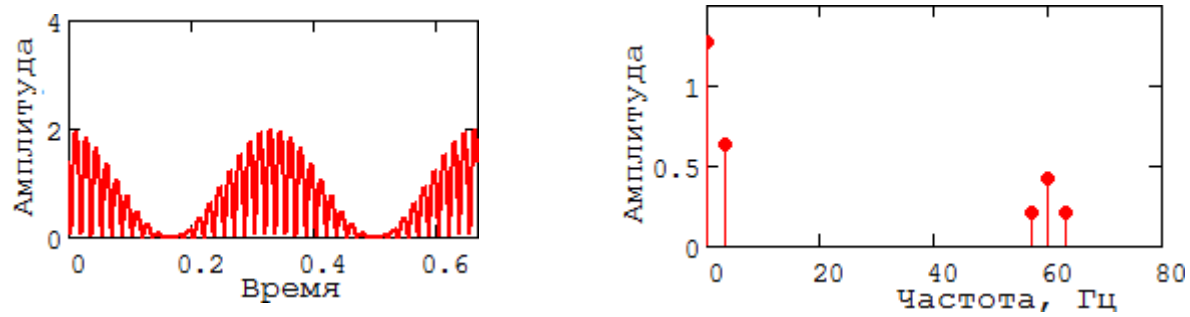
Рисунок 5.8 – Демодуляция АМ-сигнала при тональной модуляции: а) спектр АМ-сигнал при тональной модуляции (U_0 = 1 В, f_0 = 30 Гц, f_S = 3 Гц и M = 1); б) выделена модулирующая частота АМ-сигнала f_S = 3 Гц

Демодуляция АМ-сигналов может выполняться несколькими способами. Самый простой способ – двухполупериодное детектирование (вычисление модуля АМ-сигнала) с последующим сглаживанием однополярных полупериодов несущей частоты фильтром нижних частот (ФНЧ).

На рисунке 5.9 приведен пример изменения временной диаграммы и спектра АМ-сигнала до и после двухполупериодного детектирования.



а) *б*)



в) *г*)

Рисунок 5.9 – Пример изменения АМ-сигнала при тональной модуляции и его спектра при двухполупериодном детектировании: *а*) АМ-сигнал; б) спектр АМ-сигнала; в) сигнал на выходе детектора; г) спектр сигнала на выходе детектора

Параметры АМ-сигнала, представленного на рисунке 5.9, *а*: амплитуда сигнала несущей частоты U_0 = 1 В, несущая частота f_0 = 30 Гц, частота модуляции f_S = 3 Гц и коэффициент модуляции M = 1.

Как видно на рисунке 5.9, при детектировании спектр АМ-сигнала переходит на удвоенную несущую частоту 2 f_0 и уменьшается по энергии (1/5 полной энергии АМ-сигнала). Основная часть энергии АМ-сигнала (более 4/5 полной энергии сигнала) трансформируется в область низких частот где и распределяется между постоянной составляющей (f = 0), а также выделенной модулирующей частотой f_S сигнала модуляции в зависимости от значения коэффициента модуляции M. При M =1 энергии постоянной составляющей и выделенной гармоникой сигнала модуляции равны между собой, а при M = 0 (в отсутствие сигнала модуляции) вся энергия модулирующей частоты сигнала

модуляции передается постоянной составляющей спектра сигнала на выходе детектора.

Кроме этих составляющих в спектре появляются также вторая, четвертая и более высокие гармоники детектированного модулированного сигнала (т. е. на частотах $4f_0 \pm f_S$, $6f_0 \pm f_S$, и т. д.), которые не показаны на рисунке 5.10.

Энергия составляющих на частотах $4f_0 \pm f_S$ не превышает 2% полной энергии АМ-сигнала, а остальных – $6f_0 \pm f_S$, и т. д. и вовсе незначительна [4].

Демодуляторы АМ-сигнала выделяют после детектирования только низкочастотный информационный сигнал на частоте f_S и подавляют все остальные частоты, включая постоянную составляющую (низкочастотный фильтр с подавлением постоянной составляющей).

Очевидно также, что в случае перемодуляции сигнала исходный информационный сигнал на частоте f_S будет восстанавливаться с ошибкой.

Схема простейшего приемника АМ-сигналов с двухполупериодным детектором и индуктивной связью между приемной антенной *A1* и входным контуром приемника *L1* показана на рисунке 5.10 [5].

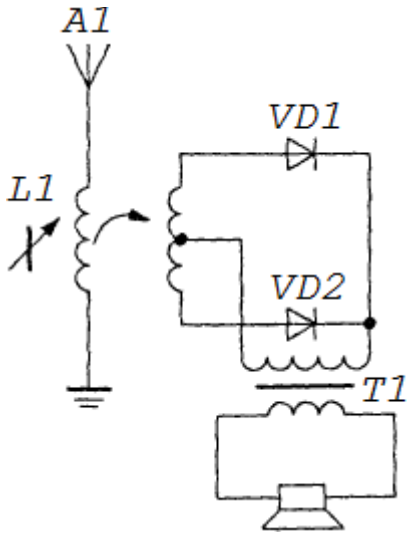


Рисунок 5.10 – Схема простейшего приемника АМ-сигналов с двухполупериодным детектором

Другой распространенный метод демодуляции АМ-сигналов – синхронное детектирование. При синхронном детектировании АМ-сигнал умножается на

опорное гармоническое колебание с частотой f_0, совпадающей с частой несущего сигнала. Без учета фазовых углов несущего и модулирующего сигнала, после такого перемножения, в синхронном детекторе будет сформирован сигнал:

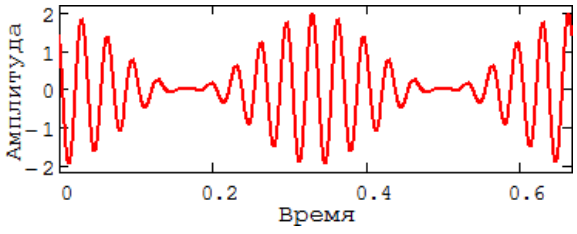
$$y(t) = u(t)\cos 2\pi f_0 t = U(t)\cos 2\pi f_0 t \cdot \cos 2\pi f_0 t =$$

$$= \frac{1}{2} U(t) + \frac{1}{2} U(t)\cos 2\pi 2 f_0 t \qquad (5.24)$$

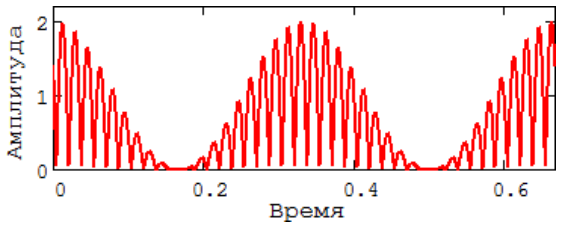
Как следует из формулы (5.24), сигнал $y(t)$ после перемножителя синхронного детектора разделяется на два слагаемых, первое из которых повторяет исходный модулирующий сигнал (огибающую АМ-сигнала), а второе повторяет модулированный сигнал на удвоенной несущей частоте $2 f_0$.

На рисунке 5.11 приведено визуальное сопоставление двухполупериодного и синхронного детектирования АМ-сигнала при тональной модуляции, которое наглядно показывает практически полное подобие процессов.

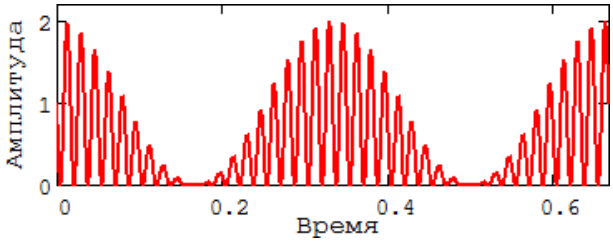
Физический амплитудный спектр сигналов после демодуляции однозначно соотносится со спектром входного модулированного сигнала: амплитуды гармоник демодулированного сигнала на частоте $2 f_0$ в два раза меньше амплитуд входного сигнала, постоянная составляющая равна амплитуде несущей частоты f_0 и не зависит от глубины модуляции, амплитуда информационного демодулированного сигнала в два раза меньше амплитуды исходного модулирующего сигнала.



а)



б)



в)

Рисунок 5.11 – Визуальное сопоставление двухполупериодного и синхронного детектирования АМ-сигнала при тональной модуляции: *а*) АМ-сигнал; б) сигнал на выходе двухполупериодного детектора; в) сигнал на выходе синхронного детектора

Замечательной особенностью синхронного детектирования является полная независимость от глубины модуляции, т. е. коэффициент модуляции сигнала может быть и больше единицы. Пример синхронного детектирования перемодулированного АМ-сигнала ($M = 2$) при тональной модуляции приведен на рисунке 5.12. Однако при синхронном детектировании требуется точное совпадение фаз и частот опорного колебания демодулятора и несущей частоты

АМ-сигнала. При сдвиге фазы опорного колебания на $\Delta\phi$ относительно фазы

ϕ_0 сигнала несущей частоты f_0 выходной сигнал демодулятора оказывается

умноженным на косинус угла $\Delta\phi$ фазовой ошибки:

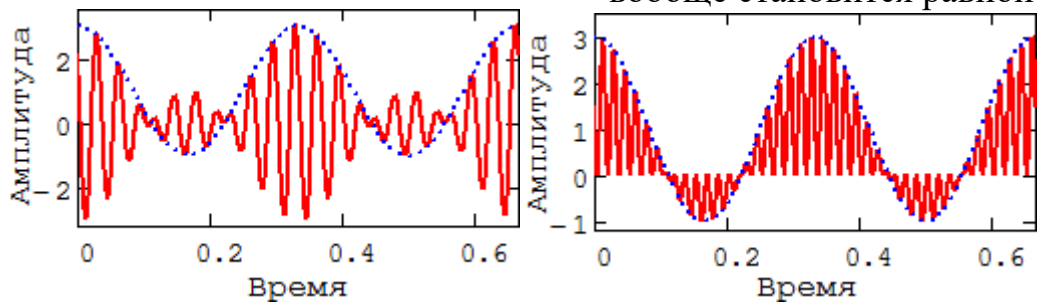
$$y(t) = U(t)\cos 2\pi f_0 t \cdot \cos(2\pi f_0 t - \Delta\phi) = \frac{1}{2} U(t)\cos(-\Delta\phi) +$$

$$\frac{1}{2} \quad (5.25)$$

$$+_ U(t)\cos(2\pi 2 f_0 t - \Delta\phi). \quad 2$$

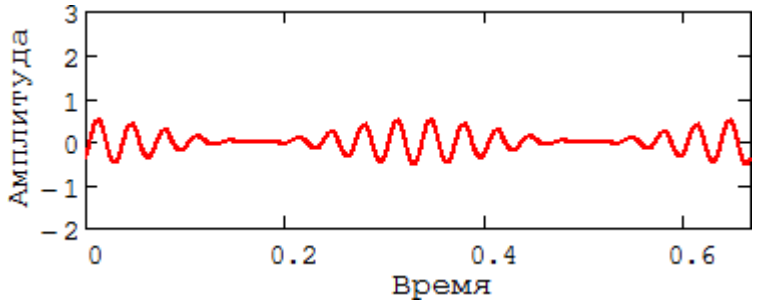
и соответственно, амплитуда составляющей спектра сигнала на выходе синхронного детектора на частоте f_S (первое слагаемое в правой части

формулы (5.25)) уменьшается т. к. $\cos(-\Delta\phi) = \cos(\Delta\phi) \leq 1$ (рисунок 5.13), а при $\Delta\phi=\pi/2$ нулю. амплитуда этой составляющей спектра вообще становится равной

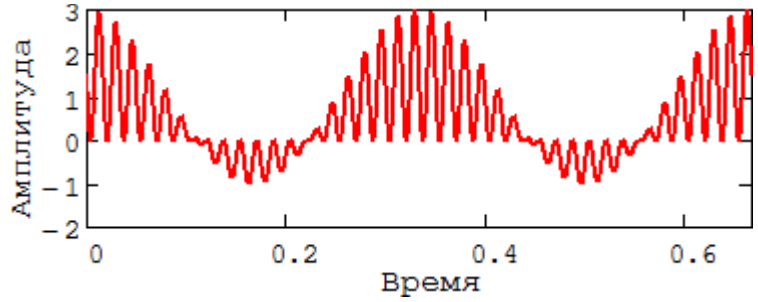


а) *б*)

Рисунок 5.12 – Пример синхронного детектирования перемодулированного АМ-сигнала при тональной модуляции ($M = 2$): *а*) АМ-сигнал; б) сигнал на выходе синхронного детектора



а)



б)

Рисунок 5.13 – Синхронное детектирование АМ-сигнала при $\Delta\phi=\pi/3$:

а) временная диаграмма первого слагаемого в правой части формулы (5.31);

б) сигнал на выходе синхронного детектора

Следовательно, синхронный детектор обладает избирательностью по фазе. Это свойство повышает помехозащищенность синхронного детектора. Действительно, синхронный детектор не реагирует на помехи, имеющие частоту, равную несущей частоте полезного сигнала, но сдвинутые относительно опорного напряжения па угол 90°.

При сдвиге частоты Δf между несущим и опорным колебаниями сигнал на

выходе синхронного демодулятора оказывается умноженным на гармоническое колебание с разностной частотой:

$$y(t) = U(t)\cos 2\pi f_0 t \cdot \cos 2\pi(f_0 - \Delta f)t = \frac{1}{2}U(t)\cos(-2\pi\Delta f t) + \frac{1}{2}U(t)\cos 2\pi(2f_0 - \Delta f)t. \quad (5.26)$$

при этом выходной сигнал демодулятора начинает пульсировать с частотой биений Δf (рисунок 5.14).

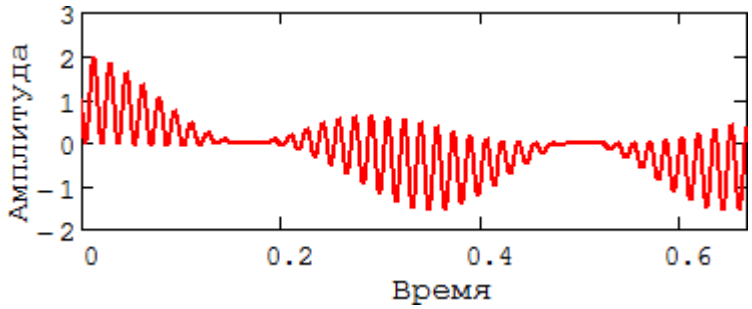


Рисунок 5.14 – Сигнал на выходе синхронного детектора при Δf = 1 Гц

Таким образом, основным недостатком синхронного детектирования АМ-сигналов является необходимость создания на приемной стороне системы электрической связи синхронного и синфазного опорного напряжения. На практике для синхронизации опорного колебания с несущей частотой сигнала

АМ-сигналов в составе синхронных демодуляторов используются следящие системы фазовой автоподстройки опорной частоты.

Оборудование и материалы

Аппаратура. Для выполнения лабораторной работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с

тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 MB Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов

Ÿ 256).

Программное обеспечение. Для выполнения лабораторной работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 13 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении лабораторной работы **запрещается**:

– самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;

– нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т.д.;

– принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Указания по порядку выполнения работы

Методику выполнения работы рассмотрим на примере исследования АМ-сигнала при тональной модуляции и особенностей его детектирования. Заданы

параметры несущего сигнала $u(t)$, определяемого соотношениями (5.3) и (5.4):

U_0 = 1 В, f_0 = 30 Гц, $\phi_0 = \pi 4/$ рад, $k_{АМ}$ = 1 . Модулирующий сигнал $s(t)$

является гармоническим колебанием (5.5) с параметрами: S_m = 1 В, f_S = 3 Гц,

ϕ_S = 0 рад.

Требуется:

– определить $s(t)$ – модулирующий сигнал и построить его временную диаграмму;

– определить $U(t)$ – огибающую АМ-сигнала и построить еѐ временную диаграмму;

– определить коэффициент амплитудной модуляции M;

– определить диапазон изменения амплитуды огибающей АМ-сигнала;

– определить АМ-сигнал и построить его временную диаграмму;

– определить мощность несущего сигнала P_0;

– определить значения минимальной $P_{\min}$ и $P_{\max}$ – пиковой мощности АМ-сигнала;

– определить среднюю мощность АМ-сигнала $P_{\text{ср}}$;

– определить в процентах долю мощности боковых частот АМ-сигнала в единицах мощности несущей частоты α;

– определить значение КПД АМ;

– определить отношение средней мощности $P_{\text{ср}}$ к максимальной (пиковой) $P_{\max}$ для АМ-сигнала;

– определить и построить амплитудные и фазовые спектральные диаграммы несущего и модулирующего сигналов;

– определить и построить амплитудную и фазовую спектральные диаграммы АМ-сигнала;

– определить ширину спектра АМ-сигнала;

– определить и построить КФ огибающей АМ-сигнала;

– определить и построить КФ АМ-сигнала;

– исследовать особенности двухполупериодного детектирования

АМ- сигнала;

– исследовать особенности синхронного детектирования АМ-сигнала.

Рассмотрим решение поставленной задачи в математическом пакете

Mathcad:

1. Запускаем Mathcad. Согласно заданным параметрам вводим параметры несущего и модулирующего сигналов (рисунок 5.16).

$U0 := 1 \quad f0 := 30 \quad \varphi 0 := \frac{\pi}{4} \quad kam := 1.0$

$Sm := 1.0 \quad fs := 3 \quad \varphi s := 0$

Рисунок 5.15 – Определение параметров несущего и модулирующего сигналов

2. Согласно (5.5) определяем $s(t)$ – модулирующий сигнал, и стром его временную диаграмму (рисунок 5.16).

$s(t) := Sm \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot fs \cdot t + \varphi s)$

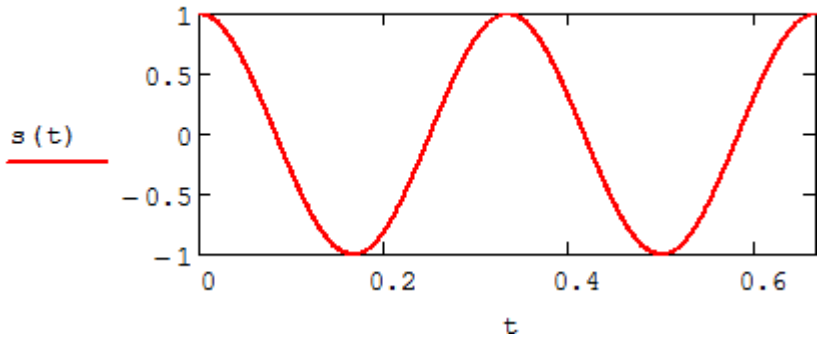


Рисунок 5.16 – Определение и график модулирующего сигнала

3. Согласно (5.6) определяем $U(t)$ – огибающую АМ-сигнала, и строим еѐ временную диаграмму (рисунок 5.17).

$U(t) := U0 \cdot (1 + M \cdot s(t))$

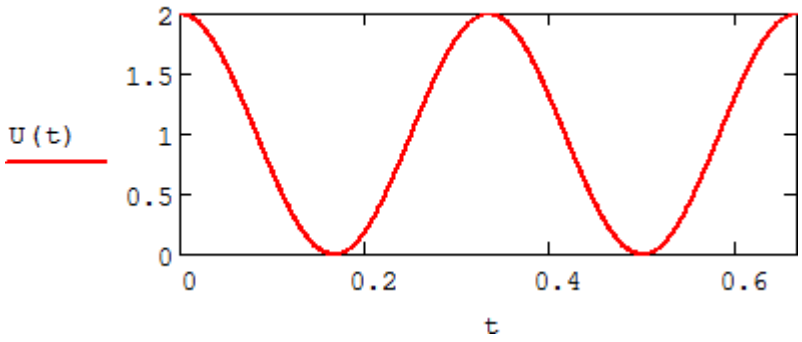


Рисунок 5.17 – Определение и график огибающей АМ-сигнала

4. Находим значение коэффициента амплитудной модуляции (рисунок 5.18).

$$M := \frac{kam \cdot Sm}{U0} = 1$$

Рисунок 5.18 – Значение коэффициента амплитудной модуляции

5. Находим диапазон изменения амплитуды огибающей АМ-сигнала (рисунок 5.19).

$$Umin := U0 \cdot (1 - M) = 0$$
$$Umax := U0 \cdot (1 + M) = 2$$

Рисунок 5.19 – Диапазон изменения амплитуды огибающей АМ-сигнала

6. Согласно (5.7) определяем АМ-сигнал, и строим его временную диаграмму (рисунок 5.20).

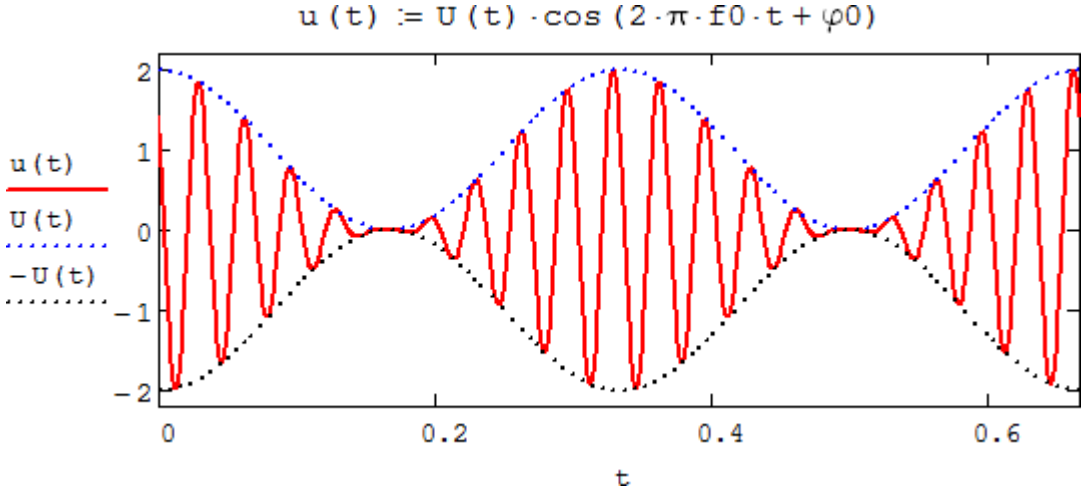


Рисунок 5.20 – Определение и график АМ-сигнала

Примечание – Для наглядности на рисунке 5.20 также показан график огибающей АМ-сигнала.

7. Находим мощность P_0, Вт, несущего сигнала (рисунок 5.21).

$$P0 := \frac{U0^2}{2} = 0.5$$

Рисунок 5.21 – Мощность несущего сигнала

8. Находим значения минимальной

сигнала (рисунок 5.22).

P_{min} и P_{max}, Вт, пиковой мощности АМ-

$$Pmin := P0 \cdot (1 - M)^2 = 0 \qquad Pmax := P0 \cdot (1 + M)^2 = 2$$

Рисунок 5.22 – Значения минимальной P_{min} и P_{max} – пиковой мощности АМ-сигнала

9. Находим среднюю мощность $P_{ср}$, Вт, АМ-сигнала (рисунок 5.23).

$$Pcp := P0 \cdot \left(1 + 0.5 \cdot M^2\right) = 0.75$$

Рисунок 5.23 – Значение средней мощности АМ-сигнала

10. Находим долю мощности боковых частот АМ-сигнала в единицах мощности несущей частоты α, %, (рисунок 5.24).

$$\alpha := M^2 \cdot 50 = 50$$

Рисунок 5.24 – Значение доли мощности боковых частот АМ-сигнала в единицах мощности несущей частоты

11. Находим значение КПД АМ (рисунок 5.25).

$$M := 0, 0.1 .. 1 \qquad \eta(M) := \frac{M^2}{2 + M^2} \cdot 100 \qquad \eta(1) = 33.333$$

Рисунок 5.25 – Значение КПД АМ

12. Вычисляем отношение средней мощности $P_{ср}$ к максимальной (пиковой) P_{max} для АМ-сигнала (рисунок 5.26).

$$\frac{Pcp}{Pmax} = 0.375$$

Рисунок 5.26 – Значение отношения средней мощности к максимальной (пиковой)

13. Определяем и строим амплитудные и фазовые спектральные диаграммы несущего и модулирующего сигналов (рисунки 5.27 – 5.29).

$$f := \begin{pmatrix} fs \\ f0 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} Sm \\ U0 \end{pmatrix} \qquad \varphi := \frac{180}{\pi} \cdot \begin{pmatrix} \varphi s \\ \varphi 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок 5.27 – Задаем векторы частот, амплитуд и фаз несущего и модулирующего сигналов

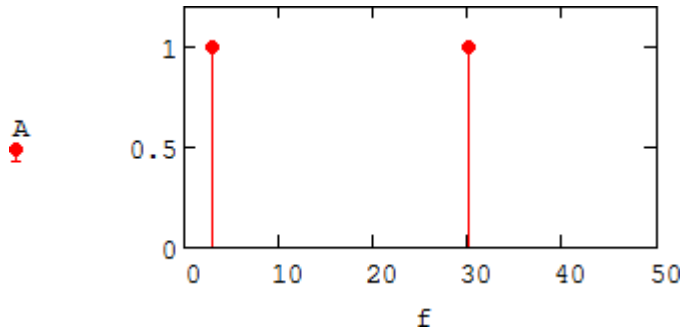


Рисунок 5.28 – Амплитудная спектральная диаграмма несущего и модулирующего сигналов

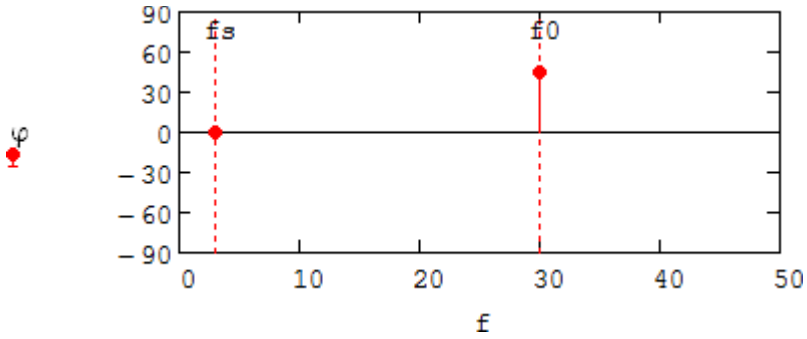


Рисунок 5.29 – Фазовая спектральная диаграмма несущего и модулирующего сигналов

14. Определяем и строим амплитудные и фазовые спектральные диаграммы АМ-сигнала (рисунки 5.30 – 5.32).

$$f := \begin{pmatrix} f0 - fs \\ f0 \\ f0 + fs \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} \frac{M \cdot U0}{2} \\ U0 \\ \frac{M \cdot U0}{2} \end{pmatrix} \qquad \varphi := \frac{180}{\pi} \cdot \begin{pmatrix} \varphi 0 - \varphi s \\ \varphi 0 \\ \varphi 0 + \varphi s \end{pmatrix}$$

Рисунок 5.30 – Задаем векторы частот, амплитуд и фаз спектральных составляющих АМ-сигнала

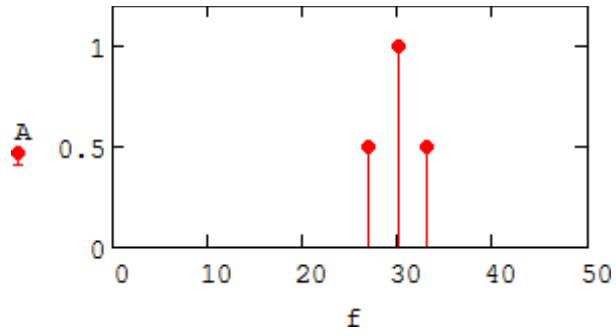


Рисунок 5.31 – Амплитудная спектральная диаграмма АМ-сигнала

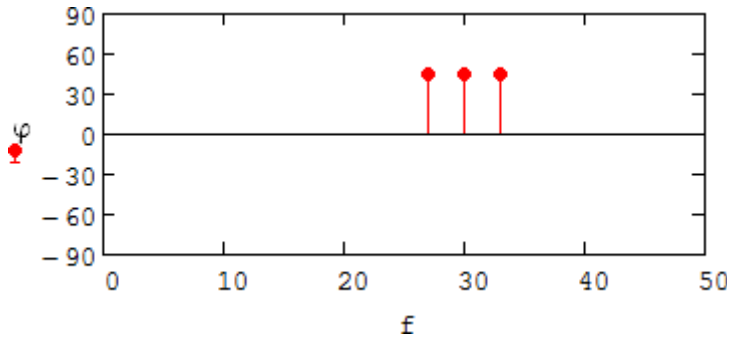


Рисунок 5.32 – Фазовая спектральная диаграмма АМ-сигнала

15. Вычисляем ширину Δf, Гц, спектра АМ-сигнала (рисунок 5.30).

$$\Delta f := 2 \cdot fs = 6$$

Рисунок 5.33 – Значение ширины спектра АМ-сигнала

16. Вычисляем по формуле (7.4) и строим КФ огибающей АМ-сигнала (рисунок 5.34).

$$Rs(\tau) := \frac{Sm^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot fs \cdot \tau)$$

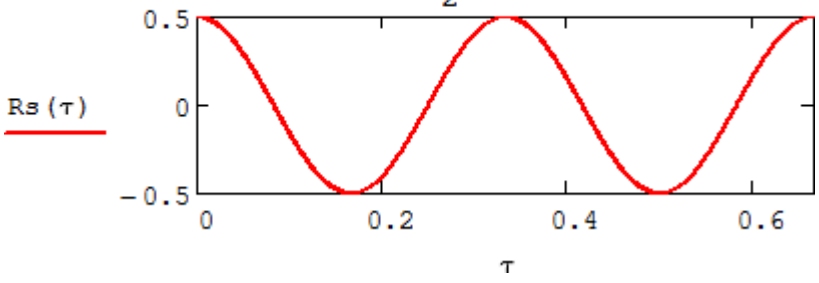


Рисунок 5.34 – Определение и график КФ огибающей АМ-сигнала

17. Вычисляем по формуле (5.27) и строим КФ АМ-сигнала (рисунок 5.35).

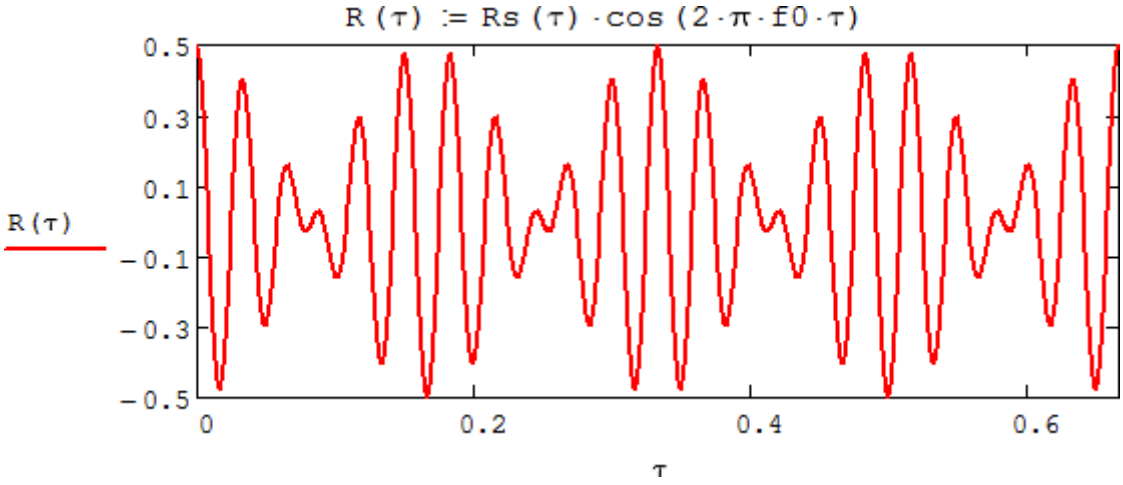


Рисунок 5.35 – Определение и график КФ АМ-сигнала

18. Исследуем особенности двухполупериодного детектирования АМ-сигнала:

18.1 Находим сигнал на выходе двухполупериодного детектора (вычисляем модуль АМ-сигнала) (рисунок 5.36).

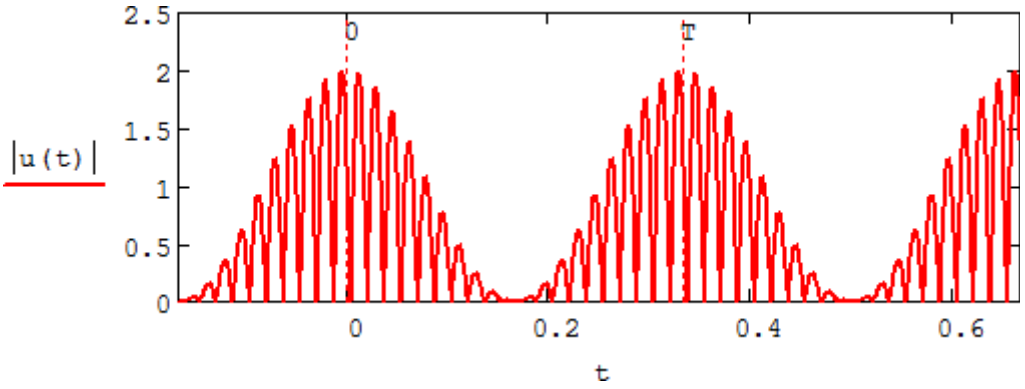


Рисунок 5.36 – Сигнал на выходе двухполупериодного детектора

Как видно из рисунка 5.36, сигнал на выходе двухполупериодного детектора является периодическим, причем, его период совпадает с периодом модулирующего сигнала, т. е. $T = 1/f_S = 1/3 = 0{,}333$ Гц.

18.2 Используя методику, рассмотренную на лабораторной работе № 4, раскладываем сигнал на выходе двухполупериодного детектора в ряд Фурье, ограничиваясь количеством гармоник спектра N равным 40 (рисунок 5.37).

$$N := 40 \qquad f1 := fs \qquad k := 0 \,..\, N$$

$$a_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T |u(t)| \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot t)\ dt$$

$$b_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T |u(t)| \cdot \sin(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot t)\ dt$$

$$c_k := \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2} \qquad \varphi_k := \operatorname{atan2}(a_k, b_k)$$

$$A_k := c_k \qquad A_0 := \frac{A_0}{2} = 0.637 \qquad A_1 = 0.637$$

Рисунок 5.37 – Раскладываем сигнал на выходе двухполупериодного детектора в ряд Фурье

Как видно из рисунка 5.37, основная частота (частота первой гармоники) периодического сигнала, наблюдаемого на выходе двухполупериодного детектора, совпадает с частой модулирующего сигнала, т. е. $f_1 = f_S = 3$ Гц.

18.3 Определяем и строим амплитудные и фазовые спектральные диаграммы сигнала, наблюдаемого на выходе двухполупериодного детектора, (рисунки 5.38 и 5.39).

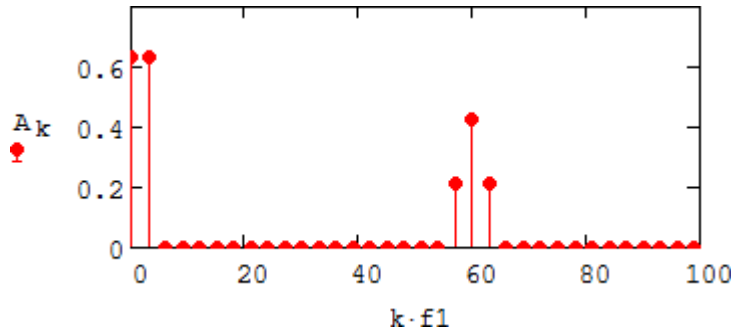


Рисунок 5.38 – Амплитудная спектральная диаграмма сигнала на выходе двухполупериодного детектора

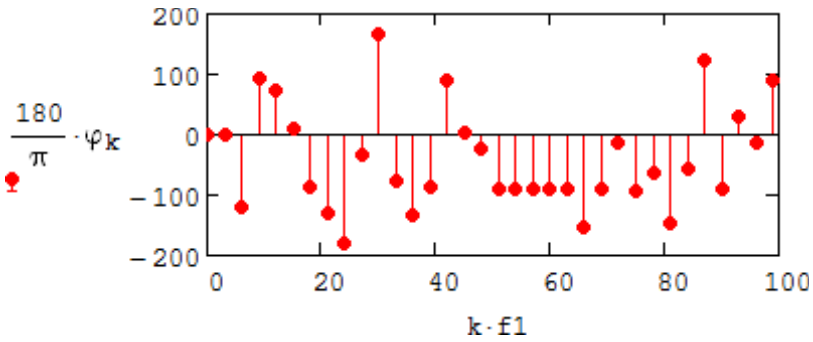


Рисунок 5.39 – Фазовая спектральная диаграмма сигнала на выходе двухполупериодного детектора

Как видно на рисунке 5.38, при детектировании спектр АМ-сигнала переходит на удвоенную несущую частоту $2f_0 = 2 \cdot 30 = 60$ Гц и уменьшается по амплитуде (если до детектирования амплитуда несущей частоты $f_0 = 30$ АМ- сигнала составляла $U_0 = 1$ В (рисунок 5.31), то после детектирования амплитуда двадцатой гармоники на частоте $2f_0 = 60$ Гц равна $A_{20} = 0{,}424$ В). После двухполупериодного детектора основная часть энергии АМ-сигнала трансформируется в область низких частот где и распределяется между постоянной составляющей ($f = 0$), а также выделенной модулирующей частотой f_S сигнала. В рассматриваемом примере коэффициент амплитудной модуляции M равен единице, поэтому амплитуды постоянной составляющей ($f = 0$) и первой гармоники сигнала на выходе двухполупериодного детектора $f_1 = f_S = 3$ Гц равны между собой $A_0 = A_1 = 0{,}637$ В. Для наглядности на рисунках 5.40 и 5.41 показаны фрагменты амплитудной спектральной диаграммы сигнала, наблюдаемого на выходе двухполупериодного детектора, в области нижних

частот и удвоенной несущей частоты $2 f_0 = 60$ Гц.

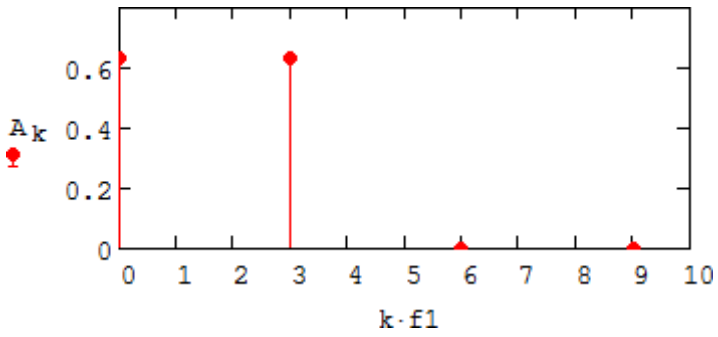


Рисунок 5.40 – Амплитудная спектральная диаграмма сигнала на выходе двухполупериодного детектора в области нижних частот

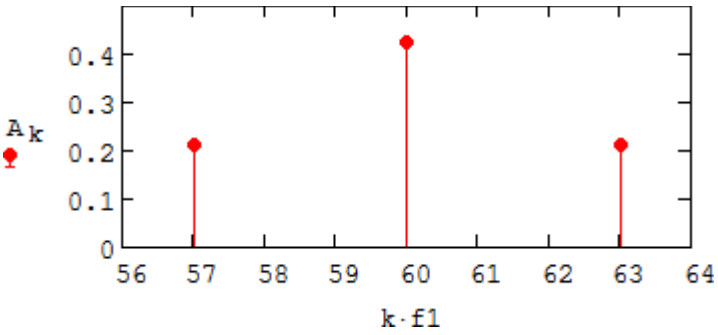


Рисунок 5.41 – Амплитудная спектральная диаграмма сигнала на выходе двухполупериодного детектора в области удвоенной несущей частоты

Примечание – Кроме составляющих на удвоенной несущей частоте $2\,f_0$ в спектре сигнала на выходе двухполупериодного детектора появляются также четвертая, шестая и более высокие гармоники детектированного модулированного сигнала (т. е. на частотах $4\,f_0 \pm f_S$, $6\,f_0 \pm f_S$, и т. д.), которые не показаны на рисунке 5.38.

18.4 Демодулятор АМ-сигнала выделяют после детектирования только низкочастотный информационный сигнал на частоте f_S и подавляют все остальные частоты, включая постоянную составляющую (низкочастотный фильтр с подавлением постоянной составляющей). Таким образом, найдем сигнал $s1(t)$ на выходе демодулятор АМ-сигнала, построим его график и для наглядности также построим в той же координатной сетке график модулирующего сигнала $s(t)$ (рисунок 5.42).

$$s1(t) := A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f1 \cdot t + \varphi_1)$$

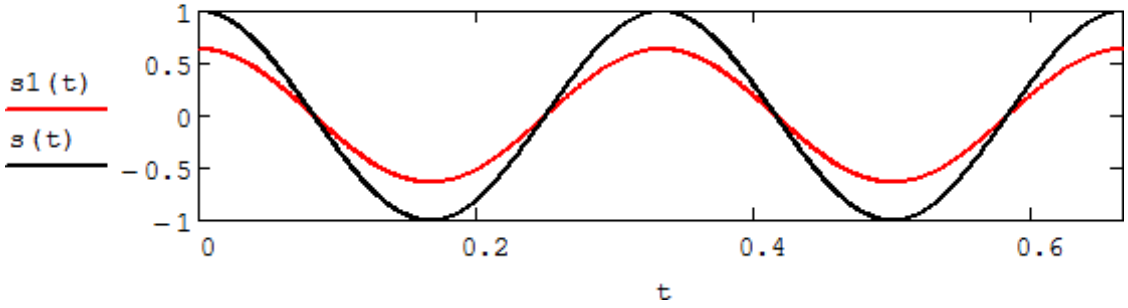


Рисунок 5.42 – Сигнал на выходе демодулятор АМ-сигнала $s1(t)$ и модулирующий сигнал $s(t)$

Из анализа графиков на рисунке 5.42 можно сделать вывод о том, что сигнал на выходе демодулятор АМ-сигнала $s1(t)$ и модулирующий сигнал $s(t)$ совпадают по форме (являются гармоническими колебаниями одной и той же частоты), являются синфазными гармоническими колебаниями, но отличаются по амплитуде. Отношение амплитуд сигнала на выходе демодулятор АМ-сигнала $s1(t)$ и модулирующего сигнала $s(t)$ составляет 0,637 (рисунок 5.43).

$$\frac{s1(0)}{s(0)} = 0.637$$

Рисунок 5.43 – Определение отношения амплитуд сигнала на выходе демодулятор АМ-сигнала $s1(t)$ и модулирующего сигнала $s(t)$

18.5 Определяем расстояние и квадрат расстояния между сигналами $s1(t)$ и $s(t)$ за период колебаний $T = 1/f_S = 0{,}333$ с (рисунок 5.44).

$$ds1_s := \sqrt{\int_0^T (s1(t) - s(t))^2 \, dt} = 0.148 \qquad ds1_s^2 = 0.022$$

Рисунок 5.44 – Определение квадрата расстояния между сигналами $s1(t)$ и $s(t)$

18.6 Квадрат расстояния между сигналами $s1(t)$ и $s(t)$ за период колебаний T,

выраженный в процентной мере $s(t)$ относительно квадрата нормы сигнала (рисунок 5.45).

$$Es := \int_0^T s(t)^2\,dt = 0.167 \qquad \varepsilon := \frac{ds1_s}{Es} \cdot 100 = 89.009$$

Рисунок 5.45 – Квадрат расстояния между сигналами $s1(t)$ и $s(t)$, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$

Делаем вывод о том, что квадрат расстояния между сигналами $s1(t)$ и $s(t)$ составляет примерно 89% относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$.

19. Исследуем особенности синхронного детектирования АМ-сигнала:

19.1 Как было показано ранее, при идеальном синхронном детектировании АМ-сигнал умножается на опорное гармоническое колебание с частотой f_0 и начальной фазой ϕ_0, совпадающей с частой и начальной фазой несущего сигнала. Для того, чтобы исследовать особенности синхронного детектирования АМ-сигнала предположим, что реальном синхронном детектировании АМ-сигнал умножается на опорное гармоническое колебание с частотой $f_0 + \Delta f$ и начальной фазой $\phi_0 + \Delta\phi$, не совпадающими с частой и начальной фазой несущего сигнала. Положим, что $\Delta f = 0$ и $\Delta\phi = 0$. С учетом сказанного, находим сигнал на выходе синхронного детектора (рисунок 5.46) и строим его график (рисунок 5.47).

$$\Delta\varphi := 0 \qquad \Delta f := 0$$

$$y(t) := u(t) \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot (f0 + \Delta f) \cdot t + \varphi 0 + \Delta\varphi]$$

Рисунок 5.46 – Определяем сигнал на выходе синхронного детектора

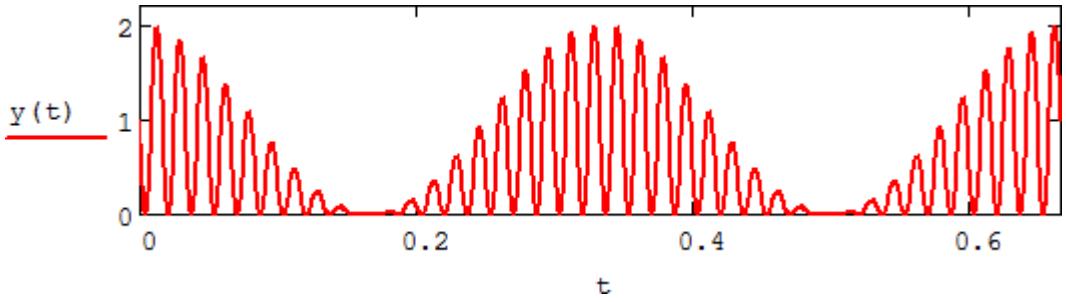


Рисунок 5.47 – График сигнала на выходе синхронного детектора

19.2 Используя методику, рассмотренную на лабораторной работе № 4, раскладываем сигнал на выходе синхронного детектора в ряд Фурье, ограничиваясь количеством гармоник спектра N равным 40 и полагая, что основная частота (частота первой гармоники) периодического сигнала, наблюдаемого на выходе синхронного детектора, совпадает с частой

$$N := 40 \qquad k := 0 .. \ N$$

$$a_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T y(t) \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot t) \ dt$$

$$b_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T y(t) \cdot \sin(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot t) \ dt$$

$$c_k := \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2} \qquad \varphi_k := \operatorname{atan2}(a_k, b_k)$$

$$A_k := c_k \qquad A_0 := \frac{A_0}{2}$$

модулирующего сигнала, т. е. $f_1 = f_S = 3$ Гц (рисунок 5.48).

Рисунок 5.48 – Раскладываем сигнал на выходе синхронного детектора в ряд Фурье

19.3 Определяем и строим амплитудные и фазовые спектральные диаграммы сигнала, наблюдаемого на выходе синхронного детектора, (рисунки 5.49 и 5.50).

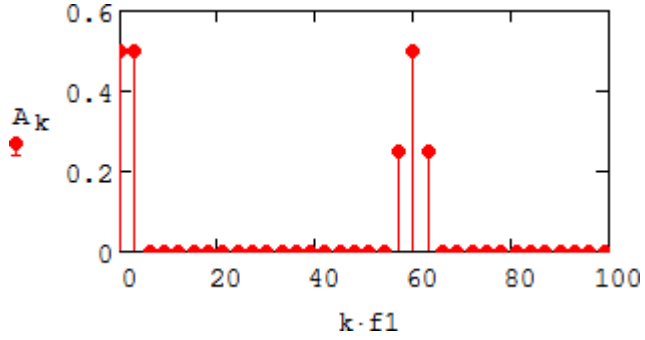


Рисунок 5.49 – Амплитудная спектральная диаграмма сигнала на выходе синхронного детектора

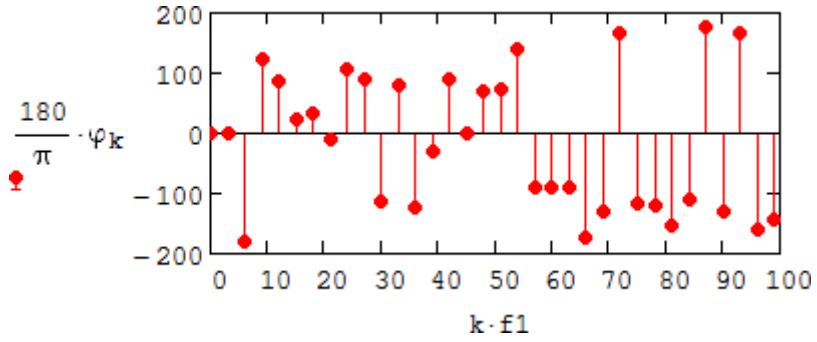


Рисунок 5.50 – Фазовая спектральная диаграмма сигнала на выходе синхронного детектора

Как видно на рисунке 5.49, амплитудный спектр АМ-сигнала после демодуляции однозначно соотносится со спектром входного АМ-сигнала: амплитуды гармоник демодулированного сигнала на частоте $2\,f_0$ в два раза меньше амплитуд входного сигнала, постоянная составляющая равна амплитуде несущей частоты f_0 и не зависит от глубины модуляции, амплитуда информационного демодулированного сигнала в два раза меньше амплитуды исходного модулирующего сигнала. Для наглядности на рисунках 5.51 и 5.52 показаны фрагменты амплитудной спектральной диаграммы сигнала, наблюдаемого на выходе синхронного детектора, в области нижних частот и удвоенной несущей частоты $2\,f_0$ = 60 Гц.

19.4 Демодулятор АМ-сигнала выделяют после синхронного детектирования только низкочастотный информационный сигнал на частоте f_S и подавляют все остальные частоты, включая постоянную составляющую (низкочастотный фильтр с подавлением постоянной составляющей).

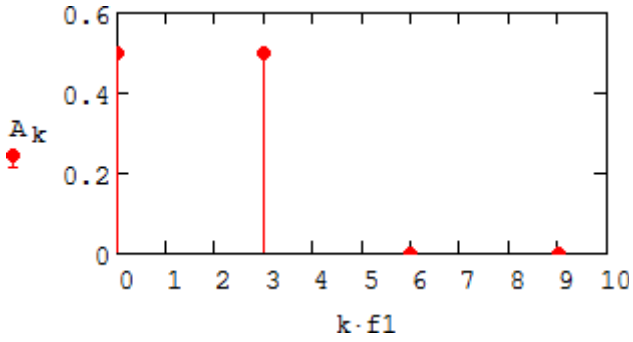


Рисунок 5.51 – Амплитудная спектральная диаграмма сигнала на выходе синхронного детектора в области нижних частот

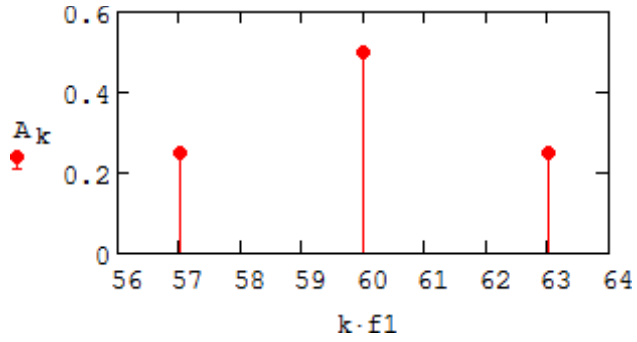


Рисунок 5.52 – Амплитудная спектральная диаграмма сигнала на выходе синхронного детектора в области удвоенной несущей частоты

Таким образом, найдем сигнал $s2(t)$ на выходе демодулятор АМ-сигнала, построим его график и для наглядности также построим в той же координатной сетке график модулирующего сигнала $s(t)$ (рисунок 5.53).

$$s2(t) := A_1 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f1 \cdot t + \varphi_1\right)$$

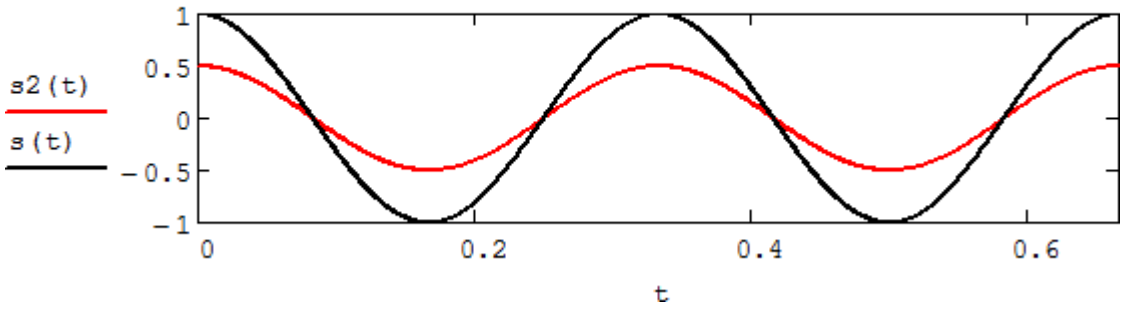


Рисунок 5.53 – Сигнал на выходе демодулятор АМ-сигнала $s2(t)$ и модулирующий сигнал $s(t)$

Из анализа графиков на рисунке 5.53 можно сделать вывод о том, что сигнал на выходе демодулятор АМ-сигнала $s2(t)$ и модулирующий сигнал $s(t)$ совпадают по форме (являются гармоническими колебаниями одной и той же частоты), являются синфазными гармоническими колебаниями, но отличаются по амплитуде. Отношение амплитуд сигнала на выходе демодулятор АМ-сигнала $s2(t)$ и модулирующего сигнала $s(t)$ составляет 0,637 (рисунок 5.54).

$$\frac{s2(0)}{s(0)} = 0.5$$

Рисунок 5.54 – Определение отношения амплитуд сигнала на выходе демодулятор АМ-сигнала $s2(t)$ и модулирующего сигнала $s(t)$

19.5 Определяем расстояние и квадрат расстояния между сигналами $s2(t)$ и $s(t)$ за период колебаний $T = 1/f_S = 0{,}333$ с (рисунок 5.55).

$$ds2_s := \sqrt{\int_0^T (s2(t) - s(t))^2 \, dt} = 0.204 \qquad ds2_s^2 = 0.042$$

Рисунок 5.55 – Определение квадрата расстояния между сигналами $s2(t)$ и $s(t)$

19.6 Определяем квадрат расстояния между сигналами $s2(t)$ и $s(t)$ за период колебаний T, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$ (рисунок 5.56).

$$\varepsilon := \frac{ds2_s}{Es} \cdot 100 = 122.474$$

Рисунок 5.56 – Квадрат расстояния между сигналами $s1(t)$ и $s(t)$, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$

Делаем вывод о том, что квадрат расстояния между сигналами $s2(t)$ и $s(t)$ составляет примерно 123% относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$.

19.7 Исследуем, как влияет на результаты синхронного детектирования АМ-сигнала разница на Δf между частотой несущего сигнала f_0 и частотой опорного гармонического колебания $f_0 + \Delta f$, полагая, что $\Delta\phi = 0$ рад:

19.7.1 Предположим, что $\Delta f = 1$ Гц. Тогда сигнал на выходе синхронного

детектора принимает вид, представленный на рисунке 5.57 (сравните с рисунком 5.47).

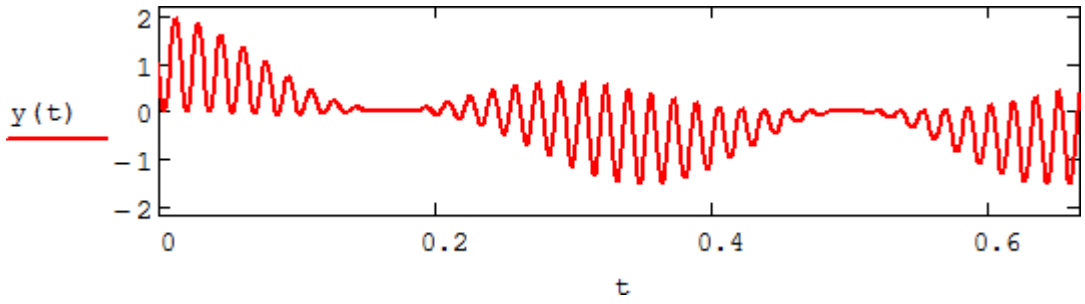


Рисунок 5.57 – График сигнала на выходе синхронного детектора при Δf = 1 Гц

19.7.2 Определяем и строим амплитудные и фазовые спектральные диаграммы сигнала, наблюдаемого на выходе синхронного детектора, при $\Delta f = 1$ Гц (рисунки 5.58 и 5.59).

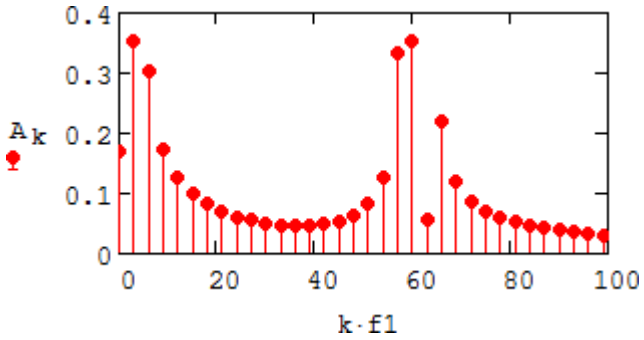


Рисунок 5.58 – Амплитудная спектральная диаграмма сигнала на выходе синхронного детектора при $\Delta f = 1$ Гц

19.7.3 Найдем сигнал $s2(t)$ на выходе демодулятор АМ-сигнала, построим его график и для наглядности также построим в той же координатной сетке график модулирующего сигнала $s(t)$ при $\Delta f = 1$ Гц (рисунок 5.60).

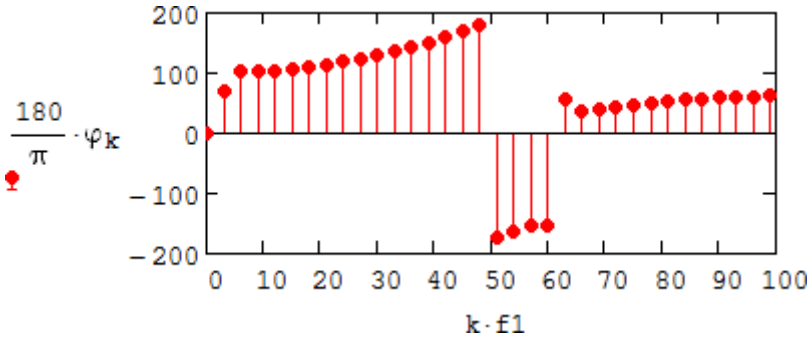


Рисунок 5.59 – Фазовая спектральная диаграмма сигнала на выходе синхронного детектора при $\Delta f = 1$ Гц

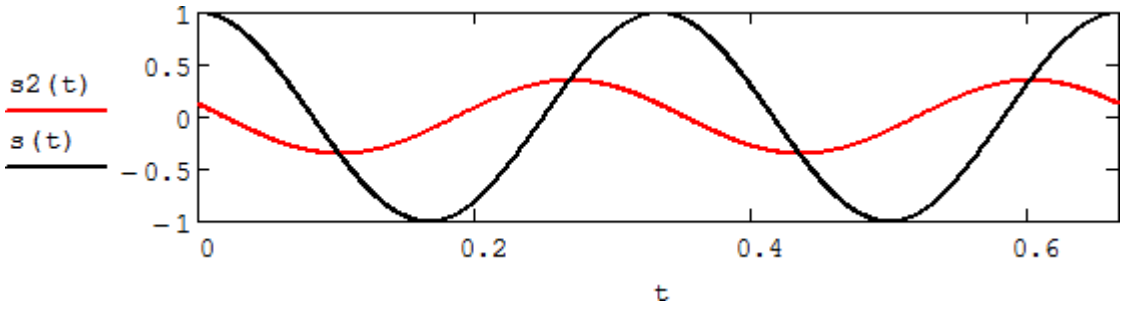


Рисунок 5.60 – Сигнал на выходе демодулятор АМ-сигнала $s2(t)$

и модулирующий сигнал $s(t)$ при $\Delta f = 1$ Гц

Из анализа графиков на рисунке 5.60 можно сделать вывод о том, что при Δf = 1 Гц сигнал на выходе демодулятор АМ-сигнала $s2(t)$ и модулирующий сигнал $s(t)$ совпадают по форме (являются гармоническими колебаниями одной и той же частоты), но отличаются по амплитуде и начальной фазе. В этом случае отношение амплитуд сигнала на выходе демодулятор АМ-сигнала $s2(t)$ и

$$tmax := 0.2 \qquad tmax := Maximize(s2, tmax) = 0.269$$

$$\frac{s2(tmax)}{s(0)} = 0.352$$

модулирующего сигнала $s(t)$ составляет 0,352 (рисунок 5.61).

Рисунок 5.61 – Определение отношения амплитуд сигнала на выходе демодулятор АМ-сигнала $s2(t)$ и модулирующего сигнала $s(t)$

19.7.4 Определяем расстояние и квадрат расстояния между сигналами $s2(t)$ и $s(t)$ за период колебаний $T = 1/f_S$ = 0,333 с при Δf = 1 Гц (рисунок 5.62).

$$ds2_s := \sqrt{\int_0^T (s2(t) - s(t))^2 \, dt} = 0.381 \qquad ds2_s^2 = 0.146$$

Рисунок 5.62 – Определение квадрата расстояния между сигналами $s2(t)$ и $s(t)$ при Δf = 1 Гц

19.7.5 Определяем квадрат расстояния между сигналами $s2(t)$ и $s(t)$ за период колебаний T, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$ при Δf = 1 Гц (рисунок 5.63).

$$\varepsilon := \frac{ds2_s}{Es} \cdot 100 = 228.871$$

Рисунок 5.63 – Квадрат расстояния между сигналами $s1(t)$ и $s(t)$, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$

Делаем вывод о том, что квадрат расстояния между сигналами $s2(t)$ и $s(t)$ составляет примерно 229% относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$. Таким образом, если разница $\Delta f = 1$ Гц между частотой несущего сигнала f_0 и

частотой опорного гармонического колебания $f_0 + \Delta f$ приводит к уменьшению относительной амплитуды сигнала на выходе демодулятор АМ-сигнала с 0,637 до 0,352, т. е. в 1,82 раза. Квадрат расстояния между сигналами $s2(t)$ и $s(t)$ за период колебаний T, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$ при этом увеличивается с 123% до 229%, т. е. в 1,86 раза.

19.8 Исследуем, как влияет на результаты синхронного детектирования АМ-сигнала разница на $\Delta\phi$, рад, между начальной фазой несущего сигнала ϕ_0 и начальной фазой опорного гармонического колебания $\phi_0 + \Delta\phi$, полагая, что $\Delta f = 0$ Гц:

19.8.1 Предположим, что $\Delta\phi = \pi/3$ рад. Тогда сигнал на выходе синхронного детектора принимает вид, представленный на рисунке 5.64 (сравните с рисунком 5.47).

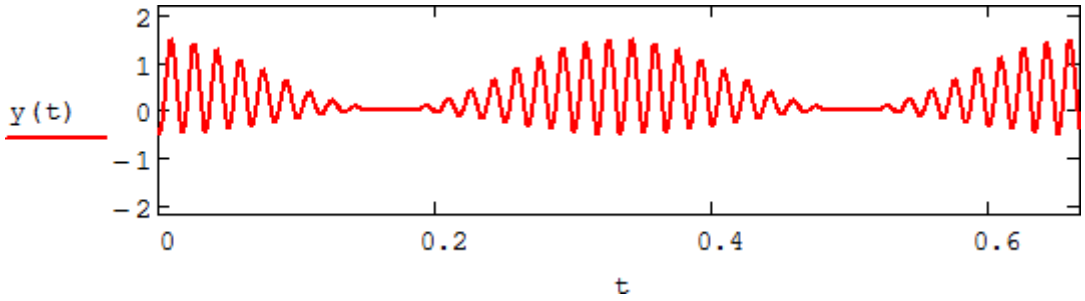


Рисунок 5.64 – График сигнала на выходе синхронного детектора при $\Delta\phi = \pi/3$ рад

19.8.2 Определяем и строим амплитудные и фазовые спектральные диаграммы сигнала, наблюдаемого на выходе синхронного детектора, при $\Delta\phi = \pi/3$ рад (рисунки 5.65 и 5.66).

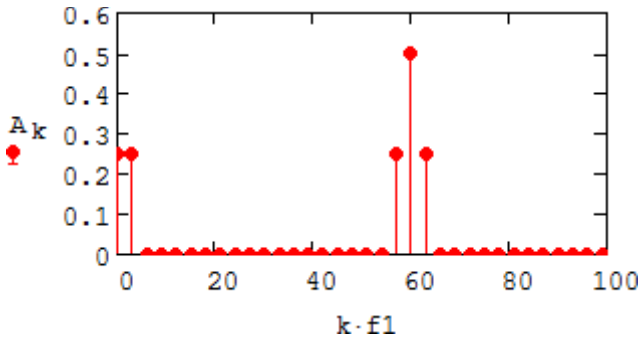


Рисунок 5.65 – Амплитудная спектральная диаграмма сигнала на выходе синхронного детектора при $\Delta\phi=\pi\ 3/$ рад

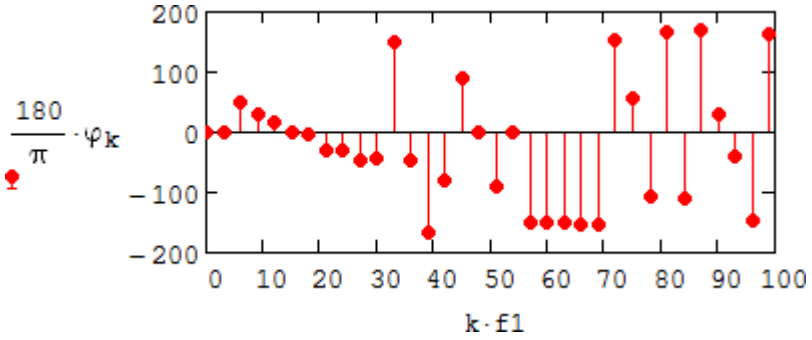
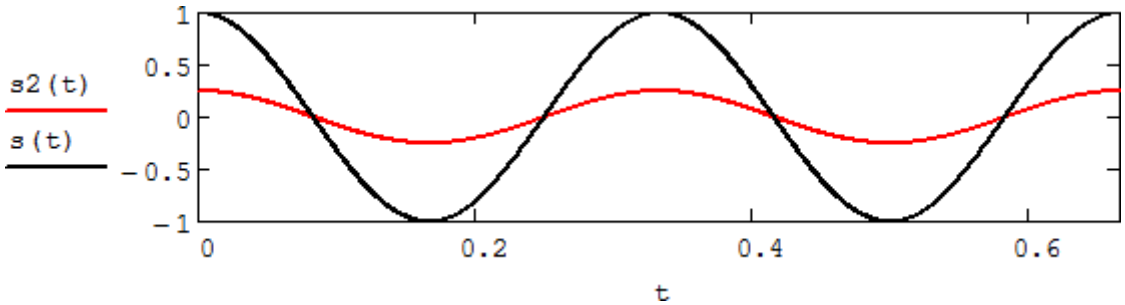


Рисунок 5.66 – Фазовая спектральная диаграмма сигнала на выходе синхронного детектора при $\Delta\phi=\pi\ 3/$ рад

19.8.3 Найдем сигнал $s2(t)$ на выходе демодулятора АМ-сигнала при $\Delta\phi=\pi\ 3/$ рад, построим его график и для наглядности также построим в той же



координатной сетке график модулирующего сигнала $s(t)$ (рисунок 5.67).

Рисунок 5.67 – Сигнал на выходе демодулятора АМ-сигнала $s2(t)$ и

модулирующий сигнал $s(t)$ при $\Delta\phi=\pi/3$ рад

Из анализа графиков на рисунке 5.67 можно сделать вывод о том, что если $\Delta\phi=\pi/3$ рад, то сигнал $s2(t)$ на выходе демодулятор АМ-сигнала и

модулирующий сигнал $s(t)$ совпадают по форме (являются гармоническими колебаниями одной и той же частоты), но отличаются по амплитуде и начальной фазе. В этом случае отношение амплитуд сигнала на выходе демодулятора АМ-сигнала $s2(t)$ и модулирующего сигнала $s(t)$ составляет 0,25 (рисунок 5.69).

Рисунок 5.69 – Определение отношения амплитуд сигнала $s2(t)$ на выходе

$$tmax := 0.2 \qquad tmax := \text{Maximize}(s2, tmax) = 0.333$$

$$\frac{s2(tmax)}{s(0)} = 0.25$$

демодулятора АМ-сигнала и модулирующего сигнала $s(t)$ при $\Delta\phi=\pi\,3/$ рад

19.8.4 Определяем расстояние и квадрат расстояния между сигналами $s2(t)$ и $s(t)$ за период колебаний $T = 1/f_S = 0{,}333$ с при $\Delta\phi=\pi\,3/$ рад (рисунок 5.70).

$$ds2_s := \sqrt{\int_0^T (s2(t) - s(t))^2\, dt} = 0.306 \qquad ds2_s^2 = 0.094$$

Рисунок 5.70 – Определение квадрата расстояния между сигналами $s2(t)$ и $s(t)$

при $\Delta\phi=\pi\,3/$ рад

19.6 Определяем квадрат расстояния между сигналами $s2(t)$ и $s(t)$ за период колебаний T, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$ при $\Delta\phi=\pi\,3/$ рад (рисунок 5.71).

$$\varepsilon := \frac{ds2_s}{Es} \cdot 100 = 183.712$$

Рисунок 5.71 – Квадрат расстояния между сигналами $s1(t)$ и $s(t)$, выраженный

в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала

а д

р

$s(t)$ при $\Delta\phi=\pi/3$

Делаем вывод о том, что квадрат расстояния между сигналами $s2(t)$ и $s(t)$ составляет примерно 229% относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$. Таким образом, если разница $\Delta\phi=\pi/3$ рад между начальной фазой несущего сигнала

ϕ_0 и начальной фазой опорного гармонического колебания $\phi_0 + \Delta\phi$приводит к уменьшению относительной амплитуды сигнала на выходе демодулятор АМ-сигнала с 0,637 до 0,25, т. е. в 2,55 раза. Квадрат расстояния между сигналами

$s2(t)$ и $s(t)$ за период колебаний T, выраженный в процентной мере

относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$ при этом увеличивается с 123% до 184%, т. е. в 1,5 раза.

Порядок выполнения работы

1. Запустить программу MathCAD.
2. Исследовать сигнал с амплитудной модуляцией и особенности его детектирования в соответствии с вариантом индивидуального задания (таблица 5.1):

– определить $s(t)$ – модулирующий сигнал и постройте его временную диаграмму;

– определить $U(t)$ – огибающую АМ-сигнала и постройте еѐ временную диаграмму;

– определить коэффициент амплитудной модуляции M;

– определить диапазон изменения амплитуды огибающей АМ-сигнала;

– определить АМ-сигнал и постройте его временную диаграмму;

– определить мощность несущего сигнала P_0;

– определить значения $P_{\min}$ и $P_{\max}$ – пиковой мощности АМ-минимальной сигнала;

– определить среднюю мощность АМ-сигнала $P_{ср}$;

– определить в процентах долю мощности боковых частот АМ-сигнала в единицах мощности несущей частоты α;

– определить значение КПД АМ;

– определить отношение средней мощности $P_{ср}$ к максимальной (пиковой)

P_{max} для АМ-сигнала;

– определить и построить амплитудные и фазовые спектральные диаграммы несущего и модулирующего сигналов;

– определить и построить амплитудную и фазовую спектральные диаграммы АМ-сигнала;

– определить ширину спектра АМ-сигнала;

– определить и построить КФ огибающей АМ-сигнала;

– определить и построить КФ АМ-сигнала;

– исследовать особенности двухполупериодного детектирования АМ- сигнала и построить зависимость отношения амплитуд сигнала на выходе демодулятор АМ-сигнала и модулирующего сигнала от коэффициента амплитудной модуляции M;

– исследовать особенности синхронного детектирования АМ-сигнала и, построить зависимость отношения амплитуд сигнала на выходе демодулятор АМ-сигнала и модулирующего сигнала, от сдвига частоты Δf, Гц, и начальной фазы $\Delta\phi$, рад, между несущим и опорным сигналами.

3. Сохранить результаты выполнения индивидуального задания.
4. Сформулировать выводы и оформить отчет по лабораторной работе.
5. Защитить работу.

Варианты заданий

Номер варианта (таблица 5.1) соответствует номеру фамилии студента в списке учебной группы (подгруппы).

Таблица 5.1 – Варианты индивидуальных заданий

Вариант	Параметры несущего сигнала				Параметры модулирующего сигнала		
	U_0, В	f_0, Гц	ϕ_0, рад	$k_{АМ}$	S_m, В	f_S, Гц	ϕ_S, рад

1	1	50	$\pi/6$	1,0	1	5	0
2	2	60	$\pi/3$	0,9	1,5	6	0
3	3	70	$\pi/4$	0,8	2,0	7	0
4	4	80	$\pi/10$	0,7	2,5	8	0
5	5	90	$\pi/2$	0,6	3,0	9	0
6	1	100	$\pi/3$	1,0	1	10	0

7	2	110	$\pi/12$	0,9	1,5	11	0
8	3	120	$\pi/4$	0,8	2,0	12	0
9	4	130	$\pi/18$	0,7	2,5	13	0
10	5	140	$3\pi/4$	0,6	3,0	14	0
11	1	150	$\pi/3$	1,0	1	15	0
12	2	160	$2\pi/3$	0,9	1,5	16	0
13	3	170	$\pi/3$	0,8	2,0	17	0
14	4	180	$\pi/6$	0,7	2,5	18	0
15	5	190	$\pi/2$	0,6	3,0	19	0

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе оформляется в виде документа Word и должен включать:

1. Название лабораторной работы.
2. Цель лабораторной работы.
3. Формулировку индивидуального задания и результат его выполнения.

4. Краткие выводы по результатам выполнения лабораторной работы.

Контрольные вопросы

1. Какая модуляция называется амплитудной?
2. Как выглядит форма записи амплитудно-модулированного сигнала?
3. В каком соотношении обычно находятся между собой частоты несущего и модулирующего колебаний?
4. Как в общем случае выглядит форма записи амплитудно-модулированного сигнала?
5. Какими параметрами принято характеризовать глубину амплитудной модуляции, когда модулирующий сигнал является гармоническим колебанием?
6. Какова причина искажений сообщения, наблюдаемых при перемодуляции?
7. Каков спектральный состав АМ-сигнала, когда модулирующий сигнал является гармоническим колебанием?

8. В каком диапазоне изменяется средняя за период высокой частоты мощность АМ-сигнала?
9. Как определить значение пиковой мощности для АМ-сигнала при тональной модуляции?
10. Каковы составляющие мгновенной мощности АМ-сигнала при тональной модуляции?
11. Как определить среднюю мощность АМ-сигнала при тональной модуляции?
12. Как рассчитать долю мощности боковых частот в единицах мощности несущей частоты АМ-сигнала при тональной модуляции?
13. От чего зависит распределение мощности в спектре АМ-сигнала при тональной модуляции?
14. Как определить КПД амплитудной модуляции?
15. Как выглядит спектр амплитуд (фаз) АМ-сигнала при тональной модуляции?
16. Чему равна ширина спектра АМ-сигнала при тональной модуляции?
17. Как вычисляется корреляционная функция АМ-сигнала при тональной модуляции?
18. Чему равна полная энергия АМ-сигнала при многотональной модуляции?
19. Какова идея детектирования АМ-сигналов?
20. Как трансформируется спектр АМ-сигнала при его демодуляции?
21. Какими способами реализуется демодуляция АМ-сигналов?
22. Как реализуется двухполупериодное детектирование АМ-сигнала?
23. Как трансформируется спектр АМ-сигнала при его двухполупериодном детектировании?
24. Как выглядит схема простейшего приемника АМ-сигналов с двухполупериодным детектором?
25. Как реализуется синхронное детектирование АМ-сигнала?
26. Как трансформируется спектр АМ-сигнала при его синхронном

детектировании?

27. Как зависят результаты синхронного детектирования от глубины модуляции АМ-сигнала?

28. В чем заключается основной недостаток синхронного детектирования АМ-сигналов?

29. Как зависит сигнал на выходе синхронного детектора АМ-сигнала от сдвига фазы опорного колебания относительно фазы сигнала несущей частоты?

30. Как зависит сигнал на выходе синхронного детектора АМ-сигнала от сдвига частоты между несущим и опорным колебаниями?

31. Какие выводы можно сделать по результатам выполнения индивидуального задания?

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

1. Кологривов, В. А. Прикладные математические методы в радиотехнике. В 2-х частях: учебное пособие / В. А. Кологривов. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. - Ч. 1. – Аналоговые системы. – 159 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=209003

2. Умняшкин, С. В. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов: учебное пособие / С. В. Умняшкин. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Техносфера, 2012. – 368 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233733

3. Каганов В.И., Битюков В.К. Основы радиоэлектроники и связи: учебное пособие. – М.: Горячая линия - Телеком, 2012. – 542 с. http://www.iprbookshop.ru/12017

4. Богомолов, С. И. Введение в системы радиосвязи и радиодоступа: учебное пособие / С.И. Богомолов; Министерство образования и науки Российской Федерации, Томский Государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники (ТУСУР). – Томск: Эль Контент, 2012. – 152 с.

http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=208609

Лабораторная работа 6

Исследование частотно-модулированных радиосигналов

Цель работы: – изучение спектрального состава ЧМ-сигнала при изменении индекса его угловой модуляции.

Формируемые компетенции или их части

ОПК-2	Способность корректно применять при решении профессиональных задач соответствующий математический аппарат алгебры, геометрии, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей, математической статистики, математической логики, теории алгоритмов, теории информации, в том числе с использованием вычислительной техники.
ОПК-3	Способность применять языки, системы и инструментальные средства программирования в профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Так как естественные помехи, в основном, имеют вид АМ-сигналов, то применение сигналов с частотной модуляцией (ЧМ-сигналов) в системах электрической связи позволяет значительно снизить уровень помех и повысить качество передачи сообщений. На практике за это приходится платить значительным усложнением конструкции передатчика и расширением полосы занимаемых частот (примерно в 5 6 раз по сравнению с АМ-сигналом).

Итак, при частотной модуляции (ЧМ, frequency modulation – FM) в несущем гармоническом сигнале

$$s(t) = S\cos(2\pi ft + \phi) = S_0\cos\{2\pi f[x(t)]t + \phi\} = S_0\cos\lceil\lfloor\Psi(t)\rceil\rfloor\text{'} \quad (6.1)$$

значение амплитуды сигнала остается постоянным, т. е. $S = S_0$, а информация о

модулирующем сигнале $x(t)$ переносится на частоту $f = f[x(t)]$ несущего сигнала,

что, в конечном итоге, приводит к изменению полной мгновенной фазы $\Psi(t)$ этого сигнала.

Анализ ЧМ-сигналов с математической точки зрения гораздо сложнее, чем исследование АМ-сигналов. Поэтому в дальнейшем основное внимание будет

уделено простейшим ЧМ-сигналам, когда модулирующий сигнал $s(t)$ изменяется во времени по гармоническому закону с частотой F:

$$x(t) = X_0 \cos(2\pi F t), \quad (6.2)$$

где X_0 – амплитуда модулирующего сигнала, В;

F – частота модулирующего сигнала, Гц.

При ЧМ имеет место линейная связь между мгновенной частотой $f(t)$ колебания (6.1) и модулирующим сигналом $x(t)$:

$$f(t) = f_0 + k_{\text{ЧМ}} \cdot x(t) = f_0 + k_{\text{ЧМ}} \cdot X_0 \cos(2\pi F t) = f_0 + \Delta f_{\text{М}} \cos(2\pi F t), \quad (6.3)$$

где f_0 – значение частоты несущего колебания в отсутствие модулирующего сигнала, Гц;

$k_{\text{ЧМ}}$ – коэффициент пропорциональности, Гц/В;

$\Delta f_{\text{М}} = k_{\text{ЧМ}} \cdot X_0$ – девиация частоты, Гц.

Временная диаграмма мгновенной частоты ЧМ-сигнала, построенная по формуле (6.2), показана на рисунке (6.1).

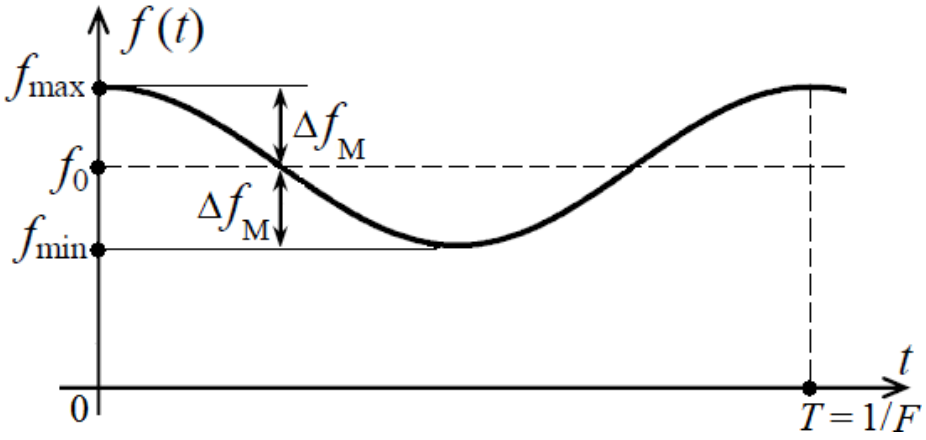


Рисунок 6.1 – Временная диаграмма мгновенной частоты ЧМ-сигнала

Как следует из (6.3) и рисунка 6.1, девиация частоты (frequency deviation) ЧМ-

сигнала $\Delta f_{\text{М}}$, т. е. амплитуда отклонения мгновенной частоты ЧМ-сигнала от значения частоты несущего колебания в отсутствие модулирующего сигнала, пропорциональна амплитуде частоты

модуляции F .

X_0 модулирующего сигнала и не
зависит от

Как было показано в лекционном курсе, полная мгновенная фаза $\Psi(t)$ сигнала с угловой модуляцией (6.1) определяется как интеграл от мгновенной частоты $f(t)$:

$$\Psi(t) = 2\pi \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = 2\pi \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau + \phi_0 = 2\pi f_0 t + m_{\text{ЧМ}} \sin(2\pi F t) + \phi_0 \quad (6.4)$$

где $\phi_0 = \Psi(t)_{t=0} = \Psi(0)$ – начальная фаза несущего сигнала при отсутствии модулирующего сигнала $x(t)$, рад;

$m_{\text{ЧМ}} = \frac{k_{\text{ЧМ}} \cdot X_0}{F} = \frac{\Delta f_{\text{М}}}{F}$ – индекс угловой модуляции ЧМ-сигнала, рад.

Таким образом, индекс угловой модуляции ЧМ-сигнала пропорционален амплитуде модулирующего сигнала и обратно пропорционален частоте модулирующего сигнала.

С учетом (6.1), (6.2) и (6.4) можем записать следующее аналитическое выражение (математическую модель) для ЧМ-сигнала:

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = s_{\text{ЧМ}}\left[t, x(t)\right] = S_0 \cos\left[2\pi f_0 t + m_{\text{ЧМ}} \sin(2\pi F t) + \phi_0\right] = S_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \phi(t)\right], \quad (6.5)$$

где $\phi(t) = m_{\text{ЧМ}} \sin(2\pi F t) + \phi_0$ – функция, характеризующая изменения

мгновенной фазы $\phi(t)$ ЧМ-сигнала (6.5).

Временная диаграмма ЧМ-сигнала с тональной модуляцией показана на рисунке 6.2. На этом рисунке обозначения $f_{\min}$ и $f_{\max}$ соответствуют минимуму и максимуму мгновенной частоты ЧМ-сигнала (рисунок 6.1).

Из соотношения (6.5) следует, что гармоническая модуляция частоты несущего колебания с девиацией $\Delta f_{\text{М}}$ эквивалентна фазовой модуляции с индексом угловой модуляции ЧМ-сигнала $m_{\text{ЧМ}} = \Delta f_{\text{М}} / F$. Отсюда следует, что

$$\Delta f_{\text{М}} = m_{\text{ЧМ}} F \text{ , (6.6)}$$

т. е. зная индекс угловой модуляции ЧМ-сигнала и значение модулирующей частоты можно всегда определить девиацию частоты ЧМ-сигнала, если осуществляется гармоническая модуляция частоты несущего колебания (6.1).

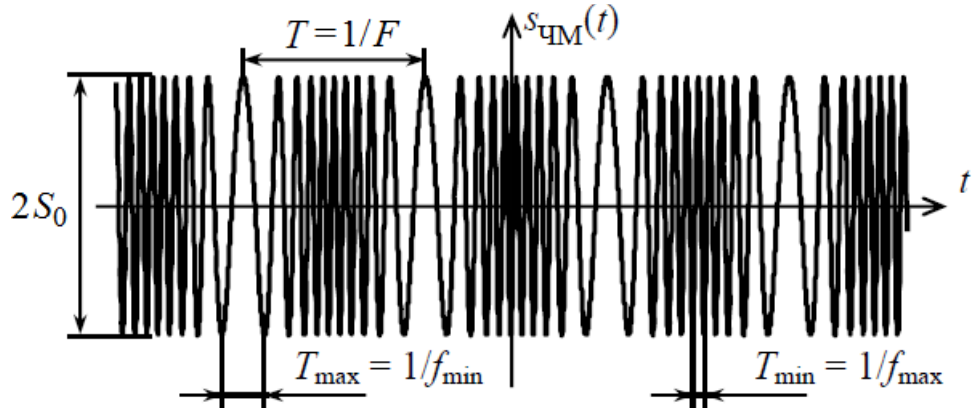


Рисунок 6.2 – Временная диаграмма ЧМ-сигнала с тональной модуляцией

Из лекционного курса известно, что ЧМ-сигнал с тональной модуляцией может быть представлен бесконечным рядом:

$$s(t) = S \sum_{n=-\infty} J(m) \cos\left[2\pi(f + nF)t + \phi\right] \quad (6.7)$$

ЧМ 0 | | n ЧМ 0 n

где $J_n(m_{ЧМ})$ – значение функции Бесселя первого рода n-го порядка от аргумента $m_{ЧМ}$, т. е. для индекса угловой модуляции ЧМ-сигнала (6.5);

| |

$S_0 J_n(m_{ЧМ})$ – амплитуда n-й гармоники Фурье-спектра ЧМ-сигнала;

$f_0 + nF$ – частота n-й гармоники Фурье-спектра ЧМ-сигнала;

ϕ_n – начальная фаза n-й гармоники Фурье-спектра ЧМ-сигнала.

Графики десяти функции Бесселя первого рода n-го порядка (n = 0, 1, … , 9) в зависимости от индекса модуляции $m_{ЧМ}$ приведены на рисунке 6.3.

Применив преобразование Фурье к (6.7) получим, что спектр ЧМ-сигнала определяется выражением

$$S(f) = S J(m) \delta\left[f - (f + nF)\right] e^{j\phi_n} =$$

$$\sum_{\text{ЧМ}} {}_{0\,n\,\text{ЧМ}}\lfloor {}_{0}\rfloor$$

$$n=-\infty$$

$$\infty \qquad\qquad + nF)\rceil\rfloor e^{j\phi_n}.$$

$$= \sum S_n \delta\lceil\lfloor f - (f_0$$

$$n=-\infty \qquad\qquad (6.8)$$

где $S_n = S_0 J_n\left(m_{\text{ЧМ}}\right)$ – амплитудные коэффициенты ряда Фурье спектра ЧМ-сигнала.

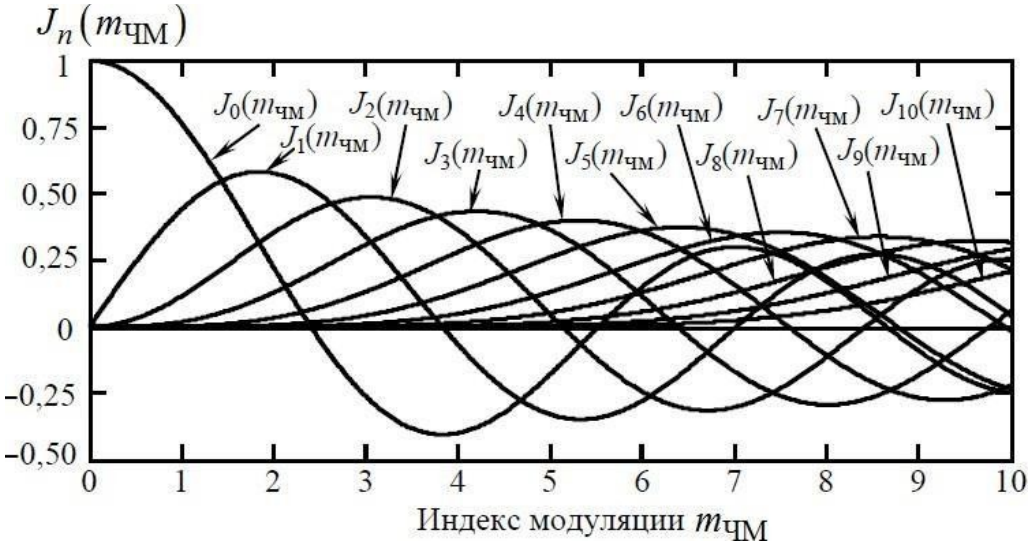


Рисунок 6.3 – Графики функций Бесселя первого рода *n*-го порядка для различных значений индекса угловой модуляции ЧМ-сигнала

Спектр ЧМ-сигнала с угловой модуляцией в общем случае содержит бесконечное число составляющих, частоты которых равны $f_0 \pm nF$, $n = 0,1,2,\ldots$;

амплитуды этих составляющих пропорциональны значениям $J_n(m_{ЧМ})$.

В теории функций Бесселя доказывается, что функции с положительными и отрицательными индексами связаны между собой:

$$J_{-n}(m_{ЧМ}) = (-1)^n J_n(m_{ЧМ}). \quad (6.9)$$

Поэтому начальные фазы боковых колебаний с частотами со $f_0 + nF$ и $f_0 - nF$ совпадают, если n – четное число, и отличаются на 180°, если n – нечетное.

Из рисунка 6.3 и формулы (6.8) следует, что при малой величине индекса $m_{ЧМ}$ угловой модуляции ЧМ-сигнала значимые амплитудные значения имеют только

первые гармоники спектра. С ростом величины $m_{ЧМ}$ количество значимых боковых составляющих спектра ЧМ-сигнала увеличивается, а энергия ЧМ-сигнала перераспределяется на боковые составляющие спектра. Как видно на рисунке 6.3, функции Бесселя имеют колебательный характер,

поэтому спектр ЧМ-сигнала при удалении от несущей частоты f_0 спадает немонотонно. На рисунке 6.3 можно также наблюдать, что при определенных значениях индекса модуляции ЧМ-сигнала ($m_{ЧМ}$ = 2,405; 5,52; 8,654 и т. д.)

график функции $J_0(m_{\text{ЧМ}})$ пересекает ось ординат а, следовательно, амплитуда спектральной составляющей на частоте несущей частоты т. е. в спектре ЧМ- сигнала полностью отсутствует. f_0 обращается в ноль,

На рисунке 6.4 изображѐн пример амплитудного спектра ЧМ-сигнала. На этом рисунке видно, что амплитудный спектр ЧМ сигнала обладает свойством четной симметрии относительно несущей частоты f_0 . Эффективная ширина спектра ЧМ сигнала приблизительно равна удвоенной величине девиации частоты, т. е. $\Delta F_{\text{ЧМ}} \approx 2\Delta f_{\text{М}}$.

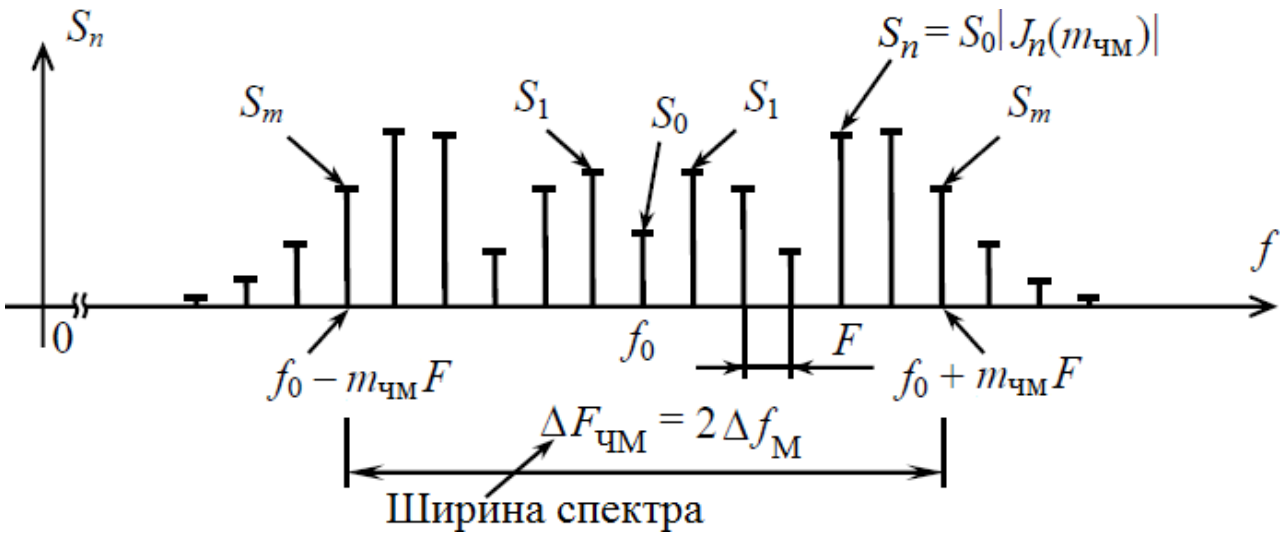
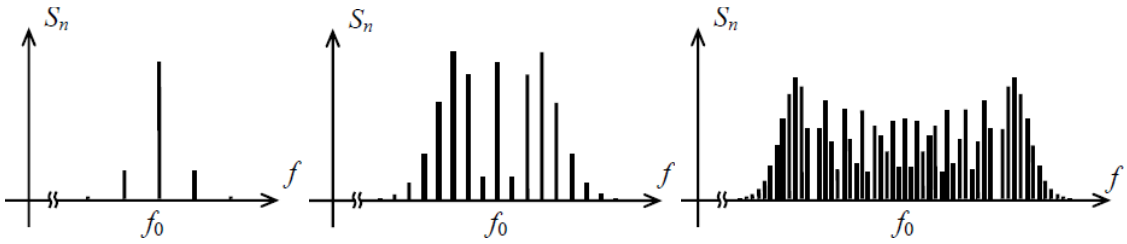


Рисунок 6.4 – Пример одностороннего амплитудного спектра ЧМ-сигнала

Характерной особенностью спектра ЧМ-сигнала является существенная зависимость его формы и ширины от индекса угловой модуляции. С увеличением индекса угловой модуляции число составляющих в спектре увеличивается, спектр расширяется, а амплитуда центральной составляющей спектра (амплитуда S_0 несущей частоты f_0) изменяется. При этом различают ЧМ-сигналы при малых ($m_{\text{ЧМ}} < 1$ рад), средних (1 рад $< m_{\text{ЧМ}} <$ 10 рад) и больших ($m_{\text{ЧМ}} > 10$ рад) индексах угловой модуляции m (рисунок 6.5).



а) $m_{ЧМ}$ = 0,4 рад *б*) $m_{ЧМ}$ = 4 рад *в*) $m_{ЧМ}$ = 20 рад Рисунок 6.5 – Спектры ЧМ радиосигналов при малом (*а*), среднем (*б*) и большом (*в*) индексе угловой модуляции

Из рисунка 6.5 следует, что с ростом индекса модуляции ЧМ-сигнала полоса частот, занимаемая этим сигналом, расширяется. Эффективная ширина спектра ЧМ-сигнала, т. е. интервал частот, в котором содержится основная доля энергии сигнала – 90% и более от полной энергии этого сигнала, определяется по формуле:

$$\Delta f_{ЧМ} = 2\left(m_{ЧМ} + 1\right) F \text{ . (6.10)}$$

Таким образом, спектральными составляющими ЧМ-сигнала с номерами $k > m_{ЧМ} + 1$ на практике пренебрегают.

Формирование реальных сигналов с угловой модуляцией, как правило, выполняется для $m_{ЧМ} >> 1$, при этом эффективная ширина спектра ЧМ-сигнала близка к удвоенной девиации частоты:

$\Delta f_{ЧМ} \approx 2m_{ЧМ}F = 2\Delta f_M$. (6.11) Отсюда следует, что в случае, когда модулирующий сигнал $x(t)$ изменяется во времени по гармоническому закону, для передачи сигналов с угловой модуляцией требуется полоса частот, в $m_{ЧМ}$ раз большая по сравнению с АМ- сигналами полоса частот, которых при тональной модуляции равна $2F$. С другой стороны, именно широкополосность ЧМ-сигналов и обеспечивает их большую помехоустойчивость по сравнению с АМ-сигналами.

Примечание – В случае произвольного сигнала (речь, музыка и др.) в формуле (6.10) под F понимается наивысшая частота в спектре модулирующего сигнала (F_{max} = 20 кГц). При радиовещании имеем $m_{ЧМ}$ = 5 – 10, поэтому полоса

занимаемых частот в пять – десять раз выше, чем при использовании АМ-сигналов для передачи тех же модулирующих сигналов.

Для индекса модуляции $m_{\text{ЧМ}}$, лежащего в пределах от 0 до 25, ширину спектра ЧМ колебания при гармонической модуляции можно рассчитывать по приближенной формуле:

$$\Delta f_{\text{ЧМ}} \approx 2F\left(1 + m_{\text{ЧМ}} + \sqrt{m_{\text{ЧМ}}}\right), \quad (6.12)$$

учитывающей $\left(1 + m_{\text{ЧМ}} + \right)$ пар боковых составляющих спектра с амплитудой не менее одного процента от амплитуды немодулированной несущей.

Отметим, что ЧМ-сигналы при многотональной модуляции существенно отличаются большей сложностью спектрального состава, чем при гармонической модуляции или модуляции одним тоном. В их спектре присутствуют не только боковые частоты с гармониками частот модулирующего сигнала, но и боковые комбинационные частоты типа

$f_0 \pm F_1 \pm F_2 \pm \ldots \pm F_N$, со всеми возможными комбинациями частот

модулирующего сигнала F_n , n = 1, 2, … , N. При непрерывном спектре модулирующего сигнала (случай, когда в качестве модулирующих сигналов используются, например, импульсные сигналы – частотная телеграфия) спектры ЧМ-сигналов также становятся непрерывными, как и в случае АМ-сигналов.

Определим среднюю мощность P радиосигнала с ЧМ.

Средняя мощность P_0 , В^2, которая рассеивается немодулированным несущим

сигналом в нагрузке R, Ом, равна $P0 = (1\ 2)\ S\ 2 / R$.

Средняя, мощность как

P_n n-й боковой составляющей колебания (6.8) выражается

$$P_n = {}^{0}\ {}_{n}$$

(6.13)

Средняя мощность ЧМ-сигнала (6.7) есть сумма мощностей всех гармонических составляющих

$$P = \frac{1}{2R}\left(\frac{S_0}{2}\right)^2 \cdot \left[J_0^2(m_{\text{ЧМ}}) + 2J_1^2(m_{\text{ЧМ}}) + \ldots + 2J_n^2(m_{\text{ЧМ}}) + \ldots \right] \cdot$$

Поэтому, можем записать:

(6.14)

В теории Бесселевых функций доказывается, что

(6.15)

$$J_0^2(m_{\text{ЧМ}}) + 2J_1^2(m_{\text{ЧМ}}) + \ldots + 2J_n^2(m_{\text{ЧМ}}) + \ldots \equiv 1$$

(6.16)

$$P = \frac{\left(\frac{S_0}{2}\right)^2}{2R}$$

Таким образом, в результате ЧМ при любом значении $m_{\text{ЧМ}}$ происходит перераспределение мощности между несущей и всеми боковыми составляющими спектра ЧМ-сигнала, суммарная же мощность этого сигнала равна мощности несущего сигнала в отсутствие сигнала модуляции. Следовательно, передатчик, излучающий ЧМ-радиосигналы, работает в режиме постоянной мощности, что благотворно сказывается на его эксплуатационных характеристиках

Примечание – Для практических расчетов полагают в соотношениях (6.13) – (6.16), что сопротивление нагрузки R = 1 Ом.

Оборудование и материалы

Аппаратура. Для выполнения лабораторной работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов 256).

Программное обеспечение. Для выполнения лабораторной работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 13 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении лабораторной работы **запрещается**:

– самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;

– нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т.д.;

– принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Указания по порядку выполнения работы

Методику выполнения работы рассмотрим на примере исследования ЧМ-сигнала при тональной модуляции. Заданы параметры несущего сигнала $u(t)$, определяемого соотношениями (8.3) и (8.4): S_0 = 1 В, f_0 = 300 МГц, $\phi_0 = \pi$ 4 рад. Известны параметры модулирующего гармонического сигнала и частотной модуляции: F = 1,5 кГц, $m_{ЧМ}$ = 10 рад.

Требуется:

– определить девиацию частоты Δf_M ;

– найти функцию частоты ЧМ-сигнала; $f(t)$, описывающую закон изменения мгновенной

– определить функцию $\phi(t)$, характеризующую изменение мгновенной фазы ЧМ-сигнала (6.5) и изобразить еѐ временную диаграмму в пределах одного периода частоты модуляции;

– определить ЧМ-сигнал $s_{\text{ЧМ}}(t)$ и изобразить его временную диаграмму за интервал времени, равный десяти периодам несущей частоты;

– рассчитать амплитуды ЧМ-сигнала (S_n , $n = 0\ldots m_{ЧМ} + 5$);

центральной и $(m_{ЧМ} + 5)$ спектра боковых гармоник

– определить и построить амплитудную спектральную диаграмму ЧМ- сигнала;

– если амплитуда спектральной составляющей с частотой f_0 отлична от нуля, то определить и построить амплитудную спектральную диаграмму ЧМ-сигнала нормированную к амплитуде спектральной составляющей с частотой f_0 ;

– найти эффективную ширину спектра ЧМ-сигнала;

– найти и построить спектр мощности ЧМ-сигнала.

– определить мощность ЧМ-сигнала как сумму мощностей всех гармонических составляющих его спектра.

– вычислить среднюю мощность P_0 несущей ЧМ-сигнала, сравнить еѐ со средней мощностью, вычисленной, как сумма мощностей всех гармонических составляющих спектра ЧМ-сигнала и сделать соответствующий вывод.

Рассмотрим решение поставленной задачи в математическом пакете Mathcad:

1. Запускаем Mathcad. Согласно заданным параметрам вводим параметры несущего и модулирующего сигналов (рисунок 6.6).

$S0 := 2 \qquad f0 := 3 \cdot 10^8 \qquad \varphi 0 := \frac{\pi}{4}$

$F := 2 \cdot 10^4 \qquad m := 5$

Рисунок 6.6 – Определение параметров несущего и модулирующего сигналов

2. Согласно (6.6) определяем девиацию частоты ЧМ-сигнала $\Delta f_М$, Гц, (рисунок 6.7).

$\Delta f := m \cdot F = 1 \times 10^5$

Рисунок 6.7 – Определение девиации частоты ЧМ-сигнала

3. Согласно (6.3) находим функцию $f(t)$, Гц, описывающую закон изменения мгновенной частоты ЧМ-сигнала (рисунок 6.8).

$$f(t) := f0 + \Delta f \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F \cdot t)$$

Рисунок 6.8 – Определение мгновенной частоты ЧМ-сигнала

4. Согласно (6.5) определяем $\phi(t)$, рад, функцию изменения мгновенной фазы ЧМ-сигнала, и строим её временную диаграмму в градусах для временного интервала, равного одному периода частоты модуляции (рисунок 6.9).

$$\varphi(t) := m \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F \cdot t) + \varphi 0$$

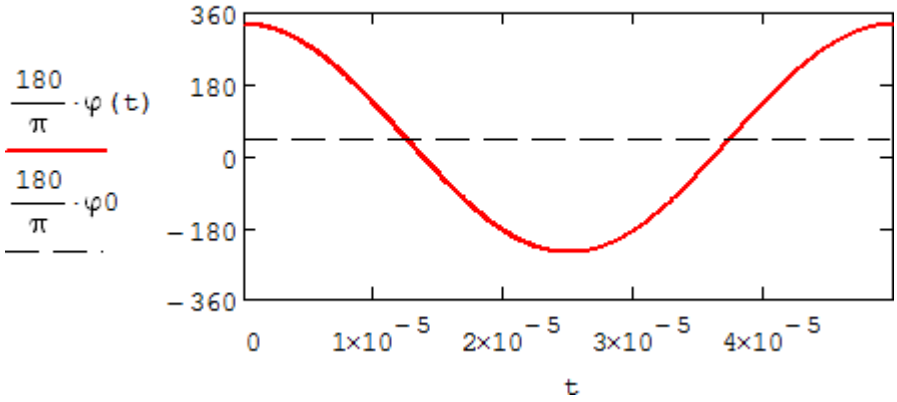


Рисунок 6.9 – Определение и график функции, характеризующей изменение мгновенной фазы ЧМ-сигнала

5. По формуле (6.8) вычисляем значения амплитуды центральной и $(m_{ЧМ} + 5)$ боковых гармоник спектра ЧМ-сигнала (S_n , В, n = 0…10) (рисунок 6.10).

$N := ceil(m + 5) = 10$

$n := 0 .. N$

$S_n := S0 \cdot |Jn(n, m)|$

$S_n =$

0.355
0.655
0.093
0.73
0.782
0.522
0.262
0.107
0.037
0.011
$2.936 \cdot 10^{-3}$

Рисунок 6.10 – Вычисляем значения амплитуды центральной и $(m_{ЧМ} + 5)$ боковых гармоник спектра ЧМ-сигнала

Примечания

– Функция Mathcad Ceil(z) возвращает наименьшее целое число большее или равное z.

– Функция Mathcad Jn(n,m) возвращает значение функции Бесселя первого рода n-го порядка для заданного значения аргумента m, т. е. в нашем случае индекса модуляции $m_{ЧМ}$ ЧМ-сигнала.

6. Определяем по формуле (6.8) и строим амплитудную спектральную диаграмму ЧМ-сигнала (рисунок 6.11).

$q := 0 .. \ 2 \cdot N$

$f_q := [f0 - (N - q) \cdot F]$

$A_q := S_{|N-q|}$

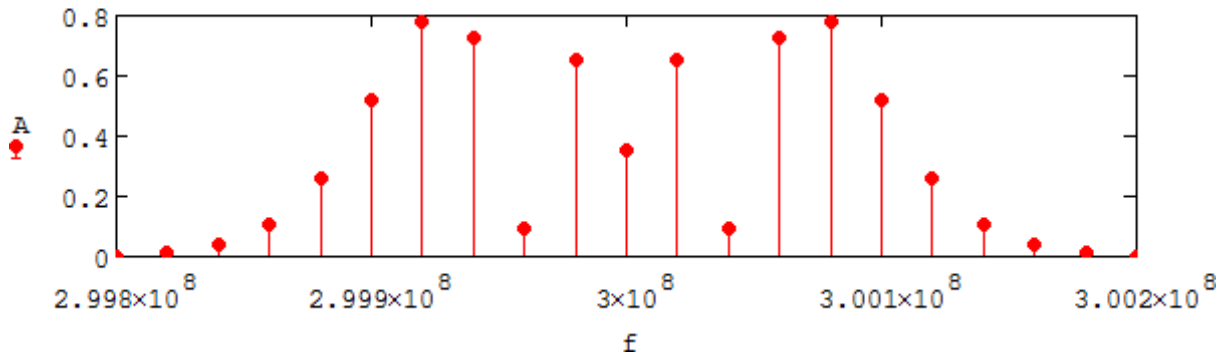


Рисунок 6.11 – Амплитудная спектральная диаграмма ЧМ-сигнала

Примечание – На рисунке 6.11 амплитуды спектральных составляющих ЧМ-сигнала измеряются в вольтах (В), а частоты – герцах (Гц).

7. Так как амплитуда спектральной составляющей с частотой f_0 отлична от нуля, то определяем и строим амплитудную спектральную диаграмму ЧМ-сигнала нормированную к амплитуде спектральной составляющей с частотой f_0 (рисунок 6.12).

Примечание – На рисунке 6.12 относительные амплитуды спектральных составляющих ЧМ-сигнала безразмерны.

$$Anorm_q := \frac{A_q}{S_0}$$

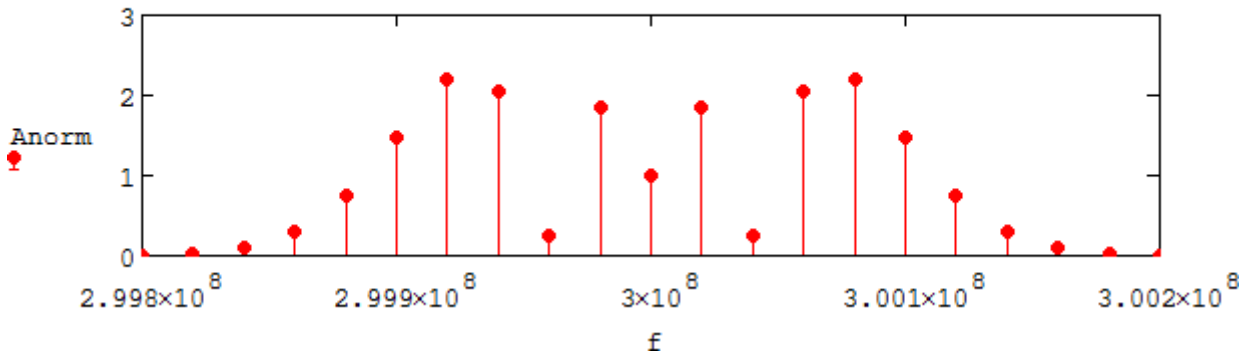


Рисунок 6.12 – Нормированная амплитудная спектральная диаграмма ЧМ-сигнала

8. По формуле (6.10) вычисляем эффективную ширину спектра ЧМ-сигнала и, используя маркеры (инструмент Mathcad для работы с графиками), показываем еѐ границы на нормированной амплитудной спектральной диаграмме ЧМ-сигнала (рисунок 6.13).

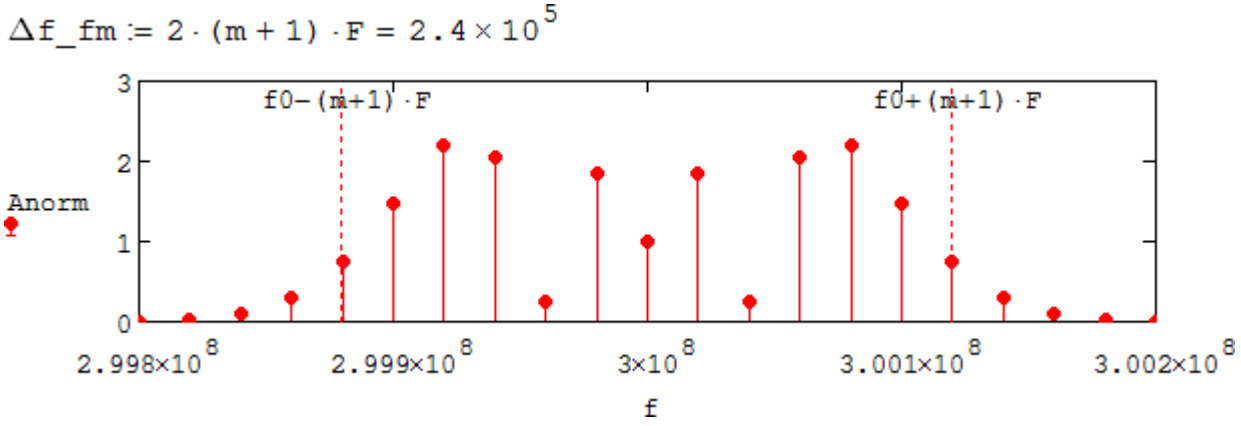


Рисунок 6.13 – Нормированная амплитудная спектральная диаграмма ЧМ-сигнала

Примечание – Можно было показать границы ширину спектра ЧМ-сигнала и на не нормированной амплитудной спектральной диаграмме ЧМ-сигнала (рисунок 6.11).

9. По формуле (6.14) находим средние мощности отдельных спектральных составляющих ЧМ-сигнала, строим спектр мощности ЧМ-сигнала и вычисляем среднюю мощность ЧМ-сигнала (6.7) как сумму мощностей всех гармонических составляющих (рисунок 6.14).

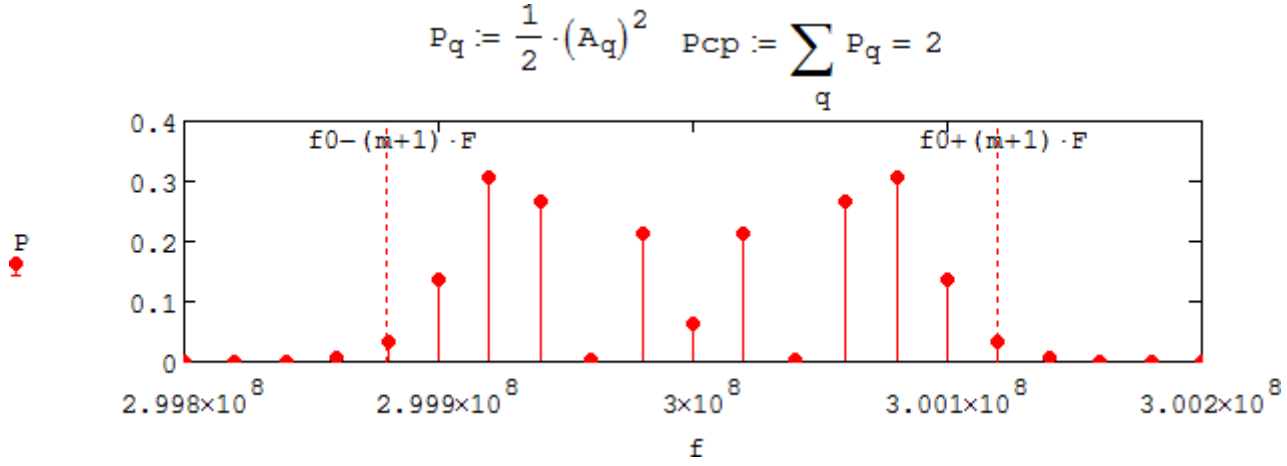


Рисунок 6.14 – Спектр мощности ЧМ-сигнала и его средняя мощность

Примечание – На рисунке 6.14 амплитуды мощности спектральных составляющих ЧМ-сигнала измеряются в вольтах в квадрате ($В^2$).

9. Проверяем свойство Бесселевых функций, представленное соотношением (6.15) (рисунок 6.15).

$$Jn(0,m)^2 + \sum_{n=1}^{N} \left(2 \cdot Jn(n,m)^2\right) = 1$$

Рисунок 6.15 – Проверка свойства Бесселевых функций, представленное соотношением (6.15)

Приходим к выводу, что свойство Бесселевых функций, представленное соотношением (6.15) и использованное при вычислении средней мощности ЧМ-сигнала, выполняется.

10. Находим среднюю мощность P_0 , $В^2$, несущей ЧМ-сигнала (рисунок 6.16).

$$P0 := \frac{1}{2} \cdot S0^2 = 2$$

Рисунок 6.16 – Средняя мощность несущей ЧМ-сигнала

Убеждаемся в том, что средняя мощность несущей ЧМ-сигнала совпадает со средней мощностью, вычисленной, как сумма мощностей всех гармонических составляющих спектра ЧМ-сигнала.

Порядок выполнения работы

1. Запустить программу MathCAD.

2. Для трех значений для индекса угловой модуляции ЧМ-сигнала исследовать ЧМ-сигнал в соответствии с вариантом индивидуального задания (таблица 6.1) требуется:

– определить девиацию частоты Δf_M ;

– найти функцию частоты ЧМ-сигнала; $f(t)$, описывающую закон изменения мгновенной

– определить функцию $\phi(t)$, характеризующую изменение мгновенной фазы ЧМ-сигнала (6.5) и изобразить еѐ временную диаграмму в пределах одного периода частоты модуляции;

– определить ЧМ-сигнал $s_{ЧМ}(t)$ и изобразить его временную диаграмму за интервал времени, равный десяти периодам несущей частоты;

– рассчитать амплитуды ЧМ-сигнала (S_n , $n = 0\ldots m_{ЧМ} + 5$); центральной и $(m_{ЧМ} + 5)$ спектра боковых гармоник

– определить и построить амплитудную спектральную диаграмму ЧМ- сигнала;

– если амплитуда спектральной составляющей с частотой f_0 отлична от нуля, то определить и построить амплитудную спектральную диаграмму ЧМ-сигнала нормированную к амплитуде спектральной составляющей с частотой f_0 ;

– найти эффективную ширину спектра ЧМ-сигнала;

– найти и построить спектр мощности ЧМ-сигнала;

– определить мощность ЧМ-сигнала как сумму мощностей всех гармонических составляющих его спектра.

– вычислить среднюю мощность P_0 несущей ЧМ-сигнала, сравнить еѐ со средней мощностью, вычисленной, как сумма мощностей всех гармонических составляющих спектра ЧМ-сигнала и сделать соответствующий вывод;

– сделать выводы о влиянии изменения индекса угловой модуляции ЧМ-

сигнала на девиацию его частоты, амплитудную спектральную диаграмму, ширину спектра, распределение мощности сигнала среди гармонических

составляющих спектра и среднюю мощность ЧМ-сигнала.

3. Сохранить результаты выполнения индивидуального задания.
4. Сформулировать выводы и оформить отчет по лабораторной работе.
5. Защитить работу.

Варианты заданий

Номер варианта (таблица 6.1) соответствует номеру фамилии студента в списке учебной группы (подгруппы).

Таблица 6.1 – Варианты индивидуальных заданий

Вариант	Параметры несущего сигнала			Параметры модулирующего сигнала и частотной модуляции			
	S_0, В	f_0, Гц	ϕ_0, рад	F, Гц	$m_{ЧМ}$, рад		
1	1	$1 \oplus 10^8$	$\pi/6$	3000	0,25	5	20
2	2	$5 \oplus 10^7$	$\pi/3$	2000	0,30	9	25
3	3	$2 \oplus 10^8$	$\pi/4$	1500	0,15	6	30
4	4	$4 \oplus 10^8$	$\pi/10$	1700	0,20	4	20
5	5	$2 \oplus 10^7$	$\pi/2$	2500	0,30	9	25
6	1	$4 \oplus 10^8$	$\pi/3$	2500	0,50	5	30
7	2	$3 \oplus 10^7$	$\pi/12$	3500	0,75	7	35
8	3	$8 \oplus 10^8$	$\pi/4$	4000	0,25	2	25
9	4	$5 \oplus 10^8$	$\pi/18$	2500	0,30	3	25
10	5	$4 \oplus 10^7$	$3\pi/4$	3500	0,15	4	30
11	1	$6 \oplus 108$	$\pi/3$	2000	0,20	5	35
12	2	$8 \oplus 107$	$2\pi/3$	3000	0,30	6	20
13	3	$9 \oplus 108$	$\pi/3$	3200	0,50	7	25
14	4	$7 \oplus 107$	$\pi/6$	2500	0,75	8	30
15	5	$12 \oplus 108$	$\pi/2$	4000	0,90	9	35

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе оформляется в виде документа Word и должен включать:

1. Название лабораторной работы.
2. Цель лабораторной работы.
3. Формулировку индивидуального задания и результат его выполнения.
4. Краткие выводы по результатам выполнения лабораторной работы.

Контрольные вопросы

1. Какая модуляция называется частотной?
2. Сколько кГц (МГц) в частоте $9\square 10^8$ Гц?
3. Как выглядит форма записи ЧМ-сигнала?
4. Как определить девиацию частоты ЧМ-сигнала?
5. Как определить индекс угловой модуляции ЧМ-сигнала?
6. Какими параметрами принято характеризовать ЧМ, когда модулирующий сигнал является гармоническим колебанием?
7. Каков спектральный состав ЧМ-сигнала, когда модулирующий сигнал является гармоническим колебанием?
8. Как определить среднюю мощность ЧМ-сигнала при тональной модуляции?
9. От чего зависит распределение мощности в спектре ЧМ-сигнала при тональной модуляции?
10. Как выглядит спектр амплитуд ЧМ-сигнала при тональной модуляции?
11. Чему равна ширина спектра ЧМ-сигнала при тональной модуляции?
12. Какие свойства функций Бесселя, использовались при исследовании спектров ЧМ-сигналов?
13. ЧМ-сигнал при тональной модуляции имеет частоту модуляции $F = 10$ кГц. При какой девиации частоты в спектре этого сигнала будут отсутствовать составляющие на частотах $f_0 \pm F$?
14. ЧМ-сигнал с амплитудам 5, В, имеет мгновенную круговую частоту, изменяющуюся во времени по закону

$$\omega(t) = 10^9 \left[1 + 10^{-4} \cos\left(2 \cdot 10^3 t \right) \right],$$

Чему равен индекс угловой модуляции ЧМ-сигнала и, как записать математическую модель этого сигнала?

15. Амплитуда ЧМ-сигнала передатчика в отсутствие модулирующего колебания равна 250 В. Измерения показали, что при подаче тонального

модулирующего колебания амплитуда составляющей на несущей частоте становится равной 244 В. Чему равен индекс частотной модуляции и можно ли полагать, что в описываемых условиях реализован ЧМ-сигнал с малым индекс частотной модуляции?

16. Радиовещательная станция с ЧМ имеет предельное значение индекса модуляции (при наиболее громком передаваемом сигнале), равное 30. Полагая, что спектр низкочастотного модулирующего сигнала ограничен верхней частотой 16 кГц, определите число радиоканалов, которое можно без перекрестных помех (без перекрытия по спектру) разместить в УКВ-диапазоне (на частотах от 30 до 300 МГц).

17. Задан ЧМ-сигнал с модуляцией одним гармоническим сигналом:

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = 7\cos\left[600\pi t + 3\sin\left(2\pi 10^3 t\right) + \pi/6\right]$$

Чему равны: частота F, Гц, модулирующего сигнала; $f_{\max}$ – максимальная мгновенная частота и девиация $f_{\min}$ – минимальная мгновенная частота, частоты, Гц? Гц; $\Delta f_{\text{М}}$ –

18. Какие выводы можно сделать по результатам выполнения индивидуального задания?

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

1. Кологривов, В. А. Прикладные математические методы в радиотехнике. В 2-х частях: учебное пособие / В. А. Кологривов. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. - Ч. 1. – Аналоговые системы. – 159 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=209003

2. Умняшкин, С. В. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов: учебное пособие / С. В. Умняшкин. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Техносфера, 2012. – 368 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233733

3. Каганов В.И., Битюков В.К. Основы радиоэлектроники и связи: учебное пособие. – М.: Горячая линия - Телеком, 2012. – 542 с. http://www.iprbookshop.ru/12017

4. Вадутов О.С. Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / Вадутов О.С. – Томск: Томский политехнический университет, 2014. – 102 с. http://www.iprbookshop.ru/34676

5. Масалов, Е.В. Радиотехнические системы: учебное пособие / Е.В. Масалов. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. – Ч. 1. – 109 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=208715

Лабораторная работа 7

Исследование дискретных сигналов и их характеристик

Цель работы: – приобретение навыков исследования дискретных сигналов амплитудной, частотной, фазовой телеграфии и их характеристик.

Формируемые компетенции или их части

ОПК-2	Способность корректно применять при решении профессиональных задач соответствующий математический аппарат алгебры, геометрии, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей, математической статистики, математической логики, теории алгоритмов, теории информации, в том числе с использованием вычислительной техники.
ОПК-3	Способность применять языки, системы и инструментальные средства программирования в профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Дискретные сигналы математически описываются разрывными функциями времени. Элементы дискретных сигналов имеют четкие границы.

В современных СЭС к дискретным сигналам относят сигналы, используемые в системах радиотелеграфной связи, системах передачи данных и системах автоматического (автоматизированного) управления.

Например, в радиотелеграфии в настоящее время используются два основных типа дискретных сигналов:

- код Морзе – для приема на слух;
- международный телеграфный код 2 (МТК – 2) – для буквопечатающей электрической связи.

Важным частным случаем предыдущего сигнала является меандр – последовательность прямоугольных импульсов со скважностью, равной двум, когда длительности импульсов и промежутков между ними становятся равными.

Для исследования спектральных характеристик дискретных сигналов в лабораторной работе будет использован периодический сигнал называемый меандром – последовательность прямоугольных импульсов со скважностью,

равной двум, когда длительности равными (рисунок 7.1).

и промежутков между ними

импульсов T_S $Tсл$ - T_S становятся

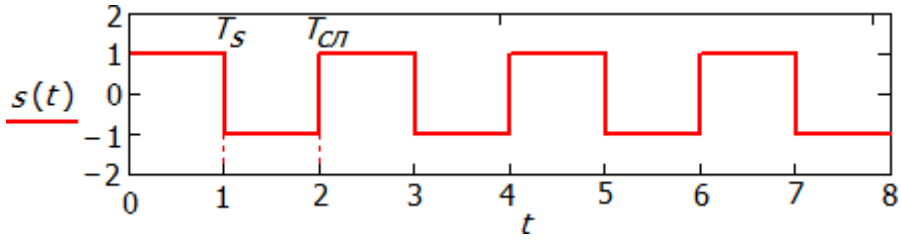


Рисунок 7.1 – Временная диаграмма меандра

Как следует из определения и рисунка 7.1 скважность q меандра равна двум:

$$q = \frac{T_{СЛ}}{T_S} = \frac{2}{T_S}$$

где $T_{СЛ}$ – период следования импульсов, с;

T_S – длительность импульсов, с.

(7.1)

Напомним некоторые понятия, необходимые при исследовании характеристик дискретных сигналов:

1. Скорость телеграфирования ν_T или ν_S, Бод, (скорость передачи сигналов или скорость манипуляции) характеризует количество элементов сигнала, передаваемых по каналу связи за единицу времени

$$\nu = \nu = \frac{1}{T_S T_S}. \qquad (7.2)$$

2. Частота манипуляции F_M, Гц, совпадает с частотой первой гармоники передаваемого меандра

$$F = \frac{1}{2T_S} = \frac{1}{T_{СЛ}} = \frac{\nu_T}{2}. \qquad (7.3)$$

В лабораторной работе исследуются три разновидности дискретных сигналов:

- амплитудной телеграфии (АТ);
- частотной телеграфии (ЧТ);
- фазовой телеграфии (ФТ).

Сигналы АТ в основном используются в радиотелеграфии для приема на слух, но возможна и автоматическая телеграфия. Сигналы АТ называют сигналами типа «посылка-пауза» или сигналами с пассивной паузой. На рисунке 7.2 представлена временная диаграмма сигнала АТ при использовании в качестве модулирующей последовательности меандра.

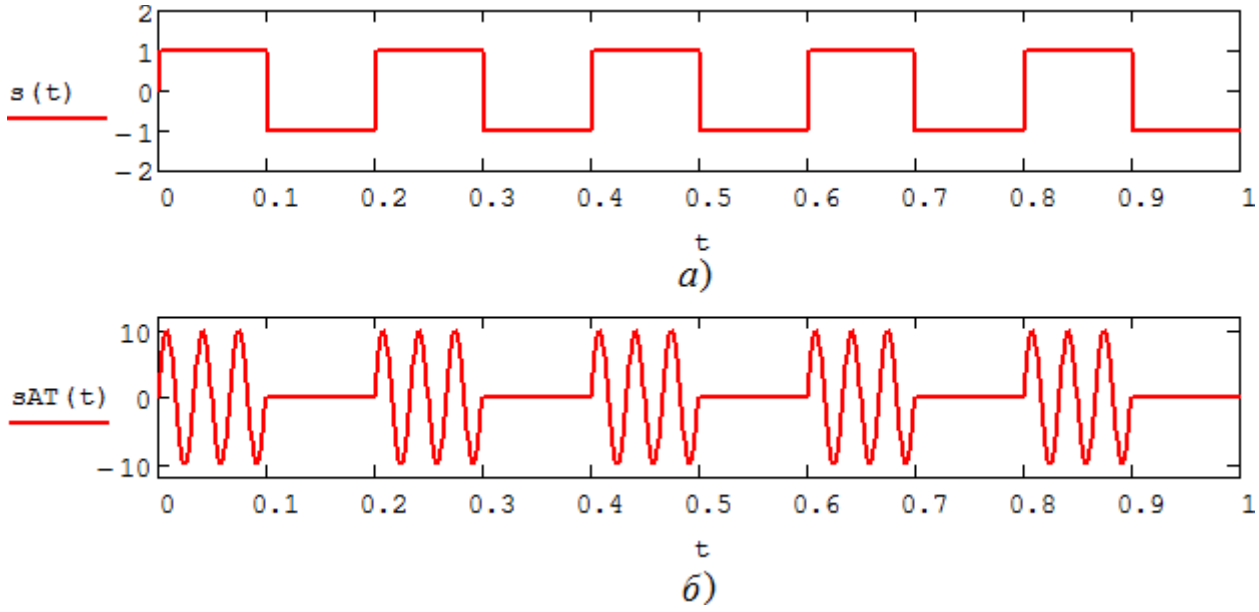


Рисунок 7.2 – Временная диаграмма сигнала АТ: *а*) модулирующий меандр; *б*) сигнал АТ

На рисунке 7.3 представлен амплитудный спектр сигнала АТ. Как следует из рисунка 7.3, спектр сигналов АТ содержит несущую частоту f_0 и ряд боковых составляющих $f_0 \pm kF_M$, $k = 1,2,\cdots$.

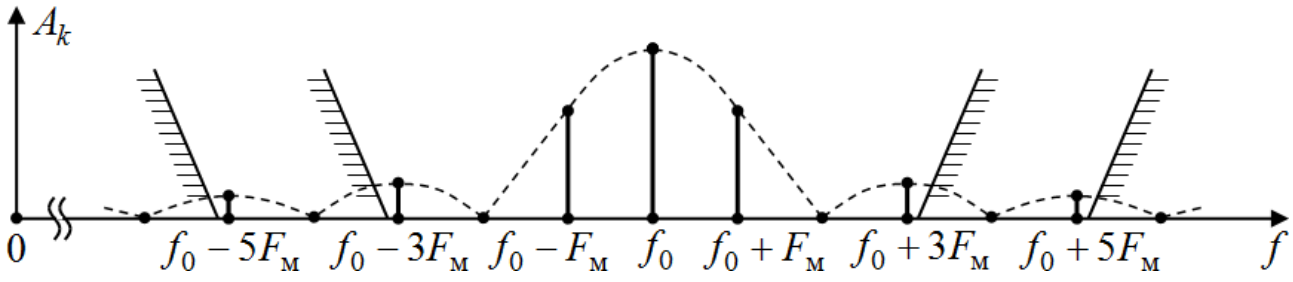


Рисунок 7.3 – Амплитудный спектр сигнала АТ

Теоретически спектр сигналов АТ, как и спектр любого конечного во времени электрического процесса, бесконечен. Однако, для практического

использования ширина занимаемой полосы частот может быть определена по формуле ΔF_{AT}, Гц, сигналов АТ

$$\Delta F_{AT} = k \cdot v_T, \quad (7.4)$$

где $k = 3$ – для каналов связи с постоянными параметрами;

$k = 5$ – для каналов связи с переменными параметрами.

Примечание –: ширина такой полосы частот, за нижним и верхним пределами которой излучаемые средние мощности равняются каждая определенному проценту $b/2$ от всей средней мощности данного излучения. Если МККР не дает никаких указаний для соответствующего класса излучения, то значение $b/2$ следует брать равным 0,5%.

Таким образом, если ширина занимаемой полосы частот ΔF_{AT} рассчитывается по формуле (7.4), то в пределах этой полосы частот сосредоточено порядка 99 % всей средней мощности излучаемого сигнала АТ.

С учетом (7.3) формулу (7.4) ширину занимаемой полосы частот для указанных типов канала связи можно выразить через частоту манипуляции в виде

$$\Delta F_{AT} = \begin{cases} 3 \cdot v_T = 3 \cdot F_M; \\ 5 \cdot v_T = 5 \cdot F_M. \end{cases} \quad (7.5)$$

Сигналы ЧТ наиболее широко используются в радиосвязи для организации автоматической телеграфии. При использовании сигналов ЧТ на передающей стороне СЭС формируются колебания двух частот: $f_Б$ – «пауза»; $f_В$ – «посылка». Амплитуда спектральной составляющей сигналов ЧТ на средней частоте f_0 может быть равной нулю или быть отличной от нуля.

На рисунке 7.4 представлена временная диаграмма сигнала ЧТ при использовании в качестве модулирующей последовательности меандра.

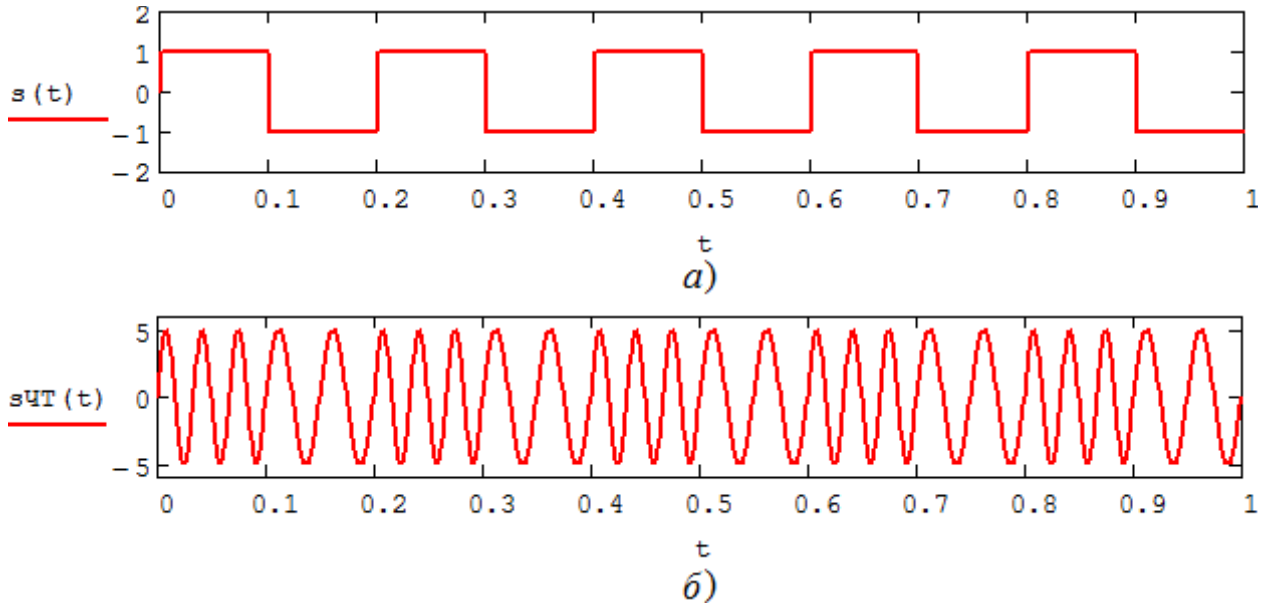


Рисунок 7.4 – Временная диаграмма сигнала ЧТ:

а) модулирующий меандр;

б) сигнал ЧТ

Средняя частота формуле

f_0 , Гц, спектра сигнала ЧТ может быть определена по

$$f_0 = \left(f_Б + f_В \right) 2 \text{ . (7.6)}$$

Разнос частот $F_Р$, Гц, – это разность между частотой «посылки» $f_В$ и частотой «паузы» $f_Б$.

Девиация частоты $F_Д$, Гц, – это отклонение частоты «посылки» $f_В$ и частоты «паузы» $f_Б$ от средней частоты спектра сигнала ЧТ f_0 .

Девиация частоты и разнос частот сигналов частотной телеграфии можно рассчитать по формулам:

$$F_Д = \left(f_В - f_Б \right) / 2 \text{ ; (7.7)}$$

$$F_Р = f_В - f_Б = 2F_Д \text{ . (7.8)}$$

Амплитудный спектр сигнала ЧТ, содержащий две несущих частоты ($f_Б$ и $f_В$) и ряд боковых составляющих, а также представлен на рисунке 7.5.

поясняющий смысл величин

F_P и $F_Д$,

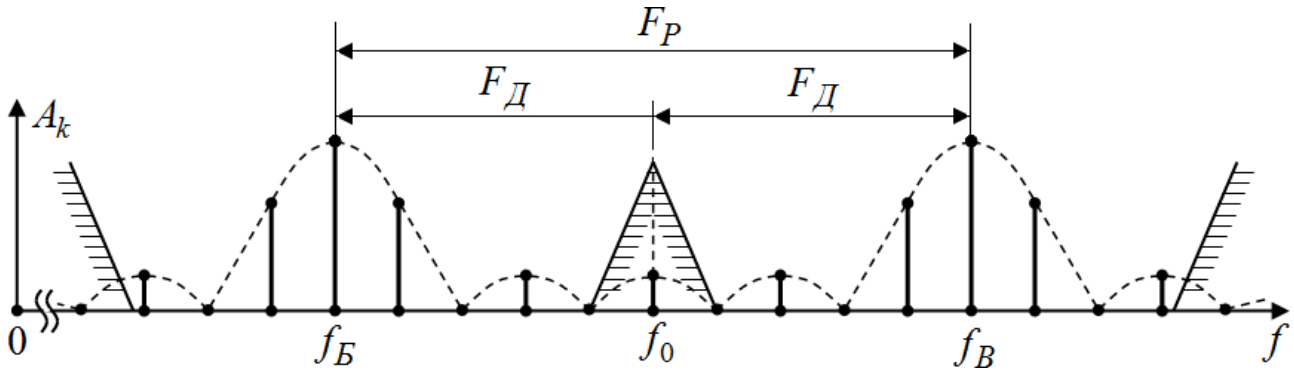


Рисунок 7.5 – Амплитудный спектр сигнала ЧТ

Как видно на рисунке 7.5, сигнал ЧТ можно представить в виде двух последовательностей радиоимпульсов амплитудной телеграфии с разными частотами заполнения.

Ширина занимаемой полосы частот сигналов частотной телеграфии определяется в соответствие с выражением

$$\Delta F_{ЧТ} = 2 \cdot F_Д + k \cdot v_T = F_P + k \cdot v_T \,. \quad (7.9)$$

В отличие от амплитудной телеграфии, сигналы ЧТ являются сигналами с активной паузой.

Рассмотрим сигналы ФТ. При ФТ информационным параметром является фаза несущего колебания. Фазовый сдвиг радиоимпульсов «посылки» и «паузы»

может быть любым, но чаще выбирают $\theta=\pi$ (180°). При данном фазовом

сдвиге получают противоположные сигналы, обеспечивающие максимальную помехоустойчивость.

На рисунке 7.6 изображена временная диаграмма сигнала ФТ при использовании меандра в качестве модулирующей последовательности.

Спектр сигналов фазовой телеграфии (при фазовом сдвиге $\theta=\pi$) подобен

спектру сигналов АТ, но без несущей частоты. При этом вся энергия передаваемого сигнала сосредоточена в боковых составляющих спектра. При сдвиге амплитуды боковых составляющих в два раза больше, чем при АТ.

Амплитудный спектр сигнала ФТ представлен на рисунке 7.7.

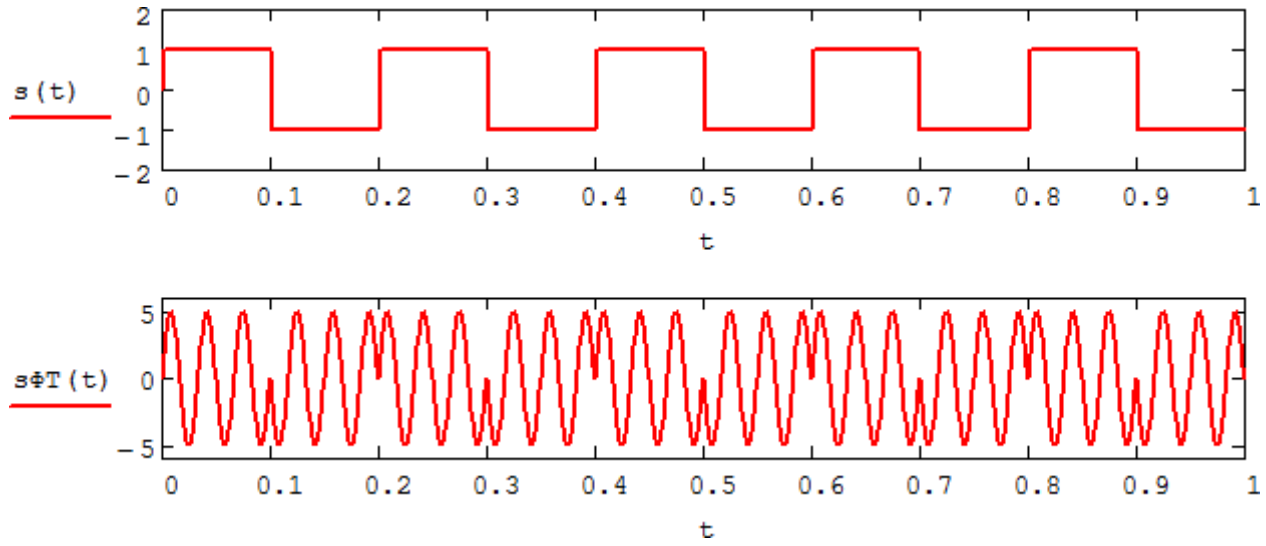


Рисунок 7.6 – Временная диаграмма сигнала ФТ: *а*) модулирующий меандр; *б*) сигнал ФТ

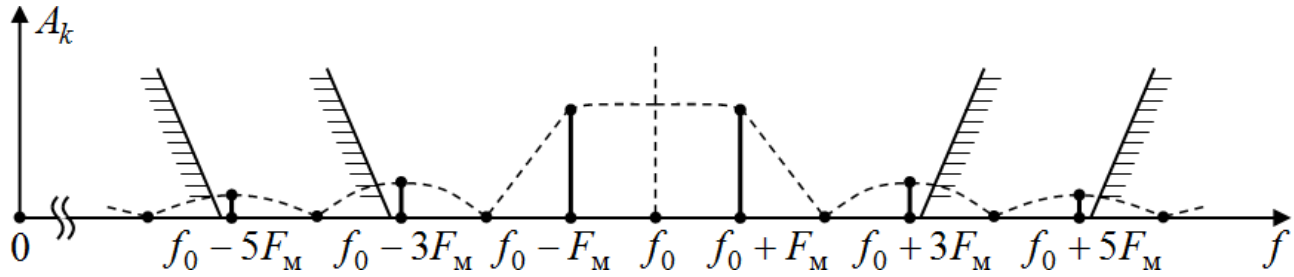


Рисунок 7.7 – Амплитудный спектр сигнала ФТ

Ширина занимаемой полосы частот сигналов фазовой телеграфии, как и при использовании сигналов АТ (формула (7.4)), определяется выражением

$$\Delta F_{ФТ} = k \cdot v_T \text{ , (7.10)}$$

где k = 3 – для каналов связи с постоянными параметрами;

k = 5 – для каналов связи с переменными параметрами.

Достоинством сигналов ФТ является то, что величина $\Delta F_{ФТ}$ от фазового сдвига θ радиоимпульсов «посылки» и «паузы» не зависит, что может обеспечить многоканальную передачу сигналов на одной несущей частоте. Однако, для приема сигналов ФТ необходимо знать начальную фазу несущего колебания и осуществлять синхронное детектирование. Поэтому на практике используется

относительная фазовая телеграфия.

Сигналы относительной фазовой телеграфии (ОФТ). Впервые в мире принцип ОФТ был предложен и экспериментально проверен советским ученым Петровичем Н. Т. В 1954 году.

Сущность ОФТ состоит в том, что передача посылок «1» или посылок «0» осуществляется сигналом, значение начальной фазы которого отсчитывается относительно начальной фазы предыдущего сигнала.

Сигналы ОФТ по своей структуре не отличаются от сигналов ФТ, поэтому все сказанное о спектре и полосе частот сигналов ФТ в основном справедливо и для ОФТ.

Реализация относительной фазовой телеграфии осуществляется двумя совершенно равноценными способами:

– при передаче посылок «1» фаза сигнала не изменяется, а при передаче посылок «0» – изменяется на $\theta = \pi$;

– при передаче посылок «1» фаза сигнала изменяется на $\theta = \pi$, а при передаче посылок «0» – не изменяется.

С учетом того, что спектры сигналов ФТ и ОФТ совпадают, в лабораторной работе исследование сигналов ОФТ не производится.

Оборудование и материалы

Аппаратура. Для выполнения лабораторной работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов 256).

Программное обеспечение. Для выполнения лабораторной работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 13 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении лабораторной работы **запрещается**:

– самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;

– нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т. Д.;

– принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Указания по порядку выполнения работы

Методику выполнения работы рассмотрим на примере экспериментального исследования дискретных сигналов амплитудной, частотной, фазовой телеграфии и их характеристик.

Считаем, что дискретные сигналы амплитудной, частотной, фазовой телеграфии и модулирующий меандр представляют электрическое напряжение, измеряемое в вольтах.

Заданы параметры:

– модулирующего меандра $s(t)$: частота манипуляции – 5 кГц, высота импульсов – 1 В.

– несущего сигнала амплитудной телеграфии $s_н(t)$: несущая частота f_0 = 30 кГц, амплитуда – 5 В;

– несущего сигнала частотной телеграфии: частота «паузы» – 20 кГц, частота «посылки» – 30 кГц, амплитуда – 5 В;

– параметры несущего сигнала фазовой телеграфии: частота – 30 кГц, фазовый сдвиг радиоимпульсов «посылки» и «паузы» $\theta = \pi$ (180°), амплитуда – 5 В.

Требуется:

– рассчитать период следования $T_{СЛ}$ импульсов меандра, с;

– рассчитать длительность T_S импульсов меандра, с;

– рассчитать скорость телеграфирования ν_T, Бод;

– построить временную диаграмму модулирующего меандра $s(t)$;

– рассчитать и построить амплитудные и фазовые спектральные диаграммы модулирующего меандра $s(t)$, ограничившись количеством десяти ($M = 10$) гармоник равным;

– убедится в корректности определения амплитудного и фазового спектра модулирующего меандра $s(t)$. Для этого выполнить синтез модулирующего меандра $sM(t)$ по рассчитанным десяти гармоникам его Фурье-спектра, вычислить расстояние и квадрат расстояния между сигналами $sM(t)$ и $s(t)$ за период колебаний $T_{СЛ}$, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$;

– задать несущий сигнал $s_{Н}(t)$, используемый при амплитудной телеграфии и построить его временную диаграмму;

– задать сигнал амплитудной телеграфии временную диаграмму;

$sAT(t)$ и построить его

– рассчитать и построить амплитудную спектральную диаграмму

сигнал амплитудной телеграфии $sAT(t)$, ограничившись количеством гармоник равным шестидесяти ($M = 60$);

– по формуле (7.4) вычислить ширину занимаемой полосы частот

ΔF_{AT}, Гц, исследуемого сигнала АТ, полагая, что рассматривается канал электрической связи с постоянными параметрами;

– задать сигнал частотной

телеграфии диаграмму; $sЧТ(t)$ и построить его временную

– по формулам (7.6 – 7.8) определить среднюю частоту f_0, Гц, спектра сигнала ЧТ, девиацию частоты $F_Д$, Гц, сигнала ЧТ и разнос частот частотной телеграфии;

– рассчитать и построить амплитудную спектральную диаграмму сигнал частотной телеграфии $sЧТ(t)$, ограничившись количеством шестидесяти ($M = 60$); гармоник равным

– по формуле (7.9) вычислить ширину занимаемой полосы частот $\Delta F_{ЧТ}$, Гц, исследуемого сигнала ЧТ, полагая, что рассматривается канал электрической связи с постоянными параметрами;

– задать сигнал фазовой телеграфии $sФТ(t)$ и построить его временную диаграмму;

– рассчитать и построить амплитудную спектральную диаграмму сигнал фазовой телеграфии $sФТ(t)$, ограничившись количеством гармоник равным шестидесяти ($M = 60$);

– по формуле (7.10) вычислить ширину занимаемой полосы частот $\Delta F_{ФТ}$, Гц, исследуемого сигнала ФТ, полагая, что рассматривается канал электрической связи с постоянными параметрами.

Рассмотрим решение поставленной задачи в математическом пакете Mathcad:

1. Запускаем Mathcad и создаем новый Mathcad-документ. Сохраняем его под именем, например, Lab_7.xmcd.

2. Согласно форме меандра $s(t)$ и заданной частоте манипуляции рассчитываем период следования $T_{СЛ}$ импульсов меандра, длительность T_S импульсов

меандра, скорость телеграфирования ν_T (рисунок 7.8).

$Fм := 5$ Частота манипуляции, кГц

$Tсл := \frac{1}{Fм} = 0.2$ Период следования, мс

$Ts := \frac{Tсл}{2} = 0.1$ Длительность, мс

$\nu т := \frac{1}{Ts} = 10$ Скорость телеграфирования, кбод

Рисунок 7.8 – Считываем параметры меандра и скорость телеграфирования

3. Вводим определение модулирующего меандра и строим его временную диаграмму (рисунок 7.9).

$S0 := 1 \quad s(t) := S0 \cdot sign(\sin(2 \cdot \pi \cdot Fм \cdot t))$

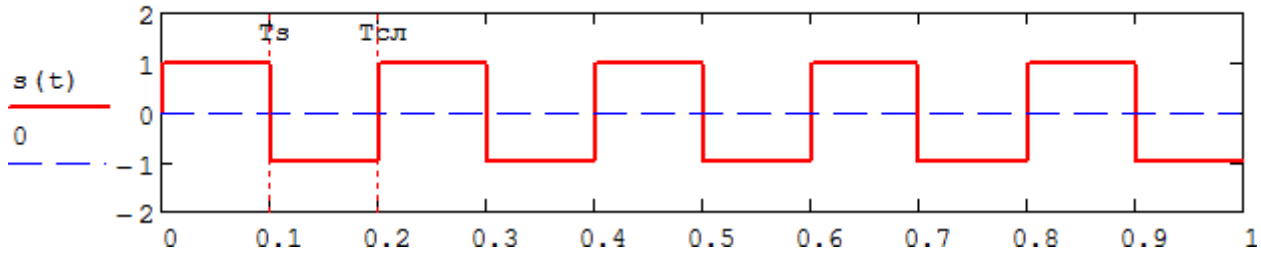


Рисунок 7.9 – Определение и график модулирующего меандра

4. Рассчитываем и строим амплитудные и фазовые спектральные диаграммы модулирующего меандра $s(t)$, ограничившись количеством гармоник равным десяти ($M = 10$) (рисунки 7.10 – 7.13).

$$M := 10 \qquad k := 0 \,..\, M$$

$$a_k := \frac{2}{Tсл} \cdot \int_0^{Tсл} s(t) \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi Fм \cdot t)\ dt$$

$$b_k := \frac{2}{Tсл} \cdot \int_0^{Tсл} s(t) \cdot \sin(k \cdot 2 \cdot \pi Fм \cdot t)\ dt$$

$a =$

	0
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0

$b =$

	0
0	0
1	1.2732
2	0
3	0.4244
4	0
5	0.2546
6	0
7	0.1819
8	0
9	0.1415
10	0

Рисунок 7.10 – Вычисляем коэффициент a_k и b_k k-той косинусной и синусной составляющей спектра Фурье модулирующего меандра

$$A_k := \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}$$

$$\varphi_k := \begin{cases} \operatorname{atan2}(a_k, b_k) & \text{if } |b_k| \geq 10^{-3} \\ 0 & \text{if } |b_k| < 10^{-3} \end{cases}$$

$A =$

	0
0	0
1	1.2732
2	0
3	0.4244
4	0
5	0.2546
6	0
7	0.1819
8	0
9	0.1415
10	0

$\varphi =$

	0
0	0
1	1.5708
2	0
3	1.5708
4	0
5	1.5708
6	0
7	1.5708
8	0
9	1.5708
10	0

Рисунок 7.11 – Амплитуды и начальные фазы гармоники спектра Фурье модулирующего меандра

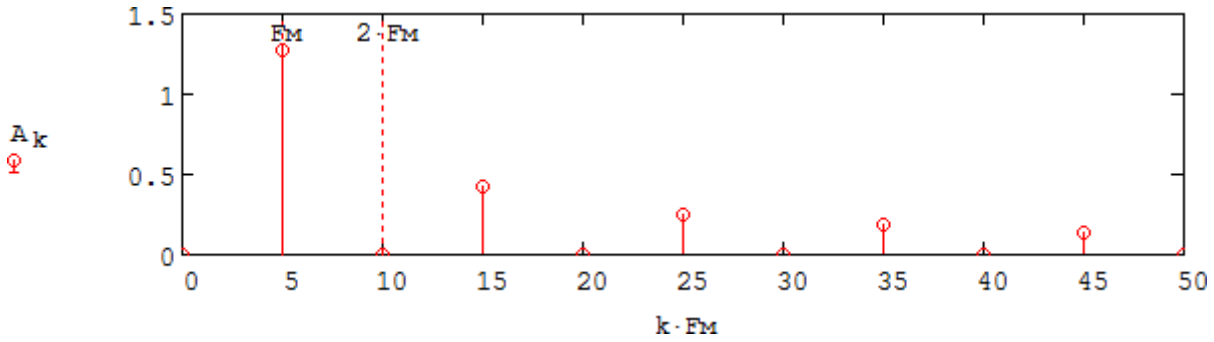


Рисунок 7.12 – Амплитудная спектральная диаграмма меандра

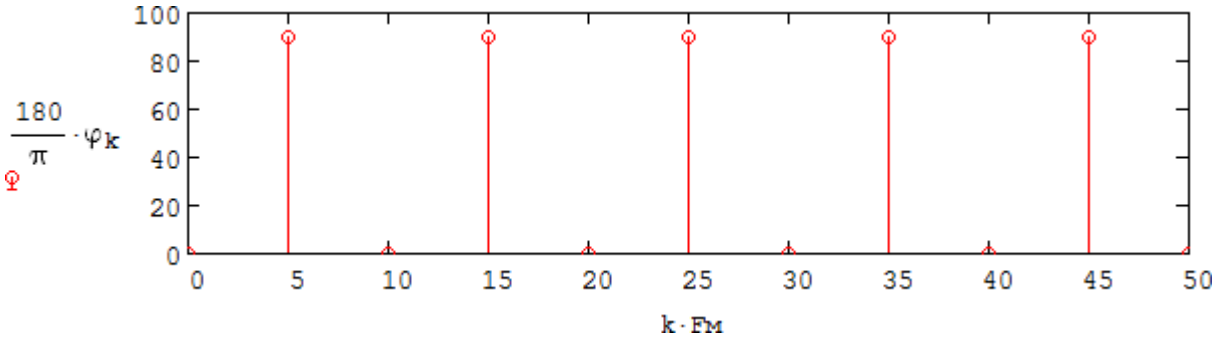


Рисунок 7.13 – Фазовая спектральная диаграмма меандра

Примечания:

– На рисунках 7.12 и 7.13 вдоль оси абсцисс отложена циклическая частота

k-й гармоники меандра, кГц;

– На рисунке 7.12 вдоль оси ординат отложена амплитуда *k*-й гармоники спектра Фурье меандра в вольтах.

– На рисунке 7.13 вдоль оси ординат отложена начальная фаза *k*-той гармоники спектра Фурье меандра в градусах.

5. Находим, восстановленный по усеченному ряду Фурье сигнал $sM(t)$,

являющийся приближенным изображением сигнала $s(t)$, и строим его временную диаграмму и временную диаграмму исходного меандра (рисунок $s(t)$ 7.14)

$$sM(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{M} \left(A_k \cdot \cos\left(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot Fм \cdot t - \varphi_k\right)\right)$$

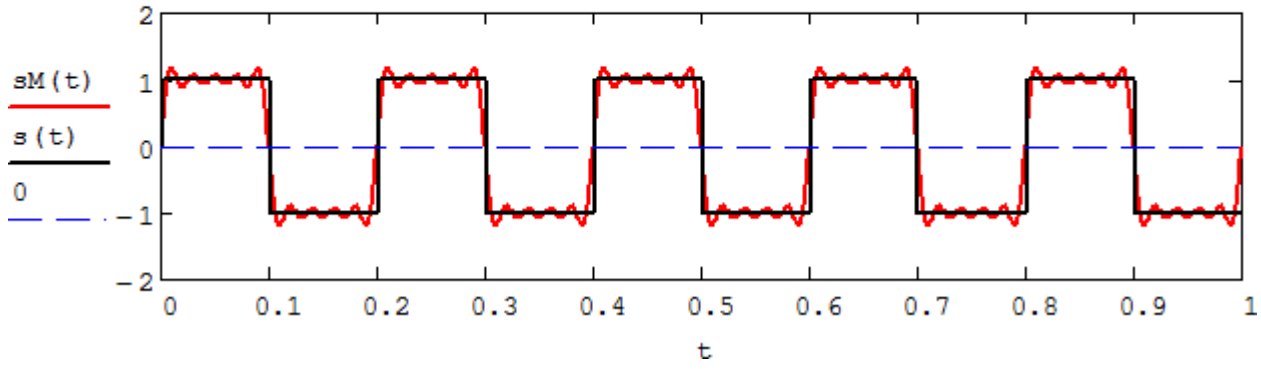


Рисунок 7.14 – Восстановленный по усеченному ряду Фурье сигнал $sM(t)$ и исходный модулирующий меандр $s(t)$

6. Вычисляем расстояние и квадрат расстояния между сигналами $sM(t)$ и $s(t)$ за период колебаний $T_{СЛ}$ (рисунок 7.15).

$$ds_sM := \sqrt{\int_0^{Tсл} (sM(t) - s(t))^2 \, dt} = 0.0899 \qquad ds_sM^2 = 8.079 \times 10^{-3}$$

Рисунок 7.15 – Определение расстояния и квадрата расстояния между сигналами $sM(t)$ и $s(t)$

7. Вычисляем квадрат расстояния между сигналами $sM(t)$ и $s(t)$ за период колебаний $T_{СЛ}$ (рисунок 7.16), выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$.

$$Es := \int_0^{Tсл} s(t)^2 \, dt = 0.2 \qquad \varepsilon 2 := \frac{ds_sM^2}{Es} \cdot 100 = 4.0395$$

Рисунок 7.16 – Квадрата расстояния между сигналами $sM(t)$ и $s(t)$, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$

Делаем вывод о том, что если ограничиться рассмотрением десяти гармоник спектра Фурье, то квадрат расстояния между сигналами $sM(t)$ и $s(t)$ составляет примерно 4% относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$.

Таким образом, убеждаемся в корректности определения амплитудного и фазового спектра модулирующего меандра $s(t)$, что позволяет перейти к исследованию спектров и характеристик дискретных сигналов амплитудной, частотной, фазовой телеграфии.

8. Задаем несущий сигнал $sн(t)$ и строим его временную диаграмму (рисунок 7.17).

9. Задаем сигнал амплитудной телеграфии $sAT(t)$ и строим его временную диаграмму (рисунок 7.18).

10. Рассчитываем амплитудную спектральную диаграмму сигнал амплитудной телеграфии $sAT(t)$, ограничившись количеством гармоник равным шестидесяти ($M = 60$) (рисунок 7.19).

$$Sн := 5 \quad sн(t) := Sн \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f0 \cdot t)$$

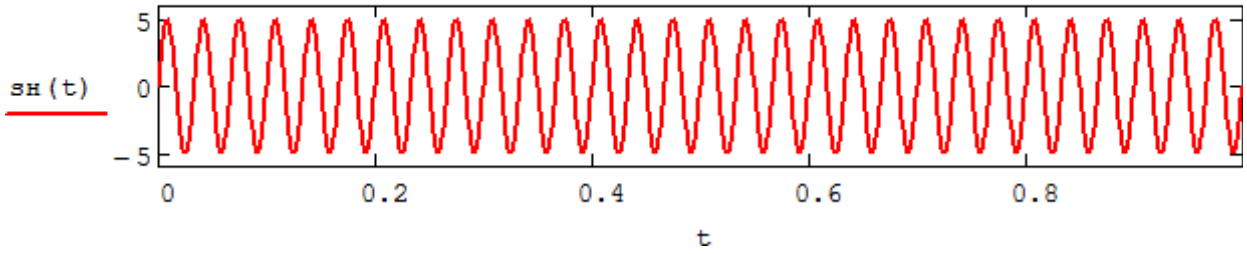


Рисунок 7.17 – Определение и временная диаграмма несущего сигнала используемого при амплитудной телеграфии $sн(t)$,

$$f0 := 30 \quad \text{Частота несущей, кГц}$$
$$Sн := 5 \quad sн(t) := Sн \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f0 \cdot t)$$

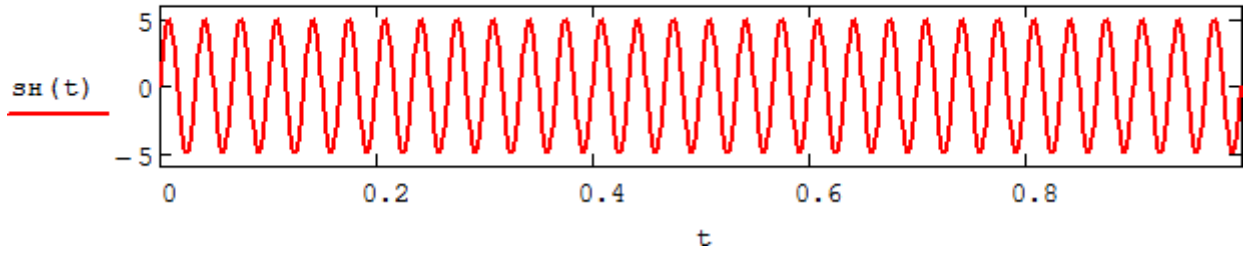


Рисунок 7.18 – Определение и временная диаграмма сигнала амплитудной телеграфии $sAT(t)$

$$sAT(t) := s(t) \cdot sн(t)$$

$$M := 60 \qquad k := 0 .. M$$

$$a_AT_k := \frac{2}{Tсл} \cdot \int_0^{Tсл} sAT(t) \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi Fм \cdot t)\ dt$$

$$b_AT_k := \frac{2}{Tсл} \cdot \int_0^{Tсл} sAT(t) \cdot \sin(k \cdot 2 \cdot \pi Fм \cdot t)\ dt$$

$$A_AT_k := \sqrt{(a_AT_k)^2 + (b_AT_k)^2}$$

Рисунок 7.19 – Рассчитываем амплитудную спектральную диаграмму сигнала амплитудной телеграфии $sAT(t)$

11. Строим амплитудную спектральную диаграмму сигнала амплитудной телеграфии (рисунок 7.20).

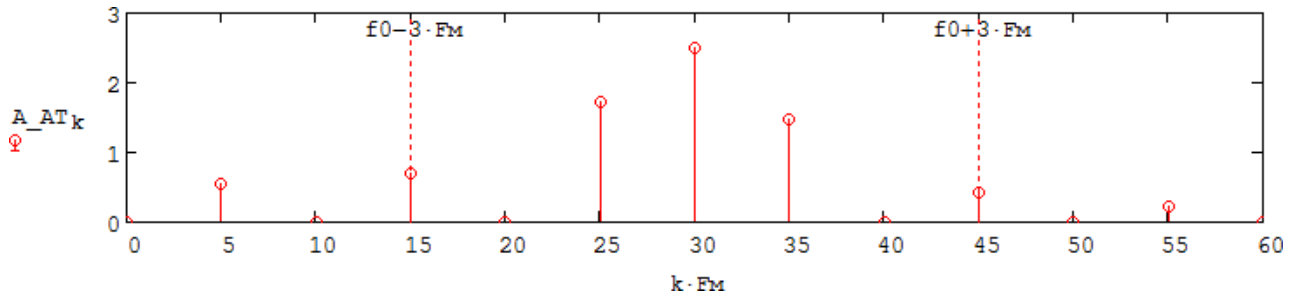


Рисунок 7.20 – Амплитудная спектральная диаграмма сигнала амплитудной телеграфии

12. По формуле (7.4) вычисляем ширину занимаемой полосы частот ΔF_{AT} , Гц, исследуемого сигнала АТ, полагая, что рассматривается канал электрической связи с постоянными параметрами (рисунок 7.21).

$$\Delta FAT := 6 \cdot Fм = 30$$

Рисунок 7.21 – Значение ширины занимаемой полосы частот ΔF_{AT}

Как следует из рисунка 7.21, значение ширины занимаемой полосы частот ΔF_{AT} составляет 30 кГц.

13. Задаем согласно исходным данным $s ЧТ(t)$ и сигнал частотной телеграфии построить его временную диаграмму (р

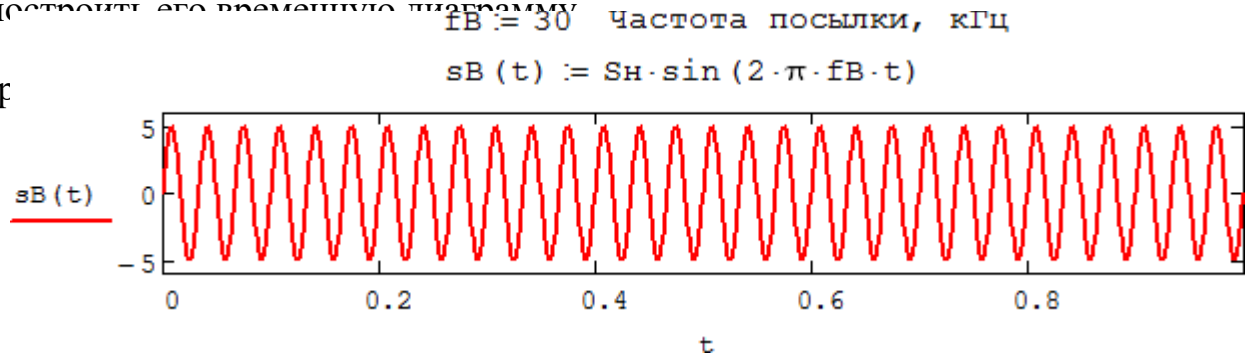


Рисунок 7.22 – Определение и временная диаграмма гармонического сигнала $sB(t)$ с частотой «посылки» – 30 кГц

$fБ := 20$ Частота паузы, кГц

$sБ(t) := Sн \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot fБ \cdot t)$

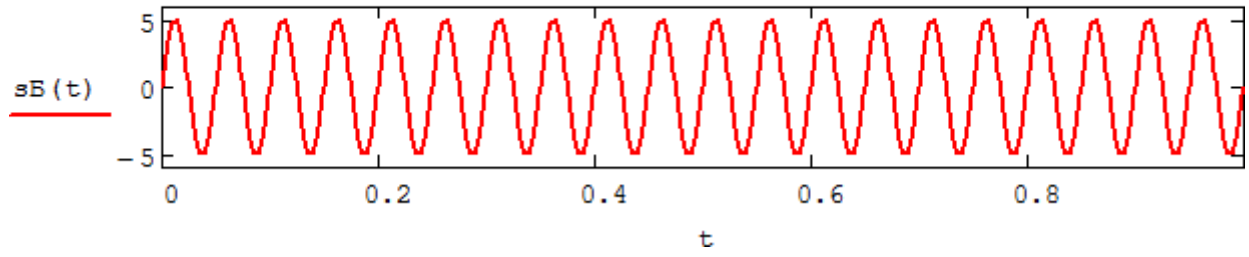


Рисунок 7.23 – Определение и временная диаграмма гармонического сигнала $sБ(t)$ с частотой «паузы» – 20 кГц

$sЧТ(t) := \text{if}(s(t) > 0, sВ(t), sБ(t))$

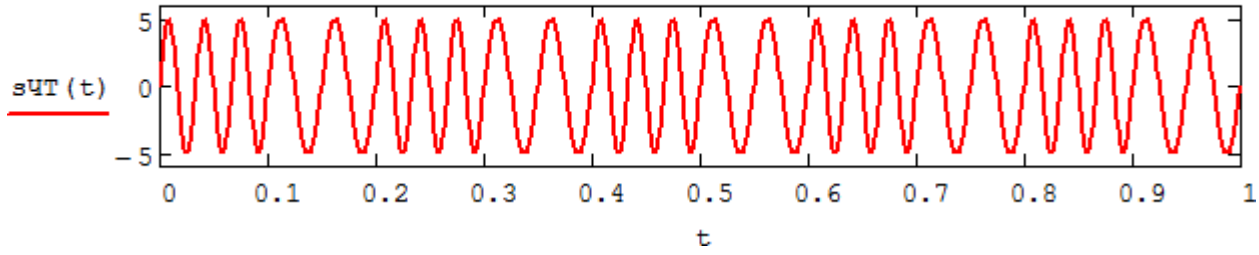


Рисунок 7.24 – Определение и временная диаграмма сигнала частотной телеграфии $sЧТ(t)$

14. Рассчитываем амплитудный спектр сигнала частотной телеграфии $sЧТ(t)$, ограничившись количеством гармоник равным шестидесяти (M = 60) (рисунок 7.25).

$$a_ЧТ_k := \frac{2}{Tсл} \cdot \int_0^{Tсл} sЧТ(t) \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi Fм \cdot t)\ dt$$

$$b_ЧТ_k := \frac{2}{Tсл} \cdot \int_0^{Tсл} sЧТ(t) \cdot \sin(k \cdot 2 \cdot \pi Fм \cdot t)\ dt$$

$$A_ЧТ_k := \sqrt{(a_ЧТ_k)^2 + (b_ЧТ_k)^2}$$

Рисунок 7.25 – Рассчитываем амплитудный спектр сигнала частотной

телеграфии $s_{ЧТ}(t)$

15. Строим амплитудную спектральную диаграмму сигнала частотной телеграфии (рисунок 7.26).

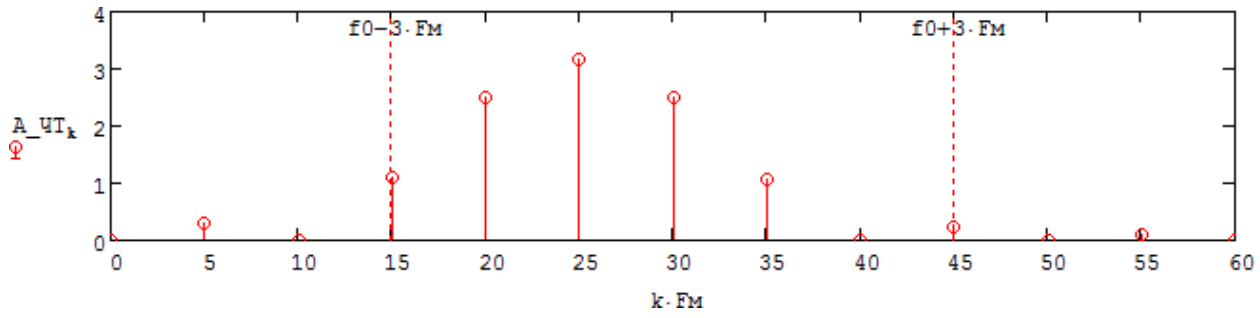


Рисунок 7.26 – Амплитудная спектральная диаграмма сигнала амплитудной телеграфии

16. По формуле (7.9) вычисляем ширину занимаемой полосы частот $\Delta F_{ЧТ}$, Гц, исследуемого сигнала ЧТ, полагая, что рассматривается канал электрической связи с постоянными параметрами (рисунок 7.27).

$$Fp := fB - fБ = 10$$

$$\Delta FЧТ := Fp + 3 \cdot \nu т = 40$$

Рисунок 7.27 – Значение ширины занимаемой полосы частот $\Delta F_{ЧТ}$

Как следует из рисунка 7.27, значение ширины занимаемой полосы частот ΔF_{AT} составляет 40 кГц, что на 10 кГц больше, чем у сигнала АТ (рисунок 7.21).

17. Задаем согласно исходным данным сигнал фазовой телеграфии построить его временную диаграмму (рисунок 7.28).

$sФТ(t)$ и

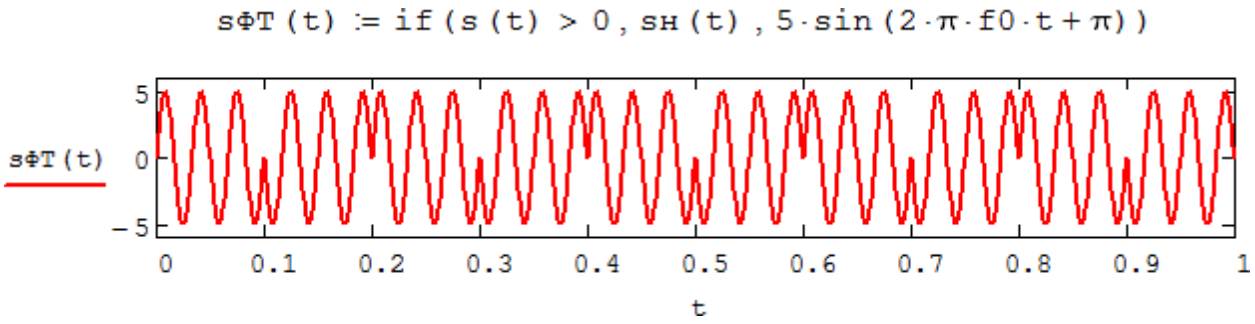


Рисунок 7.28 – Определение и временная диаграмма сигнала фазовой телеграфии $sФТ(t)$

18. Рассчитываем амплитудный спектр сигнала фазовой телеграфии $sЧТ(t)$, ограничившись количеством гармоник равным шестидесяти (M = 60) (рисунок 7.29).

$$a_ФТ_k := \frac{2}{Тсл} \cdot \int_0^{Тсл} sФТ(t) \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi Fм \cdot t)\ dt$$

$$b_ФТ_k := \frac{2}{Тсл} \cdot \int_0^{Тсл} sФТ(t) \cdot \sin(k \cdot 2 \cdot \pi Fм \cdot t)\ dt$$

$$A_ФТ_k := \sqrt{(a_ФТ_k)^2 + (b_ФТ_k)^2}$$

Рисунок 7.29 – Рассчитываем амплитудный спектр сигнала фазовой телеграфии

15. Строим амплитудную спектральную диаграмму сигнала фазовой телеграфии (рисунок 7.30).

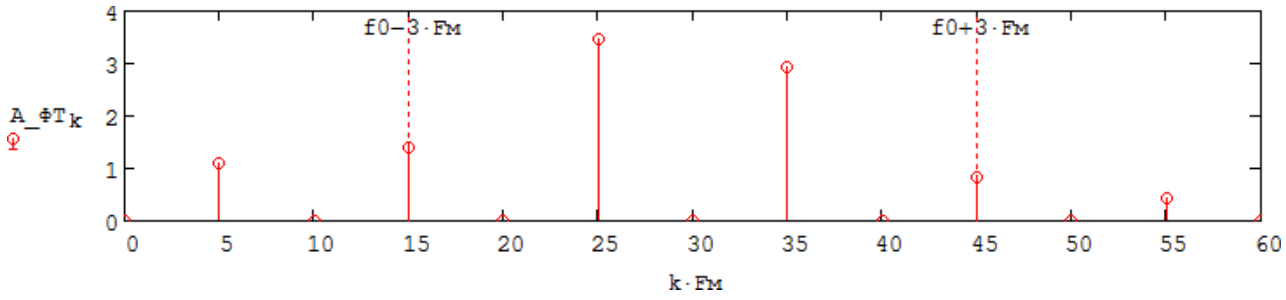


Рисунок 7.30 – Амплитудная спектральная диаграмма сигнала фазовой телеграфии

16. По формуле (7.10) вычисляем ширину занимаемой полосы частот $\Delta F_{ФТ}$, Гц, исследуемого сигнала ФТ, полагая, что рассматривается канал электрической связи с постоянными параметрами (рисунок 7.31).

$$\Delta FФТ := 6 \cdot Fм = 30$$

Рисунок 7.31 – Значение ширины занимаемой полосы частот $\Delta F_{ФТ}$

Как следует из рисунка 7.31, значение ширины занимаемой полосы частот

$\Delta F_{ФТ}$ составляет 30 кГц, что совпадает с соответствующей характеристикой сигнала АТ (рисунок 7.21).

Порядок выполнения работы

1. Запустить Mathcad.

2. Требуется в программе Mathcad для заданного модулирующего меандра, а также дискретных сигналов амплитудной, частотной, фазовой телеграфии в соответствии с вариантом индивидуального задания (таблицы 7.1 – 7.4):

– рассчитать период следования $T_{СЛ}$ импульсов меандра, с;

– рассчитать длительность T_S импульсов меандра, с;

– рассчитать скорость телеграфирования ν_T, Бод;

– построить временную диаграмму модулирующего меандра $s(t)$;

– рассчитать и построить амплитудные и фазовые спектральные диаграммы модулирующего меандра $s(t)$, ограничившись количеством гармоник равным десяти ($M = 10$);

– убедится в корректности определения амплитудного и фазового спектра модулирующего меандра $s(t)$. Для этого выполнить синтез модулирующего меандра $sM(t)$ по рассчитанным десяти гармоникам его Фурье-спектра, вычислить расстояние и квадрат расстояния между сигналами $sM(t)$ и $s(t)$ за период колебаний $T_{СЛ}$, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$;

– задать несущий сигнал $s_{Н}(t)$, используемый при амплитудной

телеграфии и построить его временную диаграмму;

– задать сигнал амплитудной телеграфии $sAT(t)$ и построить его временную диаграмму;

– рассчитать и построить амплитудную спектральную диаграмму сигнал амплитудной телеграфии $sAT(t)$, ограничившись количеством гармоник равным шестидесяти ($M = 60$);

– по формуле (7.4) вычислить ширину занимаемой полосы частот ΔF_{AT}, Гц, исследуемого сигнала АТ, полагая, что рассматривается канал электрической связи с постоянными параметрами;

– задать сигнал частотной телеграфии $s_{ЧТ}(t)$ и построить его временную диаграмму;

– по формулам (7.6 – 7.8) определить среднюю частоту f_0, Гц, спектра сигнала ЧТ, девиацию частоты $F_Д$, Гц, сигнала ЧТ и разнос частот сигналов частотной телеграфии;

– рассчитать и построить амплитудную спектральную диаграмму сигнал частотной телеграфии $s_{ЧТ}(t)$, ограничившись количеством гармоник равным шестидесяти ($M = 60$);

– по формуле (7.9) вычислить ширину занимаемой полосы частот $\Delta F_{ЧТ}$, Гц, исследуемого сигнала ЧТ, полагая, что рассматривается канал электрической связи с постоянными параметрами;

– задать сигнал фазовой телеграфии $s_{ФТ}(t)$ и построить его временную диаграмму;

– рассчитать и построить амплитудную спектральную диаграмму сигнал фазовой телеграфии $s_{ФТ}(t)$, ограничившись количеством гармоник равным шестидесяти ($M = 60$);

– по формуле (7.10) вычислить ширину занимаемой полосы частот $\Delta F_{ФТ}$, Гц, исследуемого сигнала ФТ, полагая, что рассматривается канал электрической связи с постоянными параметрами;

3. Сохранить результаты исследования дискретных сигналов и их характеристик.
4. Сформировать отчет по лабораторной работе.
5. Защитить работу.

Варианты заданий

Номер варианта (таблицы 7.1 – 7.4) соответствует номеру фамилии студента в списке учебной группы (подгруппы).

Таблица 7.1 – Варианты частоты манипуляции и высоты импульсов модулирующего меандра

Вариант	Частота манипуляции Fм, кГц	Высота импульсов S_0, В	Вариант	Частота манипуляции Fм, кГц	Высота импульсов S_0, В
1	2,5	2	4	3	2
2	5	2	5	2	2
3	4	2	6	6	2

Таблица 7.2 – Варианты параметров несущего сигнала амплитудной телеграфии

Вариант	Несущая частота f_0, кГц	Амплитуда $S_{н0}$, В	Вариант	Несущая частота f_0, кГц	Амплитуда $S_{н0}$, В
1	30	5	4	27	5
2	35	5	5	24	5
3	32	5	6	36	5

Таблица 7.3 – Варианты параметров несущего сигнала частотной телеграфии

Вариант	Частота «посылки» и «паузы», кГц		Амплитуда $S_{н0}$, В	Вариант	Частота «посылки» и «паузы», кГц		Амплитуда $S_{н0}$, В
	f_B	$f_Б$			f_B	$f_Б$	
1	30	20	5	4	35	15	5
2	35	25	5	5	30	15	5
3	32	18	5	6	36	16	5

Таблица 7.4 – Варианты параметров несущего сигнала фазовой телеграфии

Вариант	Несущая	Амплитуда	Вариант	Несущая	Амплитуда

	частота f_0, кГц	S_{H0}, В		частота f_0, кГц	S_{H0}, В
1	30	5	4	27	5
2	35	5	5	24	5
3	32	5	6	36	5

Примечание – При исследовании сигналов ФТ принимать фазовый сдвиг

$^{\circ}$

радиоимпульсов «посылки» и «паузы» $\theta=\pi$ (180).

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе оформляется в виде документа Word и должен включать:

1. Названия лабораторной работы.
2. Цель лабораторной работы.
3. Формулировку индивидуального задания и результат его выполнения.
4. Краткие выводы по результатам выполнения лабораторной работы.

Контрольные вопросы

1. Какова цель лабораторной работы?
2. Каково содержание программы лабораторной работы?
3. Какова область применения дискретных сигналов в современных системах электрической связи?
4. Какой сигнал называется меандром? Каковы особенности его амплитудного спектра?
5. Какими параметрами характеризуется меандр, как модулирующий сигнал?
6. Что такое скорость телеграфирования? В каких единицах она измеряется?
7. Что такое частота манипуляции? В каких единицах она измеряется?
8. Какова область применения сигналов АТ?
9. Как выглядит амплитудный спектр сигнала АТ?
10. Чему равна ширина занимаемой полосы частот для сигнала АТ?
11. Что такое «ширина занимаемой полосы» в соответствии с регламентом радиосвязи?

12. Какова область применения сигналов ЧТ?
13. Как выглядит амплитудный спектр сигнала ЧТ?

14. Чему равна ширина занимаемой полосы частот для сигнала ЧТ?

15. Как определить среднюю частоту, разнос частот и девиацию частоты для сигнала ЧТ?

16. Какова область применения сигналов ФТ?

17. Как выглядит амплитудный спектр сигнала ФТ?

18. Чему равна ширина занимаемой полосы частот для сигнала ФТ?

19. Каковы достоинства и недостатки сигналов ФТ?

20. В чем заключается сущность относительной фазовой телеграфии (ОФТ)? Кто и когда еѐ предложил?

21. Чем отличаются спектры сигналов ФТ и ОФТ?

22. Какие функции Mathcad используются в лабораторной работе?

23. Какие выводы можно сделать по результатам выполнения индивидуального задания?

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

1. Кологривов, В. А. Прикладные математические методы в радиотехнике. В 2-х частях: учебное пособие / В. А. Кологривов. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. - Ч. 1. – Аналоговые системы. – 159 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=209003

2. Умняшкин, С. В. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов: учебное пособие / С. В. Умняшкин. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Техносфера, 2012. – 368 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233733

3. Каганов В.И., Битюков В.К. Основы радиоэлектроники и связи: учебное пособие. – М.: Горячая линия - Телеком, 2012. – 542 с. http://www.iprbookshop.ru/12017

4. Акулиничев, Ю. П. Теория и техника передачи информации: учебное пособие / Ю. П. Акулиничев, А. С. Бернгардт. – Томск: Томский

государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. – 209 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=208952

Лабораторная работа 8

Исследование широкополосных шумоподобных сигналов

Цель работы: – приобретение навыков исследования широкополосных шумоподобных сигналов.

Формируемые компетенции или их части

ОПК-2	Способность корректно применять при решении профессиональных задач соответствующий математический аппарат алгебры, геометрии, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей, математической статистики, математической логики, теории алгоритмов, теории информации, в том числе с использованием вычислительной техники.
ОПК-3	Способность применять языки, системы и инструментальные средства программирования в профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

В современных СЭС находят применение широкополосные шумоподобные сигналы. У таких сигналов база B_S , т. е. произведение длительности сигнала T_S на ширину (или эффективную ширину) его спектра единицы ΔF_S , гораздо больше

$$B_S = T_S \cdot \Delta F_S >> 1. \quad (8.1)$$

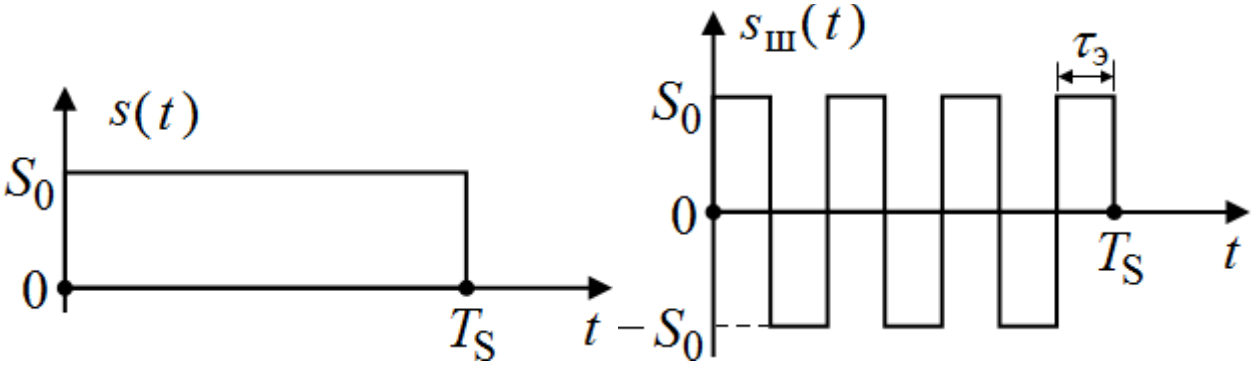
По этой причине ШШС относят к классу «сложных» сигналов. Напомним, что у «простых» сигналов база имеет порядок единицы.

В качестве иллюстрации понятий «узкополосности» и «широкополосности» сигналов на рисунке 8.1 представлены временные диаграммы узкополосного $s(t)$ и широкополосного $s_Ш(t)$ импульсных сигналов одинаковой длительности T_S . Сигнал $s(t)$ представляет прямоугольный импульс высотой S_0 длительности T_S , а сигнал $s_Ш(t)$ – отрезок меандра с высотой импульсов S_0 и

длительностью элементарного импульса $\tau_э$, причем в рассматриваемом случае, отношение

$$N = T_S \tau_э = 7 \quad (8.2)$$

является целым числом.



а) *б*)

Рисунок 8.1 – Временные диаграммы узкополосного и широкополосного сигналов: *а*) узкополосный сигнал; *б*) широкополосный сигнал

На основе ранее изученного материала известно, что эффективная ширина спектра одиночного прямоугольного импульса длительностью составляет: T_S, с,

$$\Delta F_S \approx 1/T_S \text{ Гц}, \quad (8.3)$$

т. е. база у этого сигнала $B_S = T_S \cdot \Delta F_S \approx 1$ и он является «узкополосным».

Аналогично, эффективная ширина спектра отрезка меандра с длительностью элементарного импульса τ, с, составляет:

$$\Delta F_{SШ} \approx 1/\tau_э \text{ Гц}. \quad (8.4)$$

Из формулы (8.2) следует, что

$$\tau_э = T_S N \text{ с}. \quad (8.5)$$

Подставив (8.5) в (8.4) имеем

$$\Delta F_{SШ} \approx 1/\tau_э = N/T_S = N\Delta F_S \text{ Гц}, \quad (8.6)$$

т. е., если выполняется условие (8.2) эффективная ширина спектра отрезка меандра с длительностью элементарного импульса $\tau_э$ прямоугольного импульса длительности T_S.

в N раз больше, чем у

Сравнивая между собой соотношения (8.3) и (8.6) приходим к выводу, что база «широкополосного» сигнала (рисунок 8.1 *б*) в N раз больше базы «узкополосного» сигнала (рисунок 8.1 *а*).

При создании ШШС решалась задача синтеза сигналов, которые обладали бы свойствами случайного процесса. В соответствии с этими требованиями ШШС должны быть похожи на типовую модель помехи «белый» шум, т. е. такие сигналы должны иметь равномерный спектр в широкой полосе частот и

корреляционную функцию близкую по форме в к дельта функции $\delta(\tau)$.

Основой для формирования подобных ШШС являются так называемые псевдослучайные последовательности (ПСП).

Математической основой формирования ПСП являются линейные рекуррентные последовательности (ЛРП). Двоичные ЛРП максимального периода также называют М-последовательностями . Формируются М- последовательностями многотактными линейными фильтрами в виде *n* регистров сдвига с обратной

связью. Для формирования М-последовательности с периодом $N = 2^n - 1$ необходимо использовать *n* регистров сдвига.

Структура обратных связей регистра определяются неприводимым, примитивным многочленом степени *n*.

Схема генератора ПСП, построенного на основе неприводимого, примитивного

многочлена $G(x) = x^3 + x^2 + 1$, генерирующего М-последовательность периода

(длины) $N = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$, представлена на рисунке 8.2.

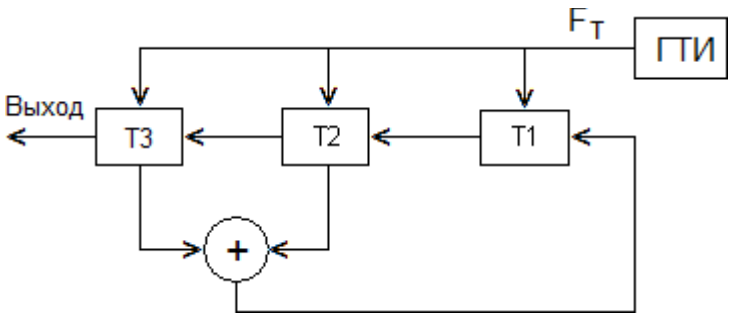


Рисунок 8.2 – Схема генератора ПСП, построенного на основе многочлена

$$G(x) = x^3 + x^2 + 1$$

Генератор ПСП (рисунок 8.2) включает в себя генератор тактовых импульсов (ГТИ) с частотой $F_Т$, три регистра сдвига Т1, Т2 и Т3, а также сумматор по

модулю два, формирующего результат согласно следующим правилам: 1⊕1 = 0

, 1⊕ 0 = 1, 0 ⊕1 = 1 и 0 ⊕ 0 = 0 .

Работа указанного генератора ПСП подробно рассматривалась на лекции «Широкополосные шумоподобные сигналы», поэтому напомним только основные моменты, с ней связанные.

Начальные *n* символов М-последовательности определяются исходным состоянием ячеек регистров сдвига Т1, Т2 и Т3. М-последовательность может генерироваться из любого исходного состояния регистра сдвига Т1, Т2 и Т3, отличного от всех нулей.

Повторно отметим, что комбинация из *n* нулей является запрещенной т. к. при возникновении такой комбинации генератор ПСП далее будет вырабатывать только нули.

При поступлении с выхода ГТИ на тактовый вход регистров сдвига Т1, Т2 и Т3 очередного тактового импульса состояния регистров сдвига Т1, Т2 и Т3 последовательно изменяется (на данной схеме справа налево). Причем, на вход регистра сдвига Т1 поступает сигнал, представляющий собой сумму по модулю два сигналов, снимаемых с выходов регистров Т2 и Т3.

М-последовательность (один период) наблюдаемая на входе регистра сдвига Т3, формируемая таким генератором ПСП (рисунок 8.2) из начального состояния регистров сдвига Т1 = 1, Т2 = 1 и Т3 = 1, имеет вид: 1 1 1 0 0 1 0.

Пошаговый порядок формирования указанной М-последовательности представлен в таблице 8.1.

Из таблицы 8.1 видно, что на восьмом такте состояние регистров сдвига Т1, Т2 и Т3 устанавливается в исходное состояние, соответствующее первому такту. Следовательно, длина М-последовательности действительно равна семи, а сама ПСП, снимаемая с выхода регистра сдвига Т3, состоит из нулей и единиц, следующих друг за другом в следующем порядке: 1 1 1 0 0 1 0.

Таблица 8.1 – Порядок формирования М-последовательности для генератора ПСП, представленного на рисунке 8.2

Номер такта	Состояние регистров сдвига			ПСП
	Т1	Т2	Т3	
1	1	1	1	1
2	0	1	1	1
3	0	0	1	1
4	1	0	0	0
5	0	1	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

Такие М-последовательности обладают следующими свойствами:

1) являются периодическими с периодом $N = 2^n - 1$ символов, где n – произвольное целое положительное число;

2) количество символов, принимающих значение единица, на длине одного периода М-последовательности равно 2^{n-1}, что на единицу больше, чем количество символов, принимающих значение нуль;

3) любые комбинации символов длины n на длине одного периода М-последовательности за исключением комбинации из n нулей встречаются не более одного раза. Комбинация из n нулей является запрещенной, на ее основе может генерироваться только последовательность из одних нулей;

4) сумма по модулю два любой М-последовательности с ее произвольным циклическим сдвигом также является М-последовательностью;

5) периодическая корреляционная функция (КФ) любой М-последовательности с учетом имеет постоянный уровень боковых лепестков, равный $(-1/N)$.

6) уровень максимальных боковых лепестков апериодической КФ примерно составляет $1/\sqrt{N}$.

Отметим, что разным разрешенным состояниям регистра соответствуют различные циклические сдвиги одной М-последовательности.

Количество различных М-последовательностей с периодом N равно отношению $\phi(n)/n$, где $\phi(n)$ – функция Эйлера, равная количеству чисел в ряду 1, 2,..., N – 1 взаимно простых с числом N.

Последовательности, периодические КФ которых имеют уровень максимальных боковых лепестков, равный $(-1/N)$, называются минимаксными. Таким образом, М-последовательности являются минимаксными последовательностями.

Примечание – Наряду с М-последовательностями к минимаксным относятся ПСП символов Лежандра, последовательности Якоби и Холла. Однако эти последовательности широкого применения в действующих системах электрической связи не нашли, поэтому ограничимся только их перечислением.

Как было показано в лекции «Широкополосные шумоподобные сигналы» ШШС можно получить, используя генератор ПСП в качестве генератора первичных сигналов, с последующей манипуляцией этим сигналом одного или нескольких параметров сигнала-переносчика. Ограничимся рассмотрением случая манипуляции фазы (ФМ) сигнала-переносчика по закону ПСП.

Для передачи информации ШШС необходимо использовать две ПСП, одна из которых сопоставляется нулевому биту «0», другая – единичному биту «1» передаваемой информации. Таким образом, для получения ШШС можно использовать:

1. Две различные по своей структуре ПСП;
2. Две реализации одной и той же ПСП, взятые со сдвигом во времени;
3. Две инверсные ПСП.

В дальнейшем для формирования ФМ ШШС будем использовать две инверсные ПСП. Если при помощи генератора ПСП (рисунок 8.2) была сформирована ПСП вида 1 1 1 0 0 1 0, то инверсная к ней ПСП выглядит так: 0
0 0 1 1 0 1.

На рисунке 8.3 представлены временные диаграммы, поясняющие порядок синтеза ШШС на основе модулирующего меандра с использованием двух инверсных ПСП.

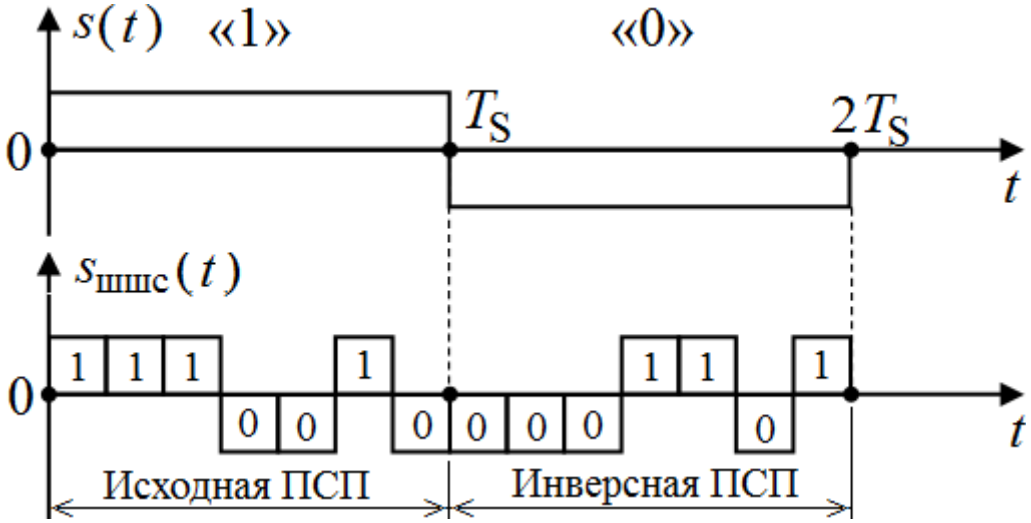


Рисунок 8.3 – Синтез ШШС с использованием двух инверсных ПСП

Как видно на рисунке 8.3, в пределах длительности T_S импульса меандра укладывается один период ПСП. Таким образом, длительность элементарного импульса $\tau_э$ ПСП может быть вычислена по формуле

$$\tau_{э} = \frac{T_S}{N} = \frac{T_S}{2^n - 1} \quad \text{с.} \tag{8.7}$$

Из выражения (8.7) следует, что период T ПСП, выраженный в единицах времени равен

$$T = \left(2^n - 1\right)\tau_э = N\tau_э \quad \text{с.} \tag{8.8}$$

На рисунке 8.4 представлены временные диаграммы, поясняющие порядок формирования ФМ ШШС для единичного бита «1» передаваемой информации. Как видно на рисунке 8.4 фаза ФМ ШШС меняется скачком на 180° (или π радиан) при переходе от передачи «1» к «0» в составе ПСП, образующей ШШС, и, наоборот.

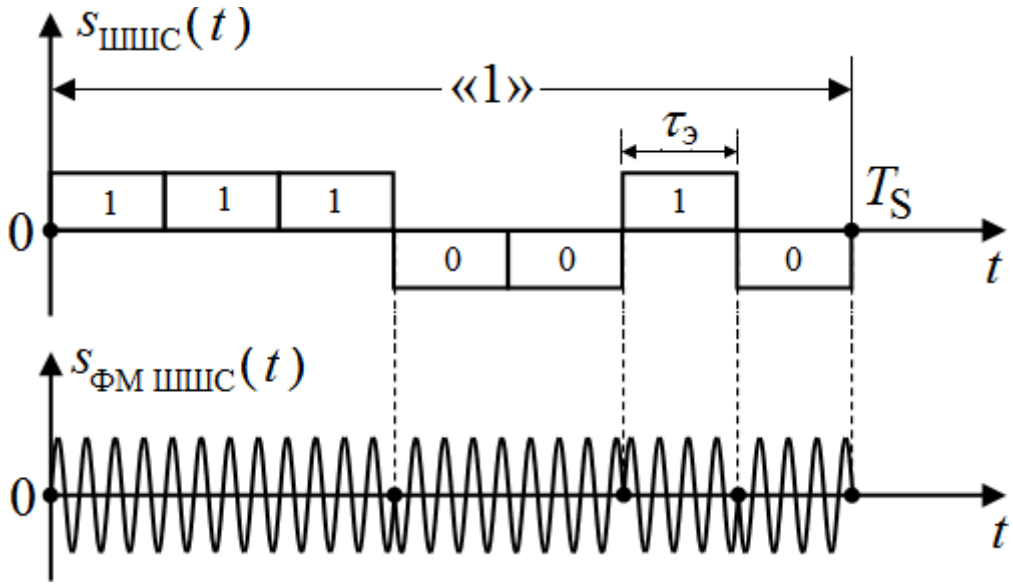


Рисунок 8.4 – Синтез ФМ ШШС для единичного бита «1» передаваемой информации

На рисунке 8.5 представлен амплитудный спектр ФМ ШШС. Как следует из рисунка 8.5, спектр ФМ ШШС содержит несущую частоту f_0 и ряд боковых составляющих $f_0 \pm kF_M$, $k = 1, 2, \ldots$, где $F_M = 1/(2T_э)$.

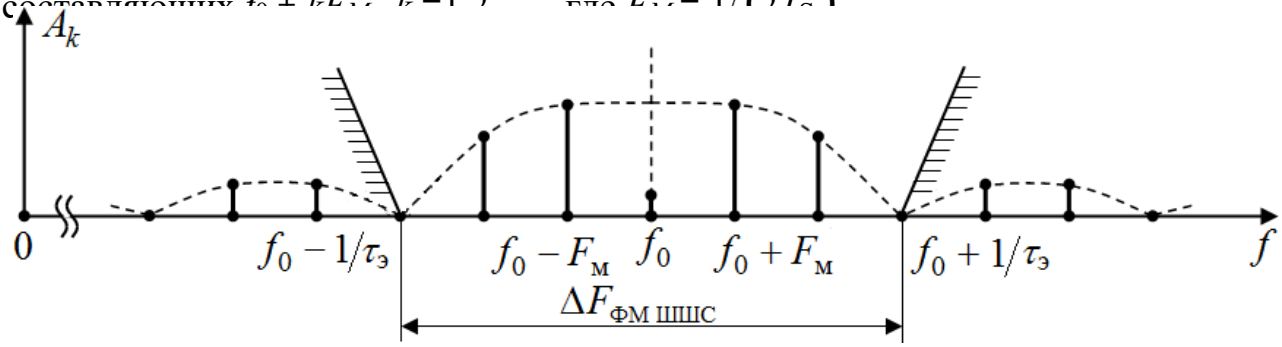


Рисунок 8.5 – Амплитудный спектр сигнала АТ

Занимаемая полоса частот спектра ФМ ШШС определяется выражением

$$\Delta F_{ФМ\ ШШС} \approx 2/\tau_э = 2N/T_S = 2N/(T_{СЛ}/2) = 4N/T_{СЛ} = 4NF_М \text{ Гц.} \quad (8.9)$$

Для рассмотренного ранее примера $N = 7$, поэтому, на основании формулы (8.7) имеем $\Delta F_{ФМ\ ШШС} \approx 4 \cdot 7F_М = 28F_М$, т. е. эффективная ширина спектра исследуемого ФМ ШШС в 28 раз больше, чем частота манипуляции F_M модулирующего меандра (рисунок 8.3).

Оборудование и материалы

Аппаратура. Для выполнения лабораторной работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов 256).

Программное обеспечение. Для выполнения лабораторной работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 13 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении лабораторной работы **запрещается**:

– самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;

– нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т. д.;

– принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Указания по порядку выполнения работы

Методику выполнения работы рассмотрим на примере экспериментального исследования ФМ ШШС, полученного путем фазовой манипуляции по закону ПСП. Рассмотрим пример формирования ПСП, исследуем еѐ корреляционную

функцию. Определим ширину спектра ФМ ШШС.

Считаем, что ФМ ШШС, модулирующий меандр и ПСП представляют электрическое напряжение, измеряемое в вольтах.

Заданы параметры:

– модулирующего меандра $s(t)$: частота манипуляции – 5 кГц, высота импульсов – 2 В;

– несущего сигнала ФМ ШШС $s_н(t)$: несущая частота f_0 = 140 кГц, амплитуда – 5 В;

– схема генератора ПСП должна быть построена на основе неприводимого, примитивного многочлена $G(x) = x^3 + x^2 + 1$;

– для передачи информации ФМ ШШС используются две инверсные ПСП;

– ФМ ШШС меняется скачком на 180° (или π радиан) при переходе от передачи «1» к «0» и, наоборот.

Требуется:

– рассчитать период следования $T_{СЛ}$ импульсов меандра, с;

– рассчитать длительность T_S импульсов меандра, с;

– рассчитать скорость телеграфирования ν_T , Бод;

– построить временную диаграмму модулирующего меандра $s(t)$;

– рассчитать и построить амплитудные и фазовые спектральные диаграммы модулирующего меандра $s(t)$, ограничившись количеством десяти (M = 10) гармоник равным

– убедится в корректности определения амплитудного и фазового

спектра модулирующего меандра $s(t)$. Для этого выполнить синтез модулирующего меандра $sM(t)$ по рассчитанным десяти гармоникам его Фурье-спектра, вычислить расстояние и квадрат расстояния между сигналами $sM(t)$ и $s(t)$ за период колебаний $T_{СЛ}$, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$;

– рассчитать период N для М-последовательности, формируемой генератором ПСП, построенным на основе заданного неприводимого, примитивного многочлена $G(x)$;

– реализовать математическую модель генератора ПСП (рисунок 8.2) и сформировать ПСП в форме кодовой последовательности нулей и единиц;

– рассчитать по формуле (8.7) длительность элементарного импульса $\tau_э$

ПСП исходя из найденных ранее длительности T_S периода ПСП; импульсов меандра и

– рассчитать по формуле (8.8) период ПСП, выраженный в единицах времени;

– преобразовать ПСП из формы кодовой последовательности нулей и единиц в сигнал ПСП(t), образованный из N биполярных прямоугольных импульсов длительностью$\tau_э$;

– рассчитать и построить периодическую корреляционную функцию $R(\tau)$ сигнала ПСП(t) в пределах двух периодов T. Убедится в том, что периодическая корреляционная функция сигнала ПСП(t) имеет постоянный уровень боковых лепестков, равный ($-1/N$);

– рассчитать и построить апериодическую корреляционную функцию сигнала ПСП(t). Убедится в том, что апериодическая корреляционная функция ПСП имеет уровень максимальных боковых лепестков, не превышающий по абсолютной величине уровень $1/\sqrt{N}$.

– на основе сигнала ПСП(t) сформировать посылку, соответствующую

одному периоду модулирующего меандра $s(t)$;

– задать несущий сигнал $s_{н}(t)$, используемый для передачи ФМ ШШС и построить его временную диаграмму;

– в пределах одного периода модулирующего меандра задать ФМ ШШС

$s_{ФМ_ШШС}(t)$ и построить его временную диаграмму;

– рассчитать и построить амплитудную спектральную диаграмму ФМ

ШШС 120;

$s_{ФМ_ШШС}(t)$, ограничившись количеством гармоник равным $M =$

– по формуле (8.7) вычислить ширину занимаемой полосы частот $\Delta F_{\text{ФМ ШШС}}$ исследуемого ФМ ШШС и сделать соответствующие выводы.

Рассмотрим решение поставленной задачи в математическом пакете Mathcad:

1. Запускаем Mathcad и создаем новый Mathcad-документ. Сохраняем его под именем Lab_8.xmcd.

2. Рассчитываем период следования $T_{СЛ}$ импульсов меандра, длительность T_S импульсов меандра, скорость телеграфирования ν_T (рисунок 8.6).

$$Tсл := \frac{1}{Fм} = 0.2 \qquad \text{Период следования, мс}$$

$$Ts := \frac{Tсл}{2} = 0.1 \qquad \text{Длительность, мс}$$

$$νт := \frac{1}{Ts} = 10 \qquad \text{Скорость телеграфирования, кБод}$$

Рисунок 8.6 – Считываем параметры меандра и скорость телеграфирования

3. Вводим определение модулирующего меандра и строим его временную диаграмму (рисунок 8.7).

$$S0 := 1 \qquad u(t) := S0 \cdot sign(2 \cdot sin(2 \cdot \pi Fм \cdot t))$$

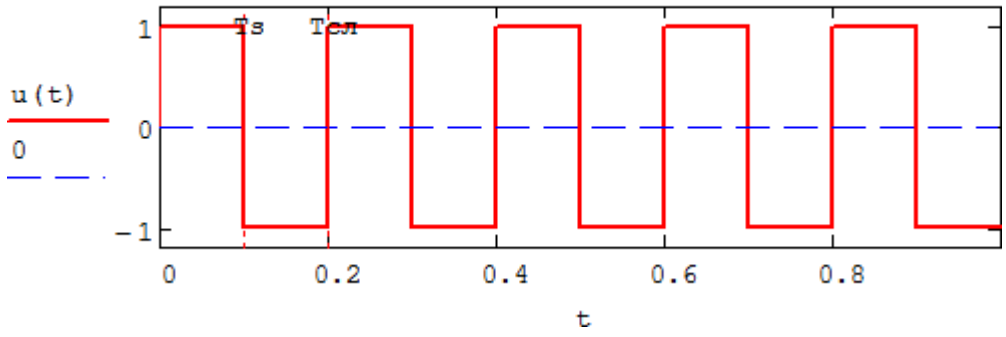


Рисунок 8.7 – Определение и график модулирующего меандра

4. Рассчитываем и строим амплитудные и фазовые спектральные диаграммы модулирующего меандра $s(t)$, ограничившись количеством гармоник равным десяти ($M = 10$) (рисунки 8.8 – 8.11).

$$M := 10 \qquad k := 0 \,..\, M$$

$$a_k := \frac{2}{Tсл} \cdot \int_0^{Tсл} s(t) \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi Fм \cdot t)\ dt$$

$$b_k := \frac{2}{Tсл} \cdot \int_0^{Tсл} s(t) \cdot \sin(k \cdot 2 \cdot \pi Fм \cdot t)\ dt$$

$a =$

	0
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0

$b =$

	0
0	0
1	1.2732
2	0
3	0.4244
4	0
5	0.2546
6	0
7	0.1819
8	0
9	0.1415
10	0

Рисунок 8.8 – Вычисляем коэффициент a_k и b_k k-той косинусной и синусной составляющей спектра Фурье модулирующего меандра

$$A_k := \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}$$

$$\varphi_k := \begin{cases} \operatorname{atan2}(a_k, b_k) & \text{if } |b_k| \geq 10^{-3} \\ 0 & \text{if } |b_k| < 10^{-3} \end{cases}$$

$A =$

	0
0	0
1	1.2732
2	0
3	0.4244
4	0
5	0.2546
6	0
7	0.1819
8	0
9	0.1415
10	0

$\varphi =$

	0
0	0
1	1.5708
2	0
3	1.5708
4	0
5	1.5708
6	0
7	1.5708
8	0
9	1.5708
10	0

Рисунок 8.9 – Амплитуды и начальные фазы гармоники спектра Фурье модулирующего меандра

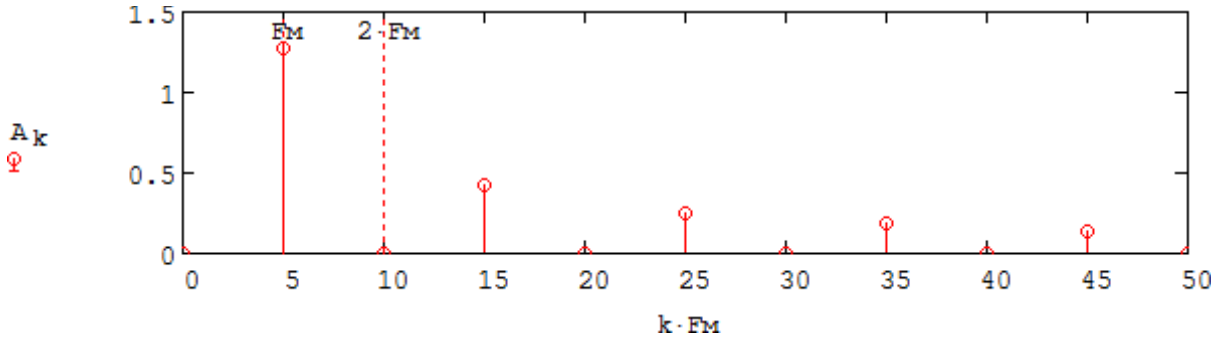


Рисунок 8.10 – Амплитудная спектральная диаграмма меандра

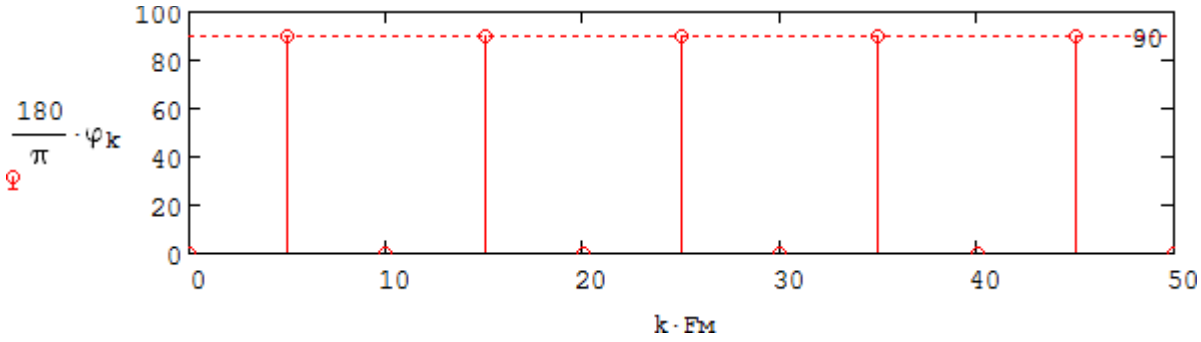


Рисунок 8.11 – Фазовая спектральная диаграмма меандра

Примечания:

– На рисунках 8.10 и 8.11 вдоль оси абсцисс отложена циклическая частота

k-й гармоники меандра, кГц;

– На рисунке 8.10 вдоль оси ординат отложена амплитуда *k*-й гармоники спектра Фурье меандра в вольтах.

– На рисунке 8.11 вдоль оси ординат отложена начальная фаза *k*-той гармоники спектра Фурье меандра в градусах.

16. Находим, восстановленный по усеченному ряду Фурье сигнал $sM(t)$,

являющийся приближенным изображением сигнала $s(t)$, и строим его временную диаграмму и временную диаграмму исходного меандра (рисунок

8.12).

$s(t)$

$$sM(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{M} \left(A_k \cdot \cos\left(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot Fм \cdot t - \varphi_k\right)\right)$$

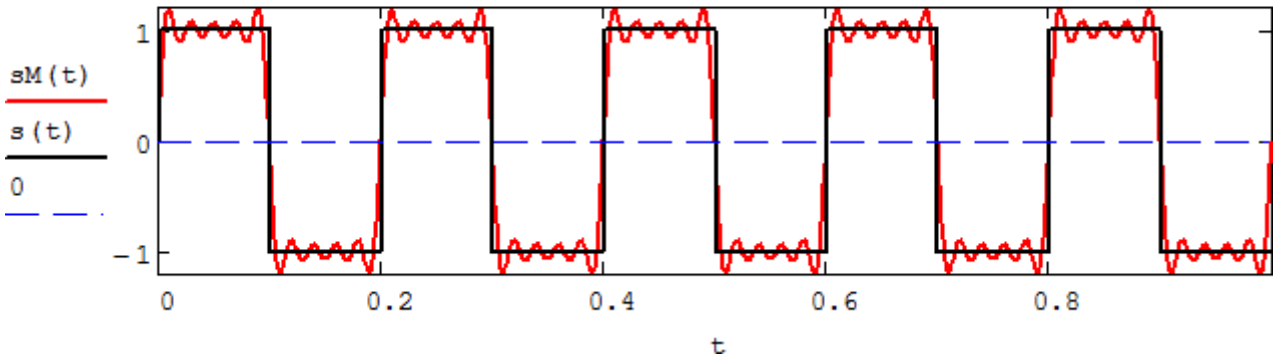


Рисунок 8.12 – Восстановленный по усеченному ряду Фурье сигнал $sM(t)$ и исходный модулирующий меандр $s(t)$

5. Вычисляем расстояние и квадрат расстояния между сигналами $sM(t)$ и $s(t)$ за период колебаний $T_{СЛ}$ (рисунок 8.13).

$$ds_sM := \sqrt{\int_0^{Tсл} (sM(t) - s(t))^2 \, dt} = 0.0899 \qquad ds_sM^2 = 8.079 \times 10^{-3}$$

Рисунок 8.13 – Определение расстояния и квадрата расстояния между сигналами $sM(t)$ и $s(t)$

6. Вычисляем квадрат расстояния между сигналами $sM(t)$ и $s(t)$ за период колебаний $T_{СЛ}$ (рисунок 8.14), выраженный в процентной мере относительно

$$Es := \int_0^{Tсл} s(t)^2 \, dt = 0.2 \qquad e2 := \frac{ds_sM^2}{Es} \cdot 100 = 4.0395$$

квадрата нормы сигнала $s(t)$.

Рисунок 8.14 – Квадрата расстояния между сигналами $sM(t)$ и $s(t)$, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$

Делаем вывод о том, что если ограничиться рассмотрением десяти гармоник спектра Фурье, то квадрат расстояния между сигналами $sM(t)$ и $s(t)$

составляет примерно 4% относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$, вычисленной за период колебаний $T_{СЛ}$.Таким образом, убеждаемся в корректности определения амплитудного и фазового спектра модулирующего меандра $s(t)$, что позволяет перейти к исследованию спектра ФМ ШШС.

7. Задаем системный параметр Mathcad ORIGIN равным единице для того, чтобы элементы векторов и матриц отсчитывались с единицы (рисунок 8.15).

$$ORIGIN := 1$$

Рисунок 8.15 – Задаем системный параметр ORIGIN

8. Задаем количество регистров сдвига (степень порождающего полинома) и определяем N – период М-последовательности (рисунок 8.16).

$$n := 3$$

$$N := 2^n - 1 = 7$$

Рисунок 8.16 – Задаем количество регистров сдвига и определяем N – период М-последовательности

9. Формируем ранжированные переменные k – для индексации элементов кодовой последовательности генератора ПСП и i – для индексации регистров сдвига T1, T2, T3 i = 1, 2 и 3 соответственно (рисунок 8.17).

$$k := 1 .. N$$

$$i := 1 .. n$$

Рисунок 8.17 – Формируем ранжированные переменные

10. Последовательные состояния регистра по тактам сдвига представим в виде матрицы T, каждая строка которой соответствует состоянию регистров сдвига T1, T2, T3 после очередного такта сдвига. Устанавливаем начальное состояние регистров сдвига T1 = 1, T2 = 1 и T3 = 1 и считываем первую строку матрицы T (рисунок 8.18).

$$T_{1,i} := 1$$

$$T = (1 \quad 1 \quad 1)$$

Рисунок 8.18 – Устанавливаем начальное состояние регистров сдвига

11. Формируем ранжированную переменную j для индексации последовательных состояний регистров сдвига по тактам ГТИ при представлении состояний регистров матрицей T, т. е. j – номер строки матрицы T (рисунок 8.19).

$$j := 1 \,..\, N - 1$$

Рисунок 8.19 – Формируем ранжированную переменную для индексации последовательных состояний регистров сдвига

12. Формируем состояние матрицы T после (j+1)-го такта ГТИ, учитывая при этом, что состояние регистра сдвига T1 равно сумме по модулю два состояний регистров сдвига T2 и T3, а состояния регистров сдвига T3 = T2 и T2 = T1 (сдвиг по регистру) (рисунок 8.20).

$$T_{j+1,i} := \begin{cases} \mathrm{mod}\left[\left(T_{j,2} + T_{j,3}\right), 2\right] & \text{if } i = 1 \\ T_{j,1} & \text{if } i = 2 \\ T_{j,2} & \text{if } i = 3 \end{cases}$$

Рисунок 8.20 – Формируем ранжированную переменную для индексации последовательных состояний регистров сдвига

13. Отображаем матрицу T (рисунок 8.21). Как видно из представленной матрицы состояния регистров сдвига последовательно по тактам по данному полиному G(x) принимают все возможные двоичные сочетания, кроме нулевого (0 0 0). Последовательность состояний регистров сдвига, снимаемого с любого регистра сдвига, является последовательностью максимальной длины – M-последовательностью.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок 8.21 – Матрица T, отображающая последовательные состояния регистров сдвига по тактам ГТИ

14. Выделяем третий столбец матрицы T, что соответствует выходу третьего регистра сдвига Т3, т. е. ПСП (рисунок 8.22).

$$ПСП := T^{\langle 3 \rangle}$$

$$ПСП^{T} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$$

Рисунок 8.22 – Выделяем третий столбец матрицы T, что соответствует выходу третьего регистра сдвига Т3

15. Определяем по формуле (8.7) длительность элементарного импульса $\tau_э$, мс, ПСП исходя из заданной частоты манипуляции модулирующего меандра и периода ПСП, рассчитываем по формуле (8.8) период ПСП T, мс, (рисунок 8.23).

$$тэ := \frac{Ts}{N} = 0.014 \quad T := N \cdot тэ = 0.1$$

Рисунок 8.23 – Определение длительности элементарного импульса τ ПСП

16. Преобразовываем ПСП из формы кодовой последовательности нулей и единиц в сигнал ПСП(*t*), образованный из *N* биполярных прямоугольных импульсов длительностью$\tau_э$ (рисунок 8.24). Для дальнейших расчетов задаем системный параметр Mathcad ORIGIN равным нулю, т. к. так удобнее будет рассчитывать корреляционную функцию ПСП.

$$ORIGIN := 0$$

$$k := 0 .. N - 1$$

$$Imp(t, k) := if(t \geq k \cdot тэ, 1, 0) \cdot if[t \geq (k+1) \cdot тэ, 0, 1]$$

$$ПСП_k := if(ПСП_k = 0, -1, 1)$$

$$ПСП^T = (1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1)$$

$$Uпсп(t) := \sum_k (ПСП_k \cdot Imp(t, k))$$

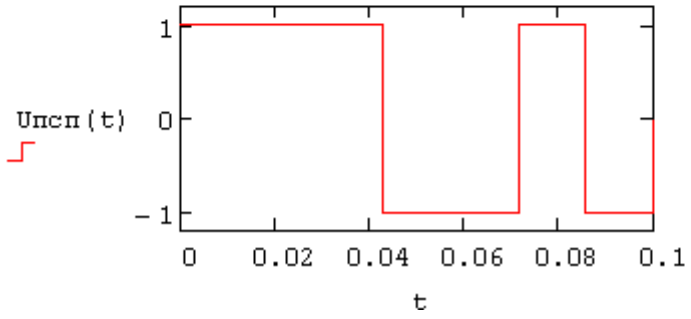


Рисунок 8.24 – Преобразовываем ПСП из формы кодовой последовательности нулей и единиц в сигнал ПСП(*t*)

17. Рассчитываем и строим периодическую корреляционную функцию ПСП:

17.1) формируем ранжированную переменную q для индексации сдвига в элементах ПСП при расчете и строении периодической корреляционной функции (рисунок 8.25);

$$q := 0 .. 2 \cdot N$$

Рисунок 8.25 – Формируем ранжированную переменную для индексации сдвига в элементах ПСП

17.2) формируем функцию циклического сдвига ПСП на q разрядов в пределах периода *N* (рисунок 8.26);

$$Shift(k, z) := mod(k + z, N)$$

Рисунок 8.26 – Формируем функцию циклического сдвига ПСП

17.3) рассчитываем периодическую корреляционную функцию ПСП (рисунок 8.27);

$$R_q := \sum_k \left(ПСП_k \cdot ПСП_{Shift(k,q)} \right)$$

Рисунок 8.27 – Рассчитываем периодическую корреляционную функцию ПСП

17.4) строим периодическую корреляционную функцию ПСП в пределах двух еѐ периодов (рисунок 8.28);

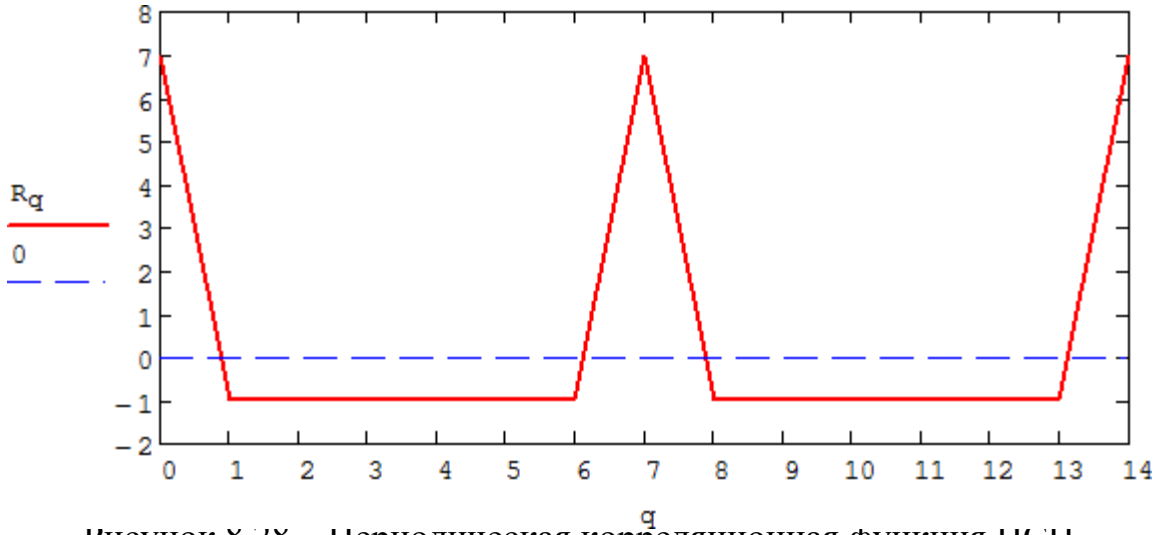


Рисунок 8.28 – Периодическая корреляционная функция ПСП

Примечание – На рисунке 8.28 вдоль горизонтальной оси отложен параметр $q = \tau / \tau_э$, где τ – аргумент $R(\tau)$, а $\tau_э$ – длительность корреляционной функции элемента ПСП.

17.5) находим максимальное и минимальное значение периодической корреляционной функции ПСП (рисунок 8.29);

$$\max(R) = 7 \qquad \min(R) = -1$$

Рисунок 8.29 – Рассчитываем периодическую корреляционную функцию ПСП

17.6) строим нормированную периодическую корреляционную функцию ПСП в пределах двух периодов (рисунок 8.30);

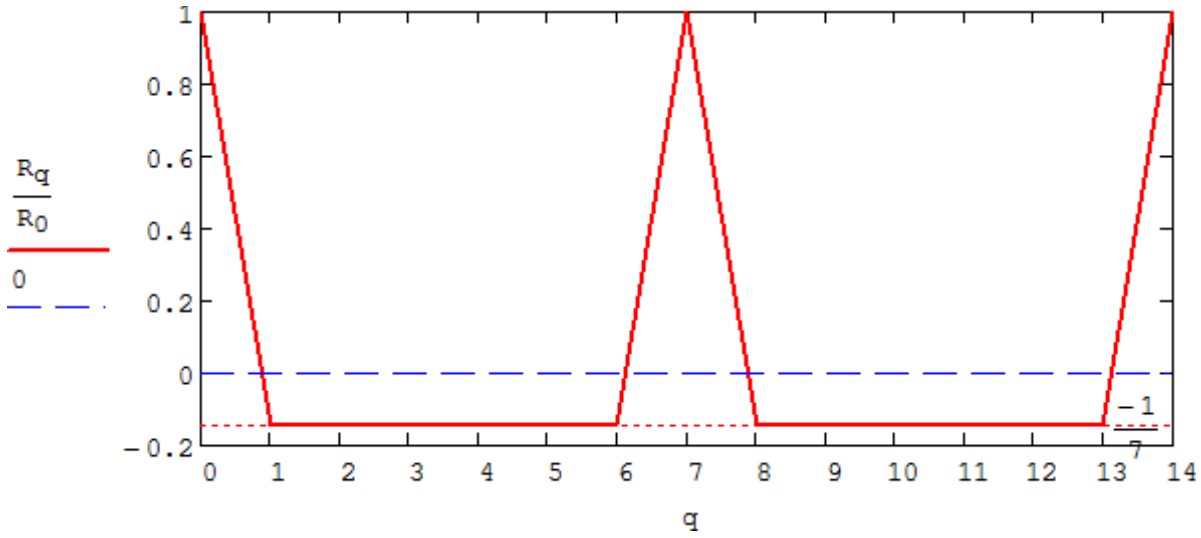


Рисунок 8.30 – Нормированная периодическая корреляционная функция ПСП

Периодическая корреляционная функция ПСП на рисунке 8.22 имеет постоянный уровень боковых лепестков, равный (–1/7), что подтверждает ранее рассмотренное (пятое) свойство М-последовательности, т. е. исследуемая ПСП является минимаксной.

18. Рассчитываем и строим апериодическую корреляционную функцию ПСП:

18.1) рассчитываем апериодическую корреляционную функцию ПСП (рисунок 8.31);

$$R_q := \sum_{k=0}^{N-1} \left(ПСП_k \cdot 0 \quad \text{on error} \quad ПСП_{k+q} \right)$$

Рисунок 8.31 – Рассчитываем апериодическую корреляционную функцию ПСП

Примечание – Оператор `on error` необходимо вводить, пользуясь панелью инструментов MathCAD «Programming».

18.2) строим апериодическую корреляционную функцию ПСП (рисунок 8.32);

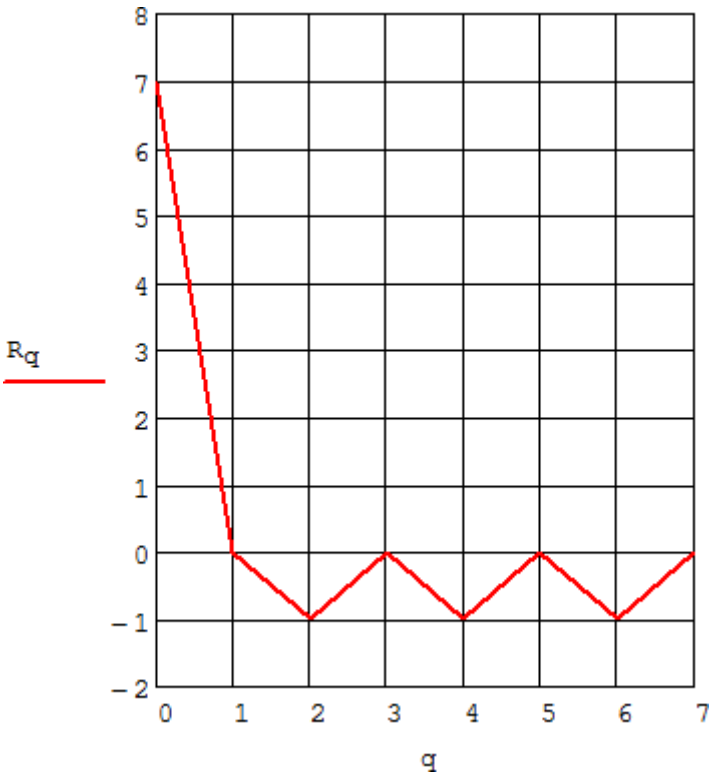


Рисунок 8.32 – Апериодическая корреляционная функция ПСП

18.3) строим нормированную апериодическую корреляционную функцию ПСП (рисунок 8.33);

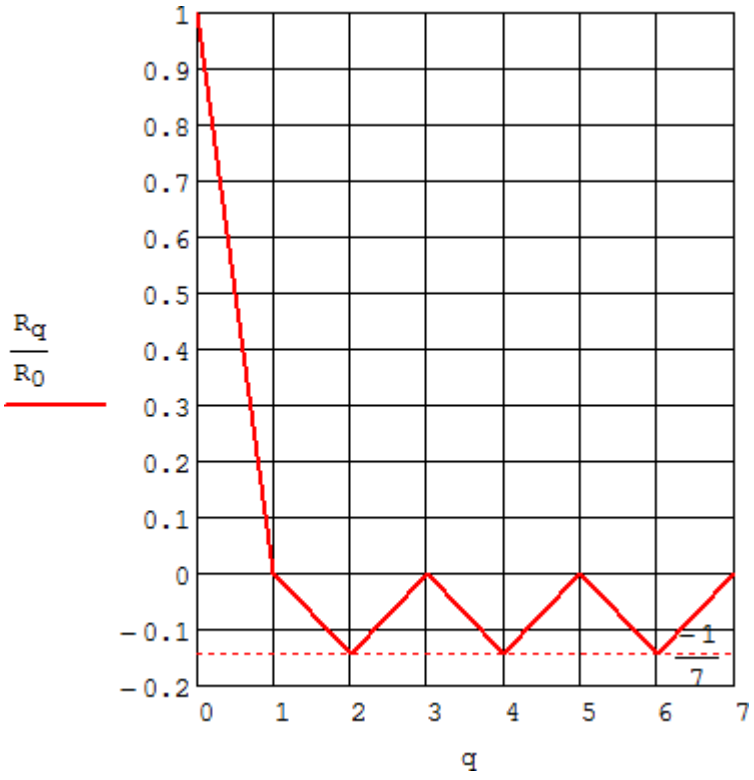


Рисунок 8.33 – Нормированная апериодическая корреляционная функция ПСП

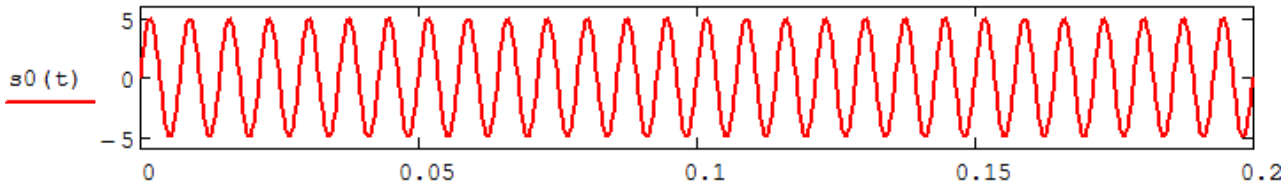
Как видно на рисунке 8.33, уровень максимальных боковых лепестков апериодической КФ примерно составляет 0,143, что меньше, чем теоретическая предельная оценка $1/\sqrt{\quad} \quad /\sqrt{\quad} = 1\ 7 = 0{,}378$.

19. Задаем несущий сигнал $s_н(t)$ и строим его временную диаграмму (рисунок 8.34).

f0 := 140 Несущая частота, кГц

S0 := 5 Амплитуда несущей, В

sн(t) := S0·sin(2·π·f0·t)



$s_н(t)$, временная диаграмма несущего сигнала используемого для передачи ФМ ШШС

20. В пределах одного периода модулирующего меандра задаем ФМ ШШС $s_{ФМ_ШШС}(t)$ и строим его временную диаграмму (рисунки 8.35 – 8.36).

20.1) задаем математическое определение с использованием двух инверсных ПСП и строим временную диаграмму ШШС в пределах одного периода модулирующего меандра (рисунок 8.35);

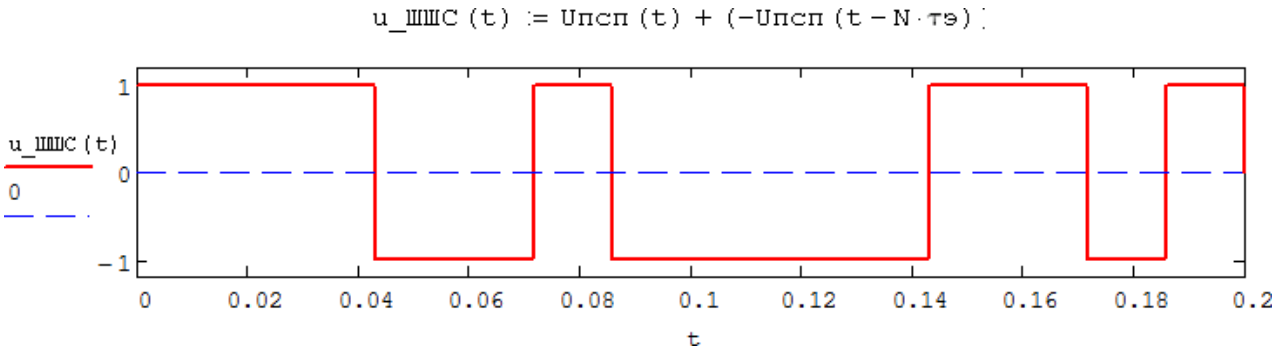


Рисунок 8.35 – Определение с использованием двух инверсных ПСП и временная диаграмма ШШС в пределах одного периода модулирующего меандра

20.2) задаем математическое определение и строим временную диаграмму ФМ ШШС в пределах одного периода модулирующего меандра (рисунок 8.36);

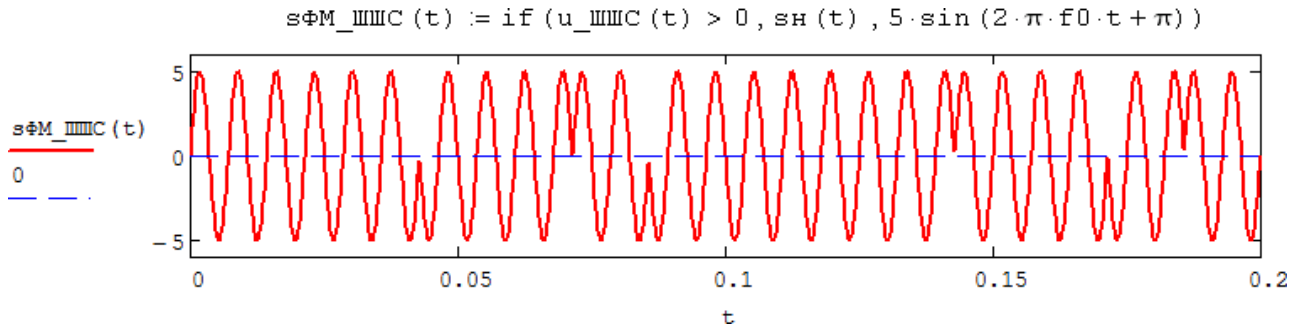


Рисунок 8.36 – Определение и временная диаграмма ФМ ШШС в пределах одного периода модулирующего меандра

21. Рассчитываем амплитудную спектральную диаграмму ФМ ШШС $sФМ_ШШС(t)$ (рисунок 8.37).

, ограничившись количеством гармоник равным $M = 120$

$$M := 120$$

$$k := 0 .. M$$

$$a_ФМ_ШШС_k := \frac{2}{Tсл} \cdot \int_0^{Tсл} sФМ_ШШС(t) \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi Fм \cdot t)\, dt$$

$$b_ФМ_ШШС_k := \frac{2}{Tсл} \cdot \int_0^{Tсл} sФМ_ШШС(t) \cdot \sin(k \cdot 2 \cdot \pi Fм \cdot t)\, dt$$

$$A_ФМ_ШШС_k := \sqrt{(a_ФМ_ШШС_k)^2 + (b_ФМ_ШШС_k)^2}$$

Рисунок 8.37 – Рассчитываем амплитудную спектральную диаграмму ФМ ШШС $sФМ_ШШС(t)$

22. Строим амплитудную спектральную диаграмму ФМ ШШС $sФМ_ШШС(t)$ (рисунок 8.38).

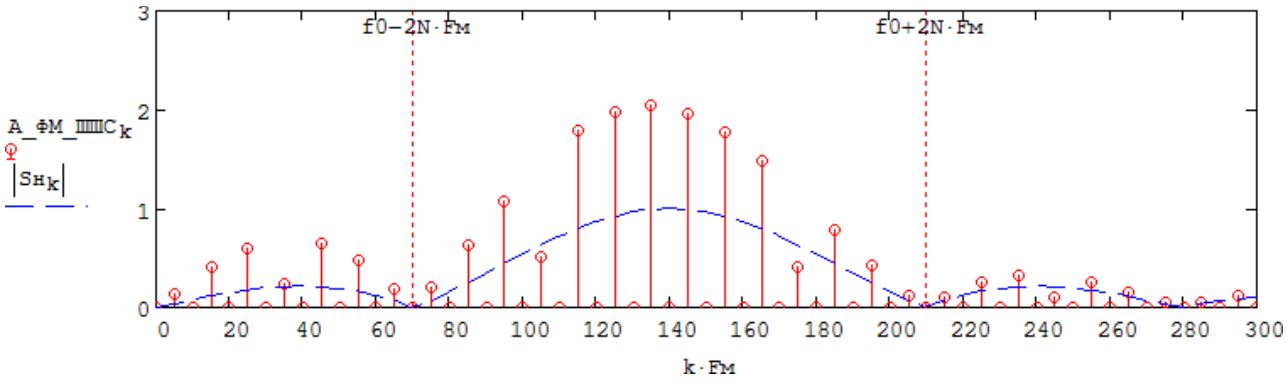


Рисунок 8.38 – Амплитудная спектральная диаграмма ФМ ШШС

$$sФМ_ШШС(t)$$

Примечание – На рисунке 8.38 пунктирной линией показан нормированный график огибающей одиночного прямоугольного радиоимпульса с частотой заполнения f_0 = 140 кГц, амплитудой 5В и длительностью $\tau_э$, совпадающей с длительность элементарного импульса ПСП. Значения огибающей этого одиночного прямоугольного радиоимпульса рассчитывались, как показано на рисунке (8.39).

$$S(f) := 5 \cdot тэ \cdot \frac{\sin[\pi \cdot (f - f0) \cdot тэ]}{[\pi \cdot (f - f0) \cdot тэ]} \qquad Sн(f) := \frac{\sin[\pi \cdot (f - f0) \cdot тэ]}{[\pi \cdot (f - f0) \cdot тэ]}$$

$$Sнk := Sн(k \cdot Fм)$$

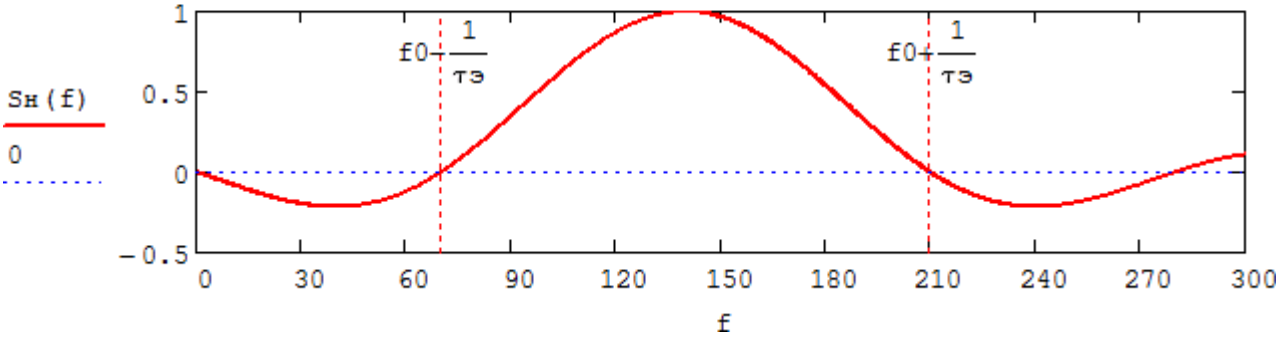


Рисунок 8.39 – Определение и спектральная диаграмма огибающей одиночного прямоугольного радиоимпульса

Из рисунка 8.39 следует, что первый лепесток огибающей одиночного

прямоугольного радиоимпульса с частотой заполнения f_0 = 140 кГц и длительностью $\tau_э$ = 0,014 мс занимает интервал частот от 70 до 210 кГц, т. е.

эффективная ширина спектра этого одиночного прямоугольного радиоимпульса составляет $\Delta f_э$ = 140 кГц.

23. По формуле (8.7) вычисляем ширину занимаемой полосы частот $\Delta F_{\text{ФМ ШШС}}$, Гц, исследуемого сигнала ФМ ШШС (рисунок 8.40).

$$\Delta F_{ФМ_ШШС} := 4 \cdot N \cdot Fм = 140$$

Рисунок 8.40 – Значение ширины занимаемой полосы частот $\Delta F_{\text{ФМ ШШС}}$

Как следует из рисунка 8.40, значение ширины занимаемой полосы частот исследуемого сигнала ФМ ШШС составляет 140 кГц. Таким образом, убеждаемся в том, что ширина занимаемой полосы частот исследуемого сигнала ФМ ШШС совпадает с эффективной шириной спектра этого одиночного прямоугольного радиоимпульса с частотой заполнения равной частоте несущей ФМ ШШС и длительностью – равной длительности элемента ПСП, используемой для формирования ФМ ШШС.

Порядок выполнения работы

1. Запустить Mathcad.
2. Требуется в программе Mathcad для заданного модулирующего меандра, несущего сигнала ФМ ШШС и неприводимого, примитивного многочлена

$G(x)$ в соответствии с вариантом индивидуального задания (таблицы 8.1 – 8.2):

– рассчитать период следования $T_{СЛ}$ импульсов меандра, с;

– рассчитать длительность T_S импульсов меандра, с;

– рассчитать скорость телеграфирования ν_T, Бод;

– построить временную диаграмму модулирующего меандра $s(t)$;

– рассчитать и построить амплитудные и фазовые спектральные диаграммы модулирующего меандра $s(t)$, ограничившись количеством гармоник равным десяти ($M = 10$);

– убедится в корректности определения амплитудного и фазового спектра модулирующего меандра $s(t)$. Для этого выполнить синтез модулирующего

меандра $sM(t)$ по рассчитанным десяти гармоникам его Фурье-спектра, вычислить расстояние и квадрат расстояния между сигналами $sM(t)$ и $s(t)$ за период колебаний $T_{СЛ}$, выраженный в процентной мере относительно квадрата нормы сигнала $s(t)$;

– рассчитать период N для М-последовательности, формируемой генератором ПСП, построенным на основе заданного неприводимого, примитивного многочлена $G(x)$;

– реализовать математическую модель генератора ПСП (рисунок 8.2) и сформировать ПСП в форме кодовой последовательности нулей и единиц;

– рассчитать по формуле (8.7) длительность элементарного импульса $\tau_э$ ПСП исходя из найденных ранее периода ПСП; длительности T_S импульсов меандра и

– рассчитать по формуле (8.8) период ПСП, выраженный в единицах времени;

– преобразовать ПСП из формы кодовой последовательности нулей и единиц в сигнал ПСП(t), образованный из N биполярных прямоугольных импульсов длительностью$\tau_э$;

– рассчитать и построить периодическую корреляционную

функцию $R(\tau)$ сигнала ПСП(t) в пределах двух периодов T. Убедится в том, что периодическая корреляционная функция сигнала ПСП(t) имеет постоянный уровень боковых лепестков, равный ($-1/N$);

– рассчитать и построить апериодическую корреляционную функцию сигнала ПСП(t). Убедится в том, что апериодическая корреляционная функция ПСП имеет уровень максимальных боковых лепестков, не превышающий по абсолютной величине уровень $1/\sqrt{N}$.

– на основе сигнала ПСП(t) сформировать посылку, соответствующую одному периоду модулирующего меандра $s(t)$;

– задать несущий сигнал $s_{\text{н}}(t)$, используемый для передачи ФМ ШШС и построить его временную диаграмму, считая, что: 1) для передачи информации ФМ ШШС используются две инверсные ПСП; 2) ФМ ШШС меняется скачком на 180° (или π радиан) при переходе от передачи «1» к «0» и, наоборот;

– в пределах одного периода модулирующего меандра задать ФМ ШШС $sФМ_ШШС(t)$ и построить его временную диаграмму в пределах одного периода модулирующего меандра;

– рассчитать и построить амплитудную спектральную диаграмму ФМ ШШС $sФМ_ШШС(t)$, ограничившись количеством гармоник равным $M = 120$;

– рассчитать и построить нормированный график огибающей одиночного прямоугольного радиоимпульса с частотой заполнения f_0, кГц, и длительностью $\tau_э$, совпадающей с длительность элементарного импульса ПСП;

– по формуле (8.7) вычислить ширину занимаемой полосы частот $\Delta F_{\text{ФМ ШШС}}$ исследуемого ФМ ШШС и сделать соответствующие выводы.

3. Сохранить результаты исследования дискретных сигналов и их характеристик.
4. Сформировать отчет по лабораторной работе.
5. Защитить работу.

Варианты заданий

Номер варианта (таблицы 8.1 – 8.3) соответствует номеру фамилии студента в

списке учебной группы (подгруппы).

Таблица 8.1 – Варианты частоты манипуляции и высоты импульсов модулирующего меандра

Вариант	Частота манипуляции Fм, кГц	Высота импульсов S_0, В	Вариант	Частота манипуляции Fм, кГц	Высота импульсов S_0, В
1	2,5	2	4	3	2
2	5	2	5	2	2
3	4	2	6	6	2

Таблица 8.2 – Варианты параметров несущего сигнала ФМ ШШС

Вариант	Несущая частота f_0, кГц	Амплитуда $S_{н0}$, В	Вариант	Несущая частота f_0, кГц	Амплитуда $S_{н0}$, В
1	105	5	4	126	5
2	140	5	5	84	5
3	112	5	6	168	5

Таблица 8.3 – Варианты неприводимого, примитивного многочлена $G(x)$ и начальное состояние регистров сдвига генератора ПСП

Вариант	$G(x)$	Начальное состояние регистров сдвига			Вариант	$G(x)$	Начальное состояние регистров сдвига		
		Т1	Т2	Т3			Т1	Т2	Т3
1	$x^3 + x + 1$	0	0	1	4	$x^3 + x + 1$	1	1	0
2	$x^3 + x + 1$	0	1	0	5	$x^3 + x + 1$	1	0	1

3	$x^3 + x + 1$	1	0	0	6	$x^3 + x + 1$	1	1	1

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе оформляется в виде документа Word и должен включать:

1. Название лабораторной работы.
2. Цель лабораторной работы.
3. Формулировку индивидуального задания и результат его выполнения.
4. Краткие выводы по результатам выполнения лабораторной работы.

Контрольные вопросы

1. Какова цель лабораторной работы?
2. Какова программа лабораторной работы?
3. Какой сигнал называется «узкополосным» («широкополосным»)?

Приведите примеры.

4. Какой сигнал называется «сложным»? Приведите примеры.
5. Каким требованиям должен удовлетворять ШШС?
6. Что такое псевдослучайная последовательность (ПСП)?
7. Как связаны между собой ПСП и М-последовательности?
8. Как формируются М-последовательности? Как определить еѐ период?
9. Как выглядит и работает схема генератора ПСП, построенная на основе

неприводимого, примитивного многочлена $G(x) = x^3 + x^2 + 1$?

10. Как формулируются правила сложения двоичных чисел по модулю два?
11. Какими свойствами обладают М-последовательности?
12. Какие ПСП называются минимаксными?
13. Продолжите фразу «Для получения ШШС можно использовать …».
14. Как выглядят временные диаграммы, поясняющие порядок синтеза ШШС на основе модулирующего меандра?
15. Как выглядят временные диаграммы, поясняющие порядок формирования ФМ ШШС для единичного бита «1» передаваемой информации?
16. Какова область применения сигналов ФМ ШШС?
17. Как выглядит амплитудный спектр ФМ ШШС?
18. Чему равна ширина занимаемой полосы частот для ФМ ШШС?
19. Какие функции Mathcad используются в лабораторной работе?
20. Как было выполнено индивидуальное задание?
21. Какие выводы можно сделать по результатам выполнения индивидуального задания?

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

1. Кологривов, В. А. Прикладные математические методы в радиотехнике. В 2-х частях: учебное пособие / В. А. Кологривов. – Томск: Томский

государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. - Ч. 1. – Аналоговые системы. – 159 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=209003

2. Умняшкин, С. В. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов: учебное пособие / С. В. Умняшкин. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Техносфера, 2012. – 368 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233733

3. Каганов В.И., Битюков В.К. Основы радиоэлектроники и связи: учебное пособие. – М.: Горячая линия - Телеком, 2012. – 542 с. http://www.iprbookshop.ru/12017

4. Богомолов, С. И. Введение в системы радиосвязи и радиодоступа: учебное пособие / С.И. Богомолов; Министерство образования и науки Российской Федерации, Томский Государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники (ТУСУР). – Томск: Эль Контент, 2012. – 152 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=208609

5. Вадутов О.С. Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / Вадутов О.С. – Томск: Томский политехнический университет, 2014. – 102 с. http://www.iprbookshop.ru/34676

6. Масалов, Е.В. Радиотехнические системы: учебное пособие / Е.В. Масалов. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. – Ч. 1. – 109 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=208715

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению самостоятельных работ
по дисциплине
«Математические методы теории сигналов»
для студентов
для студентов специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем
Специализация «Разработка автоматизированных систем в защищенном исполнении»

2026

Самостоятельная работа №1. Исследование характеристик сигналов при их векторном представлении

Цель работы: изучить особенности векторного представления сигналов, освоить основные понятия сигнального пространства и научиться анализировать характеристики сигналов с использованием геометрической интерпретации.

Теоретическая часть

Одним из важных направлений современной теории сигналов является представление сигналов в виде математических объектов, удобных для анализа и обработки. Среди различных подходов особое место занимает векторное представление сигналов. Данный метод основан на использовании понятий линейной алгебры и позволяет исследовать свойства сигналов с помощью геометрических методов.

При векторном представлении сигнал рассматривается как элемент некоторого пространства. Каждому сигналу соответствует определённый вектор, положение которого определяется набором числовых параметров. Благодаря этому становится возможным сравнивать различные сигналы, оценивать степень их сходства и различия, а также анализировать процессы передачи и обработки информации.

Основой данного подхода является понятие сигнального пространства. Под сигнальным пространством понимают множество сигналов, которые могут быть представлены в выбранной системе координат. Каждый сигнал имеет свои координаты, определяемые коэффициентами разложения по специальным функциям, называемым базисными. Базис задаёт структуру пространства и обеспечивает возможность однозначного представления сигналов.

Важное значение имеет понятие ортогональности. Если два сигнала являются ортогональными, то они не оказывают взаимного влияния друг на друга при обработке. Это свойство широко используется в современных системах связи, где требуется передавать несколько потоков информации одновременно без возникновения взаимных помех.

При исследовании сигналов большое внимание уделяется таким характеристикам, как энергия и расстояние между сигналами. Энергия позволяет оценивать интенсивность сигнала и его способность выделяться на фоне шумов. Расстояние между сигналами характеризует степень их различия и определяет вероятность правильного распознавания при передаче через канал связи.

Геометрическая интерпретация сигналов предоставляет наглядные средства анализа. Сигналы могут изображаться в виде точек или векторов в многомерном пространстве. Расположение этих точек позволяет оценивать свойства системы связи, определять устойчивость к помехам и выбирать оптимальные способы кодирования информации.

Методы векторного представления широко используются в цифровой связи, радиотехнике, телекоммуникациях и системах обработки сигналов. Они лежат в основе многих алгоритмов обнаружения, распознавания и классификации сигналов. Благодаря универсальности данного подхода становится возможным исследование сложных процессов с использованием сравнительно простых математических моделей.

Практическая часть

В ходе выполнения работы студенту необходимо изучить основные положения теории векторного представления сигналов и ознакомиться с особенностями построения сигнального пространства. На основании изученного материала следует рассмотреть характеристики сигналов, представленных в различных формах, и определить особенности их геометрической интерпретации.

Далее необходимо выполнить анализ объекта исследования, предусмотренного индивидуальным вариантом задания. Следует определить основные характеристики рассматриваемого сигнала, установить его положение в сигнальном пространстве и оценить влияние выбранного способа представления на удобство анализа и обработки информации.

По завершении исследования необходимо сформулировать выводы о преимуществах и особенностях векторного представления сигналов, а также определить области практического применения данного подхода в современных системах связи и обработки информации.

Варианты заданий

Вариант №1. Исследовать понятие сигнального пространства и его основные свойства.

Вариант №2. Рассмотреть особенности представления сигнала в виде вектора.

Вариант №3. Изучить назначение базисных функций при описании сигналов.

Вариант №4. Проанализировать понятие координат сигнала в пространстве.

Вариант №5. Исследовать процесс разложения сигнала по базисным функциям.

Вариант №6. Рассмотреть понятие ортогональности сигналов.

Вариант №7. Изучить энергетические характеристики сигналов.

Вариант №8. Исследовать способы определения расстояния между сигналами.

Вариант №9. Проанализировать взаимосвязь между расстоянием и вероятностью ошибок.

Вариант №10. Рассмотреть применение сигнального пространства в цифровой

связи.

Вариант №11. Изучить методы сравнения сигналов при их векторном представлении.

Вариант №12. Исследовать геометрическую интерпретацию сигналов.

Вариант №13. Рассмотреть использование ортогональных сигналов в системах связи.

Вариант №14. Проанализировать применение векторных методов в радиотехнике.

Вариант №15. Исследовать влияние энергии сигнала на его обнаружение.

Вариант №16. Рассмотреть особенности многомерных пространств сигналов.

Вариант №17. Изучить методы классификации сигналов.

Вариант №18. Исследовать представление цифровых символов в сигнальном пространстве.

Вариант №19. Рассмотреть использование векторных моделей в обработке сигналов.

Вариант №20. Выполнить сравнительный анализ характеристик сигналов при их векторном представлении.

Контрольные вопросы

1. Что называется сигналом?
2. В чём заключается векторное представление сигнала?
3. Что такое сигнальное пространство?
4. Для чего используются базисные функции?
5. Что называется координатами сигнала?
6. Что понимается под ортогональностью сигналов?
7. Почему ортогональные сигналы важны для систем связи?
8. Что характеризует энергия сигнала?
9. Что показывает расстояние между сигналами?
10. Для чего используется геометрическая интерпретация сигналов?
11. Какие преимущества имеет векторное представление сигналов?
12. Где применяется сигнальное пространство?
13. Как осуществляется сравнение сигналов?
14. Что влияет на вероятность распознавания сигналов?
15. Какие задачи решаются с помощью сигнального пространства?
16. Что такое многомерное пространство сигналов?
17. Как используется векторное представление в цифровой связи?
18. В чём состоит роль базиса пространства?
19. Какие характеристики сигналов исследуются при векторном анализе?

20. Почему векторное представление является эффективным методом исследования сигналов?

Самостоятельная работа №2. Исследование спектрального анализа и синтеза периодических сигналов

Цель работы: изучить принципы спектрального анализа периодических сигналов, освоить методы определения их спектрального состава и исследовать особенности синтеза сигналов по известным спектральным характеристикам.

Теоретическая часть

В теории сигналов большое значение имеет исследование частотного состава различных процессов. Многие реальные сигналы обладают сложной формой, поэтому их непосредственный анализ во временной области может быть затруднён. Для решения данной задачи применяется спектральный анализ, позволяющий исследовать сигнал через совокупность его гармонических составляющих.

Периодическими называют сигналы, значения которых повторяются через равные промежутки времени. Такие сигналы широко используются в радиотехнике, телекоммуникациях, системах передачи данных и устройствах обработки информации. Примерами периодических сигналов являются синусоидальные колебания, сигналы генераторов и различные формы электрических импульсов.

Спектральный анализ основан на представлении сложного периодического сигнала как совокупности гармонических составляющих различных частот. Каждая гармоника характеризуется собственной амплитудой, частотой и фазой. Совокупность этих параметров образует спектр сигнала.

Спектр позволяет определить распределение энергии сигнала по частотам. Анализ спектрального состава играет важную роль при проектировании систем связи, поскольку позволяет оценивать необходимую полосу пропускания каналов передачи информации и выбирать оптимальные методы обработки сигналов.

Одним из основных преимуществ спектрального анализа является возможность исследования сигналов независимо от их временной формы. Даже очень сложный периодический сигнал может быть описан через набор более простых гармонических компонентов. Такой подход значительно облегчает решение инженерных задач.

Обратной задачей является спектральный синтез. Он заключается в восстановлении сигнала по известному набору спектральных составляющих. Если известны амплитуды, частоты и фазы гармоник, то можно сформировать исходный сигнал с высокой точностью. Спектральный синтез широко применяется при моделировании сигналов и разработке современных средств связи.

Исследование спектров позволяет выявлять особенности сигналов, оценивать наличие искажений, определять влияние шумов и помех, а также анализировать характеристики технических систем. Спектральные методы лежат в основе многих современных технологий цифровой обработки информации.

Практическая часть

В ходе выполнения работы студенту необходимо изучить основные положения спектральной теории периодических сигналов и ознакомиться с принципами представления сложных сигналов в виде совокупности гармонических составляющих. Особое внимание следует уделить взаимосвязи между временной формой сигнала и его спектральным составом.

На основании полученного варианта задания необходимо выполнить анализ спектральных характеристик рассматриваемого сигнала, определить особенности распределения его частотных составляющих и оценить влияние спектра на свойства сигнала при передаче через канал связи.

По результатам проведённого исследования необходимо сформулировать выводы о возможностях спектрального анализа и синтеза периодических сигналов, а также определить значение данных методов для современных систем обработки и передачи информации.

Варианты заданий

Вариант №1. Исследовать понятие спектра периодического сигнала.

Вариант №2. Рассмотреть основные характеристики гармонических составляющих сигнала.

Вариант №3. Изучить взаимосвязь между периодом сигнала и его спектром.

Вариант №4. Проанализировать распределение энергии по спектру сигнала.

Вариант №5. Исследовать особенности спектра синусоидального сигнала.

Вариант №6. Рассмотреть спектральный состав прямоугольного сигнала.

Вариант №7. Изучить спектральные характеристики треугольного сигнала.

Вариант №8. Проанализировать спектр пилообразного сигнала.

Вариант №9. Исследовать влияние формы сигнала на его спектральный состав.

Вариант №10. Рассмотреть назначение спектрального анализа в радиотехнике.

Вариант №11. Изучить применение спектрального анализа в телекоммуникациях.

Вариант №12. Исследовать роль гармоник в формировании сложных сигналов.

Вариант №13. Рассмотреть особенности спектрального синтеза сигналов.

Вариант №14. Проанализировать методы восстановления сигналов по спектру.

Вариант №15. Исследовать влияние высших гармоник на форму сигнала.

Вариант №16. Рассмотреть применение спектральных методов в цифровой обработке сигналов.

Вариант №17. Изучить влияние спектрального состава на передачу информации.

Вариант №18. Исследовать значение спектрального анализа для систем связи.

Вариант №19. Рассмотреть способы анализа периодических сигналов.

Вариант №20. Выполнить сравнительный анализ спектрального анализа и спектрального синтеза сигналов.

Контрольные вопросы

1. Что называется периодическим сигналом?
2. Что такое спектр сигнала?
3. Для чего применяется спектральный анализ?
4. Что называется гармонической составляющей?
5. Какие параметры характеризуют гармонику?
6. Что показывает спектр сигнала?
7. Почему спектральный анализ удобен для исследования сигналов?
8. Что такое спектральный синтез?
9. В чём заключается восстановление сигнала по спектру?
10. Как связан спектр сигнала с его временной формой?
11. Для чего используется спектральный анализ в системах связи?
12. Как распределяется энергия сигнала по спектру?
13. Какие сигналы относятся к периодическим?
14. Почему важны высшие гармоники?
15. Как влияет спектральный состав на передачу информации?
16. Какие преимущества имеют спектральные методы исследования?
17. Где применяются методы спектрального анализа?
18. Какие задачи решаются с помощью спектрального синтеза?
19. Почему исследование спектра важно для радиотехники?
20. Каково значение спектрального анализа в современных системах обработки сигналов?

Самостоятельная работа №3. Исследование спектрального анализа и синтеза

сигналов на основе преобразования Фурье

Цель работы: изучить принципы спектрального анализа сигналов на основе преобразования Фурье, освоить особенности представления сигналов в частотной области и исследовать возможности восстановления сигналов по их спектральным характеристикам.

Теоретическая часть

Одним из важнейших методов исследования сигналов является преобразование Фурье. Данный математический аппарат позволяет перейти от временного описания сигнала к его частотному представлению. Такой подход широко используется в радиотехнике, телекоммуникациях, цифровой обработке сигналов и многих других областях науки и техники.

Любой сигнал содержит определённый набор частотных составляющих. Во временной области эти составляющие могут быть скрыты сложной формой сигнала, однако после применения преобразования Фурье становится возможным определить их состав и количественные характеристики. В результате анализа формируется спектр сигнала, отражающий распределение его энергии по частотам.

Преобразование Фурье является универсальным инструментом исследования как периодических, так и непериодических сигналов. Если для периодических процессов спектральный анализ позволяет определить набор гармоник, то для непериодических сигналов он позволяет получить непрерывное распределение частотных составляющих. Благодаря этому появляется возможность анализировать широкий круг технических и физических процессов.

Спектральное представление сигналов играет важную роль при проектировании систем передачи информации. Частотный состав сигнала определяет требования к полосе пропускания канала связи, влияет на устойчивость к помехам и определяет эффективность использования ресурсов системы передачи данных.

Особое значение имеет взаимосвязь между временными и частотными характеристиками сигналов. Изменение параметров сигнала во временной области приводит к соответствующим изменениям его спектра. Понимание этой взаимосвязи необходимо для решения задач фильтрации, модуляции, кодирования и восстановления информации.

На практике преобразование Фурье используется при анализе радиосигналов, обработке звуковой информации, исследовании изображений, диагностике технических систем и контроле качества передачи данных. Современные вычислительные средства позволяют выполнять спектральный анализ больших объёмов информации за короткое время, что делает данный метод одним из основных инструментов цифровой обработки сигналов.

Практическая часть

В ходе выполнения работы студенту необходимо изучить особенности применения преобразования Фурье для анализа сигналов и ознакомиться с принципами перехода от временного описания сигнала к частотному представлению. Следует рассмотреть основные характеристики спектра и определить их влияние на свойства исследуемого сигнала.

На основании индивидуального варианта задания необходимо провести анализ заданного сигнала, исследовать особенности его спектрального состава и установить взаимосвязь между временными и частотными характеристиками. Особое внимание следует уделить практическому значению спектрального анализа для решения задач обработки информации.

По результатам исследования необходимо сформулировать выводы о возможностях преобразования Фурье при анализе и синтезе сигналов, а также определить основные преимущества использования данного метода в современных технических системах.

Варианты заданий

Вариант №1. Исследовать назначение преобразования Фурье в теории сигналов.

Вариант №2. Рассмотреть особенности представления сигналов в частотной области.

Вариант №3. Изучить понятие спектра непериодического сигнала.

Вариант №4. Проанализировать взаимосвязь временной и частотной областей.

Вариант №5. Исследовать распределение энергии сигнала в спектральной области.

Вариант №6. Рассмотреть применение преобразования Фурье в радиотехнике.

Вариант №7. Изучить использование спектрального анализа в телекоммуникациях.

Вариант №8. Проанализировать особенности спектра коротких сигналов.

Вариант №9. Исследовать влияние длительности сигнала на его спектр.

Вариант №10. Рассмотреть применение спектральных методов в цифровой обработке сигналов.

Вариант №11. Изучить особенности анализа широкополосных сигналов.

Вариант №12. Проанализировать методы восстановления сигналов по спектру.

Вариант №13. Исследовать применение преобразования Фурье при фильтрации сигналов.

Вариант №14. Рассмотреть использование преобразования Фурье в системах передачи данных.

Вариант №15. Изучить влияние частотного состава на свойства сигнала.

Вариант №16. Проанализировать применение спектрального анализа в системах связи.

Вариант №17. Исследовать возможности обработки сигналов в частотной области.

Вариант №18. Рассмотреть особенности спектрального синтеза сигналов.

Вариант №19. Изучить роль преобразования Фурье в современных технологиях обработки информации.

Вариант №20. Выполнить сравнительный анализ временного и частотного представления сигналов.

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой преобразование Фурье?
2. Для чего используется преобразование Фурье?
3. Что называется спектром сигнала?
4. Чем отличается временное представление сигнала от частотного?
5. Какие сигналы можно исследовать с помощью преобразования Фурье?
6. Что показывает спектр непериодического сигнала?
7. Почему частотный анализ важен для систем связи?
8. Как связаны временные и частотные характеристики сигнала?
9. Для чего применяется спектральный анализ?
10. Что называется спектральным синтезом?
11. Как осуществляется восстановление сигнала по спектру?
12. Где используется преобразование Фурье на практике?
13. Как влияет длительность сигнала на его спектр?
14. Для чего применяется спектральный анализ в цифровой обработке сигналов?
15. Какова роль спектральных методов в телекоммуникациях?
16. Какие преимущества имеет частотное представление сигналов?
17. Почему важно исследовать спектральный состав сигналов?
18. Как преобразование Фурье используется при фильтрации сигналов?
19. Какие задачи решаются с помощью преобразования Фурье?
20. Каково значение преобразования Фурье для современных информационных технологий?

Самостоятельная работа №4. Исследование корреляционных характеристик сигналов

Цель работы: изучить корреляционные характеристики сигналов, освоить методы анализа взаимосвязи сигналов и исследовать возможности применения корреляционных методов в системах обработки информации.

Теоретическая часть

При исследовании сигналов важное значение имеет анализ степени их сходства и взаимосвязи. Для решения подобных задач используются корреляционные методы, позволяющие оценивать зависимость между различными сигналами или между отдельными участками одного и того же сигнала. Корреляционный анализ широко применяется в радиотехнике, связи, радиолокации и цифровой обработке информации.

Корреляция представляет собой меру сходства сигналов при различных временных смещениях. Если сигналы имеют близкую структуру и изменяются согласованно, значение корреляции оказывается высоким. В случае отсутствия взаимосвязи корреляционные характеристики принимают малые значения.

Особое значение имеет автокорреляционная функция. Она используется для исследования внутренних свойств сигнала и позволяет определить степень сходства сигнала с собственной копией при различных временных сдвигах. Автокорреляционный анализ применяется для обнаружения периодичности, оценки длительности сигналов и выявления скрытых закономерностей в их структуре.

Для сравнения различных сигналов используется взаимная корреляция. Она позволяет определить степень сходства двух сигналов и установить наличие между ними определённой зависимости. Данный метод широко применяется в системах синхронизации, обнаружения и распознавания сигналов.

Корреляционные характеристики играют важную роль при работе в условиях помех. Даже при значительном уровне шумов корреляционный анализ позволяет обнаруживать полезные сигналы и определять их параметры. Благодаря этому корреляционные методы активно используются в радиолокационных и

навигационных системах.

Исследование корреляционных характеристик позволяет получать важную информацию о свойствах сигналов без необходимости детального анализа их структуры. Это делает корреляционный подход эффективным инструментом обработки информации в современных технических системах.

Практическая часть

В ходе выполнения работы студенту необходимо изучить основные принципы корреляционного анализа сигналов и ознакомиться с особенностями определения автокорреляционных и взаимных корреляционных характеристик. Следует рассмотреть роль корреляционных методов при исследовании сигналов различной природы.

На основании индивидуального варианта задания необходимо выполнить анализ заданного объекта исследования, определить особенности его корреляционных свойств и установить возможности практического применения рассматриваемых методов. Особое внимание следует уделить использованию корреляционного анализа для обнаружения и распознавания сигналов.

По результатам проведённого исследования необходимо сформулировать выводы о значении корреляционных характеристик при анализе сигналов и оценить эффективность применения корреляционных методов в современных системах связи и обработки информации.

Варианты заданий

Вариант №1. Исследовать понятие корреляции сигналов.

Вариант №2. Рассмотреть назначение корреляционного анализа.

Вариант №3. Изучить особенности автокорреляционных характеристик сигналов.

Вариант №4. Проанализировать свойства взаимной корреляции сигналов.

Вариант №5. Исследовать роль корреляции при обнаружении сигналов.

Вариант №6. Рассмотреть применение корреляционных методов в радиотехнике.

Вариант №7. Изучить использование корреляционного анализа в телекоммуникациях.

Вариант №8. Проанализировать корреляционные свойства периодических сигналов.

Вариант №9. Исследовать корреляционные характеристики случайных сигналов.

Вариант №10. Рассмотреть применение корреляционных методов в радиолокации.

Вариант №11. Изучить возможности обнаружения сигналов на фоне шумов.

Вариант №12. Проанализировать использование корреляции для синхронизации сигналов.

Вариант №13. Исследовать особенности автокорреляционного анализа.

Вариант №14. Рассмотреть применение взаимной корреляции в системах связи.

Вариант №15. Изучить влияние шумов на корреляционные характеристики сигналов.

Вариант №16. Проанализировать использование корреляционных методов в цифровой обработке сигналов.

Вариант №17. Исследовать способы сравнения сигналов с помощью корреляции.

Вариант №18. Рассмотреть значение корреляционного анализа для навигационных систем.

Вариант №19. Изучить применение корреляционных характеристик в задачах распознавания сигналов.

Вариант №20. Выполнить сравнительный анализ автокорреляционных и взаимных корреляционных характеристик.

Контрольные вопросы

1. Что называется корреляцией сигналов?
2. Для чего используется корреляционный анализ?
3. Что показывает корреляционная характеристика сигнала?
4. Что представляет собой автокорреляционная функция?
5. Для чего применяется автокорреляционный анализ?
6. Что называется взаимной корреляцией?
7. В чём различие между автокорреляцией и взаимной корреляцией?
8. Как корреляция используется при обнаружении сигналов?
9. Почему корреляционные методы эффективны при наличии шумов?
10. Где применяются корреляционные методы анализа?
11. Как используется корреляция в радиолокации?
12. Для чего применяется корреляция в системах связи?
13. Как корреляционный анализ помогает при синхронизации сигналов?
14. Какие свойства сигналов можно определить с помощью корреляции?
15. Почему корреляционные характеристики важны при обработке информации?
16. Как связаны корреляционные свойства и структура сигнала?
17. Какие преимущества имеет корреляционный анализ?
18. Как используются корреляционные методы в навигационных системах?
19. Какие задачи решаются с помощью взаимной корреляции?
20. Каково значение корреляционного анализа в современной теории сигналов?

Самостоятельная работа №5. Исследование амплитудной модуляции и детектирования АМ-сигналов

Цель работы: изучить принципы амплитудной модуляции, освоить особенности формирования АМ-сигналов и исследовать методы их детектирования в системах связи.

Теоретическая часть

Амплитудная модуляция является одним из базовых способов передачи информации в радиотехнических и телекоммуникационных системах. Суть метода заключается в изменении амплитуды высокочастотного несущего колебания в соответствии с передаваемым информационным сигналом. При этом частота и фаза несущего сигнала остаются неизменными.

АМ-сигналы широко применяются в радиовещании, системах радиосвязи и различных устройствах передачи данных. Их основное преимущество заключается в относительной простоте формирования и обработки, что делает данный вид модуляции одним из первых, используемых в инженерной практике.

Процесс амплитудной модуляции позволяет «перенести» низкочастотный информационный сигнал в область высоких частот, где он может эффективно передаваться по радиоканалу. В результате формируется сложный сигнал, спектр которого содержит несущую частоту и боковые полосы, отражающие структуру исходного сообщения.

Детектирование АМ-сигналов представляет собой процесс обратного преобразования, при котором из модулированного сигнала выделяется исходная информация. На практике используются различные методы детектирования, включая амплитудное и синхронное детектирование.

Амплитудный детектор позволяет восстановить огибающую сигнала, которая соответствует передаваемому сообщению. Синхронное детектирование обеспечивает более высокую точность восстановления, особенно при наличии помех и искажений в канале связи.

Важным аспектом исследования АМ-сигналов является анализ их устойчивости к шумам и помехам. Несмотря на простоту реализации, амплитудная модуляция обладает сравнительно низкой помехоустойчивостью по сравнению с другими видами модуляции, что ограничивает её применение в современных высокоскоростных системах связи.

Тем не менее, АМ остаётся важным учебным и базовым методом, позволяющим понять принципы формирования и обработки модулированных сигналов.

Практическая часть

В ходе выполнения работы студенту необходимо изучить принципы формирования амплитудно-модулированных сигналов и ознакомиться с основными методами их детектирования. Следует рассмотреть структуру АМ-сигнала и определить влияние параметров модуляции на его характеристики.

На основании индивидуального варианта задания необходимо выполнить анализ заданного сигнала, исследовать особенности его спектра и определить влияние амплитудной модуляции на форму сигнала. Также необходимо рассмотреть процесс восстановления исходного сообщения при помощи методов детектирования.

По результатам исследования следует сформулировать выводы о свойствах амплитудной модуляции, её достоинствах и ограничениях, а также оценить эффективность методов детектирования в различных условиях передачи информации.

Варианты заданий

Вариант №1. Исследовать принцип формирования амплитудно-модулированного сигнала.

Вариант №2. Рассмотреть структуру АМ-сигнала и его основные параметры.

Вариант №3. Изучить влияние коэффициента модуляции на форму сигнала.

Вариант №4. Проанализировать спектральный состав АМ-сигнала.

Вариант №5. Исследовать роль несущей частоты в процессе модуляции.

Вариант №6. Рассмотреть особенности боковых полос АМ-сигнала.

Вариант №7. Изучить процесс детектирования амплитудно-модулированных

сигналов.

Вариант №8. Проанализировать работу амплитудного детектора.

Вариант №9. Исследовать особенности синхронного детектирования.

Вариант №10. Рассмотреть влияние шумов на АМ-сигналы.

Вариант №11. Изучить устойчивость АМ-сигналов к помехам.

Вариант №12. Проанализировать восстановление сигнала после детектирования.

Вариант №13. Исследовать применение амплитудной модуляции в радиосвязи.

Вариант №14. Рассмотреть использование АМ-сигналов в радиовещании.

Вариант №15. Изучить ограничения амплитудной модуляции.

Вариант №16. Проанализировать эффективность различных методов детектирования.

Вариант №17. Исследовать влияние искажений канала связи на АМ-сигналы.

Вариант №18. Рассмотреть особенности передачи информации с использованием АМ.

Вариант №19. Изучить спектральные характеристики модулированных сигналов.

Вариант №20. Выполнить сравнительный анализ амплитудной модуляции и других видов модуляции.

Контрольные вопросы

1. Что называется амплитудной модуляцией?
2. В чём заключается принцип АМ?
3. Что представляет собой несущая частота?
4. Что такое модулирующий сигнал?
5. Как формируется АМ-сигнал?

6. Что входит в спектр АМ-сигнала?
7. Что такое боковые полосы?
8. Для чего используется амплитудная модуляция?
9. Какие методы детектирования существуют?
10. В чём заключается амплитудное детектирование?
11. Что такое синхронное детектирование?
12. Как восстанавливается исходный сигнал?
13. Как влияет коэффициент модуляции на сигнал?
14. Почему АМ имеет ограниченную помехоустойчивость?
15. Где применяется амплитудная модуляция?
16. Какие преимущества имеет АМ?
17. Какие недостатки у амплитудной модуляции?
18. Как шум влияет на АМ-сигналы?
19. Как изменяется спектр при модуляции?
20. В чём значение амплитудной модуляции в системах связи?

Самостоятельная работа №6. Исследование частотно-модулированных радиосигналов

Цель работы: изучить принципы частотной модуляции, освоить особенности формирования ЧМ-сигналов и исследовать их свойства в современных системах передачи информации.

Теоретическая часть

Частотная модуляция представляет собой способ передачи информации, при котором изменяется частота несущего колебания в соответствии с модулирующим сигналом. В отличие от амплитудной модуляции, амплитуда несущей остаётся постоянной, что обеспечивает более высокую устойчивость к шумам и помехам.

ЧМ-сигналы широко применяются в радиовещании, мобильной связи, системах телеметрии и различных радиотехнических устройствах. Их основным

преимуществом является высокая помехоустойчивость, что делает данный вид модуляции предпочтительным для передачи информации в сложных условиях.

При частотной модуляции изменение частоты несущего сигнала происходит непрерывно в соответствии с изменением информационного сигнала. Это приводит к образованию сложного спектра, содержащего множество боковых составляющих.

Анализ ЧМ-сигналов показывает, что их спектральная структура значительно сложнее по сравнению с амплитудной модуляцией. Ширина спектра зависит от амплитуды модулирующего сигнала и индекса частотной модуляции.

Детектирование частотно-модулированных сигналов осуществляется с использованием специальных демодуляторов, преобразующих изменения частоты в изменения напряжения или тока. В результате восстанавливается исходный информационный сигнал.

Частотная модуляция обладает высокой устойчивостью к амплитудным помехам, что делает её эффективной в условиях сильных шумов. Однако для её реализации требуется более сложное оборудование по сравнению с амплитудной модуляцией.

Практическая часть

В ходе выполнения работы студенту необходимо изучить принципы формирования частотно-модулированных сигналов и ознакомиться с методами их демодуляции. Следует рассмотреть основные параметры ЧМ-сигналов и определить влияние индекса модуляции на их характеристики.

На основании индивидуального варианта задания необходимо выполнить анализ заданного сигнала, исследовать его спектральные особенности и оценить устойчивость к помехам. Также необходимо рассмотреть процесс восстановления исходного сигнала при демодуляции.

По результатам исследования следует сформулировать выводы о преимуществах и недостатках частотной модуляции, а также определить области её практического

применения.

Варианты заданий

Вариант №1. Исследовать принцип частотной модуляции.

Вариант №2. Рассмотреть структуру ЧМ-сигнала.

Вариант №3. Изучить влияние индекса модуляции на сигнал.

Вариант №4. Проанализировать спектр частотно-модулированного сигнала.

Вариант №5. Исследовать особенности девиации частоты.

Вариант №6. Рассмотреть методы демодуляции ЧМ-сигналов.

Вариант №7. Изучить применение ЧМ в радиосвязи.

Вариант №8. Проанализировать устойчивость ЧМ-сигналов к шумам.

Вариант №9. Исследовать спектральную ширину ЧМ-сигнала.

Вариант №10. Рассмотреть влияние параметров модуляции на качество передачи.

Вариант №11. Изучить особенности формирования боковых составляющих ЧМ.

Вариант №12. Проанализировать методы восстановления сигнала после ЧМ.

Вариант №13. Исследовать применение частотной модуляции в телекоммуникациях.

Вариант №14. Рассмотреть использование ЧМ в радиовещании.

Вариант №15. Изучить преимущества частотной модуляции.

Вариант №16. Проанализировать недостатки ЧМ-сигналов.

Вариант №17. Исследовать влияние шумов на ЧМ-сигналы.

Вариант №18. Рассмотреть спектральные характеристики ЧМ.

Вариант №19. Изучить роль частотной модуляции в современных системах связи.

Вариант №20. Выполнить сравнительный анализ частотной и амплитудной модуляции.

Контрольные вопросы

1. Что такое частотная модуляция?
2. В чём заключается принцип ЧМ?
3. Чем ЧМ отличается от АМ?
4. Что такое девиация частоты?
5. От чего зависит спектр ЧМ-сигнала?
6. Какие преимущества имеет ЧМ?
7. Почему ЧМ более помехоустойчива, чем АМ?
8. Как формируется ЧМ-сигнал?
9. Что влияет на ширину спектра ЧМ?
10. Какие методы демодуляции используются?
11. Как восстанавливается сигнал при ЧМ?
12. Где применяется частотная модуляция?
13. Какие недостатки у ЧМ?
14. Как шум влияет на ЧМ-сигналы?
15. Что такое индекс модуляции?
16. Как изменяется частота при ЧМ?
17. В чём отличие узкополосной и широкополосной ЧМ?
18. Какие параметры определяют качество передачи?
19. Почему ЧМ используется в радиовещании?
20. Каково значение частотной модуляции в современных системах связи?

Самостоятельная работа №7. Исследование дискретных сигналов и их характеристик

Цель работы: изучить основные свойства дискретных сигналов, освоить методы их описания и анализа, а также исследовать особенности обработки дискретных сигналов в цифровых системах.

Теоретическая часть

Дискретные сигналы представляют собой сигналы, определённые только в отдельные моменты времени. В отличие от непрерывных сигналов, которые задаются на всём временном интервале, дискретные сигналы описываются последовательностью значений. Такой подход лежит в основе цифровой обработки информации и широко применяется в современных системах связи, вычислительной технике и автоматизированных системах управления.

Переход к дискретным сигналам осуществляется путём дискретизации непрерывных процессов. При этом важную роль играет выбор интервала дискретизации, который определяет точность представления исходного сигнала. Чем меньше шаг дискретизации, тем точнее дискретный сигнал отражает исходный непрерывный процесс.

Дискретные сигналы обладают рядом характеристик, которые используются при их анализе. К ним относятся амплитудные значения, временная структура, частотный состав и энергетические показатели. Эти характеристики позволяют описывать поведение сигнала и оценивать его пригодность для передачи и обработки информации.

Особое значение имеет понятие квантования, которое связано с округлением значений сигнала до конечного набора уровней. Квантование является важным этапом цифрового представления сигналов и напрямую влияет на точность восстановления исходного сигнала.

В цифровых системах дискретные сигналы подвергаются различным видам обработки, включая фильтрацию, преобразование и кодирование. Такие операции позволяют эффективно передавать и хранить информацию, а также снижать влияние

шумов и помех.

Дискретные сигналы являются основой работы всех современных цифровых устройств. Их анализ позволяет разрабатывать эффективные алгоритмы обработки информации и улучшать характеристики систем связи.

Практическая часть

В ходе выполнения работы студенту необходимо изучить особенности дискретных сигналов и рассмотреть их основные характеристики. Следует проанализировать процесс дискретизации и квантования, а также оценить влияние этих процедур на точность представления сигнала.

На основании индивидуального варианта задания необходимо выполнить анализ заданного дискретного сигнала, определить его основные параметры и исследовать особенности его поведения в цифровых системах. Особое внимание следует уделить влиянию шага дискретизации на качество сигнала.

По результатам исследования необходимо сформулировать выводы о свойствах дискретных сигналов и их роли в современных цифровых системах обработки информации.

Варианты заданий

Вариант №1. Исследовать понятие дискретного сигнала.

Вариант №2. Рассмотреть процесс дискретизации непрерывных сигналов.

Вариант №3. Изучить влияние шага дискретизации на сигнал.

Вариант №4. Проанализировать понятие квантования сигнала.

Вариант №5. Исследовать уровни квантования и их влияние на точность.

Вариант №6. Рассмотреть спектральные свойства дискретных сигналов.

Вариант №7. Изучить временную структуру дискретных сигналов.

Вариант №8. Проанализировать методы обработки дискретных сигналов.

Вариант №9. Исследовать цифровую фильтрацию сигналов.

Вариант №10. Рассмотреть преобразование аналогового сигнала в цифровой.

Вариант №11. Изучить влияние шумов на дискретные сигналы.

Вариант №12. Проанализировать представление сигналов в цифровых системах.

Вариант №13. Исследовать методы кодирования дискретных сигналов.

Вариант №14. Рассмотреть применение дискретных сигналов в связи.

Вариант №15. Изучить восстановление сигнала после дискретизации.

Вариант №16. Проанализировать ошибки квантования.

Вариант №17. Исследовать роль дискретных сигналов в цифровой обработке информации.

Вариант №18. Рассмотреть особенности цифровых систем передачи данных.

Вариант №19. Изучить влияние параметров дискретизации на качество сигнала.

Вариант №20. Выполнить сравнительный анализ непрерывных и дискретных сигналов.

Контрольные вопросы

1. Что называется дискретным сигналом?
2. Чем дискретный сигнал отличается от непрерывного?
3. Что такое дискретизация?
4. От чего зависит точность дискретизации?
5. Что такое квантование?
6. Какие виды ошибок возникают при квантовании?
7. Что влияет на качество дискретного сигнала?

8. Где применяются дискретные сигналы?
9. Что такое шаг дискретизации?
10. Как осуществляется преобразование аналогового сигнала в цифровой?
11. Почему дискретные сигналы важны в цифровых системах?
12. Что такое цифровая обработка сигналов?
13. Какие операции выполняются с дискретными сигналами?
14. Как шум влияет на дискретные сигналы?
15. Что такое восстановление сигнала?
16. Какие характеристики имеют дискретные сигналы?
17. Почему важно правильно выбирать шаг дискретизации?
18. Как связаны дискретные и непрерывные сигналы?
19. Какие методы обработки используются в цифровых системах?
20. Каково значение дискретных сигналов в современной технике?

Самостоятельная работа №8. Исследование широкополосных шумоподобных сигналов

Цель работы: изучить особенности широкополосных шумоподобных сигналов, освоить их основные характеристики и исследовать применение в современных системах передачи и защиты информации.

Теоретическая часть

Широкополосные шумоподобные сигналы представляют собой сигналы с большой полосой частот, обладающие структурой, напоминающей случайный шум. Такие сигналы широко применяются в современных системах связи, навигации и защиты информации благодаря своим уникальным свойствам.

Основной особенностью шумоподобных сигналов является их высокая устойчивость к помехам и возможность скрытой передачи информации. За счёт широкого спектра такие сигналы трудно обнаружить и подавить, что делает их эффективными в условиях внешних воздействий.

Шумоподобные сигналы формируются с использованием специальных кодов или псевдослучайных последовательностей. Несмотря на внешнее сходство с шумом, такие сигналы имеют детерминированную структуру, что позволяет их точно восстанавливать на приёмной стороне при наличии соответствующего ключа или кода.

Важным свойством широкополосных сигналов является их высокая разрешающая способность. Это свойство используется в радиолокации и навигационных системах для точного определения расстояний и параметров объектов.

Также шумоподобные сигналы обладают низкой спектральной плотностью мощности, что снижает вероятность их перехвата и делает их удобными для скрытых каналов связи. При этом использование широкого спектра требует значительных ресурсов полосы частот.

Широкополосные сигналы лежат в основе технологий расширенного спектра, которые применяются в современных стандартах беспроводной связи и системах защищённой передачи информации.

Практическая часть

В ходе выполнения работы студенту необходимо изучить основные свойства широкополосных шумоподобных сигналов и рассмотреть принципы их формирования. Следует проанализировать особенности структуры таких сигналов и оценить их устойчивость к помехам.

На основании индивидуального варианта задания необходимо выполнить анализ заданного сигнала, определить его характеристики и исследовать возможности его применения в системах связи и защиты информации. Особое внимание следует уделить свойствам широкополосности и корреляционным характеристикам.

По результатам исследования необходимо сформулировать выводы о преимуществах и ограничениях шумоподобных сигналов, а также определить области их

практического использования.

Варианты заданий

Вариант №1. Исследовать понятие широкополосного шумоподобного сигнала.

Вариант №2. Рассмотреть методы формирования псевдослучайных сигналов.

Вариант №3. Изучить свойства шумоподобных сигналов.

Вариант №4. Проанализировать спектральные характеристики широкополосных сигналов.

Вариант №5. Исследовать устойчивость шумоподобных сигналов к помехам.

Вариант №6. Рассмотреть применение расширенного спектра в связи.

Вариант №7. Изучить использование шумоподобных сигналов в радиолокации.

Вариант №8. Проанализировать роль псевдослучайных последовательностей.

Вариант №9. Исследовать методы кодирования широкополосных сигналов.

Вариант №10. Рассмотреть применение шумоподобных сигналов в навигации.

Вариант №11. Изучить влияние полосы частот на характеристики сигнала.

Вариант №12. Проанализировать корреляционные свойства шумоподобных сигналов.

Вариант №13. Исследовать системы связи с расширенным спектром.

Вариант №14. Рассмотреть методы скрытой передачи информации.

Вариант №15. Изучить особенности обнаружения шумоподобных сигналов.

Вариант №16. Проанализировать устойчивость систем расширенного спектра.

Вариант №17. Исследовать применение шумоподобных сигналов в защищённых

каналах связи.

Вариант №18. Рассмотреть особенности обработки широкополосных сигналов.

Вариант №19. Изучить роль шумоподобных сигналов в современных стандартах связи.

Вариант №20. Выполнить сравнительный анализ широкополосных и узкополосных сигналов.

Контрольные вопросы

1. Что называется широкополосным шумоподобным сигналом?
2. В чём заключается основное свойство шумоподобных сигналов?
3. Для чего используются такие сигналы?
4. Что такое псевдослучайная последовательность?
5. Почему шумоподобные сигналы трудно обнаружить?
6. Где применяются широкополосные сигналы?
7. Что такое расширенный спектр?
8. Как формируются шумоподобные сигналы?
9. Какие преимущества имеют такие сигналы?
10. Какие недостатки характерны для широкополосных сигналов?
11. Что такое спектральная плотность мощности?
12. Как обеспечивается защита информации в таких сигналах?
13. Почему важна корреляционная обработка?
14. Какие свойства используют в радиолокации?
15. Как шумоподобные сигналы используются в навигации?
16. Что влияет на устойчивость таких сигналов?
17. Какие методы используются для их обработки?
18. В чём отличие шумоподобных сигналов от обычных?
19. Какие технологии основаны на расширенном спектре?
20. Каково значение шумоподобных сигналов в современных системах связи?