

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ-ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «Экономико-математическое моделирование в управлении
бизнесом»

для студентов направления подготовки 38.03.02 Менеджмент
направленность (профиль) «Маркетинг и рыночная аналитика»

Ставрополь, 2026

Методические указания разработаны в соответствии с программой дисциплины «Экономико-математическое моделирование в управлении бизнесом» и предназначены для студентов направления 38.03.02 Менеджмент.

Составитель: д. э. н., профессор О.В. Бережная

СОДЕРЖАНИЕ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1.	
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2.	
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3.	
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4.	
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5.	
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6.	
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7.	
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8.	
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9.	
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 10.	
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 11.	
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 12.	
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 13.	
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 14	
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 15.	
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 16.	
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	

ВВЕДЕНИЕ

Современному менеджеру необходимо хорошее понимание разнообразных методов и моделей, лежащих в основе управления бизнесом, умение их практически применять для моделирования реальных экономических процессов. Это позволит повысить объективность принимаемых управленческих решений.

Однако лишь незначительная часть менеджеров имеет соответствующую подготовку в указанной области. Таким образом, у бакалавров существует возрастающая потребность в развитии навыков применяемых экономико-математических и статистических методов и моделей для эффективной работы в современной экономике.

Дисциплина «Экономико-математическое моделирование в управлении бизнесом» относится к обязательной части дисциплин направления 38.03.02 «Менеджмент».

Основная цель курса заключается в получении студентом совокупности теоретических знаний и практических навыков по основам экономико-математического моделирования (ЭММ) в управлении бизнесом.

Задачи, стоящие перед студентом при изучении дисциплины:

1. Изучить теоретические основы экономико-математического моделирования (ЭММ) в управлении бизнесом
2. Знать сущность методологии экономико-математического моделирования в управлении бизнесом; основные экономико-математические методы и модели, этапы их разработки и применения для решения бизнес-задач
3. Изучить методы сбора, обработки и анализа данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем
4. Владеть современными информационными технологиями и программными средствами для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом
5. Овладеть навыками вероятностно-статистического моделирования (методами корреляционно-регрессионного анализа, прогнозирования временных рядов экономических показателей, статистического моделирования, кластерного и факторного анализа и др.) для решения экономических задач и поддержки принятия решений
6. Владеть навыками применения различных методов и инструментов разработки оптимизационных моделей в управлении бизнесом

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ ТРЕНДОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Цель: приобрести знания в области моделирования на основе построения трендовых моделей прогнозирования; изучение практики их применения в управлении бизнесом

Планируемые результаты обучения: знание основных понятий теории прогнозирования на основе экстраполяции тенденций, технологии принятия управленческих решений.

В результате освоения темы формируется индикаторы компетенций:

ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.

ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

Теоретическая часть

Методы формализованного представления систем управления основаны на использовании математических, экономико-математических, экономико-статистических методов и моделей исследования операций.

Развитие экономических явлений наиболее полно находит свое отражение во временных рядах, которые представляют собой упорядоченные во времени наборы измерений каких-либо характеристик исследуемого объекта, процесса. Если во временном ряду экономического показателя проявляется длительная тенденция изменения, то говорят, что, имеет место *тренд*. Под трендом понимается изменение, определяющее общее направление развития, основную тенденцию временного ряда. В связи с этим экономико-математическая динамическая модель, в которой развитие моделируемой экономической системы отражается через тренд ее основных показателей, называется *трендовой моделью*.

Метод прогнозирования временных рядов на основе трендовых моделей относится к методам *экстраполяции*.

Методологическая предпосылка экстраполяции состоит в признании преимущественной связи между прошлым, настоящим и будущим. Экстраполяция базируется на следующих допущениях:

1. Развитие явления может быть с достаточным основанием охарактеризовано плавной траекторией — трендом.
2. Общие условия, определяющие тенденцию развития в прошлом, не претерпят существенных изменений в будущем.

Как уже отмечалось выше, под трендом, понимается устойчивое систематическое изменение процесса в течение продолжительного времени, однако *во временных рядах экономических процессов могут иметь место более и менее регулярные колебания*. Если они носят строго периодический или близкий к нему характер и завершаются в течение одного года, то их называют *сезонными колебаниями*. В тех случаях, когда период колебаний составляет несколько лет, то говорят, что во временном ряду присутствует *циклическая компонента*.

Составная часть временного ряда, остающаяся после выделения из него регулярных компонент, представляет собой нерегулярную *случайную компоненту*. Она является обязательной составной частью любого временного ряда в экономике, так как случайные отклонения неизбежно сопутствуют любому экономическому явлению.

Таким образом, в самом общем случае временной ряд экономических показателей можно разложить на *три компоненты*:

1. Тренд, составляющий которого будем обозначать T_t ; $t = \overline{1, n}$;
2. Сезонная (циклическая) компонента – S_t ; $t = \overline{1, n}$;
3. Случайная (стохастическая) компонента – E_t ; $t = \overline{1, n}$.

T , S – регулярные или систематические компоненты временного ряда, E – нерегулярная, случайная компонента.

Если систематические компоненты временного ряда определены правильно (что как раз и составляет одну из главных целей при разработке трендовых моделей), то остающаяся после выделения из временного ряда этих компонентов так называемая *остаточная компонента* (*остаточная последовательность* или *ряд остатков*) будет случайной компонентой ряда, и должна обладать следующими *свойствами*:

1. Случайностью колебаний уровней остаточной последовательности
2. Соответствием распределения случайной компоненты нормальному закону распределения
3. Равенством математического ожидания случайной компоненты нулю
4. Независимостью значений уровней остаточной последовательности, то есть, отсутствием существенной автокорреляции.

Основная задача экономико-математического моделирования отдельного временного ряда – выявление и придание количественного выражения каждой из компонент с тем, чтобы использовать полученную информацию для прогнозирования будущих значений ряда

Различают следующие виды моделей прогнозирования:

1. Тренд: $y(t) = T(t) + E(t)$;
2. Сезонность (циклическость): $y(t) = S(t) + E(t)$;
3. Модель тренда и сезонности: $y(t) = T(t) + S(t) + E(t)$;
 $y(t) = T(t) \cdot S(t) \cdot E(t)$.

Модели, в которых временной ряд представлен как сумма компонент, называются *аддитивными моделями*; как произведение – *мультипликативными моделями временного ряда*.

При разработке моделей прогнозирования тренд оказывается основной составляющей прогнозируемого временного ряда, на которую уже накладываются другие составляющие. Результат при этом связывается исключительно с ходом времени. Предполагается, что через время можно выразить влияние всех основных факторов.

Для построения трендов чаще всего применяют следующие функции:

- 1) линейный тренд:

$$y(t) = a + bt; \quad (5.1)$$

- 2) гиперболическая:

$$y(t) = a + \frac{b}{t}; \quad (5.2)$$

- 3) степенная:

$$y(t) = a \cdot t^b; \quad (5.3)$$

- 4) экспоненциальная:

$$y(t) = a \cdot b^t; \quad (5.4)$$

- 5) парабола второго и более высоких порядков:

$$y(t) = a + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + \dots + b_k \cdot t^k \quad (5.5)$$

Параметры каждого из перечисленных выше трендов можно определить при помощи МНК, используя в качестве независимой переменной время $t = 1, 2, 3, \dots, n$, а в качестве зависимой переменной – фактические уровни временного ряда y_t . Для нелинейных трендов предварительно проводят стандартную процедуру их линейаризации. Для нахождения уравнения тренда достаточно воспользоваться средствами *Microsoft Excel*. Критерием отбора наилучшей формы тренда является наибольшее значение скорректированного коэффициента детерминации $\bar{R}^2$, рассчитанное для нескольких форм тренда.

Следует отметить, что применяемый в прогнозировании метод экстраполяции не дает точных результатов на длительный срок прогноза, потому что данный метод исходит из прошлого и настоящего, и тем самым погрешность накапливается. Этот метод дает положительные результаты на ближайшую перспективу прогнозирования тех или иных объектов не более 5 лет.

Прогнозирование с помощью методов экстраполяции должно включать в себя следующие этапы работ:

1. Установление цели и задачи исследования, анализ объекта прогнозирования.
2. Подготовка исходных данных.
3. Фильтрация исходного временного ряда.
4. Логический отбор видов аппроксимирующей функции.
5. Оценка параметров математической модели прогнозирования.
6. Выбор математической модели прогнозирования.
7. Получение точечного и интервального прогнозов.
8. Верификация прогноза.

Подробнее прогнозирование с помощью методов экстраполяции рассмотрим на примере.

Примеры решения задач

Пример 1. Выполнить прогноз производства продукции предприятием (табл. 1), воспользовавшись средствами *Microsoft Excel*. Для этого

1. Установить цель и задачи исследования, выполнить анализ объекта прогнозирования.
2. Подготовить исходные данные.
3. Выполнить фильтрацию исходного временного ряда.
4. Произвести логический отбор видов аппроксимирующей функции.
5. Выполнить оценку параметров математической модели прогнозирования.
6. Осуществить выбор математической модели прогнозирования.
7. Получить точечный и интервальный прогнозы.

Таблица 1 – Динамика объема производства продукции

Год	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Период времени, t	1	2	3	4	5	6	7
Объем производства продукции, млн p .	15,1	16,5	18,5	25,4	30,8	34,1	35,1

Выполним последовательно все этапы прогнозирования.

1. Установление целей и задачи исследования, анализ объекта прогнозирования.

Цель исследования: изучение динамики объема выпуска продукции и прогнозирование соответствующего показателя на 2016 год.

Задачи исследования:

- построение аппроксимирующих функций, адекватно описывающих исходный динамический ряд;
- выполнение трендового анализа.
- построение прогноза выпуска продукции на 2016 год.

Объектом исследования является выпуск продукции промышленным предприятием.

2. Подготовка исходных данных.

Исходные данные представлены в виде динамического ряда за семь лет (период 2009 – 2015 г.г.) в таблице 1. На основе данных таблицы 5.1 необходимо создать электронную таблицу в *Excel* (рис. 1).

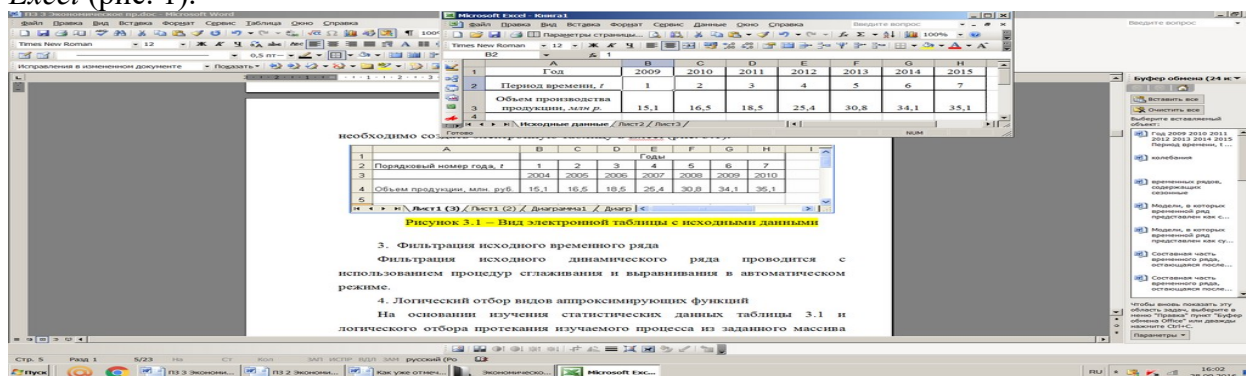


Рисунок 1 – Вид электронной таблицы с исходными данными

3. Фильтрация исходного временного ряда

Фильтрация исходного динамического ряда проводится с использованием процедур сглаживания и выравнивания в автоматическом режиме.

4. Логический отбор видов аппроксимирующих функций

На основании изучения статистических данных таблицы 5.1 и логического отбора протекания изучаемого процесса из заданного массива функций отбирают наиболее приемлемые виды уравнений связи. Этот этап необходим, т. к. позволяет при отборе функции учесть основные условия протекания рассматриваемого процесса и требования, предъявляемые к математической модели.

В *Excel* в качестве аппроксимирующих функций чаще всего используются следующие:

полиномиальная
$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i t^i;$$

линейная
$$y(t) = a + bt;$$

степенная
$$y(t) = at^b;$$

экспоненциальная
$$y(t) = a \exp(bt);$$

логарифмическая
$$y(t) = a + b \ln(t).$$

Для подбора линии тренда необходимо построить график динамики выпуска продукции (рис. 2), после чего необходимо добавить линию тренда.

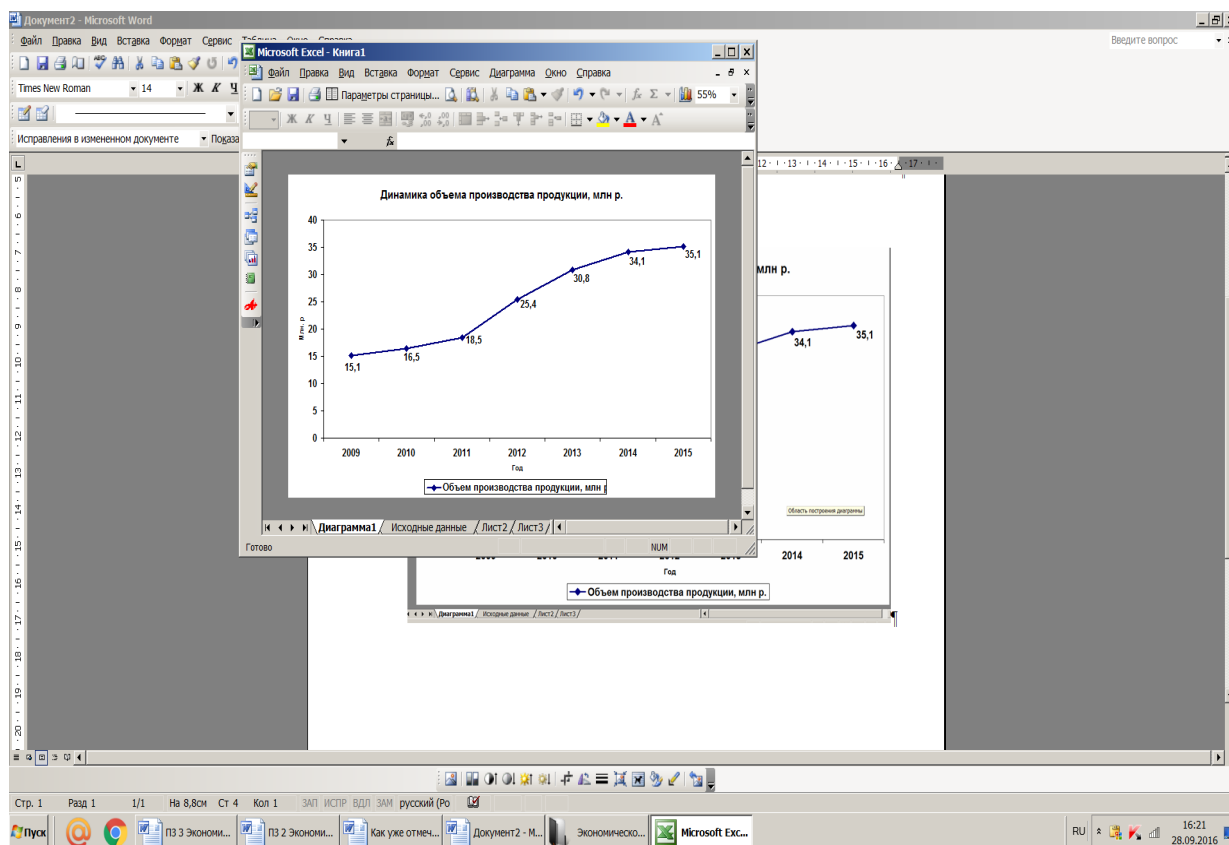


Рисунок 2 – Динамика объема выпуска продукции

Когда это возможно, при выборе вида аппроксимирующей функции прибегают к графическому способу подбора по виду точек временного ряда, расположенных на плоскости yOt . Предварительный вывод о качестве подбора линии тренда можно сделать по R^2 (величина достоверности аппроксимации) – чем ближе значение показателя к единице, тем лучше выполнен подбор уравнения.

Результаты подбора двух уравнений тренда представлены на рисунках 3 и 4.

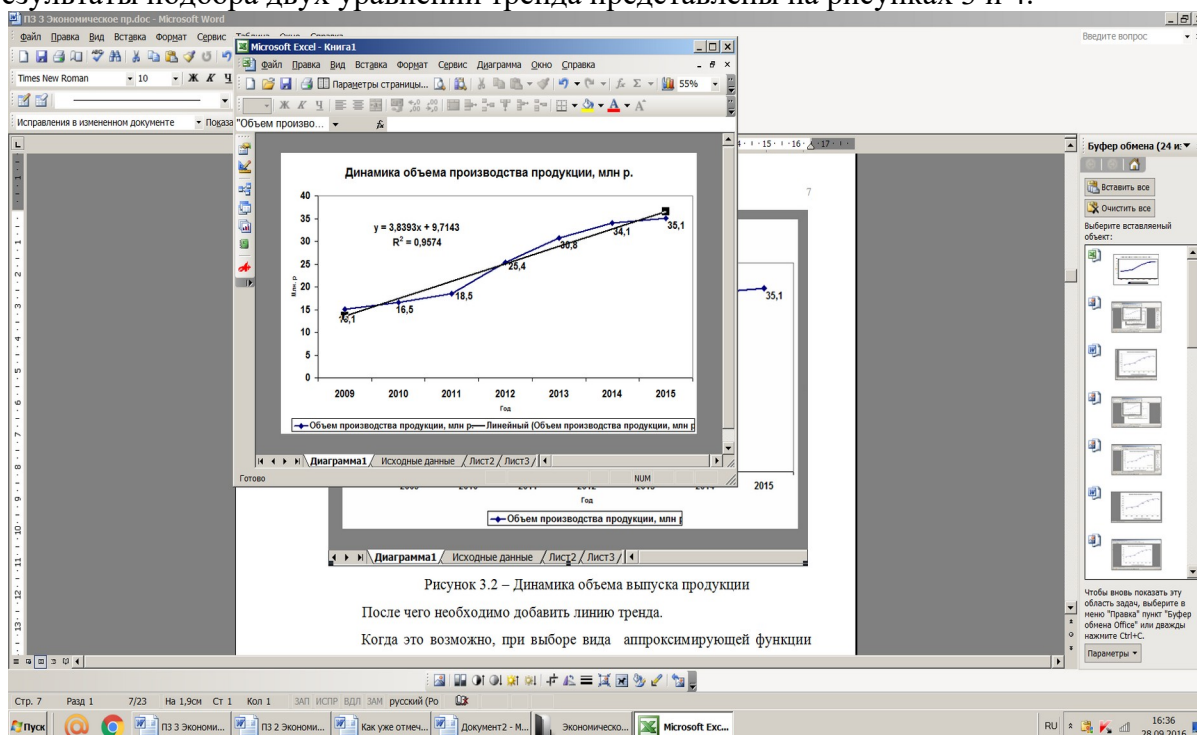


Рисунок 3.2 – Динамика объема выпуска продукции

После чего необходимо добавить линию тренда.

Когда это возможно, при выборе вида аппроксимирующей функции

Рисунок 3 – Линейный тренд

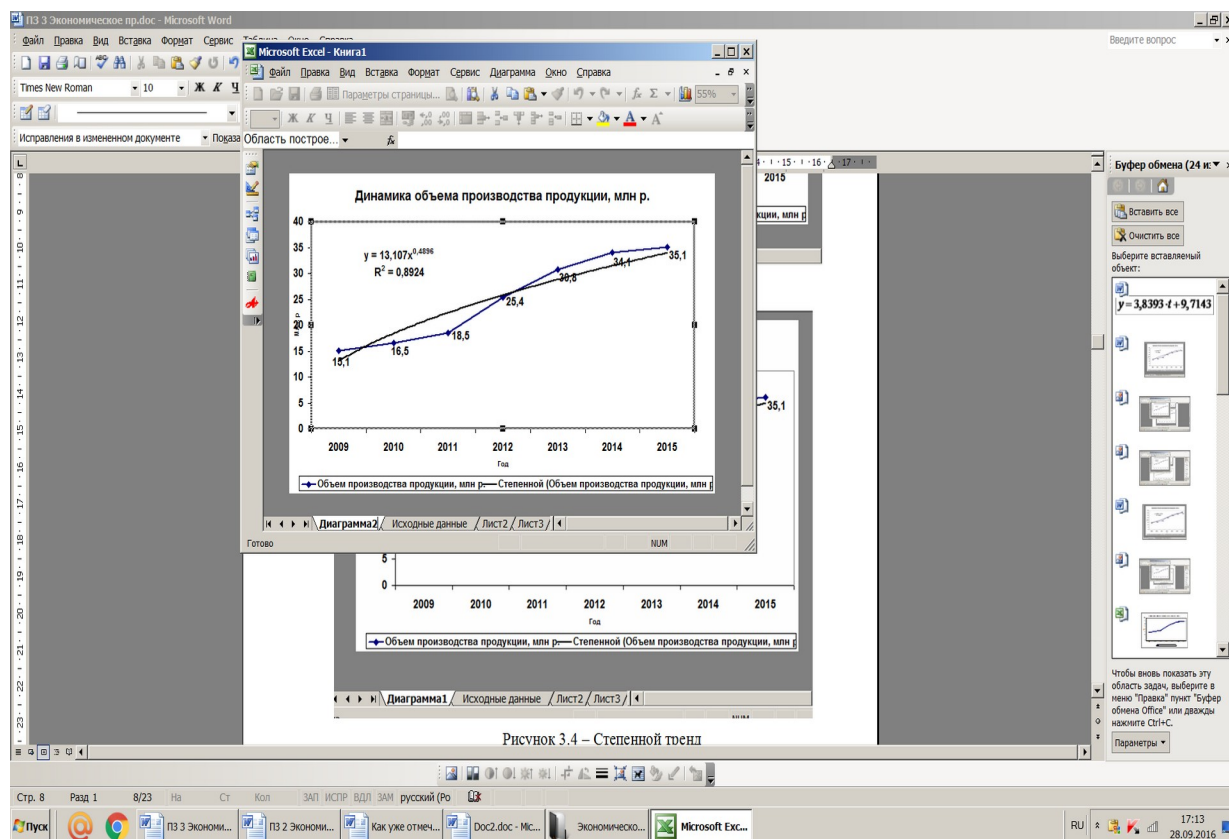


Рисунок 4 – Степенной тренд

5. Оценка параметров математической модели прогнозирования.

На этом этапе исследования определяют параметры различных видов аппроксимирующих функций.

В нашем случае оценка параметров математической модели прогнозирования осуществлялась в автоматическом режиме при построении линии тренда с использованием *Excel*. Результаты определения функций представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты оценки параметров уравнений тренда

Вид тренда	Уравнение тренда	Величина достоверности аппроксимации
Линейная	$y = 3,8393 \cdot x + 9,7143$	$R^2 = 0,9574$
Степенная	$y = 13,107 \cdot x^{0,4896}$	$R^2 = 0,8924$

Решение о выборе математической модели прогнозирования будет принято после оценки ее качества.

6. Выбор математической модели прогнозирования

Выбор модели прогнозирования базируется на оценке ее качества.

Качество модели определяется ее адекватностью исследуемому процессу и точностью. Адекватность модели характеризуется наличием и учетом определенных статистических свойств, а точность – степенью близости к фактическим данным.

Для оценки адекватности выбранных для прогнозирования моделей исследуют статистические свойства *остаточной компоненты* $\varepsilon_t = y_t^{\text{факт}} - y_t^{\text{теор}}$ ($t = 1, 2, \dots, n$), т.е. величины расхождений на участке аппроксимации (построения модели) между фактическими уровнями и их значениями, рассчитанными по модели.

Как уже отмечалось выше, трендовая модель конкретного временного ряда y_t считается адекватной, если остаточная компонента удовлетворяет статистическим свойствам:

- 1) случайность колебаний уровней остаточной компоненты,
- 2) соответствие распределения остаточной компоненты нормальному закону

распределения,

3) равенство математического ожидания остаточной компоненты нулю,

4) независимость значений уровней остаточной компоненты.

Проведем оценку качества линейного тренда:

$$y = 3,8393 \cdot t + 9,7143$$

Необходимо рассчитать величину остаточной компоненты. Расчет проводится в следующей последовательности.

Рассчитаем теоретические значения каждого уровня динамического ряда. Для этого в таблице с исходными данными (рис. 5.1) в ячейку **B5** необходимо ввести формулу для расчета, при этом вместо фактора времени t необходимо указать порядковый номер года (ячейка **B2**), скопировать полученную формулу в диапазон ячеек **C5:I6**.

Рассчитать остаточную компоненту временного ряда по формуле $\varepsilon_t = y_t^{\text{факт}} - y_t^{\text{теор}}$, $t = 1, 2, \dots, n$.

Результаты расчета представлены на рисунке 5.

Год	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	Прогноз на 2016 г.
Период времени, t	1	2	3	4	5	6	7	8
Объем производства продукции ($y^{\text{факт}}$), млн р.	15,1	16,5	18,5	25,4	30,8	34,1	35,1	
Линейный тренд $y = 3,8393 \cdot t + 9,7143$								
Теоретические значения ряда, рассчитанные по модели тренда ($y^{\text{теор}}$)	13,554	17,393	21,232	25,072	28,911	32,750	36,589	40,4
Остаточная компонента ε_t	1,546	-0,893	-2,732	0,328	1,889	1,350	-1,489	-0,001
								Сумма остатков
								-0,001

Рисунок 5 – Результаты расчета остаточной компоненты

Оценка адекватности трендовой модели включает в себя четыре этапа.

Этап 1 Проверка случайности колебаний уровней остаточной компоненты с помощью критерия поворотных точек.

Критерием случайности с доверительной вероятностью 95 %, является выполнение неравенства

$$K > \left[\frac{(2n-4)}{3} - 2 \cdot \sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right], \quad (1)$$

где n – число уровней временного ряда (остаточной компоненты);

K – количество поворотных точек остаточной компоненты.

Квадратные скобки означают целую часть числа.

Если это неравенство не выполняется, трендовая модель считается неадекватной.

Уровень остаточной компоненты считается поворотной точкой, если он одновременно больше (меньше) двух соседних уровней.

В нашем случае $K=2$, т.к. уровни ε_3 и ε_5 являются поворотными точками ($\varepsilon_2 > \varepsilon_3 < \varepsilon_4$ и $\varepsilon_4 < \varepsilon_5 > \varepsilon_6$).

Проверим выполнение неравенства 1):

$$2 > \left[\frac{2n-4}{3} - 2\sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right], 2 > \left[\frac{2*7-4}{3} - 2\sqrt{\frac{16*7-29}{90}} \right] = [1,41]$$

Таким образом, получаем, что $2 > 1$, то есть модель линейного тренда считается адекватной.

Этап 2 Проверка соответствия распределения остаточной компоненты нормальному закону распределения может быть произведена с помощью исследования показателей асимметрии – A_c и эксцесса – $\mathcal{E}_k$:

$$A_c = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \right)^3}}, \quad (2)$$

$$\mathcal{E}_k = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \right)^2} - 3 \quad (3)$$

Если эти коэффициенты близки к нулю или равны нулю, то ряд остатков распределен в соответствии с нормальным законом.

Промежуточные расчеты произведем с помощью электронной таблицы *Excel* (рис. 6).

Воспользовавшись расчетами в таблице, имеем:

$$A_c = \frac{\frac{1}{7} \cdot (-11,476)}{\sqrt{\left(\frac{1}{7} \cdot 18,371 \right)^3}} = -0,38. \quad \mathcal{E}_k = \frac{\frac{1}{7} \cdot 83,071}{\left(\frac{1}{7} \cdot 18,371 \right)^2} - 3 = -1,28.$$

Год	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	Прогноз на 2016 г.
Период времени, t	1	2	3	4	5	6	7	8
Объем производства продукции ($y^{\text{факт}}$), млн р.	15,1	16,5	18,5	25,4	30,8	34,1	35,1	
Теоретические значения ряда, рассчитанные по модели тренда ($y^{\text{теор}}$)	13,554	17,393	21,232	25,072	28,911	32,750	36,589	40,4
Остаточная компонента ε_t	1,546	-0,893	-2,732	0,328	1,889	1,350	-1,489	-0,001
ε_t в квадрате	2,391	0,797	7,465	0,108	3,569	1,822	2,218	18,371
ε_t в третьей степени	3,698	-0,712	-20,396	0,035	6,743	2,460	-3,304	-11,476
ε_t в четвертой степени	5,719	0,636	55,725	0,012	12,738	3,321	4,921	83,071
Числитель критерия Дарбина-Уотсона		5,950	3,383	9,368	2,436	0,291	8,062	29,49

Рисунок 6 – Фрагмент листа «Оценка адекватности модели»

Для оценки близости этих коэффициентов к нулю вычисляют средние квадратические отклонения:

$$\sigma_{\hat{A}\tilde{n}} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}, \quad (4)$$

$$\sigma_{\mathcal{E}_K} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}. \quad (5)$$

Средние квадратические отклонения равны:

$$\sigma_{Ac} = \sqrt{\frac{6 \cdot (7-2)}{(7+1) \cdot (7+3)}} = 0,61; \quad \sigma_{\mathcal{E}_K} = \sqrt{\frac{24 \cdot 7 \cdot (7-2) \cdot (7-3)}{(7+1)^2 \cdot (7+3) \cdot (7+5)}} = 0,66.$$

Гипотеза о нормальном характере распределения остаточной компоненты принимается, если одновременно выполняются следующие неравенства:

$$|Ac| < 1,5\sigma_{Ac} \text{ и } \left| \mathcal{E}_K + \frac{6}{n+1} \right| < 1,5\sigma_{\mathcal{E}_K}. \quad (6)$$

$$|-0,38| < 1,5 \cdot 0,61 \text{ и } \left| -1,28 + \frac{6}{7+1} \right| < 1,5 \cdot 0,66.$$

Так как оба неравенства выполняются, то гипотеза признается, и модель считается адекватной.

Этап 3 Проверка равенства математического ожидания остаточной компоненты 0, если она распределена по нормальному закону распределения, осуществляется на основе t – критерия Стьюдента:

$$t = \left| \frac{\sum \varepsilon_t}{n} \right| \cdot \frac{\sqrt{n}}{S_{\varepsilon}}, \quad (7)$$

где S_{ε} – стандартное (среднеквадратическое) отклонение для остаточной компоненты.

$$S_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_t^2}{n-1}}. \quad (8)$$

$$S_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{18,371}{7-1}} = 1,7498.$$

$$t = \left| \frac{-0,001}{7} \right| \cdot \frac{\sqrt{7}}{1,7498} = 0,000107$$

Отсюда

Расчетное значение сравнивается с табличным. Табличное значение критерия Стьюдента имеет степень свободы равную $f = n - 1$ и уровень значимости α (Приложение А, таблица А.1).

В данном случае табличное значение критерия равно 2,4469 (при $f = 7 - 1 = 6$ и $\alpha = 0,05$). Так как расчетное значение меньше табличного, модель считается адекватной.

Этап 4 Проверка независимости значений уровней остаточной компоненты по критерию Дарбина – Уотсона.

Критерий Дарбина – Уотсона рассчитывается по следующей формуле:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2} \quad (9)$$

Подставляя в формулу для расчета данные, имеем

$$d = \frac{29,49}{18,371} = 1,6$$

Согласно методу Дарбина – Уотсона существует верхний d_B и нижний d_H пределы значимости статистики d . Эти критические значения зависят от уровня значимости α , объема выборки n и числа объясняющих переменных m (для трендовых моделей $m=1$).

Расчетное значение d сравнивается с d_H и d_B . При этом руководствуются правилами:

1. $d_B \leq d \leq 4 - d_B$ принимается гипотеза: автокорреляция отсутствует;
2. $0 \leq d \leq d_H$ принимается гипотеза о существовании положительной автокорреляции остатков;
3. $d_H \leq d \leq d_B$ и $4 - d_B \leq d \leq 4 - d_H$ при выбранном уровне значимости нельзя прийти к определенному выводу;
4. $4 - d_H \leq d \leq 4$ принимается гипотеза о существовании отрицательной автокорреляции остатков.

Табличные значения критерия Дарбина – Уотсона для временного ряда, содержащего 7

уровней равны $d_H = 0,7$ и $d_B = 1,36$ (Приложение А, таблица А.2).

В нашем случае расчетное значение критерия попало в следующий промежуток: $1,36 \leq 1,6 \leq 4 - 1,36$, следовательно, принимается гипотеза об отсутствии автокорреляции. Модель признается адекватной.

Оценка точности модели проводится с помощью ошибки аппроксимации

Ошибка аппроксимации рассчитывается по следующей формуле:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i^{\text{факт}} - y_i^{\text{теор}}}{y_i^{\text{факт}}} \right| \cdot 100, \% \quad (10)$$

Результаты расчетов представлены на рисунке 5.7

В нашем случае ошибка аппроксимации равна 6,58 %. Так как ошибка аппроксимации меньше критических значений (8 – 10 %), то выбранное уравнение тренда достаточно точно описывает исходную информацию.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data and formulas:

Год	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	Прогноз на 2016 г.
Период времени, t	1	2	3	4	5	6	7	8
Объем производства продукции ($y_{факт}$), млн р.	15,1	16,5	18,5	25,4	30,8	34,1	35,1	
Линейный тренд $y = 3,8393 \cdot t + 9,7143$								
Теоретические значения ряда, рассчитанные по модели тренда ($y_{теор}$)	13,554	17,393	21,232	25,072	28,911	32,750	36,589	40,4
Остаточная компонента ϵ_t	1,546	-0,893	-2,732	0,328	1,889	1,350	-1,489	-0,001
ϵ_t в квадрате	2,391	0,797	7,465	0,108	3,569	1,822	2,218	18,371
ϵ_t в третьей степени	3,698	-0,712	-20,396	0,035	6,743	2,460	-3,304	-11,476
ϵ_t в четвертой степени	5,719	0,636	55,725	0,012	12,738	3,321	4,921	83,071
Числитель критерия Дарбина-Уотсона		5,950	3,383	9,388	2,436	0,291	8,062	29,49
Составляющие формулы для расчета ошибки аппроксимации, %								
Средняя ошибка аппроксимации, %	10,241	5,412	14,769	1,293	6,134	3,959	4,243	46,050
Средняя ошибка аппроксимации, %	6,58							

Рисунок 7 – Расчет ошибки аппроксимации

Проведенный анализ показал, что линейный тренд адекватно и точно описывает исходный динамический ряд и его можно использовать для прогнозирования.

Проведем оценку качества степенного тренда:

$$y = 13,107 \cdot t^{0,4896}$$

Проверка осуществляется аналогично. Результаты промежуточных расчетов представлены на рисунке 8.

Год	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	Прогноз на 2016 г.
Период времени, t	1	2	3	4	5	6	7	8
Объем производства продукции ($y_{факт}$), млн р.	15,1	16,5	18,5	25,4	30,8	34,1	35,1	
Степенной тренд $y = 13,107t^4 + 0,4896$								
Теоретические значения ряда, рассчитанные по модели тренда ($y_{теор}$)	13,107	18,403	22,444	25,839	28,822	31,513	33,983	36,3
Остаточная компонента ε_t	1,993	-1,903	-3,944	-0,439	1,978	2,587	1,117	1,390
ε_t в квадрате	3,972	3,621	15,556	0,193	3,914	6,694	1,247	35,197
ε_t в третьей степени	7,916	-6,891	-61,353	-0,084	7,743	17,319	1,393	-33,958
ε_t в четвертой степени	15,777	13,113	241,983	0,037	15,318	44,809	1,556	332,593
Числитель критерия Дарбина-Уотсона		15,178	4,166	12,287	5,842	0,371	2,162	40,01
Составляющие формулы для расчета ошибки аппроксимации, %	13,199	11,533	21,319	1,727	6,423	7,587	3,182	64,971
Средняя ошибка аппроксимации, %	9,28							

Рисунок 5.8 – Фрагмент листа «Оценка адекватности степенного тренда»

Проверка случайности колебаний уровней остаточной компоненты с помощью критерия поворотных точек

В нашем случае количество поворотных точек $K = 2$, так как $\varepsilon_2 > \varepsilon_3 < \varepsilon_4$ и $\varepsilon_5 < \varepsilon_6 > \varepsilon_7$. Так как $2 > 1$, то модель считается адекватной.

Проверка соответствия распределения остаточной компоненты нормальному закону распределения

Коэффициент асимметрии равен:

$$A_c = \frac{-4,85108}{\sqrt{5,028108^3}} = 0,4302, \quad \dot{Y}_{\varepsilon} = \frac{47,51327}{5,028108^2} - 3 = -1,1206.$$

Средние квадратические отклонения равны:

$$\sigma_{\hat{A}\hat{n}} = 0,61; \quad \sigma_{\dot{Y}_{\varepsilon}} = 0,66.$$

Гипотеза о нормальном характере распределения остаточной компоненты принимается, если одновременно выполняются следующие неравенства:

$$|A_c| < 1,5\sigma_{A_c} \text{ и } \left| \dot{Y}_{\varepsilon} + \frac{6}{n+1} \right| < 1,5\sigma_{\dot{Y}_{\varepsilon}}.$$

$$|-0,43| < 1,5 \cdot 0,61 \text{ и } \left| -1,12 + \frac{6}{7+1} \right| < 1,5 \cdot 0,66.$$

$$|-0,43| < 0,915 \text{ и } |-0,37| < 0,99$$

Так как оба неравенства выполняются, гипотеза о нормальном характере распределения остаточной компоненты признается, и модель считается адекватной.

Проверка равенства математического ожидания остаточной компоненты нулю, если она распределена по нормальному закону распределения.

Расчетное значение критерия Стьюдента равно:

$$t = \left| \frac{1,39}{7} \right| \cdot \frac{\sqrt{7}}{2,422} = 0,2168$$

$$S_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{35,197}{7-1}} = 2,422$$

Расчетное значение сравнивается с табличным. Табличное значение критерия Стьюдента имеет степень свободы равную $f = n - 1$ и уровень значимости α . В данном случае табличное значение критерия равно 2,4469 (при $f = 6$ и $\alpha = 0,05$). Так как расчетное значение меньше табличного, модель считается адекватной.

Проверка независимости значений уровней остаточной компоненты по критерию Дарбина – Уотсона.

Критерий Дарбина – Уотсона равен:

$$d = \frac{40,01}{35,197} = 1,14$$

Табличные значения критерия Дарбина – Уотсона для временного ряда, содержащего 7 уровней равны $d_n = 0,7$ и $d_v = 1,36$.

В данном случае расчетное значение критерия Дарбина – Уотсона попало в третий интервал, когда $d_n \leq d \leq d_v$, т.е. $0,7 \leq 1,14 \leq 1,36$. В этой ситуации нельзя прийти к определенному уровню.

Следовательно, необходимо рассчитать коэффициент автокорреляции по формуле:

$$r_a = 1 - \frac{d}{2} \quad (5.16)$$

$$r_a^{расч} = 1 - \frac{1,14}{2} = 0,43$$

Расчетное значение сравнивается с табличным $r_a^{табл}$. Табличное значение коэффициента автокорреляции имеет одну степень свободы $f = n = 7$. Так как расчетное значение больше табличного ($r_a^{табл} = 0,370$), то гипотеза об отсутствии автокорреляции в остаточной компоненте отвергается и модель признается неадекватной.

Оценка точности модели проводится с помощью ошибки аппроксимации

Воспользовавшись расчетами в таблице (рис. 3.8), находим, что ошибка аппроксимации равна 9,28 %.

Проведенный анализ показал, степенную модель нельзя использовать для дальнейшего прогнозирования, так как в исходных данных присутствует автокорреляция уровней и значение средней ошибки аппроксимации достаточно близко к критическому значению (8–10%).

Следовательно, для прогнозирования необходимо оставить линейное уравнение тренда.

7. Получение точечного прогноза.

Сделаем прогноз на последующий 2016 год, используя при этом выбранную нами адекватную модель – линейную функцию.

Для этого в уравнение $y = 3,8393 \cdot t + 9,7143$ подставить значение t на период прогноза, которое в нашем случае равно 8.

Итак, $y = 3,8393 \cdot 8 + 9,7143 = 40,43$ млн руб.

Следовательно, в следующем году, при сложившихся тенденциях работы промышленного предприятия, объем выпуска продукции составит приблизительно 40,4 млн руб.

Задания

Задание 1. Выполнить прогноз объема производства продукции предприятия (табл. 1), воспользовавшись средствами Microsoft Excel. Для этого:

1. Установить цель и задачи исследования, выполнить анализ объекта прогнозирования.
2. Подготовить исходные данные.
3. Выполнить фильтрацию исходного временного ряда.
4. Произвести логический отбор видов аппроксимирующей функции.
5. Выполнить оценку параметров математической модели прогнозирования.
6. Осуществить выбор математической модели прогнозирования.
7. Получить точечный и интервальный прогнозы.

Таблица 1 – Динамика объема производства продукции

Год, t	Объем производства продукции, V_i (№ варианта)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2014	11,1	12,1	12,8	13,6	15,9	16,6	17,4	18,1	18,9	11,3	9
2015	12,5	13,2	14	14,9	17,3	18,2	19	19,8	20,6	12,4	9,9
2016	15,5	14,8	15,7	16,7	19,4	20,4	21,3	22,2	23,1	13,9	11,1
2017	20,4	20,3	21,6	22,9	26,7	27,9	29,2	30,5	31,8	19,1	15,3
2018	27,8	24,6	26,2	27,7	32,3	33,9	35,4	37	38,5	23,1	18,5
2019	32,1	27,3	29	30,7	35,8	37,5	39,2	40,9	42,6	25,6	20,5
2020	35,1	28,1	29,8	31,6	36,9	38,6	40,4	42,1	43,9	26,3	21

Отчет по практической работе должен содержать:

- 1 Цель и задачи исследования, анализ объекта прогнозирования.
- 2 Логический отбор видов аппроксимирующей функции.
- 3 Оценка параметров математической модели прогнозирования.
- 4 Выбор математической модели прогнозирования.
- 5 Точечный прогноз.
- 6 Выводы и распечатки.

Защита работы проводится в устной форме, состоит в предоставлении студентом правильно выполненного отчета по работе, коротком докладе и в ответах на вопросы, представленных выше.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение тренда.
2. Перечислите этапы прогнозирования при помощи методов экстраполяции.
3. Перечислите наиболее распространенные функции для построения тренда.
4. Поясните, что такое остаточная компонента?
5. Как оценить качество трендовой модели?
6. Что такое адекватность модели и как она оценивается?
7. Как оценивается точность модели?

Список литературы: 1, 2, 3, 4

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ, СОДЕРЖАЩИХ СЕЗОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ, ПО АДДИТИВНОЙ МОДЕЛИ

Цель: приобрести знания в области моделирования на основе построения трендовых моделей прогнозирования; изучение практики их применения в управлении бизнесом

Планируемые результаты обучения: знание основных понятий теории прогнозирования на основе экстраполяции тенденций, технологии принятия управленческих решений. Прогнозирование временных рядов, содержащих сезонные колебания, по аддитивной модели

В результате освоения темы формируются индикаторы компетенций:

ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.

ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

Теоретическая часть

Во временных рядах экономических процессов могут иметь место более и менее регулярные колебания. Если они носят строго периодический или близкий к нему характер и завершаются в течение одного года, то их называют *сезонными колебаниями*. В тех случаях, когда период колебаний составляет несколько лет, то говорят, что во временном ряду присутствует *циклическая компонента*.

Существует несколько подходов к анализу структуры временных рядов, содержащих сезонные или циклические колебания. Простейший подход – расчет значений сезонной компоненты методом скользящей средней и построение *аддитивной или мультипликативной модели временного ряда*.

Аддитивной модель имеет следующий вид:

$$Y = T + S + E. \quad (1)$$

Эта модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как *сумма* трендовой (T), сезонной (S) и случайной (E) компонент.

Построение аддитивной модели сводится к расчету значений T , S и E для каждого уровня ряда.

Процесс построения модели включает в себя следующие этапы.

1. Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.
2. Расчет значений сезонной компоненты S .
3. Устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выровненных данных ($T + E$).
4. Аналитическое выравнивание уровней ($T + E$) и расчет значений T с использованием полученного уравнения тренда,
5. Расчет полученных по модели значений ($T + S$).
6. Расчет абсолютных и/или относительных ошибок.

Если полученные значения ошибок не содержат автокорреляции, ими можно заменить исходные уровни ряда и в дальнейшем использовать временной ряд ошибок E для анализа взаимосвязи исходного ряда и других временных рядов.

Пример выполнения задания

Пример. Используя данные поквартального потребления электроэнергии организациями района произвести моделирование временного ряда на основе аддитивной модели (табл. 1).

Таблица 1 – Потребления электроэнергии организациями района за четыре года

№ квартала, t	Потребление электроэнергии организациями района, U_i
1	6,0
2	4,4
3	5,0
4	9,0
5	7,2
6	4,8
7	6,0
8	10,0
9	8,0
10	5,6
11	6,4
12	11,0
13	9,0
14	6,6
15	7,0
16	10,8

Объемы потребления электроэнергии в осенне-зимний период времени (I и IV кварталы) выше, чем весной и летом (II и III кварталы). По графику временного ряда (рис. 1) можно установить наличие приблизительно равной амплитуды колебаний. Это свидетельствует о возможном существовании в ряду аддитивной модели. Рассчитаем ее компоненты.

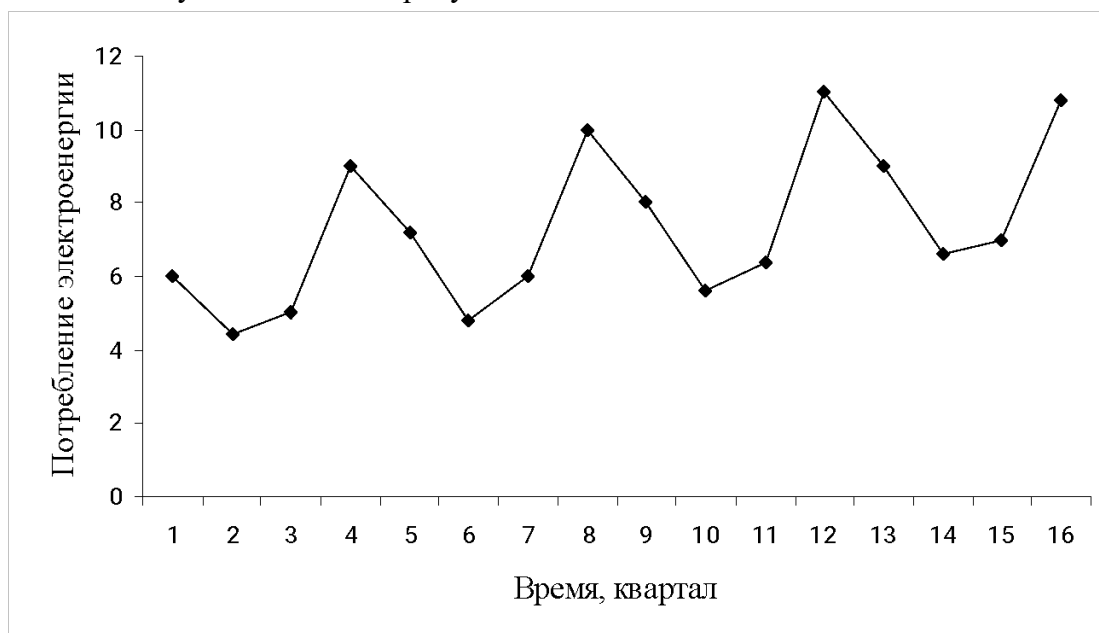


Рисунок 1 – Потребление электроэнергии организациями района

Проведем выравнивание исходных уровней ряда методом скользящей средней. Для этого:

- просуммируем уровни ряда последовательно за каждые четыре квартала со сдвигом на один момент времени и определим условные годовые объемы потребления электроэнергии организациями района (гр. 3 таблица 9.2);
- разделив полученные суммы на 4, найдем скользящие средние (гр. 4 таблицы 2).

Отметим, что полученные таким образом выровненные значения уже не содержат сезонной компоненты потребления электроэнергии организациями района;

в) приведем эти значения в соответствие с фактическими моментами времени, для чего найдем средние значения из двух последовательных скользящих средних — центрированные скользящие средние (гр. 5 таблицы 2).

Найдем оценки сезонной компоненты как разность между фактическими уровнями ряда и центрированными скользящими средними (гр. 6 таблицы 2). Используем эти оценки для расчета значений сезонной компоненты S (табл. 3).

Таблица 2 – Расчет оценок сезонной компоненты в аддитивной модели

№ квартала, t	Потребление электроэнергии, Y_i	Итого за четыре квартала	Скользящая средняя за четыре квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	2	3	4	5	6
1	6,0				
2	4,4				
!!!3	5,0			6,250	-1,250
4	9,0	24,4	6,10	6,450	2,550
5	7,2	25,6	6,40	6,625	0,575
6	4,8	26	6,50	6,875	-2,075
7	6,0	27	6,75	7,100	-1,100
8	10,0	28	7,00	7,300	2,700
9	8,0	28,8	7,20	7,450	0,550
10	5,6	29,6	7,40	7,625	-2,025
11	6,4	30	7,50	7,875	-1,475
12	11,0	31	7,75	8,125	2,875
13	9,0	32	8,00	8,325	0,675
14	6,6	33	8,25	8,375	-1,775
15	7,0	33,6	8,40		
16	10,8	33,4	8,35		

Таблица 3 – Расчет значений сезонной компоненты в аддитивной модели

Показатели	Год	№ квартала, i			
		I	II	III	IV
	1	-	-	-1,250	2,550
	2	0,575	-2,075	-1,100	2,700
	3	0,550	-2,025	-1,475	2,875
	4	0,675	-1,775	-	-
Итого за i-й квартал (за все годы)		1,800	-5,875	-3,825	8,125

Средняя оценка сезонной компоненты для /-го квартала, S_i		0,600	-1,95 8	-1,27 5	2,708
Скорректированная сезонная компонента, S_i		0,581	-1,97 7	-1,29 4	2,690

Для этого найдем средние за каждый квартал (по всем годам) оценки сезонной компоненты S_i . В моделях с сезонной компонентой обычно предполагается, что сезонные воздействия за период взаимно погашаются. В аддитивной модели это выражается в том, что сумма значений сезонной компоненты по всем кварталам должна быть равна нулю.

Для данной модели имеем:

$$0,6 - 1,958 - 1,275 + 2,708 = 0,075.$$

Определим корректирующий коэффициент:

$$k = 0,075 / 4 = 0,01875.$$

Рассчитаем скорректированные значения сезонной компоненты как разность между ее средней оценкой и корректирующим коэффициентом k :

$$S_i = S_i - k, \quad (2)$$

где $i = 1:4$.

Проверим условие равенства нулю суммы значений сезонной компоненты:

$$0,581 - 1,977 - 1,294 + 2,690 = 0.$$

Таким образом, получены следующие значения сезонной компоненты:

I квартал: $S_1 = 0,581$;

II квартал: $S_2 = -1,977$;

III квартал: $S_3 = -1,294$;

IV квартал: $S_4 = 2,690$.

Занесем полученные значения в таблицу 3 для соответствующих кварталов каждого года (стр. 3).

Элиминируем влияние сезонной компоненты, вычитая ее значение из каждого уровня исходного временного ряда. Получим величины $T + E = Y_i - S_i$ (гр. 4 таблица 4). Эти значения рассчитываются за каждый момент времени и содержат только тенденцию и случайную компоненту.

Определим компоненту T данной модели. Для этого проведем аналитическое выравнивание ряда $(T + E)$ с помощью линейного тренда. Результаты аналитического выравнивания следующие:

Константа	5,715416
Коэффициент регрессии	0,186421
Стандартная ошибка коэффициента регрессии	0,015188
R-квадрат	0,914971
Число наблюдений	16
Число степеней свободы	14

Таким образом, имеем следующий линейный тренд: $T = 5,715 + 0,186 * t$.

Таблица 4 – Расчет выровненных значений T и ошибок E
в аддитивной модели

t	Y_i	S_i	$T+E = Y_i - S_i$	T	$T+S$	$Y_i - (T+S)$	E^2
1	2	3	4	5	6	7	8
1	6,0	0,581	5,419	5,902	6,483	-0,483	0,2333
2	4,4	-1,977	6,337	6,088	4,111	0,289	0,0835
3	5,0	-1,294	6,294	6,275	4,981	0,019	0,0004

4	9,0	2,690	6,310	6,461	9,151	-0,151	0,0228
5	7,2	0,581	6,619	6,648	7,229	-0,029	0,0008
6	4,8	-1,977	6,777	6,834	4,857	-0,057	0,0032
7	6,0	-1,294	7,294	7,020	5,727	0,273	0,0745
8	10,0	2,690	7,310	7,207	9,896	0,104	0,0108
9	8,0	0,581	7,419	7,393	7,974	0,026	0,0007
10	5,6	-1,977	7,577	7,580	5,603	-0,030	0,0009
11	6,4	-1,294	7,694	- 7,766	6,472	-0,072	0,0052
12	11,0	2,690	8,310	7,952	10,642	0,358	0,1282
13	9,0	0,581	8,419	8,139	8,720	0,280	0,0784
14	6,6	-1,977	8,577	8,325	6,348	0,252	0,0635
15	7,0	-1,294	8,294	8,519	7,218	-0,218	0,0475
16	10,8	2,690	8,110	8,698	11,388	-0,588	0,3457

Подставляя в это уравнение значения $t = 1, \dots, 16$, найдем уровни T для каждого момента времени (гр. 5 таблица 4). График уравнения тренда приведен на рисунке 2.

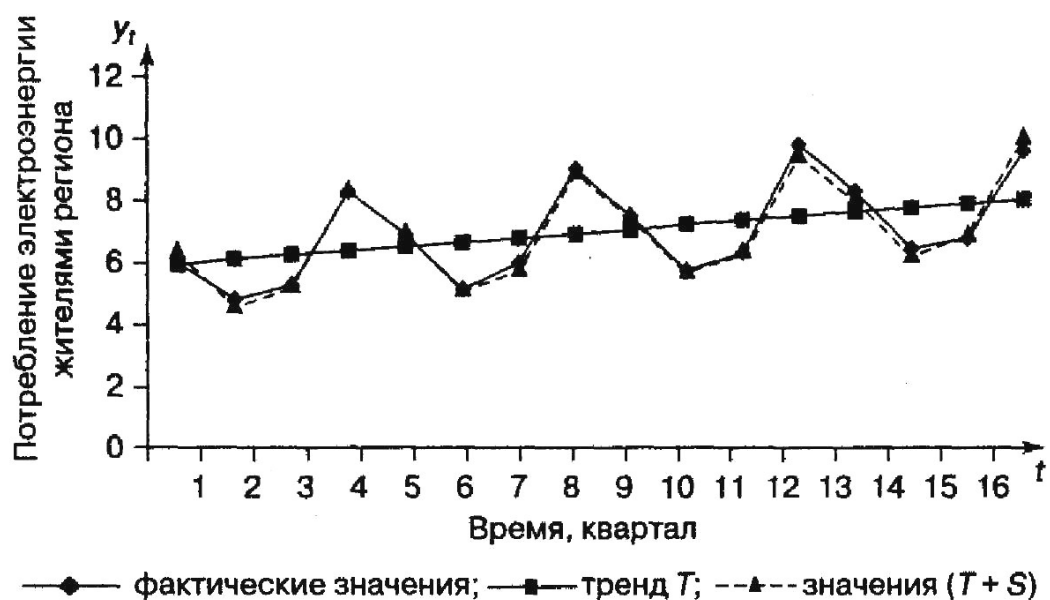


Рисунок 2 – Потребление электроэнергии организациями района (фактические, выровненные и полученные по аддитивной модели значения уровней ряда)

Найдем значения уровней ряда, полученные по аддитивной модели. Для этого прибавим к уровням T значения сезонной компоненты для соответствующих кварталов. Графически значения $(T+S)$ представлены на рисунке 2.

В соответствии с методикой построения аддитивной модели расчет ошибки производится

по формуле:

$$E=Y-(T+S). \quad (3)$$

Это абсолютная ошибка. Численные значения абсолютных ошибок приведены в гр. 7 таблица 4.

По аналогии с моделью регрессии для оценки качества построения модели или для выбора наилучшей модели можно применять сумму квадратов полученных абсолютных ошибок. Для данной аддитивной модели сумма квадратов абсолютных ошибок равна 1,10. По отношению к общей сумме квадратов отклонений уровней ряда от его среднего уровня, равной 71,59, 67.12, эта величина составляет чуть более 1,5%:

$$(1,10/71,59) \cdot 100 = 1,536.$$

Следовательно, можно сказать, что аддитивная модель объясняет 98,5 % общей вариации уровней временного ряда потребления электроэнергии организациями района за последние 16 кварталов.

Предположим, требуется дать *прогноз потребления* электроэнергии организациями района в течение первого полугодия ближайшего следующего года.

Прогнозное значение F_t уровня временного ряда в аддитивной модели в соответствии с соотношением (9.1) есть сумма трендовой и сезонной компонент.

Объем электроэнергии, потребленной в течение первого полугодия ближайшего следующего, т. е. пятого, года, рассчитывается как сумма объемов потребления электроэнергии в I и во II кварталах пятого года, соответственно F_{17} и F_{18} . Для определения трендовой компоненты воспользуемся уравнением тренда

$$T = 5,715 + 0,186 \cdot t$$

Получим:

$$T_{17} = 5,715 + 0,186 \cdot 17 = 8,877;$$

$$T_{18} = 5,715 + 0,186 \cdot 18 = 9,063.$$

Значения сезонной компоненты равны:

$$S_1 = 0,581 \text{ (I квартал);}$$

$$S_2 = -1,977 \text{ (II квартал).}$$

Таким образом,

$$T_{17} = T_{17} + S_1 = 8,877 + 0,581 = 9,458;$$

$$T_{18} = T_{18} + S_2 = 9,063 - 1,977 = 7,086.$$

Прогноз объема потребления электроэнергии на первое полугодие ближайшего следующего (пятого) года составит:

$$(9,458 + 7,086) = 16,544 \text{ млн кВт} \cdot \text{ч.}$$

Задания

Задание 1. Используя данные поквартального потребления электроэнергии организациями района произвести моделирование временного ряда на основе аддитивной модели (табл. 5).

Таблица 5 – Потребления электроэнергии организациями района за четыре года

№ квартала, t	Потребление электроэнергии, U_i (№ варианта)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4,8	5,1	5,4	6,3	6,6	6,9	7,2	7,5	4,5	4,8
2	3,5	3,7	4	4,6	4,8	5,1	5,3	5,5	3,3	3,5
3	4	4,3	4,5	5,3	5,5	5,8	6	6,3	3,8	4
4	7,2	7,7	8,1	9,5	9,9	10,4	10,8	11,3	6,8	7,2
5	5,8	6,1	6,5	7,6	7,9	8,3	8,6	9	5,4	5,8
6	3,8	4,1	4,3	5	5,3	5,5	5,8	6	3,6	3,8
7	4,8	5,1	5,4	6,3	6,6	6,9	7,2	7,5	4,5	4,8
8	8	8,5	9	10,5	11	11,5	12	12,5	7,5	8

9	6,4	6,8	7,2	8,4	8,8	9,2	9,6	10	6	6,4
10	4,5	4,8	5	5,9	6,2	6,4	6,7	7	4,2	4,5
11	5,1	5,4	5,8	6,7	7	7,4	7,7	8	4,8	5,1
12	8,8	9,4	9,9	11,6	12,1	12,7	13,2	13,8	8,3	8,8
13	7,2	7,7	8,1	9,5	9,9	10,4	10,8	11,3	6,8	7,2
14	5,3	5,6	5,9	6,9	7,3	7,6	7,9	8,3	5	5,3
15	5,6	6	6,3	7,4	7,7	8,1	8,4	8,8	5,3	5,6
16	8,6	9,2	9,7	11,3	11,9	12,4	13	13,5	8,1	8,6

Для этого:

1. Выровнять исходный ряд методом скользящей средней.
2. Определить значения сезонной компоненты.
3. Устранить сезонную компоненту из исходных уровней ряда и получить выровненные данные ($T + E$) в аддитивной модели.
4. Аналитически выровнять уровни ($T + E$) и рассчитать значения T с использованием полученного уравнения тренда.
5. Определить полученные по модели значения ($T + S$).
6. Определить абсолютные и относительные ошибки.
7. Осуществить прогноз объема потребления электроэнергии организациями района на первое полугодие ближайшего следующего года.

Отчет должен содержать:

- 1 Выровненный исходный ряд методом скользящей средней.
- 2 Расчет значений сезонной компоненты.
- 3 Выравненные данные ($T + E$) модели.
- 4 Расчет значений T .
- 5 График потребления электроэнергии организациями района (фактические, выровненные и полученные по аддитивной модели значения уровней ряда).
- 6 Расчет ошибок.
- 7 Прогноз объема потребления электроэнергии организациями района на первое полугодие ближайшего следующего года.
- 8 Выводы.

Защита работы проводится в устной форме, состоит в предоставлении студентом правильно выполненного отчета по работе и в ответах на вопросы, представленные выше.

Контрольные вопросы

1. Опишите общий вид аддитивной модели временного ряда.
2. Как производится расчет абсолютных ошибок
3. Перечислите основные этапы построения аддитивной модели.
4. С какими целями проводятся выявление и устранение сезонного эффекта.
5. Как осуществляется прогноз по данной модели.

Список литературы: 1, 2, 3, 4

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ, СОДЕРЖАЩИХ СЕЗОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ, ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ МОДЕЛИ

Цель: приобрести знания в области моделирования на основе построения трендовых моделей прогнозирования; изучение практики их применения в управлении бизнесом

Планируемые результаты обучения: знание основных понятий теории прогнозирования на основе экстраполяции тенденций, технологии принятия управленческих решений. Прогнозирование временных рядов, содержащих сезонные колебания, по мультипликативной модели

В результате освоения темы формируются индикаторы компетенций:

ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.

ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

Теоретическая часть

Во временных рядах экономических процессов могут иметь место более и менее регулярные колебания. Если они носят строго периодический или близкий к нему характер и завершаются в течение одного года, то их называют *сезонными колебаниями*. В тех случаях, когда период колебаний составляет несколько лет, то говорят, что во временном ряду присутствует *циклическая компонента*.

Существует несколько подходов к анализу структуры временных рядов, содержащих сезонные или циклические колебания. Простейший подход – расчет значений сезонной компоненты методом скользящей средней и построение *аддитивной или мультипликативной модели временного ряда*.

Общий вид мультипликативной модели выглядит так:

$$Y = T \cdot S \cdot E. \quad (1)$$

Эта модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как произведение трендовой (T), сезонной (S) и случайной (E) компонент.

Если амплитуда сезонных колебаний возрастает или уменьшается, строят мультипликативную модель временного ряда, которая ставит уровни ряда в зависимость от значений сезонной компоненты.

Построение мультипликативной модели аналогично аддитивной сводится к расчету значений T , S и E для каждого уровня ряда.

Процесс построения модели включает в себя следующие шаги.

1. Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.
2. Расчет значений сезонной компоненты S .
4. Устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выровненных данных ($T \cdot E$).
4. Аналитическое выравнивание уровней ($T \cdot E$) и расчет значений T с использованием полученного уравнения тренда,
5. Расчет полученных по модели значений ($T \cdot S$).
6. Расчет абсолютных и/или относительных ошибок.

Если полученные значения ошибок не содержат автокорреляции, ими можно заменить

исходные уровни ряда и в дальнейшем использовать временной ряд ошибок E для анализа взаимосвязи исходного ряда и других временных рядов.

Пример выполнения задания

Пример 1. Используя данные поквартальной прибыли туристической компании произвести моделирование временного ряда на основе мультипликативной модели (табл. 1).

Таблица 1 – Прибыль туристической компании за четыре года, тыс. \$

№ квартала, t	Прибыль туристической компании, U_i
1	72
2	100
3	90
4	64
5	70
6	92
7	80
8	58
9	62
10	80
11	68
12	48
13	52
14	60
15	50
16	30

Рассчитаем поквартальные значения прибыли (таблица 2)

Таблица 2 – Прибыль туристической компании, тыс. \$

Год	Квартал	I	II	III	IV
1	1	72	100	90	64
	2	70	92	80	58
	3	62	80	68	48
	4	52	60	50	30

Представим временной ряд прибыли туристической компании графически (рисунок 1).

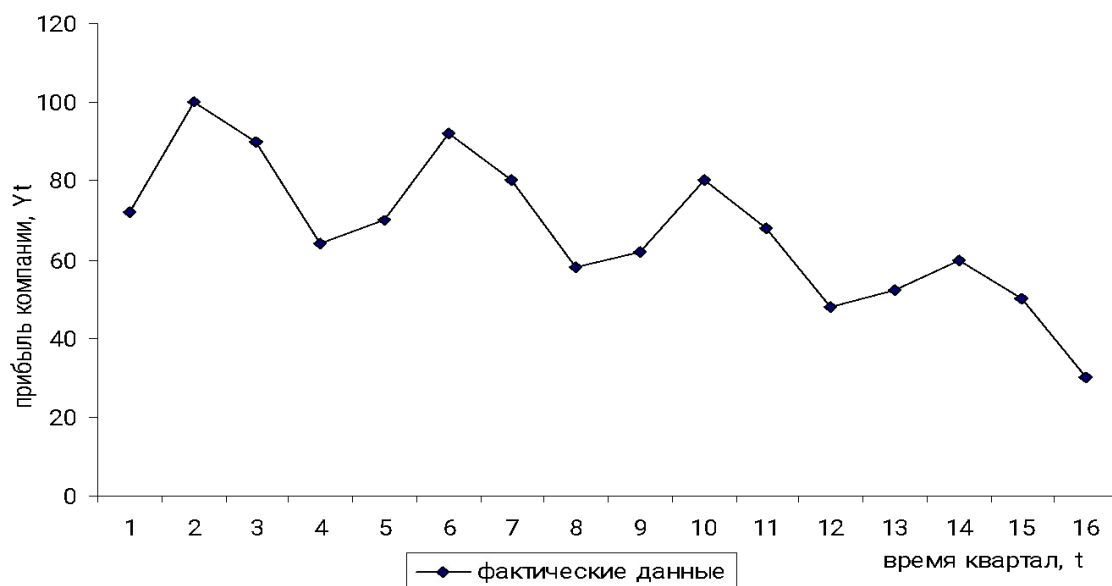


Рисунок 1 – Прибыль туристической компании

График временного ряда прибыли туристической компании (рис. 1) свидетельствует о наличии сезонных колебаний (период колебаний равен 4) и общей убывающей тенденции ряда. Прибыль компании в весенне-летний период выше, чем в осенне-зимний период. Поскольку амплитуда сезонных колебаний уменьшается, можно предположить существование мультипликативной модели. Определим ее компоненты.

Проведем выравнивание исходных уровней ряда методом скользящей средней. Методика, применяемая на этом шаге, полностью совпадает с методикой аддитивной модели. Результаты расчетов оценок сезонной компоненты представлены в таблице 3. Найдем оценки сезонной компоненты как частное от деления фактических уровней ряда на центрированные скользящие средние (гр. 6 таблица 3).

Таблица 3 – Расчет оценок сезонной компоненты в мультипликативной модели

№ квартала, t	Прибыль компании, Y_t	Итого за четыре квартала	Скользящая средняя за четыре квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	2	3	4	5	6
1	72				
2	100				
3	90	326	81,5	81,25	1,108
4	64	324	81,0	80,00	0,800
5	70	316	79,0	77,75	0,900
6	92	306	76,5	75,75	1,215
7	80	300	75,0	74,00	1,081
8	58	292	73,0	71,50	0,811
9	62	280	70,0	68,50	0,905
10	80	268	67,0	65,75	1,217
11	68	258	64,5	63,25	1,075
12	48	248	62,0	59,50	0,807
13	52	228	57,0	54,75	0,950
14	60	210	52,5	50,25	1,194
15	50	192	48,0		
16	30				

Используем эти оценки для расчета значений сезонной компоненты S (табл. 4). Для этого найдем средние за каждый квартал оценки сезонной компоненты S_i . Взаимная погашаемость сезонных воздействий в мультипликативной модели выражается в том, что сумма значений сезонной компоненты по всем кварталам должна быть равна числу периодов в цикле. В данном случае число периодов одного цикла (год) равно 4 (четыре квартала).

Имеем:

$$0,918 + 1,209 + 1,088 + 0,808 = 4,024.$$

Определим корректирующий коэффициент: $k = 4/4,023 = 0,9944$.

Таблица 4 – Расчет сезонной компоненты в мультипликативной модели

Показатели	Год	№ квартала, i			
		I	II	III	IV
	1	-	-	1,108	0,800
	2	0,900	1,215	1,081	0,817
	3	0,905	1,217	1,075	0,807
	4	0,950	1,194	-	-
Итого за i-й квартал (за все годы)		2,755	3,626	3,264	2,424
Средняя оценка сезонной компоненты для i-го квартала, S_i		0,918	1,209	1,088	0,808
Скорректированная сезонная компонента, S_i		0,913	1,202	1,082	0,803

Определим скорректированные значения сезонной компоненты, умножив ее средние оценки на корректирующий коэффициент k .

$$S_i = S_i \cdot k, \quad (2)$$

где $i = 1:4$

Проверим условие равенства 4 суммы значений сезонной компоненты:

$$0,913 + 1,202 + 1,082 + 0,803 = 4.$$

Получим следующие значения сезонной компоненты:

I квартал: $S_1 = 0,913$;

II квартал: $S_2 = 1,202$;

III квартал: $S_3 = 1,082$;

IV квартал: $S_4 = 0,804$.

Занесем полученные значения в таблицу 10.5 для соответствующих кварталов каждого года (стр. 3).

Разделим каждый уровень исходного ряда на соответствующие значения сезонной компоненты. Тем самым мы получим величины $T \cdot E = Y:S$ (гр. 4 таблица 5), которые содержат только тенденцию и случайную компоненту.

Занесем полученные значения в таблицу 5 для соответствующих кварталов каждого года (стр. 3).

Таблица 5 – Расчет выровненных значений T и ошибок E в мультипликативной модели

t	y_t	S_t	$T \cdot E =$ $= y_t / S_t$	T	$T \cdot S$	$E = y_t :$ $(T \cdot S)$	$E = y_t -$ $-(T \cdot S)$	$(E)^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	72	0,913	78,86	87,80	80,16	0,898	-8,16	66,66
2	100	1,202	83,19	85,03	102,20	0,978	-2,20	4,86
3	90	1,082	83,18	82,25	89,00	1,011	1,00	1,00
4	64	0,803	79,70	79,48	63,82	1,003	0,18	0,03
5	70	0,913	76,67	76,70	70,03	1,000	-0,03	0,00
6	92	1,202	76,54	73,93	88,86	1,035	3,14	9,85
7	80	1,082	73,94	71,15	76,99	1,039	3,01	9,08
8	58	0,803	72,23	68,38	54,91	1,056	3,09	9,57
9	62	0,913	67,91	65,60	59,90	1,035	2,10	4,43
10	80	1,202	66,56	62,83	75,52	1,059	4,48	20,08
11	68	1,082	62,85	60,05	64,98	1,047	3,02	9,14
12	48	0,803	59,78	57,28	45,99	1,044	2,01	4,03
13	52	0,913	56,96	54,50	49,76	1,045	2,24	5,02
14	60	1,202	49,92	51,73	62,18	0,965	-2,18	4,73
15	50	1,082	46,21	48,95	52,97	0,944	-2,97	8,79
16	30	0,803	37,36	46,18	37,08	0,809	-7,08	50,12

Разделим каждый уровень исходного ряда на соответствующие значения сезонной компоненты. Тем самым мы получим величины $T \cdot E = Y : S$ (гр. 4 таблица 5), которые содержат только тенденцию и случайную компоненту.

Определим компоненту T в мультипликативной модели. Для этого рассчитаем параметры линейного тренда, используя уровни $(T \cdot E)$. Результаты аналитического выравнивания этого ряда представлены ниже:

Константа	90,585150
Коэффициент регрессии	-2,773250
Стандартная ошибка коэффициента регрессии	0,225556
R-квадрат	0,915239
Число наблюдений	16

Число степеней свободы

14

Уравнение тренда имеет следующий вид: $T = 90,59 - 2,773 t$.

Подставляя в это уравнение значения $t = 1, \dots, 16$, найдем уровни T для каждого момента времени (гр. 5 таблица 5). График уравнения тренда приведен на рисунке 2.

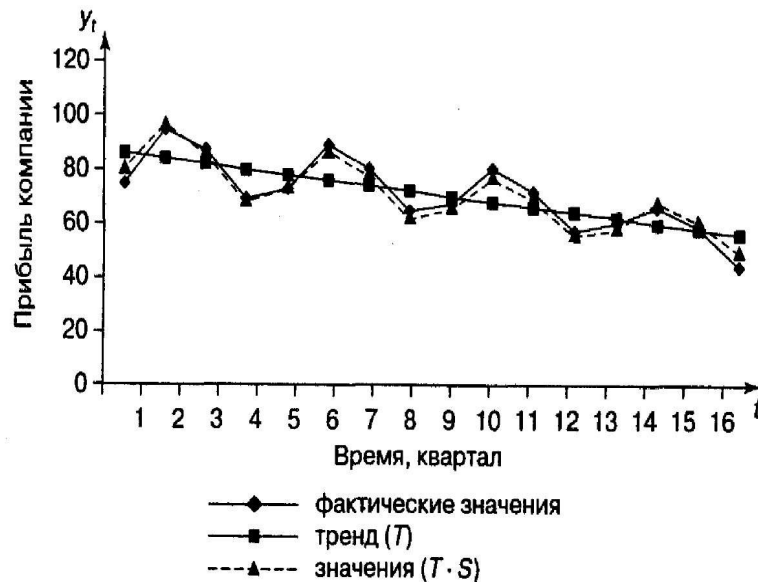


Рисунок 2 – Прибыль компании (фактические и выровненные по мультипликативной модели значения уровней ряда)

Найдем уровни ряда по мультипликативной модели, умножив уровни T на значения сезонной компоненты для соответствующих кварталов. Графически значения $(T \cdot S)$ представлены на рисунке 2.

Расчет ошибки в мультипликативной модели производится по формуле:

$$E = Y : (T \cdot S). \quad (3)$$

Численные значения ошибки приведены в гр. 7 таблица 10.5. Если временной ряд ошибок не содержит автокорреляции, его можно использовать вместо исходного ряда для изучения его взаимосвязи с другими временными рядами. Для того чтобы сравнить мультипликативную модель и другие модели временного ряда, можно по аналогии с аддитивной моделью использовать сумму квадратов абсолютных ошибок. Абсолютные ошибки в мультипликативной модели определяются по следующей формуле:

$$E = y_t - (T \cdot S). \quad (4)$$

В данной модели сумма квадратов абсолютных ошибок составляет 207,40. Общая сумма квадратов отклонений фактических уровней этого ряда от среднего значения равна 5024. Таким образом, доля объясненной дисперсии уровней ряда равна: $(1 - 207,40/5023) = 0,959$, или 95,9 %.

Выявление и устранение сезонного эффекта (в некоторых источниках применяется термин «десезонализация уровней ряда») используются в двух направлениях.

Во-первых, воздействие сезонных колебаний следует устранять на этапе предварительной обработки исходных данных при изучении взаимосвязи нескольких временных рядов. Поэтому в российских и международных статистических сборниках часто публикуются данные, в которых устранено влияние сезонной компоненты (если это ежемесячная или поквартальная статистика), например показатели объемов производства в отдельных отраслях промышленности, уровни безработицы и т.д.

Во-вторых, это анализ структуры одномерных временных рядов с целью прогнозирования уровней ряда в будущие моменты времени.

Выполним прогнозирование по мультипликативной модели.

Необходимо сделать прогноз ожидаемой прибыли туристической компании за первое полугодие ближайшего следующего года.

Прогнозное значение F_t уровня временного ряда в мультипликативной модели в соответствии с соотношением (1) есть произведение трендовой и сезонной компонент. Для определения трендовой компоненты за каждый квартал воспользуемся уравнением тренда

$$T = 90,59 - 2,773 \cdot t.$$

Получим:

$$T_{17} = 90,59 - 2,773 \cdot 17 = 43,401;$$

$$T_{18} = 90,59 - 2,773 \cdot 18 = 40,626.$$

Значения сезонной компоненты равны

$$S_1 = 0,913 \text{ (I квартал);}$$

$$S_2 = 1,202 \text{ (II квартал).}$$

Таким образом,

$$F_{17} = T_{17} \cdot S_1 = 43,401 \cdot 0,913 = 39,626;$$

$$F_{18} = T_{17} \cdot S_2 = 40,626 \cdot 1,202 = 48,832.$$

Прогноз ожидаемой прибыли компании на первое полугодие ближайшего следующего года составит: $(39,626 + 48,832) = 88,458$ тыс. \$.

Задания

Задание 1 Используя данные поквартальной прибыли туристической компании произвести моделирование временного ряда на основе мультипликативной модели (табл. 5).

Таблица 5 – Прибыль туристической компании за четыре года, тыс. \$

№ квартала, t	Прибыль туристической компании, Y_i (№ варианта)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	58	61	65	76	79	83	86	90	54	43
2	80	85	90	105	110	115	120	125	75	60
3	72	77	81	95	99	104	108	113	68	54
4	51	54	58	67	70	74	77	80	48	38
5	56	60	63	74	77	81	84	88	53	42
6	74	78	83	97	101	106	110	115	69	55
7	64	68	72	84	88	92	96	100	60	48
8	46	49	52	61	64	67	70	73	44	35
9	50	53	56	65	68	71	74	78	47	38
10	64	68	72	84	88	92	96	100	60	48
11	54	58	61	71	75	78	82	85	51	41
12	38	41	43	50	53	55	58	60	36	29
13	42	44	47	55	57	60	62	65	39	31
14	48	51	54	63	66	69	72	75	45	36
15	40	43	45	53	55	58	60	63	38	30
16	24	26	27	32	33	35	36	38	23	18

Для этого:

1. Вывернуть исходный ряд методом скользящей средней.

2. Определить значения сезонной компоненты S .
3. Устранить сезонную компоненту из исходных уровней ряда и получить выровненные данные $(T \cdot E)$ в аддитивной модели.
4. Аналитически выровнять уровни $(T \cdot E)$ и рассчитать значения T с использованием полученного уравнения тренда.
5. Определить полученные по модели значения $(T \cdot E)$.
6. Определить абсолютные и относительные ошибки.
7. Осуществить прогноз прибыли туристической компании на первое полугодие следующего года.

Отчет должен содержать:

- 1 Выровненный исходный ряд методом скользящей средней.
- 2 Расчет значений сезонной компоненты.
- 3 Выравненные данные $(T \cdot E)$ модели.
- 4 Расчет значений T .
- 5 График прибыли туристической компании (фактические, выровненные и полученные по мультипликативной модели значения уровней ряда).
- 6 Расчет ошибок.
- 7 Прогноз прибыли туристической компании на первое полугодие следующего года.
- 8 Выводы.

Защита работы проводится в устной форме, состоит в предоставлении студентом правильно выполненного отчета по работе, коротком докладе и в ответах на вопросы представленных выше.

Использованы материалы сайта <http://axd.semestr.ru/> – Онлайн калькулятор по экономике

Контрольные вопросы

- 1 Опишите общий вид мультипликативной модели временного ряда.
- 2 Как производится расчет абсолютных ошибок
- 3 Перечислить основные этапы построения мультипликативной модели.
- 4 С какими целями проводятся выявление и устранение сезонного эффекта.
- 5 Как осуществляется прогноз по мультипликативной модели.

Список литературы: 1, 2, 3, 4

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

МОДЕЛИ КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В УПРАВЛЕНИИ БИЗНЕСОМ

Цель: приобрести знания в области моделирования на основе построения корреляционно-регрессионных моделей; изучение практики их применения в управлении бизнесом

Планируемые результаты обучения: формирование навыков практического применения корреляционно-регрессионного анализа для прогнозирования и способности готовить аналитические материалы для управления бизнес-процессами; знание основных понятий теории моделирования на основе инструментария корреляционного и регрессионного анализа, технологии принятия управленческих решений.

В результате освоения темы формируются индикаторы компетенций:

ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.

ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

Теоретическая часть

Модели множественной регрессии содержат ряд переменных, которые влияют на прогнозируемую переменную. Если эти переменные выявлены, строится статистическая модель, которая используется для прогноза. Этот подход является более мощным, чем трендовые модели, которые используют данные о прошлых значениях прогнозируемой переменной.

Оценить влияние большого количества факторов на результативный показатель можно, введя их в модель, т. е. построив уравнение *множественной регрессии*:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (6.1)$$

где y – результативный признак,

$x_1, x_2, \dots, x_m$ – факторные признаки.

Для построения уравнения множественной регрессии чаще всего используется линейная функция:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_m \cdot x_m + \varepsilon. \quad (6.2)$$

Разработка модели множественной регрессии и исследование экономических процессов на основе многофакторного корреляционно-регрессионного анализа включает в себя следующие основные этапы:

Постановка экономической проблемы и ее качественный анализ.

1. Формирование перечня факторов и их логический анализ.
2. Сбор исходных данных и их первичная обработка.
3. Спецификация функции регрессии.
4. Оценка параметров функции регрессии.
5. Отбор главных факторов.
6. Проверка адекватности модели.
7. Экономическая интерпретация.
8. Прогнозирование неизвестных значений зависимой переменной.

Для получения статистически значимой модели на один факторный признак требуется объем выборки, равный 5 – 8 наблюдениям.

, $((1))$
 где m – число факторов, включаемых в модель;
 k – число свободных членов в уравнении.

Задания

Задание 1. По исходным данным о производственно-хозяйственной деятельности промышленных предприятий, приведенных в таблице 1, необходимо:

- сформулировать задачи и цели построения многофакторной корреляционно-регрессионной модели;
- определить минимальный объем выборки, необходимый для анализа.

Контрольные вопросы

- 1 Необходимость применения многофакторной регрессии при прогнозировании экономических показателей.
- 2 Основные этапы построения многофакторной корреляционно-регрессионной модели.

Список литературы: 1, 2, 3, 4

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

МОДЕЛИ КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В УПРАВЛЕНИИ БИЗНЕСОМ. РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ КРА В EXCEL

Цель: приобрести знания в области моделирования на основе построения корреляционно-регрессионных моделей; изучение практики их применения в управлении бизнесом

Планируемые результаты обучения: формирование навыков практического применения корреляционно-регрессионного анализа для прогнозирования и способности готовить аналитические материалы для управления бизнес-процессами; знание основных понятий теории моделирования на основе инструментария корреляционного и регрессионного анализа, технологии принятия управленческих решений.

В результате освоения темы формируются индикаторы компетенций:

ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.

ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

Теоретическая часть

Исходные данные для выполнения многофакторного корреляционно-регрессионного анализа влияния факторов на зависимую переменную собраны в виде динамических рядов и представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Исходные данные

Номер наблюдения	Переменные					
	Объясняющие переменные					Зависимая переменная
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Y
1	2	3	4	5	6	7
1	1,35	7394	0,91	14257	0,23	9,35
2	1,39	11586	0,68	22661	0,43	9,87
3	1,16	26609	0,94	52509	0,31	8,17
4	1,27	7801	0,89	14903	0,26	9,12
5	1,16	11587	0,94	25587	0,49	5,88
6	1,25	9475	2,06	16821	0,36	6,30
7	1,13	10811	1,96	19459	0,37	6,22
8	1,10	6371	1,02	12973	0,43	5,49
9	1,15	26761	1,85	50907	0,35	6,50
10	1,23	4210	0,88	6920	0,38	6,61

11	1,39	3557	0,62	5736	0,42	4,32
12	1,38	14148	1,09	26705	0,30	7,37
13	1,35	9872	1,60	20068	0,32	7,02
14	1,42	59,75	1,53	11487	0,25	8,25
15	1,37	16662	1,40	32029	0,31	8,15
16	1,41	9166	2,22	18946	0,26	8,72
17	1,35	15118	1,32	28025	0,37	6,64
18	1,48	11429	1,48	20968	0,29	8,10
19	1,24	6462	0,68	11049	0,34	5,52
20	1,40	24628	2,30	45893	0,23	9,37
21	1,45	49727	1,37	99400	0,17	13,17
22	1,40	11470	1,51	20719	0,29	6,67
23	1,28	19448	1,43	36813	0,41	5,68
24	1,33	18963	1,82	33956	0,41	5,22
25	1,22	9185	2,62	17016	0,22	10,02
26	1,28	17478	1,75	34873	0,29	8,16
27	1,47	6265	1,54	11237	0,51	3,78
28	1,27	8810	2,25	17306	0,36	6,48
29	1,51	17659	1,07	39250	0,23	10,44
30	1,46	10342	1,44	19074	0,26	7,65

В таблице представлены значения следующих факторов:

x_1 – коэффициент сменности оборудования;

x_2 – среднегодовая численность рабочих;

x_3 – фондоотдача;

x_4 – среднегодовой фонд заработной платы рабочих;

x_5 – трудоемкость единицы продукции.

Зависимая переменная y – производительность труда рабочих

Первые два этапа построения модели включают *априорное исследование экономической проблемы и формирование перечня факторов, и их логический анализ*. В нашем примере производительность труда является зависимой переменной – y .

Третий этап построения модели включает *сбор исходных данных и их первичную обработку*.

Для получения статистически значимой модели на один факторный признак требуется объем выборки, равный 5 – 8 наблюдениям.

$$n_{\min} = 5 \cdot (m + k), \quad ((1))$$

где m – число факторов, включаемых в модель;

k – число свободных членов в уравнении.

Так как в данную модель включены 5 факторов, то минимальный объем выборки равен 30 наблюдениям:

$$n_{\min} = 5 \cdot (5 + 1) = 30$$

Четвертый этап построения модели заключается в *спецификации функции регрессии*.

В нашем примере предполагаем, что имеет место множественная линейная регрессия, т. е. производительность труда линейно зависит от выбранных пяти факторов $x_1, x_2, \dots, x_6$.

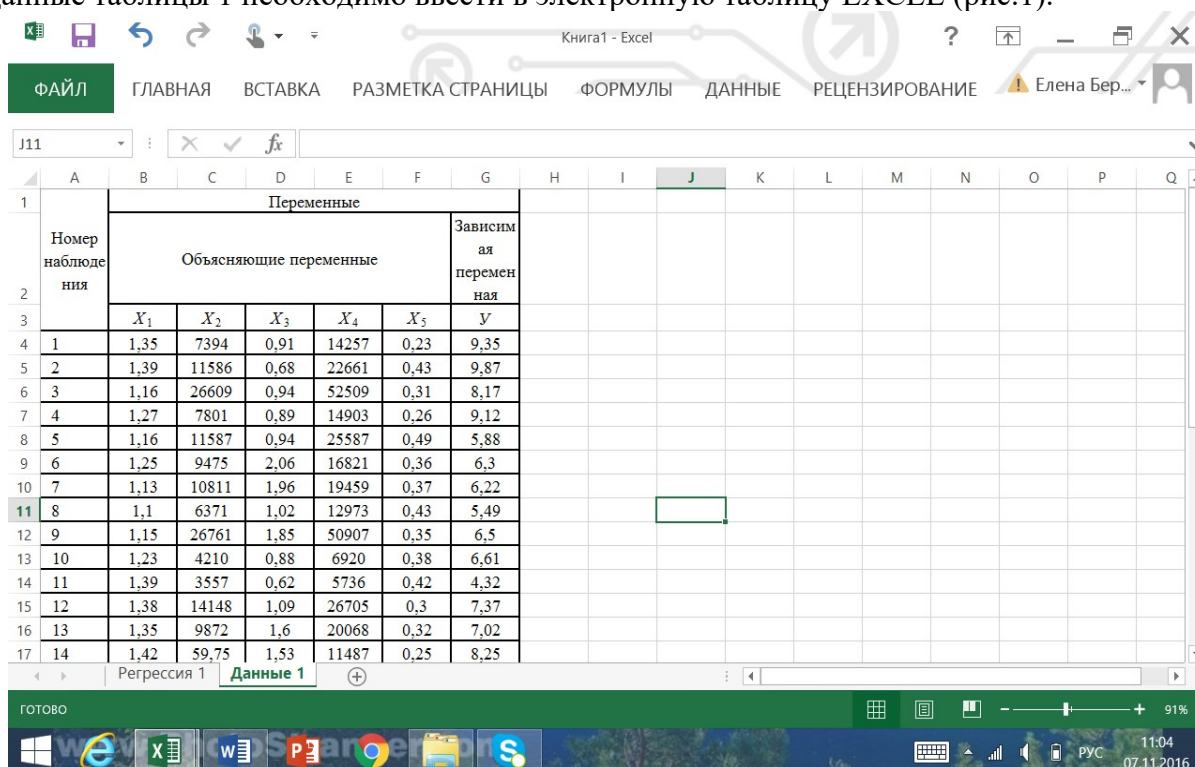
Уравнение регрессии имеет следующий вид:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + a_4 \cdot x_4 + a_5 \cdot x_5, \quad (2)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_5$ – параметры уравнения регрессии, подлежащие оценке.

На пятом этапе построения модели происходит *оценка параметров функции регрессии*.

Данный этап выполняется с использованием программного продукта EXCEL. Для этого данные таблицы 1 необходимо ввести в электронную таблицу EXCEL (рис.1).



Номер наблюдения	Объясняющие переменные					Зависимая переменная
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
1	1,35	7394	0,91	14257	0,23	9,35
2	1,39	11586	0,68	22661	0,43	9,87
3	1,16	26609	0,94	52509	0,31	8,17
4	1,27	7801	0,89	14903	0,26	9,12
5	1,16	11587	0,94	25587	0,49	5,88
6	1,25	9475	2,06	16821	0,36	6,3
7	1,13	10811	1,96	19459	0,37	6,22
8	1,1	6371	1,02	12973	0,43	5,49
9	1,15	26761	1,85	50907	0,35	6,5
10	1,23	4210	0,88	6920	0,38	6,61
11	1,39	3557	0,62	5736	0,42	4,32
12	1,38	14148	1,09	26705	0,3	7,37
13	1,35	9872	1,6	20068	0,32	7,02
14	1,42	59,75	1,53	11487	0,25	8,25

Рисунок 1 – Фрагмент таблицы «Исходные данные»

Для выполнения регрессионного анализа в MS EXCEL имеется набор инструментов, называемый **Пакет анализа**, который может быть использован для решения сложных статистических задач. Порядок действий, следующий:

- 1) проверьте доступ к пакету **Пакет анализа**. В главном меню последовательно выберите **Файл/Параметры/Надстройки**. Проверьте наличие **Пакета анализа** в **Активных надстройках приложения** (рис. 2);
- 2) в главном меню выберите **Файл/Данные/Анализ данных/Регрессия**. Щелкните по кнопке **ОК** (рис. 3).
- 3) заполните диалоговое окно ввода данных и параметров вывода (рис. 4):
 во «*входной интервал Y*» – необходимо ввести ссылку на ячейки, содержащие анализируемые данные результативного признака. Для этого стрелкой «мыши» пометьте соответствующий интервал в таблице исходных данных. В данном примере следует выделить интервал **G3:G33**;

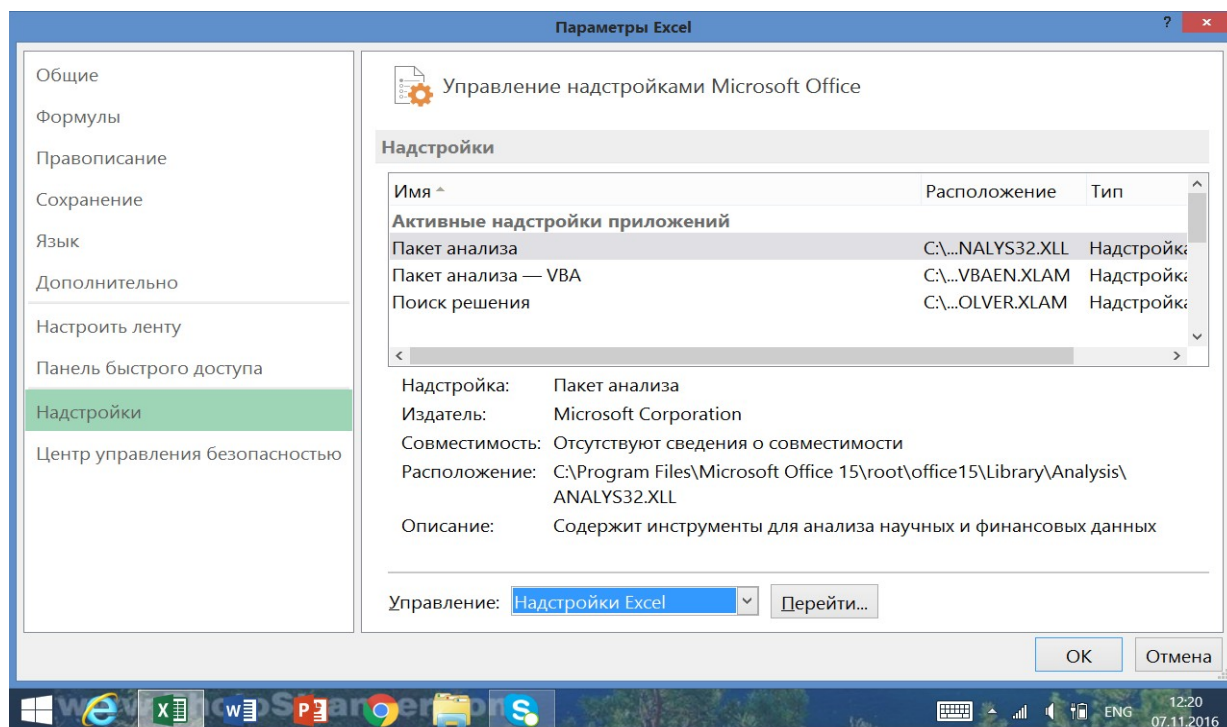


Рисунок 2 – Подключение надстройки Пакет анализа

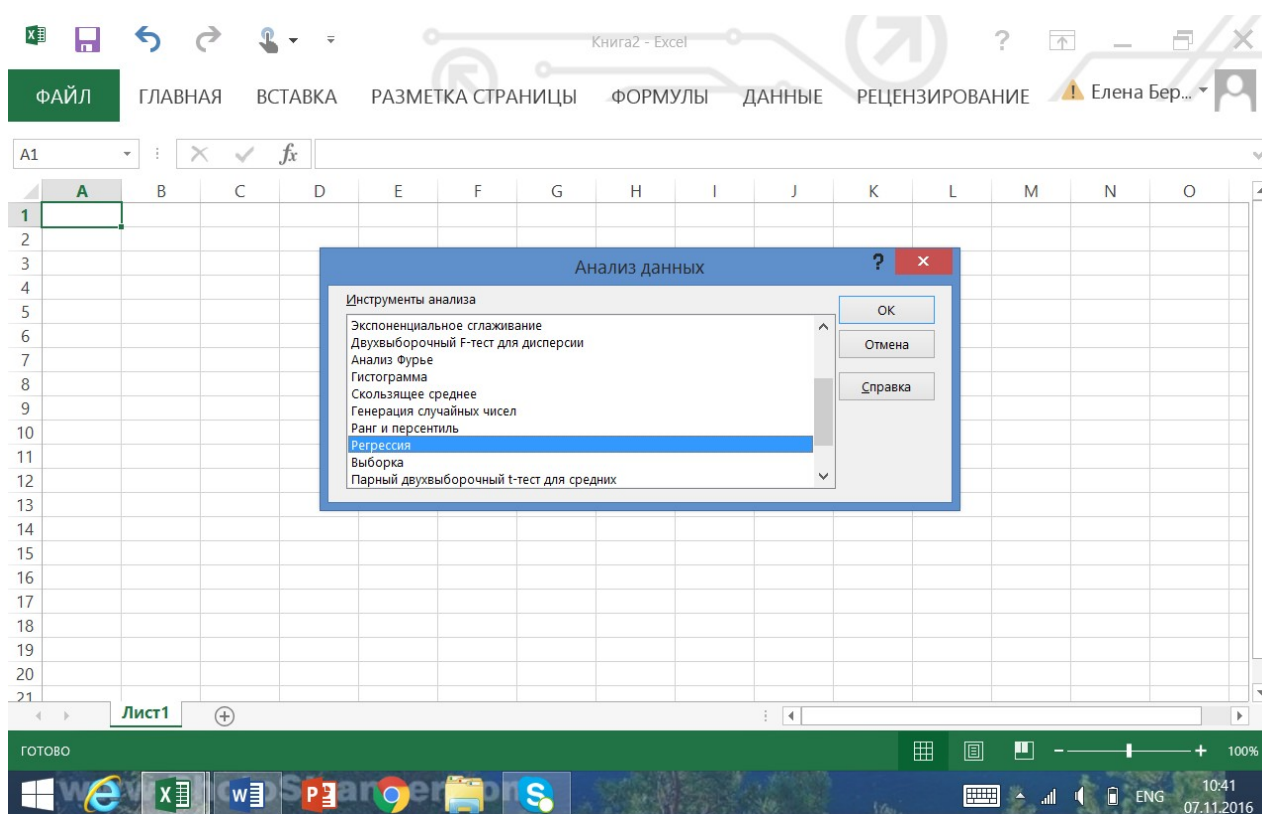


Рисунок 3 – Окно диалога «Анализ данных»

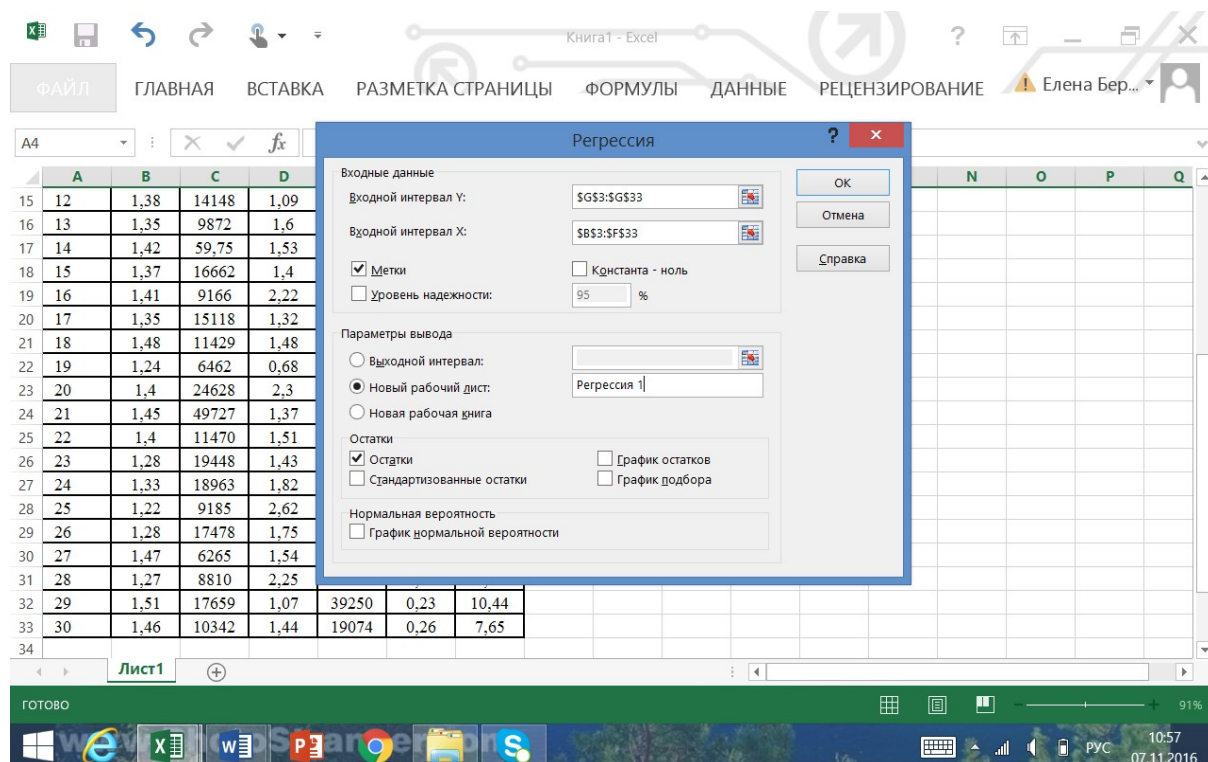


Рисунок 4 – Диалоговое окно ввода параметров инструмента Регрессия

во «*входной интервал X*» – вводим ссылку на ячейки, содержащие данные всех факторов, т. е. $X_1 - X_5$, выделив с помощью «мыши» в таблице исходных данных интервал ячеек **B3:F33**;

Метки – флажок, который указывает, содержит ли первая строка название столбцов или нет;

Константа – ноль – флажок, указывающий на наличие или отсутствие свободного члена в уравнении;

Уровень надежности – устанавливается флажок, если необходимо ввести уровень надежности, который будет использован дополнительно к уровню 95 %, применяемому по умолчанию;

Выходной интервал – достаточно указать левую верхнюю ячейку будущего диапазона;

Новый рабочий лист – можно задать произвольное имя нового листа.

Если необходимо получить информации и графики остатков, установите соответствующие флажки в диалоговом окне. Щелкните по кнопке **ОК** (рис. 4).

Результаты регрессионного анализа, выполненного с использованием **Анализа данных**, выводятся на экран (рис. 5).

Microsoft Excel - X0000142.xls [Только для чтения]

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос

Параметры страницы...

Calibri 11 Ж К Ч

К9

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	
1	Вывод итогов																														
2																															
3	Регрессионная статистика																														
4	Множественный R		0,865799993																												
5	R-квадрат		0,749609627																												
6	Нормированный R-квадрат		0,697444966																												
7	Стандартная ошибка		1,103215504																												
8	Наблюдения		30																												
9																															
10	Дисперсионный анализ																														
11			df	SS	MS	F	Значимость F																								
12	Регрессия	5	87,4479199	17,4896	14,3701	1,48516E-06																									
13	Остаток	24	29,2100268	1,21708																											
14	Итого	29	116,657947																												
15																															
16		Коэффициенты	Стандартная ошибка	t- статистика	P- значение	Верхние 95%	Нижние 95%	Верхние 95,0%	Нижние 95,0%																						
17	Пересечение	11,58184066	3,27284433	3,53877	0,00167	4,827021944	18,3367	4,82702	18,3367																						
18	X1	0,681409844	1,95681623	0,34822	0,73071	-3,357260365	4,72008	-3,3573	4,72008																						
19	X2	-0,000179481	0,0001579	-1,1367	0,2669	-0,000505373	0,00015	-0,0005	0,00015																						
20	X3	-0,382923848	0,40851186	-0,9374	0,35791	-1,226050891	0,4602	-1,2261	0,4602																						
21	X4	0,000124375	8,201E-05	1,51658	0,14243	-4,48854E-05	0,00029	-4E-05	0,00029																						
22	X5	-16,17392688	2,9950579	-5,4002	1,5E-05	-22,35542257	-9,9924	-22,355	-9,9924																						
23																															
24																															
25																															
26	Вывод ОСТАТНА																														
27																															
28	Наблюдение	Предсказанное Y	Остаток																												
29	1	8,879415847	0,47058415																												
30	2	6,052824733	3,81717527																												
31	3	8,75421434	-0,58342143																												
32	4	8,354641424	0,76535838																												
33	5	5,189846518	0,69015348																												
34	6	6,21370054	0,08629946																												
35	7	6,09679982	0,12320018																												
36	8	5,456067428	0,03393257																												
37	9	7,524659717	-1,02465972																												
38	10	6,041971749	0,56802825																												
39	11	5,573541198	-1,2535412																												
40	12	8,034765861	-0,66476586																												
41	13	7,437535528	-0,41753553																												
42	14	9,338059458	-1,08805946																												
43	15	7,958464716	0,19153518																												
44	16	8,198607415	0,52139829																												
45	17	6,784155126	-0,14415513																												
46	18	7,889773818	0,10202618																												
47	19	6,881587044	-1,36158704																												

Регрессия 1

Данные 1

Готово

NUM

12:55 07.11.2016

Рисунок 5 – Результаты регрессионного анализа

Уравнение регрессии строится по данным, указанным в графе «Коэффициенты» (ячейки **B16:B22**). Строка «Y – пересечение» показывает значение свободного члена и соответствующих статистик, строки «X1 – X5» – значения коэффициентов регрессии и соответствующих статистик. Уравнение регрессии имеет вид:

$$y = 11,58 + 0,681 \cdot x_1 - 0,0002 \cdot x_2 - 0,383 \cdot x_3 + 0,0001 \cdot x_4 - 16,17 \cdot x_5.$$

Для данной регрессии коэффициент множественной корреляции равен $R = 0,866$ (ячейка **B4**), что свидетельствует о высокой связи между выбранными факторными признаками X1 – X5 и производительностью труда рабочих Y.

Коэффициент детерминации (ячейка **B5**) показывает, что 74,96 % вариации результативного признака – производительность труда рабочих, объясняется вариацией факторных признаков, входящих в модель.

Шестой этап построения многофакторной модели является основным, самым большим по объему выполняемых работ и включает в себя *процедуру отбора главных факторов*. После построения многофакторной корреляционно-регрессионной модели необходимо *провести отбор главных факторов, оказывающих наиболее сильное влияние на функцию Y*, т. к. модель, включающая большое количество факторов, неустойчива. Неустойчивость модели заключается в необъективном отражении изменения Y при соответствующих изменениях факторов. *Отбор факторов производится на основе анализа значений специальных статистических характеристик.*

Процедура отбора главных факторов выполняется в следующей последовательности:

- 1) анализ факторов на мультиколлинеарность и ее исключение;
- 2) анализ тесноты взаимосвязи факторов с зависимой переменной;
- 3) проверка коэффициентов регрессии на статистическую значимость;
- 4) анализ коэффициентов β факторов;
- 5) анализ факторов на управляемость;
- 6) построение новой регрессионной модели без исключенных факторов;
- 7) исследование целесообразности исключения факторов из модели с помощью коэффициента детерминации.

1) Анализ факторов на мультиколлинеарность и ее исключение

Определение мультиколлинеарности проводится путем анализа значений коэффициентов

парной корреляции r_{ij} между факторами X_i и X_j . Если $|r_{ij}| \geq 0,7$, то факторы X_i и X_j мультиколлинеарны.

Для получения коэффициентов парной корреляции необходимо вычислить корреляционную матрицу. Для этого необходимо:

- 1) вернуться на лист «Данные 1»;
- 2) в главном меню выбрать **Файл/Данные/Анализ данных/ Корреляция**. Щелкните по кнопке **ОК**;
- 3) заполнить диалоговое окно ввода данных и параметров вывода (рис. 6):

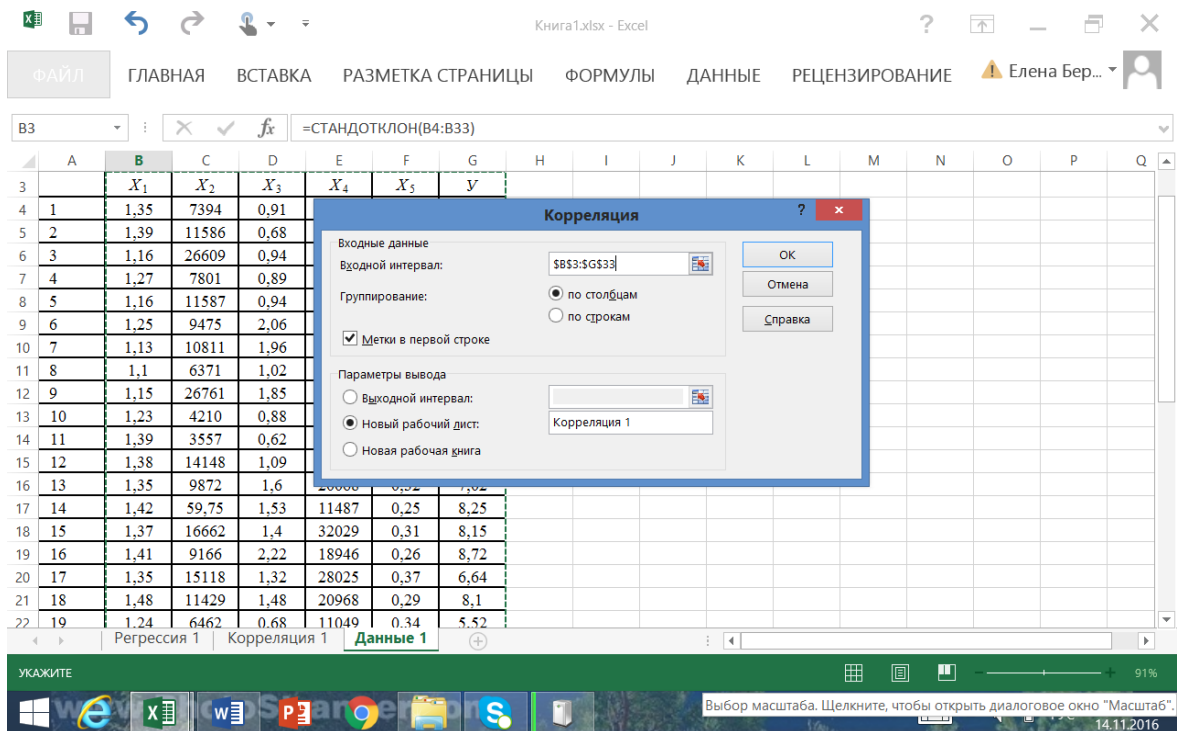


Рисунок 6 –Диалоговое окно ввода параметров инструмента Корреляция

во «входной интервал» – вводим ссылку на ячейки, содержащие анализируемые данные. Для этого стрелкой «мыши» необходимо выделить в таблице исходных данных интервал ячеек **B3:G33**, т. е. следует выделить все 6 столбцов и 30 строк таблицы;

Группирование – по столбцам или строкам необходимо указать дополнительно;

Метки – флажок, который указывает, содержит ли первая строка название столбцов или нет;

Выходной интервал – достаточно указать левую верхнюю ячейку будущего диапазона;

Новый рабочий лист – можно задать произвольное имя нового листа.

Результаты корреляционного анализа представлены на рисунке 7.

	X1	X2	X3	X4	X5	Y
X1	1					
X2	0,066922	1				
X3	-0,02299	0,127703	1			
X4	0,095393	0,989484	0,110982	1		
X5	-0,35207	-0,33185	-0,25466	-0,36902	1	
Y	0,330551	0,499681	0,088091	0,548481	-0,80284	1

Рисунок 7 – Корреляционная матрица

В рассматриваемом примере мультиколлинеарность присутствует между факторами x_2 и x_4 (коэффициент парной корреляции между ними равен 0,989).

Для устранения мультиколлинеарности один из факторов x_2 или x_4 необходимо исключить из модели. Факторы, подлежащие исключению, определяются в ходе последующей оценки других статистических характеристик.

2) Анализ тесноты взаимосвязи факторов с зависимой переменной

Для анализа тесноты взаимосвязи x и y используются значения коэффициента парной

корреляции между фактором и функцией ($r_{x_i y}$), представленные в последней строке корреляционной матрицы.

Факторы, для которых $r_{x_i y} = 0$, т. е. несвязанные с y , подлежат исключению в первую

очередь. Факторы, имеющие наименьшее значение $r_{x_i y}$, могут быть потенциально исключены из модели. В данном примере фактор x_2 мультиколлинеарный с фактором x_4 , в

меньшей степени связан с результативным признаком y ($r_{x_2 y} = 0,4997 \leq 0,5484$),

поэтому этот фактор x_2 потенциально исключается из модели.

Фактор x_3 необходимо исключить из модели, так как коэффициент парной корреляции

между этим фактором и результативным признаком близок к нулю ($r_{x_3 y} = 0,0881$).

3) Проверка коэффициентов регрессии на статистическую значимость

Проверка может быть произведена двумя способами: по критерию Стьюдента и по критерию Фишера.

В данном примере остановимся на проверке статистической значимости коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента:

$$t_k = \frac{a_k}{S_{a_k}}, \quad (5)$$

где a_k – коэффициент регрессии при k -м факторе;

S_{a_k} – стандартное отклонение оценки параметра a_k .

Критерий Стьюдента уже был вычислен при выполнении регрессионного анализа (см. Лист «Регрессия 1», столбец « t – статистика», рис. 6.7).

Число степеней свободы статистики t_k равно $f = n - m - 1$, где n – количество наблюдений, m – количество факторов, включенных в модель. Расчетное значение показателя t , сравнивают с критическим значением, найденным по таблице Приложения А.1.

При заданном уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числе степеней свободы $f = 30 - 5 - 1 = 24$, в данном примере $t_{24, 0,05}^{табл} = 2,064$.

Так как все значения t_k удовлетворяют неравенству $t_k < t^{табл}$ (за исключением x_5), следовательно, влияние выбранных факторов на зависимую переменную статистически незначимо, и полученную регрессионную модель можно использовать только для текущего анализа.

4) Анализ коэффициентов β факторов.

Для того, чтобы определить, какие факторы подлежат исключению, проведем анализ коэффициентов β факторов.

Коэффициент β показывает влияние анализируемых факторов на результативный признак с учетом различий в уровне их колеблемости:

$$\beta_k = a_k \frac{\sigma_{x_k}}{\sigma_y}, \quad (6)$$

где β_k – коэффициент β k -го фактора;

σ_{x_k} – среднеквадратическое отклонение k -го фактора;

σ_y – среднеквадратическое отклонение функции;

a_k – коэффициент регрессии при k -м факторе.

Из двух факторов x_i и x_j может быть исключен тот фактор, который имеет меньшее значение β .

Для расчета коэффициентов β предварительно необходимо рассчитать среднеквадратическое отклонение (в EXCEL оно называется стандартным отклонением) факторов и функции. Для этого:

- 1) на листе «Данные 1» в ячейку А34 введите наименование «Среднеквадратическое отклонение» и установите курсор в ячейку В34;
- 2) активизируйте Мастер функций любым из способов:
 - а) в главном меню выберите **Формулы / Вставить функцию**;
 - б) в строке формул выделите кнопку **Вставить функцию f_x** ;
 - 3) в окне **Вставка функции** (рис.8) **СТАНДОТКЛОН**. Щелкните по кнопке **ОК**;

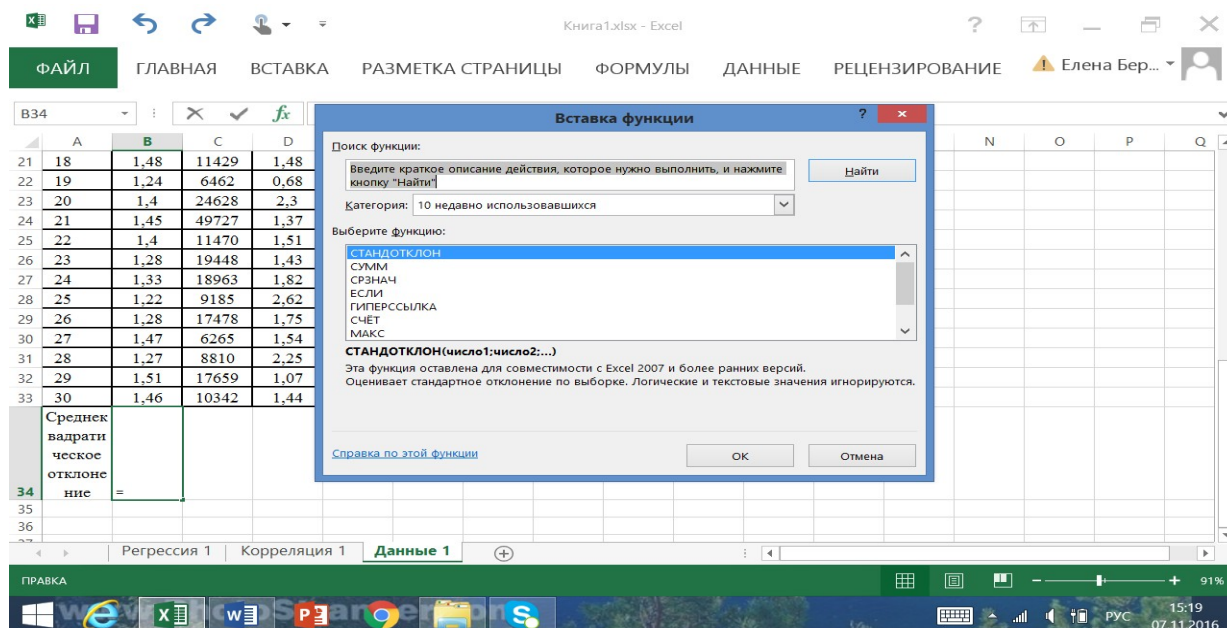


Рисунок 9 – Диалоговое окно «Среднеквадратическое отклонение»

Таким образом, будет рассчитано стандартное отклонение для анализируемых факторов и функции y (рис. 10);

	A	B	C	D	E	F	G
21	18	1,48	11429	1,48	20968	0,29	8,1
22	19	1,24	6462	0,68	11049	0,34	5,52
23	20	1,4	24628	2,3	45893	0,23	9,37
24	21	1,45	49727	1,37	99400	0,17	13,17
25	22	1,4	11470	1,51	20719	0,29	6,67
26	23	1,28	19448	1,43	36813	0,41	5,68
27	24	1,33	18963	1,82	33956	0,41	5,22
28	25	1,22	9185	2,62	17016	0,22	10,02
29	26	1,28	17478	1,75	34873	0,29	8,16
30	27	1,47	6265	1,54	11237	0,51	3,78
31	28	1,27	8810	2,25	17306	0,36	6,48
32	29	1,51	17659	1,07	39250	0,23	10,44
33	30	1,46	10342	1,44	19074	0,26	7,65
34	Среднее квадратическое отклонение	0,11	9478,02	0,53	18493,47	0,08	2,01

Рисунок 6.10 – Фрагмент листа «Расчет среднеекватрического отклонения»

б) на листе «**Корреляция 1**» создайте таблицу для расчета коэффициентов β . В столбце А разместите резульативный признак Y и мультиколлинеарные факторы x_2 и x_4 . В столбец В – коэффициенты a_k , которые скопируйте с листа «Регрессия 1». В столбец С необходимо скопировать среднеекватрическое отклонение с листа «Данные 1» следующим образом:

- скопировать ячейку С34 на листе «Данные 1» с помощью кнопки «**Копировать**» или контекстного меню;
- перейти на лист «Корреляция 1», поставить курсор в ячейку С14, вызвать с помощью правой кнопки контекстное меню, отметить «**Специальная вставка**» (рис. 11);

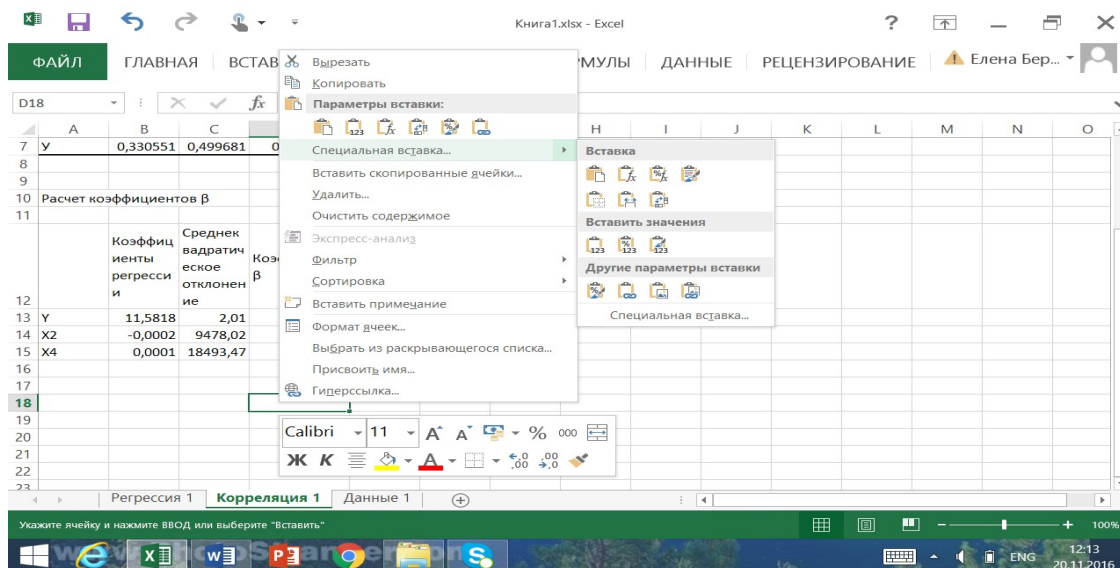


Рисунок 11 – Диалоговое окно «Специальная вставка»

- в) в появившемся диалоговом окне отметить «**Вставить значения**», щелкнуть по кнопке **ОК**. Аналогично скопировать остальные значения среднеквадратического отклонения;
- 7) в ячейку **D14** необходимо ввести формулу для расчета коэффициента β следующим образом:
- активизировать строку формул, набрав с клавиатуры знак «равно»;
 - с помощью «мыши» отметить ячейку **B14**, на клавиатуре нажать знак «умножить», отметить ячейку **C14**, на клавиатуре нажать знак «разделить», отметить ячейку **C13**, нажать клавишу **F4** на клавиатуре и щелкнуть по кнопке **ОК**;
 - скопировать ячейку **D14** в ячейку **D16**.

Результаты расчета коэффициентов β представлены на рисунке 12.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
7	Y	0,330551	0,499681	0,08809107	0,548481	-0,80284	1								
8															
9															
10	Расчет коэффициентов β														
11															
12		Коэффициенты регрессии	Среднеквадратическое отклонение	Коэффициент β											
13	Y	11,5818	2,01												
14	X2	-0,0002	9478,02	-0,8482											
15	X4	0,0001	18493,47	1,1468											
16															
17															
18															
19															
20															
21															
22															
23															

Рисунок 12 – Результаты расчета коэффициента β

Из двух факторов x_i и x_j может быть исключен тот фактор, который имеет меньшее значение коэффициента β . Следовательно, **исключить необходимо фактор x_2** . Вопрос об их окончательном исключении решается в ходе анализа других статистических характеристик.

5) Анализ факторов на управляемость.

В ходе логического анализа на основе экономических знаний исследователь должен сделать вывод: можно ли разработать организационно-технические мероприятия, направленные на улучшение (изменение) выбранных факторов на уровне предприятия. Если это возможно, то данные факторы управляемы. Неуправляемые факторы на уровне предприятия могут быть исключены из модели. В данном случае все факторы являются управляемыми на уровне предприятия.

б) Построение новой регрессионной модели без исключенных факторов.

После исключения факторных признаков x_2 и x_3 таблица исходных данных должна быть преобразована следующим образом:

- 1) вернитесь на лист «Данные 1» и скопируйте всю таблицу исходных данных на чистый рабочий лист;
- 2) удалите столбцы, соответствующие удаляемым факторным признакам (рис.13);

Номер наблюдения	Переменные			Зависимая переменная
	Объясняющие переменные			
	X_1	X_4	X_5	
1	1,35	14257	0,23	9,35
2	1,39	22661	0,43	9,87
3	1,16	52509	0,31	8,17
4	1,27	14903	0,26	9,12
5	1,16	25587	0,49	5,88
6	1,25	16821	0,36	6,3
7	1,13	19459	0,37	6,22
8	1,1	12973	0,43	5,49
9	1,15	50907	0,35	6,5
10	1,23	6920	0,38	6,61
11	1,39	5736	0,42	4,32
12	1,38	26705	0,3	7,37
13	1,35	20068	0,32	7,02

Рисунок 13 – Фрагмент листа «Данные 2»

- 3) переименуйте лист – «Данные 2»;
- 4) для новых исходных данных выполните функции «Регрессия» и «Корреляция»;
- 5) переименуйте листы с полученными результатами соответственно «Корреляция 2» (рис. 14) и «Регрессия 2» (рис. 15).

	X_1	X_4	X_5	Y
X_1	1			
X_4	0,095393	1		
X_5	-0,35207	-0,36902	1	
Y	0,330551	0,548481	-0,80284	1

Рисунок 14 – Фрагмент листа «Корреляция 2»

Вывод итогов									
Регрессионная статистика									
Множест	0,849727042								
R-квадрат	0,722036047								
Нормиро	0,689963283								
Стандарт	1,116772549								
Наблюд	30								
Дисперсионный анализ									
	df	SS	MS	F	Значимость F				
Регрессия	3	84,2312426	28,0771	22,51243608	2,13123E-07				
Остаток	26	32,42670406	1,24718						
Итого	29	116,6579467							
	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	Нижние 95,0%	Верхние 95,0%	
Y-пересеч	10,37517073	3,103947037	3,34257	0,002524406	3,994916217	16,7554	3,99492	16,7554	
X1	1,17315645	1,9567209	0,59955	0,553994045	-2,848940964	5,19525	-2,8489	5,19525	
X4	3,19532E-05	1,20747E-05	2,64629	0,013631681	7,13329E-06	5,7E-05	7,1E-06	5,7E-05	
X5	-16,11121015	2,844047089	-5,6649	5,86901E-06	-21,95723267	-10,265	-21,957	-10,265	

Рисунок 15 – Фрагмент листа «Регрессия 2»

7) Исследование целесообразности исключения факторов из модели с помощью коэффициента детерминации.

Прежде чем вынести окончательное решение об исключении переменных из анализа в силу их незначимого влияния на зависимую переменную, производят исследования совместного влияния факторов.

Для этого используется статистика, которая имеет F -распределение со степенями свободы

$$f_1 = m - m_1 = m_2 \text{ и } f_2 = n - m - 1:$$

$$F = \frac{(D_m - D_{m_1}) \cdot (n - m - 1)}{(D_{m_1} - m_1) \cdot (1 - m)}, \quad (7)$$

где D_m – означает коэффициент детерминации регрессии с m объясняющими переменными,

D_{m_1} – коэффициент детерминации регрессии с m_1 – факторами,

m – число переменных в первой регрессии;

m_1 – число переменных во второй регрессии.

Расчетное значение необходимо сравнить с критическим значением $F_{f_1 f_2}$, найденным по специальным таблицам при заданном уровне значимости α и степенях свободы f_1 и f_2

(прил. Б.3).

Если $F_{расч} \leq F_{f_1 f_2 \alpha}$, то включение дополнительно объясняющих переменных совместно не оказывает значимого влияния на переменную y и факторы окончательно исключаются из модели.

Если $F_{расч} > F_{f_1 f_2 \alpha}$, то исключенные объясняющие переменные совместно оказывают существенное влияние на вариацию переменной y и, следовательно, в этом случае все переменные нельзя исключать из модели.

Вычислим $F_{расч}$:

$$F_{расч} = \frac{(0,7496 - 0,7220) \cdot (30 - 5 - 1)}{(5 - 3) \cdot (1 - 0,7496)} = 1,32$$

С помощью таблицы А. 3 определим критическое значение F – статистики при

$f_1 = 5 - 3 = 2$ и $f_2 = 30 - 5 - 1 = 24$, и уровне значимости $\alpha = 0,06$. Табличное значение F – статистики равно $F_{2;24;0,05} = 3,4028$,

Так как $1,32 < 3,40$, следовательно, ранее исключенные факторы x_2 и x_3 совместно не оказывают статистически значимого влияния на переменную y .

Седьмой этап построения многофакторной модели включает в себя *проверку адекватности модели*.

Данный этап анализа включает:

а) *оценку значимости коэффициента детерминации*, т. е. оценивается влияние выбранных факторов на зависимую переменную, она производится с помощью F – статистики.

Проверка адекватности построенной модели проводится путем оценки значимости коэффициента детерминации, т. е. оценивания влияния выбранных факторов на зависимую переменную, которая производится с помощью F – статистики:

$$F = \frac{D(n-m-1)}{m(1-D)}, \quad (8)$$

где D – коэффициент множественной детерминации (второй регрессии).

Расчетное значение F – статистики, вычисленное по эмпирическим данным, сравнивается с табличным значением, которое определяется по таблице Б.3, при заданном уровне

значимости α и степенях свободы: $f_1 = m$ и $f_2 = n - m - 1$.

Расчетное значение F – статистики, вычисленное по формуле (6.8) с использованием эмпирических данных, составляет (представлено на рис.15):

$$F_{расч} = \frac{0,722 \cdot (30 - 3 - 1)}{3 \cdot (1 - 0,722)} = 22,5$$

Табличное значение F – статистики равно: $F_{3;26;0,05} = 3,369$ при $f_1 = 3$ и $f_2 = 26$ и $\alpha = 0,06$.

Так как $F_{расч} \geq F_{3;26;0,05}$, то вычисленный коэффициент детерминации значимо отличается от 0 и, следовательно, включенные в регрессию переменные достаточно объясняют зависимую переменную, что позволяет говорить о значимости самой регрессии (модели);

б) *проверку качества подбора теоретического уравнения с использованием средней*

ошибки аппроксимации:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{\hat{o}_i} \right| \cdot 100, \% \quad (9)$$

где y_i – фактическое значение результативного признака для i -го наблюдения;
 $\hat{y}_i$ – теоретическое значение результативного признака для i -го наблюдения, вычисленное по уравнению множественной регрессии.

Вычисление средней ошибки аппроксимации происходит следующим образом:

1) на листе «Регрессия 2» в ячейку **D26** введите заголовок «**Фактическое Y**», в ячейку **E26** – «**Составляющие для ошибки**»;

2) с листа «Данные 2» скопируйте на лист «Регрессия 2» фактические значения результативного признака:

а) на листе «Данные 2» выделите диапазон ячеек **E4:E33** и нажмите кнопку «**Копировать**» на панели **Стандартная**;

б) на листе «Регрессия 2» выделите ячейки **D27:D56** и нажмите кнопку «**Вставить**»;

3) в ячейку **E27** введите формулу для расчета, для чего:

а) на панели инструментов выделить кнопку **Вставка функции f_x** ;

б) в окне Категория (рис. 16) выберите **Математические**, в окне Функция – **ABS**.

Щелкните по кнопке **ОК**;

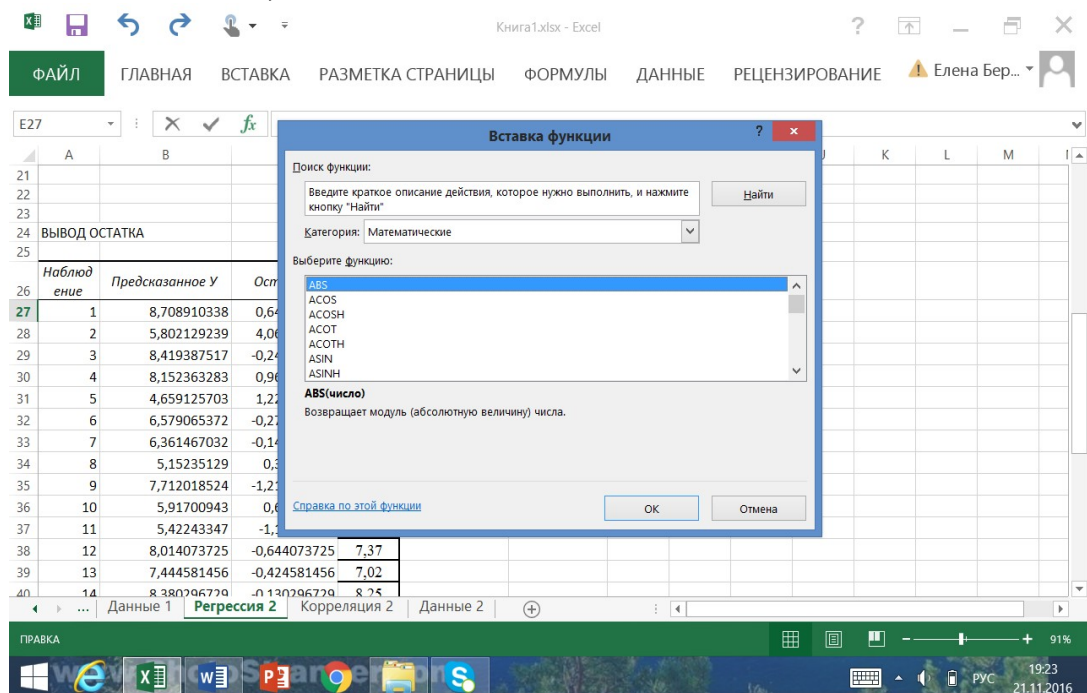


Рисунок 16– Фрагмент диалогового окна **Вставка функций**

в) заполните диалоговое окно ввода данных: в строку «**Число**» введите формулу **C27/D27*100** и нажмите кнопку **ОК** (рис. 17);

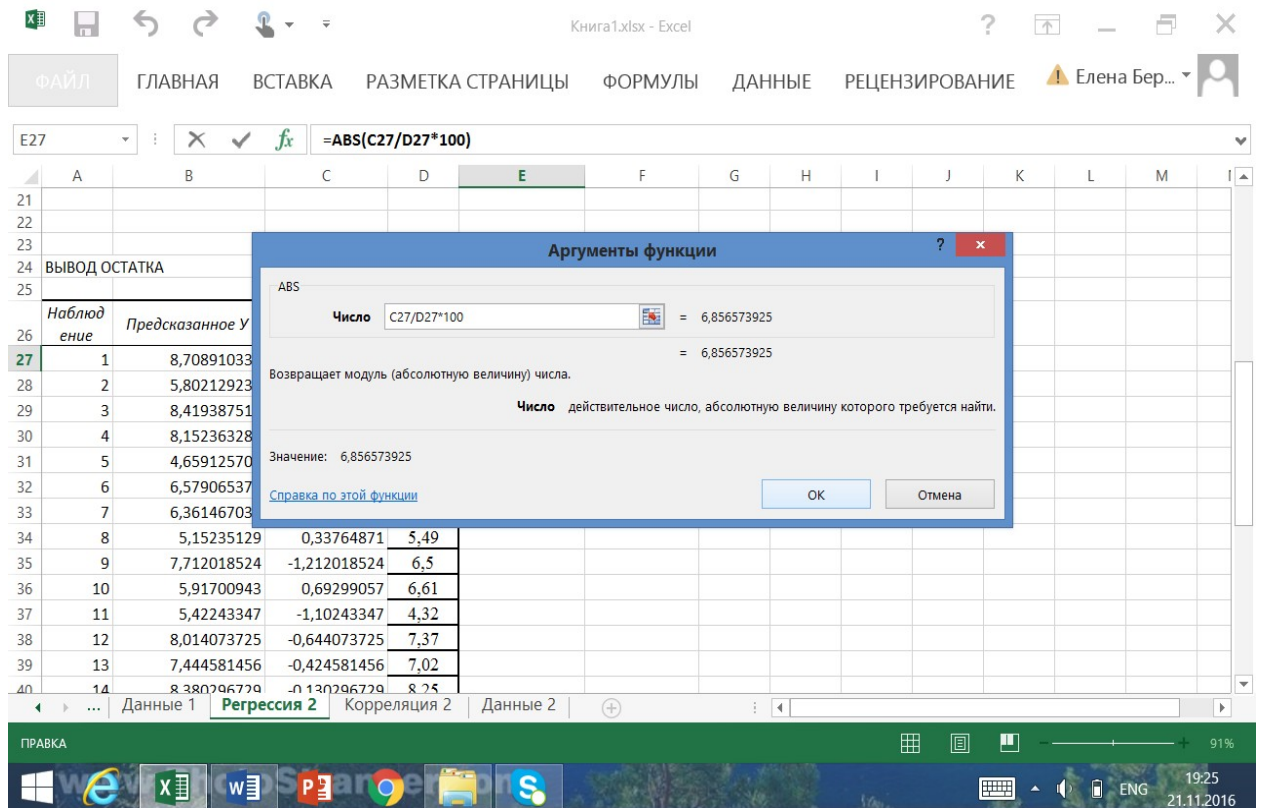


Рисунок 17–Диалоговое окно функции ABS

г) скопируйте данные ячейки **E27** в диапазон ячеек **E28:E56**;

Результаты расчетов составляющих для средней ошибки аппроксимации представлены на рис. 6.18.

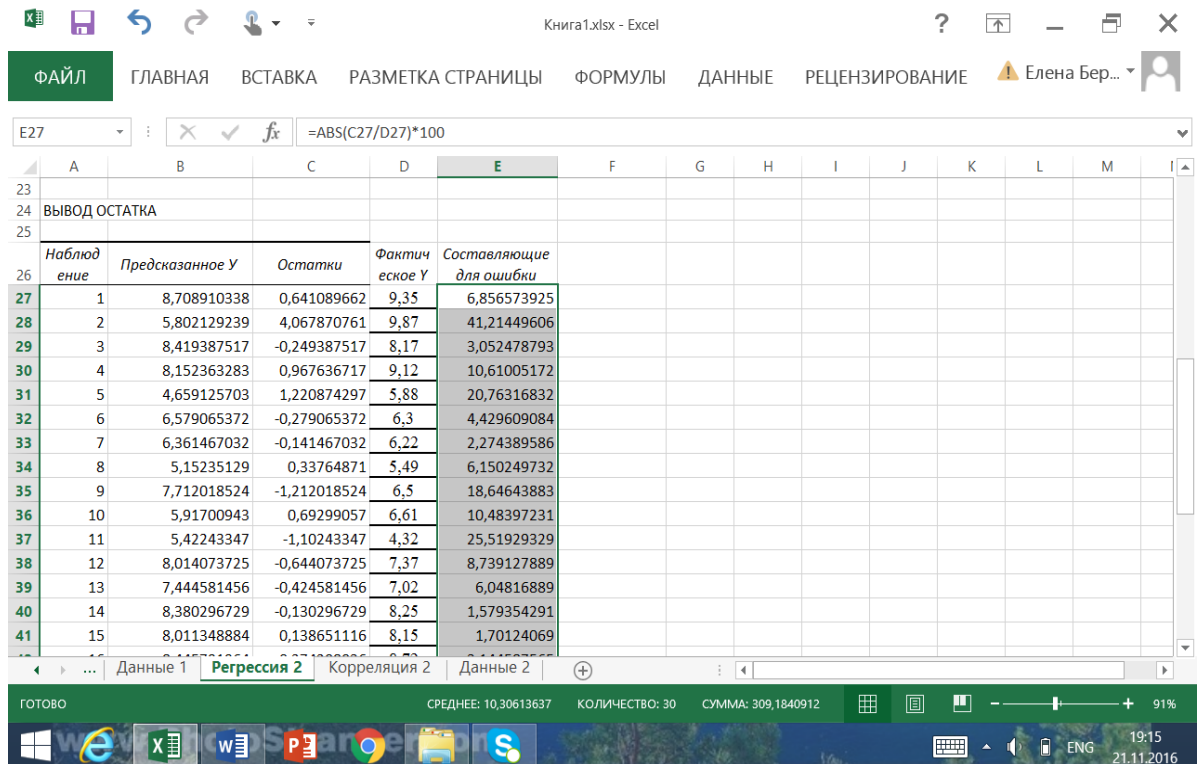


Рисунок 18 – Результаты расчета составляющих для ошибки аппроксимации

Рассчитаем среднюю ошибку аппроксимации.

4) в ячейку **D57** введите «Средняя ошибка» (рис. 19);

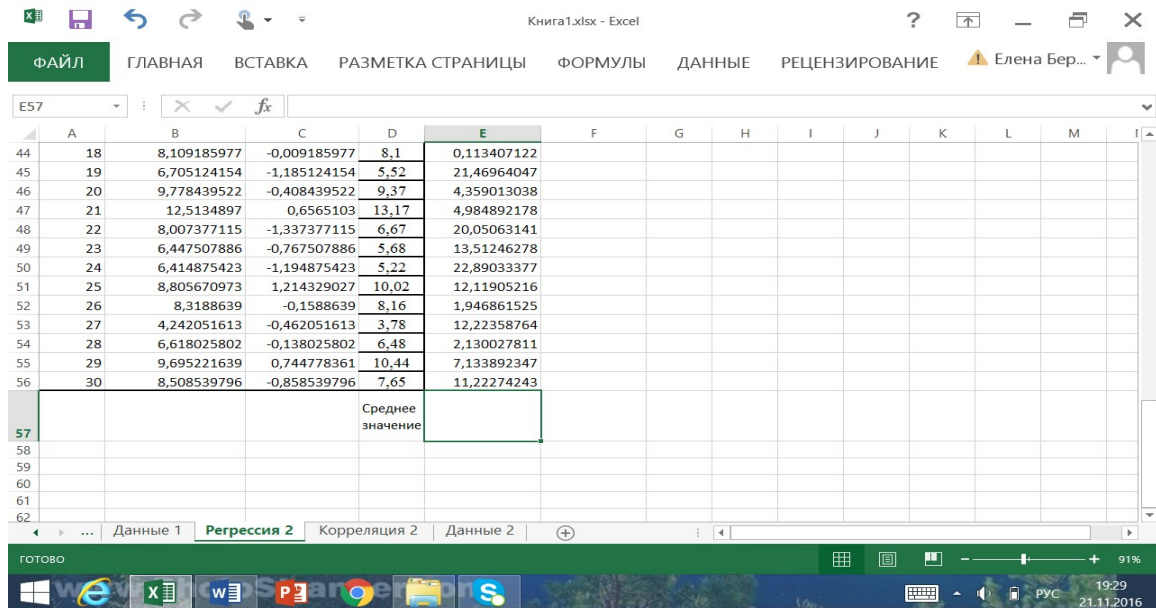


Рисунок 19 – Фрагмент листа для расчета средней ошибки

5) для вычисления средней ошибки аппроксимации регрессии необходимо воспользоваться формулой вычисления **среднего значения**:

а) на панели инструментов выделить кнопку **Вставка функции f_x** ;

б) в окне Категория (рис. 20) выберите **Математические**, в окне Функция – **СРЗНАЧ**. Щелкните по кнопке **ОК**;

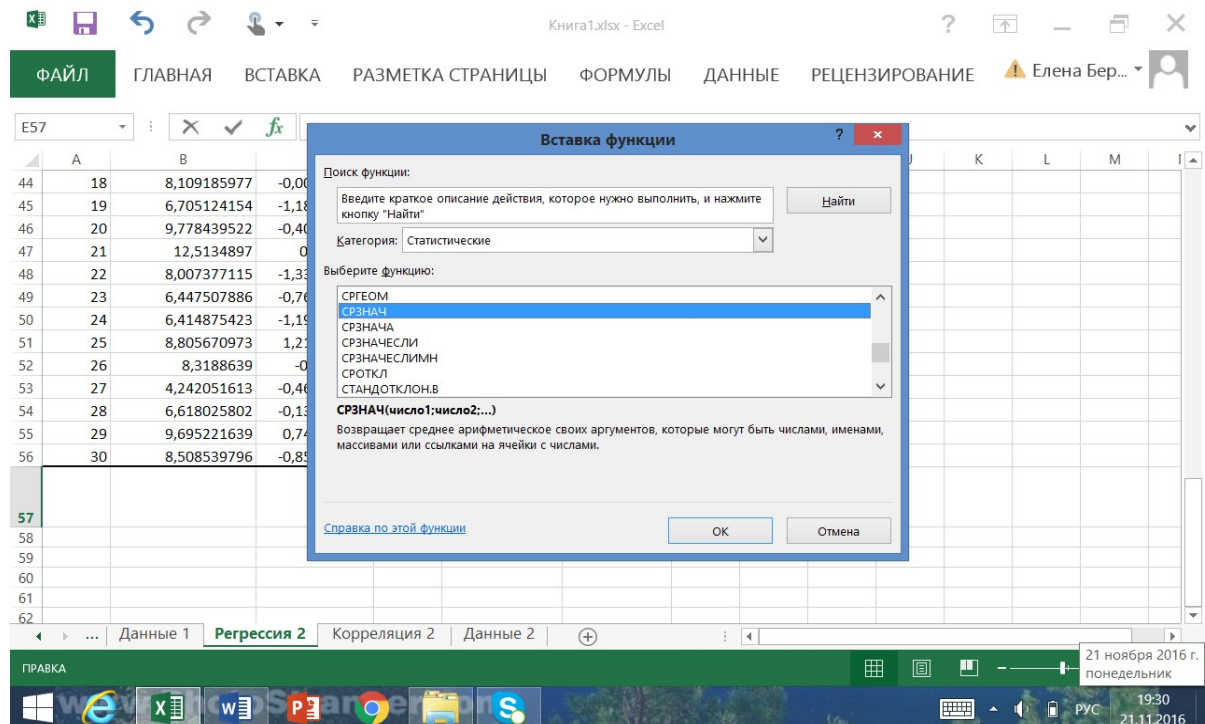


Рисунок 20 – Диалоговое окно **Вставка функций**

в) заполните диалоговое окно ввода данных: в строку «**Число 1**» введите формулу

E27:E56 и нажмите кнопку **ОК** (рис. 21).

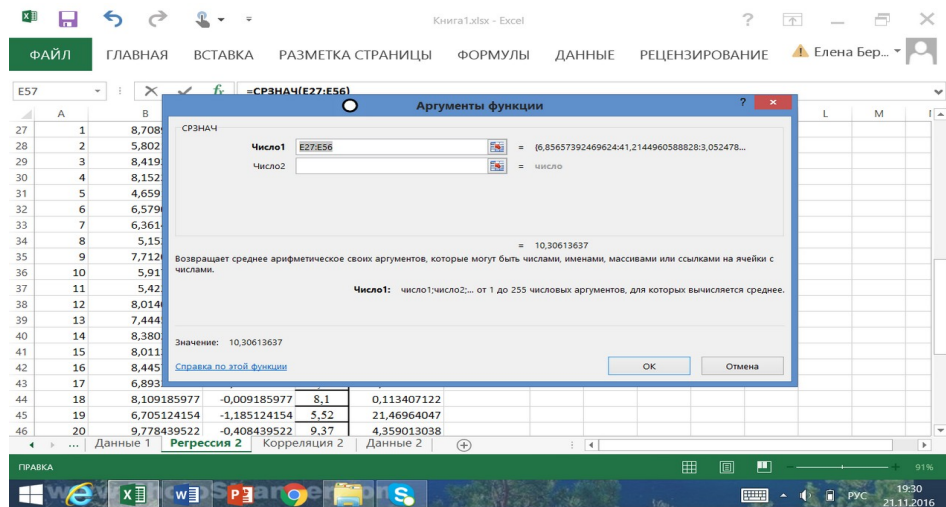


Рисунок 21 –Диалоговое окно функции **СРЗНАЧ**

Результаты расчета средней ошибки аппроксимации представлены на рисунке 6.22.

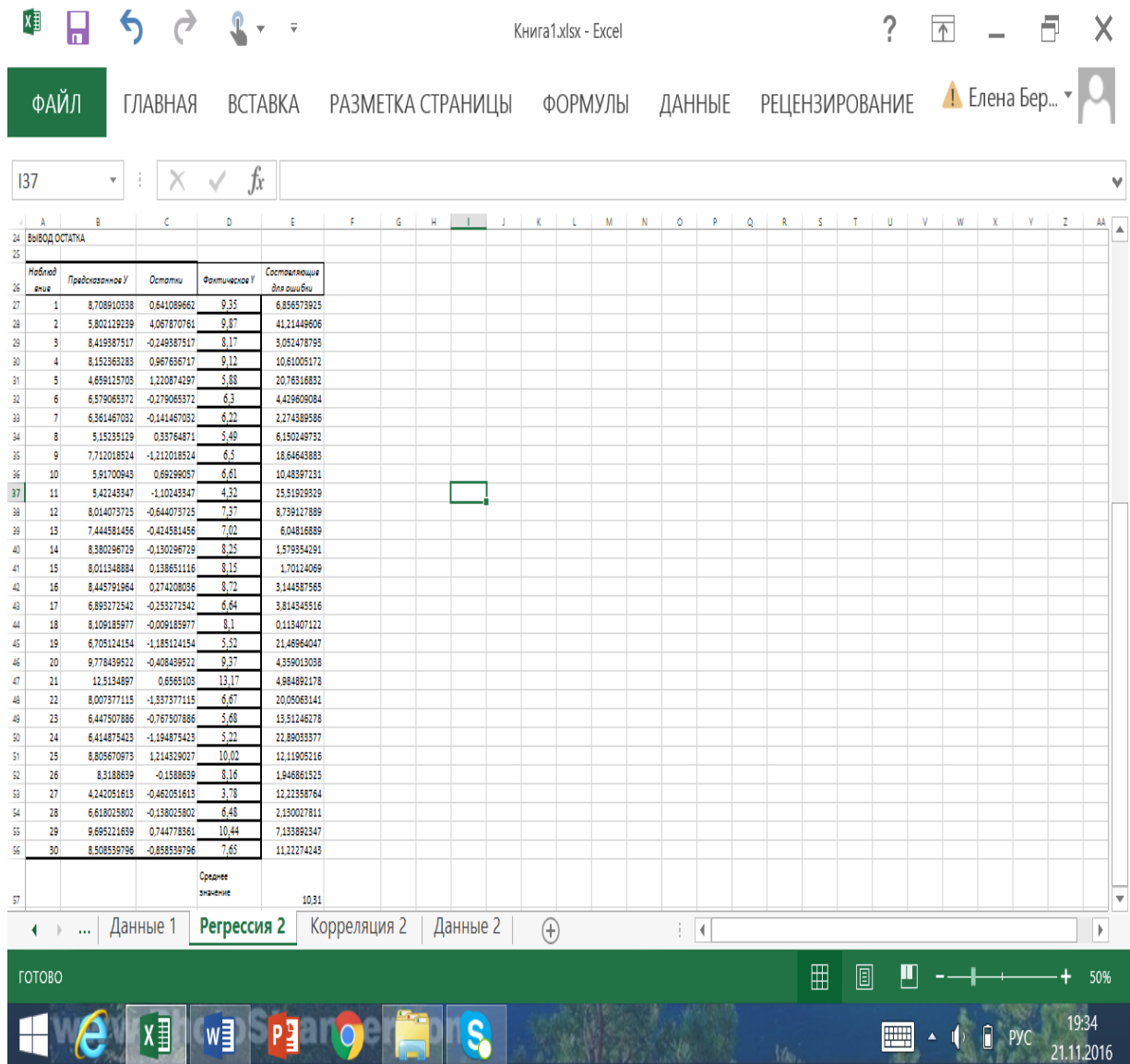


Рисунок 22 – Результаты расчета средней ошибки аппроксимации

В нашем примере ошибка аппроксимации незначительно превышает допустимое значение (8 – 10 %). Следовательно, полученное уравнение регрессии можно использовать только для текущего анализа.

Исходя из вышеперечисленных расчетов, используя коэффициенты регрессии (лист «Регрессия 2»), запишем корреляционно-регрессионное уравнение производительности труда:

$$Y = 10,375 + 1,17316 \cdot x_1 + 0,00003 \cdot x_4 - 16,1112 \cdot x_5.$$

Переименуем переменные:

$$Y = 10,375 + 1,17316 \cdot \tilde{o}_1 + 0,00003 \cdot \tilde{o}_2 - 16,1112 \cdot \tilde{o}_3$$

В ходе корреляционно-регрессионного анализа было выявлено, что главными факторами, определяющими вариацию уровня производительности труда работников промышленного предприятия в ретроспективном периоде являются: коэффициент сменности оборудования, фонд оплаты труда рабочих и трудоемкость единицы продукции. Очевидно, в будущем периоде для повышения производительности труда необходимо, прежде всего, уделить особое внимание на снижение трудоемкости изготовления продукции предприятия.

Задания

По исходным данным о производственно-хозяйственной деятельности промышленных предприятий, приведенных в таблицах Б.1 и Б.2 приложения Б, необходимо:

- провести количественную оценку параметров уравнения множественной регрессии;
- провести отбор главных факторов;
- оценить надежность и точность полученного уравнения множественной регрессии;
- сделать выводы.

Контрольные вопросы

- 1 Что показывают коэффициенты множественной корреляции и детерминации?
- 2 Мультиколлинеарность и причины ее возникновения.
- 3 К чему приводит присутствие мультиколлинеарных факторов во множественной регрессии?
- 4 В чем заключается процедура отбора главных факторов?
- 5 С помощью какого показателя можно оценить адекватность построенного уравнения множественной регрессии?
6. Сколько степеней свободы имеет критерий Фишера?
7. В каком случае построенное уравнение множественной регрессии считается надежным?

Практическое занятие 6

Моделирование систем массового обслуживания и их применение в бизнес-процессах.

Одноканальная СМО с отказами

Цель: приобрести знания, умения и навыки в области моделирования систем массового обслуживания при выработке управленческих решений.

Планируемые результаты обучения: умение и навыки постановки и решения задач систем массового обслуживания.

В результате освоения темы формируются индикаторы компетенций:

ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.

ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

Теоретическая часть

Системы массового обслуживания – это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.

Простейшей одноканальной моделью с вероятностными входным потоком и процедурой обслуживания является модель, характеризуемая показательным распределением как длительностей интервалов между поступлениями требований, так и длительностей обслуживания. При этом плотность распределения длительностей интервалов между поступлениями требований имеет вид:

$$f_1(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

λ – интенсивность поступления заявок в систему.

Плотность распределения длительностей обслуживания

$$f_2(t) = \mu \cdot e^{-\mu t}, \quad (2)$$

μ – интенсивность обслуживания.

Потоки заявок и обслуживаний простейшие.

Пусть система работает *с отказами*. Необходимо определить абсолютную и относительную пропускную способность системы.

Представим данную систему массового обслуживания в виде графа (рис. 1), у которого имеются два состояния:

S_0 – канал свободен (ожидание),

S_1 – канал занят (идет обслуживание заявки).

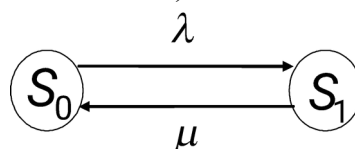


Рис. 1. Граф состояний одноканальной СМО с отказами

Обозначим вероятности состояний:

- вероятность состояния «канал свободен»;
- вероятность состояния «канал занят».

По размеченному графу состояний (рис. 1) составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t) \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = -\mu \cdot P_1(t) + \lambda \cdot P_0(t) \end{cases} \quad (3)$$

Система линейных дифференциальных уравнений (3) имеет решение с учетом нормировочного условия. Решение данной системы называется неустановившимся, поскольку оно непосредственно зависит от t и выглядит следующим образом

$$P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad (4)$$

$$P_1(t) = 1 - P_0(t) \quad (5)$$

Нетрудно убедиться, что для одноканальной СМО с отказами вероятность есть не что иное, как относительная пропускная способность системы.

Действительно, – вероятность того, что в момент t канал свободен, и заявка, пришедшая к моменту t , будет обслужена. А следовательно, для данного момента времени среднее отношение числа обслуженных заявок к числу поступивших также равно q , т. е.

$$q = P_0(t) \quad (6)$$

По истечении большого интервала времени (при $t \rightarrow \infty$) достигается стационарный (установившийся) режим:

$$q = P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \quad (7)$$

Зная относительную пропускную способность, легко найти абсолютную. Абсолютная пропускная способность – среднее число заявок, которое может обслужить система массового обслуживания в единицу времени:

$$A = \lambda \cdot q = \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu} \quad (8)$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки будет равна вероятности состояния «канал занят»:

$$\begin{aligned} P_{\text{отк}} &= P_1 = 1 - P_0 = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \\ P_{\text{отк}} &= P_1 = 1 - P_0 = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{aligned} \quad (9)$$

Данная величина $P_{\text{отк}}$ может быть интерпретирована как средняя доля необслуженных заявок среди поданных.

Пример 1. Пусть одноканальная СМО с отказами представляет собой один пост ежедневного обслуживания (ЕО) для мойки автомобилей. Заявка – автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания 1,8 часа. Поток автомобилей и поток обслуживаний являются простейшими.

Требуется определить в установившемся режиме предельные значения:

- относительной пропускной способности ;
- абсолютной пропускной способности ;
- вероятности отказа ;
-

Сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый автомобиль обслуживался точно 1,8 часа и автомобили следовали один за другим без перерыва.

Решение.

1. Определим интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обс}}} = \frac{1}{1,8} = 0,555$$

2. Вычислим относительную пропускную способность

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0,555}{1 + 0,555} = 0,356$$

Величина означает, что в установившемся режиме система будет обслуживать примерно 35% прибывающих на пост ЕО автомобилей.

3. Абсолютную пропускную способность определим по формуле:

$$A = \lambda \cdot q = 1 \cdot 0,356 = 0,356$$

Это означает, что система (пост ЕО) способна осуществить в среднем 0,356 обслуживаний автомобилей в час.

4. Вероятность отказа равна:

$$P_{\text{отк}} = 1 - q = 1 - 0,356 = 0,644$$

Это означает, что около 65% прибывших автомобилей на пост ЕО получают отказ в обслуживании.

5. Определим номинальную пропускную способность системы:

$$A_{\text{ин}} = \frac{1}{\bar{t}_{\text{ин}}} = \frac{1}{1,8} = 0,555 \quad (\text{автомобилей в час}) .$$

Оказывается, что $A_{\text{ном}}$ в 1,5 раза $\left(\frac{0,555}{0,356} \approx 1,5\right)$ больше, чем фактическая пропускная способность, вычисленная с учетом случайного характера потока заявок и времени обслуживания.

Практические задания

Задача 1. Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию. Заявка (вызов), пришедшая в момент, когда линия занята, получает отказ. Все потоки событий простейшие. Интенсивность потока вызовов вызовов в минуту. Средняя продолжительность разговора мин. Определить вероятностные характеристики СМО в установившемся режиме работы.

Задача 2. В одноканальную СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью заявки в минуту. Время обслуживания заявки имеет показательное

распределение с мин. Определить вероятностные характеристики СМО в установившемся режиме работы.

Задача 3. В вычислительном центре работает 5 персональных компьютеров (ПК). Простейший поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность задач в час. Среднее время решения задачи равно 12 мин. Заявка получает отказ, если все ПК заняты. Найти вероятностные характеристики системы обслуживания (ВЦ).

Контрольные вопросы

1. Что такое система массового обслуживания? приведите примеры.
2. Опишите принцип работы одноканальной СМО с отказами.

Список литературы: 1, 2, 3, 4

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7

Моделирование систем массового обслуживания и их применение в бизнес-процессах.

ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОЖИДАНИЕМ. ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОЖИДАНИЕМ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ВМЕСТИМОСТЬ БЛОКА ОЖИДАНИЯ

Цель: приобрести знания, умения и навыки в области моделирования систем массового обслуживания при выработке управленческих решений.

Планируемые результаты обучения: умение и навыки постановки и решения задач систем массового обслуживания.

В результате освоения темы формируются индикаторы компетенций:

ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.

ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

Теоретическая часть

Системы массового обслуживания – это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.

Рассмотрим *одноканальную СМО с ожиданием*.

Система массового обслуживания имеет один канал. Входящий поток заявок на обслуживание – простейший поток с интенсивностью λ . Интенсивность потока обслуживания равна μ (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать обслуженных заявок). Длительность обслуживания – случайная величина, подчиненная показательному закону распределения. Поток обслуживаний является простейшим пуассоновским потоком событий. Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания.

Предположим, что независимо от того, сколько требований поступает на вход обслуживающей системы, данная система (очередь ++ обслуживаемые клиенты) не может вместить более – требований (заявок), т. е. клиенты, не попавшие в ожидание, вынуждены обслуживаться в другом месте. Наконец, источник, порождающий заявки на обслуживание, имеет неограниченную (бесконечно большую) емкость.

Граф состояний СМО в этом случае имеет вид, показанный на рис. 2.

Рис. 2. Граф состояний одноканальной СМО с ожиданием
(схема гибели и размножения)

Состояния СМО имеют следующую интерпретацию:

- канал свободен;
- канал занят, очереди нет;
- канал занят, одна заявка стоит в очереди;
-
- канал занят, заявок стоит в очереди;
-
- канал занят, заявок стоит в очереди.

Стационарный процесс в данной системе будет описываться следующей системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\rho \cdot P_0 + P_1 = 0, & n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ -(1-\rho) \cdot P_n + P_{n+1} + \rho \cdot P_{n-1} = 0, & 0 < n < N \\ \dots\dots\dots \\ -P_N + \rho \cdot P_{N-1} = 0, & n = N, \end{cases} \quad (10)$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$;
 n – номер состояния.

Решение приведенной выше системы уравнений (10) для нашей модели СМО имеет вид:

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \right) \cdot \rho^n, & \rho \neq 1, n = 0, 1, 2, \dots, N \\ 1/(N+1), & \rho = 1; \end{cases} \quad (11)$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, \quad (12)$$

Следует отметить, что выполнение условия стационарности $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ для данной СМО не обязательно, поскольку число допускаемых в обслуживающую систему заявок контролируется путем введения ограничения на длину очереди (которая не может превышать N), а не соотношением между интенсивностями входного потока, т. е. не отношением $\lambda/\mu = \rho$.

Определим характеристики одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди, равной N :

- вероятность отказа в обслуживании заявки равна:

$$P_{\text{отк}} = P_N = \begin{cases} \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \right) \rho^N, & \rho \neq 1, \\ 1/(N+1), & \rho = 1; \end{cases} \quad (13)$$

- относительная пропускная способность системы:

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \right) \rho^N, & \rho \neq 1, \\ 1 - 1/(N+1), & \rho = 1; \end{cases} \quad (14)$$

- абсолютная пропускная способность:

$$A = q \cdot \lambda. \quad (15)$$

- среднее число находящихся в системе заявок:

$$L_S = \sum_{n=0}^N n \cdot P_n = \begin{cases} \frac{\rho \cdot [1 - (N+1) \cdot \rho^N + N \cdot \rho^{N+1}]}{(1-\rho) \cdot (1-\rho^{N+1})}, & \rho \neq 1 \\ N/2, & \rho = 1; \end{cases} \quad (16)$$

- среднее время пребывания заявки в системе:

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda(1-P_N)}; \quad (17)$$

- средняя продолжительность пребывания клиента (заявки) в очереди:

$$W_q = W_s - 1/\mu; \quad (18)$$

- среднее число заявок (клиентов) в очереди (длина очереди):

$$L_q = \lambda(1 - P_N)W_q. \quad (19)$$

Рассмотрим пример одноканальной СМО с ожиданием.

Пример 1. Специализированный пост диагностики представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограничено и равно 3 $[(N - 1) = 3]$. Если все стоянки заняты, т. е. в очереди уже находится три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится. Поток автомобилей, прибывающих на диагностику, распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность $\lambda = 0,85$ (автомобилей в час). Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно 1,05 час. Требуется определить вероятностные характеристики поста диагностики, работающего в стационарном режиме.

Решение.

1. Параметр потока обслуживаний автомобилей равен:

$$\mu = \frac{1}{t} = \frac{1}{1,05} = 0,952$$

2. Приведенная интенсивность потока автомобилей определяется как отношение интенсивностей и :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,85}{0,952} = 0,893$$

3. Вычислим финальные вероятности системы:

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} = \frac{1 - 0,893}{1 - 0,893^5} \approx 0,248;$$

$$P_1 = \rho \cdot P_0 = 0,893 \cdot 0,248 \approx 0,221;$$

$$P_2 = \rho^2 \cdot P_0 = 0,893^2 \cdot 0,248 \approx 0,198;$$

$$P_3 = \rho^3 \cdot P_0 = 0,893^3 \cdot 0,248 \approx 0,177;$$

$$P_4 = \rho^4 \cdot P_0 = 0,893^4 \cdot 0,248 \approx 0,158.$$

7. Вероятность отказа в обслуживании автомобиля:

$$P_{\text{отк}} = P_4 = \rho^4 \cdot P_0 \approx 0,158 \quad P_{\text{отк}} = P_4 = \rho^4 \cdot P_0 \approx 0,158.$$

5. Относительная пропускная способность поста диагностики:

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0,158 = 0,842$$

6. Абсолютная пропускная способность поста диагностики:

$$A = \lambda \cdot q = 0,85 \cdot 0,842 = 0,716 \text{ (автомобилей в час).}$$

7. Среднее число автомобилей, находящихся на обслуживании и в очереди (т. е. в системе массового обслуживания):

$$\begin{aligned} L_s &= \frac{\rho \cdot [1 - (N + 1) \cdot \rho^N + N \cdot \rho^{N+1}]}{(1 - \rho) \cdot (1 - \rho^{N+1})} = \\ &= \frac{0,893 \cdot [1 - (4 + 1) \cdot 0,893^4 + 4 \cdot 0,893^5]}{(1 - 0,893) \cdot (1 - 0,893^5)} = 1,77 \end{aligned}$$

7. Среднее время пребывания автомобиля в системе:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda \cdot (1 - P_N)} = \frac{1,77}{0,85(1 - 0,158)} \approx 2,473 \text{ часа.}$$

9. Средняя продолжительность пребывания заявки в очереди на обслуживание:

$$W_q = W_s - 1/\mu = 2,473 - 1/0,952 = 1,423 \text{ часа.}$$

10. Среднее число заявок в очереди (длина очереди):

$$L_q = \lambda \cdot (1 - P_N) \cdot W_q = 0,85 \cdot (1 - 0,158) \cdot 1,423 = 1,02$$

Работу рассмотренного поста диагностики можно считать удовлетворительной, т. к. пост диагностики не обслуживает автомобили в среднем в 15,8 % случаев ($P_{\text{отк}} = 0,158$).

Перейдем теперь к рассмотрению *одноканальной СМО с ожиданием без ограничения на вместимость блока ожидания* (т. е. $N \rightarrow \infty$). Остальные условия функционирования СМО остаются без изменений.

Стационарный режим функционирования данной СМО существует при для любого $n=0, 1, 2, \dots$ и когда $\lambda < \mu$, система алгебраических уравнений, описывающих работу СМО при $t \rightarrow \infty$ для любого $n = 0, 1, 2, \dots$, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{////////////////////} - \lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1 = 0, \text{ //} n=0 \end{array} \right. \quad (20)$$

Решение данной системы уравнений имеет вид:

$$P_n = (1 - \rho) \cdot \rho^n \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

где $\rho = \lambda / \mu < 1$.

Определим характеристики одноканальной СМО с ожиданием, без ограничения на длину очереди:

– среднее число находящихся в системе клиентов (заявок) на обслуживание:

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \frac{\rho}{1 - \rho}; \quad (22)$$

– средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{[\mu \cdot (1 - \rho)]}; \quad (23)$$

– среднее число клиентов в очереди на обслуживании:

$$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho^2}{(1 - \rho)}; \quad (24)$$

– средняя продолжительность пребывания клиента в очереди:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{[\mu \cdot (1 - \rho)]}. \quad (25)$$

Пример 2. Вспомним о ситуации, рассмотренной в примере 1, где речь идет о функционировании поста диагностики. Пусть рассматриваемый пост диагностики располагает неограниченным количеством площадок для стоянки прибывающих на обслуживание автомобилей, т. е. длина очереди не ограничена.

Требуется определить финальные значения вероятностных характеристик:

- вероятности состояний системы (поста диагностики);
- среднего числа автомобилей, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди);

- средней продолжительности пребывания автомобиля в системе (на обслуживании и в очереди);
- среднего числа автомобилей в очереди на обслуживании;
- средней продолжительности пребывания автомобиля в очереди.

Решение.

1. Параметр потока обслуживания μ и приведенная интенсивность потока автомобилей ρ определены в предыдущем примере 7.2:

$$\mu = 0,952; \quad \rho = 0,893.$$

2. Вычислим предельные вероятности системы по формулам:

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0,893 = 0,107$$

$$P_1 = (1 - \rho) \cdot \rho = (1 - 0,893) \cdot 0,893 = 0,096$$

$$P_2 = (1 - \rho) \cdot \rho^2 = (1 - 0,893) \cdot 0,893^2 = 0,085$$

$$P_3 = (1 - \rho) \cdot \rho^3 = (1 - 0,893) \cdot 0,893^3 = 0,076$$

$$P_4 = (1 - \rho) \cdot \rho^4 = (1 - 0,893) \cdot 0,893^4 = 0,068$$

$$P_5 = (1 - \rho) \cdot \rho^5 = (1 - 0,893) \cdot 0,893^5 = 0,061$$

.....

Следует отметить, что P_0 определяет долю времени, в течение которого пост диагностики вынужденно бездействует (простаивает). В нашем примере она составляет 10,7 %, т. к. $P_0 = 0,107$

3. Среднее число автомобилей, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди):

$$L_s = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0,893}{1 - 0,893} = 8,346 \text{ ед.}$$

7. Средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{[\mu \cdot (1 - \rho)]} = \frac{1}{[0,952 \cdot (1 - 0,893)]} = 9,817 \text{ часов.}$$

5. Среднее число автомобилей в очереди на обслуживание:

$$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho^2}{(1 - \rho)} = \frac{0,893^2}{(1 - 0,893)} = 7,453$$

6. Средняя продолжительность пребывания автомобиля в очереди:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu \cdot (1 - \rho)} = \frac{0,893}{0,952 \cdot (1 - 0,893)} = 8,766 \text{ часа.}$$

7. Относительная пропускная способность системы:

$$q = 1,$$

т. е. каждая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена.

7. Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda \cdot q = 0,85 \cdot 1 = 0,85.$$

Следует отметить, что предприятие, осуществляющее диагностику автомобилей, прежде всего интересуется количеством клиентов, которое посетит пост диагностик при снятии ограничения на длину очереди.

Допустим, в первоначальном варианте количество мест для стоянки прибывающих автомобилей было равно 3 (см. пример 7.2). Частота m возникновения ситуаций, когда прибывающий на пост диагностики автомобиль не имеет возможности присоединиться к очереди, равняется:

$$m = \lambda \cdot P_N.$$

В нашем примере при $N = 3 + 1 = 4$ и $\rho = 0,893$

$$m = \lambda \cdot P_0 \cdot \rho^4 = 0,85 \cdot 0,248 \cdot 0,893^4 = 0,134 \text{ автомобиля в час.}$$

При 12-часовом режиме работы поста диагностики, это эквивалентно тому, что пост диагностики в среднем за смену (день) будет терять $12 \cdot 0,134 = 1,6$ автомобиля.

Снятие ограничения на длину очереди позволяет увеличить количество обслуженных клиентов в нашем примере в среднем на 1,6 автомобиля за смену (12 часов работы) поста диагностики. Ясно, что решение относительно расширения площади для стоянки автомобилей, прибывающих на пост диагностики, должно основываться на оценке экономического ущерба, который обусловлен потерей клиентов при наличии всего трех мест для стоянки этих автомобилей.

Практические задания

Задача 1. На пункт техосмотра поступает простейший поток заявок (автомобилей) интенсивности машины в час. Время осмотра распределено по показательному закону и равно в среднем 17 минутам, в очереди может находиться не более 5 автомобилей. Определить вероятностные характеристики пункта техосмотра в установившемся режиме.

Задача 2. В аудиторскую фирму поступает простейший поток заявок на обслуживание с интенсивностью заявок в день. Время обслуживания распределено по показательному закону и равно в среднем трем дням. Аудиторская фирма располагает 5-ю независимыми бухгалтерами, выполняющими аудиторские проверки (обслуживание заявок). Очередь заявок не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована. Определить вероятностные характеристики аудиторской фирмы как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме.

Задача 3. Билетная касса работает без перерыва. Билеты продает один кассир. Среднее время обслуживания – 2 мин. на каждого человека. Среднее число пассажиров, желающих приобрести билеты в кассе в течение одного часа равно пасс. / час. Все потоки в системе простейшие. Определить среднюю длину очереди, вероятность простоя кассира, среднее время нахождения пассажира в билетной кассе (в очереди и на обслуживании), среднее время ожидания в очереди в условиях стационарного режима работы кассы.

Контрольные вопросы

1. Что такое система массового обслуживания? приведите примеры.
2. Опишите принцип работы одноканальной СМО с отказами.
3. Что такое система массового обслуживания? приведите примеры.
4. Опишите принцип работы одноканальной СМО ожиданием без ограничения на вместимость блока ожидания.

Список литературы: 1, 2, 3, 4

Практическое занятие 8

Основы линейного программирования.

Решение задач линейного программирования в MS Excel. Графический метод

Цель: приобрести знания в области применения методов линейного программирования для построения и решения оптимизационных задач управления бизнесом.

Планируемые результаты обучения: разработки оптимизационных моделей в управлении бизнесом (используя инструментарий линейного программирования)

В результате освоения темы формируются индикаторы компетенций:

ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.

ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

Теоретическая часть

Решение задач ЛП в редакторе MS Excel базируется на построении точечных диаграмм с гладкими кривыми и маркерами. Необходимо понимать, что, несмотря на ограничение построенных графиков маркерами в Excel, прямые, ими обозначенные, продолжают в обе стороны. На диаграмме в Excel это можно показать при помощи добавления линии тренда. Основным недостатком данного инструмента является невозможность выделения области решений автоматически.

В качестве примера рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} F_{\min} &= 2x - 5y \\ 3x + 4y &\leq 6 \\ x &\geq 0, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

1. На Листе MS Excel вводим ограничения, выраженные системой неравенств:

ОГРАНИЧЕНИЯ			
	A	B	C
1	ОГРАНИЧЕНИЯ		
2	Неравенство	$3x+4y \leq 6$	$2x+3y \leq 4$
3	Уравнение прямой	$3x+4y=6$	$2x+3y=4$
4	прямая	L1	L2
5	Расчет y из x	$y=(6-3x)/4$	$y=(4-2x)/3$
6	Расчет x из y	$x=(6-4y)/3$	$x=(4-3y)/2$
7	x	0	0
8	y	1,5	0,333333
9			
10	ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ		
11	Расчет y из x	$F=2x-5y \rightarrow \min$	
12	при F=0	$y=(2x-F)/5$	
13	x	-2	5
14	y	-0,8	2
15	при F=5		
16	x	-2	5
17	y	-1,8	1
18	...10		
19	x	2	12

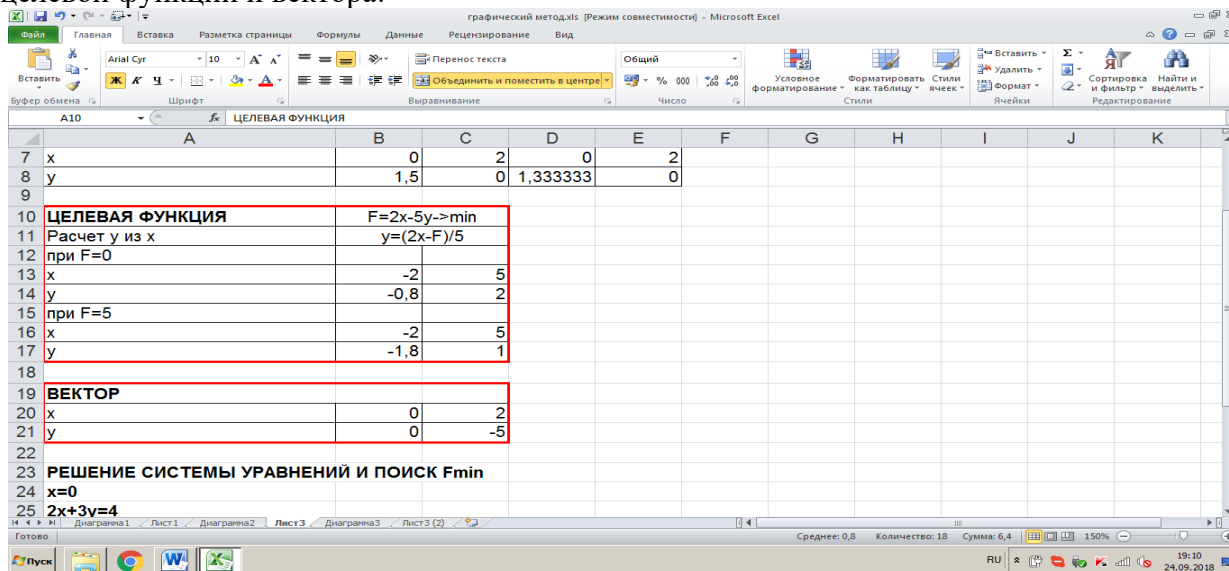
Значения по строкам «Неравенство», «Уравнение прямой», «Расчет у из x» и «Расчет х из y» вводятся вручную.

Для двух ограничений необходимо построить две прямые, каждая из которых соответствует равенству, образованному путем замены знаков неравенств в ограничениях на знаки равенств.

Прямые обозначены как L1 и L2.

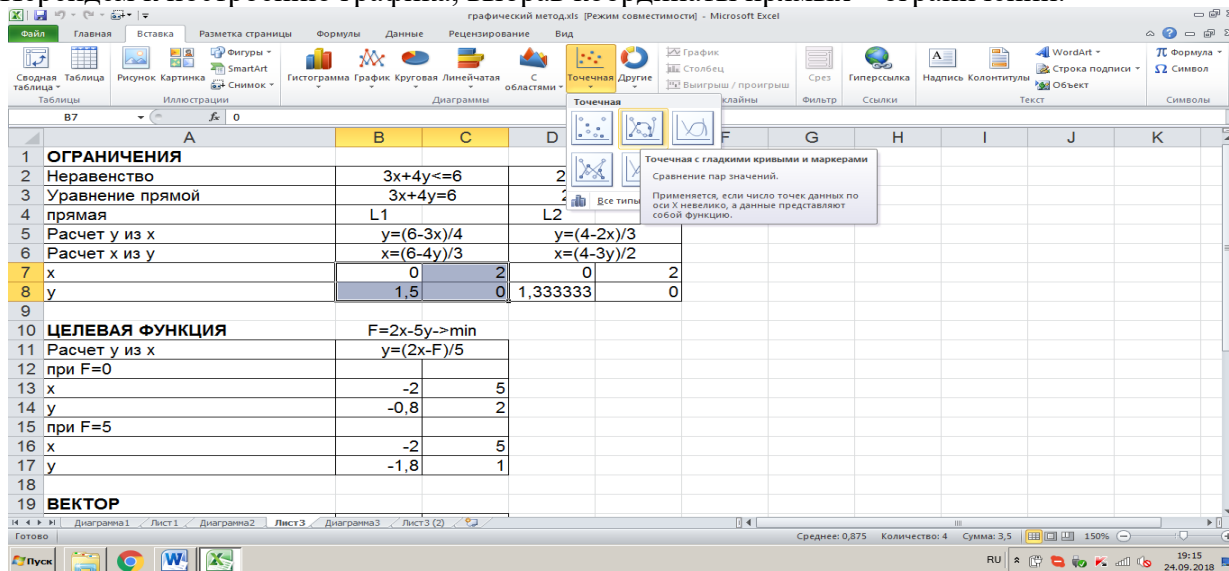
Для определения координат прямых выразим x и y из каждого уравнения. Затем рассчитаем координаты точек для $x=0$ и $y=0$ (ячейки (\$B\$7:\$E\$8)).

Аналогично рассчитаем координаты точек для построения параллельных прямых – целевой функции и вектора:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
7	x	0	2	0	2						
8	y	1,5	0	1,333333	0						
9											
10	ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ	$F=2x-5y \rightarrow \min$									
11	Расчет y из x	$y=(2x-F)/5$									
12	при F=0										
13	x	-2	5								
14	y	-0,8	2								
15	при F=5										
16	x	-2	5								
17	y	-1,8	1								
18											
19	ВЕКТОР										
20	x	0	2								
21	y	0	-5								
22											
23	РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И ПОИСК Fmin										
24	x=0										
25	2x+3y=4										

Перейдем к построению графика, выбрав координаты прямых – ограничений.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	ОГРАНИЧЕНИЯ										
2	Неравенство	$3x+4y \leq 6$									
3	Уравнение прямой	$3x+4y=6$									
4	прямая	L1	L2								
5	Расчет y из x	$y=(6-3x)/4$									
6	Расчет x из y	$x=(6-4y)/3$									
7	x	0	2	0	2						
8	y	1,5	0	1,333333	0						
9											
10	ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ	$F=2x-5y \rightarrow \min$									
11	Расчет y из x	$y=(2x-F)/5$									
12	при F=0										
13	x	-2	5								
14	y	-0,8	2								
15	при F=5										
16	x	-2	5								
17	y	-1,8	1								
18											
19	ВЕКТОР										

Автоматически построенную диаграмму переместим на отдельный лист:

Добавим необходимые данные:

Рабочий лист «Экономическая математика» - Microsoft Excel

Файл Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид Конструктор Макет Формат

Вставить | Буфер обмена | Шрифт | Выравнивание | Число | Условное форматирование | Стили | Вставить | Удалить | Формат | Ячейки | Сортировка | Найти и выделить | Редактирование

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	ОГРАНИЧЕНИЯ										
2	Неравенство	$3x+4y \leq 6$		$2x+3y \leq 4$							
3	Уравнение прямой	$3x+4y=6$		$2x+3y=4$							
4	прямая	L1	L2								
5	Расчет y из x	$y=(6-3x)/4$		$y=(4-2x)/3$							
6	Расчет x из y	$x=(6-4y)/3$		$x=(4-3y)/2$							
7	x	0	2	0	2						
8	y	1,5	0	1,333333	0						
9											
10	ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ		$F=2x-5y \rightarrow \min$								
11	Расчет y из x	$y=(2x-F)/5$									
12	при F=0										
13	x	-2	5								
14	y	-0,8	2								
15	при F=5										
16	x	-2	5								
17	y	-1,8	1								
18											
19	ВЕКТОР										

Изменение ряда

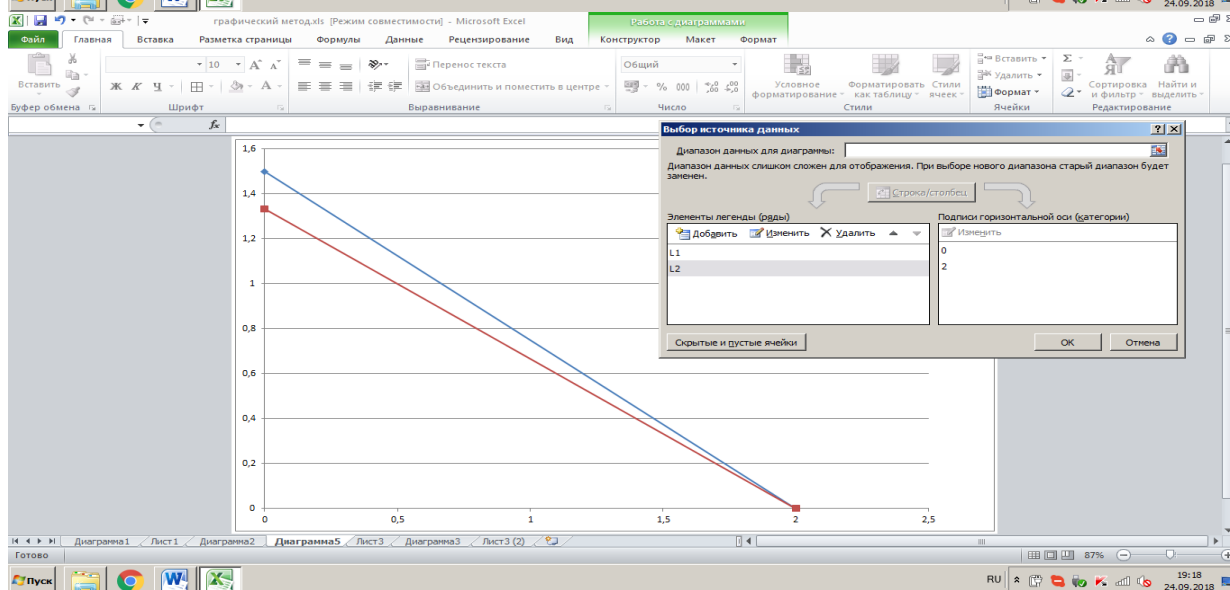
Для ряда: =Лист3!\$D:\$4 = L2

Значения X: =Лист3!\$D:\$7:\$E:\$7 = 0; 2

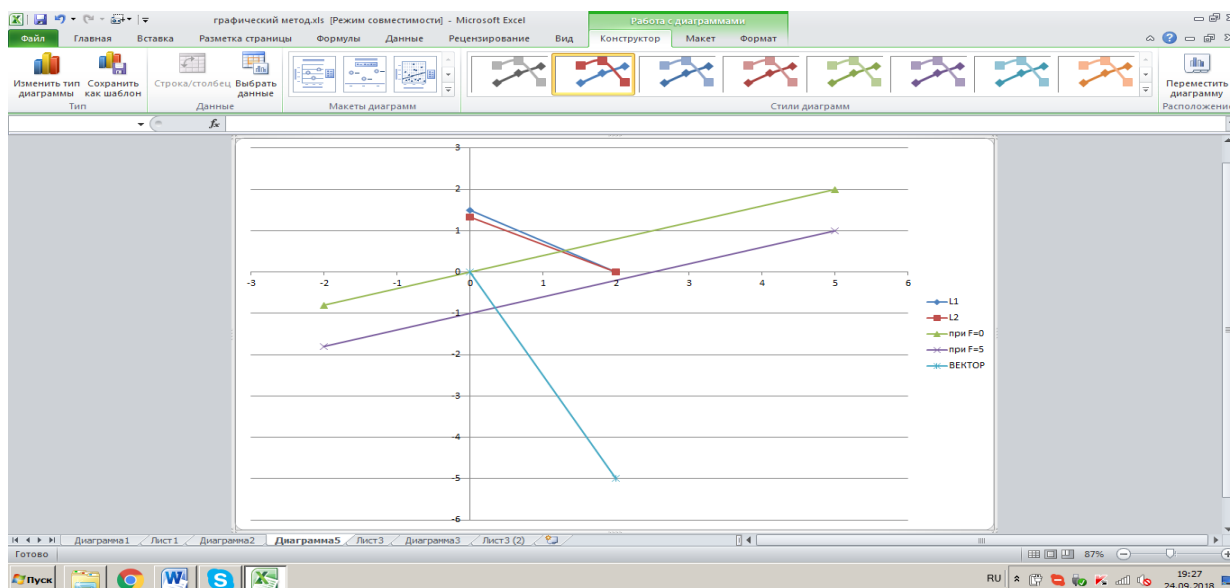
Значения Y: =Лист3!\$D:\$8:\$E:\$8 = 1,333333333; 0

OK Отмена

Диаграмма1 | Лист1 | Диаграмма2 | Диаграмма3 | Лист3 | Диаграмма3 | Лист3 (2) | 87% | 19:18



Для определения области решений подставим в неравенства точку $(0;0)$. Очевидно, что решение обоих неравенств будет находиться ниже построенных графиков. Аналогично добавим на график целевую функцию и вектор:

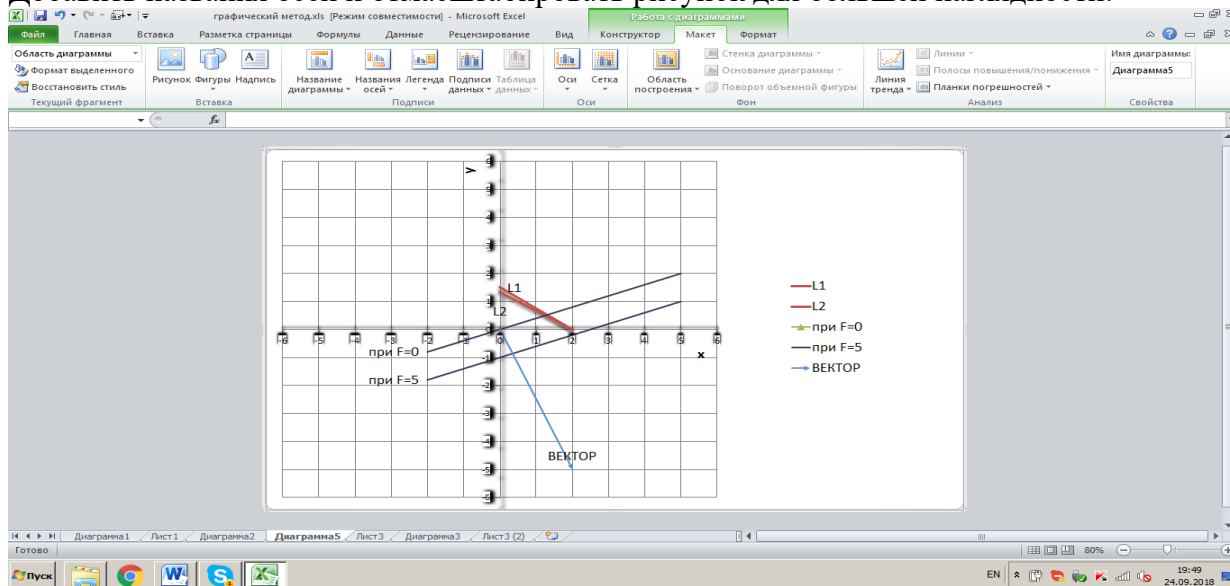


Для большей наглядности уберем маркеры в свойствах рядов данных ограничивающих прямых, добавим тень (см.рис.) – она покажет область решений, – выкрасим однотипные прямые в один цвет. Для вектора добавим окончание линии в виде стрелки.

Итоговая диаграмма выглядит следующим образом:

Можно добавить линии сетки:

Добавить названия осей и отмасштабировать рисунок для большей наглядности:



Очевидно, что при перемещении прямой F в сторону, противоположную направлению вектора (напомним, что по условию задачи функция стремиться к нулю), она достигнет цели в точке пересечения оси ординат (y) и прямой $L2$. Таким образом, ответом к задаче будет решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

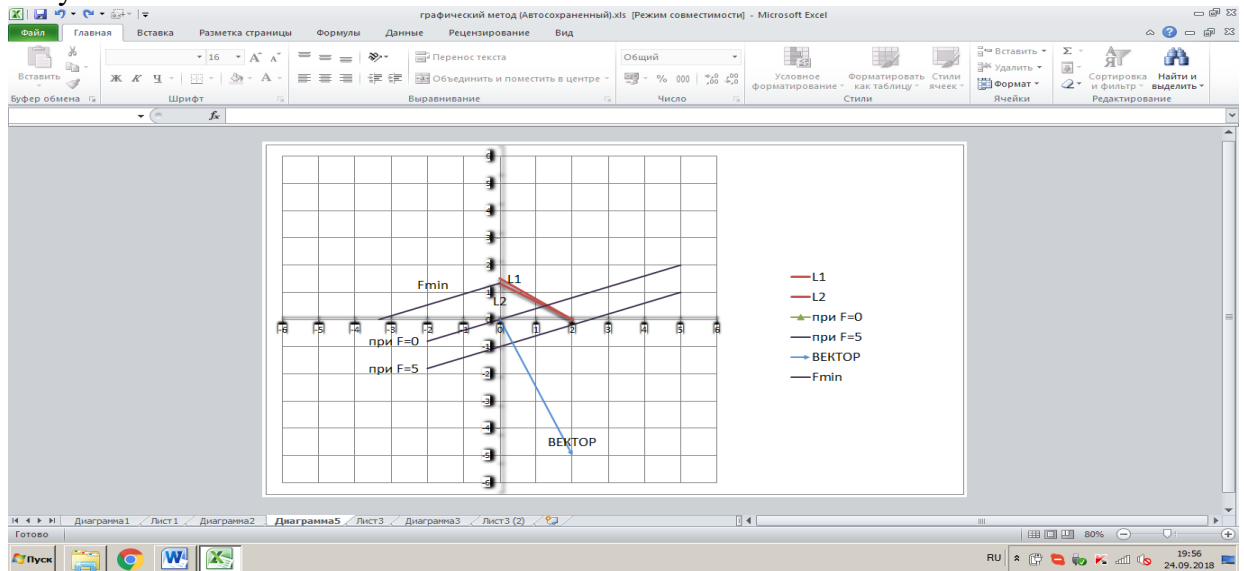
Решить данную систему можно любым удобным способом и подставить полученные значения в целевую функцию:

графикальный метод.xls [Режим совместимости] - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
19	ВЕКТОР										
20	x	0	2								
21	y	0	-5								
22											
23	РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И ПОИСК Fmin										
24	x=0										
25	2x+3y=4										
26	x	0									
27	y	1,333333									
28											
29											
30	Fmin	-6,66667									
31											
32	x	0	-3,33333								
33	y	1,33333	0								
34											
35											
36											
37											

Среднее: -1,77777778 Количество: 9 Сумма: -5,33333333

Просчитав значения двух координат и добавив прямую, построенную по ним, на график, получим:



Таким образом, целевая функция достигает минимума при $x=0$ и $y=1,33$, а ее минимальное значение $F_{\min} = -6,66$.

Задания

Решить задачу линейного программирования с двумя независимыми переменными графическим методом (по вариантам).

1.

$$W = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 500 \end{cases}$$

2.

$$W = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 500 \\ x_1 \leq 400 \end{cases}$$

3.

$$W = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \leq 3 \end{cases}$$

4.

$$W = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 15 \end{cases}$$

Воспользуйтесь средствами MS Excel 2010.

Список литературы: 1, 2, 3, 4

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №9

Основы линейного программирования. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В MS EXCEL. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПЛАН ПРОИЗВОДСТВА

Цель: приобрести знания в области применения методов линейного программирования для построения и решения оптимизационных задач управления бизнесом.

Планируемые результаты обучения: разработки оптимизационных моделей в управлении бизнесом (используя инструментарий линейного программирования)

В результате освоения темы формируется индикаторы компетенций:

ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.

ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

Теоретическая часть

В практической работе рассмотрены теория и примеры использования количественных методов и моделей, цель которых – найти оптимальную стратегию управления в условиях, когда все параметры и правила управления системой четко определены и не подвержены никаким случайным воздействиям. В таких задачах используется метод линейной оптимизации, цель которого – составление оптимальных планов производства, продаж, закупок, перевозок, оптимальное финансовое планирование, оптимальная организация рекламных кампаний и др. Планирование – одна из основных функций менеджмента.

Теоретической основой линейной оптимизации (ЛО) является линейное программирование, которое является одной из составляющих математического программирования. Модели линейного программирования очень важны, так как много задач в самых разных сферах деятельности, которые могут быть проанализированы с помощью моделей линейного программирования. Существуют эффективные и универсальные алгоритмы решения ЗЛП, реализованные на ЭВМ, а также, методы анализа моделей ЛП позволяют исследовать модель на чувствительность при изменении её параметров.

Постановка ЗЛО. При построении математической модели задачи линейной оптимизации, прежде всего, необходимо определить количественную характеристику цели, которой надо достичь в процессе оптимизации, - целевую функцию. Это может быть максимальная прибыль или минимальные издержки (в денежном, временном или в каком-либо другом выражении). Целевая функция показывает, почему одно рассматриваемое решение лучше или хуже другого. Целевая функция зависит от величин, называемых переменными решения (неизвестными), которые можно изменять, разыскивая оптимальное решение.

Цель оптимизации – найти такие значения переменных решения, при которых целевая функция достигает максимума или минимума.

Любая оптимизация всегда проводится при наличии некоторых ограничений – условий, ограничивающих изменение переменных решения. Эти ограничения могут диктоваться:

- а) вторичными целями (например, рассматривая задачу о минимизации рисков инвестиционного портфеля, мы, одновременно, хотим добиться ожидаемой прибыли);
- б) ограниченностью ресурсов, находящихся в распоряжении (денежных, временных, материальных и др.);
- в) установленными “правилами игры” (рыночные ограничения, нормативные акты, любые требования субъекта, принимающего решения и т.д.)

Любой набор переменных решения, удовлетворяющих ограничениям, называют допустимым решением (или допустимым планом). Таких планов может быть множество. Допустимое решение, которое отвечает наибольшему или наименьшему значению целевой функции, называется оптимальным решением. Обычно это решение одно, но встречаются модели, когда одному оптимальному плану соответствует множество допустимых решений.

Линейная оптимизация имеет дело с моделями, в которых целевая функция линейно зависит от переменных решения, ограничения также представляют собой линейные уравнения или неравенства.

В линейных моделях, кроме неизвестных, присутствуют постоянные числа, их называют параметрами. Параметры модели (например, тарифы перевозок) определяют вид и значение целевой функции, оптимальное решение также зависит от параметров модели, т.е. если их изменить, изменится и оптимальное решение. Это очень важно, потому что, изменяя параметры, можно что-то менять в управляемой системе. Но в ходе поиска оптимального решения параметры считают неизменными. После его определения, параметры можно изменить и найти новое оптимальное решение. Методы анализа модели ЛО не только позволяют получить оптимальное решение, но и дают информацию о том, как может изменяться это решение при изменении параметров модели, т.е. есть возможность получить ответы на вопросы типа “что, если”, а это очень важно для лица, принимающего решение. Для решения задач ЛО можно использовать надстройку к программе электронных таблиц MS Excel, которая называется «Поиск решения».

Рассмотрим линейную модель оптимального планирования.

Мини-кейс: Оптимальный план производства

Задача 1 Оптимальный план выпуска продукции мебельного цеха

Цех может выпускать два вида продукции: шкафы и тумбы для телевизора. На каждый шкаф расходуется 3,5м стандартных ДСП, 1м листового стекла, и 1 человека-день трудозатрат. На тумбу расходуется 1м ДСП, 2м стекла, и 1 человека-день трудозатрат. Прибыль от продажи 1 шкафа составляет 200у.е., а 1 тумба – 100у.е. Материальные и трудовые ресурсы ограничены: в цехе работают 150 рабочих, запасы ДСП на день составляют 350м, а стекла – 240м. Какое количество шкафов и тумб должен выпустить цех, чтобы получить максимальную прибыль? Оформим данные задачи в виде таблицы 1.

Таблица 1 – Параметры задачи 1

Ресурсы	Шкаф	Тумба	Запасы
ДСП	3,5	1	350
Стекло	1	2	240
Труд	1	1	150
Прибыль	200	100	

Решение. 1) Прежде всего определим цель задачи и вид целевой функции. В данном случае мы хотим максимизировать прибыль, следовательно, целевая функция должна вычислять полную прибыль. В задаче задана прибыль, которую приносит каждый вид произведенной мебели. Поэтому полная прибыль P будет определяться этой прибылью и количеством произведенной мебели каждого вида. Пусть X и Y – соответственно количество шкафов и тумб, выпускаемых цехом. Прибыль от продажи одного шкафа равна 200у.е., значит, прибыль от продажи X шкафов будет $200 \cdot X$. Аналогично прибыль от продажи Y тумб равна $100 \cdot Y$. Общая прибыль от продажи шкафов и тумб будет равна $P = 200X + 100Y$. Глядя на выражение целевой функции, можно легко увидеть, что, чем больше будут значения X и

Y, тем больше будет прибыль P. Но увеличивать беспрестанно ежедневный выпуск шкафов и тумб невозможно, так как ресурсы ограничены.

2. На этом этапе надо выяснить, при каких ограничениях надо найти максимальную прибыль. Запишем эти ограничения. Начнем с трудовых ресурсов. Поскольку каждый рабочий за 1 день может сделать либо 1 шкаф, либо 1 тумбу, ясно, что общее количество выпущенных изделий не должно превышать числа рабочих в цехе. То есть, общий расход труда на X шкафов и Y тумб, будет $1 \cdot X + 1 \cdot Y \leq 150$. Аналогично записывается неравенство, отражающее ограниченность ежедневных запасов ДСП. Поскольку на 1 шкаф расходуется 3,5м ДСП, а на тумбу – 1м, то суммарный расход ДСП будет $3,5 \cdot X + Y$, что не должно превышать ежедневного запаса ДСП в цехе, т.е. 350м. Получим неравенство $3,5 \cdot X + Y \leq 350$. Рассуждая точно также относительно третьего ресурса – стекла, получим ограничение $1 \cdot X + 2 \cdot Y \leq 240$. Осталось добавить, что переменные решения не могут быть отрицательными, $X \geq 0, Y \geq 0$.

Получим математическую модель ЗЛО или ЗЛП.

Найти $\max P = 200X + 100Y$ при ограничениях:

$$3,5X + Y \leq 350,$$

$$X + 2Y \leq 240,$$

$$X + Y \leq 150,$$

$$X > 0, Y > 0$$

Определение переменных решения, целевой функции и ограничений – это почти все, что должен сделать менеджер, чтобы воспользоваться результатами оптимизации и анализа линейной модели. Дальше необходимо только правильно организовать данные для компьютера на листе MS Excel и запустить задачу на решение.

При организации данных ЗЛП на листе MS-Excel следует отвести отдельные ячейки для параметров, переменных, целевой функции и левых частей ограничений. Ячейки для переменных можно оставить пустыми или ввести в них любые допустимые значения переменных, а в ячейки для целевой функции и ограничений ввести формулы, отражающие их функциональную зависимость от переменных и параметров.

Требование линейности означает, что и целевая функция, и ограничения могут представлять собой только суммы произведений коэффициентов на переменные решения. В MS-Excel имеется стандартная математическая функция СУММПРОИЗВ (или SUMPRODUCT), позволяющая быстро вычислять такие суммы произведений. Далее на листе MS-Excel надо сделать все необходимые расчёты для задания ограничений. Когда будем иметь всю информацию, необходимую надстройке **“Поиск решения”**, приступаем к решению.

Алгоритм решения задачи ЛП с помощью MS-Excel

1. Организовать данные на листе MS-Excel: а) ввести целевую функцию $P = 200X + 100Y$; б) ввести формулы, отражающие расход ресурсов.

Для этого надо:

2. Выбрать пункт меню **“Сервис” (Tools)**, внутри найти пункт **“Поиск решения” (Solver)**. В появившемся диалоговом окне следует задать параметры поиска, а именно: а) в окошке **“Установить целевую ячейку”** указать ячейку, содержащую целевую функцию; б) установить переключатель на отметке **“Равной максимальному значению”**; в) в поле окна **“Изменяя ячейки”** указать ячейки, соответствующие переменным решения; г) щелкая по кнопке **“Добавить”**, ввести ограничения в окне **“Добавление ограничения”**.

3. Щелкнуть по кнопке “**Параметры**”, в появившемся окне “**Параметры поиска решения**” установить “**Линейная модель**”. Вернуться к окну “**Поиск решения**”.

4. Щелкнуть по кнопке “**Выполнить**”. Оптимизационная программа MS Excel выполнит поиск решения, после чего появится окно “**Результаты поиска решения**”. Если все сделано правильно, программа сообщит: “**Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены**”.

5. В этом случае надо “**Сохранить найденное решение**”.

В случае если программа не может найти решения, надо вернуться в положение “**Восстановить исходные данные**” и проверить организацию данных на листе Excel.

Организация данных задачи об оптимальном плане производства мебельного цеха с помощью MS-Excel смотрите в таблице 2.

Таблица 2 – Организация данных задачи 1 на листе MS Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	Оптимальный план производства мебельного цеха						
2							
3	Параметры						
4	Ресурсы	Запасы	Продукты				
5			Шкафы	Тумбы			
6	ДСП	350	3,5	1			
7	Стекло	240	1	2			
8	Труд	150	1	1			
9	Прибыль		200	100			
10			X1	X2	Расход		
11	Переменные		0	0	ДСП	=\$C\$12*C6+\$D\$12*D6	
12					Стекло	=\$C\$12*C7+\$D\$12*D7	
13					Труд	=\$C\$12*C8+\$D\$12*D8	
14	Целевая функция						
15	P=	=C12*C9+D12*D9					

Решение задачи определения оптимального плана мебельного цеха в табл. 3.

Таблица 3 – Результаты решения примера 1 на листе MS Excel

	A	B	C	D	E	F
1	Оптимальный план производства мебельного цеха					
2						
3	Параметры					
4	Ресурсы	Запасы	Продукты			
5			Шкафы	Тумбы		
6	ДСП	350	3,5	1		
7	Стекло	240	1	2		
8	Труд	150	1	1		
9	Прибыль	200	100			
10			X1	X2	Расход	
11	Переменные		80	70	ДСП	350
12					Стекло	220

13					Труд	150
14	Целевая функция					
15	P=	23000				

В случае если оптимизационная программа не может найти решение, в окне появится сообщения: “Значения целевой ячейки не сходятся” или “Поиск не может найти решения”, или “Условия линейной модели не выполняется”. В этом случае надо переставить переключатель в окне “Результаты поиска решения” в положение “Восстановить исходные данные”, щелкнуть по кнопке Ok и проверить организацию данных на листе Excel и в установках окна “Поиск решения”. Возможно, неверно задан знак ограничений, или неверно введены формулы для целевой функции и ограничений.

В процессе поиска оптимального решения MS-Excel формирует отчет об устойчивости, в котором выдает интервал изменений коэффициентов целевой функции, внутри которого их изменения не приводит к изменению оптимального решения. Для получения этого отчета надо: найти оптимальное решение с помощью “Поиска решения”; - в окне **”Результаты поиска решения”** нажать кнопку **”Отчет об устойчивости”** ;

- в первой таблице отчета об устойчивости **“Изменяемые ячейки”** есть столбцы **“Целевой коэффициент”**, **“Допустимое увеличение”** и **“Допустимое уменьшение”**. В первом из них даны исходные значения целевых коэффициентов. Второй и третий столбцы содержат информацию об интервале устойчивости найденного оптимального решения.

Задания

Задание 1: Мини-кейс «На кондитерской фабрике»

Небольшая кондитерская фабрика должна закрыться на реконструкцию. Необходимо реализовать оставшиеся запасы сырья для производства конфет из ассортимента фабрики, получив максимальную прибыль. Запасы и расход каждого вида сырья для производства единицы продукции каждого вида, а также получаемая при этом прибыль представлены в таблице 4. Мастер цеха, используя свой большой опыт, предлагает выпустить по 200 пакетов каждого вида конфет из ассортимента, утверждая, что ресурсов должно хватить, а прибыль получится 1080 у.е. Молодой менеджер, только что окончивший экономический институт, утверждает, что такие проблемы не решаются на глазок, а с помощью линейного программирования. Хозяин фабрики обещает менеджеру всю прибыль сверх 1080 у.е., если он предложит лучший план, чем многоопытный мастер.

Таблица 4 – Основные параметры задачи «На кондитерской фабрике»

Сырье	Запасы	Продукты				
		Ореховый звон	Райский вкус	Батончик	Белка	Ромашка
Темный шок.	1411	0,8	0,5	1	2	1,1
Светлый шок	149	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2
Сахар	815,5	0,3	0,4	1,3	1,3	0,05
Карамель	466	0,2	0,3	0,7	0,7	0,5
Орехи	1080	0,7	0,1	1,5	1,5	0
Прибыль за пакет		1	0,7	1,1	2	0,6

Воспользуйтесь средствами MS Excel 2010.

Полученные результаты представить в виде таблицы.

Список литературы: 1, 2, 3, 4

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №10

Основы линейного программирования. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В MS EXCEL. ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

Цель: приобрести знания в области применения методов линейного программирования для построения и решения оптимизационных задач управления бизнесом.

Планируемые результаты обучения: разработки оптимизационных моделей в управлении бизнесом (используя инструментарий линейного программирования)

В результате освоения темы формируются индикаторы компетенций:

ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.

ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

Теоретическая часть

В практической работе рассмотрены теория и примеры использования количественных методов и моделей, цель которых – найти оптимальную стратегию управления в условиях, когда все параметры и правила управления системой четко определены и не подвержены никаким случайным воздействиям. В таких задачах используется метод линейной оптимизации, цель которого – составление оптимальных планов производства, продаж, закупок, перевозок, оптимальное финансовое планирование, оптимальная организация рекламных кампаний и др. Планирование – одна из основных функций менеджмента.

Задание

Частный инвестор предполагает вложить 500 тыс. рублей в разные ценные бумаги. После консультаций со специалистами фондового рынка он отобрал три типа акций, два типа государственных облигаций. Часть денег предполагает положить на срочный вклад в банк. Из качественных соображений и личных предпочтений, инвестор выдвигает следующие требования к портфелю ценных бумаг:

- а) все 500 тыс. руб. должны быть инвестированы;
 - б) по крайней мере, 100 тыс. руб. должны быть на срочном вкладе в банке (не меньше);
 - в) по крайней мере, 25% средств, инвестированных в акции, должны быть инвестированы в акции с низким риском (не меньше);
 - г) в облигации надо инвестировать, по крайней мере, столько же средств сколько в акции (не меньше);
 - д) не более чем 125 тыс. руб. должно быть вложено в бумаги с доходом менее чем 10%.
- Данные о предполагаемых доходах по ценным бумагам см. в таблице 1.

Таблица 1 – Данные к заданию 1

Тип вложения	Риск	Предполагаемый ежегодный доход, (%)	Переменные
Акция А	Высокий	15	Y_1
Акция В	Средний	12	Y_2
Акция С	Низкий	9	Y_3

Долгосрочные облигации		11	Y_4
Краткосрочные облигации		8	Y_5
Срочный вклад		6	Y_6

В задаче требуется ответить на вопросы:

1. Определить портфель бумаг инвестора, который удовлетворяет всем требованиям и максимизирует годовой доход. Какова величина этого дохода?
2. Если инвестор вносит дополнительные средства в портфель бумаг, сохраняя все ограничения, как изменится ожидаемый годовой доход?
3. Ожидаемый годовой доход по той или иной бумагам (особенно по акциям) – это не более чем оценка. На сколько оптимальный портфель и ожидаемая величина дохода от портфеля выбранных бумаг чувствительны к этим оценкам? Какая именно бумага портфеля наиболее сильно влияет на оценку суммарного ожидаемого дохода?
4. Дать интерпретацию значений теневых цен для правых частей каждого из ограничений.

Контрольные вопросы

1. Оптимизация в условиях полной определенности. Метод линейной оптимизации
2. Анализ оптимального решения задачи линейного программирования
3. Взаимно-двойственные задачи ЛП
4. Приемы решения задачи ЛП с помощью MS-Excel

Список литературы: 1, 2, 3, 4

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №11

ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ И ЛОГИСТИКА. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА В MS EXCEL

Цель: приобрести знания в области применения методов линейного программирования для построения и решения оптимизационных задач управления бизнесом.

Планируемые результаты обучения: разработки оптимизационных моделей в управлении бизнесом (используя инструментарий линейного программирования)

В результате освоения темы формируется индикаторы компетенций:

ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.

ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

Теоретическая часть

В деловой практике широко используются две модели: транспортная задача и задача о назначениях. Представление о том, что такое транспортная задача, у специалиста по исследованию операций и у менеджера отдела логистики очень сильно различаются. Сточки зрения менеджера, транспортные задачи – это любые задачи, связанные с оптимизацией перевозок. С точки зрения специалиста по исследованию операций, транспортная задача – это специальный вид задачи линейной оптимизации, для которой из-за ее формулировки и специфических ограничений существуют свои эффективные алгоритмы решения. Это могут быть задачи, не связанные с перевозками.

Классическая транспортная задача (ТЗ) имеет своей целью минимизацию транспортных издержек (или максимизацию прибыли) при перевозках однотипных грузов (контейнеров, вагонов, машин и т.п.) от нескольких поставщиков (с различных складов), расположенных в разных местах, к нескольким потребителям. При этом принимается в расчет только переменные транспортные издержки, которые пропорциональны количеству перевезенных единиц груза.

Задание

В районе имеется два песчаных карьера, с которых песок вывозится на 5-ти тонных грузовиках. Предприятия, S1 и S2, разрабатывающие карьеры (*поставщики* песка), могут поставлять соответственно 100 и 200 грузовиков с песком в день. В этом районе имеется три завода железобетонных конструкций (*потребители* песка) D1, D2 и D3, которым требуется соответственно 80, 90 и 130 грузовиков с песком в день. Стоимости перевозки песка одним грузовиком от карьера Si (i=1, 2) к заводу Dj (j=1, 2, 3) в условных единицах, приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры задачи 1

Si/ Dj	D1	D2	D3	Запасы
S1	3	6	4	100
S2	8	4	5	200
Заказы	80	90	130	300

Контрольные вопросы

1. Перечислите особенности ТЗ, позволяющие выделить эти задачи в отдельный класс задач ЛП и использовать специальные методы для их решения.
2. Что такое опорный план перевозок и чем он отличается от других планов?
3. Какие существуют методы построения первоначального плана ТЗ и чем они отличаются друг от друга?
4. Что означает условие сбалансированности ТЗ? Почему необходимо его соблюдать?
4. Приемы решения транспортной задачи с помощью MS-Excel

Список литературы: 1, 2, 3, 4

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №12

ТЕОРИЯ ИГР И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Цель: приобрести знания в области теории игр и применения методов принятия решений в условиях неопределенности; методы количественного анализа информации при принятии управленческих решений.

Планируемые результаты обучения: основные моделирования с использованием инструментария теории игр; методы принятия решений в условиях неопределенности.

В результате освоения темы формируются индикаторы компетенций:

ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.

ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

Теоретическая часть

Рассмотренные задачи линейного программирования формулировались и решались в предположении наличия полной информации. Их можно отнести к совокупности задач принятия решений в условиях определенности.

В реальных экономических условиях приходится решать отдельные задачи при ограниченности, неточности исходной информации о самом объекте и внешней среде, в которой он функционирует и развивается. При принятии управленческих решений о функционировании и развитии экономического объекта необходимо учитывать важную характеристику внешней среды — неопределенность. Под неопределенностью следует понимать отсутствие, неполноту, недостаточность информации об объекте, процессе, явлении или неуверенность в достоверности информации.

Существует множество источников возникновения неопределенности для различных экономических объектов. Например, к основным источникам возникновения неопределенности на транспорте можно отнести следующие: 1) существенную зависимость транспортного процесса от погодных условий. Например, погодные условия могут вызвать непредвиденные последствия в перевозках сельскохозяйственной продукции; 2) наличие, кроме транспортного предприятия, других участников транспортного процесса — поставщиков грузов, потребителей грузов др.; результат их влияния на транспортный процесс носит неопределенный и неоднозначный характер; 3) наличие в работе автотранспорта элементов вероятности и случайности (надежность подвижного состава, неравномерность спроса на транспортные услуги во времени и др.); 4) недостаточность, неполнота информации об объекте, процессе, явлении, по отношению к которому принимается решение, ограниченность в сборе и обработке информации, постоянная ее изменчивость; 5) наличие в общественной жизни страны противоборствующих тенденций, столкновение противоречивых интересов; 6) невозможность однозначной оценки объекта при сложившихся в данных условиях уровне и методах научного познания; 7) относительная ограниченность сознательной деятельности лица, принимающего решение, существующие различия в социально-психологических установках, идеалах, намерениях, оценках, стереотипах поведения.

Неопределенность обуславливает появление ситуаций, не имеющих однозначного исхода (решения). Среди различных видов ситуаций, с которыми в процессе производства сталкиваются предприятия, особое место занимают ситуации риска.

Под ситуацией риска следует понимать сочетание, совокупность различных обстоятельств и условий, создающих обстановку того или иного вида деятельности. Ей сопутствуют три условия:

- наличие неопределенности;
- необходимость выбора альтернативы (отказ от выбора таковых является разновидностью альтернативы);
- возможность оценить вероятность осуществления выбираемых альтернатив.

Таким образом, если существует возможность количественно и качественно определить степень вероятности того или иного варианта, то это и будет ситуация риска.

Для того чтобы снять ситуацию риска, руководители предприятий вынуждены принимать решения и стремиться реализовать их. Этот процесс находит свое выражение в понятии «риск». Несмотря на то, что риск объективно присутствует во всех сферах общественной жизни и в большинстве видов управленческой деятельности, обнаруживается, что понятие «риск» до сих пор не получило универсальной трактовки.

Следует упомянуть об экономическом риске применительно к процессам принятия решений в условиях неопределенности и риска, иными словами, в условиях дефицита информации или неуверенности в достоверности информации. В этом случае риск предстает в виде совокупности вероятных экономических, политических, нравственных и других положительных и неблагоприятных последствий, которые могут наступить при реализации выбранных решений. Определим риск как целенаправленные действия, в ходе которых имеется возможность количественно и качественно оценить вероятность достижения желаемого результата, неудачи и отклонения от цели (положительного или отрицательного свойства).

Чтобы проиллюстрировать различие между ситуациями, когда приходится принимать решения в условиях риска или в условиях неопределенности, рассмотрим задачу оптимального выбора ассортимента выпускаемой продукции.

В условиях риска доход c_j от реализации единицы продукции j не является фиксированной величиной. Напротив, это случайная величина, точное числовое значение которой не известно, но описывается с помощью функции распределения $f(c_j)$.

Часть дохода $c_j x_j$ определяемая продукцией j , также случайная величина, если даже значение переменной x_j определяющей уровень выпуска продукции j , задано.

В условиях неопределенности функция распределения $f(c_j)$ неизвестна. В действительности неопределенность не означает полного отсутствия информации о задаче. Например, известно, что c_j может принимать пять значений, но неизвестны вероятности этих значений. Эта ситуация рассматривается как принятие решений в условиях неопределенности.

Таким образом, с точки зрения полноты исходных данных определенность и неопределенность представляют два крайних случая, а риск определяет промежуточную ситуацию, в которой приходится принимать решение.

Степень неинформированности данных определяет, каким образом задача формализуется и решается. При решении задач в условиях неопределенности внешней среды наиболее часто возникают две ситуации. При первой ситуации сама система препятствует принятию решений, например задача составления графика выпуска на работу подвижного состава, занимающегося перевозкой сельхозпродукции, в зависимости от того, будет дождь или нет. В этой задаче природа будет восприниматься как «доброжелательный» противник. Во второй ситуации возможно наличие конкуренции, когда два (или более) участника находятся в конфликте и каждый стремится как можно больше выиграть у другого (других). Эта ситуация отличается от обычных процессов принятия решений в условиях неопределенности тем, что лицу, принимающему решение, противостоит мыслящий противник. Теория, в которой рассматриваются задачи принятия решений в условиях неопределенности при наличии противника («доброжелательного» или мыслящего), известна как *теория игр*.

Математическая модель конфликтной ситуации представляет собой игру. Игра — это совокупность правил, описывающих сущность конфликтной ситуации. Эти правила устанавливаются:

- выбор образа действия игроков на каждом этапе игры;
- информацию, которой обладает каждый игрок при осуществлении таких выборов;
- плату для каждого игрока после завершения любого этапа игры.

Игру можно определить следующим образом:

- имеются n конфликтующих сторон (игроков), принимающих решения, интересы которых не совпадают;
- сформулированы правила выбора допустимых стратегий, известные игрокам;
- определен набор возможных конечных состояний игры (например, выигрыш, ничья, проигрыш);
- всем игрокам (участникам игры) заранее известны платежи, соответствующие каждому возможному конечному состоянию.

Платежи задаются в виде матрицы $\bar{A} = \|a_{ij}\|$.

В зависимости от числа конфликтующих сторон игры делятся на парные (с двумя игроками) и множественные (имеющие не менее трех игроков). Каждый игрок имеет некоторое множество (конечное или бесконечное) возможных выборов, т. е. стратегий.

Стратегией игры называется совокупность правил, определяющих поведение игрока от начала игры до ее завершения. Стратегии каждого игрока определяют результаты или платежи в игре. Игра называется игрой с нулевой суммой, если проигрыш одного игрока равен выигрышу другого, в противном случае она называется игрой с ненулевой суммой.

Задание стратегий (и) двух игроков в парной игре полностью определяет ее исход, т.е. выигрыш одного или проигрыш другого. Игра называется **конечной**, если у каждого игрока имеется конечное число стратегий. Результаты конечной парной игры с нулевой суммой можно задавать матрицей, строки и столбцы которой соответствуют различным стратегиям, а ее элементы - соответствующие выигрыши одной стороны (равные проигрышам другой). Эта матрица называется платежной матрицей или матрицей игры. Если первый игрок имеет стратегий, а второй - стратегий, то говорят, что мы имеем дело с игрой . Рассмотрим игру .

Пусть заданы множество стратегий игрока I - $\{A_i\}$ и множество стратегий игрока II - $\{B_j\}$, а также платежная матрица , где - выигрыш игрока I или проигрыш игрока II при выборе ими стратегий и соответственно. Каждый из игроков выбирает однозначно с вероятностью 1 некоторую стратегию, т.е. пользуется при выборе решения **чистой стратегией**. При этом **решение** игры будет в чистых стратегиях. Поскольку интересы игроков противоположны, то первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, а второй игрок - наоборот, минимизировать свой проигрыш.

Решение игры состоит в определении наилучшей стратегии каждым игроком. Выбор наилучшей стратегии одним игроком проводится при полном отсутствии информации о принимаемом решении вторым игроком. Следует отметить, что первый и второй игроки являются разумными противниками, которые находятся в состоянии конфликта. Поэтому для решения игры двух лиц с нулевой суммой используется очень «пессимистичный» критерий, так называемый критерий **минимакса-максимина**. Этот критерий рассмотрен в предыдущем разделе. Основное различие заключается в том, что ранее «природа» не рассматривалась как активный противник, тогда как в теории игр каждый игрок действует разумно, и, следовательно, пытается активно помешать своему противнику. Так, если первый игрок применяет стратегию , то второй будет стремиться к тому, чтобы выбором соответствующей стратегии свести выигрыш первого игрока к минимуму, что равнозначно сведению своего проигрыша к минимуму. Величина этого минимума будет равна:

Первый игрок (при любых ответах противника) будет стремиться найти такую стратегию, при которой обращается в максимум:

Величина называется нижней ценой игры. Ей соответствует максиминная стратегия, придерживаясь которой первый игрок при любых стратегиях противника обеспечит себе выигрыш, не меньший. Другими словами, нижняя цена игры является гарантированным выигрышем игрока I при любых стратегиях игрока II.

Аналогично определим по каждому столбцу матрицы, найдем минимальное значение:

Величина называется верхней ценой игры. Ей соответствует минимаксная стратегия второго игрока. Величина представляет собой гарантированный проигрыш игрока II при любой стратегии игрока I.

Пример 1. Дана платежная матрица, которая определяет выигрыши игрока. Вычислить нижнюю и верхнюю цены заданной игры.

Решение. Представим нашу игру в виде таблицы:

Стратегии игрока I,	Стратегии игрока II,				Значение	
	10	4	11	7	4	-
	7	6	8	20	6	6
	6	2	1	11	1	-
Значение	10	6	11	20		
	-	6	-	-	-	-

Если игрок выбирает первую стратегию, он может получить выигрыш в размере или у.е. в зависимости от выбранной стратегии игроком. При этом выигрыш игрока будет не меньше у.е. независимо от поведения игрока. Аналогично при выборе игроком второй стратегии гарантированный выигрыш будет равен у.е. При выборе игроком третьей стратегии - у.е. Таким образом, минимальные значения определяют минимально гарантированный выигрыш для игрока, если он выбирает соответствующую стратегию. Величина у.е. будет гарантированным выигрышем игрока при любых стратегиях игрока. Выбранная игроком вторая стратегия называется максиминной стратегией, а соответствующее ее значение выигрыша у.е. будет нижней ценой игры.

Второй игрок стремится минимизировать свой проигрыш. Выбрав первую стратегию, игрок может проиграть не более чем у.е. независимо от выбора стратегии игроком. Аналогично рассуждая, получим результаты: у.е.; у.е.; у.е. Результаты сведены в таблицу (табл.14.6). Игрок выбирает стратегию, которая минимизирует его максимальные

проигрыши $= \min\{10; 6; 11; 20\} = 6$ у.е. Величина у.е. будет гарантированным проигрышем игрока при любых стратегиях игрока. Выбранная игроком вторая стратегия называется минимаксной стратегией, а соответствующее ее значение проигрыша у.е. будет верхней ценой игры.

Следует отметить, что для любой матрицы выполняется неравенство

Если, т. е. верхняя цена равна нижней цене игры, то соответствующие чистые стратегии называются оптимальными, а про игру говорят, что она имеет седловую точку. Седловая точка является минимальным элементом соответствующей строки и максимальным элементом соответствующего столбца. Эта точка есть точка равновесия игры, определяющая однозначно оптимальные стратегии. «Оптимальность» здесь означает, что ни один игрок не стремится изменить свою стратегию, так как его противник может на это

ответить выбором другой стратегии, дающей худший для первого игрока результат. Величина называется ценой игры. Она определяет средний выигрыш игрока и средний проигрыш игрока при использовании ими оптимальных стратегий. В нашем примере цена игры у.е., оптимальная пара стратегий и .

Если в платежной матрице все элементы строки не меньше соответствующих элементов строки , а по крайней мере один строго больше, то строка называется доминирующей, а строка доминируемой.

Аналогично понятие доминирующего и доминируемого столбцов.

Первому игроку невыгодно применять стратегии, которым соответствуют доминируемые строки, второму игроку невыгодно применять стратегии, которым соответствуют доминирующие столбцы. Поэтому при решении игры можно уменьшить размеры платежной матрицы путем удаления из нее доминирующих столбцов и доминируемых строк.

Пример 2. Для игры с платежной матрицей

найти стратегии игроков и цену игры.

Решение. Элемент является наименьшим в третьей строке и наибольшим во втором столбце, т. е. он является седловой точкой. Поэтому цена игры , а оптимальные стратегии игроков первого , второго - .

Используя понятие доминируемых строк и доминирующих столбцов, задачу можно решить следующим образом.

В матрице третья строка доминирует над второй, поэтому вторую можно изъять из платежной матрицы. В результате получится матрица

В матрице первый и третий столбцы доминируют над вторым, следовательно, их можно изъять. В результате платежная матрица принимает вид:

В матрице вторая строка доминирует. После вычеркивания получится матрица , состоящая из одного элемента:

Элемент матрицы и определяет решение нашей задачи.

Отдельные игры могут не иметь седловых точек, т. е. у каждого игрока не существует единственной, наиболее надежной стратегии. В этом случае используют **смешанную** стратегию. Смешанная стратегия состоит в том, что в ходе игры происходит случайный выбор стратегии из некоторого множества смешанных стратегий и для каждой смешанной стратегии указывается вероятность ее выбора. Смешанная стратегия для игрока представляет собой вектор

$$(14.38)$$

где - вероятность выбора -й стратегии игроком и удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n q_j = 1; \\ & q_j \geq 0, \end{aligned} \quad (14.39)$$

Аналогично смешанная стратегия игрока представляет собой вектор :

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1, \quad (14.40)$$

где - вероятность выбора --й стратегии игроком и удовлетворяет следующим условиям;

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1. \quad (14.41)$$

Платежная матрица игры имеет следующий вид:

B	q_1	q_2	q_3	$\dots$	q_n
A	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}

P_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\dots$	a_{2n}	(14.42)
P_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\dots$	a_{3n}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
P_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	$\dots$	a_{mn}	

Игрок выбирает стратегию так, чтобы максимизировать наименьший **ожидаемый** выигрыш по столбцам платежной матрицы, тогда как игрок выбирает стратегию с целью минимизировать наибольший **ожидаемый** проигрыш по строкам. Математически критерий минимакса при смешанных стратегиях может быть описан следующим образом. Игрок выбирает стратегию, дающую

$$\min_j \max_i a_{ij} \quad (14.43)$$

Игрок выбирает стратегию дающую:

$$\max_i \min_j a_{ij} \quad (14.44)$$

Когда стратегии i и j оптимальны, то выполняется строгое равенство между максиминным ожидаемым выигрышем и минимаксным проигрышем, а результирующее значение равно оптимальному (ожидаемому) значению игры. Этот вывод следует из теоремы фон Неймана о минимаксе. Теорема утверждает, что выражения (14.43), (14.44) имеют одно и то же значение, называемое ценой игры. Если i и j - оптимальные решения для обоих игроков, каждому элементу платежной матрицы соответствует вероятность p_i . Следовательно, оптимальное ожидаемое значение игры:

$$v = \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \quad (14.45)$$

Цена игры заключена между нижней и верхней ценами. Решить конечную игру - это значит нужно найти векторы p и q (оптимальные стратегии), удовлетворяющие теореме о минимаксе, а следовательно, получить величину ожидаемого платежа - цену игры.

Свойство оптимальности означает, что любое отступление одного из игроков от оптимальной стратегии (при условии, что второй игрок продолжает придерживаться своей оптимальной стратегии) при многократном повторении игры может только уменьшить его средний выигрыш (увеличить средний проигрыш).

Решение игры обладает одним важным свойством: если игрок использует свою оптимальную стратегию, а игрок смешивает свои стратегии в любых пропорциях, то средний выигрыш игрока не уменьшается. Стратегии, которые смешиваются для получения оптимальной стратегии, будем называть полезными. Доказано, что у игры существует такое оптимальное решение, что число полезных стратегий с каждой стороны не превосходит минимального из чисел m и n . Известно несколько методов нахождения оптимальных стратегий в играх двух лиц с нулевой суммой. Рассмотрим один из них - метод линейного программирования для нахождения решения игр.

Пусть игра не имеет оптимального решения непосредственно в чистых стратегиях, т. е. отсутствует седловая точка. Оптимальное решение необходимо искать в области смешанных стратегий. Предположим, что все стратегии игрока i полезны. Определим вероятности их применения в смешанной оптимальной стратегии. Обозначим эти вероятности через p_i , а цену игры через v . Оптимальная смешанная стратегия игрока определяется из условия (14.43):

$$v \leq \sum_{j=1}^n p_j a_{ij} \quad (14.46)$$

Поскольку при оптимальной стратегии средний выигрыш не меньше при любой стратегии противника, то справедлива система неравенств:

[illegible]

$$\text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} e^{-\lambda^2 x^2/2} d\lambda = 1. \quad (14.48)$$

Тогда задача отыскания оптимальной смешанной стратегии игрока может быть сформулирована в виде задачи линейного программирования:

максимизировать при ограничениях

(14.49)

Введем новые неизвестные

Чтобы исключить возможность деления на нуль, увеличим цену игры на положительное число ϵ . Для этого достаточно ко всем элементам матрицы прибавить одно и то же положительное число ϵ , при этом все элементы сделать положительными. Следует отметить, что эта операция не меняет искомым оптимальных стратегий.

Поскольку φ , то φ .

Разделим левую и правую части неравенств (14.48) и (14.49) на γ , получим:

[illegible]

В силу того, что

задача принимает вид:

$$\min_{\mathbf{u}} \quad (14.52)$$

при ограничениях

(14.53)

Для игрока оптимальная стратегия определяется из условия (14.44):

при ограничениях

$$(14.54)$$

Эта задача записывается как симметричная двойственная задача линейного программирования к задаче игрока (14.52), (14.53):

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать} & (14.55) \\ & \text{при ограничениях} & (14.56) \end{aligned}$$

где α, β, γ —

Задачи игроков и решают обычным симплекс-методом.

Пример 3. Рассмотрим следующую игру :

$$\begin{array}{cccc|c}
& B & & & \\
1 & 2 & 3 & 4 & \alpha_i
\end{array}$$

A	1	4	3	2	-5	-5
	2	-2	5	-1	4	-2
	3	-3	2	-3	6	-3
	β_j	4	5	2	6	

Определим α_i и β_j ,

где α_i - минимум в i -й строке;

β_j - максимум в j -м столбце.

Нижняя цена игры максимин α_i , верхняя цена игры равна минимаксу β_j . Так как $\alpha_i < \beta_j$, то седловая точка игры отсутствует, задача должна решаться в смешанных стратегиях.

Нижняя цена игры - число отрицательное, поэтому, возможно, значение игры не будет положительным. Число β_j , которое необходимо прибавить ко всем элементам матрицы, должно быть не меньше 2. Пусть $\beta_j = 2$. Тогда матрица принимает вид

A		B			
		1	2	3	4
	1	10	9	8	1
	2	4	11	5	10
	3	3	8	3	12

Задача игрока записывается в форме задачи линейного программирования

при ограничениях:

$$\begin{cases} 10Y_1 + 9Y_2 + 8Y_3 + Y_4 \leq 1, \\ 4Y_1 + 11Y_2 + 5Y_3 + 10Y_4 \leq 1, \\ 3Y_1 + 8Y_2 + 3Y_3 + 12Y_4 \leq 1, \\ Y_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Решая задачу симплекс-методом, получим:

;

Таким образом, решением исходной задачи будет

;

,

,

,

.

В нашем примере первая и вторая стратегии игрока бесполезны, т.к. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. При случайном чередовании третьей и четвертой стратегий с относительными частотами y_3 и y_4 соответственно игроку обеспечен средний выигрыш в размере $v = 1/10$.

Оптимальные стратегии игрока получаются из решения двойственной задачи.

Задания

Задание 1. Найдите седловую точку и значение игры для каждой из двух следующих игр. Платежные матрицы имеют вид:

;

Задание 2. Определить области значений α_i и β_j , для которых стратегии i и j будут оптимальными в следующих играх:

;

Задание 3. Определить, будут ли значения следующих игр больше, меньше или равны нулю:

;
;

Список литературы 1, 2, 3, 4

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №13

ТЕОРИЯ ИГР И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ. МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ С ИЗВЕСТНЫМИ ВЕРОЯТНОСТЯМИ УСЛОВИЙ. КРИТЕРИЙ ЛАПЛАСА

Цель: приобрести знания в области методических основ выбора альтернатив при принятии решений в управлении бизнесом

Планируемые результаты обучения: знание основных понятий среды принятия решений; умение применять методы принятия решений в условиях определенности, риска и неопределенности

В результате освоения темы формируются индикаторы компетенций:

ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.

ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

Теоретическая часть

Неопределенность является характеристикой внешней среды (природы), в которой принимается управленческое решение о развитии (или функционировании) экономического объекта. Здесь будем рассматривать неопределенность «природы», вызванную отсутствием, недостатком информации о действительных условиях (факторах), при которых развивается объект управления. Внешняя среда («природа») может находиться в одном из множества возможных состояний. Это множество может быть конечным и бесконечным. Будем считать, что множество состояний конечно или по крайней мере количество состояний можно перенумеровать.

Пусть S_i - состояние «природы», при этом $i = \overline{1, n}$, где n - число возможных состояний. Все возможные состояния известны, не известно только, какое состояние будет иметь место в условиях, когда планируется реализация принимаемого управленческого решения. Будем считать, что множество управленческих решений (планов) R_j также конечно и равно m .

Реализация R_j плана в условиях, когда «природа» находится в S_i состоянии, приводит к определенному результату, который можно оценить, введя количественную меру. В качестве этой меры может служить выигрыш от принимаемого решения (плана); потери от принимаемого решения; полезность, риск и другие количественные критерии.

Данные, необходимые для принятия решения в условиях неопределенности, обычно задаются в форме матрицы, строки которой соответствуют возможным действиям (управленческим решениям) R_j , а столбцы - возможным состояниям «природы» S_i .

Допустим, каждому R_j му действию и каждому возможному S_i му состоянию «природы» соответствует результат (исход), определяющий результат (выигрыш, полезность) при выборе j -го действия и реализации i -го состояния, - V_{ji} .

	S_1	S_2	...	S_i	...	S_n
R_1	V_{11}	V_{12}	...	V_{1i}	...	V_{1n}
R_2	V_{21}	V_{22}	...	V_{2i}	...	V_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
R_j	V_{j1}	V_{j2}	...	V_{ji}	...	V_{jn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
R_m	V_{m1}	V_{m2}	...	V_{mi}	...	V_{mn}

Следовательно, математическая модель задачи принятия решений определяется множеством состояний $\{S_i\}$, множеством планов (стратегий) $\{R_j\}$ и матрицей возможных результатов $\|V_{ji}\|$. В качестве результатов, в отдельных задачах, рассматривается матрица рисков $\|r_{ji}\|$.

Риск – мера несоответствия между разными возможными результатами принятия определенных стратегий (действий).

Элементы матрицы рисков $\|r_{ji}\|$ связаны с элементами матрицы полезностей (выигрышей) соотношением:

$$r_{ji} = V_i - V_{ji},$$

где $V_i = \max_j V_{ji}$ – максимальный элемент в столбце матрицы полезностей.

Если матрица возможных результатов $\|V_{ji}\|$ представляет собой матрицу потерь (затрат), то элементы матрицы рисков $\|r_{ji}\|$ следует определять по формуле:

$$r_{ji} = V_{ji} - V_i,$$

где $V_i = \min_j V_{ji}$ – минимальный элемент в столбце – i матрицы потерь (результатов).

Таким образом, риск – это разность между результатом, который можно получить, если знать действительное состояние «природы», и результатом, который будет получен при j -й стратегии.

Матрица рисков дает более наглядную картину неопределенной ситуации, чем матрица выигрышей (полезностей).

Непосредственный анализ матриц выигрышей $\|V_{ji}\|$ или рисков $\|r_{ji}\|$ не позволяет в общем случае принять решение по выбору оптимальной стратегии (плана), за исключением тривиального случая, когда выигрыши при одной стратегии выше, чем при любой другой для каждого состояния «природы» (элементы матрицы выигрышей в некоторой строке больше, чем в любой из других). Другими словами, имеется в наличии «доминирующая» стратегия.

Для принятия решения в условиях неопределенности используется ряд критериев, которые рассматриваются ниже.

1. Критерий Лапласа.

Этот критерий опирается на «принцип недостаточного основания» Лапласа, согласно которому все состояния «природы» $S_i, i=1, \overline{n}$ полагаются равновероятными. В соответствии с этим принципом каждому состоянию ставится вероятность q_i , определяемая по формуле

$$q_i = \frac{1}{n}.$$

При этом исходную задачу можно рассматривать как задачу принятия решения в условиях риска, когда выбирается действие R_j , дающее наибольший ожидаемый выигрыш. Для принятия решения для каждого действия R_j вычисляют среднее арифметическое значение выигрыша:

$$M_j(R) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{ji}.$$

Среди $M_j(R)$ выбирают максимальное значение, которое будет соответствовать оптимальной стратегии R_j .

Другими словами, находится действие R_j , соответствующее

$$\max_{R_j} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{ji} \right\}.$$

Если в исходной задаче матрица возможных результатов представлена матрицей рисков $\|r_{ji}\|$, то критерий Лапласа принимает вид

$$\min_{R_j} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{ji} \right\}.$$

Пример. Одно из транспортных предприятий должно определить уровень своих провозных возможностей так, чтобы удовлетворить спрос клиентов на транспортные услуги на планируемый период. Спрос на транспортные услуги не известен, но ожидается (прогнозируется), что он может принять одно из четырех значений: 10, 15, 20 или 25 тыс. тонн. Для каждого уровня спроса существует наилучший уровень провозных возможностей транспортного предприятия (с точки зрения возможных затрат). Отклонения от этих уровней приводят к дополнительным затратам либо из-за превышения провозных возможностей над спросом (из-за простоя подвижного состава), либо из-за неполного удовлетворения спроса на транспортные услуги. Ниже приводится таблица, определяющая возможные затраты на развитие провозных возможностей (табл.).

Таблица – Прогнозируемые затраты.

Варианты провозных возможностей транспортного предприятия	Варианты спроса на транспортные услуги			
	1	2	3	4
1	6	12	20	24
2	9	7	9	28
3	23	18	15	19
4	27	24	21	15

Необходимо выбрать оптимальную стратегию.

Решение

Согласно условию задачи, имеется четыре варианта спроса на транспортные услуги, что равнозначно наличию четырех состояний «природы» S_1, S_2, S_3, S_4 . Известны также четыре стратегии развития провозных возможностей транспортного предприятия R_1, R_2, R_3, R_4 . Затраты на развитие провозных возможностей при каждой паре S_i и R_i заданы матрицей (таблицей):

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	6	12	20	24
R_2	9	7	9	28
R_3	23	18	15	19
R_4	27	24	21	15

Принцип Лапласа предполагает, что S_1, S_2, S_3, S_4 равновероятны. Следовательно $P\{S=S_i\}=\frac{1}{n}=\frac{1}{4}=0,25$, $i=1,2,3,4$, и ожидаемые затраты при различных действиях R_1, R_2, R_3, R_4 составляют:

$$W\{R_1\}=0,25 \cdot (6+12+20+24)=15,5,$$

$$W\{R_2\}=0,25 \cdot (9+7+9+28)=13,25,$$

$$W\{R_3\}=0,25 \cdot (23+18+15+19)=18,75,$$

$$W\{R_4\}=0,25 \cdot (27+24+21+15)=21,75.$$

Таким образом, наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с критерием Лапласа будет R_2 .

Практические задания

Задание 1. Рассмотрим следующую платежную матрицу (матрицу доходов)

15	12	1	-3	18	20
2	15	9	7	1	3
0	6	15	21	-2	5
8	20	12	3	0	4.

Вероятности состояний природы неизвестны. Определить оптимальную стратегию, используя критерии Лапласа и максимина. Сравнить полученные решения.

Задание 2. При выборе стратегии каждому возможному состоянию природы соответствует один результат (исход). Элементы, являющиеся мерой потерь в у.е. при принятии решения, приведены в табл.

Таблица

Стратегии	Состояния природы			
	2	6	5	8
R_2	3	9	1	4
	5	1	6	2

Выбрать оптимальное решение в соответствии с критериями Лапласа (при).

Контрольные вопросы

1. Что понимают под неопределенностью?
2. В каких случаях используется критерий ожидаемого значения?
3. На что опирается критерий Лапласа?

Список литературы: 1, 2, 3, 4

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №14
ТЕОРИЯ ИГР И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ.
ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ.
КРИТЕРИИ ВАЛЬДА, СЭВИДЖА, ГУРВИЦА

Цель: приобрести знания в области методических основ выбора альтернатив при принятии решений.

Планируемые результаты обучения: знание основных понятий среды принятия решений; умение применять методы принятия решений в условиях определенности, риска и неопределенности.

В результате освоения темы формируются индикаторы компетенций:

ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.

ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

Теоретическая часть

Критерий Вальда (максиминный или минимаксный критерий). Применение данного критерия не требует знания вероятностей состояний S_i . Этот критерий опирается на принцип наибольшей осторожности, поскольку он основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий R_j .

Если в исходной матрице (по условию задачи) результат V_{ji} представляет потери лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется минимаксный критерий. Для определения оптимальной стратегии R_j необходимо в каждой строке матрицы результатов найти наибольший элемент $\max_i \{V_{ji}\}$, а затем выбирается действие R_j (строка j), которому будет соответствовать наименьшее из этих наибольших элементов, т.е. определяющее результат, равный:

$$W = \min_j \max_i \{V_{ji}\}.$$

Если в исходной матрице по условию задачи результат V_{ji} представляет выигрыш (полезность) лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется максиминный критерий.

Для определения оптимальной стратегии R_j в каждой строке матрицы результатов находят наименьший элемент $\min_j \{V_{ji}\}$, а затем выбирается действие R_j (строка j), которому будет соответствовать наибольшее из этих наименьших элементов, т.е. определяющее результат, равный

$$W = \max_j \min_i \{V_{ji}\}.$$

Пример. Рассмотрим предыдущий пример. Так как V_{ji} в этом примере представляет потери (затраты), применим минимаксный критерий. Необходимые результаты вычисления приведены в таблице.

Таблица

Состояния S_i Стратегии R_j	Затраты, у.д.е. (V_{ji})				$\max(V_{ji})$	$W = \min \max(V_{ji})$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	6	12	20	24	24	-
R_2	9	7	9	28	28	-
R_3	23	18	15	19	23	23
R_4	27	24	21	15	27	-

Таким образом, наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с минимаксным критерием «лучшим из худших» будет третья - .

Минимаксный критерий Вальда иногда приводит к нелогичным выводам из-за своей чрезмерной «пессимистичности». «Пессимистичность» этого критерий исправляет критерий Сэвиджа.

Критерий Сэвиджа использует матрицу рисков $\|r_{ji}\|$. Элементы данной матрицы можно определить по предыдущим формулам, которые перепишем в виде:

$$r_{ji} = \begin{cases} \max_j(V_{ji}) - V_{ji}, & \text{если } V' - \text{выигрыш} \\ V_{ji} - \min_j(V_{ji}), & \text{если } V' - \text{потери} \end{cases}$$

Это означает, что r_{ji} есть разность между наилучшим значением в столбце i и значениями V_{ji} при том же i . Отметим, что независимо от того, является ли V_{ji} доходом (выигрышем) или потерями (затратами), r_{ji} в обоих случаях определяет величину потерь лица, принимающего решение. Следовательно, можно применять к r_{ji} только минимаксный критерий. Критерий Сэвиджа рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию R_j , при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален).

Пример. Рассмотрим пример. Заданная матрица определяет потери (затраты), вычислим элементы матрицы рисков $\|r_{ji}\|$:

$$\|r_{ji}\| = \begin{matrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ R_1 & 0 & 5 & 11 & 9 \\ R_2 & 3 & 0 & 0 & 13 \\ R_3 & 17 & 11 & 6 & 4 \\ R_4 & 21 & 17 & 12 & 0 \end{matrix}$$

Полученные результаты вычислений с использованием критерия минимального риска Сэвиджа сведены в табл..

Таблица

Состояния S_i Стратегии R_j	Величина риска, у.д.е.				$\max(r_{ji})$	$W = \min \max(r_{ji})$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	0	5	11	9	11	11
R_2	3	0	0	13	13	-
R_3	17	11	6	4	17	-

R_4	21	17	12	0	21	-
-------	----	----	----	---	----	---

Введение величины риска r_{ji} привело к выбору первой стратегии R_1 , обеспечивающей наименьшие потери (затраты) в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален). Применение критерия Сэвиджа позволяет любыми путями избежать большого риска при выборе стратегии, а значит избежать большего проигрыша (потерь).

Критерий Гурвица основан на следующих двух предположениях: «природа» может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $(1-\alpha)$ и в самом выгодном состоянии - с вероятностью α , где α - коэффициент доверия. Если результат - прибыль, полезность, доход и т.п., то критерий Гурвица записывается так:

$$W = \max_j \left[\alpha \cdot \max_i V_{ji} + (1-\alpha) \cdot \min_i V_{ji} \right].$$

Когда V_{ji} представляет затраты (потери), то выбирают действие, дающее:

$$W_{\min} = \min_j \left[\alpha \cdot \min_i V_{ji} + (1-\alpha) \cdot \max_i V_{ji} \right].$$

Если, получим пессимистический критерий Вальда.

Если, то приходим к решающему правилу вида $\max_j \max_i V_{ji}$, так называемая стратегия «здорового оптимиста», критерий слишком оптимистичный.

Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма взвешиванием обоих способов поведения соответствующими весами $(1-\alpha)$ и α , где $0 \leq \alpha \leq 1$. Значение α между 0 и 1 может определяться в зависимости от склонности лица, принимающего решение, к пессимизму или оптимизму. При отсутствии ярко выраженной склонности $\alpha = 0,5$ представляется наиболее разумным.

Пример. Критерий Гурвица используем на основе данных предыдущего примера. Положим $\alpha = 0,5$. Результаты необходимых вычислений приведены ниже. Оптимальное решение заключается в выборе (табл.).

Таблица

W_j	$\min_i V_{ji}$	$\max_i V_{ji}$	$\alpha \cdot \min_i V_{ji} + (1-\alpha) \cdot \max_i V_{ji}$	$\min_j W_j$
	6	24	15	15
	7	28	17,5	-
	15	23	19	-
	15	27	21	-

Таким образом, предстоит сделать выбор в примере - между различными решениями:

по критерию Лапласа выбор стратегии R_2 ;

по критерию Вальда выбор стратегии R_3 ;

по критерию Сэвиджа выбор стратегии R_1 ;

по критерию Гурвица при $\alpha = 0,5$ выбор стратегии R_1 , а если лицо, принимающее решение, пессимист ($\alpha = 0$), то выбор стратегии R_3 .

Какое из возможных решений предпочтительнее? Это определяется выбором соответствующего критерия (Лапласа, Вальда, Сэвиджа или Гурвица).

Выбор критерия принятия решений в условиях неопределенности является наиболее сложным и ответственным этапом в исследовании операций. При этом не существует каких-либо общих советов или рекомендаций. Выбор критерия должно производить лицо, принимающее решение (ЛПР), с учетом конкретной специфики решаемой задачи и в

соответствии со своими целями, а также опираясь на прошлый опыт и собственную интуицию.

В частности, если даже минимальный риск недопустим, то следует применять критерий Вальда. Если наоборот, определенный риск вполне приемлем и ЛПР намерено вложить в некоторое предприятие столько средств, чтобы потом оно не сожалело, что вложено слишком мало, то выбирают критерий Сэвиджа.

Практические задания

Задание 1. Рассмотрим следующую платежную матрицу (матрицу доходов)

15	12	1	-3	18	20
2	15	9	7	1	3
0	6	15	21	-2	5
8	20	12	3	0	4.

Вероятности состояний природы неизвестны. Определить оптимальную стратегию, используя критерии Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица. Сравнить полученные решения.

Задание 2. При выборе стратегии каждому возможному состоянию природы соответствует один результат (исход). Элементы, являющиеся мерой потерь в у.е. при принятии решения, приведены в табл.

Таблица

Стратегии	Состояния природы			
	2	6	5	8
R_2	3	9	1	4
	5	1	6	2

Выбрать оптимальное решение в соответствии с критериями Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица (при).

Контрольные вопросы

1. Что понимают под неопределенностью?
2. В каких случаях используется критерий ожидаемого значения?
3. В чем суть критерия Вальда? Как он рассчитывается?
4. В чем специфика различных критериев принятия решения в условиях неопределенности?

Список литературы: 1, 2, 3, 4

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №15
МЕТОДЫ СНИЖЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ МНОГОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА.
КОМПОНЕНТНЫЙ И ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ.
ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ. МЕТОД ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ

Цель: изучить методы сбора и обработки многомерных статистических данных, их систематизации и обработки с целью выявления характера и структуры взаимосвязей между компонентами исследуемого многомерного признака, получения практических выводов

Планируемые результаты обучения: научиться выполнять расчеты в модуле факторный анализ; выполнить спецификации исходных данных посредством методов описательной статистики, получить и оценить собственные значения главных компонент, вычислить и проанализировать факторные нагрузки, в том числе с применением методов вращения.

В результате освоения темы формируется индикаторы компетенций:

ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.

ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

Теоретическая часть

Социальные и экономические объекты, как правило, характеризуются достаточно большим числом параметров, образующих многомерные векторы, и особое значение в экономических и социальных исследованиях приобретают задачи изучения взаимосвязей между компонентами этих векторов, причем эти взаимосвязи необходимо выявлять на основании ограниченного числа многомерных наблюдений.

Многомерным статистическим анализом называется раздел математической статистики, изучающий методы сбора и обработки многомерных статистических данных, их систематизации и обработки с целью выявления характера и структуры взаимосвязей между компонентами исследуемого многомерного признака, получения практических выводов.

Предположим, что рассматривается некоторая совокупность, состоящая из p стран, для каждой из которых известны макроэкономические показатели: X_1 — валовой внутренний продукт, X_2 — площадь территории, X_3 — средняя продолжительность жизни населения и т. п. В результате получен набор из n наблюдений над k -мерным случайным вектором $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$

Похожая ситуация возникает, когда изучается совокупность предприятий, для каждого из которых рассчитаны показатели X_1 — валовая прибыль, X_2 — численность работников, X_3 — стоимость основных производственных фондов и т. п.

Типичные задачи, которые можно решить методами многомерного статистического анализа, таковы:

- по наблюдавшимся значениям случайного вектора $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$ может понадобиться изучить связь между его компонентами $X_1, X_2, \dots, X_k$;
- может понадобиться определить, какие из (большого числа) рассчитанных показателей $X_1, X_2, \dots, X_k$ в наибольшей степени влияют на валовой внутренний продукт или на продолжительность жизни населения;
- может понадобиться классифицировать страны по какому-либо признаку.

Отметим, что способы сбора данных могут различаться. Так, если исследуется мировая экономика, то естественно взять в качестве объектов, на которых наблюдаются значения вектора X , страны, если же изучается национальная экономическая система, то естественно наблюдать значения вектора X на одной и той же (интересующей исследователя) стране в различные моменты времени.

Методы снижения размерности многомерного пространства позволяют без существенной потери информации перейти от первоначальной системы большого числа наблюдаемых взаимосвязанных факторов к системе существенно меньшего числа скрытых (ненаблюдаемых) факторов, определяющих вариацию первоначальных признаков.

В практической работе описываются методы компонентного и факторного анализа, с использованием которых можно выявлять объективно существующие, но непосредственно не наблюдаемые закономерности при помощи главных компонент или факторов.

Сущность задач снижения размерности многомерного пространства заключается в выражении большого числа исходных факторов, непосредственно измеренных на объектах, через меньшее (как правило, намного меньшее) число более емких, максимально информативных, но непосредственно не наблюдаемых внутренних характеристик объектов. При этом предполагается, что более емкие признаки будут отражать наиболее существенные свойства объектов.

Целью методов снижения размерности является исследование внутренней структуры изучаемой системы к случайных величин, «сжатие» этой системы без существенной потери содержащейся в ней информации путем выявления небольшого числа факторов, объясняющих изменчивость и взаимосвязи исходных случайных величин.

Метод главных компонент выявляет k компонент — факторов, объясняющих всю дисперсию и корреляции исходных k случайных величин; при этом компоненты строятся в порядке убывания объясняемой ими доли суммарной дисперсии исходных величин, что позволяет зачастую ограничиться несколькими первыми компонентами.

Факторный анализ выявляет m ($m < k$) общих для всех исходных величин факторов, объясняя оставшуюся после этого дисперсию влиянием специфических факторов.

Среди прикладных задач, решаемых указанными методами, отметим следующие:

- поиск скрытых, но объективно существующих взаимосвязей между экономическими и социальными показателями, проверка гипотез о взаимосвязях этих показателей, выявление природы различий между объектами;
- описание изучаемой системы числом признаков, значительно меньшим числа исходных факторов, при этом выявленные факторы или главные компоненты содержат в среднем больше информации, чем непосредственно зафиксированные на объектах значения исходных факторов;
- построение обобщенных экономических и социальных показателей, таких как качество продукции, размер предприятия, интенсивность ведения хозяйства и т. п.;
- визуализация исходных многомерных наблюдений путем их проецирования на специально подобранную прямую, плоскость или трехмерное пространство;
- построение регрессионных моделей по главным компонентам; в социальных и экономических задачах исходные факторы часто обладают мультиколлинеарностью (т. е. являются коррелированными между собой), что затрудняет построение и интерпретацию регрессионных моделей, не позволяя часто получать сколь-нибудь точные прогнозы; главные компоненты, сохраняя всю информацию об изучаемых объектах, являются некоррелированными по построению;
- классификация по обобщенным экономическим показателям; практика показывает, что классификация объектов, проведенная по факторам или по главным компонентам, оказывается более объективной, чем классификация тех же объектов по исходным признакам; по одному — трем факторам или главным компонентам возможно проведение визуальной классификации, в случае большей размерности пространства обобщенных показателей, полученного в результате компонентного или факторного анализа,

необходимо привлечение методов многомерной классификации, рассматриваемых во второй главе пособия;

- сжатие исходной информации, значительное уменьшение объемов информации, хранимой в базах данных, без существенных потерь в информативности.

Факторный анализ позволяет решить две важные проблемы исследователя: описать объект измерения всесторонне и в то же время компактно. С помощью факторного анализа возможно выявление скрытых переменных факторов, отвечающих за наличие линейных статистических связей корреляций между наблюдаемыми переменными.

Таким образом можно выделить 2 цели Факторного анализа:

- 1) определение взаимосвязей между переменными, (классификация переменных), т. е. «объективная R-классификация»;
- 2) сокращение числа переменных необходимых для описания данных.

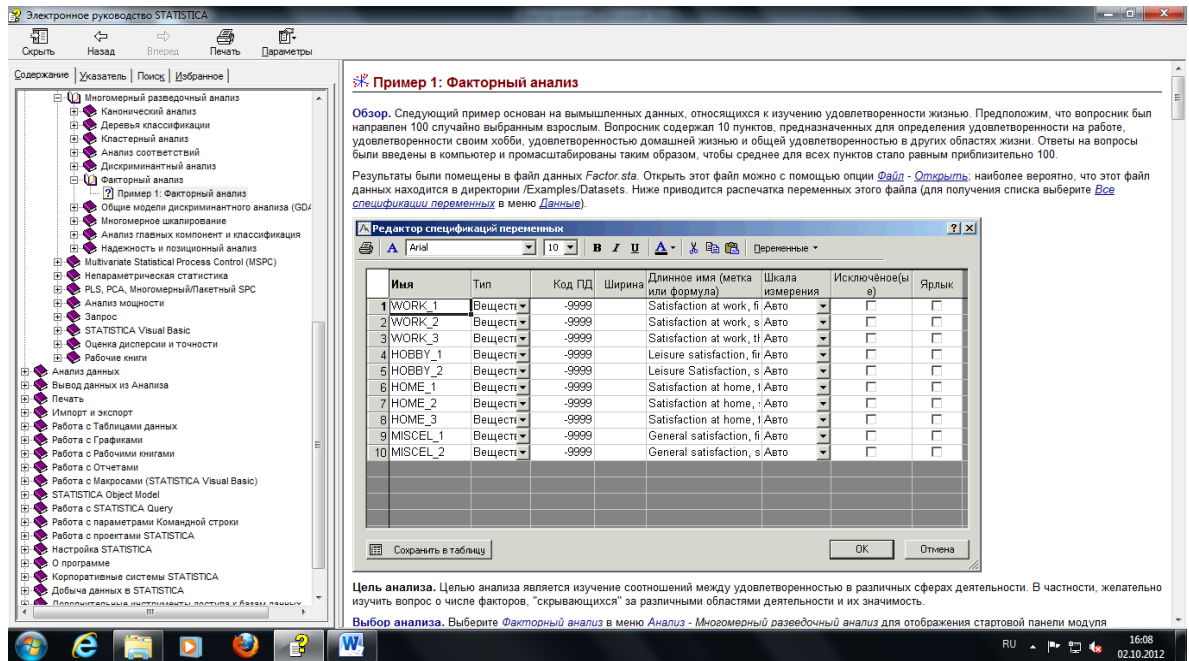
При анализе в один фактор объединяются сильно коррелирующие между собой переменные, как следствие происходит перераспределение дисперсии между компонентами и получается максимально простая и наглядная структура факторов. После объединения коррелированность компонент внутри каждого фактора между собой будет выше, чем их коррелированность с компонентами из других факторов.

Эта процедура также позволяет выделить латентные переменные, что бывает особенно важно при анализе социальных представлений и ценностей. Например, анализируя оценки, полученные по нескольким шкалам, исследователь замечает, что они сходны между собой и имеют высокий коэффициент корреляции, он может предположить, что существует некоторая латентная переменная, с помощью которой можно объяснить наблюдаемое сходство полученных оценок. Такую латентную переменную называют фактором. Данный фактор влияет на многочисленные показатели других переменных, что приводит нас к возможности и необходимости выделить его как наиболее общий, более высокого порядка. Для выявления наиболее значимых факторов и, как следствие, факторной структуры, наиболее оправданно применять метод главных компонент (МГК). Суть данного метода состоит в замене коррелированных компонентов некоррелированными факторами. Другой важной характеристикой метода является возможность ограничиться наиболее информативными главными компонентами и исключить остальные из анализа, что упрощает интерпретацию результатов. Достоинство МГК также в том, что он – единственный математически обоснованный метод факторного анализа.

Программное обеспечение ППП *STATISTICA*.

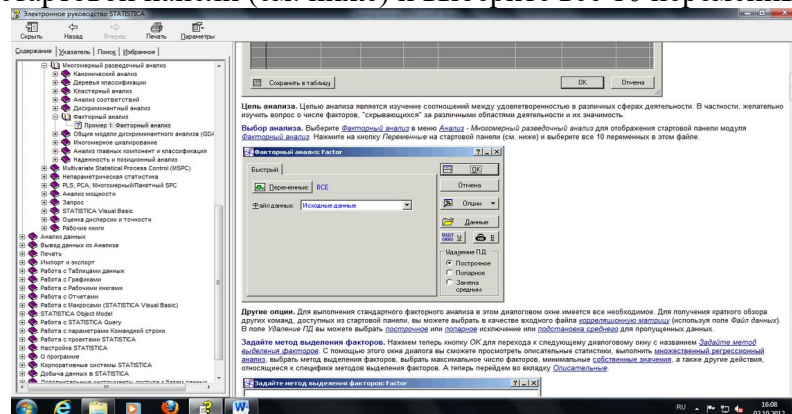
Обзор. Следующий пример основан на вымышленных данных, относящихся к изучению удовлетворенности жизнью. Предположим, что вопросник был направлен 100 случайно выбранным взрослым. Вопросник содержал 10 пунктов, предназначенных для определения удовлетворенности на работе, удовлетворенности своим хобби, удовлетворенностью домашней жизнью и общей удовлетворенностью в других областях жизни. Ответы на вопросы были введены в компьютер и промасштабированы таким образом, чтобы среднее для всех пунктов стало равным приблизительно 100.

Результаты были помещены в файл данных *Factor.sta*. Открыть этот файл можно с помощью опции [Файл - Открыть](#); наиболее вероятно, что этот файл данных находится в директории /Examples/Datasets. Ниже приводится распечатка переменных этого файла (для получения списка выберите [Все спецификации переменных](#) в меню [Данные](#)).



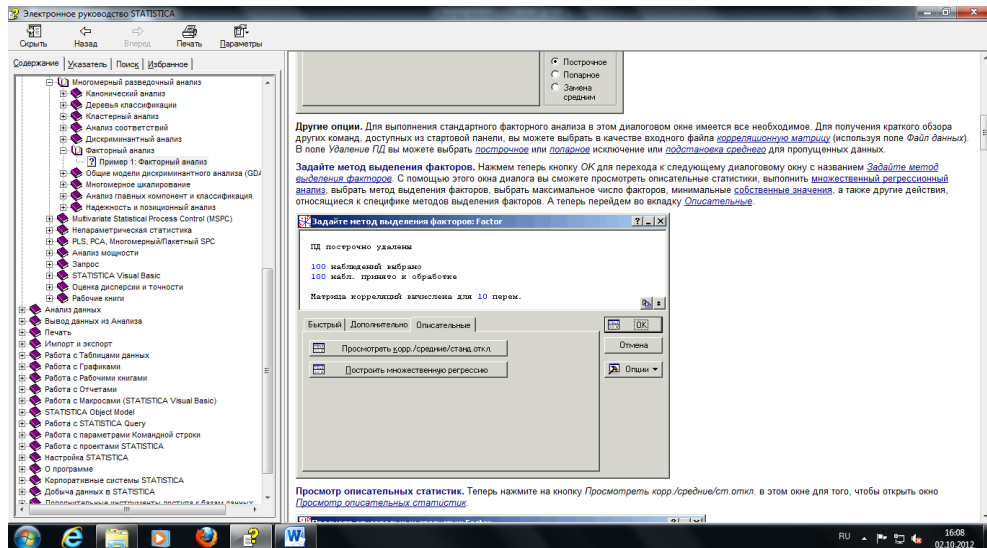
Цель анализа. Целью анализа является изучение соотношений между удовлетворенностью в различных сферах деятельности. В частности, желательно изучить вопрос о числе факторов, "скрывающихся" за различными областями деятельности и их значимость.

Выбор анализа. Выберите [Факторный анализ](#) в меню [Анализ](#) - [Многомерный разведочный анализ](#) для отображения стартовой панели модуля [Факторный анализ](#). Нажмите на кнопку [Переменные](#) на стартовой панели (см. ниже) и выберите все 10 переменных в этом файле.

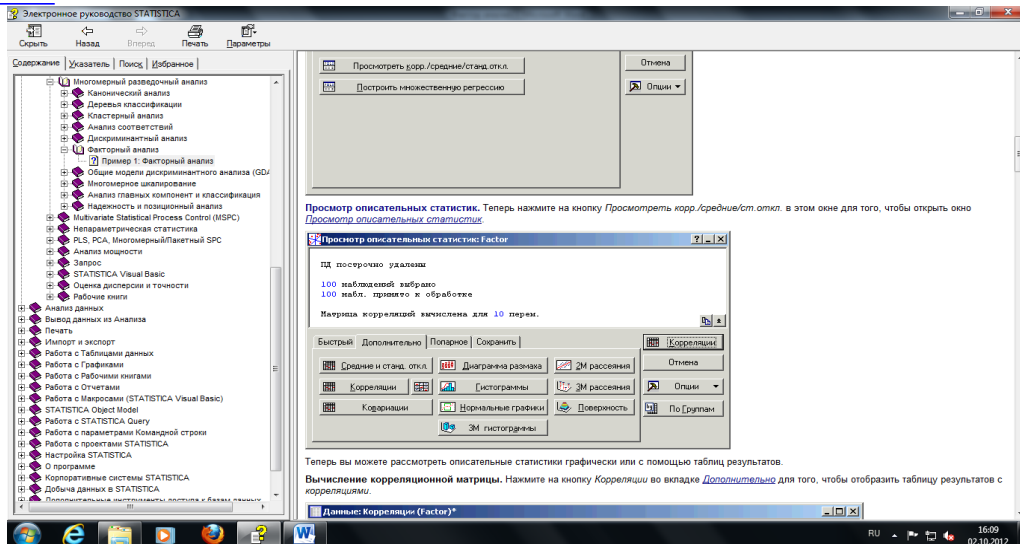


Другие опции. Для выполнения стандартного факторного анализа в этом диалоговом окне имеется все необходимое. Для получения краткого обзора других команд, доступных из стартовой панели, вы можете выбрать в качестве входного файла [корреляционную матрицу](#) (используя поле [Файл данных](#)). В поле [Удаление ПД](#) вы можете выбрать [построчное](#) или [попарное](#) исключение или [подстановка среднего](#) для пропущенных данных.

Задайте метод выделения факторов. Нажав теперь кнопку [ОК](#) для перехода к следующему диалоговому окну с названием [Задайте метод выделения факторов](#). С помощью этого окна диалога вы сможете просмотреть описательные статистики, выполнить [множественный регрессионный анализ](#), выбрать метод выделения факторов, выбрать максимальное число факторов, минимальные [собственные значения](#), а также другие действия, относящиеся к специфике методов выделения факторов. А теперь перейдем во вкладку [Описательные](#).

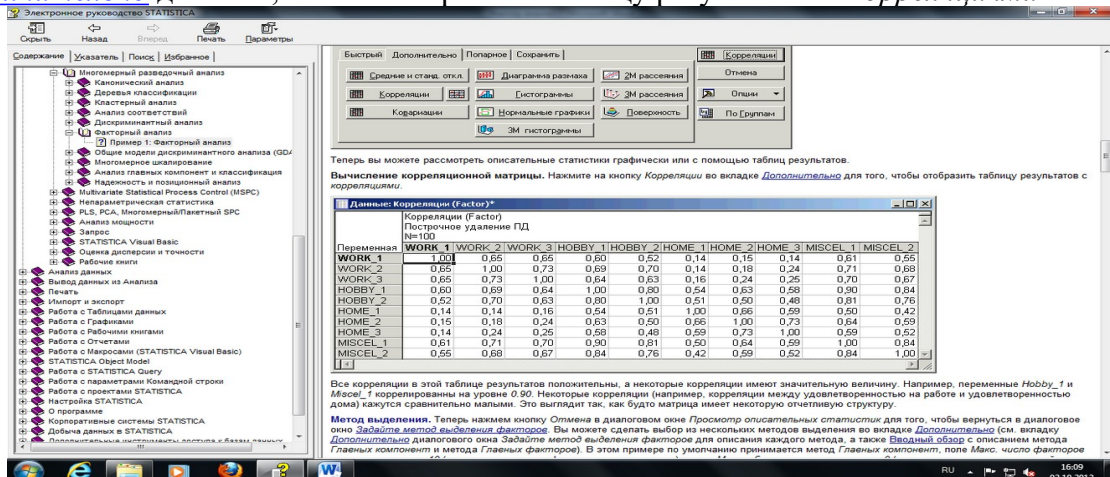


Просмотр описательных статистик. Теперь нажмите на кнопку *Просмотреть корр./средние/ст.откл.* в этом окне для того, чтобы открыть окно [Просмотр описательных статистик](#).



Теперь вы можете рассмотреть описательные статистики графически или с помощью таблиц результатов.

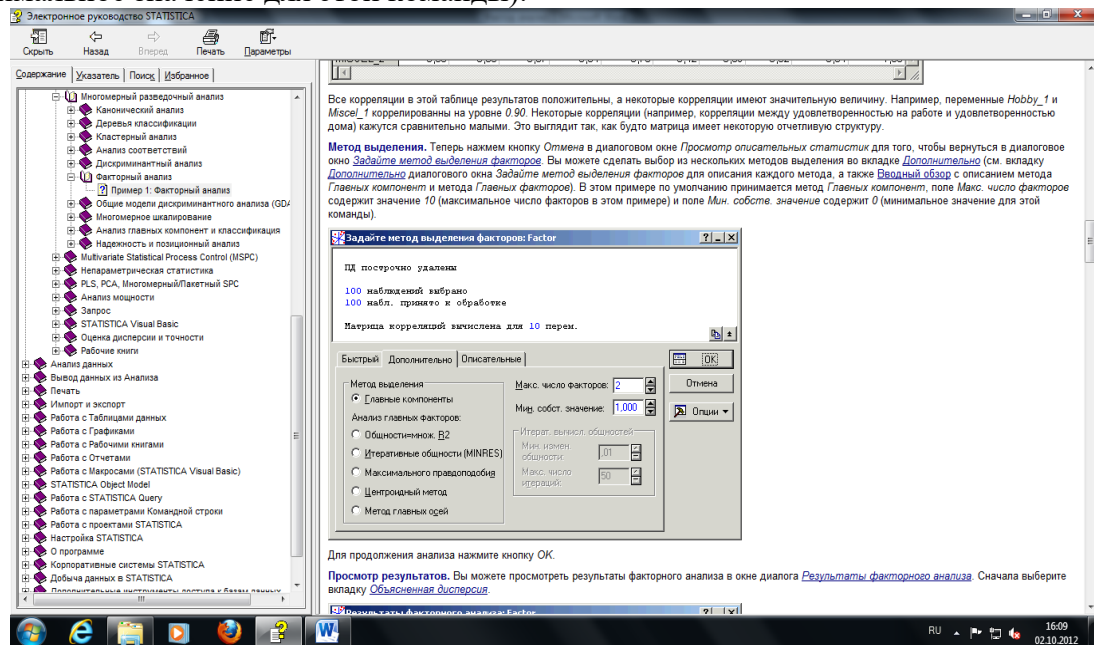
Вычисление корреляционной матрицы. Нажмите на кнопку *Корреляции* во вкладке [Дополнительно](#) для того, чтобы отобразить таблицу результатов с *корреляциями*.



Все корреляции в этой таблице результатов положительны, а некоторые корреляции имеют значительную величину. Например, переменные *Hobby_1* и *Miscel_1* коррелированы на

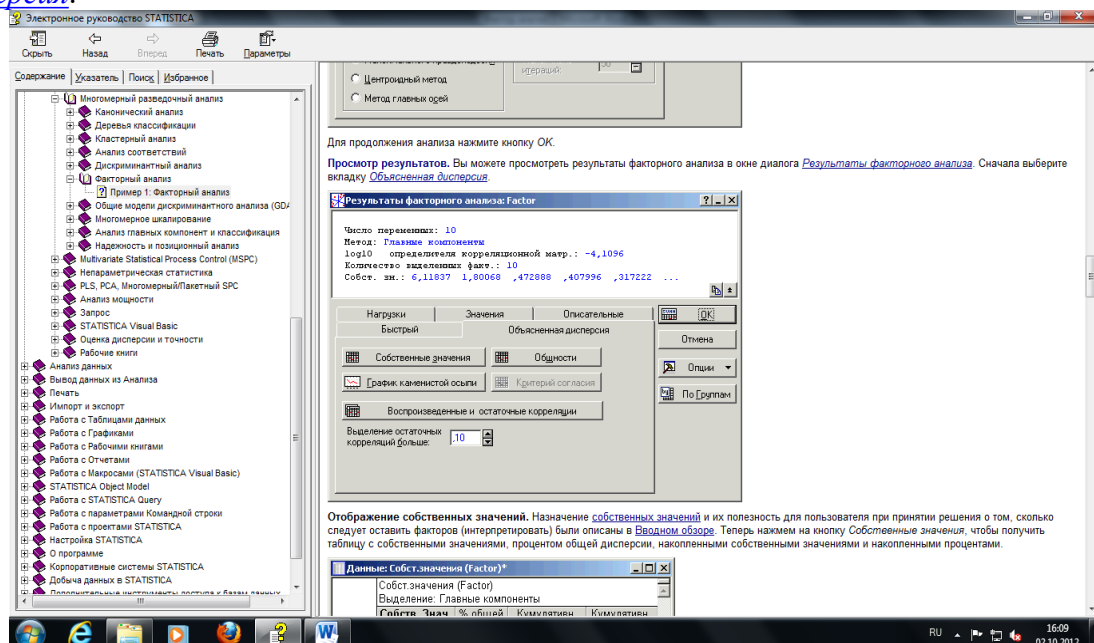
уровне 0.90. Некоторые корреляции (например, корреляции между удовлетворенностью на работе и удовлетворенностью дома) кажутся сравнительно малыми. Это выглядит так, как будто матрица имеет некоторую отчетливую структуру.

Метод выделения. Теперь нажмем кнопку *Отмена* в диалоговом окне *Просмотр описательных статистик* для того, чтобы вернуться в диалоговое окно *Задайте метод выделения факторов*. Вы можете сделать выбор из нескольких методов выделения во вкладке *Дополнительно* (см. вкладку *Дополнительно* диалогового окна *Задайте метод выделения факторов* для описания каждого метода, а также *Вводный обзор* с описанием метода *Главных компонент* и метода *Главных факторов*). В этом примере по умолчанию принимается метод *Главных компонент*, поле *Макс. число факторов* содержит значение 10 (максимальное число факторов в этом примере) и поле *Мин. собств. значение* содержит 0 (минимальное значение для этой команды).

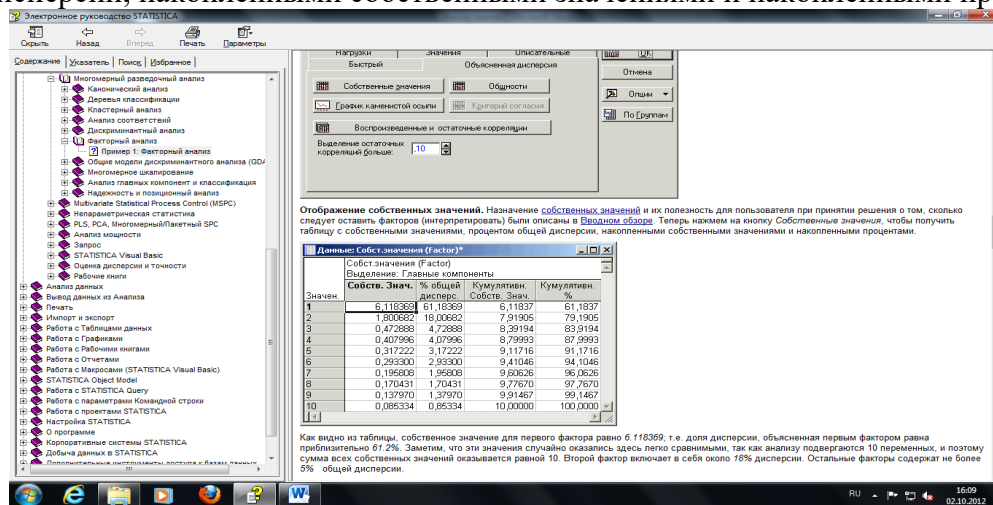


Для продолжения анализа нажмите кнопку *OK*.

Просмотр результатов. Вы можете просмотреть результаты факторного анализа в окне диалога *Результаты факторного анализа*. Сначала выберите вкладку *Объясненная дисперсия*.



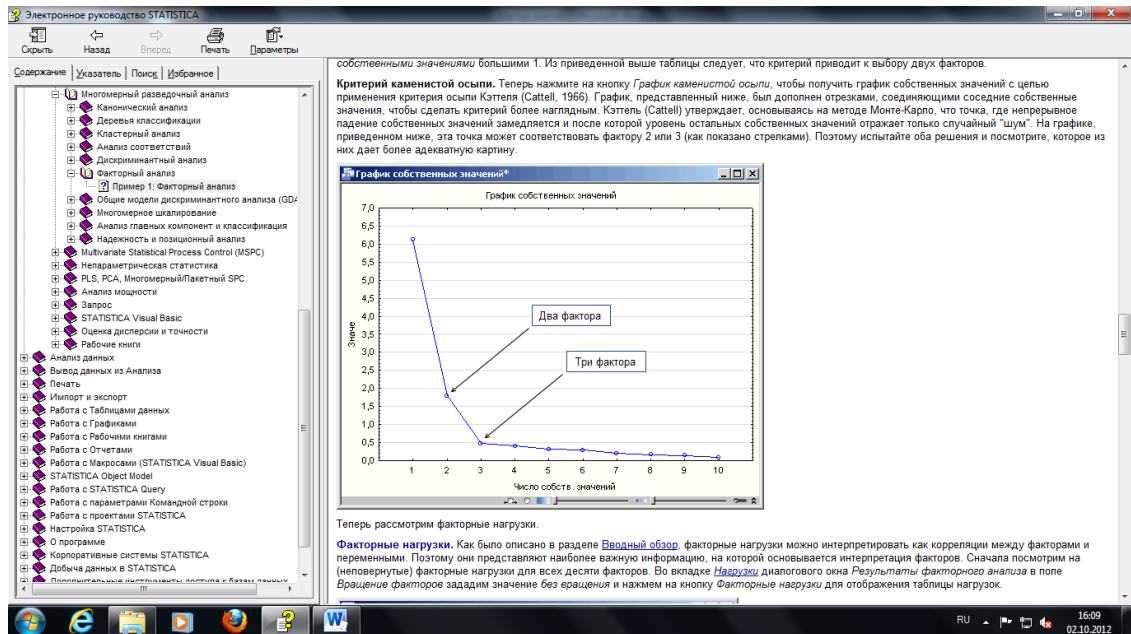
Отображение собственных значений. Назначение [собственных значений](#) и их полезность для пользователя при принятии решения о том, сколько следует оставить факторов (интерпретировать) были описаны в [Вводном обзоре](#). Теперь нажмем на кнопку *Собственные значения*, чтобы получить таблицу с собственными значениями, процентом общей дисперсии, накопленными собственными значениями и накопленными процентами.



Как видно из таблицы, собственное значение для первого фактора равно 6.118369; т.е. доля дисперсии, объясненная первым фактором равна приблизительно 61.2%. Заметим, что эти значения случайно оказались здесь легко сравнимыми, так как анализу подвергаются 10 переменных, и поэтому сумма всех собственных значений оказывается равной 10. Второй фактор включает в себя около 18% дисперсии. Остальные факторы содержат не более 5% общей дисперсии.

Выбор числа факторов. В разделе [Вводный обзор](#) кратко описан способ, как полученные собственные значения можно использовать для решения вопроса о том, сколько факторов следует оставить в модели. В соответствии с критерием Кайзера (Kaiser, 1960), вы должны оставить факторы с *собственными значениями* большими 1. Из приведенной выше таблицы следует, что критерий приводит к выбору двух факторов.

Критерий каменистой осыпи. Теперь нажмите на кнопку *График каменистой осыпи*, чтобы получить график собственных значений с целью применения критерия осыпи Кэттеля (Cattell, 1966). График, представленный ниже, был дополнен отрезками, соединяющими соседние собственные значения, чтобы сделать критерий более наглядным. Кэттель (Cattell) утверждает, основываясь на методе Монте-Карло, что точка, где непрерывное падение собственных значений замедляется и после которой уровень остальных собственных значений отражает только случайный "шум". На графике, приведенном ниже, эта точка может соответствовать фактору 2 или 3 (как показано стрелками). Поэтому испытайте оба решения и посмотрите, которое из них дает более адекватную картину.



Теперь рассмотрим факторные нагрузки.

Факторные нагрузки. Как было описано в разделе **Вводный обзор**, факторные нагрузки можно интерпретировать как корреляции между факторами и переменными. Поэтому они представляют наиболее важную информацию, на которой основывается интерпретация факторов. Сначала посмотрим на (неповернутые) факторные нагрузки для всех десяти факторов. Во вкладке **Нагрузки** диалогового окна **Результаты факторного анализа** в поле **Вращение факторов** зададим значение **без вращения** и нажмем на кнопку **Факторные нагрузки** для отображения таблицы нагрузок.

Теперь рассмотрим факторные нагрузки.

Факторные нагрузки. Как было описано в разделе **Вводный обзор**, факторные нагрузки можно интерпретировать как корреляции между факторами и переменными. Поэтому они представляют наиболее важную информацию, на которой основывается интерпретация факторов. Сначала посмотрим на (неповернутые) факторные нагрузки для всех десяти факторов. Во вкладке **Нагрузки** диалогового окна **Результаты факторного анализа** в поле **Вращение факторов** зададим значение **без вращения** и нажмем на кнопку **Факторные нагрузки** для отображения таблицы нагрузок.

Данные: факторные нагрузки (без вращ.) (фактор)*

Фактор нагрузки (без вращ.) (фактор)
Выделение: Главные компоненты
(Смещение нагрузки: 7,00000)

Переменная	Фактор 1	Фактор 2	Фактор 3	Фактор 4	Фактор 9	Фактор 10
WORK_1	-0,652601	0,514217	0,301687	0,439108	0,080008	0,003894
WORK_2	-0,756976	0,494770	-0,078626	0,211795	0,103633	0,012210
WORK_3	-0,745706	0,495880	-0,104749	0,038326	-0,017932	0,038980
HOBBY_1	-0,941630	-0,021835	0,012653	0,001861	-0,243305	0,171990
HOBBY_2	-0,875615	0,051643	0,089675	0,324541	0,088684	0,017996
HOME_1	-0,576062	-0,604977	0,430999	-0,114927	0,040277	0,019576
HOME_2	-0,671289	-0,617362	-0,125776	0,159663	0,145372	0,048318
HOME_3	-0,641532	-0,573625	-0,268672	0,152709	0,080680	0,000902
MISCCEL_1	-0,951516	0,013513	-0,060164	0,026706	0,156713	-0,223847
MISCCEL_2	-0,900333	0,048154	-0,151805	-0,034832	0,087690	-0,030324
Общ. дис.	6,118369	1,800682	0,472888	0,047986	0,137970	0,065334
Доля общ.	0,611837	0,180068	0,047289	0,048000	0,013797	0,006533

Вспомним, что выделение факторов происходило таким образом, что последующие факторы включали в себя все меньшую и меньшую дисперсию (см. раздел **Вводный обзор**). Поэтому не удивительно, что первый фактор имеет наивысшую нагрузку. Отметим, что знаки факторных нагрузок имеют значение лишь для того, чтобы показать, что переменные с противоположными нагрузками на один и тот же фактор взаимодействуют с этим фактором противоположным образом. Однако вы можете умножить все нагрузки в столбце на -1 и обратить знаки. Во всем остальном результаты окажутся неизменными.

Вращение факторного решения. Как описано в разделе **Вводный обзор**, действительная ориентация факторов в факторном пространстве произвольна, и всякое вращение факторов воспроизводит корреляции так же хорошо, как и другие вращения. Следовательно, кажется естественным повернуть факторы таким образом, чтобы выбрать простейшую для интерпретации факторную структуру. Фактически, термин *простая структура* был придуман и определен Терстоуном (Thurstone, 1947) главным образом для описания условий, когда факторы отмечены высокими нагрузками на некоторые

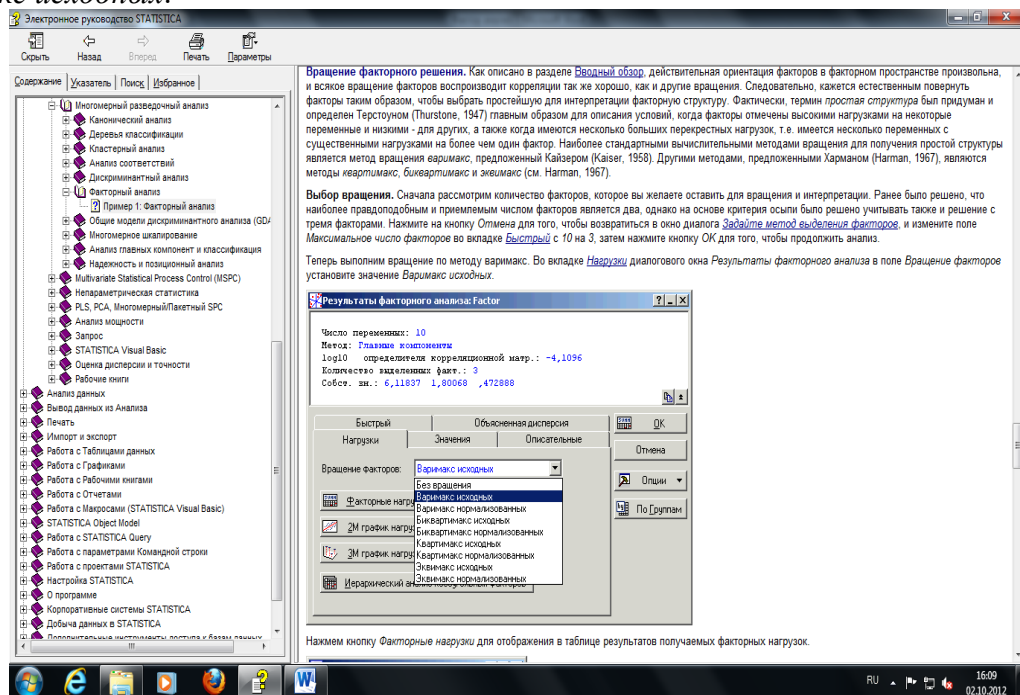
Вспомним, что выделение факторов происходило таким образом, что последующие факторы включали в себя все меньшую и меньшую дисперсию (см. раздел **Вводный обзор**). Поэтому не удивительно, что первый фактор имеет наивысшую нагрузку. Отметим, что знаки факторных нагрузок имеют значение лишь для того, чтобы показать, что переменные с противоположными нагрузками на один и тот же фактор взаимодействуют с этим фактором противоположным образом. Однако вы можете умножить все нагрузки в столбце на -1 и обратить знаки. Во всем остальном результаты окажутся неизменными.

Вращение факторного решения. Как описано в разделе **Вводный обзор**, действительная ориентация факторов в факторном пространстве произвольна, и всякое вращение факторов воспроизводит корреляции так же хорошо, как и другие вращения. Следовательно, кажется естественным повернуть факторы таким образом, чтобы выбрать простейшую для

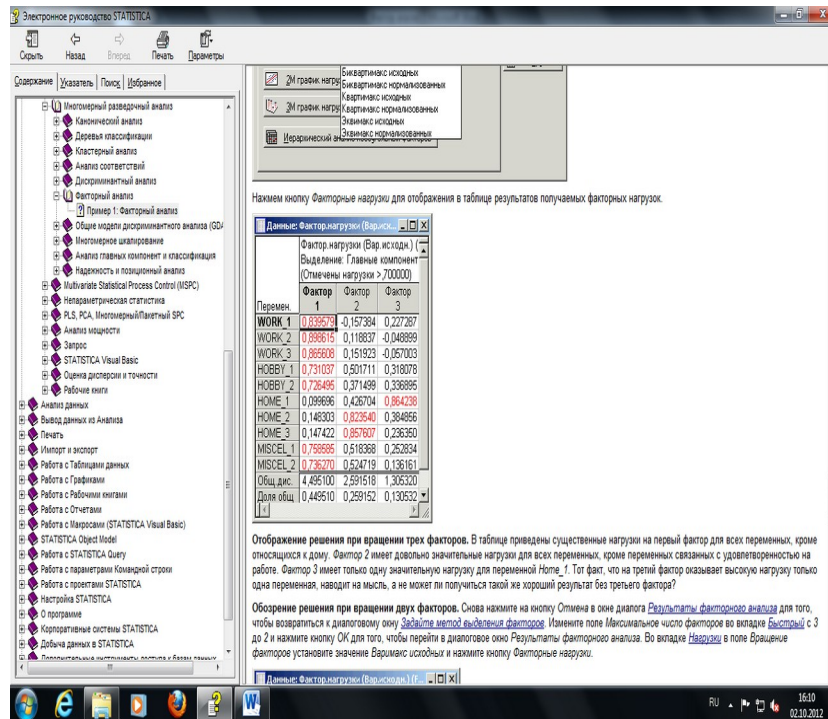
интерпретации факторную структуру. Фактически, термин *простая структура* был придуман и определен Терстоуном (Thurstone, 1947) главным образом для описания условий, когда факторы отмечены высокими нагрузками на некоторые переменные и низкими - для других, а также когда имеются несколько больших перекрестных нагрузок, т.е. имеется несколько переменных с существенными нагрузками на более чем один фактор. Наиболее стандартными вычислительными методами вращения для получения простой структуры является метод вращения *варимакс*, предложенный Кайзером (Kaiser, 1958). Другими методами, предложенными Харманом (Harman, 1967), являются методы *квартимакс*, *биквартимакс* и *эквимакс* (см. Harman, 1967).

Выбор вращения. Сначала рассмотрим количество факторов, которое вы желаете оставить для вращения и интерпретации. Ранее было решено, что наиболее правдоподобным и приемлемым числом факторов является два, однако на основе критерия осыпи было решено учитывать также и решение с тремя факторами. Нажмите на кнопку *Отмена* для того, чтобы возвратиться в окно диалога [Задайте метод выделения факторов](#), и измените поле *Максимальное число факторов* во вкладке [Быстрый](#) с 10 на 3, затем нажмите кнопку *ОК* для того, чтобы продолжить анализ.

Теперь выполним вращение по методу варимакс. Во вкладке [Нагрузки](#) диалогового окна *Результаты факторного анализа* в поле *Вращение факторов* установите значение *Варимакс исходных*.

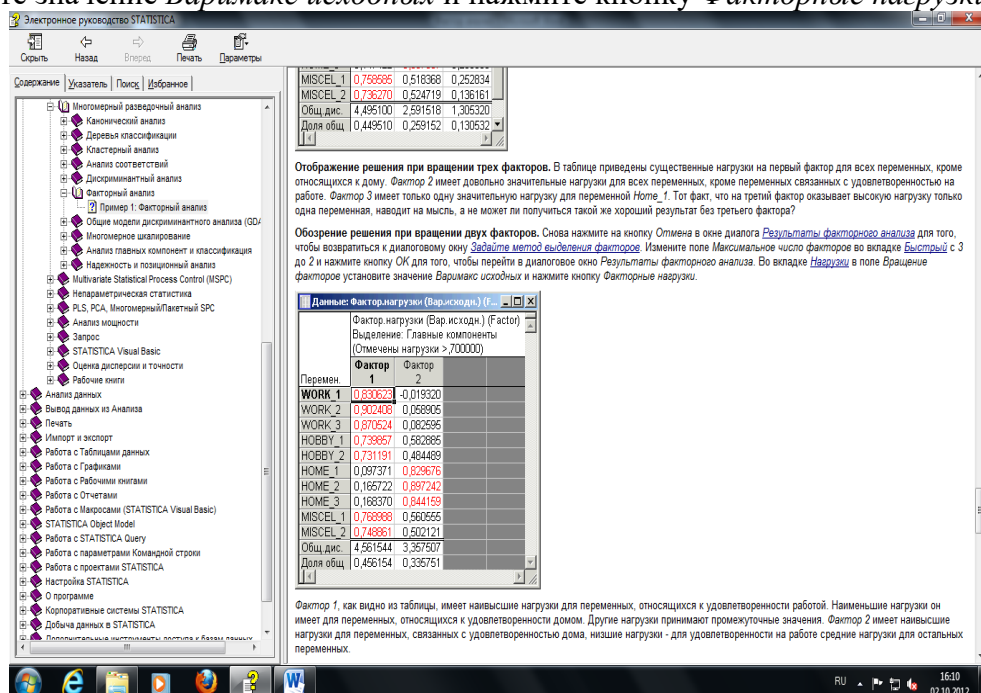


Нажмем кнопку *Факторные нагрузки* для отображения в таблице результатов получаемых факторных нагрузок.



Отображение решения при вращении трех факторов. В таблице приведены существенные нагрузки на первый фактор для всех переменных, кроме относящихся к дому. *Фактор 2* имеет довольно значительные нагрузки для всех переменных, кроме переменных связанных с удовлетворенностью на работе. *Фактор 3* имеет только одну значительную нагрузку для переменной *Home_1*. Тот факт, что на третий фактор оказывает высокую нагрузку только одна переменная, наводит на мысль, а не может ли получиться такой же хороший результат без третьего фактора?

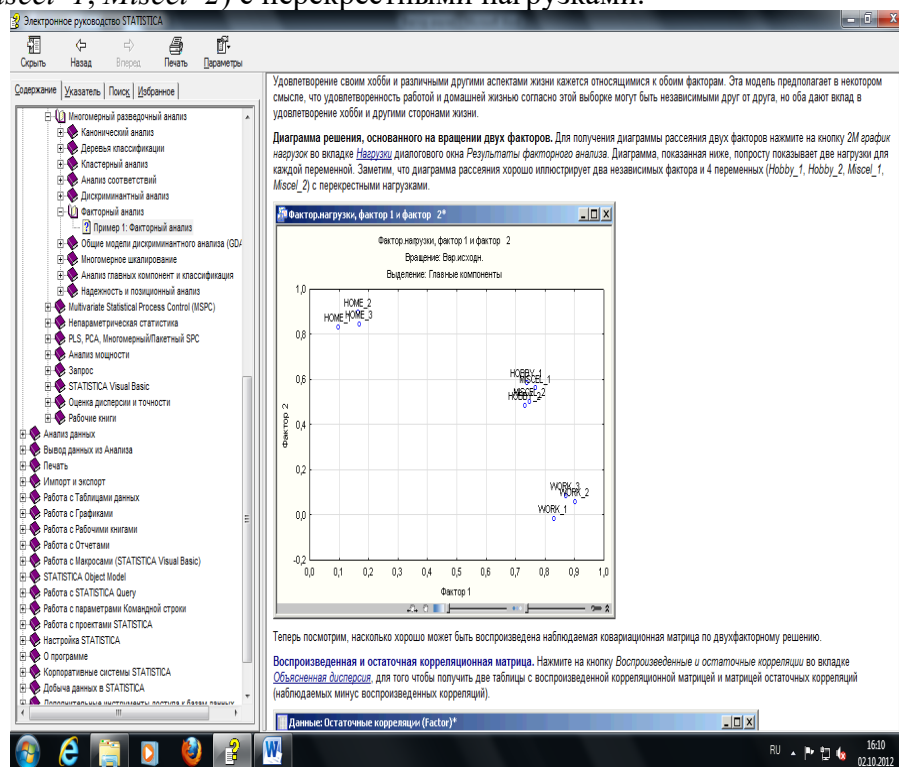
Обозрение решения при вращении двух факторов. Снова нажмите на кнопку **Отмена** в окне диалога **Результаты факторного анализа** для того, чтобы возвратиться к диалоговому окну **Задать метод выделения факторов**. Измените поле **Максимальное число факторов** во вкладке **Быстрый** с 3 до 2 и нажмите кнопку **ОК** для того, чтобы перейти в диалоговое окно **Результаты факторного анализа**. Во вкладке **Нагрузки** в поле **Вращение факторов** установите значение **Вариансы исходных** и нажмите кнопку **Факторные нагрузки**.



Фактор 1, как видно из таблицы, имеет наивысшие нагрузки для переменных, относящихся к удовлетворенности работой. Наименьшие нагрузки он имеет для переменных, относящихся к удовлетворенности домом. Другие нагрузки принимают промежуточные значения. *Фактор 2* имеет наивысшие нагрузки для переменных, связанных с удовлетворенностью дома, низшие нагрузки - для удовлетворенности на работе средние нагрузки для остальных переменных.

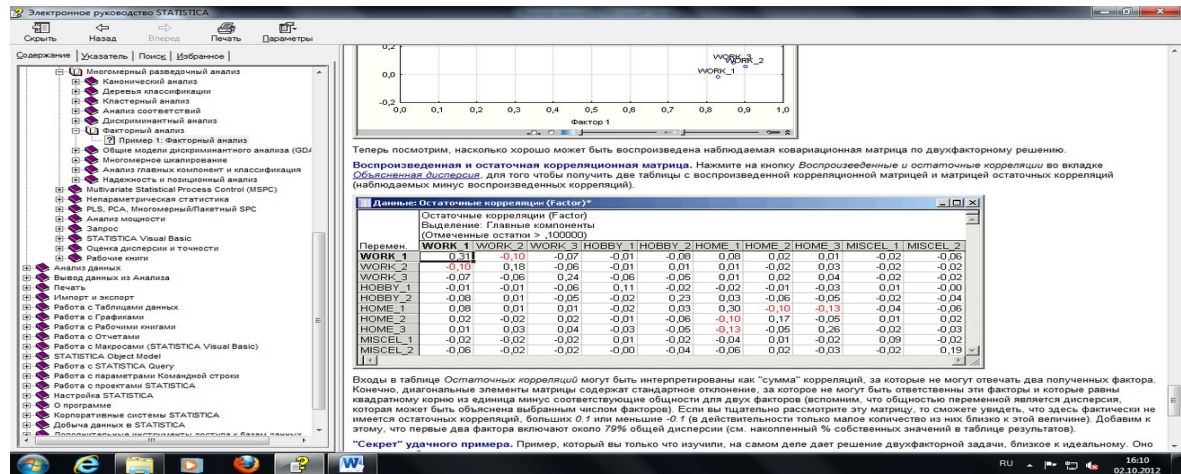
Интерпретация решения для двухфакторного вращения. Можно ли интерпретировать данную модель? Все выглядит так, как будто два фактора лучше всего идентифицировать как фактор удовлетворения работой (фактор 1) и как фактор удовлетворения домашней жизнью (фактор 2). Удовлетворение своим хобби и различными другими аспектами жизни кажется относящимися к обоим факторам. Эта модель предполагает в некотором смысле, что удовлетворенность работой и домашней жизнью согласно этой выборке могут быть независимыми друг от друга, но оба дают вклад в удовлетворение хобби и другими сторонами жизни.

Диаграмма решения, основанного на вращении двух факторов. Для получения диаграммы рассеяния двух факторов нажмите на кнопку *2М график нагрузок* во вкладке [Нагрузки](#) диалогового окна *Результаты факторного анализа*. Диаграмма, показанная ниже, попросту показывает две нагрузки для каждой переменной. Заметим, что диаграмма рассеяния хорошо иллюстрирует два независимых фактора и 4 переменных (*Hobby_1*, *Hobby_2*, *Miscel_1*, *Miscel_2*) с перекрестными нагрузками.



Теперь посмотрим, насколько хорошо может быть воспроизведена наблюдаемая ковариационная матрица по двухфакторному решению.

[Воспроизведенная и остаточная корреляционная матрица](#). Нажмите на кнопку *Воспроизведенные и остаточные корреляции* во вкладке [Объясненная дисперсия](#), для того чтобы получить две таблицы с воспроизведенной корреляционной матрицей и матрицей остаточных корреляций (наблюдаемых минус воспроизведенных корреляций).



Входы в таблице *Остаточных корреляций* могут быть интерпретированы как "сумма" корреляций, за которые не могут отвечать два полученных фактора. Конечно, диагональные элементы матрицы содержат стандартное отклонение, за которое не могут быть ответственны эти факторы и которые равны квадратному корню из единицы минус соответствующим общностям для двух факторов (вспомним, что общностью переменной является дисперсия, которая может быть объяснена выбранным числом факторов). Если вы тщательно рассмотрите эту матрицу, то сможете увидеть, что здесь фактически не имеется остаточных корреляций, больших 0.1 или меньшие -0.1 (в действительности только малое количество из них близко к этой величине). Добавим к этому, что первые два фактора включают около 79% общей дисперсии (см. накопленный % собственных значений в таблице результатов).

"Секрет" удачного примера. Пример, который вы только что изучили, на самом деле дает решение двухфакторной задачи, близкое к идеальному. Оно определяет большую часть дисперсии, имеет разумную интерпретацию и воспроизводит корреляционную матрицу с умеренными отклонениями (остаточными корреляциями). На самом деле реальные данные редко позволяют получить такое простое решение, и в действительности это фиктивное множество данных было получено с помощью генератора случайных чисел с нормальным распределением, доступного в системе. Специальным образом в данные были "введены" два ортогональных (независимых) фактора, по которым были сгенерированы корреляции между переменными. Этот пример факторного анализа воспроизводит два фактора такими, как они и были, (т.е. фактор удовлетворенности работой и фактор удовлетворенности домашней жизнью). Таким образом, если бы явление (а не искусственные, как в примере, данные) содержало эти два фактора, то вы, выделив их, могли бы кое-что узнать о скрытой или латентной структуре явления.

Другие результаты. Прежде, чем сделать окончательное заключение, дадим краткие комментарии к другим результатам.

Общности. Для получения общностей решения нажмите на кнопку *Общности* во вкладке *Объясненная дисперсия* диалогового окна *Результаты факторного анализа*. Вспомним, что общность переменной - это доля дисперсии, которая может быть воспроизведена при заданном числе факторов. Вращение факторного пространства не влияет на величину общности. Очень низкие общности для одной или двух переменных (из многих в анализе) могут указывать на то, что эти переменные не очень хорошо объяснены моделью.

Коэффициенты значений. Коэффициенты факторов могут быть использованы для вычисления значений факторов для каждого наблюдения. Сами коэффициенты представляет обычно малый интерес, однако факторные значения полезны при проведении дальнейшего анализа. Для отображения коэффициентов нажмите кнопку *Коэффициенты значений факторов* во вкладке *Значения* диалогового окна *Результаты факторного анализа*.

Значения факторов. Факторные значения могут рассматриваться как текущие значения для каждого опрашиваемого респондента (т.е. для каждого наблюдения исходной таблицы данных). Кнопка *Значения факторов* во вкладке [Значения](#) диалогового окна *Результаты факторного анализа* позволяет вычислить факторные значения. Эти значения можно сохранить для дальнейшего нажатием кнопки *Сохранить значения*.

Заключительный комментарий. Факторный анализ - это непростая процедура. Всякий, кто постоянно использует факторный анализ со многими (например, 50 или более) переменными, мог видеть множество примеров "патологического поведения", таких, как: отрицательные собственные значения и не интерпретируемые решения, особые матрицы и т.д. Если вы интересуетесь применением факторного анализа для определения или значащих факторов при большом числе переменных, вам следует тщательно изучить какое-либо подробное руководство (например, книгу Хармана (Harman, 1968)). Таким образом, так как многие критические решения в факторном анализе по своей природе субъективны (число факторов, метод вращения, интерпретация нагрузок), будьте готовы к тому, что требуется некоторый опыт, прежде чем вы почувствуете себя уверенным в нем. Модуль [Факторный анализ](#) был разработан специально для того, чтобы сделать легким для пользователя интерактивное переключение между различным числом факторов, вращениями и т.д., так чтобы испытать и сравнить различные решения.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №16
МЕТОДЫ КЛАССИФИКАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ.
КЛАСТЕРНЫЙ АНАЛИЗ.
МОДЕЛИ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА

Цель: изучить методы сбора многомерных статистических данных, их систематизации и обработки с целью выявления характера и структуры взаимосвязей между компонентами исследуемого многомерного признака, получения практических выводов

Планируемые результаты обучения: научиться выполнять расчеты в модуле кластерный анализ; исследование внутренней структуры изучаемой системы n объектов, каждый из которых характеризуется m -мерным вектором признаков, «сжатие» этой системы без существенной потери содержащейся в ней информации путем выявления классов сходных между собой объектов и отождествления объектов внутри каждого класса В результате освоения темы формируется индикаторы компетенций:

ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.

ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

Теоретическая часть

Очень часто при исследовании больших совокупностей объектов необходимо выявить объекты, близкие между собой в определенном смысле.

Приведем несколько примеров:

- производитель товара массового потребления не ориентируется, как правило, на каждого конкретного потенциального покупателя, а сегментирует рынок, разделяя покупателей на группы (или классы), внутри которых покупатели похожи;
- банкам удобно классифицировать заемщиков по уровню кредитоспособности, определяемому большим числом различных показателей, поскольку при решении о кредитовании необходимо для каждого заемщика установить лимит кредита, и удобнее задавать не индивидуальный лимит для каждого конкретного заемщика, а лимиты для групп сходных, близких между собой заемщиков; в свою очередь, регулирующие организации классифицируют банки по уровню надежности;
- при сравнении стран, регионов и городов по уровню жизни, продукции различных производителей — по качеству, семей — по структуре потребления и т. п. оказывается удобным отождествлять близкие друг к другу объекты.

Приведенные примеры иллюстрируют сущность задач классификации многомерных наблюдений, которая заключается в разбиении большого числа объектов на однородные группы.

Кластерный анализ решает задачу классификации объектов при отсутствующей априорной информации о наблюдениях внутри классов, в дискриминантном анализе предполагается наличие такой информации.

Среди прикладных задач, решаемых указанными методами, отметим следующие:

- проведение классификации объектов с учетом большого числа признаков, отражающих их природу;
- выявление структуры изучаемой совокупности объектов;
- снижение объема выборки путем отождествления каждого класса объектов с его типичным представителем;
- снижение размерности пространства путем отождествления близких признаков (в

этом случае классифицируются не объекты, а признаки, в многомерном статистическом анализе этот прием перемены объектов и признаков местами, как уже указывалось ранее, часто приводит к интересным результатам).

- построение отдельных регрессионных моделей в каждом классе объектов; если дисперсия остатков регрессии сильно изменяется от класса к классу (такое явление называется гетероскедастичностью), то построение регрессии для каждого класса может помочь избавиться от гетероскедастичности.

Практика показывает, что классификация объектов исследования, проведенная по факторам или главным компонентам, полученным в результате снижения размерности исходного пространства признаков, оказывается более объективной, чем классификация тех же объектов по исходным признакам.

Большое достоинство кластерного анализа в том, что он позволяет производить разбиение объектов не по одному параметру, а по целому набору признаков. Кроме того, кластерный анализ в отличие от большинства математико-статистических методов не накладывает никаких ограничений на вид рассматриваемых объектов, и позволяет рассматривать множество исходных данных практически произвольной природы. Это имеет большое значение, например, для прогнозирования конъюнктуры, когда показатели имеют разнообразный вид, затрудняющий применение традиционных эконометрических подходов.

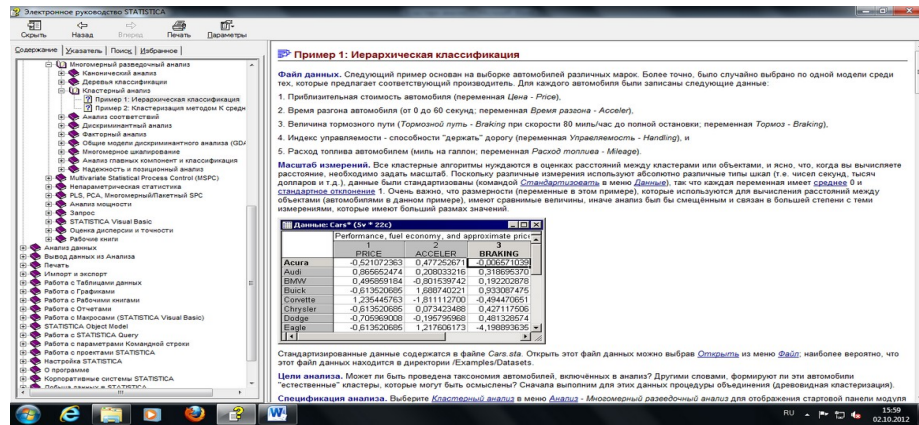
Кластерный анализ позволяет рассматривать достаточно большой объем информации и резко сокращать, сжимать большие массивы социально-экономической информации, делать их компактными и наглядными.

Программное обеспечение ППП STATISTICA.

Файл данных. Следующий пример основан на выборке автомобилей различных марок. Более точно, было случайно выбрано по одной модели среди тех, которые предлагает соответствующий производитель. Для каждого автомобиля были записаны следующие данные:

1. Приблизительная стоимость автомобиля (переменная *Цена - Price*),
2. Время разгона автомобиля (от 0 до 60 секунд; переменная *Время разгона - Acceler*),
3. Величина тормозного пути (*Тормозной путь - Braking* при скорости 80 миль/час до полной остановки; переменная *Тормоз - Braking*),
4. Индекс управляемости - способности "держат" дорогу (переменная *Управляемость - Handling*), и
5. Расход топлива автомобилем (миль на галлон; переменная *Расход топлива - Mileage*).

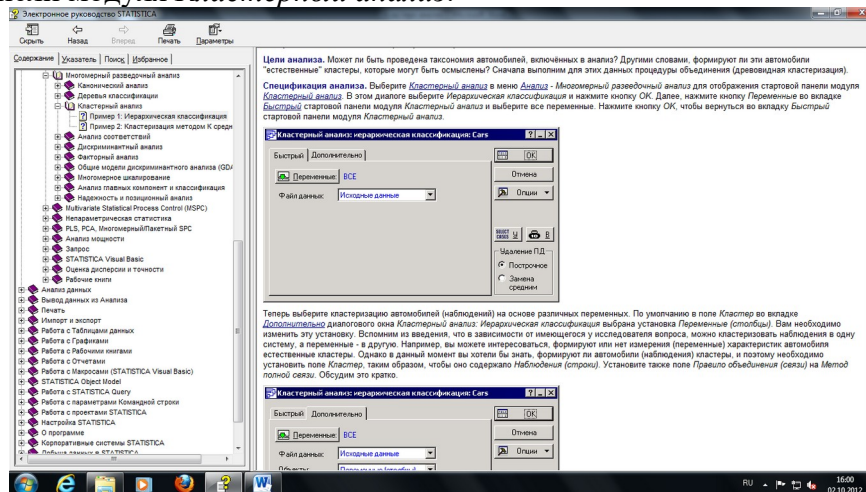
Масштаб измерений. Все кластерные алгоритмы нуждаются в оценках расстояний между кластерами или объектами, и ясно, что, когда вы вычисляете расстояние, необходимо задать масштаб. Поскольку различные измерения используют абсолютно различные типы шкал (т.е. чисел секунд, тысяч долларов и т.д.), данные были стандартизованы (командой [Стандартизовать](#) в меню [Данные](#)), так что каждая переменная имеет [среднее](#) 0 и [стандартное отклонение](#) 1. Очень важно, что размерности (переменные в этом примере), которые используются для вычисления расстояний между объектами (автомобилями в данном примере), имеют сравнимые величины, иначе анализ был бы смещённым и связан в большей степени с теми измерениями, которые имеют больший размах значений.



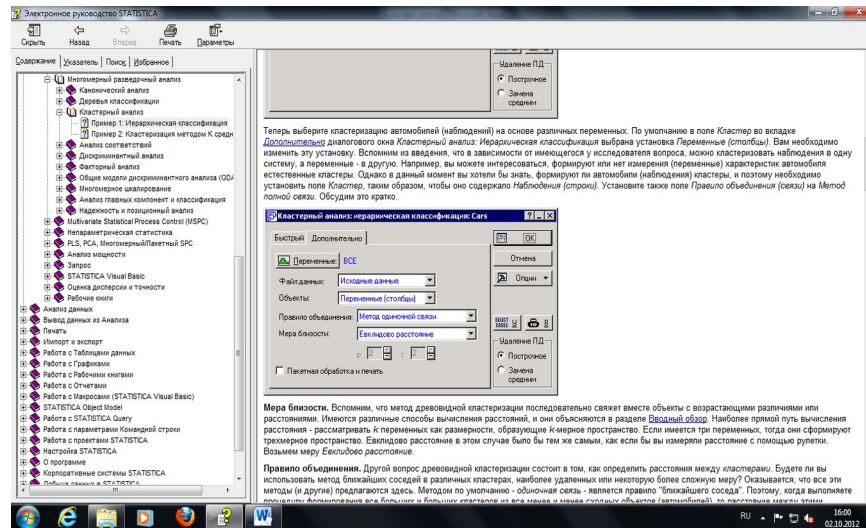
Стандартизированные данные содержатся в файле *Cars.sta*. Открыть этот файл данных можно выбрав [Открыть](#) из меню [Файл](#); наиболее вероятно, что этот файл данных находится в директории */Examples/Datasets*.

Цели анализа. Может ли быть проведена таксономия автомобилей, включённых в анализ? Другими словами, формируют ли эти автомобили "естественные" кластеры, которые могут быть осмыслены? Сначала выполним для этих данных процедуры объединения (древовидная кластеризация).

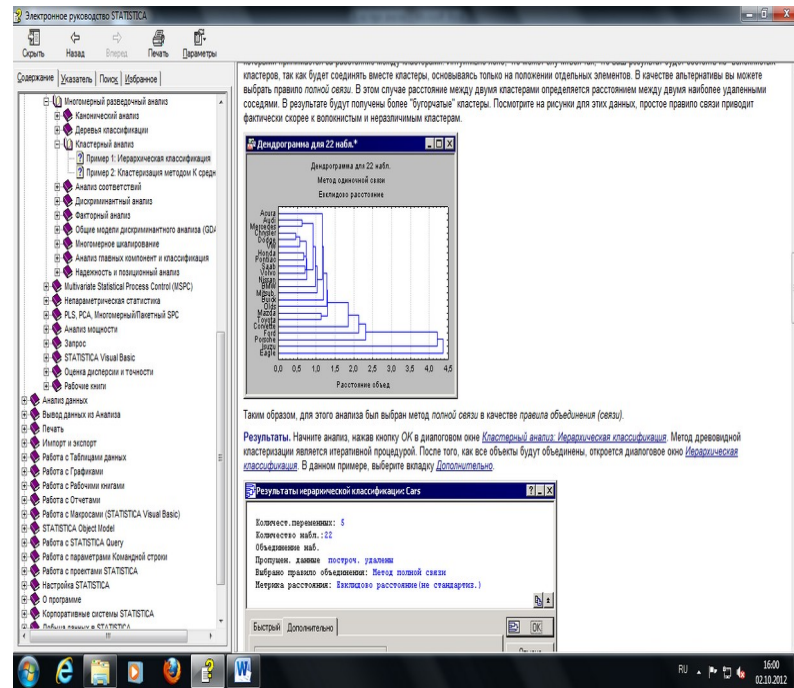
Спецификация анализа. Выберите [Кластерный анализ](#) в меню [Анализ](#) - [Многомерный разведочный анализ](#) для отображения стартовой панели модуля [Кластерный анализ](#). В этом диалоге выберите [Иерархическая классификация](#) и нажмите кнопку [ОК](#). Далее, нажмите кнопку [Переменные](#) во вкладке [Быстрый](#) стартовой панели модуля [Кластерный анализ](#) и выберите все переменные. Нажмите кнопку [ОК](#), чтобы вернуться во вкладку [Быстрый](#) стартовой панели модуля [Кластерный анализ](#).



Теперь выберите кластеризацию автомобилей (наблюдений) на основе различных переменных. По умолчанию в поле *Кластер* во вкладке [Дополнительно](#) диалогового окна [Кластерный анализ](#): [Иерархическая классификация](#) выбрана установка [Переменные \(столбцы\)](#). Вам необходимо изменить эту установку. Вспомним из введения, что в зависимости от имеющегося у исследователя вопроса, можно кластеризовать наблюдения в одну систему, а переменные - в другую. Например, вы можете интересоваться, формируют ли нет измерения (переменные) характеристик автомобиля естественные кластеры. Однако в данный момент вы хотели бы знать, формируют ли автомобили (наблюдения) кластеры, и поэтому необходимо установить поле *Кластер*, таким образом, чтобы оно содержало *Наблюдения (строки)*. Установите также поле *Правило объединения (связи)* на *Метод полной связи*. Обсудим это кратко.

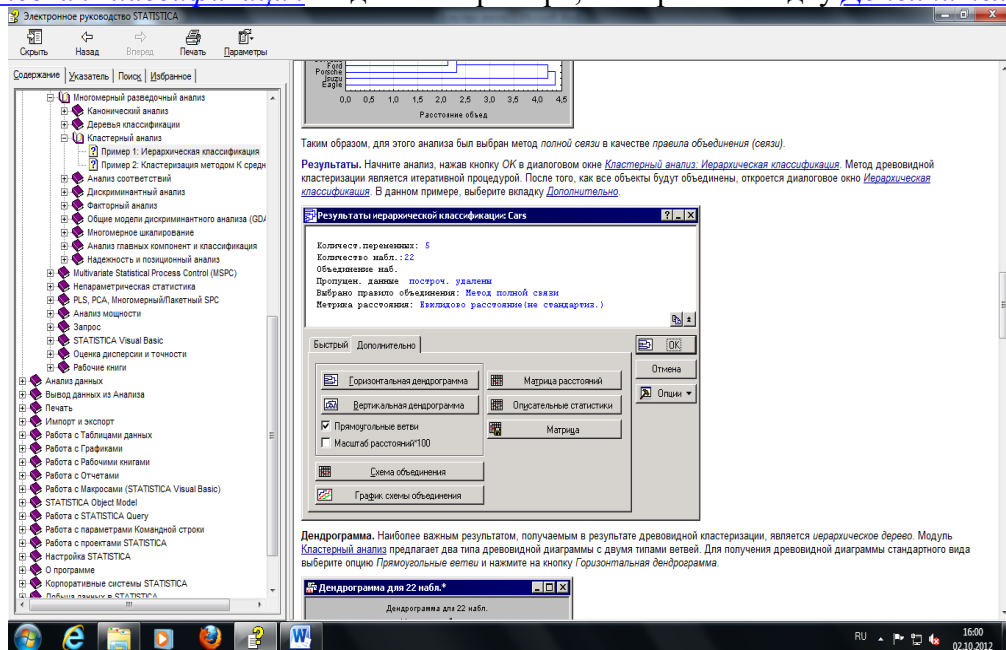


Мера близости. Вспомним, что метод древовидной кластеризации последовательно свяжет вместе объекты с возрастающими различиями или расстояниями. Имеются различные способы вычисления расстояний, и они объясняются в разделе [Вводный обзор](#). Наиболее прямой путь вычисления расстояния - рассматривать k переменных как размерности, образующие k -мерное пространство. Если имеется три переменных, тогда они сформируют трехмерное пространство. Евклидово расстояние в этом случае было бы тем же самым, как если бы вы измеряли расстояние с помощью рулетки. Возьмем меру *Евклидово расстояние*. Правило объединения. Другой вопрос древовидной кластеризации состоит в том, как определить расстояния между *кластерами*. Будете ли вы использовать метод ближайших соседей в различных кластерах, наиболее удаленных или некоторую более сложную меру? Оказывается, что все эти методы (и другие) предлагаются здесь. Методом по умолчанию - *одиночная связь* - является правило "ближайшего соседа". Поэтому, когда выполняете процедуру формирования все больших и больших кластеров из все менее и менее сходных объектов (автомобилей), то расстояние между этими кластерами определяется ближайшими объектами из них. Иными словами, в каждом кластере имеется по одному представителю, расстояние между которыми принимается за расстояние между кластерами. Интуитивно ясно, что может случиться так, что ваш результат будет состоять из "волокнистых" кластеров, так как будет соединять вместе кластеры, основываясь только на положении отдельных элементов. В качестве альтернативы вы можете выбрать правило *полной связи*. В этом случае расстояние между двумя кластерами определяется расстоянием между двумя наиболее удаленными соседями. В результате будут получены более "бугорчатые" кластеры. Посмотрите на рисунки для этих данных, простое правило связи приводит фактически скорее к волокнистым и неразличимым кластерам.

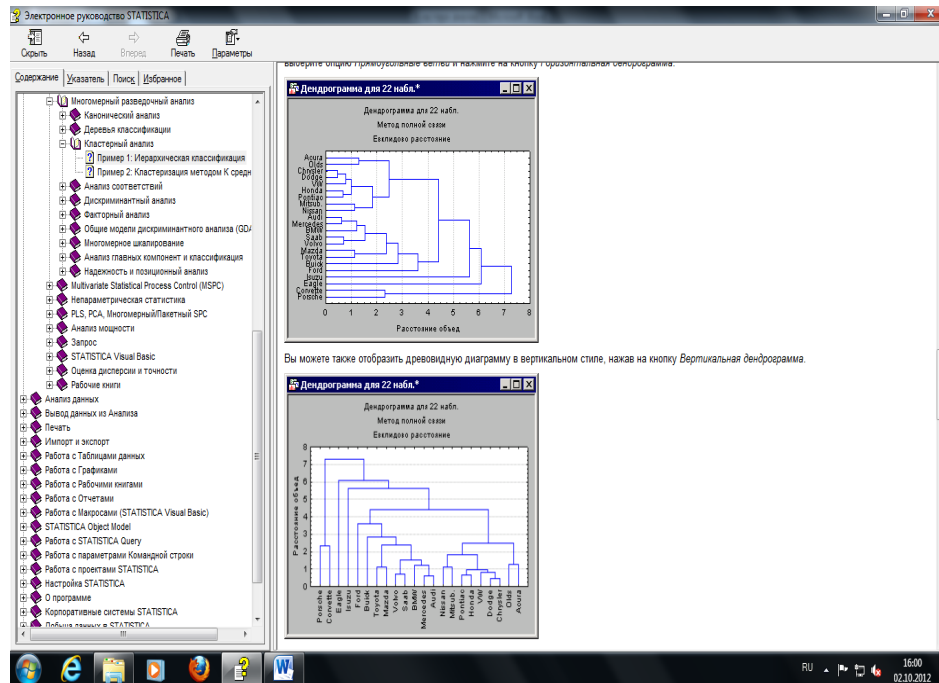


Таким образом, для этого анализа был выбран метод *полной связи* в качестве правила объединения (*связи*).

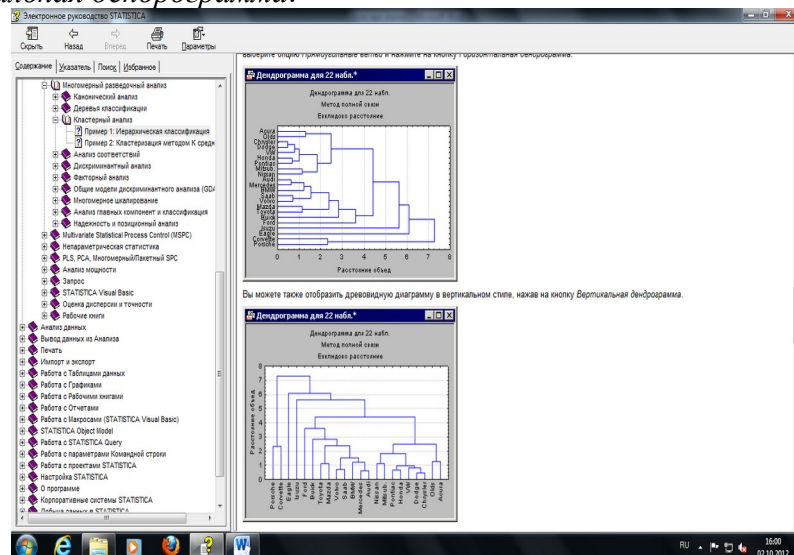
Результаты. Начните анализ, нажав кнопку **ОК** в диалоговом окне [Кластерный анализ: Иерархическая классификация](#). Метод древовидной кластеризации является итеративной процедурой. После того, как все объекты будут объединены, откроется диалоговое окно [Иерархическая классификация](#). В данном примере, выберите вкладку [Дополнительно](#).



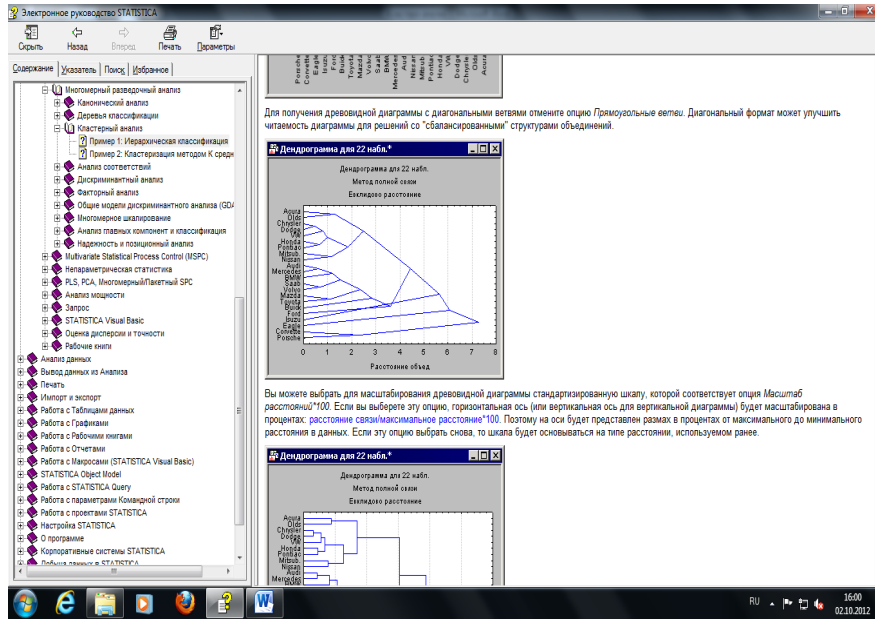
Дендрограмма. Наиболее важным результатом, получаемым в результате древовидной кластеризации, является *иерархическое дерево*. Модуль [Кластерный анализ](#) предлагает два типа древовидной диаграммы с двумя типами ветвей. Для получения древовидной диаграммы стандартного вида выберите опцию *Прямоугольные ветви* и нажмите на кнопку *Горизонтальная дендрограмма*.



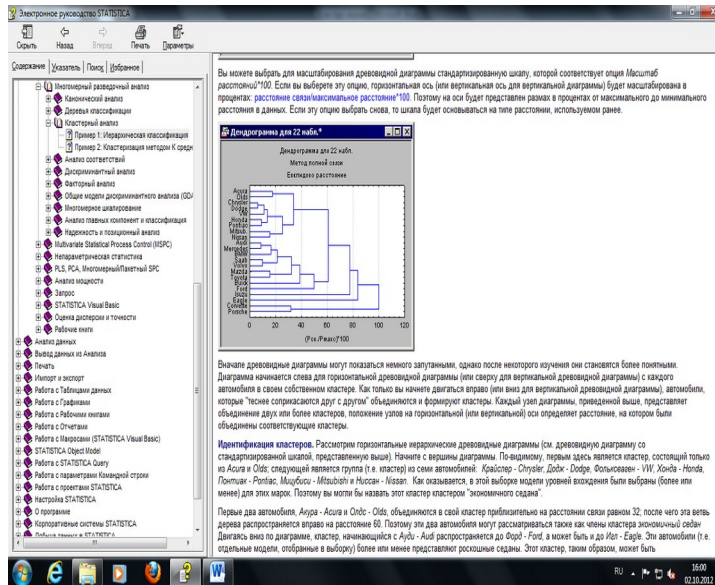
Вы можете также отобразить древовидную диаграмму в вертикальном стиле, нажав на кнопку *Вертикальная дендрограмма*.



Для получения древовидной диаграммы с диагональными ветвями отмените опцию *Прямоугольные ветви*. Диагональный формат может улучшить читаемость диаграммы для решений со "сбалансированными" структурами объединений.



Вы можете выбрать для масштабирования древовидной диаграммы стандартизированную шкалу, которой соответствует опция *Масштаб расстояний*100*. Если вы выберете эту опцию, горизонтальная ось (или вертикальная ось для вертикальной диаграммы) будет масштабирована в процентах: $\text{расстояние связи} / \text{максимальное расстояние} * 100$. Поэтому на оси будет представлен размах в процентах от максимального до минимального расстояния в данных. Если эту опцию выбрать снова, то шкала будет основываться на типе расстояния, используемом ранее.



Вначале древовидные диаграммы могут показаться немного запутанными, однако после некоторого изучения они становятся более понятными. Диаграмма начинается слева для горизонтальной древовидной диаграммы (или сверху для вертикальной древовидной диаграммы) с каждого автомобиля в своем собственном кластере. Как только вы начнете двигаться вправо (или вниз для вертикальной древовидной диаграммы), автомобили, которые "теснее соприкасаются друг с другом" объединяются и формируют кластеры. Каждый узел диаграммы, приведенной выше, представляет объединение двух или более кластеров, положение узлов на горизонтальной (или вертикальной) оси определяет расстояние, на котором были объединены соответствующие кластеры.

Идентификация кластеров. Рассмотрим горизонтальные иерархические древовидные диаграммы (см. древовидную диаграмму со стандартизированной шкалой, представленную выше). Начните с вершины диаграммы. По-видимому, первым здесь является кластер,

состоящий только из *Acura* и *Olds*; следующей является группа (т.е. кластер) из семи автомобилей: *Крайслер* - *Chrysler*, *Додж* - *Dodge*, *Фольксваген* - *VW*, *Хонда* - *Honda*, *Понтиак* - *Pontiac*, *Мицубиси* - *Mitsubishi* и *Ниссан* - *Nissan*. Как оказывается, в этой выборке модели уровней вхождения были выбраны (более или менее) для этих марок. Поэтому вы могли бы назвать этот кластер кластером "экономичного седана".

Первые два автомобиля, *Акура* - *Acura* и *Олдс* - *Olds*, объединяются в свой кластер приблизительно на расстоянии связи равном 32; после чего эта ветвь дерева распространяется вправо на расстояние 60. Поэтому эти два автомобиля могут рассматриваться также как члены кластера *экономичный седан*. Двигаясь вниз по диаграмме, кластер, начинающийся с *Ауди* - *Audi* распространяется до *Форд* - *Ford*, а может быть и до *Игл* - *Eagle*. Эти автомобили (т.е. отдельные модели, отобранные в выборку) более или менее представляют роскошные седаны. Этот кластер, таким образом, может быть идентифицирован как кластер *роскошных седанов*.

Наконец, внизу диаграммы помещаются автомобили *Корвет* - *Corvette* и *Порше* - *Porsche*, которые объединяются на расстоянии связи, примерно равном 30.

Схема объединения. Неграфическим представлением результатов кластеризации является схема объединения. Откройте ее, нажав на кнопку *Схема объединения* во вкладке *Дополнительно* диалогового окна *Результаты иерархической классификации*.

Схема объединения (Cars)

Метод полной связи
Евклидово расстояние

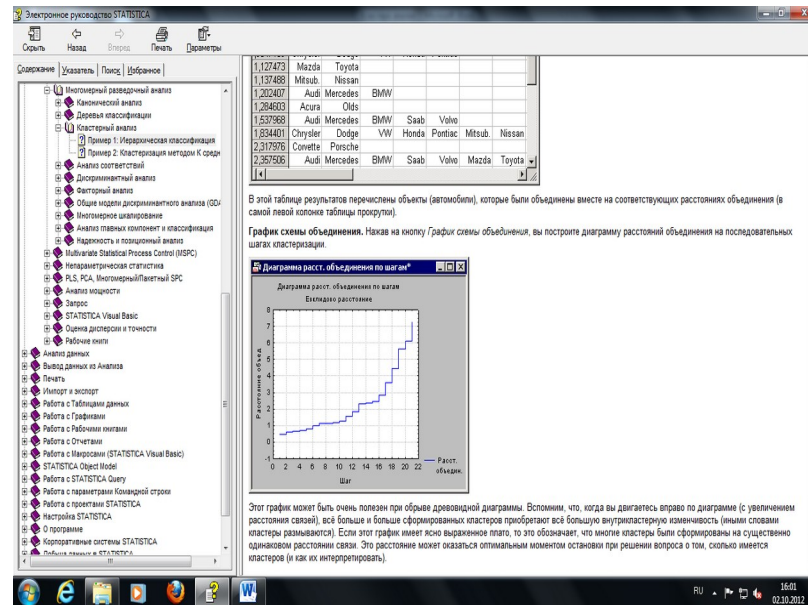
расст. объединения	Объект 1	Объект 2	Объект 3	Объект 4	Объект 5	Объект 6	Объект 7
4580483	Chrysler	Dodge					
6231085	Audi	Mercedes					
8670490	Honda	Pontiac					
7830042	Saab	Volvo					
7914339	Chrysler	Dodge	VW				
9847189	Chrysler	Dodge	VW	Honda	Pontiac		
1127473	Mazda	Toyota					
1137498	Mitsub	Nissan					
1202407	Audi	Mercedes	BMW				
1284603	Acura	Olds					
1537968	Audi	Mercedes	BMW	Saab	Volvo		
1634401	Chrysler	Dodge	VW	Honda	Pontiac	Mitsub	Nissan
2317976	Corvette	Porsche					
2367906	Audi	Mercedes	BMW	Saab	Volvo	Mazda	Toyota

В этой таблице результатов перечислены объекты (автомобили), которые были объединены вместе на соответствующих расстояниях объединения (в самой левой колонке таблицы прокрутки).

График схемы объединения. Нажав на кнопку *График схемы объединения*, вы построите диаграмму расстояний объединения на последовательных шагах кластеризации.

В этой таблице результатов перечислены объекты (автомобили), которые были объединены вместе на соответствующих расстояниях объединения (в самой левой колонке таблицы прокрутки).

График схемы объединения. Нажав на кнопку *График схемы объединения*, вы построите диаграмму расстояний объединения на последовательных шагах кластеризации.



Этот график может быть очень полезен при обрыве древовидной диаграммы. Вспомним, что, когда вы двигаетесь вправо по диаграмме (с увеличением расстояния связей), всё больше и больше сформированных кластеров приобретают всё большую внутрикластерную изменчивость (иными словами кластеры размываются). Если этот график имеет ясно выраженное плато, то это обозначает, что многие кластеры были сформированы на существенно одинаковом расстоянии связи. Это расстояние может оказаться оптимальным моментом остановки при решении вопроса о том, сколько имеется кластеров (и как их интерпретировать).

Задание 1

На предприятии существуют 16 научно-производственных отделов, занятых выпуском различной продукции, работ, услуг. Поскольку виды деятельности, количество работающих, рентабельность отделов, существенно различаются между собой, было решено сгруппировать отделы в несколько однородных групп, а затем для каждой группы разработать свою систему премирования.

После тщательного анализа выбрали четыре признака, с помощью которых описывались важные (для указанной цели) параметры каждого отдела:

X_1 – стоимость активной части основных производственных фондов, тыс. руб.;

X_2 – среднемесячный объем работ отдела, тыс. руб.;

X_3 – удельный вес работ / услуг отдела по внутрифирменной кооперации, %;

X_4 – среднемесячная прибыль отдела, тыс. руб.

Исходные данные по отделам приведены ниже.

№ отдела	Значения признаков			
	X_1	X_2	X_3	X_4
1	699	190	53	11
2	532	211	19	42
3	650	152	46	14
4	768	216	67	17
5	67	106	0	32
6	322	397	26	52
7	736	180	49	18
8	501	239	11	60
9	293	391	16	66
10	300	396	29	87

11	73	160	0	22
12	862	199	51	22
13	112	136	0	29
14	289	388	31	74
15	512	195	6	58
16	490	201	9	65

Проведите кластеризацию отделов используя иерархические алгоритмы (Joining):

а) используя исходные данные;

б) используя стандартизированные данные, т. е. данные, преобразованные по формуле

$$\frac{X_{ij} - \bar{X}_j}{S_j}$$

,

где X_{ij} – i-е значение j-го признака, $i = 1, 2, \dots, 16$; $j = 1, 2, 3, 4$;

$\bar{X}_j = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_{ij}$ – оценка среднего для j-го признака;

$S_j = \sqrt{\frac{1}{15} \sum_{i=1}^{16} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}$ – оценка среднего квадратического отклонения для j-го признака.

Процедуру стандартизации данных можно выполнить непосредственно в таблице, используя следующую последовательность действий: курсор на имени переменной → нажать правую кнопку мыши → в выпадающем меню выбрать File/StandardizeBlockStandardizeColumns → ОК.

Сравните результаты кластеризации. По результатам кластеризации определите число кластеров и их состав. Найдите статистические характеристики каждого кластера.

Проведите кластеризацию используя метод *k*-средних (число кластеров задайте равным 4). Сравните результаты (составы кластеров).

Задание 2

Ниже приведены значения основных факторов сельскохозяйственного производства для 20 районов:

x_1 – число тракторов на 100 га;

x_2 – число зерноуборочных комбайнов 100 га;

x_3 – число орудий поверхностной обработки почвы на 100 га;

x_4 – количество удобрений, расходуемых на гектар (т/га);

x_5 – количество химических средств защиты растений, расходуемых на гектар (ц/га).

Районы	Факторы				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1,58	0,26	2,05	0,32	0,14
2	0,34	0,28	0,46	0,59	0,66
3	2,53	0,31	2,46	0,30	0,31
4	4,63	0,40	6,44	0,43	0,59
5	2,16	0,26	2,16	0,39	0,16
6	2,16	0,30	2,69	0,32	0,17
7	0,68	0,29	0,73	0,42	0,23
8	0,35	0,26	0,42	0,21	0,08
9	0,52	0,24	0,49	0,20	0,08
10	3,42	0,31	3,02	1,37	0,73

11	1,78	0,30	3,19	0,73	0,17
12	2,40	0,32	3,30	0,25	0,14
13	9,36	0,40	11,51	0,39	0,38
14	1,72	0,28	2,26	0,82	0,17
15	0,59	0,29	0,60	0,13	0,35
16	0,28	0,26	0,30	0,09	0,15
17	1,64	0,29	1,44	0,20	0,08
18	0,09	0,22	0,05	0,43	0,20
19	0,08	0,25	0,03	0,73	0,20
20	1,36	0,26	0,17	0,99	0,42

- 1) проведите кластеризацию районов используя несколько иерархических алгоритмов (Joining):
 - а) используя исходные данные;
 - б) используя стандартизированные данные;
- 2) проведите кластеризацию используя метод К-средних (число кластеров задайте равным 3).
- 3). Сравните составы кластеров и их характеристики.

Отчет должен содержать обоснование количества кластеров в исследуемой совокупности, графическое представление переменных и их распределение на кластеры, результаты применения метода К-средних при кластеризации и экономическую интерпретацию результатов исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература	1. Покровский В.В. Математические методы в бизнесе и менеджменте [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Покровский В.В. – Электронные текстовые данные. - Москва: Лаборатория знаний, 2020. - 111 с. 2. Бережная, Е. В. Методы и модели принятия управленческих решений: учебное пособие: [для студентов вузов, обучающихся по напр. подготовки 38.03.02 (080200.62) "Менеджмент" (квалификация (степень) "бакалавр")] / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. - Москва: ИНФРА-М, 2017. - 384 с.: ил., табл. - (Высшее образование. Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-006914-2, экземпляров неограничено
Дополнительная литература	3. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Финансы и статистика, 2006. - 432 с: ил. 4. Новиков А.И. Экономико-математические методы и модели [Электронный ресурс]: учебник для бакалавров / Новиков А.И. - Электронные текстовые данные. - Москва: Дашков и К, 2018. - 532 с. 5. Экономико-математические методы и прикладные модели [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов / В.В. Федосеев [и др.]. - Электронные текстовые данные. - Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2017. - 302 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ АТаблица А. 1 – Критические значения t -критерия Стьюдента

при уровне значимости 0,10; 0,05; и 0,01

Число степеней свободы d.f.	α			Число степеней свободы d.f.	α		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,31375 2	12,7062 0	31,82052	18	1,73406 4	2,10092	2,55238
2	2,91998 6	4,30265	6,96456	19	1,72913 3	2,09302	2,53948
3	2,35336 3	3,18245	4,54070	20	1,72471 8	2,08596	2,52798
4	2,13184 7	2,77645	3,74695	21	1,72074 3	2,07961	2,51765
5	2,01504 8	2,57058	3,36493	22	1,71714 4	2,07387	2,50832
6	1,94318 0	2,44691	3,14267	23	1,71387 2	2,06866	2,49987
7	1,89457 9	2,36462	2,99795	24	1,71088 2	2,06390	2,49216
8	1,85954 8	2,30600	2,89646	25	1,70814 1	2,05954	2,48511
9	1,83311 3	2,26216	2,82144	26	1,70561 8	2,05553	2,47863
10	1,81246 1	2,22814	2,76377	27	1,70328 8	2,05183	2,47266
11	1,79588 5	2,20099	2,71808	28	1,70113 1	2,04841	2,46714
12	1,78228 8	2,17881	2,68100	29	1,69912 7	2,04523	2,46202
13	1,77093 3	2,16037	2,65031	30	1,69726 1	2,04227	2,45726
14	1,76131	2,14479	2,62449	40	1,6839	2,0211	2,7045

	0						
15	1,75305 0	2,13145	2,60248	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,74588 4	2,11991	2,58349	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,73960 7	2,10982	2,56693	inf	1,64485 4	1,95996	2,32635

Таблица А. 2 – Значения статистик Дарбина – Уотсона d_u и d_e при
5 %-м уровне значимости

n	$k^1 = 1$		$k^1 = 2$		$k^1 = 3$		$k^1 = 4$		$k^1 = 5$	
	d_u	d_e	d_u	d_e	d_u	d_e	d_u	d_e	d_u	d_e
6	0,61	1,40	-	-	-	-	-	-	-	-
7	0,70	1,36	0,47	1,90	-	-	-	-	-	-
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29	-	-	-	-
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13	-	-	-	-
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02	-	-	-	-
11	0,93	1,32	0,66	1,60	0,60	1,93	-	-	-	-
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86	-	-	-	-
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82	-	-	-	-
14	1,0	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78	-	-	-	-
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,53	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,54	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,55	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83

ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ

УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по организации самостоятельной работы

по дисциплине «Экономико-математическое моделирование в управлении
бизнесом»

для студентов направления подготовки 38.03.02 Менеджмент
направленность (профиль) «Управление бизнесом»

Методические указания составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Экономико-математическое моделирование в управлении бизнесом» и предназначены для студентов направления 38.03.02 «Менеджмент».

Составители: д. э. н., доцент О. В. Бережная

Содержание

1. Общая характеристика самостоятельной работы
 2. План – график выполнения самостоятельной работы
 3. Методические указания по изучению теоретического материала
 4. Методические указания по подготовке к практическим работам
 5. Методические указания к написанию доклада
 6. Методические указания по самостоятельному решению задач
 7. Тестирование
 8. Выполнение контрольной работы
- Список рекомендуемой литературы

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Экономико-математическое моделирование в управлении бизнесом» относится к базовым дисциплинам. Ее освоение происходит в 4 семестре. В соответствии с учебным планом подготовки студентов по направлению 38.03.02 «Менеджмент» предусмотрено выполнение самостоятельной работы.

Самостоятельная работа включает

- подготовку к практическим занятиям
- подготовку к лекциям
- самостоятельное изучение литературы
- написание и защита доклада
- самостоятельное решение задач
- выполнение контрольной работы
- тестирование

Одним из главных итогов работы студента является усвоение им основных достижений современной науки по дисциплине.

Настоящие методические указания разработаны с целью оказания помощи студентам в вопросах выбора тем докладов, решения задач, выполнения и оформления разделов и структурных частей контрольной работы, подготовки к ее защите и самой процедуры защиты.

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Целью освоения дисциплины «Методы принятия управленческих решений» является формирование компетенций (ОПК-2, ОПК-5) у студентов по направлению подготовки 38.03.02 «Менеджмент». Основная цель курса заключается в получении студентом совокупности теоретических знаний и практических навыков по основам экономико-математического моделирования (ЭММ) в управлении бизнесом.

Задачи, стоящие перед студентом при изучении дисциплины:

1. Изучить теоретические основы экономико-математического моделирования (ЭММ) в управлении бизнесом
2. Знать сущность методологии экономико-математического моделирования в управлении бизнесом; основные экономико-математические методы и модели, этапы их разработки и применения для решения бизнес-задач
- 3 Изучить методы сбора, обработки и анализа данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем
4. Владеть современными информационными технологиями и программными средствами для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом
5. Овладеть навыками вероятностно-статистические моделирования (методами корреляционно-регрессионного анализа, прогнозирования временных рядов экономических показателей, статистического моделирования, кластерного и факторного анализа и др.) для решения экономических задач и поддержки принятия решений
6. Владеть навыками применения различных методов и инструментов разработки оптимизационных моделей в управлении бизнесом

В результате освоения дисциплины и самостоятельной работы студент должен:

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем.	ИД-3 ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе экономико-математического моделирования, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем	умеет осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач на основе вероятностно-статистического моделирования и построения оптимизационных моделей в управлении бизнесом, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем;
ОПК-5. Способен использовать при решении профессиональных задач	ИД-3 ОПК-5. Способен использовать информационные технологии и программные средства, включая управление	владеет навыками применения информационных технологий и программных

современные информационные технологии и программные средства, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ.	крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации экономико-математического моделирования в управлении бизнесом	средств, включая управление крупными массивами данных и их интеллектуальный анализ для реализации вероятностно-статистического моделирования и разработки оптимизационных моделей в управлении бизнесом (используя инструментарий корреляционно-регрессионного анализа, трендовых моделей прогнозирования, статистического моделирования, кластерного и факторного анализа; теории игр; теории массового обслуживания; линейного программирования и др.)
---	--	---

2. ПЛАН – ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Виды и содержание самостоятельной работы студента и формы контроля

Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций	Вид деятельности студентов	Итоговый продукт самостоятельной работы	Средства и технологии оценки
3 семестр			
ОПК-2. И-3 ОПК-5. И-3	Тестирование	Тест	Зачетное задание
ОПК-2. И-3 ОПК-5. И-3	Подготовка к лабораторной работе	Отчет	Собеседование
ОПК-2. И-3 ОПК-5. И-3	Подготовка к лекции	Конспект	Собеседование
ОПК-2. И-3 ОПК-5. И-3	Подготовка реферата, доклада	Доклад	Доклад
ОПК-2. И-3 ОПК-5. И-3	Самостоятельное изучение литературы	Конспект	Собеседование
ОПК-2. И-3 ОПК-5. И-3	Самостоятельное решение задач	Отчет по решенным задачам	Зачетное задание
ОПК-2. И-3 ОПК-5. И-3.	Выполнение контрольной работы	Контрольная работа	комплект заданий для контрольной работы

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

При изучении дисциплины «Экономико-математическое моделирование в управлении бизнесом» предусмотрено изучение теоретического материала. Форма контроля данного вида СРС: собеседование.

Вопросы для проведения собеседования:

Тема: Теоретические основы экономико-математического моделирования в управлении бизнесом

1. Сущность методологии экономико-математического моделирования в управлении
2. Этапы экономико-математического моделирования
3. Классификация экономико-математических методов и моделей

Тема: Основы вероятностно-статистического моделирования в управлении бизнесом

1. Элементарные понятия о случайных событиях, величинах и функциях
2. Числовые характеристики случайных величин
3. Статистическая оценка законов распределения случайных величин
4. Основные законы распределения случайных величин Выбор теоретического закона распределения случайной величины.

Тема: Модели прогнозирования экономических процессов

1. Сущность прогнозирования социально-экономических процессов
2. Временные ряды социально-экономических показателей в прогнозировании
3. Прогнозирование временных рядов на основе построения трендовых моделей. Прямая экстраполяция

Тема: Модели прогнозирования экономических процессов

4. Прогнозирование временных рядов, содержащих сезонные колебания, по аддитивной модели
5. Прогнозирование временных рядов, содержащих сезонные колебания, по мультипликативной модели

Тема: Модели корреляционно-регрессионного анализа и их применение в управлении бизнесом

1. Основные понятия корреляционно-регрессионного анализа.
2. Исходные предпосылки регрессионного анализа и свойства оценок.
3. Этапы построения многофакторной корреляционно-регрессионной модели

Тема: Моделирование систем массового

обслуживания и их применение в бизнес-процессах

1. Компоненты и классификация моделей массового обслуживания
2. Одноканальная модель с пуассоновским входным потоком с экспоненциальным распределением длительности обслуживания
3. Многоканальная модель с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением длительности обслуживания

Тема: Статистическое моделирование бизнес-процессов. Метод Монте-Карло

1. Теоретические основы метода
2. Моделирование систем массового обслуживания с использованием метода Монте-Карло
3. Моделирование сложных экономических систем

Тема: Оптимизационные методы и модели в управлении экономическими процессами

1. Линейное программирование
2. Нелинейное программирование
3. Общие понятия о динамическом программировании
4. Параметрическое программирование

5. Целочисленное программирование

Тема: Основы линейного программирования

1. Задачи линейного программирования
2. Построение экономико-математических моделей задач линейного программирования
3. Графическое решение задачи линейного программирования
4. Анализ моделей на чувствительность

Тема: Основы линейного программирования

5. Симплекс-метод
6. Методы нахождения опорного решения задачи линейного программирования
7. Экономическая интерпретация решения задачи линейного программирования

Тема: Транспортные задачи и логистика

1. Постановка задачи
2. Алгоритм метода потенциалов
3. Транспортная задача в сетевой постановке
4. Доставка груза в кратчайший срок

Тема: Модели управления запасами

1. Модели экономически выгодных размеров заказываемых партий
2. Формула для экономичного размера заказа. Классическая задача управления запасами
3. Модификации модели экономического размера заказа
4. Неопределённость в модели управления запасами
5. Модель производства оптимальной партии продукции с учётом объёма склада

Тема: Теория игр и принятие решений

1. Элементы теории статистических решений
2. Принятие решений в условиях полной определенности
3. Принятие решений в условиях риска

Тема: Теория игр и принятие решений

4. Принятие решений в условиях неопределенности. Критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица
5. Некоторые понятия теории игр

Тема: Методы снижения размерности многомерного пространства. Компонентный и факторный анализ.

1. Сущность задач снижения размерности
2. Компонентный анализ
3. Факторный анализ
4. Практическое использование методов снижения размерности

Тема: Методы классификации многомерных наблюдений. Кластерный анализ

1. Сущность задач классификации
2. Кластерный анализ
3. Практическое использование методов классификации

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

Подготовка к практическим занятиям осуществляется в соответствии с методическими указаниями. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Экономико-математическое моделирование в управлении бизнесом» для студентов направления 38.03.02 Менеджмент, 2023 – [Электронная версия]. Отдельные практические задания включены в ФОСы.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К НАПИСАНИЮ ДОКЛАДА

К самостоятельной работе относится написание и защита доклада.

Темы докладов

1. Особенности применения экономико-математического моделирования в менеджменте организации.
2. Связь стоимостных и материальных пропорций в экономике.
3. Применение эконометрического моделирования в планировании и прогнозировании.
4. Использование нелинейного программирования в менеджменте и планировании.
5. Прикладное значение имитационного моделирования.
6. Модели и методы теории массового обслуживания.
7. Применение моделей поиска оптимального пути на сетях при решении задач менеджмента.
8. Анализ циклических процессов в экономике и его применение в долгосрочном планировании.
9. Математическое моделирование поведения потребителя на рынке.
10. Математические модели конкурентной борьбы и их применение в менеджменте.
11. Производственные функции и их применение в менеджменте.
12. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.
13. Симплексный метод решения задачи линейного программирования.
14. Классификация задач нелинейного программирования.
15. Алгоритм отыскания критического пути
16. Понятие модель, моделирование, система в процессе принятия решений в управлении операционной (производственной) деятельностью организаций
17. Задачи математического моделирования в социальных и экономических системах в процессе принятия решений
18. Этапы процесса моделирования в процессе принятия решений в управлении операционной (производственной) деятельностью организаций
19. Свойства сложности социально-экономических систем и ее особенности в процессе принятия решений в управлении операционной (производственной) деятельностью организаций
20. Типы неопределенности и их влияния на процесс принятия решений в управлении операционной (производственной) деятельностью организаций
21. Классификация экономико-математических моделей в процессе принятия решений в управлении операционной (производственной) деятельностью организаций
22. Этапы цикла экономико-математического моделирования в процессе принятия решений в управлении операционной (производственной) деятельностью организаций
23. Примеры моделирования на рынках: труда, заемных средств, товаров в процессе принятия решений в управлении операционной (производственной) деятельностью организаций
24. Особенности моделирования в отдельных экономических системах в процессе принятия решений
25. Игра как математическая модель конфликта. Основные понятия теории игр.
26. Классификация игр. Принятие на их основе организационно-управленческих решений
1. **Критерии оценивания компетенций***

Оценка «отлично» выставляется студенту, если компетенции ОПК-2, ОПК-5 полностью освоена на повышенном уровне

Написан и защищен доклад по одной из тем продвинутого уровня; доля авторского текста менее 50 %; обработаны отечественные и зарубежные источники по выбранной теме доклада.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если компетенции ОПК-2, ОПК-5 полностью освоена на базовом уровне

Написан и защищен доклад по одной из тем базового уровня; доля авторского текста менее 40 %; обработаны отечественные и зарубежные источники по выбранной теме доклада.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если компетенции ОПК-2, ОПК-5 частично освоена на базовом уровне

Написан и защищен доклад по одной из тем базового уровня; доля авторского текста более 30 %; обработаны отечественные источники по выбранной теме доклада.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если компетенции ОПК-2, ОПК-5 не освоены

Доклад не написан.

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя: написание доклада и подготовку и проведение презентации по нему.

Предлагаемые студенту задания позволяют проверить компетенции ОПК-2, ОПК-5. Принципиальные отличия заданий базового уровня от повышенного отличаются сложностью темы доклада, состоят в том, что студент проявляет творческий подход к изложению материала, широкий кругозор в решении поставленной проблемы.

Для подготовки к данному оценочному мероприятию необходимы домашняя подготовка и подготовка в аудитории для выполнения презентации.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования необходимыми для презентации техническими средствами.

При проверке задания оцениваются творческий подход к раскрытию темы доклада, последовательность, логичность изложения материала, аргументированность выводов, умение обосновывать и отстаивать свою точку зрения, уровень владения техническими средствами для презентации.

Бланк оценочного листа презентации доклада

Ф.И.О. студента _____ Дата _____

Тема доклада _____

Критерии оценивания	Тема / Вопросы				Баллы
Глубина и широта раскрытия вопросов					
Логичность изложения					
Наличие конкретных примеров из экономики РФ					
Аргументация ответов					
Уровень владения техническими средствами					

6. Методические указания по самостоятельному решению задач

Самостоятельное решение задач предусматривает решение задач по отдельным темам изучаемой дисциплины. Решенные задания в письменном виде предоставляются преподавателю на проверку и подлежат защите.

Отдельные практические задания включены в ФОСы.

1. Цех выпускает трансформаторы двух видов. Для изготовления трансформаторов обоих видов используется железо и проволока. Общий запас железа – 3 т, проволоки – 18 т. На один трансформатор первого вида расходуется 5 кг железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида расходуется 3 кг железа и 2 кг проволоки. За каждый реализованный трансформатор первого вида завод получает прибыль 3 у. д. е., второго – 4 у. д. е. Составить план выпуска трансформаторов, обеспечивающих заводу максимальную прибыль.

2. На пункт техосмотра поступает простейший поток заявок (автомобилей) интенсивности машины в час. Время осмотра распределено по показательному закону и равно в среднем 17 минутам, в очереди может находиться не более 5 автомобилей. Определить вероятностные характеристики пункта техосмотра в установившемся режиме.

3. Определить области значений, для которых стратегии и будут оптимальными в следующих играх:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & x & 9 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 10 & x & 6 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Рассматривается работа АЗС, на которой имеется три заправочных колонки. Заправка одной машины длится в среднем 3 минуты. В среднем на АЗС каждую минуту прибывает машина, нуждающаяся в заправке бензином. Число мест в очереди не ограничено. Все машины, вставшие в очередь на заправку, дожидаются своей очереди. Все потоки в системе простейшие. Определить вероятностные характеристики работы АЗС в стационарном режиме.

5. Рассчитать влияние трудовых факторов (численность рабочих, производительность их труда) на изменение объема товарной продукции по данным таблицы методами цепной подстановки и абсолютных разниц. Проведите анализ интегральным методом, сопоставьте с результатами предыдущих расчетов и сделайте выводы.

Таблица – Объем товарной продукции и трудовые факторы, его определяющие

Показатели	варианты							
	а		б		в		г	
	план	факт	план	факт	план	факт	план	факт
Товарная продукция, тыс. руб.	?	?	?	?	?	?	?	?
Численность рабочих, чел.	100	95	120	135	5002	4994	4875	4917
Производительность труда, тыс. руб.	3,0	3,5	6	8	12,15	12,33	4,39	4,53

7. Тестирование

МОДЕЛЬ ЭТО -

- отображение какого-либо объекта, процесса или явления формализованном виде, т.е. математическим языком
- **любое отображение реального объекта, процесса или явления**
- ♦ представление экономического объекта или процесса, явления в математической форме

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭТО -

- **отображение какого-либо объекта, процесса или явления формализованном виде, т.е. математическим языком**
- любое отображение реального объекта, процесса или явления
- представление экономического объекта или процесса, явления в математической форме

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ (ЭКОНОМИЧЕСКАЯ) МОДЕЛЬ ЭТО -

- отображение какого-либо объекта, процесса или явления формализованном виде, т.е. математическим языком
- любое отображение реального объекта, процесса или явления
- **представление экономического объекта или процесса, явления в математической форме**

МОДЕЛИРОВАНИЕМ НАЗЫВАЕТСЯ:

- **процесс создания любой модели**
- процесс создания экономической модели
- процесс создания математической модели

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ - ЭТО:

- модели, целью которых являются максимизация или минимизация экономических переменных
- модели, описывающие поведение отдельных потребителей, фирм, т.е. субъектов рынка
- **модели экономических взаимосвязей, построенные на эмпирических опытных данных**
- модели, реализующие реальные процессы в виртуальном компьютерном пространстве с целью изучения влияния любых факторов на экономические процессы.
- модели, которые включают взаимосвязи экономических переменных во времени

ИМИТАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ - ЭТО:

- модели, целью которых являются максимизация или минимизация экономических переменных;
- модели, описывающие поведение отдельных потребителей, фирм, т.е. субъектов рынка
- модели, построенные на эмпирических опытных данных
- **модели, реализующие реальные процессы в виртуальном компьютерном пространстве с целью изучения влияния любых факторов на экономические процессы**
- модели, которые включают взаимосвязи экономических переменных во времени

МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ - ЭТО:

- **модели, целью которых являются максимизация или минимизация экономических переменных**
- модели, описывающие поведение отдельных потребителей, фирм, т.е. субъектов рынка
- модели, построенные на эмпирических опытных данных
- модели, реализующие реальные процессы в виртуальном компьютерном пространстве с целью изучения влияния любых факторов на экономические процессы
- модели, которые включают взаимосвязи экономических переменных во времени

ОПРЕДЕЛИТЕ ТИП СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ:

СМО представляет собой одну телефонную линию. Заявка (вызов), пришедшая в момент, когда линия занята, получает отказ. Все потоки событий простейшие. Интенсивность потока $I = 0,95$ вызова в минуту. Средняя продолжительность разговора $t = 1$ мин.

- **одноканальная СМО с отказами**
- одноканальная СМО с ограниченной длиной очереди
- одноканальная СМО с неограниченной длиной очереди
- многоканальная СМО с отказами
- многоканальная СМО с ограниченной длиной очереди
- многоканальная СМО с неограниченной длиной очереди

ОПРЕДЕЛИТЕ ТИП СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ:

В вычислительном центре работает 5 персональных компьютеров (ПК). Простейший поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность $\lambda = 10$ задач в час. Среднее время решения задачи равно 12 мин. Заявка получает отказ, если все ПК заняты.

- одноканальная СМО с отказами
- одноканальная СМО с ограниченной длиной очереди
- одноканальная СМО с неограниченной длиной очереди
- **многоканальная СМО с отказами**
- многоканальная СМО с ограниченной длиной очереди
- многоканальная СМО с неограниченной длиной очереди

9. Выполнение контрольной работы

Цель выполнения контрольной работы – систематизация, закрепление и расширение теоретических знаний, полученных при изучении курса «Экономико-математическое моделирование в управлении бизнесом».

Общие требования к написанию и оформлению работы

Работа должна быть выполнена на белой бумаге формата А4.

Текст работы может быть выполнен на компьютере с полуторным межстрочным интервалом в текстовом редакторе Microsoft Word. Текст набирается нежирным шрифтом Times New Roman Cyr, размером 14 пунктов (в таблицах допускается 12). Размер абзацного отступа – 1,25 см.

Текст курсовой работы следует располагать, соблюдая следующие размеры полей: левое – не менее 30 мм, правое – не менее 10 мм, верхнее – не менее 15 мм, нижнее – не менее 20 мм.

Текст работы подразделяется на отдельные главы и параграфы в соответствии с утвержденным заданием, каждый из которых должен содержать заголовок.

Оформление текста работы

Заголовки структурных элементов работы следует располагать в середине строки без точки в конце и писать прописными буквами, не подчеркивая. Переносы слов в заголовках не допускаются. Если заголовок состоит из двух предложений, их разделяют точкой.

Расстояние между заголовком и текстом должно быть равно двум интервалам для работ, выполняемых на компьютере, или двум строчкам для рукописных работ. Каждый вопрос следует начинать с нового листа (страницы). После заголовка текст пишут с абзацного отступа.

Рисунки и схемы разрешается выполнять черными чернилами или черной тушью. Графики могут быть цветными.

Сокращения и условные обозначения должны помещаться в работе в соответствии с общепринятыми нормами.

Ссылки

Приводимые в работе сведения из литературных источников (цифровые данные, цитаты, общие выводы и положения, мнения авторов) должны иметь точные ссылки на источник информации. Ссылка указывает порядковый номер этого источника в списке использованных источников. Под указанным номером в списке использованных источников значатся соответствующие книги, статьи.

Ссылки на иллюстрации, таблицы, формулы, уравнения, перечисления, приложения должны указывать их порядковый номер, например: «... в пункте 2.2.», «... в уравнении (2)», «...на рисунке 8», «...в приложении 5».

При упоминании в тексте иностранных фамилий, фирм, географических и других названий их пишут как в русской транскрипции, так и на языках оригиналов (в скобках).

Нумерация страниц

Страницы работы нумеруются арабскими цифрами. На титульном листе, содержании и первом листе введения номер не ставят. Начиная со второго листа введения, который является четвертой страницей, номер проставляется в правом верхнем углу без точки в конце.

Иллюстрации и таблицы, расположенные на отдельных листах, включают в общую нумерацию страниц курсовой работы.

Нумерация вопросов и подвопросов

Вопросы должны иметь порядковую нумерацию в пределах всей работы и обозначаются арабскими цифрами с точкой в конце. Введение и заключение не нумеруются. Подвопросы нумеруются арабскими цифрами в пределах каждого вопроса. Номер подвопроса состоит из номера вопроса и подвопроса, разделенных точкой, например: «2.3».

Иллюстрации

Иллюстрации (чертежи, графики, схемы, диаграммы, фотоснимки) следует располагать в работе непосредственно после текста, в котором они упоминаются впервые, или на следующей странице. На все иллюстрации должны быть ссылки в тексте.

Иллюстрации должны иметь название, которое помещают над иллюстрацией. При необходимости под иллюстрацией помещают подпись (подрисовочный текст).

Иллюстрации подписывают так: «Рисунок 1 – ...».

Иллюстрации следует нумеровать арабскими цифрами в пределах всей работы.

Иллюстрацию следует выполнять на одной странице.

Таблицы

Весь цифровой материал, имеющийся в работе, должен оформляться в виде таблиц. Таблицу следует располагать в работе непосредственно после текста, в котором она упоминается впервые, или на следующей странице. На все таблицы должны быть ссылки в работе. Таблицы нумеруются арабскими цифрами порядковой нумерацией в пределах всей работы. Номер следует размещать в правом верхнем углу над заголовком таблицы: «Таблица 1 – ...»

Формулы

Пояснение значений символов и числовых коэффициентов следует приводить непосредственно под формулой в той же последовательности, в которой они даны в формуле. Значение каждого символа и числового коэффициента следует давать с новой строки. Первую строку пояснения начинают со слова «где» без двоеточия.

Формулы следует выделять из текста в отдельную строку. Выше и ниже каждой формулы должно быть оставлено не менее одной строки.

Формулы в работе следует нумеровать порядковой нумерацией в пределах всей курсовой работы арабскими цифрами в круглых скобках в крайнем правом положении на строке.

Если в работе только одна формула, ее не нумеруют.

Список использованных источников

По каждому использованному источнику должна быть полная информация.

Сведения о книге: фамилия и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство, год издания, количество страниц в книге.

Сведения о статье: фамилия и инициалы авторов, заглавие статьи, наименование журнала (газеты или другое издание), наименование серии (если есть), год выпуска, номер издания, страницы, на которых помещена статья.

Рекомендации по выполнению задания

Комплект заданий для контрольной работы

1. Построить математическую модель задачи линейного программирования и решить ее симплекс-методом с помощью MS Excel (по вариантам).
2. Решить задачу линейного программирования с двумя независимыми переменными графическим методом (по вариантам).
3. Рассчитать характеристики одноканальной системы массового обслуживания (по вариантам).
4. Выбрать оптимальное решение в условиях неопределенности по критериям Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица (по вариантам).

1. Построить математическую модель задачи линейного программирования и решить ее симплекс-методом с помощью MS Excel (по вариантам).

1. Имеются два склада готовой продукции А1 и А2 с запасами однородного груза 200 т и 300 т. Этот груз необходимо доставить трем потребителям В1, В2 и В3 в количестве 100, 150, 250 т соответственно. Стоимость перевозки тонны груза из склада А1 потребителям В1, В2 и В3 равна 5, 3, 6 у. д. е., а из склада А2 тем же потребителям 3, 4, 2 у. д. е. соответственно. Составить план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

2. Хозяйство располагает следующими ресурсами: площадь – 100 единиц, труд – 120 единиц, тяга – 80 единиц. Хозяйство производит четыре вида продукции $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$. Организация производства характеризуется табл.

Таблица

Продукция	Затраты на единицу продукции			Доход от единицы продукции
	площадь	труд	тяга	
P_1	2	2	2	1
P_2	3	1	3	4
P_3	4	2	1	3
P_4	5	4	1	5

Составить план выпуска продукции, обеспечивающей хозяйству максимальную прибыль.

3. Цех выпускает трансформаторы двух видов. Для изготовления трансформаторов обоих видов используется железо и проволока. Общий запас железа – 3 т, проволоки – 18 т. На один трансформатор первого вида расходуется 5 кг железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида расходуется 3 кг железа и 2 кг проволоки. За каждый реализованный трансформатор первого вида завод получает прибыль 3 у. д. е., второго – 4 у. д. е. Составить план выпуска трансформаторов, обеспечивающих заводу максимальную прибыль.

4. Предприятие отвело три земельных массива размером 5000, 8000, 9000 га на посевы ржи, пшеницы, кукурузы. Средняя урожайность в центнерах на 1 га по массивам указана в табл. Таблица

Посевы	Массивы		
	I	II	III
Рожь	12	14	15
Пшеница	14	14	22
Кукуруза	30	35	25

За 1 ц. ржи предприятие получает 2 у. д. е., за 1 ц. пшеницы – 2,8 у. д. е., за 1 ц. кукурузы – 1,4 у. д. е. Сколько гектаров и на каких массивах предприятие должно отвести на каждую культуру, чтобы получить максимальную выручку, если по плану оно обязано сдать не менее 1900 т ржи, 158 000 т пшеницы и 30000 т кукурузы?

5. Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуется три сорта авиационного бензина: бензин А-2:3:5:2, бензин В-3:1:2:1, бензин С-2:2:1:3. Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина характеризуется числами 120 у. д. е., 100 у. д. е., 150 у. д. е.

Составить план выпуска разных сортов авиационного бензина из условия получения максимальной стоимости всей продукции.

6. Предприятию задана месячная программа на изготовление четырех типов изделий в количествах, соответственно 5000 шт., 2000 шт., 3000 шт., 1800 шт. На предприятии имеется три группы станков с различной производительностью. Суммарное допустимое время для каждой группы станков составляет соответственно 800, 1000, 1500 ч. Данные о технологическом процессе указаны в табл.

Таблица

N группы станков	Нормы времени на изготовление одного изделия (час)				Издержки на изготовление одного изделия (у. д. е.)			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
1	0,5	0,15	0,4	0,6	0,12	0,2	0,3	0,25
2	0,4	0,12	0,2	0,5	0,16	0,14	0,35	0,2

3	0,42	0,14	0,35	0,45	0,17	0,25	0,4	0,3
---	------	------	------	------	------	------	-----	-----

Распределить изделия по станкам так, чтобы месячная программа была выполнена при наименьших издержках.

7. Звероферма выращивает черно-бурых лисиц и песцов. На звероферме имеется 10000 клеток. В одной клетке могут быть либо две лисы, либо 1 песец. По плану на ферме должно быть не менее 3000 лис и 6000 песцов. В одни сутки каждой лисе необходимо выдавать 4 ед. корма, а каждому песцу 5 единиц. Ферма ежедневно может иметь не более 200000 единиц корма. От реализации одной шкурки лисы ферма получает прибыль 10 у. д. е., а от реализации одной шкурки песца – 5 у. д. е. Какое количество лисиц и песцов нужно держать на ферме, чтобы получить наибольшую прибыль?

8. Из двух сортов бензина образуется две смеси **A** и **B**. Смесь **A** содержит 60% бензина 1-го сорта и 40% – 2-го сорта, смесь **B** – 80% – 1-го сорта и 20% – 2-го сорта. Цена 1 кг смеси **A** – 10 у.д.е., а смеси **B** – 12 у. д. е. Составить план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если в наличии имеется 50 т бензина 1-го сорта и 30 т – 2-го сорта.

9. Инвестор предполагает вложить 1000 тыс. рублей в разные ценные бумаги. После консультаций со специалистами фондового рынка он отобрал четыре типа акций и три типа государственных облигаций. Часть денег предполагает положить на срочный вклад в банк. Из качественных соображений и личных предпочтений, инвестор выдвигает следующие требования к портфелю ценных бумаг:

- а) все 1000 тыс. руб. должны быть инвестированы;
- б) по крайней мере, 150 тыс. руб. должны быть на срочном вкладе в банке (не меньше);
- в) не менее 50% средств, инвестированных в акции, должны быть инвестированы в акции с низким риском;
- г) в облигации надо инвестировать средств не более, чем в акции;
- д) не более чем 200 тыс. руб. должно быть вложено в бумаги с доходом менее чем 9%.

Данные о предполагаемых доходах по ценным бумагам см. в таблице.

Таблица

Тип вложения	Риск	Предполагаемый ежегодный доход (%)
Акция А	высокий	17%
Акция В	средний	10%
Акция С	средний	8%
Акция D	низкий	7%
Долгосрочные облигации		5%
Краткосрочные облигации		3%
Срочный вклад		5%

Определить портфель бумаг инвестора, который удовлетворяет всем требованиям и максимизирует годовой доход.

10. Компания по сборке компьютеров предлагает три варианта стандартных комплектаций компьютеров. Рассчитаны средние затраты времени на сборку, проверку и подключение компьютеров. Каждый компьютер приносит определенный уровень прибыли, но спрос ограничен. Кроме того, в плановом периоде ограничен ресурс человеко-часов, отведенных на выполнение каждой производственной операции. Определить, сколько компьютеров каждого типа необходимо произвести в плановом периоде, имея целью максимизировать прибыль.

Тип компьютера	Прибыль, тыс.руб.	Максимальный спрос на товар	Требуется часов на подключение	Требуется часов на сборку	Требуется часов на проверку
1	50	85	0,9	1,2	0,5
2	60	60	1,1	1,5	1,0
3	75	105	1,3	2	1,5
Доступно человеко-часов	-	-	70	55	35

11. Мастерская по обработке дерева имеет в наличии доски длиной 10 м. Согласно договоренности мастерскаяставляет клиенту не менее 100 досок длиной 5 м, не менее 200 досок длиной 4 м и не менее 300 досок длиной 3 м. Как разрезать наименьшее количество досок, выполнив условия договора?

12. Торговая точка делает четыре вида фрешей, условно обозначенных 1, 2, 3, 4. Состав фрешей, цена за один фреш и спрос приведены в таблице. Один рабочий день составляет 8 часов. Какое количество и каких фрешей целесообразно делать, чтобы получить максимальную прибыль?

Таблица

Показатели	Фреш 1	Фреш 2	Фреш 3	Фреш 4	Фреш 5
Фрукты					
- яблоко		2		1	
- апельсин	1		1		
- грейпфрут	0,5		1		
- морковь		1			
- груша				2	1
- ананас	0,5				0,5
Время производства, мин	10	7	8	7	8
Прибыль на 1 фреш	45	25	30	27	33
Спрос на фреш, ед	50	45	55	47	40

13. Частный инвестор хочет получить максимальный доход от вложения 2 500 тыс.руб. в следующие финансовые инструменты:

- акции нефтегазовой компании с доходностью 13 % и средним риском,
- акции технологической компании с доходностью 17 % и высоким риском,
- долгосрочные облигации с доходностью 5 %,
- вклад с доходностью 4 %.

При этом инвестор опасается чрезмерно рисковать и считает, что оптимальный портфель должен отвечать следующим требованиям:

- а) инвестировать в ценные бумаги необходимо по крайней мере 80 % суммы, а остаток положить на вклад;
 - б) не менее 40% средств, инвестированных в акции, должны быть инвестированы в акции со средним риском;
 - в) в облигации надо инвестировать средств столько же, сколько в акции;
 - г) не более чем 500 тыс. руб. должно быть вложено в бумаги с доходом менее чем 10%.
- Определить портфель бумаг инвестора, который удовлетворяет всем требованиям и максимизирует годовой доход.

14. Компания выпускает два вида шкафов. Для изготовления шкафов обоих видов используется дерево и ДСП. Общий запас дерева – 6 000 ед, ДСП – 20 000 ед. На один шкаф первого вида расходуется 3 ед дерева и 1 ед ДСП, а на один шкаф второго вида расходуется 4 ед дерева и 2 ед ДСП. За каждый реализованный шкаф первого вида компания получает

прибыль \$40, второго – \$25. Составить план выпуска шкафов, обеспечивающих заводу максимальную прибыль.

15. Из двух сортов бензина образуется две смеси А и В. Смесь А содержит 60% бензина 1-го сорта и 40% – 2-го сорта, смесь В – 80% – 1-го сорта и 20% – 2-го сорта. Цена 1 кг смеси А – 10 у.д.е., а смеси В – 12 у. д. е. Составить план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если в наличии имеется 50 т бензина 1-го сорта и 30 т – 2-го сорта.

16. На заводе выпускают изделия четырех типов. От реализации единицы каждого изделия завод получает прибыль соответственно 2, 1, 3, 5 у. д. е. На изготовление изделий расходуются ресурсы трех типов – энергия, материалы, труд. В табл. приведены данные о технологическом процессе.

Таблица

Ресурсы	Затраты ресурсов на единицу изделия				Запасы ресурсов, ед.
	I	II	III	IV	
Энергия	2	3	1	2	30
Материалы	4	2	1	2	40
Труд	1	2	3	1	25

Спланировать производство изделий так, чтобы прибыль от их реализации была наибольшей.

17. Для полива различных участков сада, на которых растут сливы, яблони, груши, служат три колодца. Колодцы могут дать соответственно 180, 90 и 40 ведер воды. Участки сада требуют для полива соответственно 100, 120 и 90 ведер воды. Расстояния (в метрах) от колодцев до участков сада указаны в табл. Как лучше организовать полив?

Таблица

Колодцы	Участки		
	сливы	яблони	груши
1	10	5	12
2	23	28	33
3	43	40	39

18. Колхоз имеет возможность приобрести не более 19 трехтонных автомашин и не более 17 пятитонных. Отпускная цена трехтонного грузовика - 4000 руб., пятитонного - 5000 руб. Колхоз может выделить для приобретения автомашин 141 тысяча рублей. Сколько нужно приобрести автомашин, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной?

19. Компания производит полки для ванных комнат двух размеров - А и В. Агенты по продаже считают, что в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок. Для каждой полки типа А требуется 2 м² материала, а для полки типа В - 3 м² материала. Компания может получить до 1200 м² материала в неделю. Для изготовления одной полки типа А требуется 12 мин машинного времени, а для изготовления одной полки типа В - 30 мин; машину можно использовать 160 час в неделю. Если прибыль от продажи полок типа А составляет 3 денежных единицы, а от полок типа В - 4 ден. ед., то сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю?

20. Фирма "Компьютер-сервис" поставляет компьютеры под ключ четырех базовых комплектаций: «домашний», «игровой», «офисный» и «экстрим». Известны средние затраты времени на сборку, проверку и подключение компьютеров. Каждый компьютер приносит определенный уровень прибыли, но спрос ограничен. Кроме того, в плановом периоде ограничен ресурс человеко-часов, отведенных на выполнение каждой производственной операции. Определить, сколько компьютеров каждого типа необходимо произвести в плановом периоде, имея целью максимизировать прибыль.

2. Решить задачу линейного программирования с двумя независимыми переменными графическим методом (по вариантам).

1.

$$W = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \end{cases}$$

3.

$$W = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 1 \end{cases}$$

5.

$$W = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{cases}$$

7.

$$W = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \end{cases}$$

9.

$$W = 2x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 3 \\ x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 9 \end{cases}$$

2.

$$W = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x \leq 500 \\ x_1 \leq 400 \\ x_2 \leq 300 \end{cases}$$

4.

$$W = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 15 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 11 \end{cases}$$

6.

$$W = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 0,6 \\ 0,1x_1 + 0,4x_2 \leq 2 \end{cases}$$

8.

$$W = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 11 \\ x_1 \leq 2,75 \\ 3x_2 \leq 1,1 \end{cases}$$

10.

$$W = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 \leq 1 \\ -2x_1 + 24x_2 \leq 1 \end{cases}$$

11.

$$W = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \leq 17 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

13.

$$W = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \end{cases}$$

15.

$$W = 4x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ -5x_1 + 8x_2 \leq 4 \end{cases}$$

17.

$$W = x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \leq 7 \end{cases}$$

19.

$$W = 7x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 4 \\ x_2 \geq 5 \\ 3x_1 + x_2 \leq 16 \end{cases}$$

12.

$$W = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + 6x_2 \leq 7 \end{cases}$$

14.

$$W = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 15x_2 \leq 32 \\ x_1 \leq 31 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

16.

$$W = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 7 \\ -2x_1 + 9x_2 \leq 21 \end{cases}$$

18.

$$W = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 7 \\ -2x_1 + 9x_2 \leq 21 \end{cases}$$

20.

$$W = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 8 \\ -3x_1 + 8x_2 \leq 4 \end{cases}$$

3. Рассчитать характеристики одноканальной системы массового обслуживания (по вариантам).

На пункт техосмотра поступает простейший поток заявок (автомобилей) заданной интенсивности . Время осмотра распределено по показательному закону, очередь ограничена. Определить вероятностные характеристики пункта техосмотра в установившемся режиме (по вариантам).

Таблица – Характеристики одноканальной СМО

Характеристики СМО	№ варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Интенсивность потока заявок, а/м в час	4	5	6	7	5	4	3	5	2	3
Среднее время осмотра 1 автомобиля	17	15	11	15	15	20	30	20	40	25
Число автомобилей в очереди	5	7	7	8	6	5	7	6	10	8

4. Выбрать оптимальное решение в условиях неопределенности по критериям Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица (по вариантам).

Варианты 1 – 10: представлена платежная матрица (матрица доходов). Вероятности состояний природы неизвестны.

1 вариант

15	12	1	-3	18	20
2	15	9	7	1	3
0	6	15	21	-2	5
8	20	12	3	0	4.

2 вариант

12	14	5	4	10	11
3	20	14	25	1	3
5	6	10	21	3	2
4	2	11	23	4	5

3 вариант

2	4	5	6	11
3	3	1	12	1
5	6	10	19	3
1	2	13	15	4

4 вариант

5	4	4	6	11
3	11	6	10	1
6	9	10	11	3

5 вариант

15	11	5	4	10	12
5	20	14	25	2	3
1	6	26	21	3	4
7	8	12	23	5	5

6 вариант

2	12	6	1	10	12
5	19	14	5	2	3
1	16	2	17	3	4

7 вариант

13	1	10	8
6	15	17	3
8	3	19	2
7	9	1	5

8 вариант

1	3	10	5
2	5	7	1
3	4	9	10
7	9	2	5

9 вариант

2	14	1	4	11	9
3	5	13	8	9	1
5	6	10	2	3	2

	4	2	11	7	4	6
--	---	---	----	---	---	---

10 вариант

4	2	3	5	8	9
3	5	4	7	5	1
1	7	12	2	3	3
5	2	13	7	4	5

Варианты 11 – 20: при выборе стратегии каждому возможному состоянию природы соответствует один результат (исход). Элементы , являющиеся мерой потерь в у.е. при принятии решения

11 вариант

Стратегии	Состояния природы			
	2	6	5	8
R_2	3	9	1	4
	5	1	6	2

12 вариант

Стратегии	Состояния природы			
	2	6	5	8
R_2	3	9	1	4
	5	1	6	2
R_4	6	10	0	1

13 вариант

Стратегии	Состояния природы			
	2	7	5	1
R_2	0	1	0	4
	5	3	6	0
R_4	6	4	10	1

14 вариант

Стратегии	Состояния природы			
	0	7	5	15
R_2	5	0	12	4
	11	3	0	0

15 вариант

Стратегии	Состояния природы			
	6	7	5	15
R_2	0	8	2	2
	10	4	1	0

16 вариант

Стратегии	Состояния природы			
	1	7	6	11
R_2	4	8	1	4
	3	2	7	2

17 вариант

Стратегии	Состояния природы			
	10	7	7	3
R_2	11	8	5	14
	12	3	8	2

18 вариант

Стратегии	Состояния природы			
	1	0	5	3
R_2	2	3	0	10
	3	4	7	2

19 вариант

Стратегии	Состояния природы			
	10	11	15	30
R_2	20	30	10	10
	30	40	45	20

20 вариант

Стратегии	Состояния природы			
	1	1	15	30
R_2	20	3	10	12
	3	40	4	2

Критерии оценивания работы. Порядок защиты работы

Оценка «отлично» выставляется студенту, если студент самостоятельно выполнил все задания и сформулировал выводы.

Знает: виды управленческих решений и методы их принятия; основные математические методы и модели принятия решений; методы принятия решений в условиях определенности; методы принятия решений в условиях риска; методы принятия решений в условиях неопределенности; теорию игр; экспертные методы принятия решений; моделирование непрерывных процессов при обосновании решений; моделирование систем массового обслуживания при выработке управленческих решений; методы оценки эффективности управленческих решений.

Умеет: осуществлять принятие решений в условиях определенности; осуществлять принятие решений в условиях риска; осуществлять принятие решений в условиях неопределенности; проводить анализ ситуации с помощью экспертных методов; моделировать непрерывные процессы и системы массового обслуживания при принятии решений; оценивать эффективность принятых решений.

Владеет: навыками принятия решений в условиях определенности; навыками принятия решений в условиях риска; навыками принятия решений в условиях неопределенности; умением моделировать внешнюю и внутреннюю среду организации; инструментарием экспертных оценок; инструментами оценки эффективности принятых решений.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если студент самостоятельно выполнил все задания работы, но не представил выводов.

Знает: виды управленческих решений и методы их принятия; основные математические методы и модели принятия решений; методы принятия решений в условиях определенности; методы принятия решений в условиях риска; методы принятия решений в условиях неопределенности; теорию игр; экспертные методы принятия решений; моделирование систем массового обслуживания при выработке управленческих решений.

Умеет: осуществлять принятие решений в условиях определенности; осуществлять принятие решений в условиях риска; осуществлять принятие решений в условиях неопределенности; проводить анализ ситуации с помощью экспертных методов; моделировать непрерывные процессы и системы массового обслуживания при принятии решений.

Владеет: навыками принятия решений в условиях определенности; навыками принятия решений в условиях риска; навыками принятия решений в условиях неопределенности; умением моделировать внешнюю и внутреннюю среду организации; инструментарием экспертных оценок.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если студент самостоятельно выполнил часть заданий (не менее половины) без выводов контрольной работы.

Знает: виды управленческих решений и методы их принятия; основные математические методы и модели принятия решений; методы принятия решений в условиях определенности; методы принятия решений в условиях риска; методы принятия решений в условиях неопределенности; теорию игр; моделирование систем массового обслуживания при выработке управленческих решений.

Умеет: осуществлять принятие решений в условиях определенности; осуществлять принятие решений в условиях риска; осуществлять принятие решений в условиях неопределенности; моделировать непрерывные процессы и системы массового обслуживания при принятии решений.

Владеет: навыками принятия решений в условиях определенности; навыками принятия решений в условиях риска; навыками принятия решений в условиях неопределенности.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если студент не выполняет контрольную работу.

Список рекомендуемой литературы

Основная литература	1. Покровский В.В. Математические методы в бизнесе и менеджменте [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Покровский В.В. – Электронные текстовые данные. - Москва: Лаборатория знаний, 2020. - 111 с. 2. Бережная, Е. В. Методы и модели принятия управленческих решений: учебное пособие: [для студентов вузов, обучающихся по напр. подготовки 38.03.02 (080200.62) "Менеджмент" (квалификация (степень) "бакалавр")] / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. - Москва: ИНФРА-М, 2017. - 384 с.: ил., табл. - (Высшее образование. Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-006914-2, экземпляров неограничено
Дополнительная литература	3. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Финансы и статистика, 2006. - 432 с: ил. 4. Новиков А.И. Экономико-математические методы и модели [Электронный ресурс]: учебник для бакалавров / Новиков А.И. - Электронные текстовые данные. - Москва: Дашков и К, 2018. - 532 с. 5. Экономико-математические методы и прикладные модели [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов / В.В. Федосеев [и др.]. - Электронные текстовые данные. - Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2017. - 302 с.