

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению лабораторных работ по дисциплине

«ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ»

для студентов направления подготовки

15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных
производств

направленность (профиль) «Технология машиностроения»

Ставрополь, 2026

Данные методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Основы прикладной механики» предназначены для бакалавров направления подготовки 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств».

В методических указаниях определена цель лабораторных работ и приведен теоретический материал, необходимый студентам для выполнения поставленных перед ними задач. Дано описание применяемой аппаратуры и материалов, а также методика и порядок выполнения работ, указания по технике безопасности. Изложены требования к содержанию и форме отчётов. Даны вопросы для защиты лабораторных работ. Приведен список необходимой литературы.

Составитель: к.т.н., доцент. В. Г. Терещенко.

Рецензент: д.т.н., проф. В. Г. Копченков.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	100
Указания по технике безопасности	101
Лабораторная работа 1. СТРОЕНИЕ МЕХАНИЗМОВ. (4 академических часа)	102
Лабораторная работа 2. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ. (4 академических часа)	110
Лабораторная работа 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТЕЛА. (4 академических часа)	118
Лабораторная работа 4. РАВНОВЕСИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ. (4 академических часа)	138
Лабораторная работа 5. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ (2 академических часа)	146

Лабораторные работы по дисциплине «основы прикладной механики» проводят в процессе изучения данной дисциплины студентами направления подготовки 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств очной формы обучения. Количество лабораторных работ и время, отведенное на их выполнение, предусмотрено соответствующей рабочей программой.

Лабораторные работы проводят в специально оборудованных аудиториях. К выполнению работ студенты допускаются при наличии конспекта лекций, чертежных принадлежностей и инженерного калькулятора. По окончании экспериментов студенты выполняют все необходимые расчеты и оформляют отчет к лабораторной работе в соответствии с требованиями, изложенными в данных методических указаниях.

Защита лабораторных работ проводится при наличии правильно оформленного отчета в устной форме или в форме тестирования.

Указания по технике безопасности

Студенты допускаются к выполнению работ только после прохождения инструктажа по технике безопасности, запись о котором производят в журнале по ТБ. Экспериментальная часть лабораторных работ проводится под руководством преподавателя и сотрудника кафедры, ответственного за технику безопасности.

При выполнении лабораторной работы студенты должны соблюдать правила техники безопасности в соответствии с инструктажем на рабочем месте, проводимым ответственным сотрудником кафедры.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1

СТРОЕНИЕ МЕХАНИЗМОВ

Цель работы: Изучение структуры рычажных механизмов, классификации кинематических пар и звеньев.

Теоретическое обоснование

Твердые тела, из которых образуется механизм, называют **звеньями**. Звено – либо одна деталь, либо совокупность нескольких деталей, жёстко соединённых между собой. Неподвижное звено механизма для краткости называют **стойкой**; понятие неподвижности стойки для механизмов транспортных машин, в частности летательных аппаратов, – условное, поскольку в этом случае сама стойка движется. Звеньям дают названия по характеру движения, которое они совершают.

Кривошип – звено, вращающееся на полный оборот вокруг оси, жёстко связанной со стойкой.

Коромысло – звено, делающее неполный оборот вокруг оси, жёстко связанной со стойкой.

Ползун – звено, совершающее поступательное прямолинейное движение.

Шатун – звено, соединённое вращательными парами с подвижными звеньями.

Кулиса – поворачивающееся вокруг неподвижной оси звено, которое образует с другим подвижным звеном поступательную пару (является направляющей).

Кулисный камень – ползун, скользящий по пазу кулисы.

По названию звеньев обычно называется и механизм, например: кривошипно-ползунный, кулисно-коромысловый.

Свободное тело имеет число степеней свободы $H=6$, т.е. шесть возможных независимых движений. Их можно представить как изменения трёх независимых координат точки тела, выбранной в качестве полюса, и трёх углов независимых поворотов тела вокруг полюса (рис. 1.1).

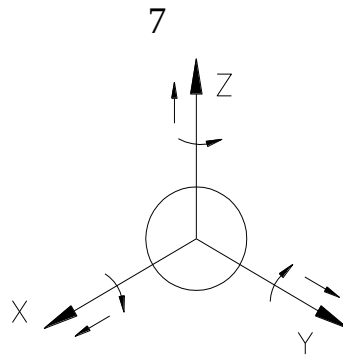


Рисунок 1.1 – Возможные независимые движения твёрдого тела

Кинематической парой (сокращенно – *парой*) называют подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев (рисунок 1.2).

Всякое ограничение движений называется условием связи. Совокупность поверхностей, линий и точек звена, входящих в соприкосновение (контакт) с другим звеном пары, называют **элементом** пары.

Классификация кинематических пар

Пару называют **низшей**, если элементы звеньев соприкасаются только по поверхности, и **высшей**, если только по линиям или в точках. При этом линейный или точечный контакт понимается как первоначальный — при соприкосновении звеньев без усилия, — а под нагрузкой звенья, образующие высшую пару, будут соприкасаться по некоторой фактической поверхности, называемой пятном контакта.

Кинематические пары классифицируют по числу **H степеней свободы** в относительном движении звеньев (подвижность пары) и по числу **S условий связи** (ограничений), накладываемых парой на движение одного звена относительно другого. При этом предполагается, что все связи — геометрические, налагающие ограничения только на координаты точек звена, входящего в кинематическую пару, в его относительном движении.

Так как для свободного тела в пространстве число степеней свободы равно шести, то величины H и S связаны соотношением: **$H=6-S$** , где $S=1,2,3,4$ или 5 . При $S=0$ пары не существует, а имеются два тела, движущихся независимо друг от друга; при $S=6$ кинематическая пара становится жестким соединением деталей, т. е. одним звеном. По величине S определяют **класс**

кинематической пары: различают одноподвижные пары (V класса, $H=1$, $S=5$), двухподвижные (IV класса, $H=2$, $S=4$), трехподвижные (III класса, $H=3$, $S=3$), четырехподвижные (II класса, $H=4$, $S=2$) и пятиподвижные (I класса, $H=5$, $S=1$).

Систему звеньев, образующих между собой кинематические пары, называют **кинематической цепью**. Различают замкнутые и незамкнутые кинематические цепи. В **замкнутой** цепи каждое звено входит не менее чем в две кинематические пары, в **незамкнутой** цепи есть звенья, входящие только в одну кинематическую пару.

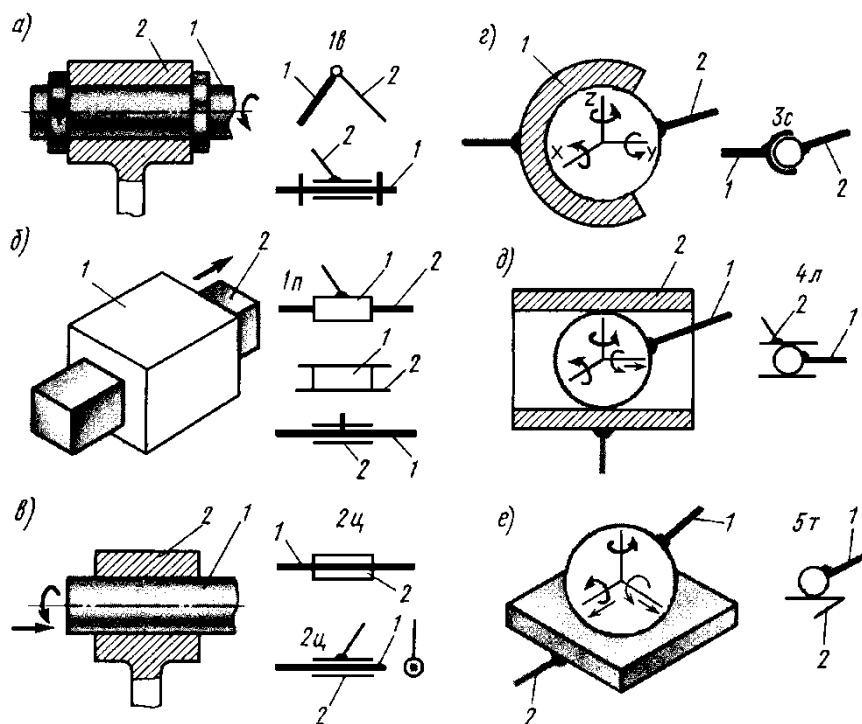


Рисунок 1.2 – Схемы кинематических пар: а) – вращательная, одноподвижная, низшая, замкнутая геометрически; б) – поступательная, одноподвижная, низшая, замкнутая геометрически; в) – цилиндрическая, двухподвижная, низшая, замкнутая геометрически, допускает независимые вращательное и поступательное движения; г) – сферическая, трёхподвижная, допускает три независимых относительных вращения звеньев вокруг осей x , y , z , низшая, с геометрическим замыканием; д) – четырёхподвижная, высшая, замкнутая геометрически; е) – пятиподвижная, высшая пара с силовым замыканием.

Простой кинематической цепью называется такая кинематическая цепь, у которой каждое звено входит не более чем в две кинематических пары. **Сложной** – более чем в две.

Все подвижные звенья **плоской** кинематической цепи совершают движения, параллельные одной и той же неподвижной плоскости.

Применяя термин «кинематическая цепь», можно дать следующее определение механизма: **механизм** — кинематическая цепь, в которой при одном неподвижном звене (стойке) и заданном движении одного или нескольких звеньев (ведущих) все остальные звенья (ведомые) совершают однозначно определённые движения. *Выходным* (исполнительным) называют звено, совершающее движение, для которого предназначен механизм.

Рычажными называют механизмы, в которые входят жёсткие звенья, соединённые между собой при помощи шарниров и ползунов с направляющими. **Плоские рычажные механизмы** образованы при помощи только вращательных и поступательных пар.

Пусть в механизме имеется k звеньев (включая стойку). Число подвижных звеньев обозначим $n=k-1$. Если бы все подвижные звенья были свободными телами (относительно стойки), общее число степеней свободы их относительно стойки было бы равно $6n$. Однако каждая пара V класса накладывает на относительное движение звеньев, образующих пару, 5 связей, каждая пара IV класса – 4 связи, III – 3, II – 2, I – 1.

Поэтому число степеней свободы пространственного механизма, равное числу степеней свободы его подвижной кинематической цепи относительно стойки, определяется по следующей формуле Малышева:

$$W=6n-5p_5-4p_4-3p_3-2p_2-p_1, \quad (1.1)$$

где p_5 – число пар V класса в кинематической цепи, p_4 – число пар IV класса, p_3 – число пар III класса, p_2 – число пар II класса, p_1 – число пар I класса.

В общее число наложенных связей может войти некоторое число q избыточных (повторных) связей, которые дублируют другие связи, не уменьшая подвижности механизма, а только обращая его в статически неопределимую систему. С учётом избыточных связей формула (1.1) принимает вид

$$W=6n-5p_5-4p_4-3p_3-2p_2-p_1+q. \quad (1.2)$$

Если избыточных связей нет ($q=0$), механизм – статически определимая система. Сборка механизма происходит без деформирования звеньев, последние как бы самоустанавливаются; поэтому такие механизмы называют самоустанавливающимися. Если избыточные связи есть ($q>0$) то механизм — статически неопределимая система. Сборка механизма и движение его звеньев становятся возможными только при деформировании последних (или при наличии зазоров в кинематических парах). Формула (1.2) впервые, в несколько ином виде, была дана П.И. Сомовым в 1887 г. и развита А.П. Малышевым в 1923 г. и носит название формулы Сомова–Малышева.

На относительное движение всех звеньев плоского механизма наложено 3 условия связи. Число степеней свободы плоского механизма, т. е. число степеней свободы его подвижной кинематической цепи относительно стойки, определяется по следующей формуле Чебышева (1869 г.):

$$W_{\pi}=3n-2p_5-p_4. \quad (1.3)$$

Т.к. $p_5 = p_n$ – число низших пар, $p_4 = p_v$ – число высших пар, и учитывая избыточные связи получаем

$$W_{\pi}=3n-(2p_n+p_v-q_n). \quad (1.4)$$

Проанализируем влияние подвижности на характер движения звеньев в механизме.

Если $W=0$, то звенья механизма, не имеют возможности двигаться, (имеем неподвижную ферму).

Если $W=1$, то необходимо одно ведущее звено, закон движения которого задан. Это позволит рассчитать движение остальных звеньев.

Если $W=2$, то при одном ведущем звене 1, движение других звеньев непредсказуемо. Они могут двигаться в произвольном направлении. Необходимо два ведущих звена, чтобы однозначно определить движение всех остальных звеньев, иначе механизм является кинематически неопределимым.

Аппаратура и материалы: Модели рычажных механизмов.

Пример выполнения работы

Дано: модель рычажного механизма.

Требуется: изобразить структурную схему механизма, обозначить на ней все звенья и кинематические пары, классифицировать звенья и кинематические пары, определить число степеней свободы механизма как плоского и как пространственного.

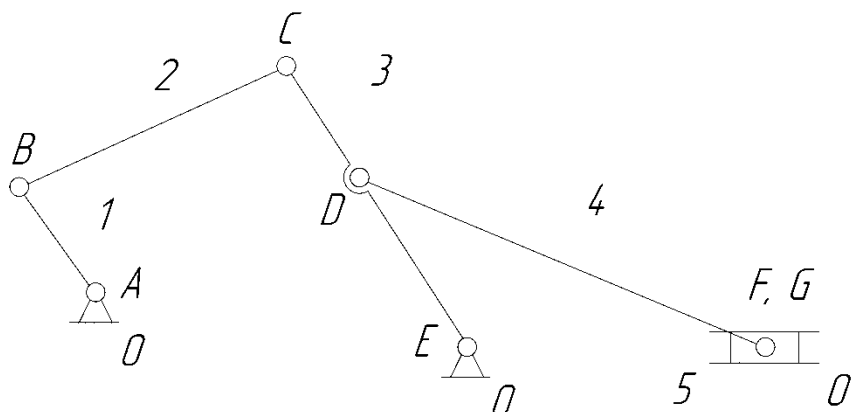
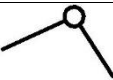
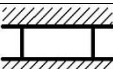


Рисунок 1.3 – Структурная схема кривошипно-коромыслового механизма.

1. Обозначаем все звенья цифрами. Стойку обозначаем нулём, ведущее звено – кривошип обозначаем единицей. (Рисунок 1.3).
2. Называем звенья механизма по характеру их движения: 0 – стойка; 1 – кривошип; 2 – шатун; 3 – коромысло; 4 – шатун; 5 – ползун.
3. Обозначаем кинематические пары буквами алфавита. (Рисунок 1.3).
4. Классифицируем кинематические пары. Результаты сводим в таблицу. (Таблица 1.1). Вид движения в парах рычажных механизмов может быть вращательным или поступательным.

Таблица 1.1 – Классификация кинематических пар механизма.

№ п/п	Обозначение	Звенья	Изображение к.п.	Класс	Вид движения
1	A	0; 1		5	вр.

2	B	1; 2		5	вр.
3	C	2; 3		5	вр.
4	D	3; 4		5	вр.
5	E	0; 3		5	вр.
6	F	4; 5		5	вр.
7	G	5; 0		5	пост.

5. Число степеней свободы данного плоского механизма без избыточных связей определяем по формуле (1.4):

$$W_{\Pi} = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$$

6. С учётом неточности изготовления этот механизм рассмотрим как пространственный. Определим число избыточных связей по формуле (1.2), при условии, что механизм имеет одну степень свободы.

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 + q$$

$$q = W - 6n + 5p_5 + 4p_4 + 3p_3 + 2p_2 + p_1 = 1 - 6 \cdot 5 + 5 \cdot 7 = 6.$$

Механизм 6 раз статически неопределимый. Избыточные связи требуют повышенной точности изготовления механизма.

Задание

1. Изобразить структурную схему заданного механизма.
2. Пронумеровать звенья, обозначив стойку нулевым звеном, входное звено - первым.
3. Назвать звенья механизма по характеру их движения.
4. Обозначить кинематические пары заглавными буквами, учитывая, что кинематическая пара – это подвижное соединение только двух звеньев.

5. Заполнить таблицу классификации кинематических пар механизма, где указать соединяемые звенья, условное изображение кинематической пары, её класс и вид движения.

6. Определить число степеней свободы механизма по формуле Чебышева.

7. Определить число избыточных связей по формуле Сомова-Малышева, при условии, что механизм имеет одну степень свободы.

Вопросы для защиты работы

1. Что называется кинематической парой?
2. Что называется классом кинематической пары?
3. Что называется кинематической цепью?
4. Сколько степеней свободы может иметь кинематическая пара?

Рекомендуемая литература

1. Хибник, Т. А. Вопросы теоретической механики и теории механизмов и машин в курсе «Прикладная механика» : учебное пособие / Т. А. Хибник, И. С. Барманов. — Самара : Самарский университет, 2022. — 80 с. — ISBN 978-5-7883-1833-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/336788>
2. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87388.html> - DOI: <https://doi.org/10.23682/87388>

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

Цель работы: Изучение структурных групп рычажных механизмов и способа устранения избыточных связей в кинематических парах.

Теоретическое обоснование

Структурная группа – кинематическая цепь, присоединение которой к механизму не изменяет числа его степеней свободы и которая не распадается на более простые кинематические цепи с нулевой степенью свободы. Таким образом, структурная группа (группа Ассура) обладает нулевой подвижностью относительно тех звеньев, к которым группа присоединяется.

Определим количественное соотношение звеньев и кинематических пар в структурной группе для плоских механизмов.

$$W_{III} = 3n - 2p_5 - p_4 = 0. \quad (2.1)$$

В случае плоских рычажных механизмов без кинематических пар 4-го класса, (которые заменяются парами пятого класса), имеем:

$$W_{III} = 3n - 2p_5 = 0; \quad (2.2)$$

$$3n - 2p_5 = 0;$$

$$p_5 = \frac{3n}{2} \quad \text{или} \quad \frac{p_5}{3} = \frac{n}{2}.$$

Т.е. в структурной группе количество кинематических пар в 1,5 раза больше количества звеньев. Учитывая, что p_5 и n могут быть только целыми числами, данное соотношение представлено ниже в виде таблицы.

Таблица 2.1 – Условия образования структурных групп.

n	2	4	6	8	
p_5	3	6	9	12	

Примеры структурных групп приведены на рисунке 2.1. Для схем *а)* и *б)*, по формуле (1) получаем:

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0, \quad \text{где } n = 4, p_5 = 6$$

Для схем *в), з)* и *д)*:

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0, \quad \text{где } n = 2, p_5 = 3$$

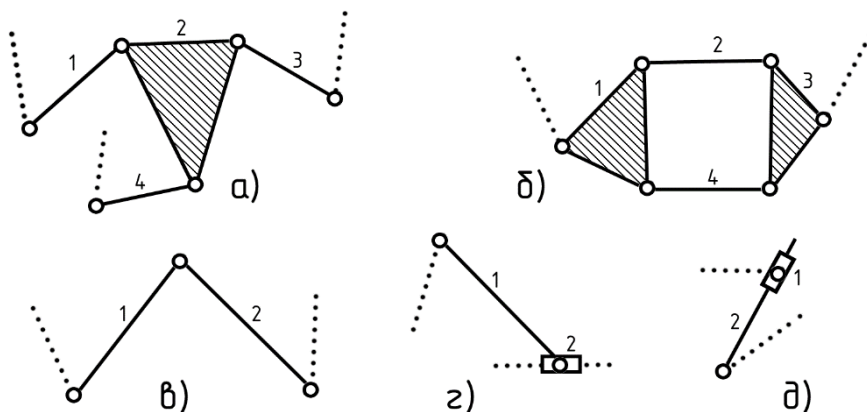


Рисунок 2.1 – Примеры структурных групп (свернутые схемы) : а) 3 класс, 3 порядок; б) 4 класс, 2 порядок; в)-д) 2 класс, 2 порядок

Класс структурной группы (по И. И. Артоболевскому) определяется числом кинематических пар, образующих наиболее сложный замкнутый контур группы. По этой аналогии, несмотря на то, что нет такого понятия «двуугольник», структурные группы, приведенные на рисунке 2.1в–д (а также любые другие, состоящие из двух звеньев), относят ко 2 классу.

Порядок структурной группы определяется числом элементов звеньев, которыми она присоединяется к имеющемуся механизму (т. е. числом её внешних (незавершённых) кинематических пар). На рисунке 2.1 звенья, не принадлежащие данной структурной группе, показаны пунктиром. Структурная группа на рисунке 1а имеет 3 порядок, а структурные группы на рисунке 1б–д имеют 2 порядок. Вообще все структурные группы 2 класса имеют 2 порядок, поэтому такие структурные группы классифицируются по видам.

Вид структурной группы 2 класса определяется расположением вращательных (В) и поступательных (П) кинематических пар 5 класса (рисунок 2.2).

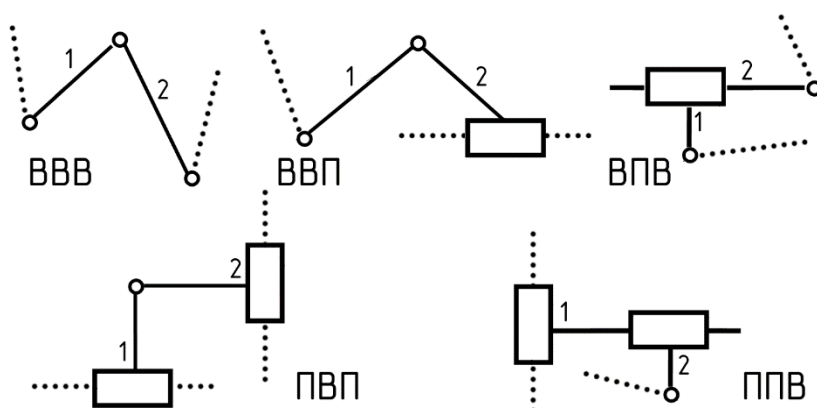


Рисунок 2.2 – Виды структурных групп второго класса и второго порядка (развернутые схемы): BVB-1, BVP-2, VPB-3, PVP-4, PPB-5

Первичный механизм (по И. И. Артоблевскому – механизм I класса, начальный механизм), представляет собой простейший двухзвенный механизм, состоящий из подвижного звена и стойки. Эти звенья образуют либо вращательную кинематическую пару «кривошип – стойка» (рисунок 2.3, а), либо поступательную пару «ползун – направляющие» (рисунок 2.3, б). Начальный механизм имеет одну степень подвижности. Число первичных механизмов равно числу степеней свободы механизма.

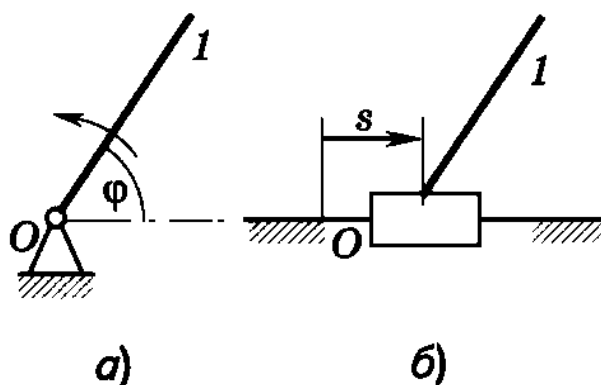


Рисунок 2.3 – Первичные механизмы:

а) обобщённая координата – угловая координата φ ;

б) обобщённая координата – прямолинейная координата s .

Анализ механизмов заключается в разделении (расчленении) механизма на структурные группы (рисунок 2.4). Рекомендуется отделение групп начинать со звеньев, наиболее удалённых от ведущего звена. В первую очередь отделяются группы Ассура наиболее низкого класса. Каждое звено и каждая кинематическая пара могут входить только в одну структурную группу. Разделение кинематической цепи механизма на группы Ассура ведётся до тех пор, пока не останутся только начальные механизмы.

Класс механизма определяется наивысшим классом входящей в него структурной группы; при структурном анализе заданного механизма класс его зависит и от выбора первичных механизмов.

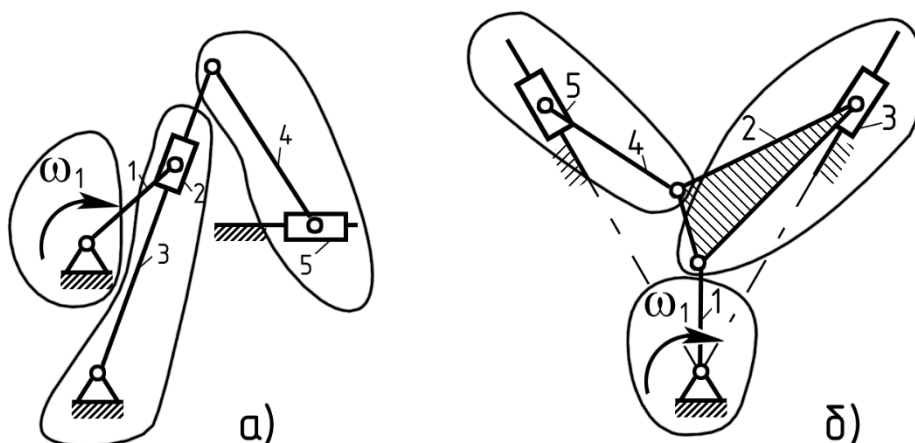


Рисунок 2.4 – Примеры расчленения: а) кулисного механизма строгального станка, б) V-образного двигателя внутреннего сгорания

Правило образования механизмов (принцип Ассура). Любой механизм образуется последовательным присоединением к ведущему звену и стойке любого количества структурных групп. Процесс образования называется **синтезом механизма** (рисунок 2.5). Первая группа присоединяется к первичному механизму, каждая последующая – к полученному механизму, при этом нельзя присоединять группу к одному звену.

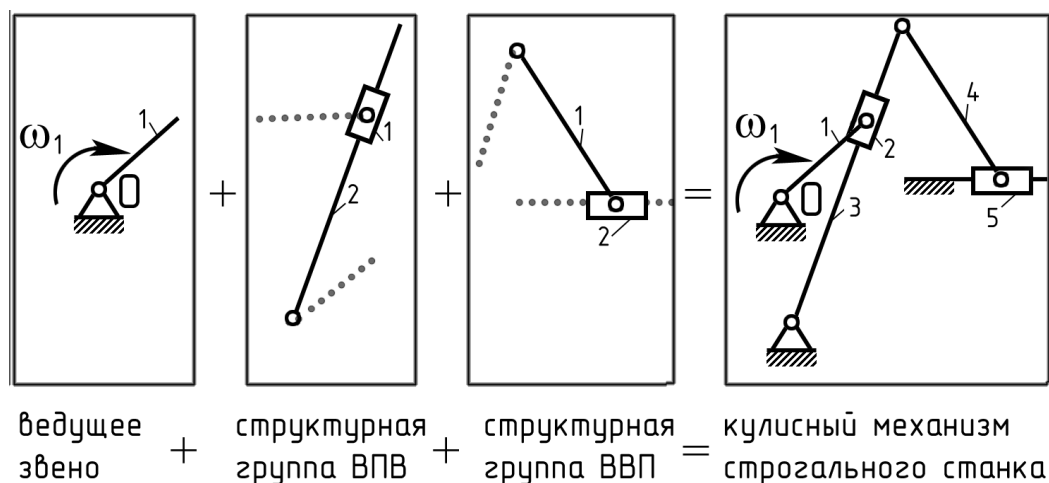


Рисунок 2.5 – Пример синтеза механизма

Структурный синтез плоских механизмов следует проводить, применяя метод Ассура, который обеспечивает статически-определимую плоскую схему механизма ($q_{\text{п}}=0$), и формулу Малышева, поскольку вследствие неточностей изготовления плоский механизм в какой-то мере получается пространственным.

Аппаратура и материалы: Модели рычажных механизмов.

Пример выполнения работы

Дано: Структурная схема механизма (продолжаем изучать механизм, приведённый в примере предыдущего занятия).

Требуется разделить механизм на структурные группы, определить их класс, порядок и вид. С учётом возможной неточности изготовления рассмотреть этот механизм как пространственный. Предложить структурную схему этого пространственного механизма, лишённую избыточных связей. Записать формулу для числа степеней свободы пространственного механизма.

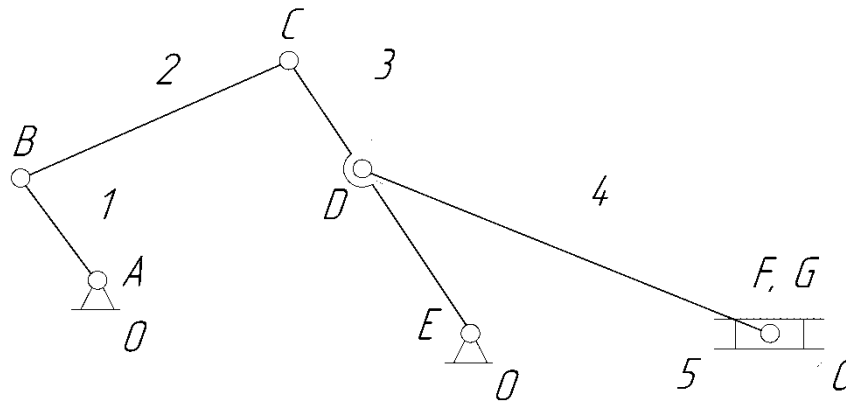


Рисунок 2.6 – Ведомая цепь разделена на две группы Асура 2-го класса.

1. Выделяем на структурной схеме структурные группы (рисунок 2.6) и проводим их классификацию. Результаты сводим в таблицу.

Таблица 2.1 – Классификация структурных групп механизма.

№ п/п	Звенья	Кинемат. пары	Изображение с.г.	Класс	Вид
1	0, 1	A		Условный механизм 1-го класса.	
2	2, 3	B, C, E		2	1 BBB
3	4, 5	D, F, G		2	2 BBП

2. Предлагаем структурную схему этого механизма, лишённую избыточных связей (рисунок 2.7). Вращательные пары пятого класса C и D заменяем

цилиндрическими парами четвёртого класса. Вращательные пары пятого класса В и F заменяем сферическими парами третьего класса.

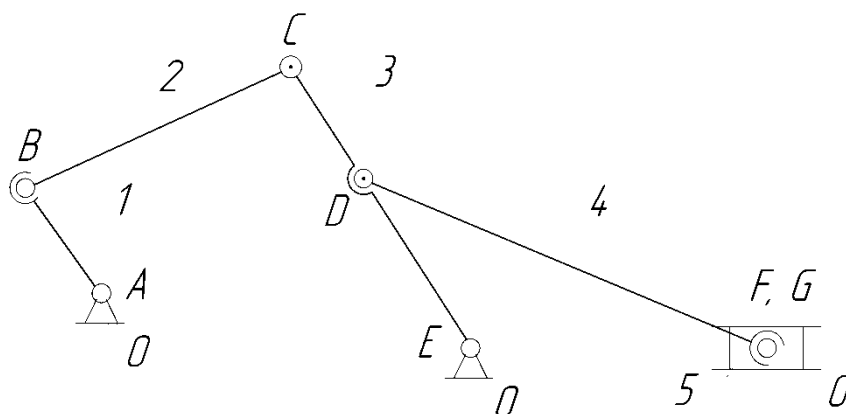


Рисунок 2.7 – Структурная схема пространственного механизма без избыточных связей

3. Записываем формулу для числа степеней свободы пространственного механизма

$$W=6n-5p_5-4p_4-3p_3-2p_2-p_1=6\cdot5-5\cdot3-4\cdot2-3\cdot2=1$$

Сборка такого механизма происходит без деформации звеньев.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется структурной группой.
2. Что называется классом (порядком, видом) структурной группы.

ЗАДАНИЕ

Для механизма, заданного преподавателем, определить структурные группы, их класс, порядок и вид. С учётом возможной неточности изготовления рассмотреть этот механизм как пространственный. Предложить структурную схему этого пространственного механизма, лишённую избыточных связей. Записать формулу для числа степеней свободы пространственного механизма.

Рекомендуемая литература

1. Хибник, Т. А. Вопросы теоретической механики и теории механизмов и машин в курсе «Прикладная механика» : учебное пособие / Т. А. Хибник, И. С. Барманов. — Самара : Самарский университет, 2022. — 80 с. — ISBN 978-5-7883-1833-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/336788>
2. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87388.html> - DOI: <https://doi.org/10.23682/87388>

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТЕЛА

Цель работы: получение навыков составления уравнений равновесия.

Теоретическая часть

Направления реакций некоторых видов связей

1. Шарнирная неподвижная опора (цилиндрический шарнир, подшипник). Одно тело может вращаться относительно другого вокруг общей оси, называемой *осью шарнира* (например, как две половины ножниц). Если тело AB прикреплено с помощью такого шарнира к неподвижной опоре D (рис. 3.1, *а*), то точка A тела не может при этом переместиться ни по какому направлению, перпендикулярному оси шарнира. Следовательно, реакция $\bar{R}$ цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, т.е. в плоскости Axy . Для силы $\bar{R}$ в этом случае наперёд неизвестны ни её модуль R , ни направление (угол α). Часто реакцию $\bar{R}$ заменяют её составляющими по осям x и y , как на рис. 3.1, *б*, где шарнир A неподвижно закреплён при помощи двух стержней на шарнирах.

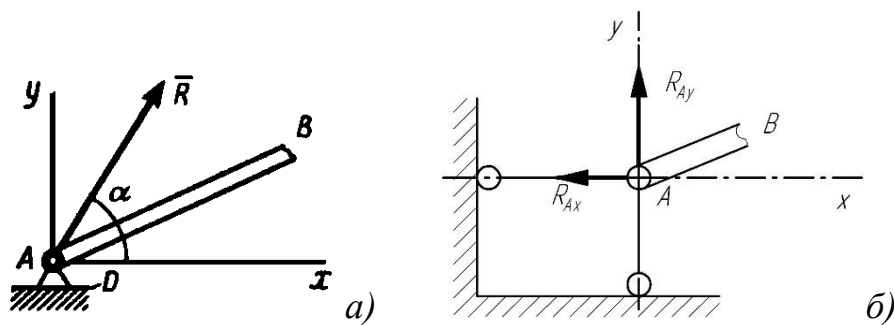


Рисунок 3.1 – Реакция неподвижного шарнира

2. Подвижный шарнир. Стержень, закреплённый на шарнире, может поворачиваться вокруг шарнира, а точка крепления может перемещаться вдоль направляющей. Реакция подвижного шарнира направлена перпендикулярно опорной поверхности, т.к. не допускается только перемещение поперёк опорной поверхности.

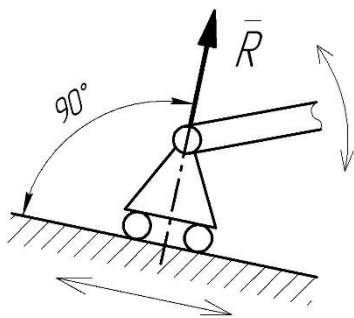


Рис. 3.2 – Реакция подвижного шарнира

3. Невесомый стержень на двух шарнирах. Невесомым называют такой стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой, можно пренебречь. Пусть для находящегося в равновесии тела такой стержень, прикрепленный в точках A и B шарнирами, является связью (примеры на рис. 3.3 a и b). Тогда на стержень будут действовать только две силы, приложенные в точках A и B . При равновесии эти силы должны быть направлены вдоль одной прямой, т.е. вдоль AB . Но тогда согласно закону о действии и противодействии стержень будет действовать на тело с силой, тоже направленной вдоль AB . Следовательно, *реакция $\bar{N}$ невесомого шарнирно прикрепленного стержня направлена вдоль прямой, соединяющей шарниры*. При этом стержень может быть прямым или кривым, сжатым или растянутым.

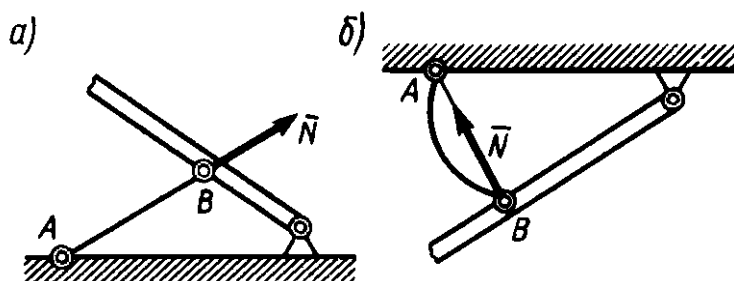


Рисунок 3.3 – Связи в виде невесомых стержней: прямого растянутого (a) и криволинейного сжатого (b)

4. Направляющая позволяет только прямолинейное движение вдоль своей оси. Создаёт силу реакции в направлении, перпендикулярном оси, и момент реакции (в плоской системе сил). (Рис. 3.4, a .) Если одна направляющая установлена на другой направляющей, то тело может перемещаться в плоскости как угодно, но не может поворачиваться. (Рис. 3.4, b .) В такой опоре имеется реакция в виде момента.

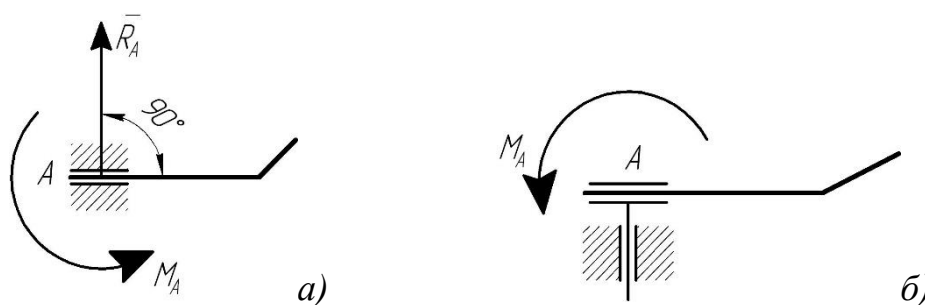


Рисунок 3.4 – Реакции направляющих: а) – одиночной и б) – сдвоенной

5. **Жёсткая заделка** (рисунок 3.5, а,б). Даже одна жёсткая заделка обеспечивает равновесие тела при любых видах нагрузок. Сила реакции заделки $\bar{R}$ может иметь любое направление, поэтому обычно определяют составляющие R_x, R_y, R_z . (на рисунке 3.5, а они обозначены $\bar{X}_3, \bar{Y}_3$ и $\bar{Z}_3$) Кроме того, жёсткая заделка препятствует повороту тела, поэтому на тело действует момент заделки $\bar{M}_3$. Его, как мы увидим далее, тоже можно представить как сумму моментов M_x, M_y, M_z . В случае действия плоской системы сил возникают две составляющие реакции (на рисунке 3.5, б они обозначены $\bar{X}_3$ и $\bar{Y}_3$) и момент заделки в плоскости действия сил (на рисунке 3.5, б он обозначен M_3).

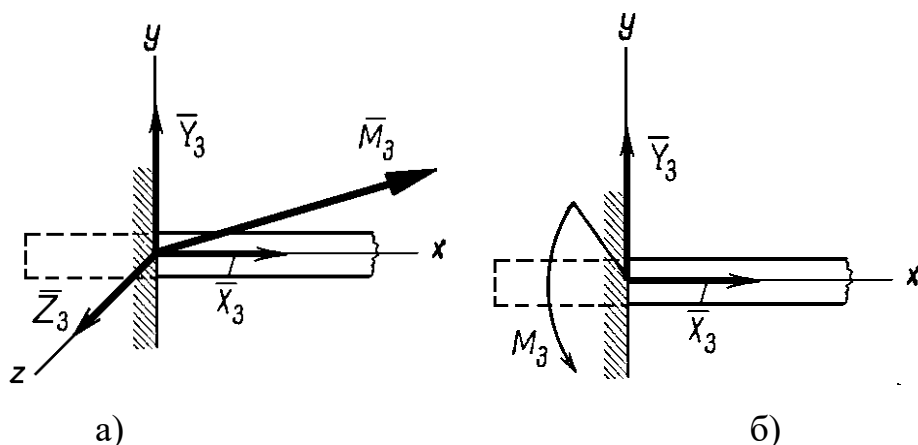


Рисунок 3.5 – Реакции заделки в пространственной (а) и плоской (б) системе сил

Аксиома связей, или принцип освобождения от связей. *Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно*

освободить от связей, заменив их действие соответствующими силами реакций связей.

Аксиома связей дает возможность применить к несвободному телу условия равновесия, справедливые для свободного тела. Для этого следует мысленно отбросить связи, наложенные на тело, заменив их действие соответствующими силами реакций связей. Затем нужно рассмотреть равновесие этого несвободного тела как тела свободного под действием активных сил и сил реакций связей.

При замене связей (опор) силами реакций помнить:

- если связь препятствует перемещению тела только в одном каком-нибудь направлении, то направление ее реакции противоположно этому направлению;
- если же связь препятствует перемещению тела по многим направлениям, то силу реакции такой связи изображают ее составляющими, показывая их параллельно выбранным координатным осям X и Y .

Условия равновесия.

Для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ этой системы сил и ее главный момент $\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k)$ относительно любого центра O были равны нулю, то есть чтобы выполнялись условия

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k = 0, \quad \vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k) = 0$$

Сумму сил можно спроецировать на любую ось, тогда одним из условий равновесия будет равенство нулю суммы проекций сил на ось.

Решение системы уравнений равновесия будет тем проще, чем меньшее число неизвестных будет входить в каждое уравнение. Поэтому, при составлении уравнений равновесия рекомендуется:

- 1) выбирать направление оси для проецирования на неё сил так, чтобы она была перпендикулярна к линии действия «лишней» неизвестной силы, в этом случае проекция «лишней» неизвестной силы исключается из соответствующего уравнения равновесия;

2) центром моментов выбирать точку, в которой пересекаются линии действия «лишних» неизвестных сил реакций, тогда моменты этих сил не войдут в уравнение моментов.

Если сила $\vec{F}$ в плоскости XU имеет две составляющие ее силы $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$, то вместо вычисления момента силы $\vec{F}$ относительно некоторой точки O , может оказаться проще применить теорему Вариньона, вычислив сумму моментов составляющих ее сил относительно этой точки.

Если к телу приложена пара сил, то ее действие учитывается только в уравнении моментов сил.

Количество неизвестных величин, которое можно определить из условий равновесия, соответствует числу независимых уравнений равновесия, а оно равно числу степеней свободы (см. введение к лекциям, тема «Системы координат»). Прежде, чем составлять уравнения, нужно проверить количество выявленных неизвестных реакций твёрдого тела.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: Три способа закрепления бруса, изогнутого в одной плоскости (рис. 8, а, б, в). Нагрузка, действующая в этой же плоскости $P = 2$ кН; $M = 8$ кН·м; $q = 2$ кН/м и размеры (м) во всех трёх случаях одинаковы.

Определить реакции опор для того способа закрепления, при котором реакция $\bar{Y}_B$ опоры B имеет наименьшее (по модулю) числовое значение.

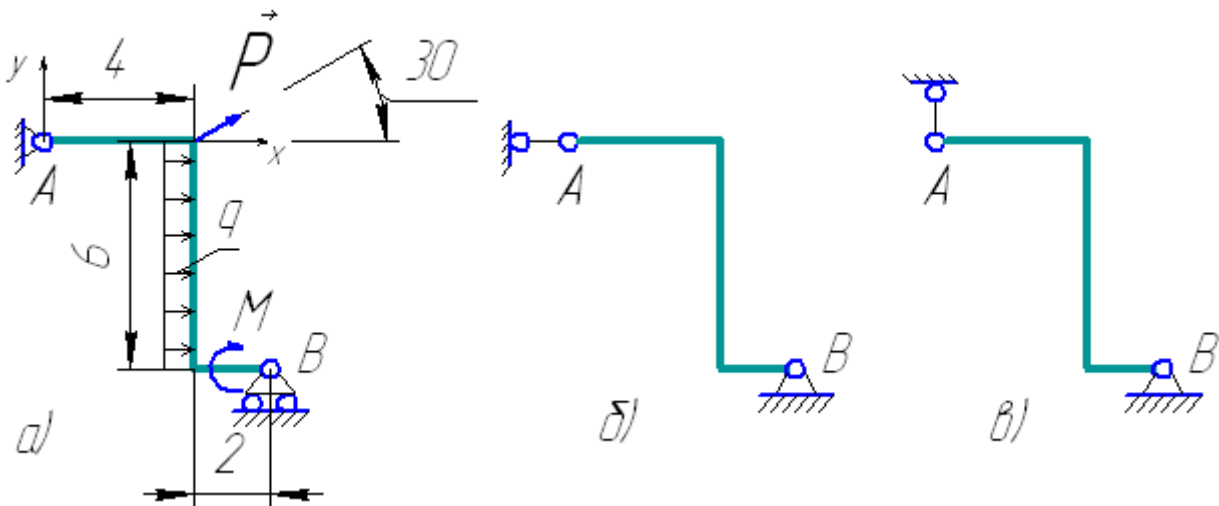


Рисунок 8 – Заданные способы закрепления бруса

Решение:

На брус действуют: *активные силы*, заданные по условию задачи – сосредоточенная сила $\bar{P}$ под углом 30° к горизонтальной оси; пара сил с моментом M ; равномерно распределённая нагрузка интенсивностью q и *реактивные силы* – реакции опор.

Равномерно распределённую на длине $b=6$ м нагрузку интенсивностью q заменяем равнодействующей сосредоточенной силой $\bar{Q}$, равной qb и приложенной посередине нагруженного участка.

$$Q = q \cdot b = 2 \cdot 6 = 12 \text{ кН.}$$

Сосредоточенную силу $\bar{P}$ по правилу параллелограмма сил разлагаем на две составляющие по осям X и Y – $\bar{P}_x$ и $\bar{P}_y$. При графическом построении $\bar{P}_x$ и $\bar{P}_y$ (на рис. 10) точка приложения силы должна остаться на конструкции.

Числовые значения $\bar{P}_x$ и $\bar{P}_y$ находим из прямоугольного треугольника:

$$P_x = P \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot (\sqrt{3} / 2) = \sqrt{3} \text{ кН;}$$

$$P_y = P \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot (1 / 2) = 1 \text{ кН.}$$

Рассмотрим вариант крепления а).

Заменим связи их реакциями. На рис. 10 реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя её составляющими $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$; реакцию подвижной шарнирной опоры B изображаем $\bar{Y}_B$ (линия действия шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости). Плоская система сил с тремя неизвестными силами, не пересекающимися в одной точке, является статически определимой.

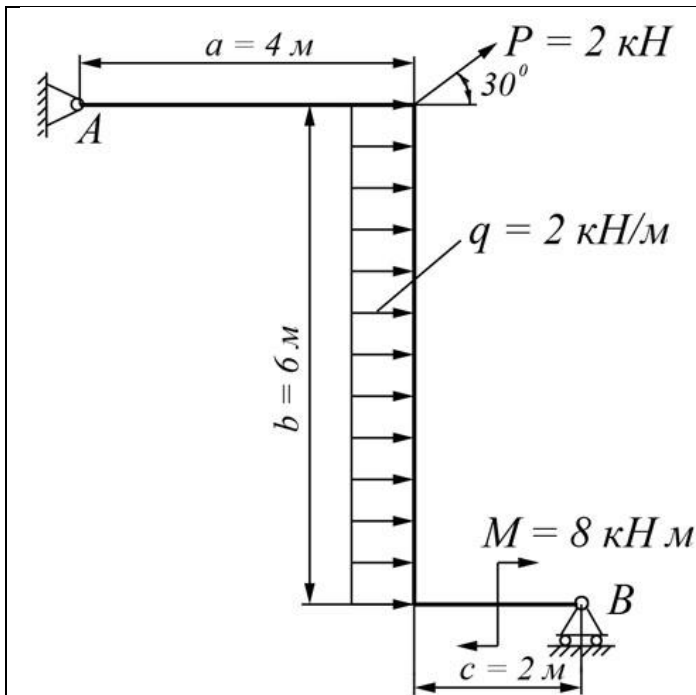


Рисунок 9 – Заданная схема (а)

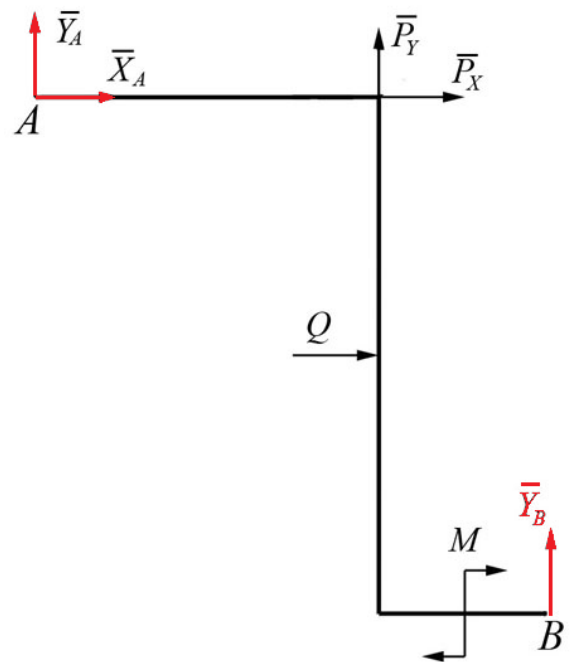


Рисунок 10 – Расчётная схема (а)

Реакцию опоры $\bar{Y}_B$ определим из условий равновесия бруса. Предпочтительно составлять уравнения с одной неизвестной (в данном случае $\bar{Y}_B$). Две лишних неизвестных $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$ направлены не параллельно друг другу, поэтому нет такой оси, на которую они обе спроецировались бы в точку (в ноль). В таком случае, для определения реакции $\bar{Y}_B$ составим уравнение моментов относительно точки A – точки пересечения линий действия двух реакций опор $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, тогда их моменты будут равны нулю, независимо от величин этих сил.

$$\Sigma M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad 4P_y + 3Q - M + 6Y_B = 0 \Rightarrow$$

$$Y_B = (M - 3Q - 4P_y) / 6 = (8 - 3 \cdot 12 - 4 \cdot 1) / 6 = -5,33 \text{ кН.}$$

Знак «минус» свидетельствует о том, что реакция направлена в обратную сторону.

Рассмотрим вариант крепления б).

На рис. 12 реакцию $\bar{X}_A$ опоры A (невесомого стержня, прикрепленного к брусу и к неподвижной опоре шарнирами) изображаем вдоль прямой,

соединяющей шарниры; реакцию неподвижной шарнирной опоры B изображаем двумя её составляющими $\bar{X}_B$ и $\bar{Y}_B$.

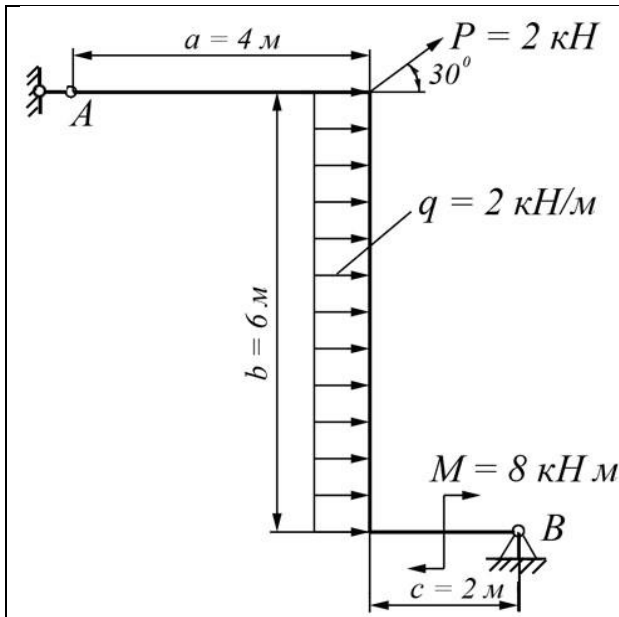


Рисунок 11 – Заданная схема (б)

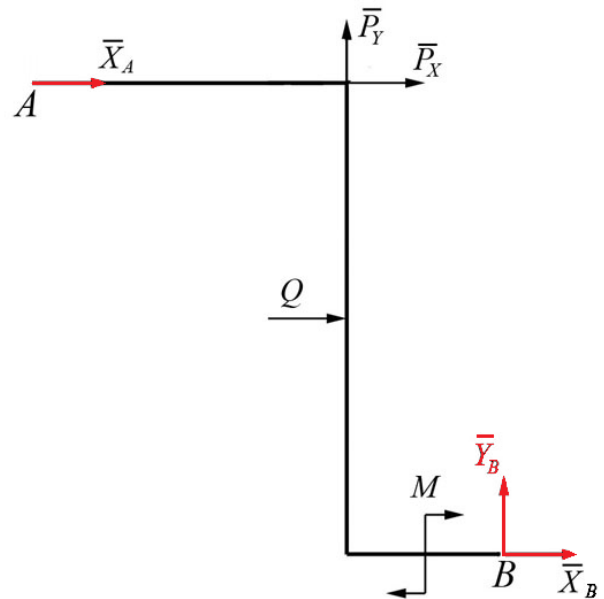


Рисунок 12 – Расчётная схема (б)

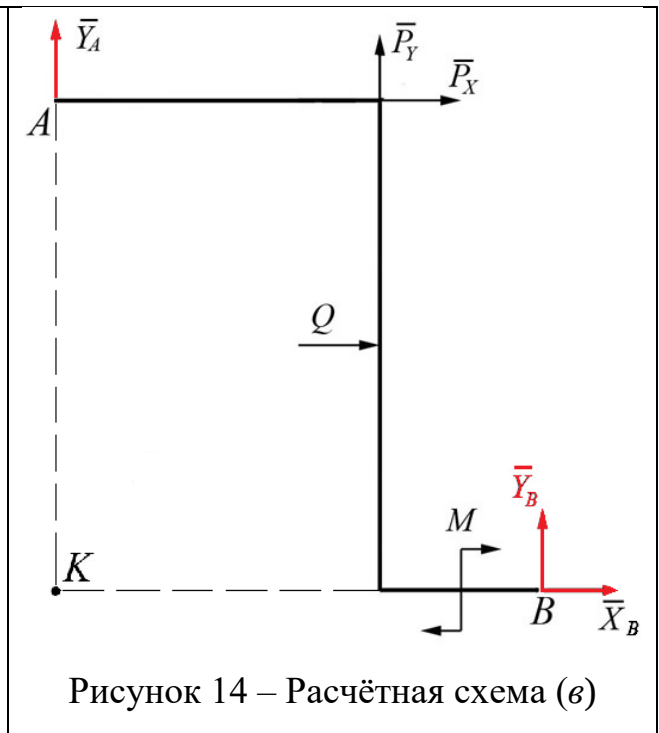
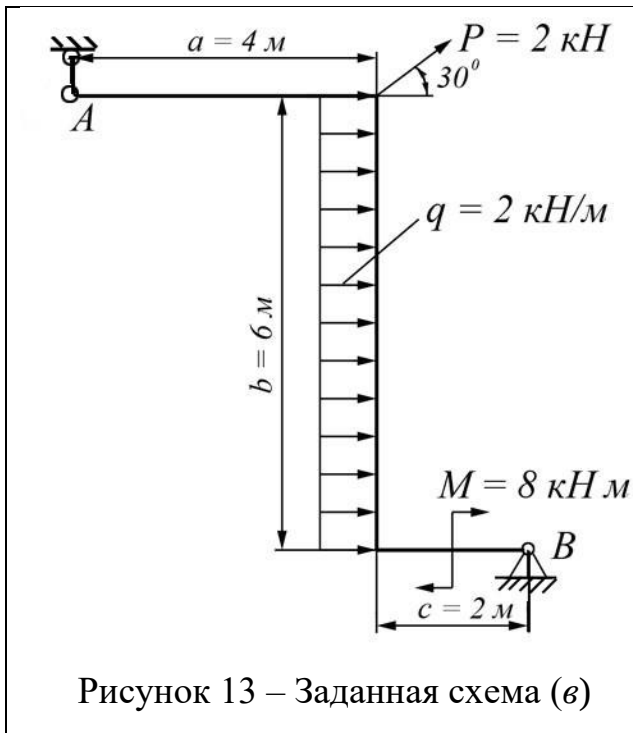
Обе лишние неизвестные $\bar{X}_A$ и $\bar{X}_B$ направлены горизонтально. Для определения исследуемой реакции $\bar{Y}_B$ составим сумму проекций сил на вертикальную ось.

$$\sum F_{ky} = 0; \quad P_y + Y_B = 0; \quad \Rightarrow \quad Y_B = -P_y = -1 \text{ кН.}$$

Знак «-» в значении реакции $\bar{Y}_B$ указывает на то, что истинное направление $\bar{Y}_B$, обеспечивающее равновесие полученной системы сил, противоположно показанному на рис. 12.

Рассмотрим вариант крепления в).

На рис. 14 реакцию $\bar{Y}_A$ опоры A (невесомого стержня на двух шарнирах) изображаем вдоль прямой, соединяющей шарниры; реакцию неподвижной шарнирной опоры B изображаем двумя составляющими $\bar{X}_B$ и $\bar{Y}_B$.



Для определения исследуемой реакции $\bar{Y}_B$ рациональным (в уравнении одна неизвестная) является уравнение алгебраической суммы моментов всех сил относительно точки K – точки пересечения линий действия реакций $\bar{X}_B$ и $\bar{Y}_A$:

$$\Sigma M_K(\bar{F}_k) = 0; \quad 4P_y - 6P_x - 3Q - M + 6Y_B = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_B = (6P_x + 3Q + M - 4P_y) / 6 = (6 \cdot (\sqrt{3}) + 3 \cdot 12 + 8 - 4 \cdot 1) / 6 = 8,397 \text{ кН.}$$

Так как минимальное значение модуля реакции $|\bar{Y}_B| = |-1|$ кН – имеет место при втором способе закрепления (б), следовательно, для этой схемы находим все остальные реакции опор – $\bar{X}_A$ и $\bar{X}_B$, и делаем проверку:

$$\Sigma M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad -M - 3Q - 6P_x - 2P_y - 6X_A = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_A = (-M - 3Q - 6P_x - 2P_y) / 6 = (-8 - 3 \cdot 12 - 6 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot 1) / 6 = -9,397 \text{ кН.}$$

$$\Sigma F_{\text{кх}} = 0; \quad X_A + P_x + Q + X_B = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_B = -X_A - P_x - Q = -(-9,397) - \sqrt{3} - 12 = -4,33 \text{ кН.}$$

Знак « $\leftarrow$ » в значениях реакции $\overline{X}_A$ и $\overline{X}_B$ указывает на то, что истинное направление этих реактивных сил, обеспечивающее равновесие полученной системы сил, противоположно показанному на рис. 12.

Уравновешенность конструкции бруса (правильность вычисления реакций опор A и B) проверим, выполнив проверку:

$$\Sigma M_D (\overline{F}_K) = 0; \quad -4,5X_A - 4,5P_x - 1,5Q - M + Y_B + 1,5X_B = 0;$$

$$-4,5 \cdot (-9,397) - 4,5 \cdot (\sqrt{3}) - 1,5 \cdot 12 - 8 + 2 \cdot (-1) + 1,5 \cdot (-4,33) = 0;$$

$$42,28 - 7,78 - 18 - 8 - 2 - 6,495 = 0;$$

$$42,28 - 42,28 = 0;$$

$$0=0.$$

Для проверки было составлено уравнение суммы моментов относительно некоторой точки D . Определите самостоятельно, где находится эта точка.

Результаты расчётов сводим в таблицу 1.

Таблица 1

№ рисунка	Исследуемая реакция $\overline{Y}_B$ (кН)	Реакции опор	
		$\overline{X}_A$ (кН)	$\overline{X}_B$ (кН)
Рис. 10	- 5,33	—	—
Рис. 12	- 1	- 9,397	- 4,33
Рис. 14	8,397	—	—

Задачи

На рисунках 1 – 7 показаны три способа (а, б, в) закрепления бруса, ось которого ломаная линия. Задаваемая нагрузка (табл. 2) и размеры бруса (геометрическая конфигурация) во всех случаях одинаковы.

Определить реакцию опор для того способа закрепления бруса, при котором исследуемая реакция, указанная в табл. 1, имеет наименьший модуль.

Таблица 2

Номер варианта (рис. 1–12)	P , кН	M , кН · м	q , кН / м	Исследуемая реакция
1	2	3	4	5
1	12	8	1,5	M_A
2	4	6	2	Y_A
3	3	2	2,5	X_A
4	2	3	2	Y_B
5	10	2	2	X_B
6	4	6	1	M_A
7	2	2	18	X_A
8	3	4	2	R_B
9	4	8	2	M_A
10	2	4	0,5	X_A
11	4	8	2	Y_A
12	8	3	1	Y_B
13	6	5	2	X_A
14	4	3	1	Y_A
15	3	4	2	M_A
16	2	4	3	X_A
17	4	4	2	X_C
18	8	4	2	X_A
19	2	3	1	Y_C
20	3	8	2	Y_B
21	4	4	2	Y_A
22	6	4	2	Y_A
23	4	3	2	X_A
24	5	4	1	M_A
1	2	3	4	5
25	4	3	1,5	Y_A
26	3	4	1	X_A
27	2	3	2	X_B
28	4	3	2	Y_A
29	2	4	2	X_B
30	4	5	1	Y_B
31	10	6	2	Y_A
32	20	5	4	M_A
33	15	8	1	Y_B
34	5	2	1	Y_B
35	10	4	-	X_B

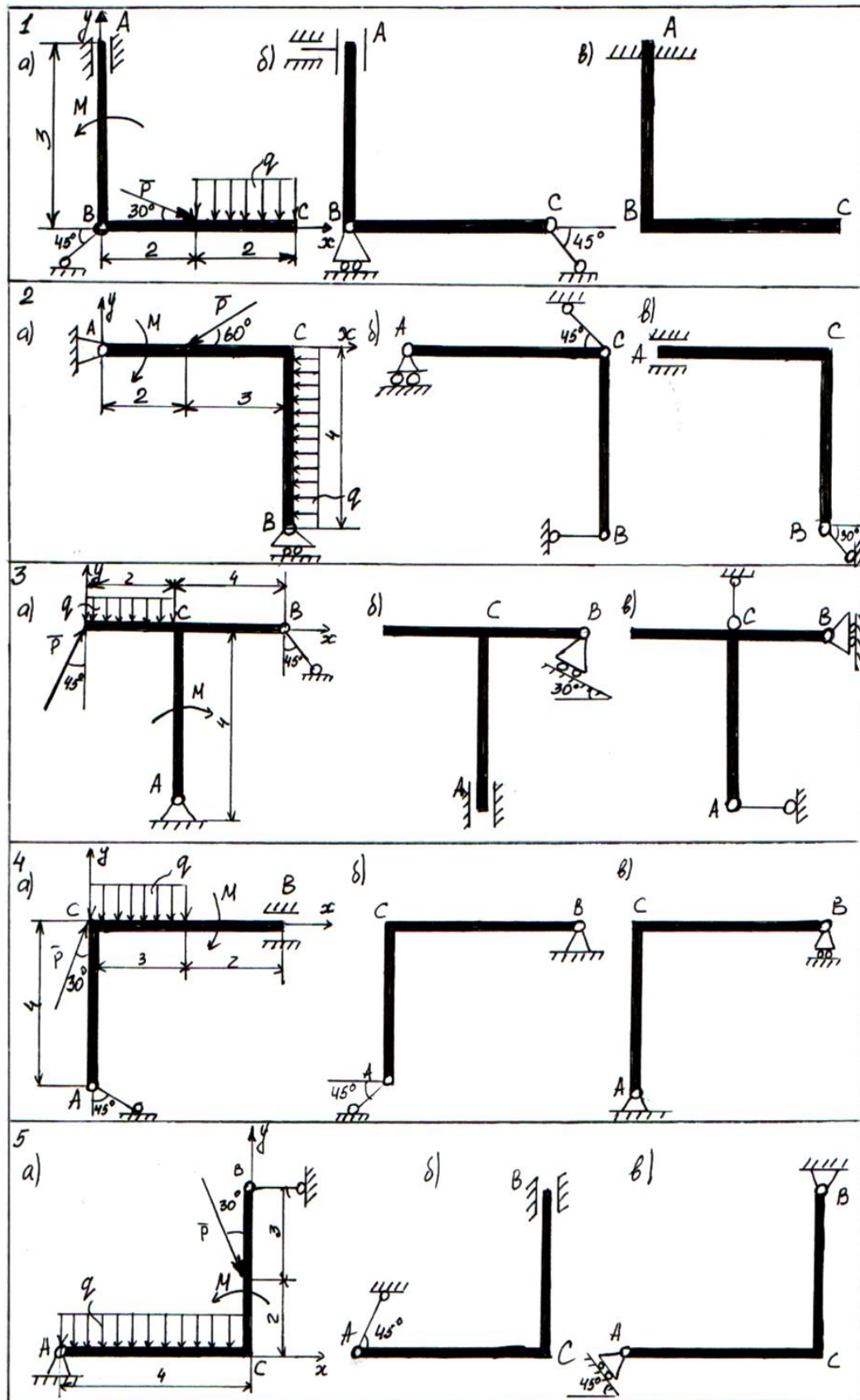


Рисунок 1

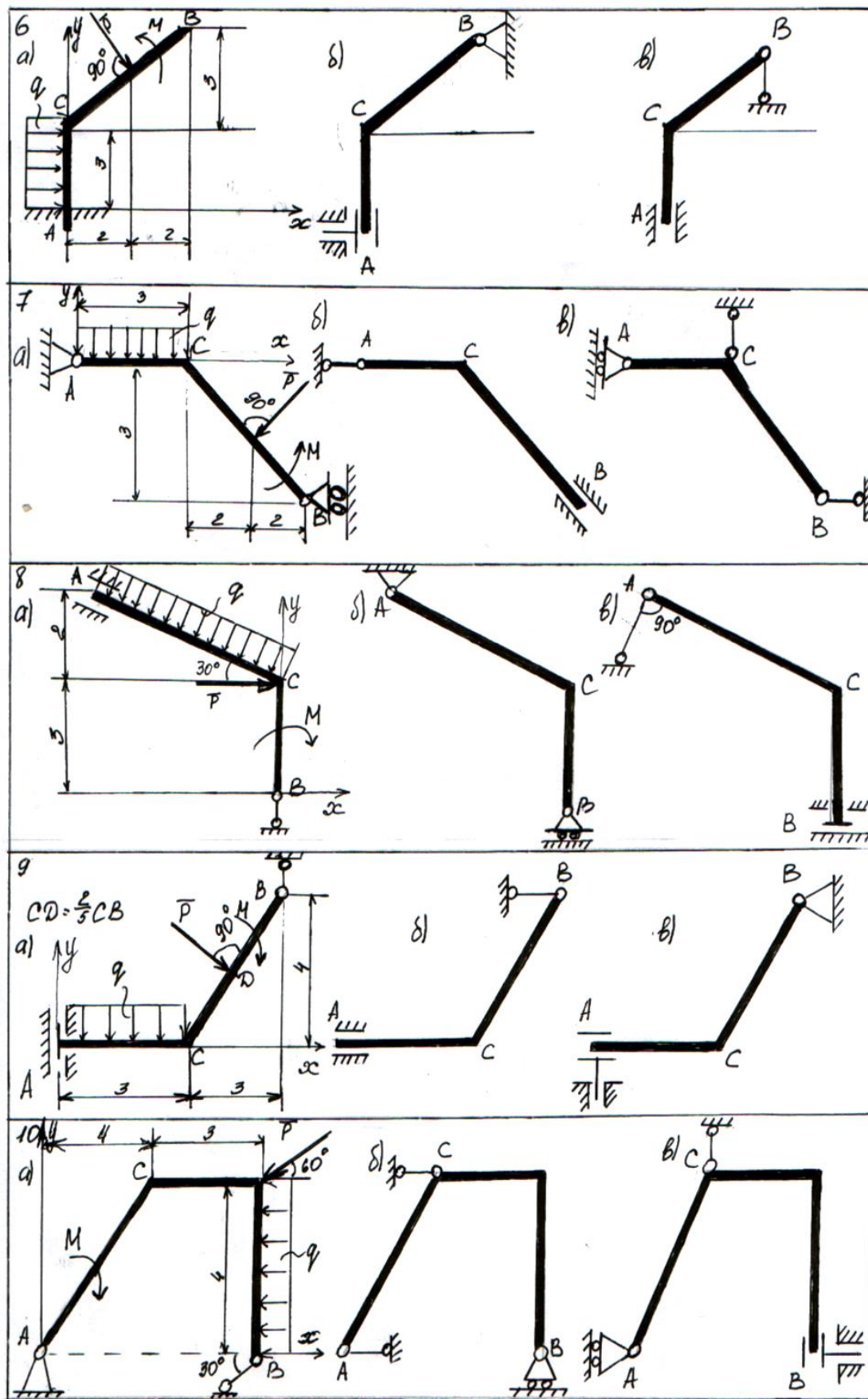


Рисунок 2

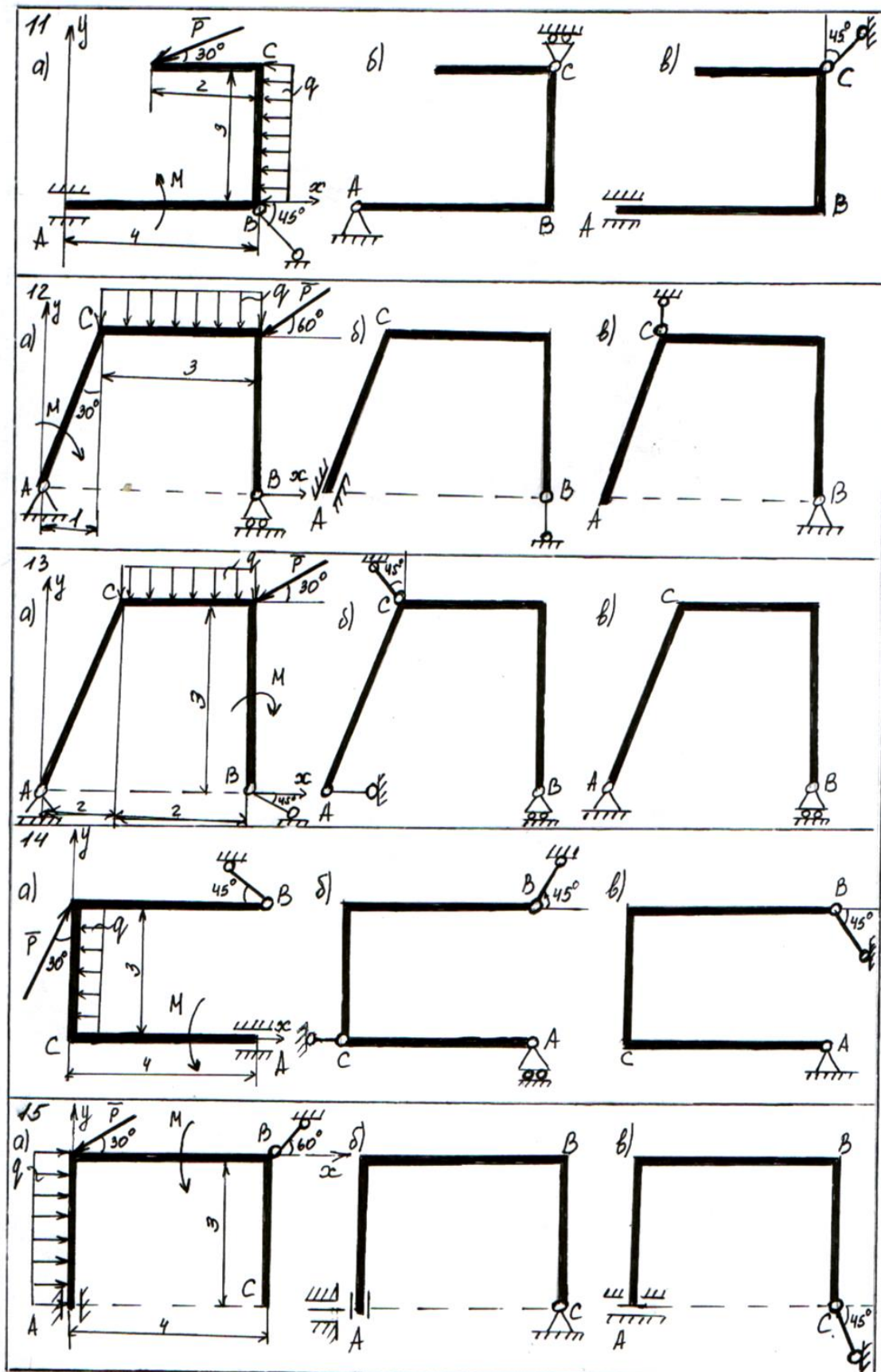


Рисунок 3

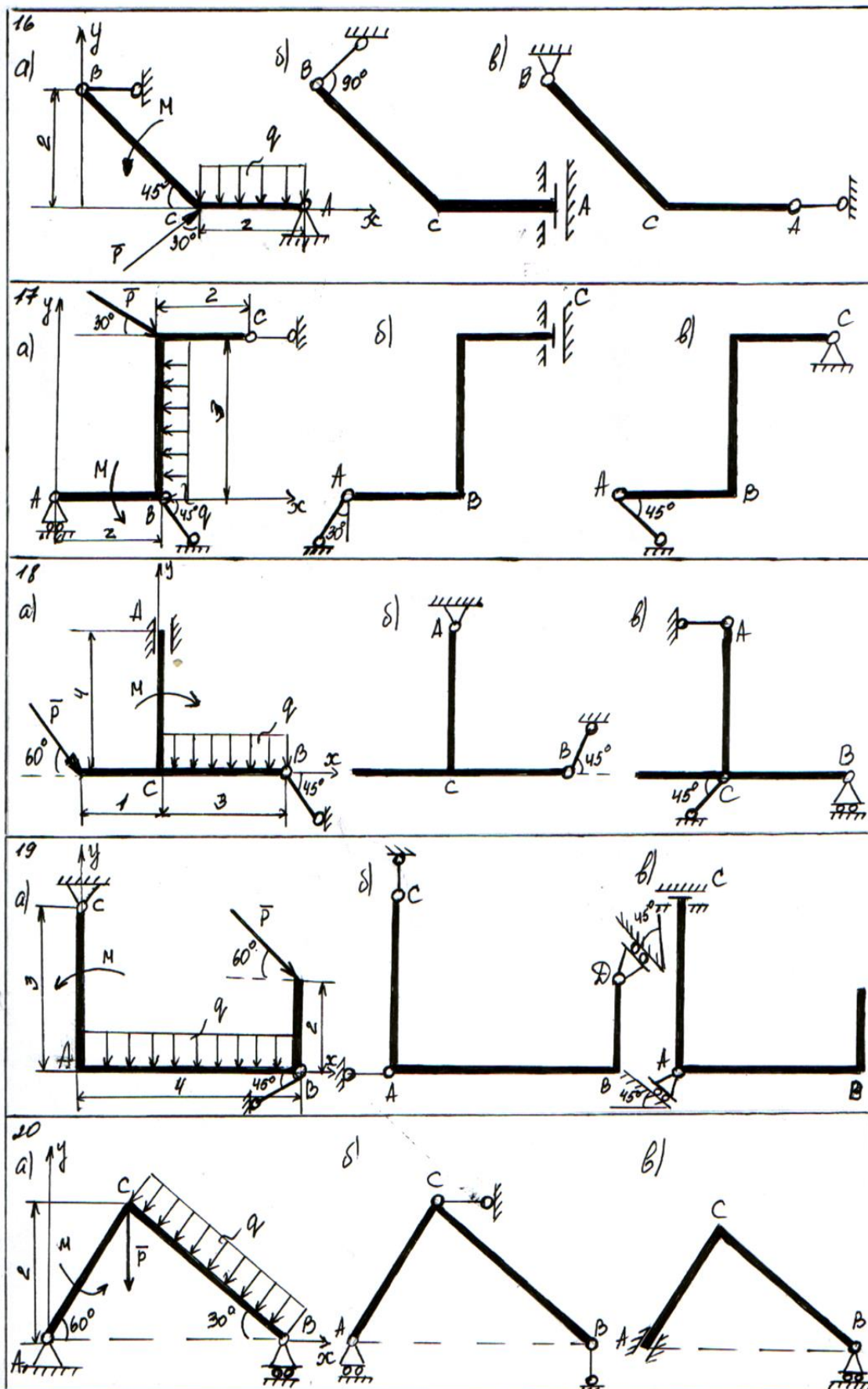


Рисунок 4

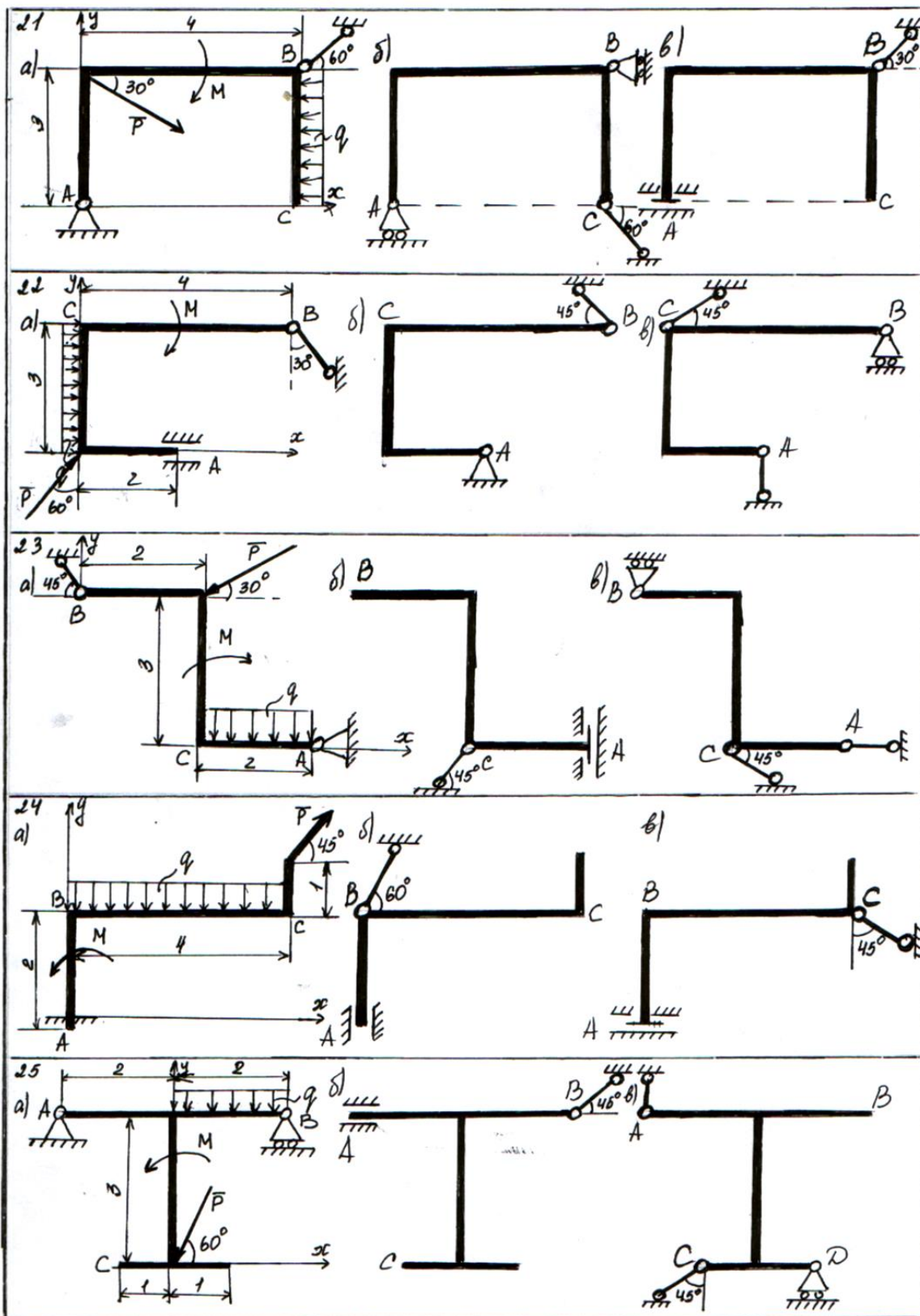


Рисунок 5

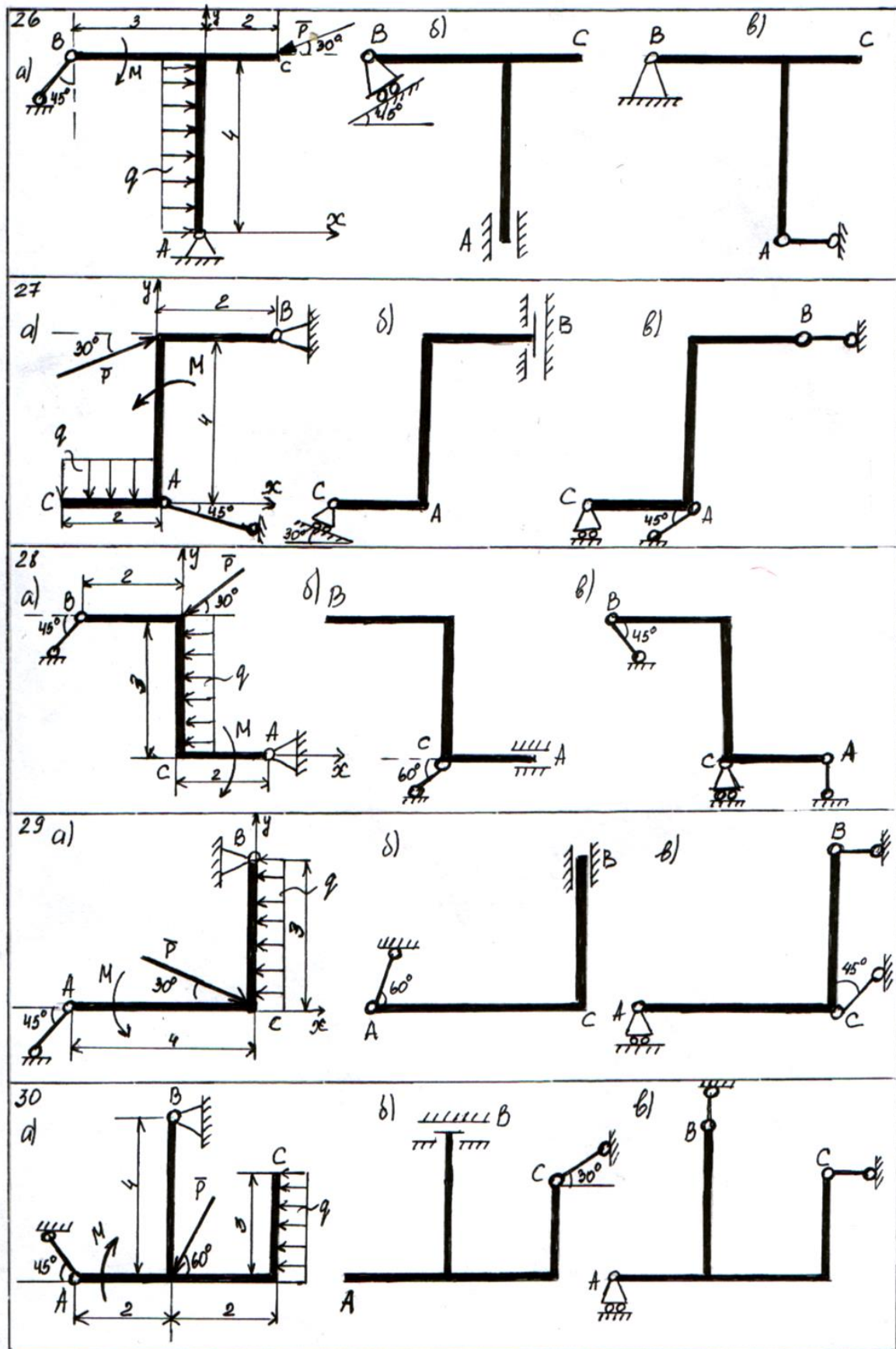


Рисунок 6

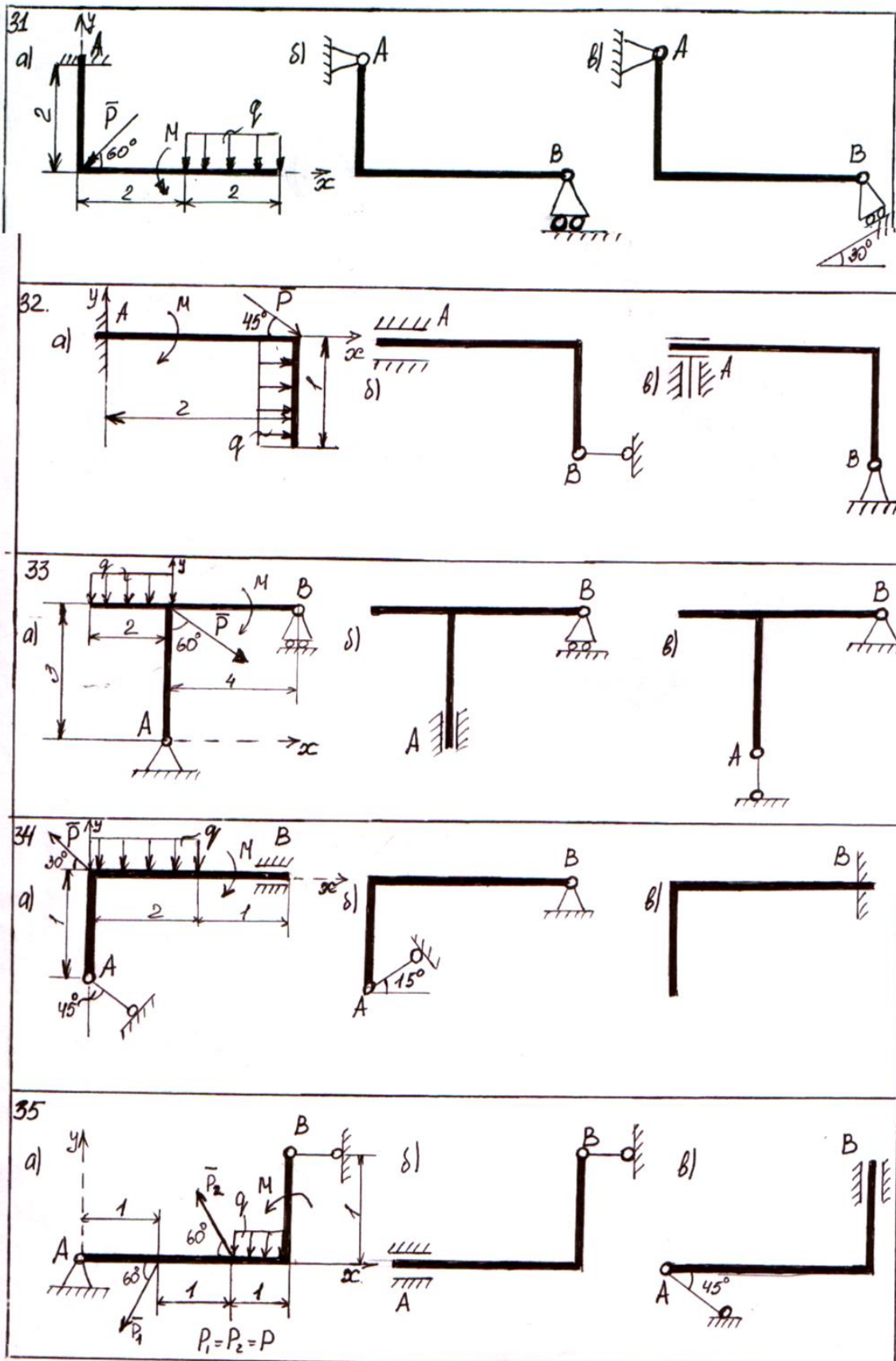


Рисунок 7

Вопросы к практическому занятию

1. Что такое сосредоточенная сила?
2. Определение распределённой нагрузки.
3. Что такое равнодействующая? Правило параллелограмма сил.
4. Графическое и аналитическое определение проекции силы на ось.
5. Виды связей и их реакции.
6. Уравнения равновесия плоской системы: а) сходящихся сил;
б) параллельных сил; в) произвольной системы сил.
7. Определение пары сил. Свойства пары сил.
8. Теорема о парах сил.
9. Определение алгебраического момента силы относительно неподвижной точки на плоскости и его свойства.
10. Вектор – момент силы относительно неподвижной точки на плоскости и его свойства.
11. Основные характеристики силы.
12. Что такое: а) свободное тело? б) несвободное тело? Принцип освобождаемости от связей.
13. Определение системы сил. Что называется плоской системой:
а) сходящихся сил? б) параллельных сил? в) произвольной системой сил?

Рекомендуемая литература

1. Теоретическая механика : учебник / А. Я. Корнилов, А. В. Воробьева, С. К. Иванов, А. В. Лановая. — Москва : Юриспруденция, 2024. — 248 с. — ISBN 978-5-9516-0952-6. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/147352.html>
2. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL:

<http://www.iprbookshop.ru/87388.html> (дата обращения: 19.04.2021). —

Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI:

<https://doi.org/10.23682/87388>

3. Игнатьева, Т. В. Теоретическая механика. Статика : учебное пособие / Т. В. Игнатьева, Д. А. Игнатьев. — Саратов : Вузовское образование, 2018. — 101 с. — ISBN 978-5-4487-0131-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/72539.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/72539>
4. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. - <http://biblioclub.ru/>
5. Красюк, А. М. Теоретическая механика. Конспект лекций : учебное пособие / А. М. Красюк. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2009. — 138 с. — ISBN 978-5-7782-1245-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/45438.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4

РАВНОВЕСИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Цель работы: получение навыков определения реакций при действии на абсолютно твёрдое тело пространственной системы сил.

Теоретическая часть

Если линии действия сил данной системы расположены в разных плоскостях, не пересекаются в одной точке и непараллельны между собой (но некоторые из них могут пересекаться в одной точке и могут быть параллельны между собой), то такая система сил называется *произвольной пространственной системой сил*.

Произвольную пространственную систему сил, действующих на твердое тело, в общем случае можно заменить одной силой, равной главному вектору $\overline{R'}$ системы и приложенной в произвольно выбранном центре приведения О, и одной парой с вектором-моментом, равным главному вектору-моменту $\overline{M}_O$ системы относительно центра приведения О (рисунок 2). Аналитические условия равновесия пространственной произвольной системы сил: $\overline{R'} = 0$; $\overline{M}_O = 0$. Поскольку главный вектор $\overline{R'}$ и главный момент $\overline{M}_O$ пространственной произвольной системы сил имеют проекции на оси декартовых координат, то получаем аналитические условия равновесия (уравнения равновесия) для пространственной произвольной системы сил:

$$\begin{array}{lll} 1) \sum F_{AX} = 0; & 2) \sum F_{AY} = 0; & 3) \sum F_{AZ} = 0; \\ 4) \sum M_{AX}(\overline{F}_K) = 0; & 5) \sum M_{AY}(\overline{F}_K) = 0; & 6) \sum M_{AZ}(\overline{F}_K) = 0; \end{array}$$

или

$$\begin{array}{lll} 1) \sum M_{AX}(\overline{F}_K) = 0; & 2) \sum M_{AY}(\overline{F}_K) = 0; & 3) \sum M_{AZ}(\overline{F}_K) = 0; \\ 4) \sum M_{BX1}(\overline{F}_K) = 0; & 5) \sum M_{BY1}(\overline{F}_K) = 0; & 6) \sum M_{BZ1}(\overline{F}_K) = 0; \end{array}$$

Момент силы относительно оси равен проекции на эту ось момента силы относительно какой-либо точки, взятой на оси.

Чтобы определить момент силы относительно оси, нужно спроецировать силу на плоскость, перпендикулярную оси, и затем определить момент проекции силы относительно точки пересечения оси и плоскости.

Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия данной силы параллельна оси или если линия действия силы пересекается с осью.

Задание

Найти реакции опор конструкции. Схемы конструкций показаны на рисунках. Необходимые для расчёта данные приведены в таблице.

Номер варианта (рис. 44—46)	Силы, кН			Размеры, см					Номер варианта (рис. 44—46)	Силы, кН			Размеры, см				
	<i>Q</i>	<i>T</i>	<i>G</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>R</i>	<i>r</i>		<i>Q</i>	<i>T</i>	<i>G</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>R</i>	<i>r</i>
1	2	—	20	20	30	10	15	5	16	4	—	2	50	30	—	—	—
2	4	—	2	20	10	30	10	10	17	2	—	1	15	10	20	20	5
3	20	—	18	400	400	450	—	—	18	6	—	2	60	40	60	—	—
4	3	—	2	30	20	40	15	10	19	—	8	2	20	30	40	20	15
5	5	—	3	30	40	20	20	15	20	4	—	—	60	40	20	—	—
6	1	4	2	40	30	20	20	10	21	2	—	—	40	60	30	—	—
7	—	3	1	30	10	5	18	6	22	—	—	5	20	50	30	—	—
8	4	6	3	20	40	15	20	10	23	—	—	4	40	30	50	—	—
9	5	—	3	20	15	10	30	40	24	5	—	2	—	—	—	—	—
10	1	4	2	30	40	20	20	10	25	—	—	3	50	50	60	—	—
11	—	2	1	20	30	15	15	10	26	—	—	1	20	60	40	—	—
12	4	—	1	25	20	8	15	10	27	10	—	—	50	30	50	—	—
13	10	—	5	40	30	20	25	15	28	35	—	32	400	200	200	—	—
14	—	2	1	30	90	20	30	10	29	—	4	3	15	20	15	15	10
15	3	—	2	60	20	40	20	5	30	5	—	—	40	40	10	—	—

Примечания. 1. Считать, что в вариантах 16, 18, 22-26 петли не препятствуют перемещению рамы вдоль *AB*.

2. В вариантах 20 и 21 соприкасающиеся поверхности считать абсолютно гладкими.

Пример выполнения задания. Дано: рама $ABCD$ весом $G = 1$ кН, $P = 2$ кН, $\vec{P} \parallel Ay$, $AD = BC = 60$ см, $AB = CD = 100$ см, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ (рис. 47). Найти реакции опор A , B и C (A — шаровой шарнир, B — петля, C — стержневая опора).

Решение. К раме $ABCD$ приложены сила тяжести $\vec{G}$, сила $\vec{P}$, реакция $\vec{S}$ стержня CE и реакции опор A и B . Реакция шарового шарнира A определяется тремя составляющими: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, а реакция петли B — двумя: $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$ (рис. 48).

Из этих сил — шесть неизвестных. Для их определения можно составить шесть уравнений равновесия.

Уравнения моментов сил относительно координатных осей:

$$\sum M_{ix} = 0; \quad -P \cdot AD \cos 30^\circ - G \cdot AB/2 + S \cos 30^\circ AB + Z_B \cdot AB = 0, \quad (1)$$

$$\sum M_{iy} = 0; \quad G(BC/2) \sin 30^\circ - S \cdot BC \sin 60^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{iz} = 0; \quad P \cdot AD \sin 30^\circ + S \cos 60^\circ AB - X_B \cdot AB = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (2) определяем S , затем из уравнений (1) и (3) находим Z_B и X_B . Уравнения проекций сил на оси координат:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + X_B - S \cos 60^\circ = 0, \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + P = 0, \quad (5)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad Z_A - G + Z_B + S \cos 30^\circ = 0. \quad (6)$$

Из этих уравнений находим X_A , Y_A и Z_A .

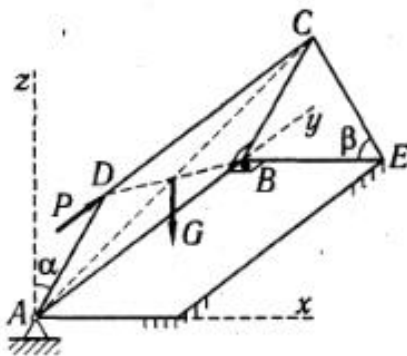


Рис. 47

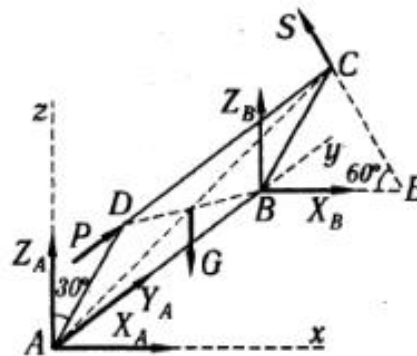
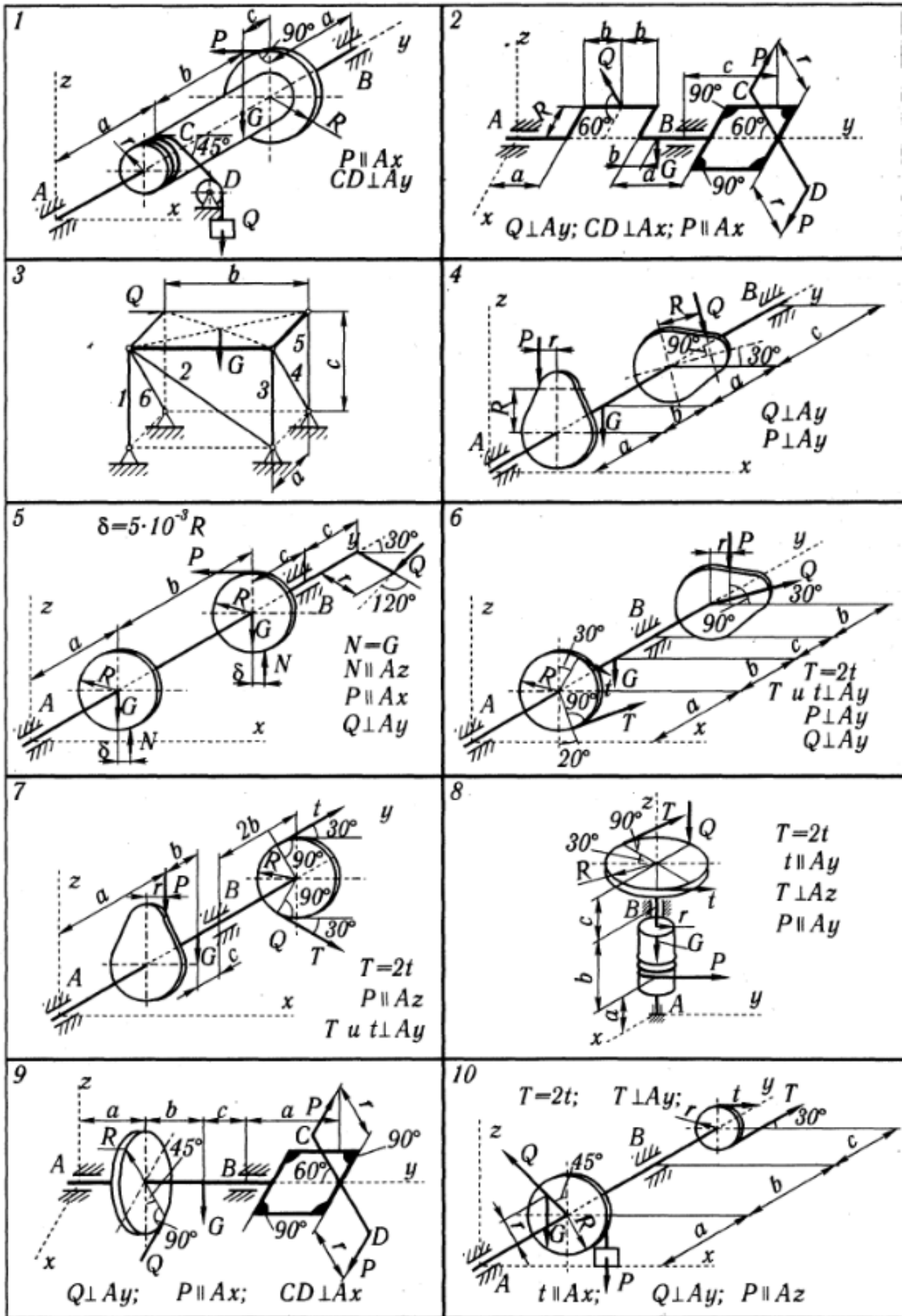


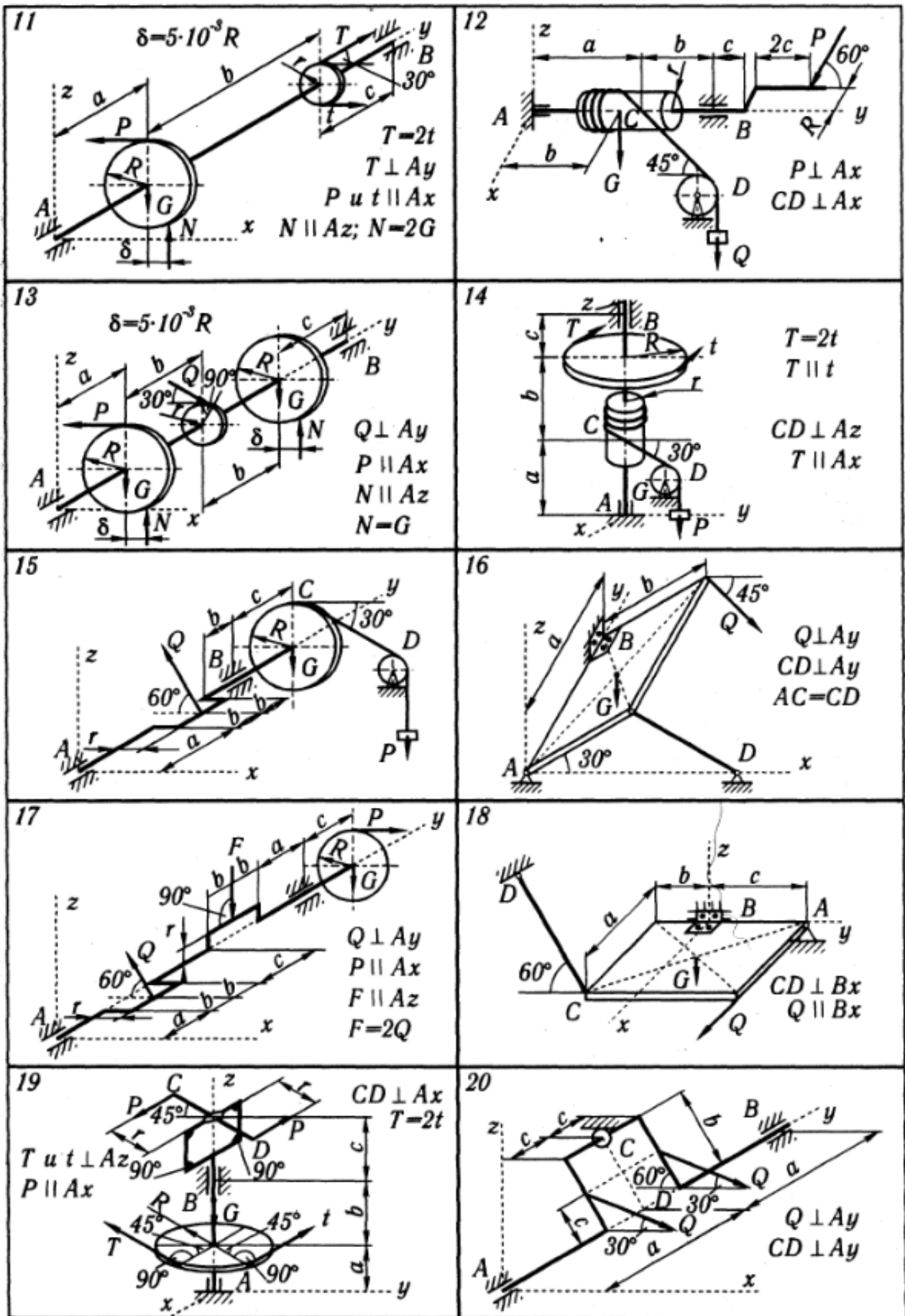
Рис. 48

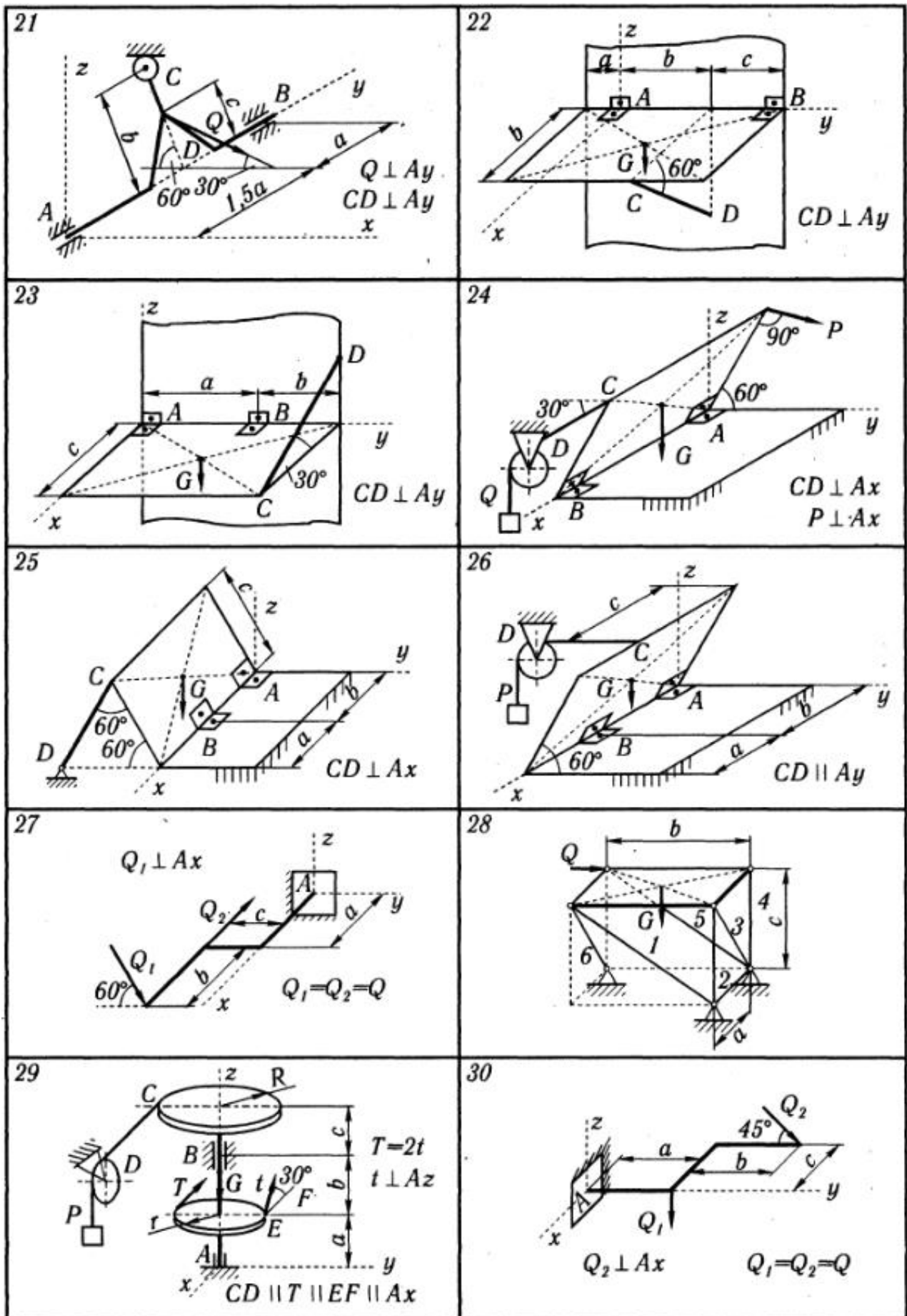
Результаты вычислений приведены в табл. 15.

Таблица 15

Силы, кН					
S	X_A	Y_A	Z_A	X_B	Z_B
0,289	-0,600	-2,00	-0,54	0,744	1,29







Вопросы для самопроверки:

1. При каком условии можно рассматривать несвободное тело как свободное?

Что такое механическая связь? Принцип освобожденности от связей.

2. Виды связей и их реакции (пространственные опоры).

3. Геометрический и аналитический методы определения равнодействующей пространственной системы сходящихся сил.

Всякая ли система имеет равнодействующую силу?

4. Пространственная система сходящихся сил. Условия равновесия системы сходящихся сил в геометрической и аналитической формах.

5. Момент силы относительно оси. Основные свойства момента.

6. Пара сил, её основные характеристики.

7. Пространственная система параллельных сил? Уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил?

8. Плоская произвольная система сил? Уравнения равновесия плоской произвольной системы сил?

9. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей плоской произвольной системы сил.

Рекомендуемая литература

1. Теоретическая механика : учебник / А. Я. Корнилов, А. В. Воробьева, С. К. Иванов, А. В. Лановая. — Москва : Юриспруденция, 2024. — 248 с. — ISBN 978-5-9516-0952-6. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/147352.html>
2. Игнатьева, Т. В. Теоретическая механика. Статика : учебное пособие / Т. В. Игнатьева, Д. А. Игнатьев. — Саратов : Вузовское образование, 2018. — 101 с. — ISBN 978-5-4487-0131-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/72539.html> - DOI: <https://doi.org/10.23682/72539>

3. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. - <http://biblioclub.ru/>
4. Красюк, А. М. Теоретическая механика. Конспект лекций : учебное пособие / А. М. Красюк. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2009. — 138 с. — ISBN 978-5-7782-1245-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/45438.html>

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Получение навыков кинематического исследования механизмов графическим методом.

ТЕОРИЯ ВОПРОСА

Кинематическое исследование графическим методом (методом диаграмм) наиболее простой, наглядный и вместе с тем наименее точный из методов кинематического исследования. Для объяснения этого метода требуется знание следующих терминов.

Масштабным коэффициентом (например, скорости μ_v , [м·с⁻¹/мм]) называется отношение величины (скорости) в единицах СИ к длине отрезка, изображающего эту величину (скорости) на чертеже в миллиметрах. Если задан, например, план скоростей в масштабе μ_v , то любую величину скорости можно узнать из плана скоростей, измерив соответствующий отрезок на чертеже в миллиметрах и умножив на масштабный коэффициент скорости.

Аналогом скорости S' называется первая производная от перемещения S по углу поворота φ : $S' = dS/d\varphi$. Аналог скорости связан со скоростью $V = dS/dt$ следующей зависимостью:

$$S' = dS/d\varphi = (dS/dt) / (d\varphi/dt) = V/\omega. \quad (2)$$

Аналогом ускорения S'' называется вторая производная от перемещения S по углу поворота φ : $S'' = d^2S/d\varphi^2$. Аналог ускорения связан с ускорением $a = d^2S/dt^2$ следующей зависимостью:

$$S'' = d^2S/d\varphi^2 = (d^2S/dt^2) / (d\varphi^2/dt^2) = a/\omega^2. \quad (3)$$

Для кинематического исследования необходимо построить совмещенный план 12-и положений механизма. Нумеровать положения необходимо таким образом, чтобы движение исполнительного звена начиналось с нулевого

положения. По перемещению исполнительного звена строится диаграмма перемещений (рисунок 5).

Для приведенного примера масштаб совмещенного плана положений совпадает с масштабом диаграммы перемещений, т.е. $\mu_L = \mu_S$. В противном случае масштабный коэффициент диаграммы перемещений равен:

$$\mu_S = S_{\max} / (6-6), \text{ м/мм}, \quad (4)$$

где $S_{\max}$ – максимальное перемещение исполнительного звена, м, (6-6) – отрезок, изображающий максимальное перемещение на чертеже в мм.

Масштабный коэффициент угла поворота:

$$\mu_\varphi = 2 \cdot \pi / (0-12), \text{ 1/мм}, \quad (5)$$

Поскольку диаграмма построена в координатах $S=f(\varphi)$, то, продифференцировав эту кривую, можно получить диаграммы аналога скорости и аналога ускорения (рисунок 6).

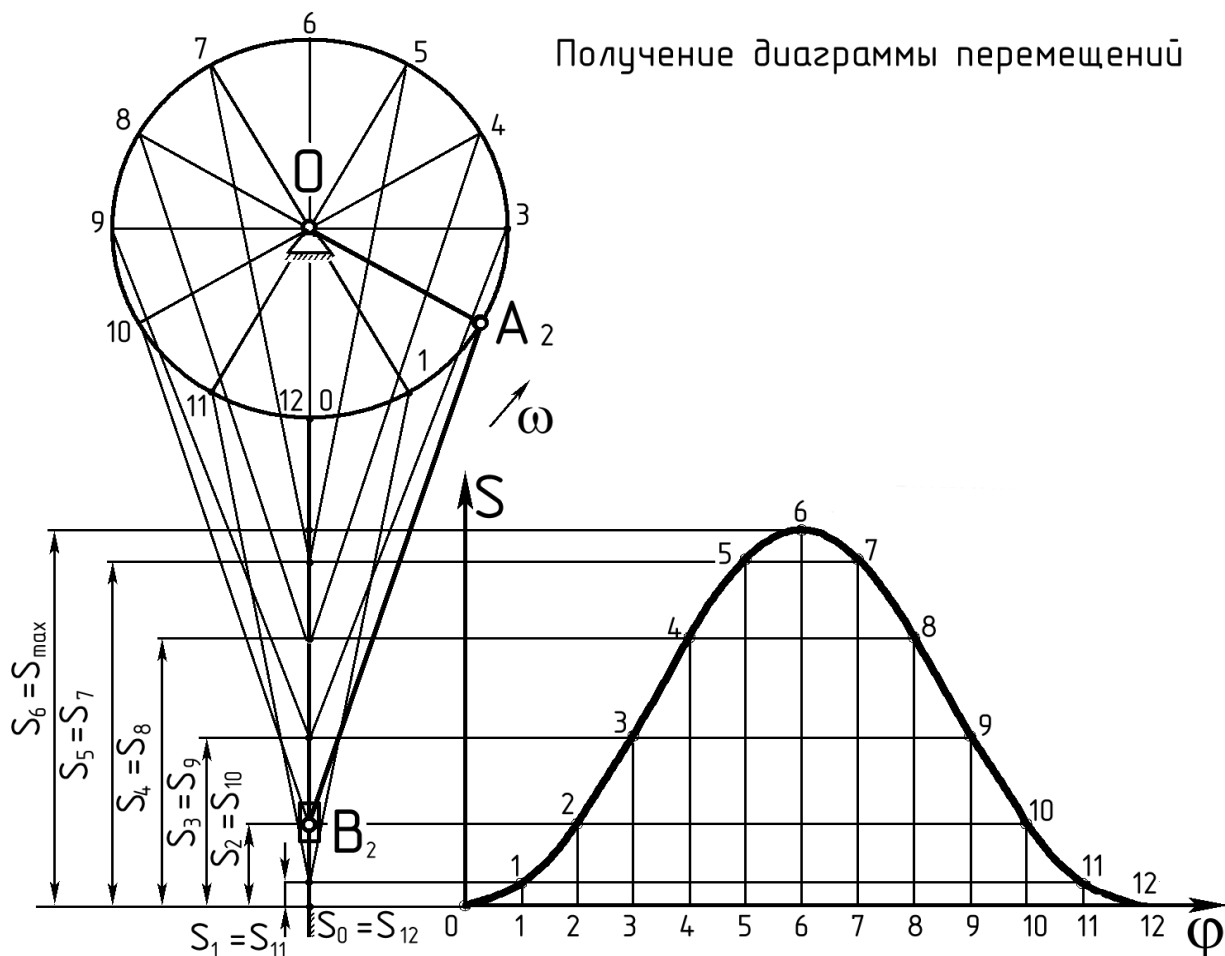


Рисунок 5 – Совмещенный план 12-и положений и диаграмма перемещений

Для графического дифференцирования кривой необходимо к каждой точке кривой провести касательные, перенести касательные параллельно самим себе в точку К, выбранную произвольно. Отрезки, отсекаемые касательными от вертикальной оси, будут равны величине производной от верхнего графика в соответствующем положении.

Для построения касательной в крайних точках кривой (нулевом или двенадцатом положении) необходимо построить тринадцатое положение, совпадающее с первым положением. С помощью графического дифференцирования диаграммы перемещений получается диаграмма аналога скорости, а при дифференцировании диаграммы аналога скорости получается диаграмма аналога ускорения. При этом длина отрезка ОК необязательно должна совпадать с длиной отрезка ОК'. От длин этих отрезков зависят только вертикальные размеры диаграмм аналога скорости и аналога ускорения.

Следует заметить, что если принять отрезок 0-12 по горизонтальной оси не как угол поворота кривошипа, а время одного оборота, продифференцировав эту диаграмму, получаем диаграмму скорости, дифференцируя которую, получаем диаграмму ускорения. Таким образом, диаграмма аналога скорости совпадает по форме с диаграммой скорости, а диаграмма аналога ускорения совпадает по форме с диаграммой ускорения.

Совпадающие по форме диаграммы отличаются только масштабными коэффициентами:

Масштабные коэффициенты аналога скорости и аналога ускорения:

$$\mu_s = \mu_s / (\mu_\phi \cdot K), \text{ м/мм}, \quad \mu_{s''} = \mu_{s'} / (\mu_\phi \cdot K'), \text{ м/мм}, \quad (6)$$

где К – длина отрезка ОК в миллиметрах, К' – длина отрезка ОК' в мм.

Масштабные коэффициенты скорости и ускорения:

$$\mu_v = \mu_s \cdot \omega, \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} / \text{мм}, \quad \mu_a = \mu_{s'} \cdot \omega^2, \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} / \text{мм}, \quad (7)$$

Масштабный коэффициент времени:

$$\mu_t = \mu_\phi / \omega, \text{ с/мм}, \quad (8)$$

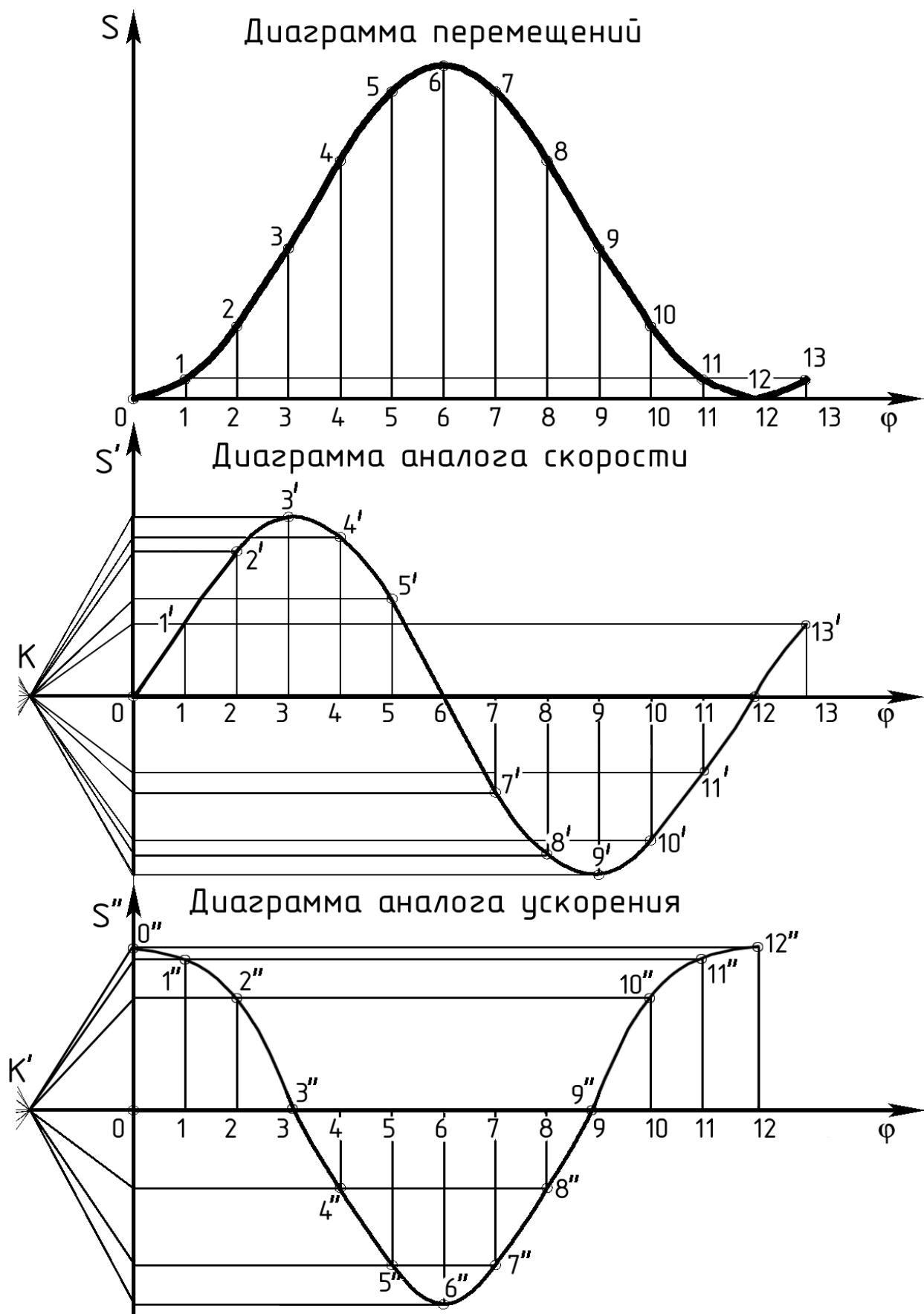


Рисунок 6 – Получение диаграмм аналогов скорости и ускорения

При известных масштабных коэффициентах можно определить скорость, аналог скорости, ускорение, аналог ускорения исполнительного звена в любой момент времени или при любом положении ползуна. Например, во втором положении кинематические параметры равны:

$$V_2=(2-2')\cdot\mu_v, \text{ м/с}, S'_2=(2-2')\cdot\mu_s, \text{ м}, \quad (9)$$

$$a_2=(2-2'')\cdot\mu_a, \text{ м/с}^2, S''_2=(2-2'')\cdot\mu_{s''}, \text{ м}, \quad (10)$$

где $(2-2')$ – длина отрезка $2-2'$ по вертикальной оси на диаграмме аналога скорости в мм; $(2-2'')$ – длина отрезка $2-2''$ по вертикальной оси на диаграмме аналога ускорения в мм;

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с механизмом и начертить его кинематическую схему.
2. Выяснить крайние положения механизма, построить двенадцать планов положений механизма.
3. Измерить перемещение исполнительного звена и заполнить таблицу.
4. По данным таблицы перемещений построить диаграмму перемещений.
5. Методом графического дифференцирования построить диаграммы аналога скорости и аналога ускорения.
6. Рассчитать все масштабные коэффициенты.

ВОПРОСЫ К ЗАЩИТЕ

1. Определения масштабных коэффициентов и аналогов. Методы кинематического исследования. Сущность графического дифференцирования.
2. Вывод формул масштабных коэффициентов и их размерностей.

Рекомендуемая литература

1. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России

; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань :

Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. - <http://biblioclub.ru/>

2. Хибник, Т. А. Вопросы теоретической механики и теории механизмов и машин в курсе «Прикладная механика» : учебное пособие / Т. А. Хибник, И. С. Барманов. — Самара : Самарский университет, 2022. — 80 с. — ISBN 978-5-7883-1833-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/336788>

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению практических работ по дисциплине

«ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ»

для студентов направления подготовки

15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных
производств

направленность (профиль) «Технология машиностроения»

Ставрополь, 2026

Данные методические указания предназначены для подготовки студентов к практическим занятиям по дисциплине «Основы прикладной механики». Методические указания составлены в соответствии с рабочим учебным планом и программой дисциплины для студентов очной формы обучения. Методические указания содержат основные теоретические положения по соответствующей теме практического занятия; практические задачи; приводятся примеры решения типовых задач. Приведены задачи, предлагаемые студенту для самостоятельного решения; вопросы для самопроверки, список рекомендуемой литературы.

Практические занятия способствуют формированию компетенций:

ОПК-5 – Способен использовать основные закономерности, действующие в процессе изготовления машиностроительных изделий требуемого качества, заданного количества при наименьших затратах общественного труда;

ОПК-8 – Способен участвовать в разработке обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами, выборе оптимальных вариантов прогнозируемых последствий решения на основе их анализа.

Практические занятия по дисциплине «Основы прикладной механики» имеют целью расширение знаний по этому предмету, получение навыков практических расчётов и принятия конструкторских решений.

Составитель: к.т.н., доц. В.Г. Терещенко

Рецензент: д.т.н., проф. В.Г. Копченков

СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие 1. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД СЛОЖЕНИЯ СИЛ ПЛОСКОЙ СХОДЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ	4
Практическое занятие 2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОДЫ СЛОЖЕНИЯ СИЛ ПЛОСКОЙ СХОДЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ	20
Практическое занятие 3. РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ	28
Практическое занятие 4. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ	37
Практическое занятие 5. РАВНОВЕСИЕ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ ТРЕНИЯ	48
Практическое занятие 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЁРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ	55
Практическое занятие 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК И УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ЗВЕНА ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА	66
Практическое занятие 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК И УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯ ЗВЕНА ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА	80
Практическое занятие 9. ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ	87

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД СЛОЖЕНИЯ СИЛ ПЛОСКОЙ СХОДЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ

Цель работы: получение навыков графического сложения векторов и определения неизвестных слагаемых.

Теоретическая часть

Для выполнения задания необходимо знать аксиомы статики.

1. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ($F_1=F_2$) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 1).

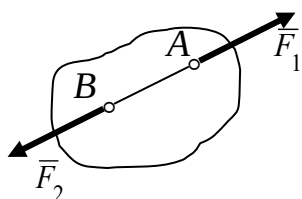


Рисунок 1 – Равновесие абсолютно твёрдого тела под действием двух сил

В конструкциях часто используют лёгкий (представляемый невесомым) стержень, который прикрепляют с помощью двух шарниров, расположенных по концам. На такой стержень действуют только две силы. При равновесии эти силы, согласно первой аксиоме, направлены вдоль прямой, соединяющей центры шарниров. По закону равенства действия и противодействия стержень действует на детали конструкции силами, направленными вдоль той же прямой.

Закон параллелограмма сил: *две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют **равнодействующую**, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.*

Вектор $\vec{R}$, равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 2), называется *геометрической суммой* векторов F_1 и F_2 :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1)$$

Следовательно, закон параллелограмма сил соответствует правилу сложения векторов, известному из геометрии и векторной алгебры, и его можно еще сформулировать так: **две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, равную геометрической (векторной) сумме этих сил и приложенную в той же точке.**

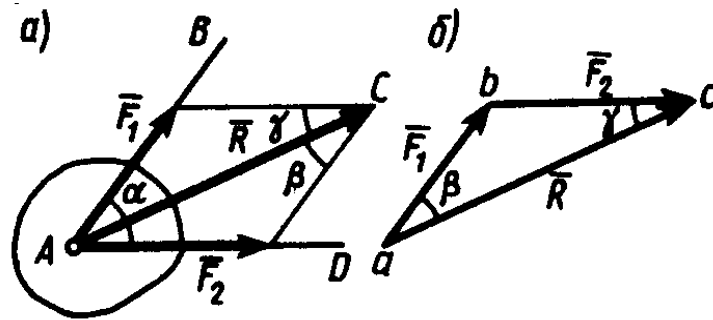


Рисунок 2 – Сложение двух сил: *a* – по правилу параллелограмма; *б* – построением силового треугольника

Систему сил, приложенных к одному твёрдому телу, называют *сходящейся*, если линии действия всех сил пересекаются в одной точке. Перенеся все силы к точке пересечения их линий действия, можно рассматривать такую систему как силы, приложенные к одной точке, или как *пучок сил*. Система сходящихся сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ эквивалентна одной равнодействующей силе $\vec{R}$, которую можно определить построением силового многоугольника

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad \text{или в упрощённой записи} \quad \vec{R} = \sum \vec{F}_k. \quad (2)$$

Слагаемые являются векторами, и сложение производится геометрически в любой последовательности. Сила $\vec{R}$ приложена в точке пересечения линий действия всех слагаемых сил. Но она может быть перенесена вдоль своей линии действия.

Для нахождения графическим способом суммы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 3, *a*) откладываем от произвольной точки *O* (рис. 3, *б*) вектор $\vec{Oa}$, изображающий в выбранном масштабе силу $\vec{F}_1$, от точки *a* – вектор $\vec{ab}$, изображающий силу $\vec{F}_2$, от точки *b* – вектор $\vec{bc}$, изображающий силу $\vec{F}_3$, и т.д.; от конца *m* предпослед-

него вектора откладываем вектор $\overline{mn}$, изображающий силу $\vec{F}_n$. Соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $\overline{On} = \vec{R}$, изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:

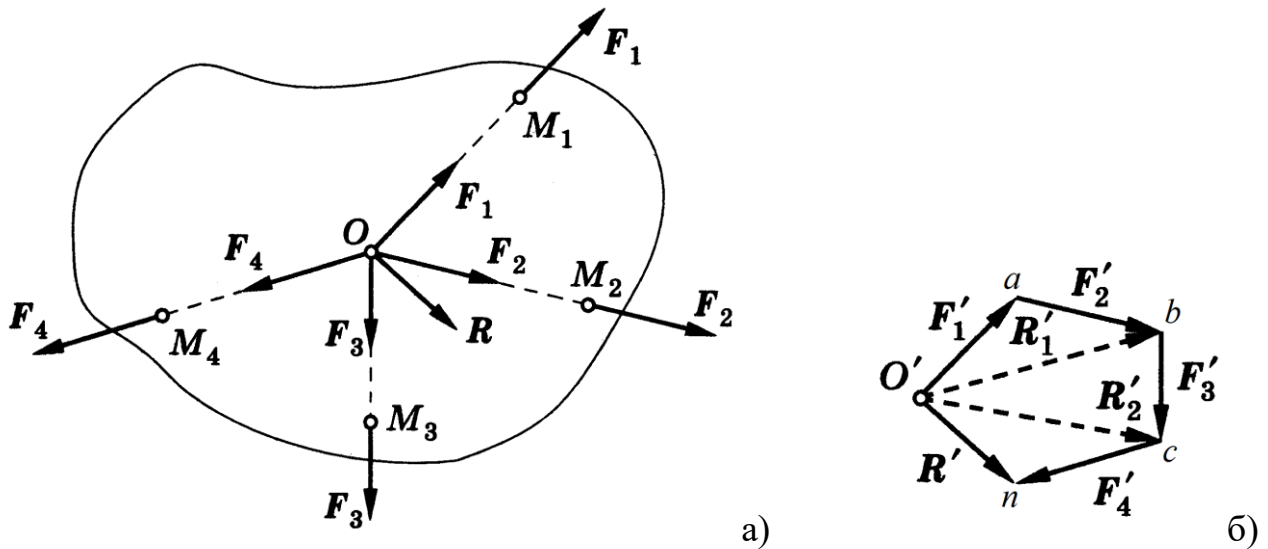


Рисунок 3 – Система сходящихся сил и её геометрическая сумма (главный вектор) $\vec{R}$, являющийся равнодействующей

Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твёрдому телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая была равна нулю.

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0. \quad (3)$$

В *геометрической форме* необходимое и достаточное условие равновесия системы сходящихся сил выражается в том, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым (рис. 4). В замкнутом многоугольнике сил все силы направлены по контуру многоугольника в одну сторону по обходу многоугольника.

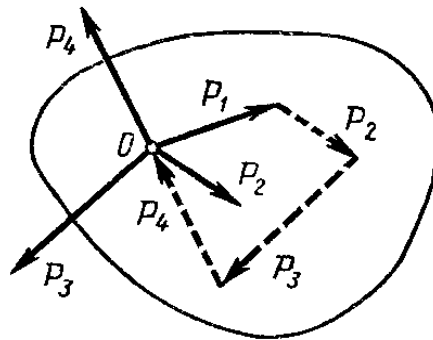


Рисунок 4 – Уравновешенная система сходящихся сил

Из условий равновесия системы сходящихся сил в пространственной задаче можно определить три неизвестных, а в плоской задаче – две неизвестных. В качестве неизвестных в плоской системе сходящихся сил могут выступать:

- а) модуль и направление одной силы;
- б) модуль одной из сил и направление второй;
- в) направления двух сил данной системы;
- г) модули двух сил.

Направление силы на плоскости выражается величиной угла между вектором силы и заданным направлением (другой силы). Точки приложения сил можно переносить вдоль их линий действия, не изменяя условие равновесия, поэтому положение точки приложения силы на линии действия не определяется. Точкой приложения всех сил системы сходящихся сил можно считать точку пересечения их линий действия.

Можно выделить три метода нахождения неизвестных составляющих векторных величин (три метода решения задач): графический, графоаналитический, аналитический.

Графический метод предполагает изображение многоугольника сил в выбранном масштабе. Неизвестные величины модулей и направлений получают измерением на чертеже. Метод непригоден для пространственной системы сил и имеет невысокую точность, определяемую точностью построений и измерений. Но графический метод – самый наглядный метод.

Задача 1 и её решение

Фонарь весом 90 Н подвешен на кронштейне ВАС (рисунок 5). Определить реакции горизонтального стержня АВ и наклонной тяги АС, если угол ВАС равен $\alpha=30^\circ$, крепления в точках А, В и С шарнирные.

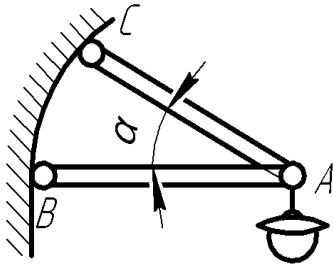


Рисунок 5 – Схема кранштейна

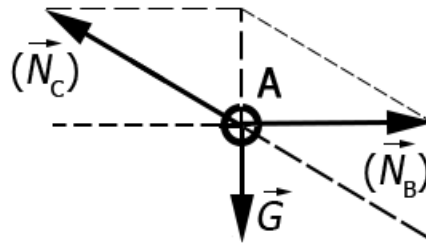


Рисунок 6 – Силы, действующие на шарнир А. В скобках – те силы, модули которых не известны.

Анализ условий задачи 1.

Линия действия силы $\vec{G}$ – веса фонаря проходит через точку A , в которой фонарь подвешен. Но точка A неподвижна благодаря действию приложенных к ней сил реакции со стороны стержней $\vec{N}_B$ и $\vec{N}_C$. От шарнира к шарниру через стержень любой формы передаётся только сила, линия действия которой проходит через центры шарниров. Следовательно, линия действия $\vec{N}_B$ – это прямая AB , линия действия $\vec{N}_C$ – это прямая AC . Точка A находится в равновесии под действием трёх сходящихся сил, расположенных в одной плоскости (рис. 6). Сила $\vec{G}$ известна полностью, у двух других сил известны линии действия, но неизвестны модули. Две неизвестных величины можно определить из одного векторного уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил.

Решение задачи 1 графическим методом

Так как шарнир A под действием трёх сил находится в равновесии, силовой треугольник, составленный из них, должен быть замкнутым. Выбираем произвольную точку D (рисунок 7) и откладываем от неё отрезок DE , изображающий силу $\vec{G}$. Если выбрать длину отрезка DE , например, 22,5 мм, то масштаб изображения сил

$$\mu_{\text{сил}} = \frac{G}{DE} = \frac{90}{22,5} \frac{\text{Н}}{\text{мм}} = 4 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}.$$

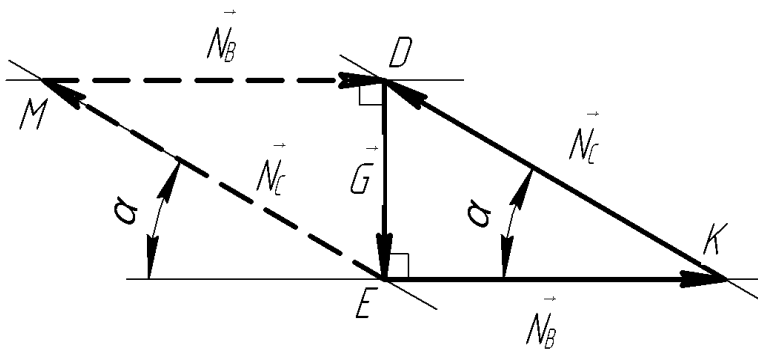


Рисунок 7 – Два варианта построения треугольника сил

Поскольку сила реакции стержня АВ перпендикулярна к $\vec{G}$, то через точку Е (или D) проводим вспомогательную прямую, перпендикулярную к DE. Поскольку сила реакции стержня АС проходит под углом $\alpha=30^\circ$ к АВ, отложенным по часовой стрелке, то через точку D (или E) проводим вспомогательную прямую под углом $\alpha=30^\circ$ к проведенной ранее вспомогательной прямой. Находим точку пересечения вспомогательных прямых К (или М). Полученный треугольник DEК (или DEM) изображает замкнутый многоугольник сил, действующих на точку А. Направления сил на полученных отрезках обозначаем стрелками так, чтобы начало следующего вектора совпало с концом предыдущего. Треугольник DEК соответствует порядку слагаемых $\vec{G} + \vec{N}_B + \vec{N}_C = 0$ (а треугольник DEM соответствует порядку слагаемых $\vec{G} + \vec{N}_C + \vec{N}_B = 0$). Измеряем на плане сил отрезки $EK=MD=39$ мм, $KD=EM=45$ мм. Следовательно,

$$N_B = \mu_{\text{сил}} \cdot |EK| = 4 \frac{\text{Н}}{\text{мм}} \cdot 39 \text{ мм} = 156 \text{ Н},$$

$$N_C = \mu_{\text{сил}} \cdot |KD| = 4 \frac{\text{Н}}{\text{мм}} \cdot 45 \text{ мм} = 180 \text{ Н}.$$

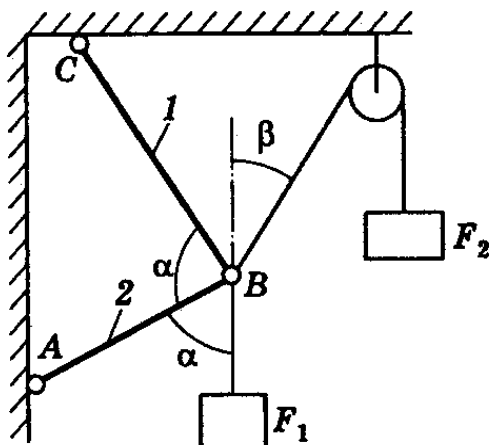
В рассмотренной задаче была задана одна сила – вес фонаря $\vec{G}$. Если будут заданы несколько сил, можно их сложить как векторы и получить одну силу - равнодействующую заданных сил.

Задача 2 и её решение

Задача 2. Два стержня соединены шарниром **В** между собой, а шарнирами **А** и **С** соединены с основанием (рисунок 8). К собранному таким образом кронштейну в точке **В** привязаны два каната, натянутые заданными силами F_1 и F_2 . Стержни и ка-

наты располагаются в одной плоскости, к которой перпендикулярны оси шарниров и ось блока, направляющего канат.

Определить продольные силы в стержнях BC (1) и BA (2). Собственный вес стержней и канатов, а также трение не учитывать.



Дано:

Значения углов: $\alpha=80^\circ$, $\beta=60^\circ$;

силы натяжения канатов:

$F_1=100$ кН, $F_2=75$ кН.

Рисунок 8 – Исходная схема к задаче 2

Решение задачи 2. Уточнение схемы конструкции.

Так как силы действуют только вдоль стержней и канатов, а вес стержней и канатов не учитывается, то не имеют значения длины стержней и канатов. Их можно изображать любой длины. Важны только направления, задаваемые углами.

Углы наклона стержней и канатов α и β различаются по вариантам задания (таблица 2), поэтому общую схему нужно уточнить, вычертить её в соответствии с заданными углами. На нашей схеме базой отсчёта всех углов служит вертикаль – направление первого каната и силы F_1 . От неё откладываем по часовой стрелке угол $\alpha=80^\circ$ и получаем направление стержня BA и линию действия силы N_A , с которой стержень 2 действует на шарнир B (рисунок 9).

От направления силы F_1 , откладываем по часовой стрелке угол $2\alpha=160^\circ$ и получаем направление стержня BC и линию действия силы N_C , с которой стержень 1 действует на шарнир B .

От направления, противоположного силе F_1 , откладываем по часовой стрелке угол $\beta=60^\circ$ и получаем направление второго каната и силы F_2 (рисунок 9).

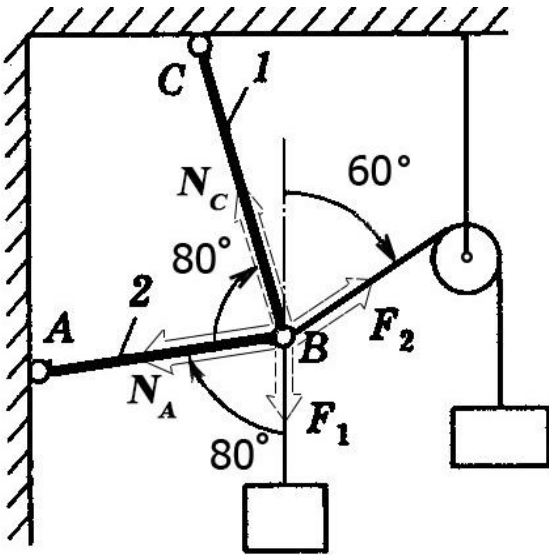


Рисунок 9 – Уточнённая по заданным углам схема конструкции

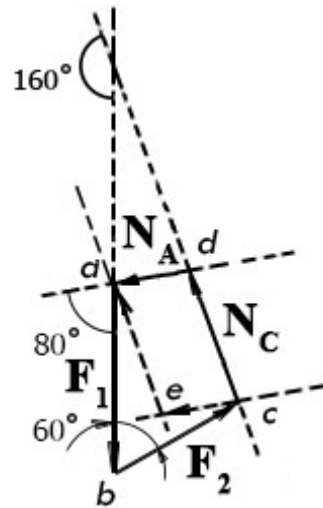


Рисунок 10 – План сил, действующих на шарнир В.

Решение графическим методом

Далее рассмотрим равновесие точки В под действием двух заданных сил F_1 , F_2 и двух сил реакции стержней N_A , N_C . **Построим план сил**, то есть цепочку сил (рисунок 10), приложенных к точке В кронштейна. Начинаем с известных сил F_1 и F_2 . Строим сумму F_1+F_2 (или F_2+F_1). От произвольной точки a проводим вектор ab произвольной длины, например 50 мм, изображающий силу F_1 . (Рисунок 10 и рисунок 11 (а)). Находим масштаб изображения силы

$$\mu_{\text{сил}} = \frac{F_1}{ab} = \frac{100 \text{ кН}}{50 \text{ мм}} = 2 \frac{\text{кН}}{\text{мм}}.$$

К силе F_1 прибавляем известную силу F_2 . Для этого из точки b конца первого слагаемого проводим луч в направлении силы F_2 (рисунок 10 и рисунок 11 (б)) под углом $\beta=60^\circ$ по часовой стрелке к направлению, обратному вектору ab . На луче откладываем длину вектора bc , изображающего силу F_2 в том же масштабе

$$bc = \frac{F_2}{\mu_{\text{сил}}} = \frac{75}{2} \frac{\text{кН}}{\text{кН/мм}} = 37,5 \text{ мм}.$$

Сумму известных сил F_1+F_2 (или F_2+F_1) можно изобразить вектором ac , но не будем перегружать чертёж. Достаиваем замкнутый четырёхугольник неизвестными по модулю силами. Через точки a и c проводим вспомогательные прямые, параллельные силам N_A и N_C под углом $\alpha=80^\circ$ и $2\alpha=160^\circ$ соответственно к вектору ab по

часовой стрелке. (Штриховые линии на рисунке 10 и на рисунке 11 (в)). Находим точку пересечения линий действия d (или e). Получили замкнутый многоугольник векторов $abcd$ (или $abce$), который изображает многоугольник сил в масштабе 2 кН/мм (рис. 10 и рис. 11 (г)). Измеряем линейкой отрезок cd (или ea), получаем $|cd|=|ea|=37$ мм и находим модуль силы N_C :

$$N_C = \mu_{\text{сил}} cd = 2 \frac{\text{кН}}{\text{мм}} 37 \text{ мм} = 74 \text{ кН}.$$

Измеряем линейкой отрезок da (или ce), получаем $|da|=|ce|=20$ мм и находим модуль силы N_A :

$$N_A = \mu_{\text{сил}} da = 2 \frac{\text{кН}}{\text{мм}} 20 \text{ мм} = 40 \text{ кН}.$$

Стрелки векторов, изображающих неизвестные силы, на плане сил расставляем так, чтобы начало следующего вектора совпадало с концом предыдущего.

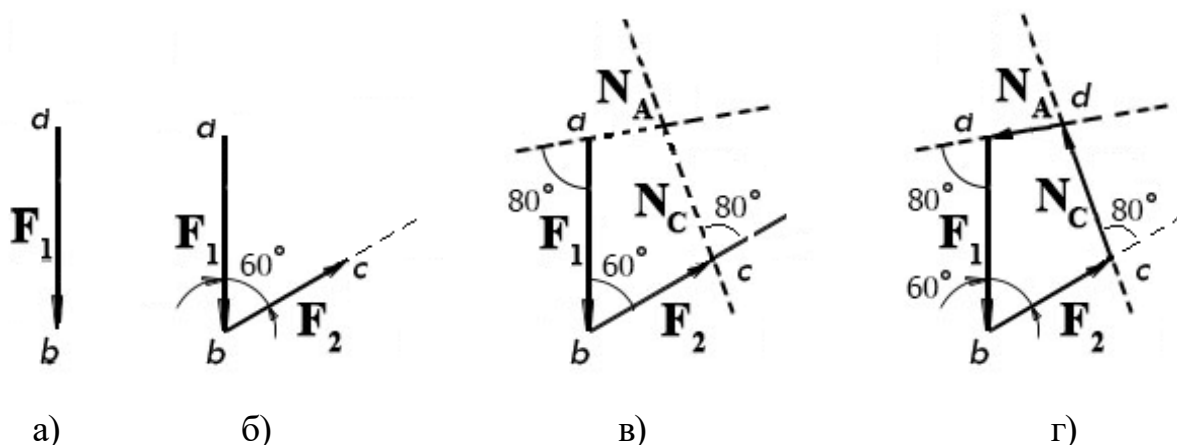


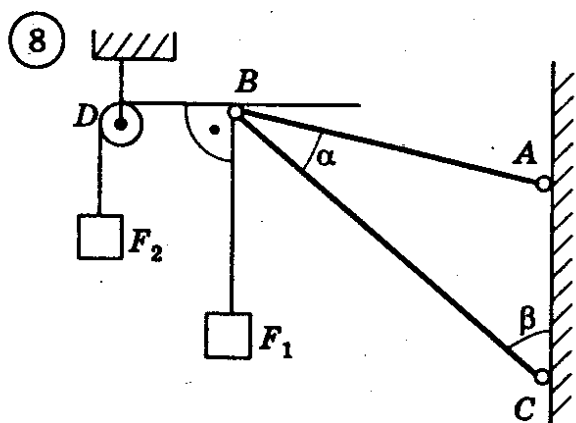
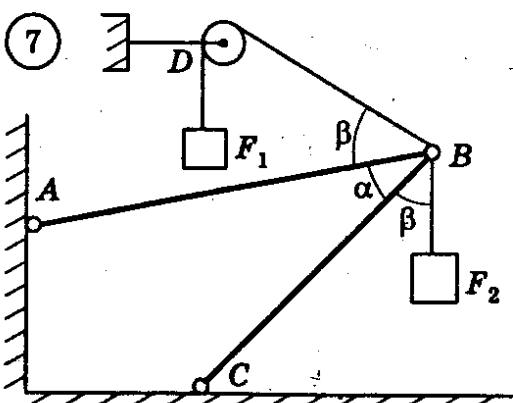
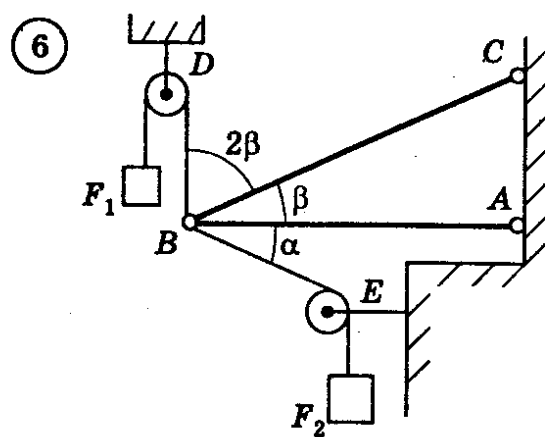
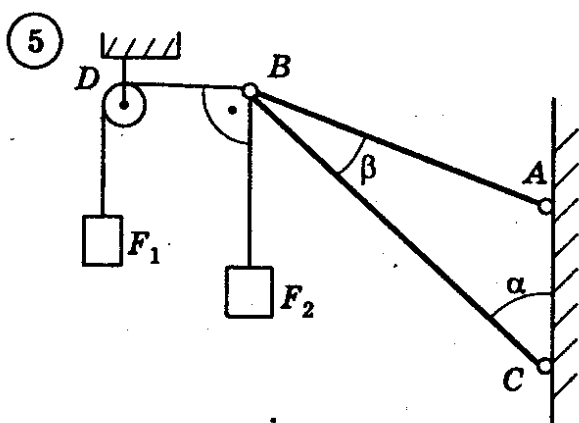
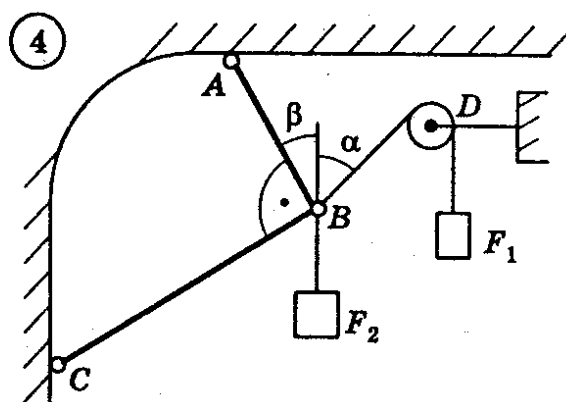
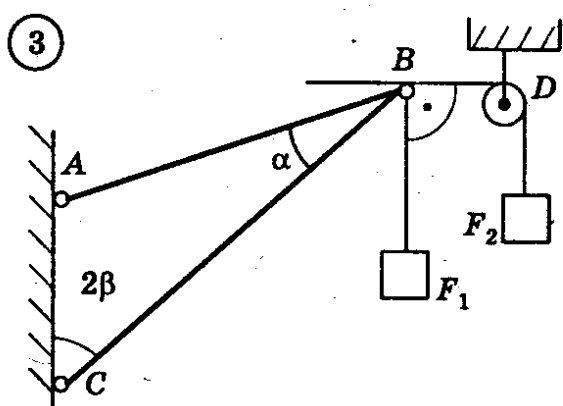
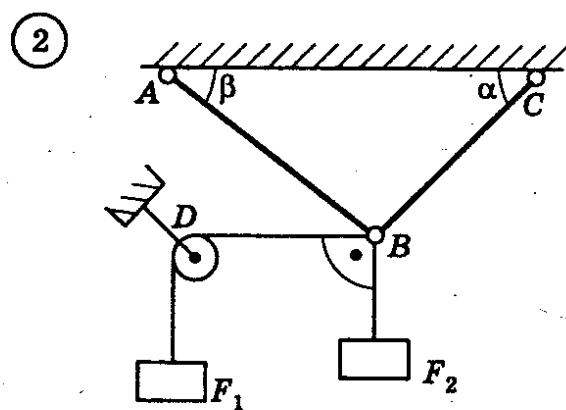
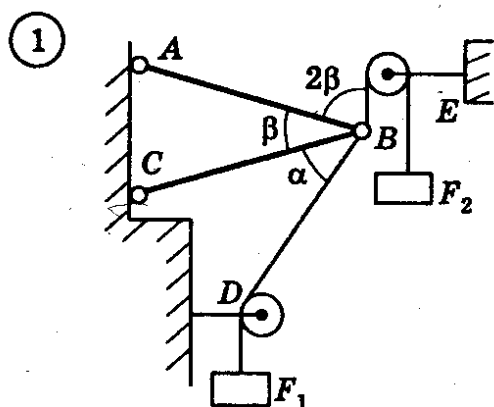
Рисунок 11 – Последовательность выполнения графических построений

Задание

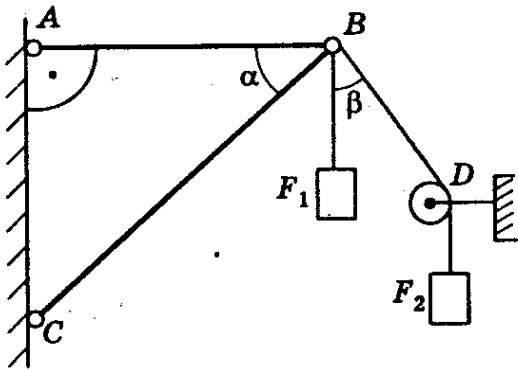
Для шарнирно-стержневой конструкции ABC , нагруженной в шарнире B , определить продольные силы в стержнях 1 и 2 графическим методом.

Схемы конструкций приведены в таблице 1. Как правило, номер схемы выбирается по номеру студента в списке группы. Числовые данные приведены в таблице 2. Номер варианта числовых данных, общий для всех студентов группы, назначает преподаватель.

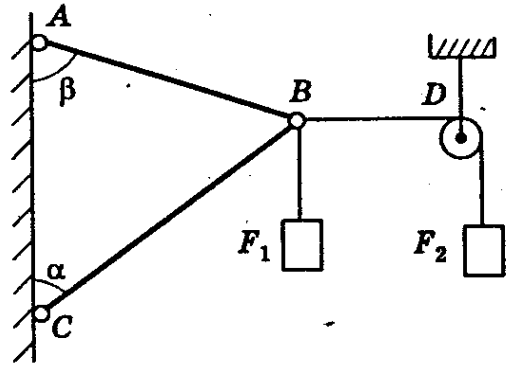
Таблица 1 – Схемы к заданию



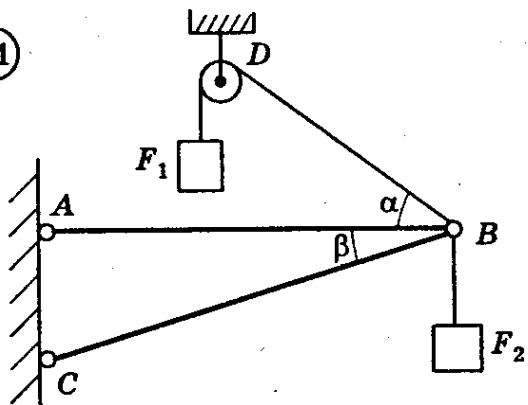
⑨



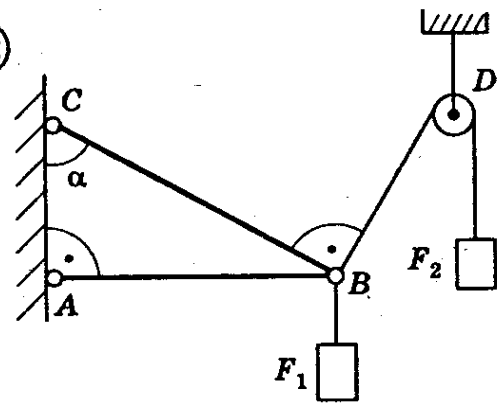
⑩



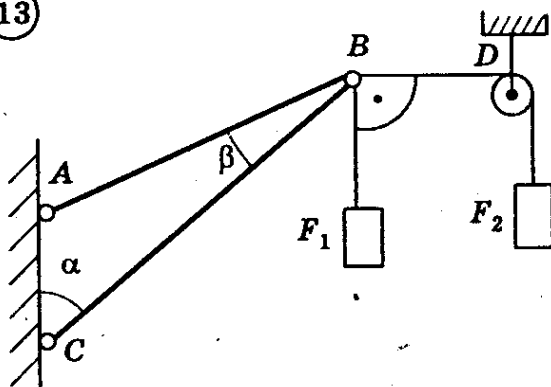
⑪



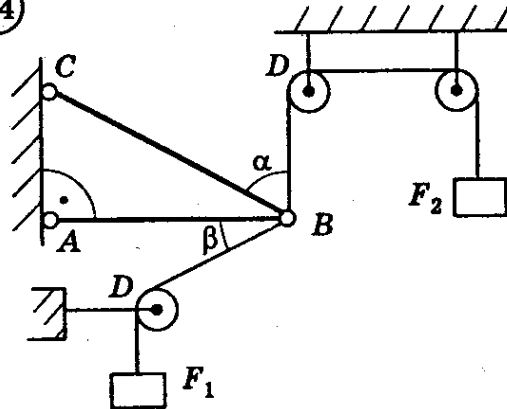
⑫



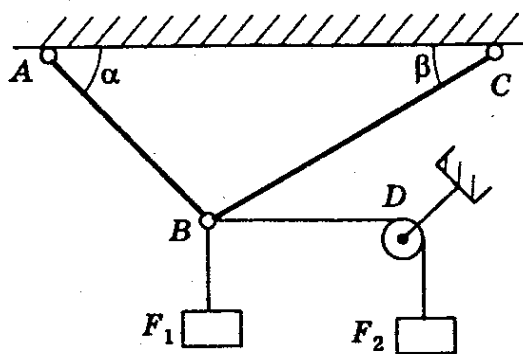
⑬



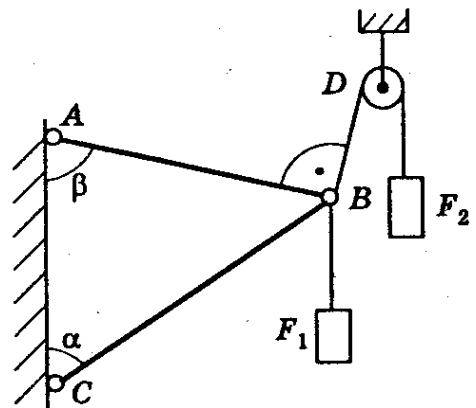
⑭

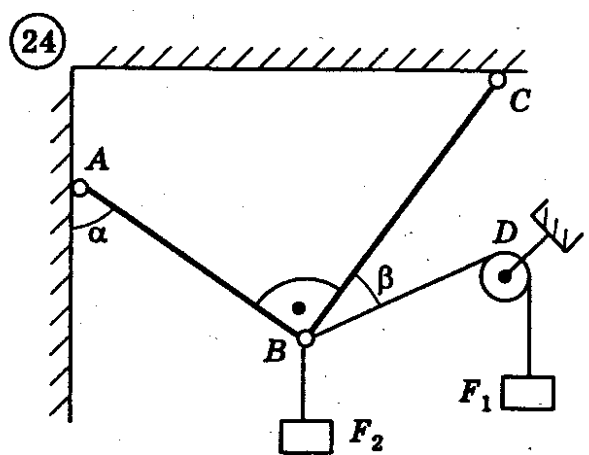
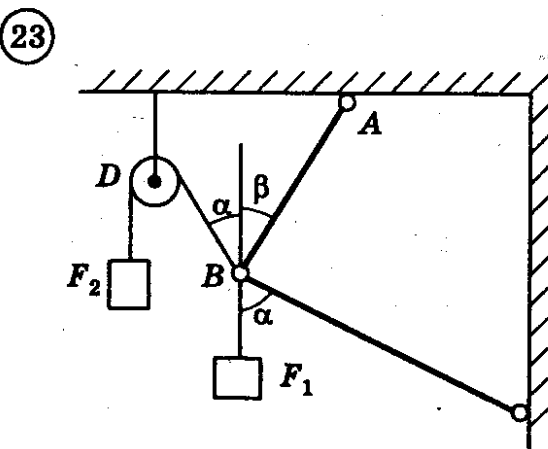
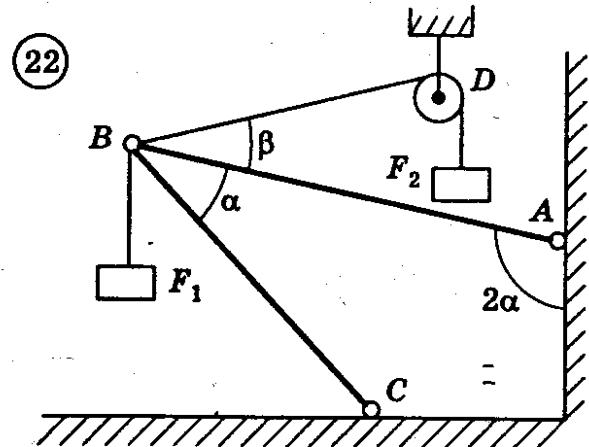
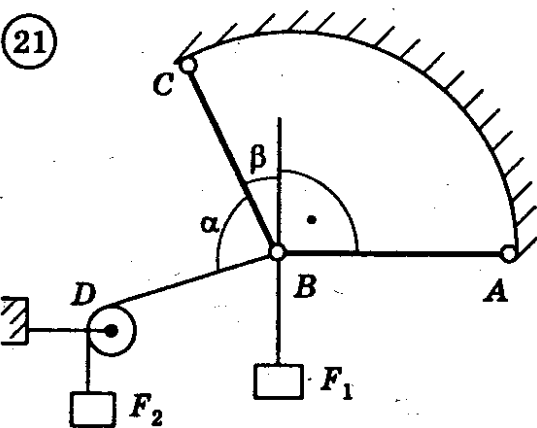
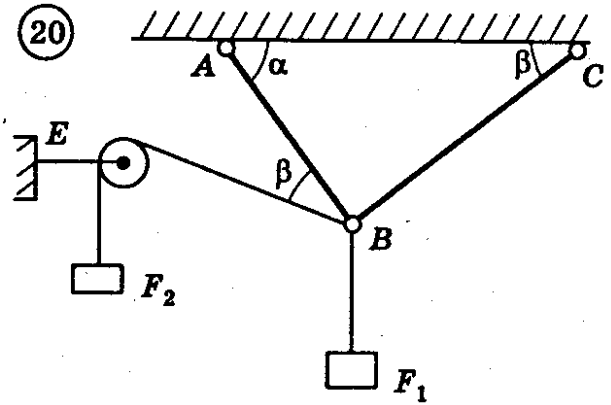
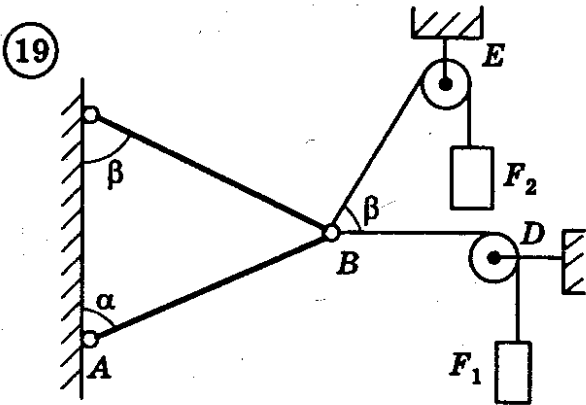
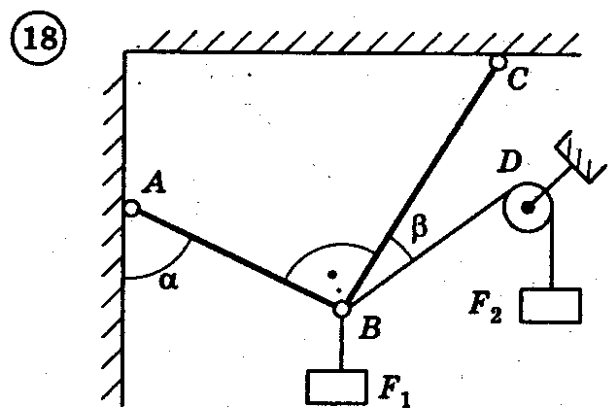
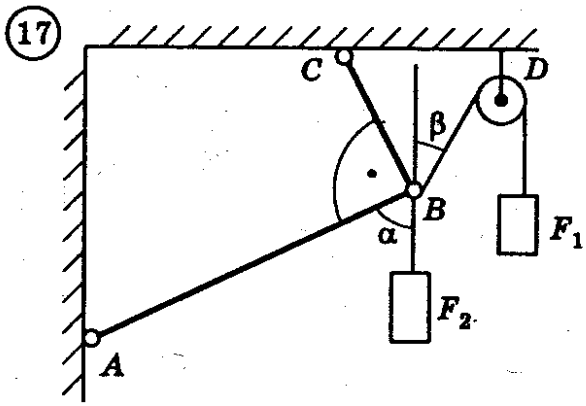


⑮

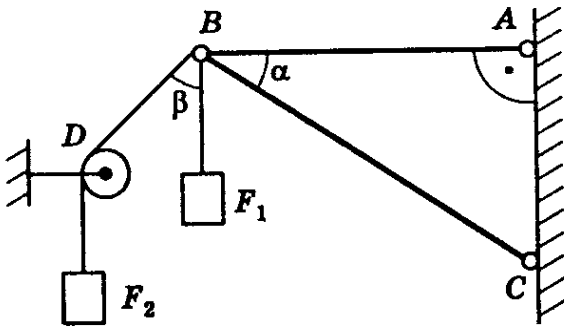


⑯

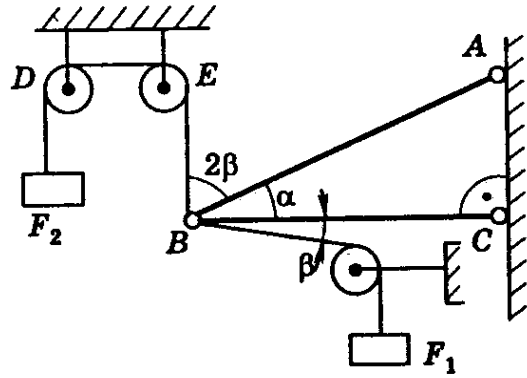




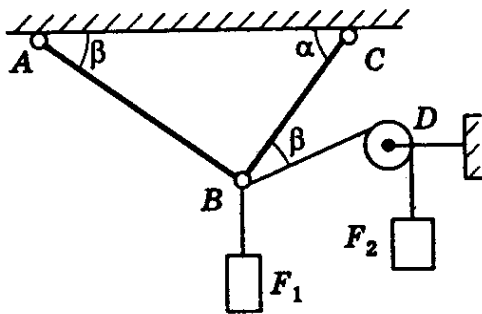
(25)



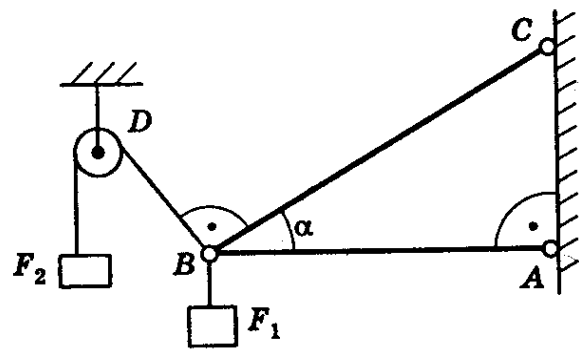
(26)



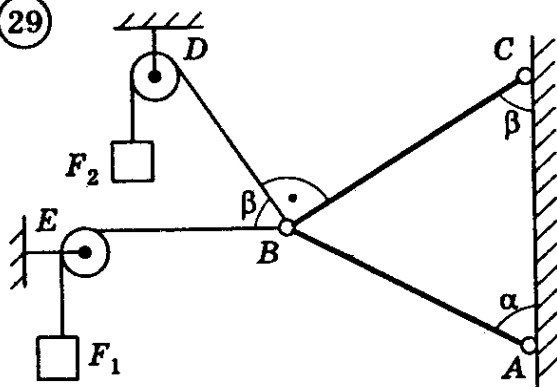
(27)



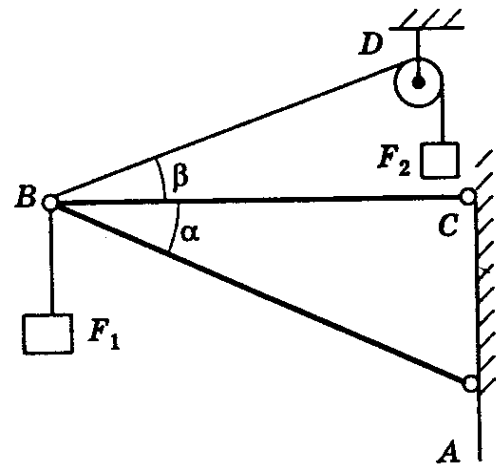
(28)



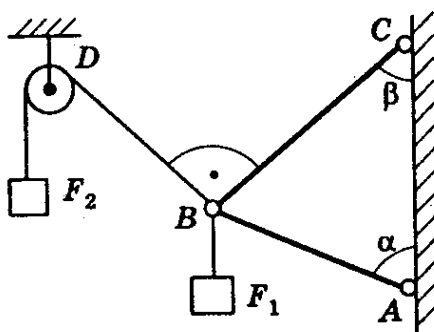
(29)



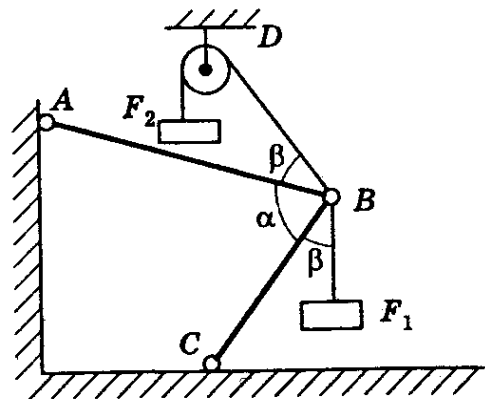
(30)



(31)



(32)



Каждой принципиальной схеме конструкции из таблицы 1 соответствует 15 возможных вариантов числовых значений в таблице 2. Студент должен перечертить схему, соответствующую его номеру в списке группы, выдерживая значения углов α и β наклона стержней и канатов, которые заданы всей студенческой группе по таблице 2.

Таблица 2 – Числовые данные для определения сил в стержнях (и проверки стержней на прочность – в одном из следующих занятий)

Номер варианта	Угол наклона, град		Модуль силы, кН		Площадь поперечного сечения стержня, см ²	
	α	β	F_1	F_2	A_1	A_2
1	50	40	100	90	10	16
2	40	30	140	100	12	14
3	50	20	120	100	14	12
4	60	10	100	90	16	10
5	70	10	90	80	18	8
6	80	20	80	120	8	10
7	80	30	100	70	10	12
8	70	40	120	80	12	14
9	60	50	110	90	14	16
10	50	30	140	100	16	18
11	30	40	100	140	18	20
12	40	20	90	130	20	18
13	30	50	120	80	18	16
14	50	60	70	100	16	14
15	30	60	100	130	10	14

Вопросы для проверки знаний

1. Закон параллелограмма сил.
2. Что называют системой сходящихся сил?
3. В чём выражается геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил?
4. Сжимаются или растягиваются стержни АВ, АС в первой задаче?
5. Бывает ли одинаковый масштаб изображения сил и чертежа конструкции?
6. Что называют линией действия силы?
7. Как определить направление силы в шарнирно закреплённом стержне графическим методом?
8. Какие неизвестные величины, характеризующие силу, можно определять из условия равновесия сходящейся системы сил?
9. Как должны быть направлены стержни кронштейна, чтобы в них возникали одинаковые по модулю силы?
10. Как изменить наклон стержней, чтобы уменьшить силы в них?

Задание повышенной сложности:

Определить, при каких значениях углов α и β силы в стержнях не превысят 140 кН в каждом. Значения сил натяжения канатов F_1 и F_2 оставить прежними (таблица 2).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ДАННОЙ ТЕМЕ

1. Теоретическая механика : учебник / А. Я. Корнилов, А. В. Воробьева, С. К. Иванов, А. В. Лановая. — Москва : Юриспруденция, 2024. — 248 с. — ISBN 978-5-9516-0952-6. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/147352.html>
2. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего

профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011>.

3. Молотников, В. Я. Механика конструкций. Теоретическая механика. Сопротивление материалов : учебное пособие / В. Я. Молотников. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-1327-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/211064>

4. Соколовская, В.П. Механика. Практикум по решению задач: учеб. пособие / В.П. Соколовская. — Мн.: Новое знание, 2006. — 316 с.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОДЫ СЛОЖЕНИЯ СИЛ ПЛОСКОЙ СХОДЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ

Цель работы: получение навыков вычисления проекций сил, выбора направлений осей, составления уравнений равновесия.

Задача: определение неизвестных сил из условия равновесия сходящейся плоской системы сил аналитическим методом.

Теоретическая часть

Графоаналитический метод использует изображения как иллюстрации. Модули и направления находят, последовательно решая треугольники, которые получаются при сложении и вычитании двух векторов. Если $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, то по теореме косинусов модуль суммы равен

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}, \quad (1)$$

а углы треугольника и модули сил связаны теоремой синусов

$$\frac{R}{\sin(180 - \alpha)} = \frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \gamma}, \quad (2)$$

где α – угол между направлениями сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, β – угол между направлениями $\vec{F}_2$ и $\vec{R}$, γ – угол между направлениями $\vec{F}_1$ и $\vec{R}$. Этот метод удобен для задач о равновесии трёх сил.

Аналитический метод (метод проекций) заключается в проецировании векторного уравнения равновесия на оси координат и решении системы полученных уравнений.

Проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

$$R_x = \sum F_{kx}; \quad R_y = \sum F_{ky}; \quad R_z = \sum F_{kz}. \quad (3)$$

Вектор равен нулю, когда его модуль равен нулю

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0. \quad (4)$$

Для этого одновременно должны выполняться 3 условия

$$R_x = \sum F_{kx} = 0; \quad R_y = \sum F_{ky} = 0; \quad R_z = \sum F_{kz} = 0, \quad (5)$$

которые выражают необходимое и достаточное условие равновесия системы сходящихся сил в *аналитической форме*: для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трёх координатных осей были равны нулю.

Если все действующие на тело сходящиеся силы лежат в одной плоскости, то они образуют плоскую систему сходящихся сил, и остаются два условия равновесия

$$R_x = \sum F_{kx} = 0; \quad R_y = \sum F_{ky} = 0. \quad (6)$$

Знак минус у найденной проекции свидетельствует о её направлении в сторону, противоположную первоначально выбранной. Аналитический метод является универсальным.

ЗАДАЧА 1 И ЕЁ РЕШЕНИЕ

Фонарь весом 90 Н подвешен на кронштейне ВАС (рисунок 1). Определить реакции горизонтального стержня АВ и наклонной тяги АС, если угол ВАС равен $\alpha=30^\circ$, крепления в точках А, В и С шарнирные.

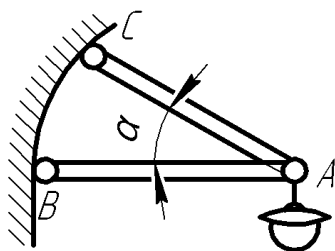


Рисунок 1

Решение графоаналитическим методом.

Изображаем силовой треугольник как в графическом методе, но только для наглядности, без определения масштаба. Т.к. стержень АВ расположен горизонтально, то он и сила $\vec{N}_B$ перпендикулярны направлению силы тяжести фонаря $\vec{G}$. Силовой треугольник является прямоугольным. Тогда

$$N_B = \frac{G}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{90}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 155,9 \text{ Н},$$

$$N_C = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{90}{\sin 30^\circ} = 180 \text{ Н.}$$

Решение аналитическим методом.

Выбираем направление осей координат: ось Ox – по горизонтали, ось Oy – по вертикали (рисунок 2). Составляем уравнения проекций сил на оси координат (6).

$$\sum F_{kx} = 0; \quad N_B - N_C \cos \alpha = 0.$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad N_C \sin \alpha - G = 0.$$

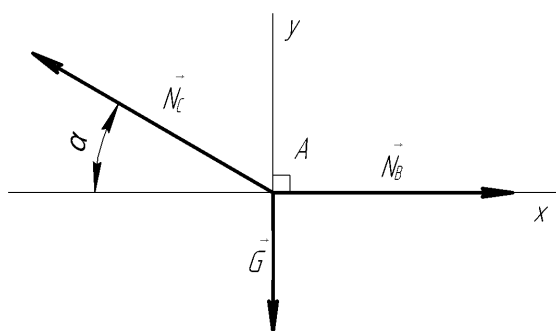


Рисунок 2

Из второго уравнения

$$N_C = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{90}{\sin 30^\circ} = 180 \text{ Н.}$$

Из первого уравнения $N_B = N_C \cos \alpha = 180 \cos 30^\circ = 155,9 \text{ Н.}$

Получение положительного значения силы подтверждает правильность выбора направления вектора силы на её линии действия. (Получение отрицательного значения свидетельствует о противоположном направлении вектора.). Ответы сравниваем с теми, что получены графическим методом решения в предыдущей работе.

В рассмотренной задаче была задана одна сила – вес фонаря $\vec{G}$. Если будут заданы несколько сил, можно сложить их проекции на соответствующие оси и получить проекции равнодействующей заданных сил. Далее решаем аналогично рассмотренной задаче.

Задача 2 и её решение

Задача 2. Шарнирно-стержневая конструкция ABC нагружена в шарнире B заданными силами натяжения канатов F_1 и F_2 (рисунок 3). Определить продольные силы: N_C – в стержне BC (1) и N_A – в стержне BA (2).

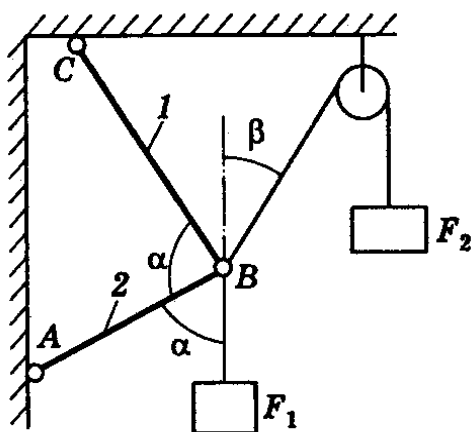


Рисунок 3 – Исходная схема к задаче 2, вычерченная при произвольных значениях углов α и β

Решение задачи 2 аналитическим методом

Заданы значения углов: $\alpha=80^\circ$, $\beta=60^\circ$,

и силы натяжения канатов: $F_1=100$ кН, $F_2=75$ кН.

Вычерчиваем схему в соответствии с заданными углами (рисунок 4).

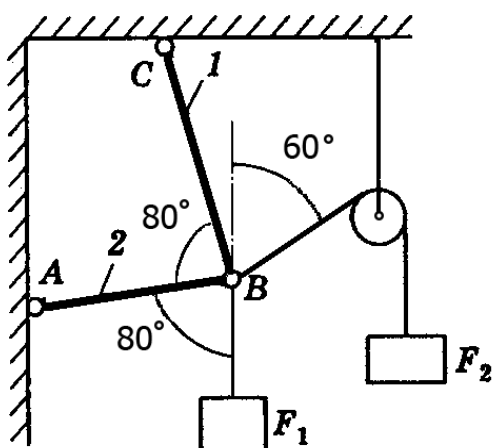


Рисунок 4 – Уточнённая по заданным углам схема конструкции

Вырезаем узел B и изображаем его отдельно с действующими на него силами. Длины векторов сил – произвольные (рисунки 5, 6, 7). Точка B находится в равновесии под действием четырёх сходящихся сил, расположенных в одной плоскости. Канаты тянут точку B в указанных на схеме направлениях с заданными силами F_1 и F_2 . Линия действия силы N_C реакции стержня BC проходит через шарниры B и C . Линия действия силы N_A реакции стержня BA проходит через шарниры B и A . Векторы N_A и N_C можно предварительно направить от точки B , или к ней. Если решение уравнения даст положительное числовое значение силы – значит направление выбрано верно, если отрицательное – значит реакция направлена в противоположную сторону.

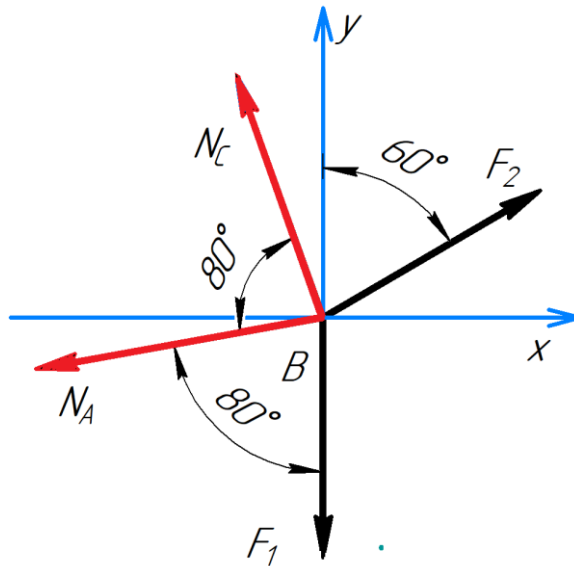


Рисунок 5 – Проецирование сил на оси x и y

Размещаем в точке B начало координат. Для нахождения двух неизвестных величин в плоской системе сил нам понадобятся две оси. Можно привычно направить ось x слева направо и ось y снизу вверх (рис. 5). Потом спроецировать все силы на каждую ось и приравнять эти суммы к нулю (формулы 6). Но в этом случае на каждую ось проецируются две неизвестных N_A и N_C . Придётся решать систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} -N_A \cos 10^\circ - N_C \cos 70^\circ + F_2 \cos 30^\circ + F_1 \cos 90^\circ &= 0 \\ -N_A \cos 80^\circ + N_C \cos 20^\circ + F_2 \cos 60^\circ - F_1 \cos 0^\circ &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Разделить неизвестные в уравнениях равновесия можно не только методами математики, но и методом механики. Воспользуемся тем, что $\cos 90^\circ = 0$. Проведём ось U перпендикулярно к неизвестной силе N_A , (рис. 6) чтобы исключить эту силу из суммы проекций на ось U .

Проведём ось V перпендикулярно к неизвестной силе N_C (рис. 7), чтобы исключить эту силу из суммы проекций на ось V . В таком случае каждое из двух уравнений будет содержать только одну неизвестную величину.

По схеме конструкции вычисляем углы между силами и осями. Обозначаем эти углы на рисунках 6 и 7. Составляем два уравнения равновесия.

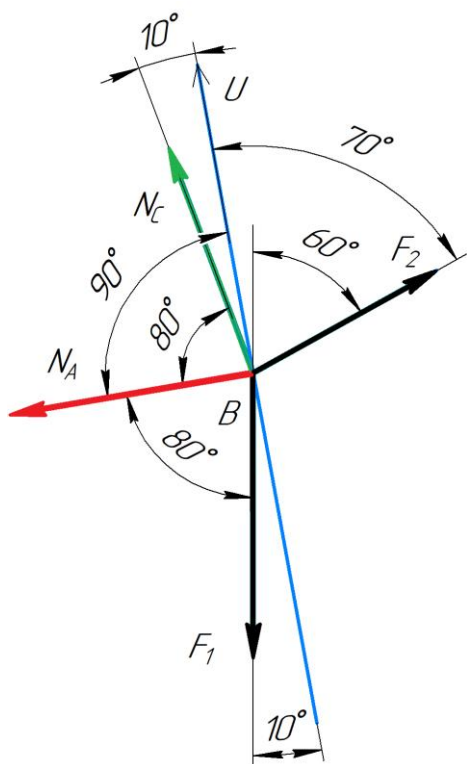


Рис. 6 – Проецирование сил на ось U

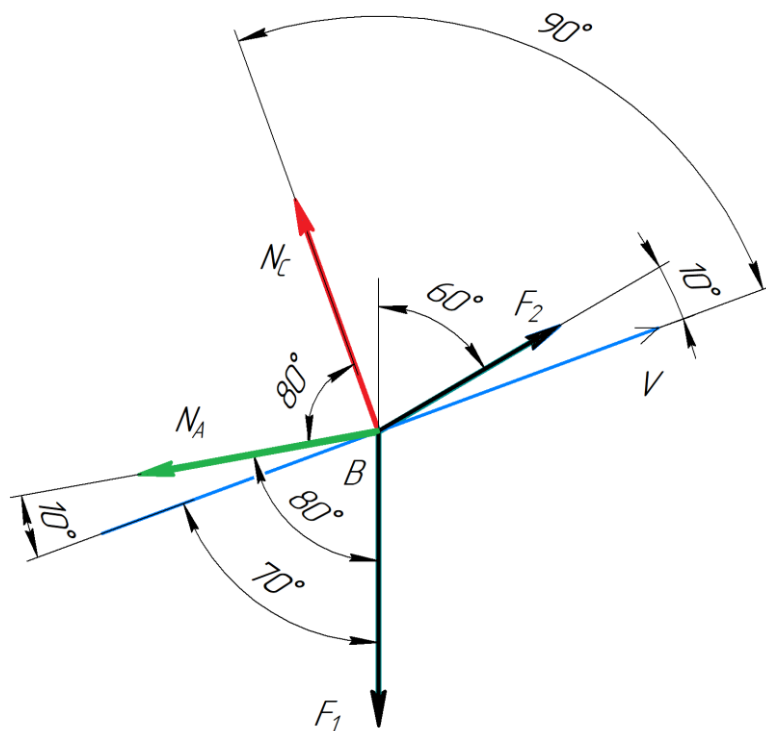


Рис. 7 – Проецирование сил на ось V

$$\sum F_{iU} = 0; \quad N_C \cos 10^\circ + F_2 \cos 70^\circ - F_1 \cos 10^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iV} = 0; \quad -N_A \cos 10^\circ + F_2 \cos 10^\circ - F_1 \cos 70^\circ = 0;$$

Из которых находим

$$N_C = \frac{-F_2 \cos 70^\circ + F_1 \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{-75 \cdot 0,342}{0,9848} + 100 = 73,95 \text{ кН};$$

$$N_A = \frac{F_2 \cos 10^\circ - F_1 \cos 70^\circ}{\cos 10^\circ} = 75 - 100 \frac{0,342}{0,9848} = 40,27 \text{ кН}.$$

Получены положительные числовые значения сил, следовательно, они направлены от точки В, как и предполагалось.

Сравним этот результат с тем, который был получен графическим методом в предыдущей работе. Направления сил совпадают, числовые значения приблизительно совпадают.

Задание

Шарнирно-стержневая конструкция ABC нагружена в шарнире B заданными силами натяжения канатов F_1 и F_2 . Определить продольные силы: N_C – в стержне BC и N_A – в стержне BA .

Варианты заданий следует взять из методических указаний к работе «**Графический метод сложения сил плоской сходящейся системы**». Схемы конструкций приведены в таблице 1. Как правило, номер схемы выбирается по номеру студента в списке группы. Числовые данные приведены в таблице 2. Номер варианта числовых данных, общий для всех студентов группы, назначает преподаватель.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ

1. Как производится проецирование вектора силы на ось, на плоскость?
2. Как вычислить модуль проекции?
3. Условия равновесия пространственной системы сходящихся сил в аналитической форме.
4. Условия равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ДАННОЙ ТЕМЕ

1. Теоретическая механика : учебник / А. Я. Корнилов, А. В. Воробьева, С. К. Иванов, А. В. Лановая. — Москва : Юриспруденция, 2024. — 248 с. — ISBN 978-5-9516-0952-6. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/147352.html>
2. Соколовская, В.П. Механика. Практикум по решению задач: учеб. пособие / В.П. Соколовская. — Мн.: Новое знание, 2006. — 316 с.
3. Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». -

Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

4. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гуменова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. -

URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

5. Цыви́льский В. Л. Теоретическая механика. Учеб. для втузов / В. Л. Цыви́льский. – М. : Абрис, 2012. – 368 с.: ил. ISBN 978-5-4372-0079-7

<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=117515>

РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Цель работы: Изучение условий равновесия плоской произвольной системы сил.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

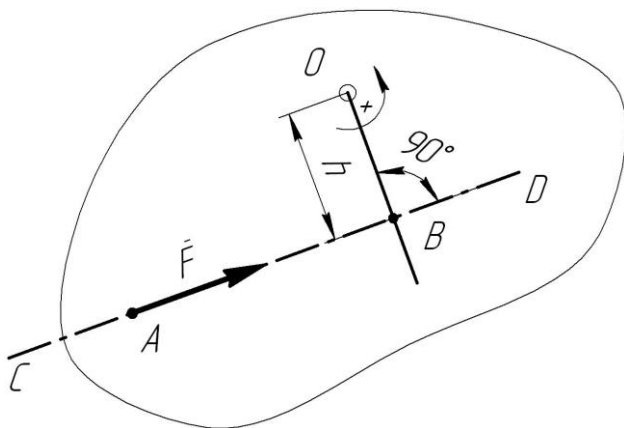
Плоской произвольной системой сил называют систему сил, как угодно расположенных в одной плоскости.

Момент силы относительно точки на плоскости

Для количественного измерения вращательного эффекта силы $\vec{F}$ используется понятие о моменте этой силы относительно некоторой точки O на плоскости. Рассмотрим силу $\vec{F}$, приложенную к телу в точке A . Из некоторого центра O опустим перпендикуляр на линию действия силы $\vec{F}$; длину h этого перпендикуляра называют плечом силы $\vec{F}$ относительно центра O .

Момент силы относительно некоторой точки O на плоскости равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо относительно этой точки. При этом будем считать, что момент силы $\vec{F}$ относительно точки O имеет знак «плюс», если эта сила стремится повернуть тело вокруг точки O против хода часовой стрелки, и знак «минус», — если по ходу часовой стрелки.

Момент силы $\vec{F}$ относительно точки O будем обозначать символом $M_O(\vec{F})$.



Следовательно,

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (1.1)$$

Рис. 1 – Определение момента силы $\vec{F}$ относительно точки O

Единица измерения момента силы – Ньютон умноженный на метр (Н·м).

Для определения момента силы относительно точки рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1. Прежде всего, нужно научиться «видеть» силу, момент которой определяем, и центр моментов – точку, относительно которой определяем момент (рис. 1 – сила $\vec{F}$ и центр моментов – точка O).
2. Проводим линию действия силы CD , продлевая вектор силы в обе стороны «до бесконечности».
3. Из центра момента O опускаем перпендикуляр на линию действия силы CD . Длина перпендикуляра $h=|OB|$ от центра момента до линии действия силы и есть плечо.
4. Находим знак момента. Если сила стремится повернуть плечо вокруг центра момента против хода часовой стрелки, то считаем момент положительным; если по ходу часовой стрелки, то отрицательным.
5. Находим числовое значение момента силы относительно точки, умножив модуль силы на плечо. Для примера, который представлен на рисунке,

$$M_O(\vec{F}) = +F \cdot |OB|.$$

Свойства момента силы относительно точки:

1. Момент силы относительно точки не изменится при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия, так как при этом не изменяется ни модуль силы, ни длина ее плеча.
2. Момент силы относительно точки равен нулю только в двух случаях: когда модуль силы равен нулю или когда линия действия силы проходит через точку, так как в этом последнем случае длина плеча равна нулю.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей: *момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно некоторой точки, лежащей в плоскости сил, равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки.*

Пара сил. Момент пары

*Система двух равных по модулю, параллельных друг другу и направленных в разные стороны сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, линии действия которых не совпадают (рисунок 2), образует так называемую **пару сил**.*

Алгебраическим моментом пары называется скалярная величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил

пары на ее плечо. Будем обозначать момент пары символом m или $m(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$.

Тогда

$$m = \pm F_1 d = \pm F_2 d. \quad (1.2)$$

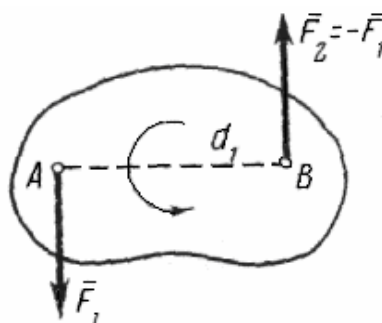


Рисунок 2 – Пара сил

Понятие момента пары не следует смешивать с моментом силы. Понятие момента силы связано с точкой, относительно которой берется этот момент. Момент пары ни с какой точкой плоскости не связан.

Теорема: Действие пары на тело не изменится, если эту пару заменить любой другой парой, лежащей в той же плоскости и имеющей тот же момент.

Пример решения задачи

На балку AB длиной $l=3$ м действует пара сил с моментом $M=2$ кН·м, сосредоточенная сила $F=6$ кН под углом $\alpha=60^\circ$ к продольной оси балки и распределенная нагрузка интенсивностью $q=2$ кН/м. Определить реакции опор A и B балки, если $AC=\frac{1}{3}AB$.

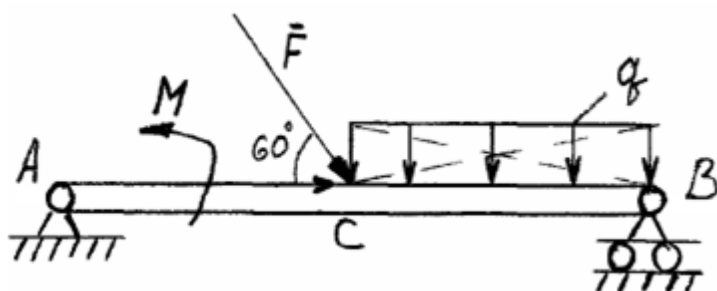
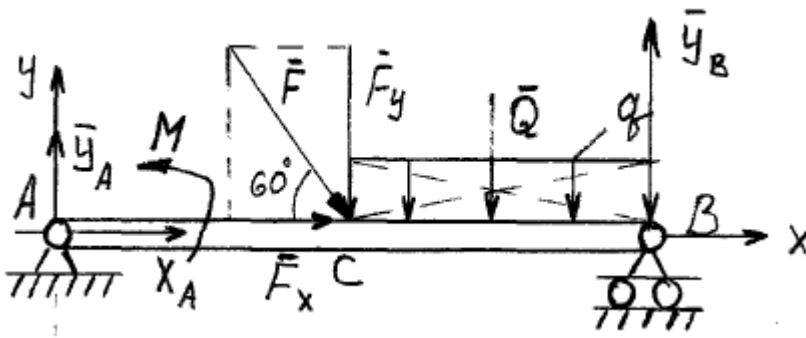


Рисунок 3

Решение:

В шарнирной неподвижной опоре A направление реакции неизвестно, поэтому представляем эту реакцию в виде двух неизвестных составляющих по осям x и y . В шарнирной подвижной опоре B реакция может быть направлена только перпендикулярно к дорожке катания опоры, то есть по оси y . Следовательно, требуется определить три неизвестных реакции X_A - ? Y_A - ? Y_B - ? Число неизвестных соответствует числу степеней свободы твёрдого тела в плоскости, поэтому задача статически определима.



Равнодействующая Q равномерно распределенной нагрузки интенсивности q :

$$Q = S_{\blacksquare} = CB \cdot q = \frac{2}{3} l \cdot q = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 4 \text{ кН.}$$

Рисунок 4

Составляющие силы $\vec{F}$ по осям x и y – F_x и F_y соответственно равны:

$$F_x = F \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ кН};$$

$$F_y = F \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5,3 \text{ кН.}$$

Для определения трех неизвестных реакций X_A, Y_A, Y_B составляем 3 уравнения равновесия полученной плоской произвольной системы сил (Рисунок 4):

$$1) \sum F_{kx} = 0; X_A + F_x = 0 \Rightarrow X_A = -F_x = -3 \text{ кН};$$

$$2) \sum F_{ky} = 0; Y_A - F_y - Q + Y_B = 0;$$

$$3) \sum M_A(\vec{F}_k) = 0; M - l \cdot F_y - 2 \cdot Q + 3 \cdot Y_B = 0; \Rightarrow Y_B = \frac{-M + l F_y + 2Q}{3} = \frac{-2 + 1 \cdot 5,3 + 2 \cdot 4}{3} = 3,73 \text{ кН.}$$

Подставляя найденную Y_B в уравнение 2, определяем $Y_A = F_y + Q - Y_B = 5,3 + 4 - 3,73 = 5,57 \text{ кН.}$

$$\text{Проверка: } \sum M_K(\vec{F}_k) = 0; 1Y_A - 1X_A + M - 1F_x - 2F_y - 2Q - 4Y_B = 0$$

$$1 \cdot 5,57 - 1 \cdot (-3) + 2 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 5,3 - 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3,73 = 0;$$

$$5,47 + 3 + 2 - 3 - 10,4 - 12 + 14,92 = 0;$$

$$25,39 - 25,4 = 0;$$

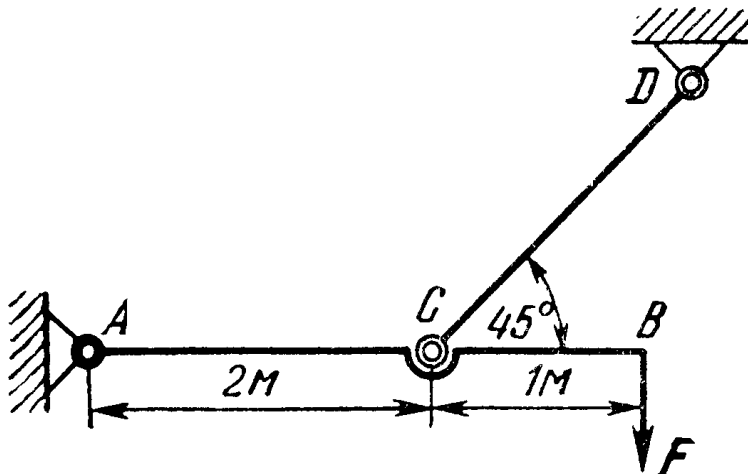
$$0,01 \approx 0$$

Знак " — " в значении реакции X_A указывает на то, что вектор $\overline{X_A}$ должен быть направлен противоположно показанному на рисунке 4 для равновесия данной плоской произвольной системы сил.

Ответ: $X_A = -3\text{кН}$; $Y_A = 5,47\text{кН}$; $Y_B = 3,73\text{кН}$.

Задачи

Задача 1.

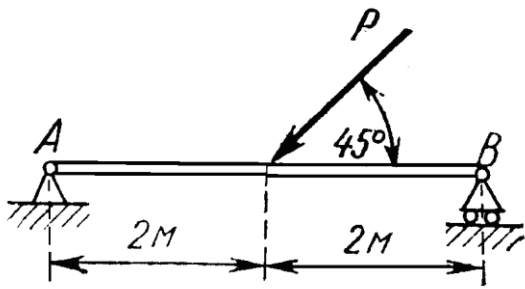


Балка AB поддерживается в горизонтальном положении стержнем CD ; крепления в A, C и D шарнирные. Определить реакции опор A и D , если на конце балки действуют вертикальная сила $F=5\text{кН}$. Размеры указаны на рисунке. Весом пренебречь.

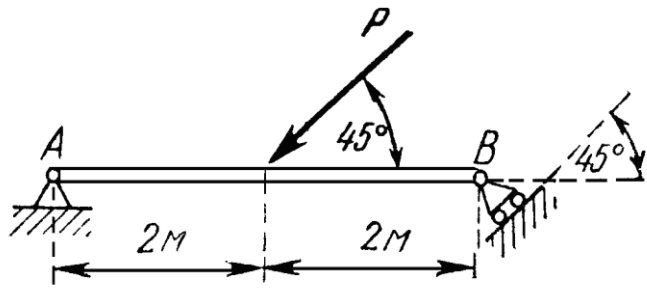
Ответ: $R_A = 7,9\text{кН}$, $R_D = 10,6\text{кН}$.

Задача 2.

Балка AB шарнирно закреплена на опоре A ; у конца B она положена на катки. В середине балки, под углом 45° к её оси, действует сила $P=2\text{кН}$. Определить реакции опор для случаев a и b , взяв размеры с рисунков и пренебрегая весом балки.



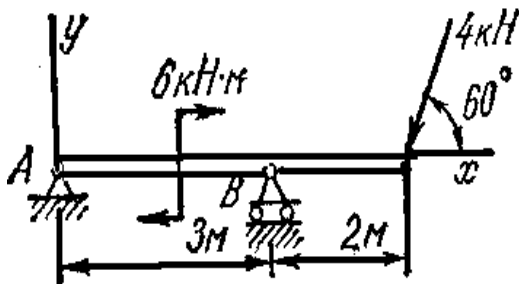
a)



б)

Ответ: а) $R_A = 1,58 \text{ кН}$, $R_B = 0,71 \text{ кН}$ б) $R_A = 2,24 \text{ кН}$, $R_B = 1 \text{ кН}$.

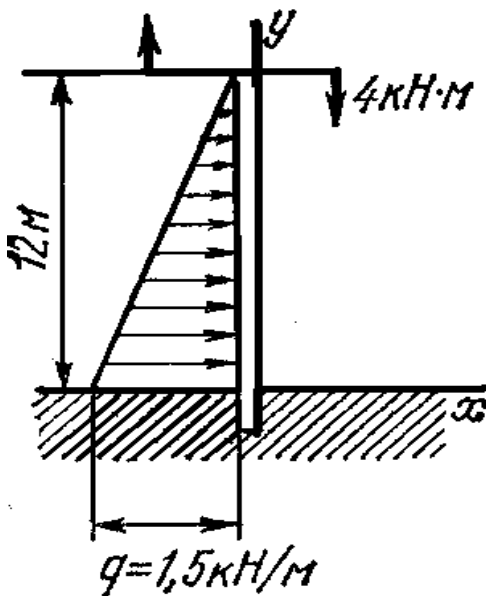
Задача 3.



Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы и пары сил. Нагрузка и размеры указаны на рисунке.

Ответ: $X_A = 2 \text{ кН}$, $Y_A = -4,32 \text{ кН}$, $Y_B = 7,78 \text{ кН}$.

Задача 4.

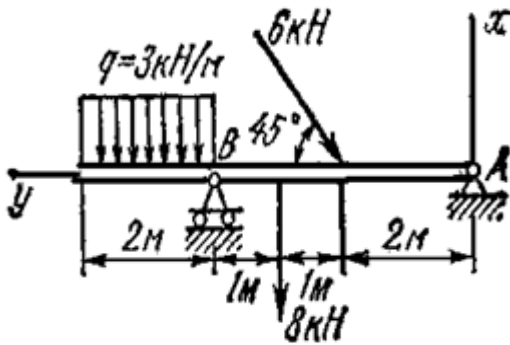


Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием пары сил и распределенной нагрузки, изменяющейся по закону треугольника.

Ответ: $X = -9 \text{ кН}$, $Y = 0$, $M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

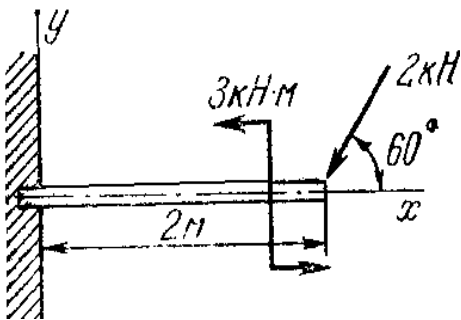
Задача 5.

Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием двух сосредоточенных сил и равномерно распределенной нагрузки. Интенсивность распределенной нагрузки, величины сил и размеры указаны на рисунке.



Ответ: $X_A = 2,6$ кН, $Y_A = 4,2$ кН, $X_B = 15,6$ кН

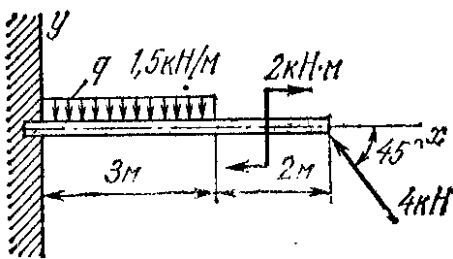
Задача 6.



Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием сосредоточенной силы и пары сил.

Ответ: $X = 1$ кН, $Y = 1,73$ кН, $M = 0,47$ кН·м.

Задача 7.

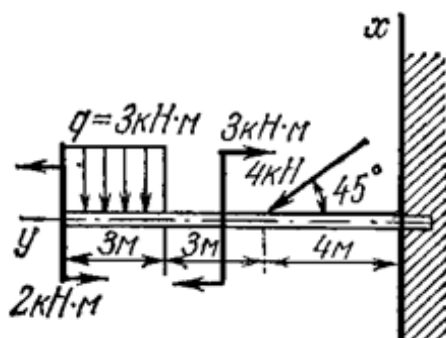


Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенной силы и пары сил.

Ответ: $X = 2,8$ кН, $Y = 1,7$ кН, $M = -5,35$ кН·м.

Задача 8.

Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, одной сосредоточенной силы и двух пар сил.



Ответ: $X = 11,8 \text{ кН}$, $Y = -2,8 \text{ кН}$, $M = -86,8 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Вопросы для самопроверки:

1. Виды связей и их реакции.
2. Проекция вектора силы на ось, плоскость; модуль проекции.
3. Разложение силы по правилу параллелограмма сил.
4. Алгебраический момент силы относительно неподвижной точки на плоскости и его свойства.
5. Пара сил. Основные свойства пар сил.

Рекомендуемая литература

1. Теоретическая механика : учебник / А. Я. Корнилов, А. В. Воробьева, С. К. Иванов, А. В. Лановая. — Москва : Юриспруденция, 2024. — 248 с. — ISBN 978-5-9516-0952-6. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/147352.html>
2. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87388.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/87388>

3. Игнатьева, Т. В. Теоретическая механика. Статика : учебное пособие / Т. В. Игнатьева, Д. А. Игнатьев. — Саратов : Вузовское образование, 2018. — 101 с. — ISBN 978-5-4487-0131-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/72539.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/72539>
4. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. - <http://biblioclub.ru/>
5. Красюк, А. М. Теоретическая механика. Конспект лекций : учебное пособие / А. М. Красюк. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2009. — 138 с. — ISBN 978-5-7782-1245-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/45438.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ

Цель работы: получение навыков составления уравнений равновесия для системы тел и определения сил взаимодействия между телами системы.

Задача: определение неизвестных реакций для составной конструкции и определение сил взаимодействия между телами системы.

Теоретическая часть

Системы тел, свободно опирающихся друг на друга или соединенных между собой какими-нибудь связями и находящимися под действием произвольной плоской системы сил или плоской системы параллельных сил, называют *сочлененной системой*.

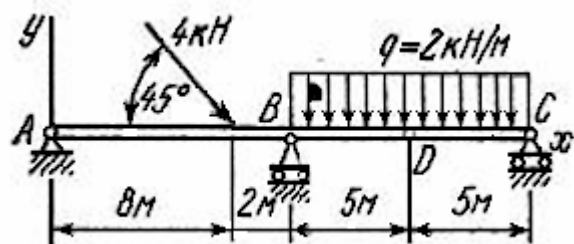
Связи, скрепляющие сочлененную систему с не входящими в нее телами (например, с опорами), называются внешними, в отличие от внутренних связей, соединяющих между собой тела данной сочлененной системы. После отбрасывания внешних связей сочлененная система тел не остается жесткой.

На основании принципа отвердевания система сил, действующая на сочлененную систему тел, должна при равновесии удовлетворять условиям равновесия абсолютно твердого тела. Но эти условия, как известно, являясь необходимыми, не будут достаточными, поэтому из них нельзя будет определить всех неизвестных. Для решения задачи на равновесие сочлененной системы тел необходимо будет дополнительно рассмотреть равновесие какого-нибудь одного или нескольких тел этой системы. Изложенный способ решения задач на равновесие сочлененной системы тел называется *методом расчленения*.

Задача 1.

Определить реакции опор А, В, С и шарнира D составной балки, изображенной на рисунке вместе с нагрузкой.

Ответ: $X_A = 3 \text{ кН}$; $Y_A = 13,8 \text{ кН}$; $Y_B = -$

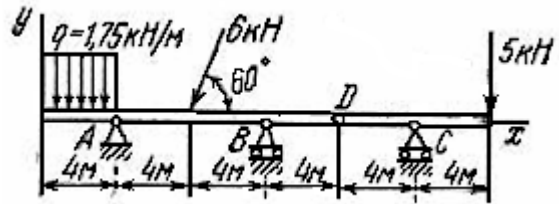


6,6 кН; $Y_C = 10$ кН, $X_D = 0$; $Y_D = \pm 5$ кН.

Задача 2.

Определить реакции опор А, В, С и шарнира D составной балки, изображенной на рисунке вместе с нагрузкой.

Ответ: $X_A = 3$ кН; $Y_A = 13,8$ кН; $Y_B = -6,6$ кН; $Y_C = 10$ кН; $X_D = 0$; $Y_D = 5$ кН.



Пример решения задачи:

На конструкцию (рис. 1), состоящую из балок АС и СВ действует сосредоточенная сила $\bar{P}_1$, равномерно – распределённая нагрузка интенсивностью $\bar{q}$; пара сил с моментом М.

Дано: $P_1 = 2$ кН; $q = 2$ кН/м; $M = 6$ кН·м; $\alpha = 60^\circ$; Определить реакции опор А и В и реакции промежуточного шарнира С.

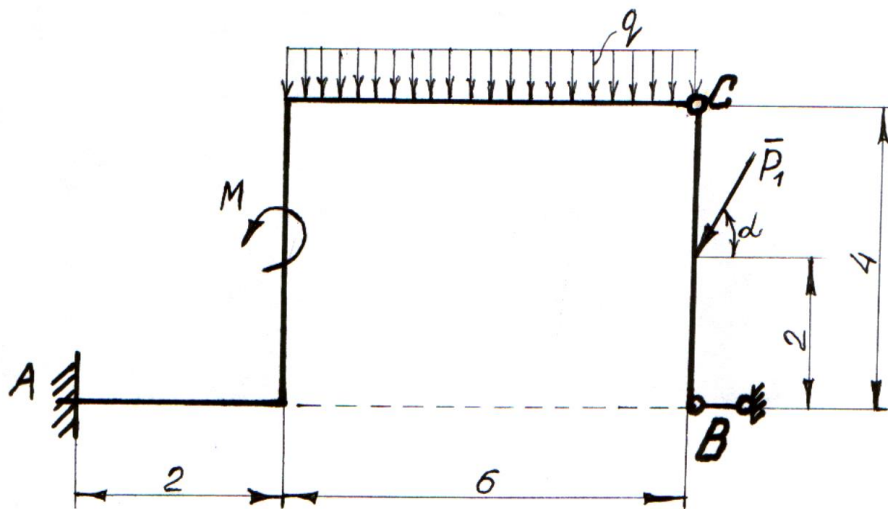


Рисунок 1

Решение: Первый способ: Рассмотрим равновесие всей конструкции (рис. 2). Равномерно – распределённую нагрузку интенсивностью q заменяем равнодействующей $\bar{Q}$, численно равной $Q = 6 \cdot q = 6 \cdot 2 = 12$ [м · (кН/м)] = кН и приложенной в центре тяжести прямоугольника – на пересечении диагоналей. Вводим систему отсчёта ХАУ. Сосредоточенную силу $\bar{P}_1$ разлагаем по правилу параллелограмма на две составляющие по осям Х и У – $\bar{P}_{1x}$ и $\bar{P}_{1y}$, численно равные:

$$P_{lx} = P_1 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot (1/2) = 1 \text{ кН}$$

$$P_{ly} = P_1 \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot (\sqrt{3}/2) = \sqrt{3} = 1,73 \text{ кН}.$$

Применяя принцип освобождения от связей отбрасываем опору А (жесткая заделка) и опору В (невесомый стержень) и заменяем их реакциями опор (рис. № 2).

Реакции опоры А – $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, M_A ; реакция опоры В – $\bar{X}_B$ (направлена вдоль стержня).

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к конструкции.

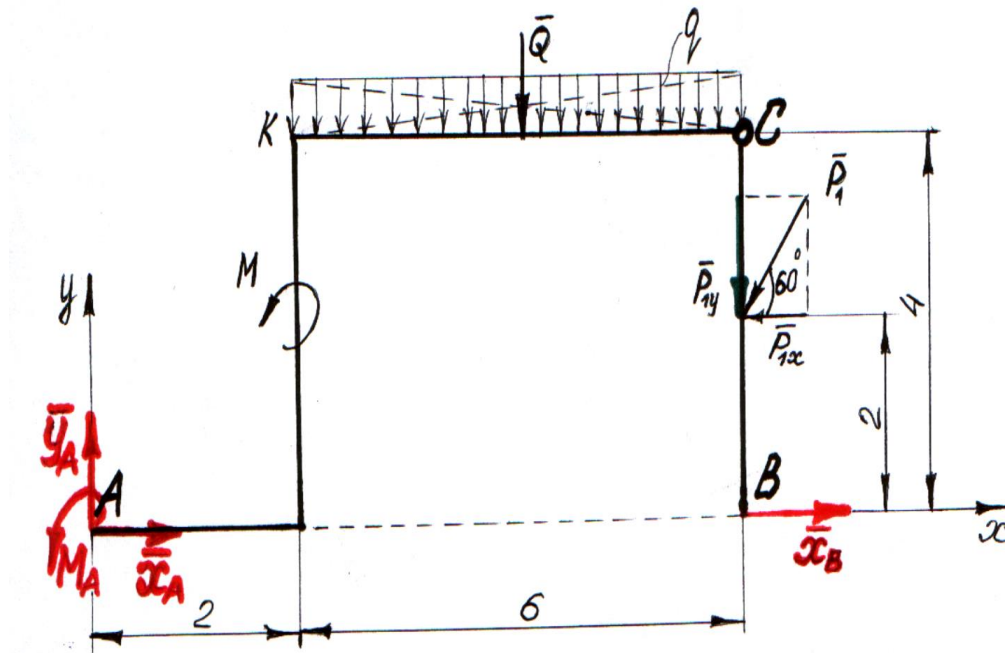


Рисунок 2

Для полученной плоской произвольной системы сил (рис. 2) можно составить три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0; X_B + X_A - P_{lx} = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_A - Q - P_{ly} = 0; \quad (2)$$

$$\Rightarrow Y_A = Q + P_{ly} = 12 + \sqrt{3} = 13,73 \text{ кН};$$

$$\sum M_A (\bar{F}_k) = 0; M_A + M - 5Q - 8P_{ly} + 2P_{lx} = 0; \quad (3)$$

$$\Rightarrow M_A = -M + 5Q + 8P_{ly} - 2P_{lx} = -6 + 5 \cdot 12 + 8 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot 1 = 65,84 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Расчленим конструкцию на две составные части в точке подвижного соединения – шарнир с – и рассматриваем равновесие правой от шарнира с части конструкции (рис. 3). Реакцию шарнира с разлагаем на две составляющие – $\bar{X}_c$, $\bar{Y}_c$. Эти реактивные силы отражают действие отброшенной левой части кон-

струкции на рассматриваемую правую. Для полученной плоской произвольной системы сил (рис. 3) можно составить 3 уравнения равновесия:

$$\sum F_{KX} = 0; X_B + X_C - P_{IX} = 0; \quad (4)$$

Рисунок 3 $\sum F_{KY} = 0; Y_C - P_{IY} = 0; \Rightarrow Y_C = P_{IY} = \sqrt{3} \text{ кН};$ (5)

$$\sum M_C (\bar{F}_K) = 0; -2P_{IX} + 4X_B = 0 \quad (6)$$

$$\Rightarrow X_B = (2P_{IX}) / 4 = P_{IX} / 2 = 1/2 = 0,5 \text{ кН};$$

Зная X_B , из уравнения (4) находим X_C : $X_C = P_{IX} - X_B = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ кН};$

Подставляем найденную x_B в уравнение 1) и определяем X_A : $X_A = P_{IX} - X_B = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ кН};$

Выполним проверку правильности вычисления (рис. 2) реакций опор.

$$\sum M_K (\bar{F}_K) = 0; - (\text{рис. 2})$$

$$-2Y_A + M_A + 4X_A + M - 3Q - 6P_{Iy} - 2P_{Ix} + 4X_B = 0$$

$$-2 \cdot 13,73 + 65,84 + 4 \cdot 0,5 + 6 - 3 \cdot 12 - 6 \cdot 1,73 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 = 0$$

$$-27,46 + 65,84 + 2 + 6 - 36 - 10,38 - 2 + 2 = 0$$

$$-73,84 + 73,84 = 0;$$

$$0 \equiv 0$$

Второй способ решения: Расчленим конструкцию на две составные части в точке подвижного соединения – шарнир C – и рассматриваем равновесие каждой (левой и правой) части конструкции отдельно. Рассмотрим равновесие левой от шарнира C части AC конструкции (рис. 4). Реакцию шарнира C (действие отброшенной правой части на левую) разлагаем на две составляющие $\bar{X}'_C$, $\bar{Y}'_C$. Причём $\bar{X}'_C = -\bar{X}_C$,

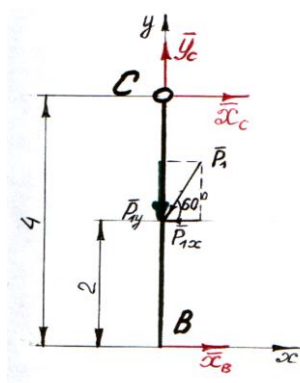
$\bar{Y}'_C = -\bar{Y}_C$. Для полученной плоской произвольной системы сил можно составить три уравнения равновесия:

$$\sum F_{Kx} = 0; \quad X_A - X'_C = 0; \quad (1')$$

$$\sum F_{Ky} = 0; \quad Y_A - Q - Y'_C = 0; \quad (2')$$

$$\sum M_A (\bar{F}_K) = 0 \quad Ma + M - 5Q + 4X'_C - 8Y'_C = 0; \quad (3')$$

Рисунок 3



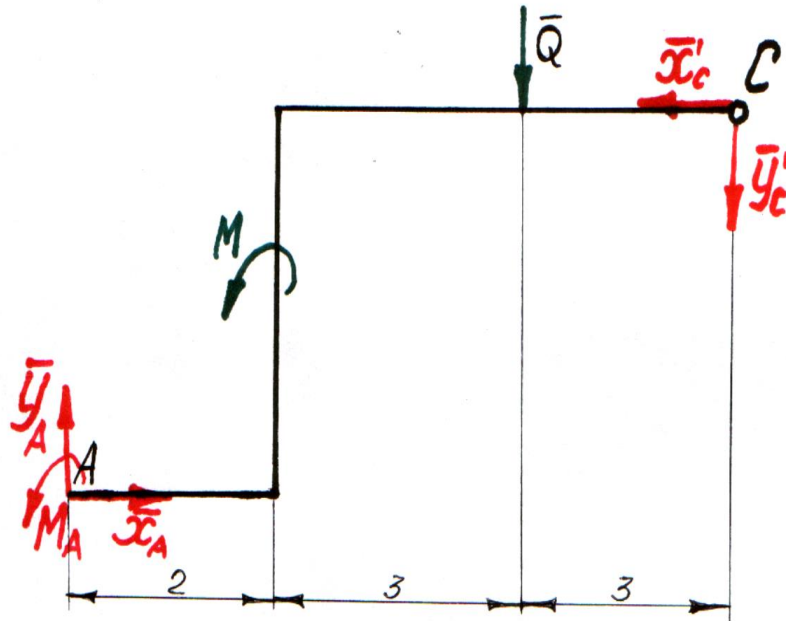


Рисунок 4

Далее рассматриваем равновесие правой от шарнира C части CB конструкции (рис. 3) – уравнения 4 – 6. Подставляем найденную $\bar{X}_c$ ($\bar{X}'_c = -\bar{X}_c$) в уравнение (1') и вычисляем $X_A = X'_C = X_C = 0,5 \text{ кН}$;

Подставляем найденную $Y'_c = Y_c$ в уравнение (2') и определяем $Y = Q + Y'_c = Q + Y_c = 12 + \sqrt{3} = 13,73 \text{ кН}$;

Из уравнения (3') находим $M_a = -M + 5Q - 4X'_c + 8Y'_c = -6 + 5 \cdot 12 - 4 \cdot 0,5 + 8 \cdot \sqrt{3} = -6 + 60 - 2 + 13,84 = 65,84 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

Выполним проверку правильности определения реакции опор A, B, C

$\sum M_k (\bar{F}_k) = 0$; – (рис. 2)

$$-2Y_A + M_A + 4X_A + M - 3Q - 6P_{ly} - 2P_{lx} + 4X_B = 0;$$

$$-2 \cdot 13,73 + 65,84 + 4 \cdot 0,5 + 6 - 3 \cdot 12 - 6 \cdot 1,73 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 = 0$$

$$-27,46 + 65,84 + 2 + 6 - 36 - 10,38 - 2 + 2 = 0$$

$$-73,84 + 73,84 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

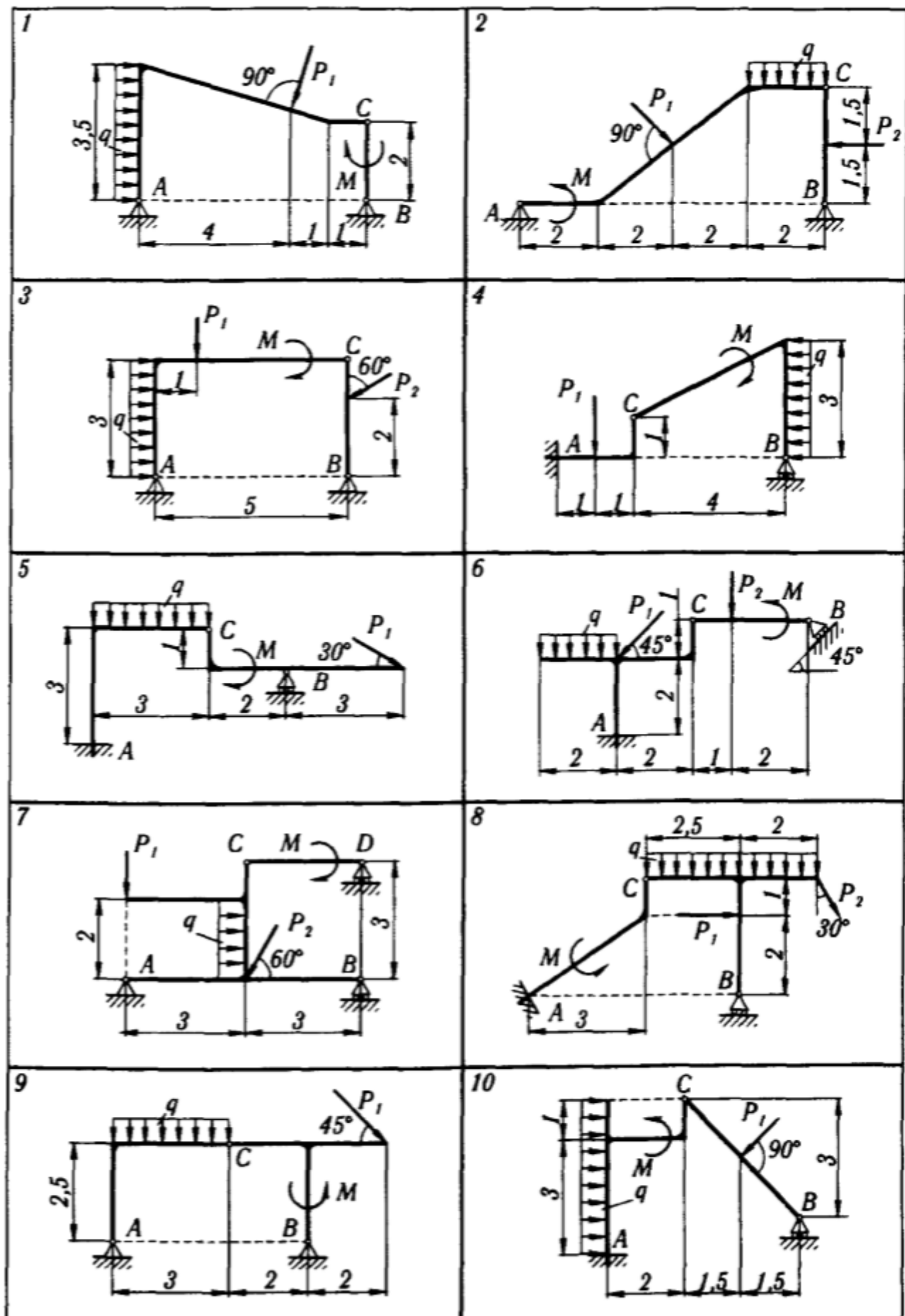
Решить самостоятельно:

Конструкция состоит из двух частей, соединенных шарнирно. C – промежуточный шарнир конструкции. Прямые и изогнутые балки определяют геометрический контур конструкции. Размеры указаны на рисунках. На конструкцию действу-

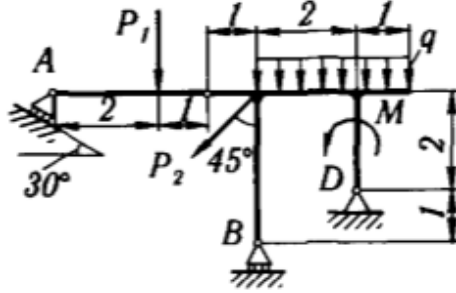
ют: сосредоточенные силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$; равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $\bar{q}$; пара сил с моментом M . Исходные данные для расчетов приведены в таблице 5. Весом балок пренебречь. Определить реакции опор конструкции и реакции промежуточного шарнира С.

Таблица 5

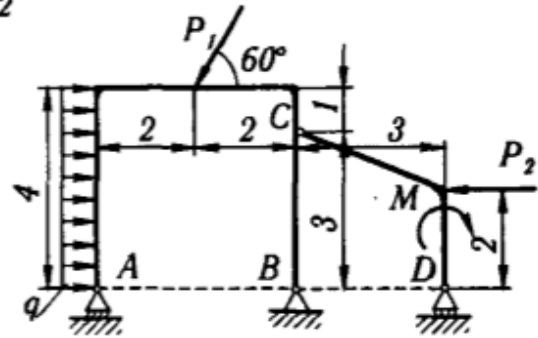
Номер вари- анта (рис. 17-19)	P_1	P_2	M ,	q ,	Иссле- дуемая реакция	Номер вари- анта (рис. 17-19)	P_1	P_2	M ,	q ,	Иссле- дуемая реакция
	кН		кН · м	кН/м			кН		кН · м	кН/м	
1	5,0	—	24,0	0,8	X_A	16	7,0	10,0	14,0	3,8	R_B
2	6,0	10,0	22,0	1,0	R_A	17	9,0	12,0	26,0	4,0	R_A
3	7,0	9,0	20,0	1,2	R_B	18	11,0	10,0	18,0	3,5	M_B
4	8,0	—	18,0	1,4	M_A	19	13,0	9,0	30,0	3,0	M_B
5	9,0	—	16,0	1,6	R_A	20	15,0	8,0	25,0	2,5	R_B
6	10,0	8,0	25,0	1,8	M_A	21	10,0	7,0	20,0	2,0	R_A
7	11,0	7,0	20,0	2,0	R_B	22	5,0	6,0	15,0	1,5	R_A
8	12,0	6,0	15,0	2,2	M_A	23	8,0	5,0	10,0	1,4	R_A
9	13,0	—	10,0	2,4	X_A	24	11,0	4,0	5,0	1,3	M_A
10	14,0	—	12,0	2,6	R_A	25	14,0	6,0	7,0	1,2	R_B
11	15,0	5,0	14,0	2,8	R_D	26	12,0	8,0	9,0	1,1	R_B
12	12,0	4,0	16,0	3,0	R_B	27	10,0	7,0	11,0	1,0	X_A
13	9,0	6,0	18,0	3,2	R_A	28	8,0	9,0	13,0	1,2	R_A
14	6,0	—	20,0	3,4	M_A	29	6,0	10,0	15,0	1,4	M_A
15	5,0	8,0	22,0	3,6	M_B	30	10,0	12,0	17,0	1,6	M_B



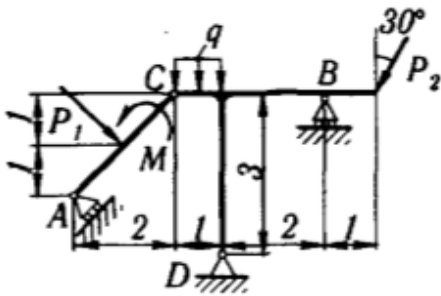
11



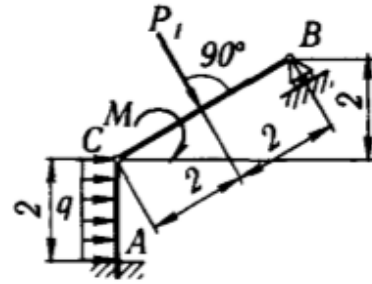
12



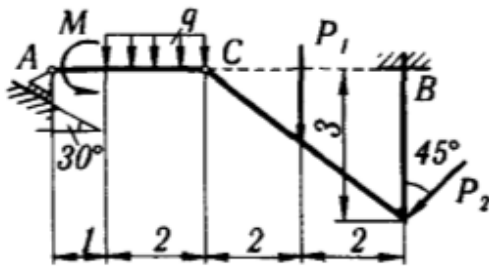
13



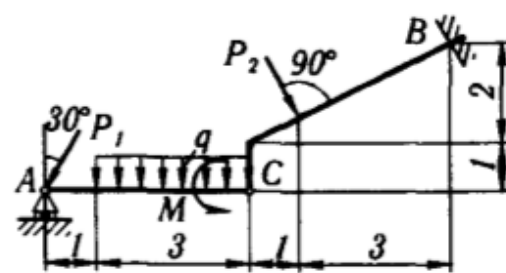
14



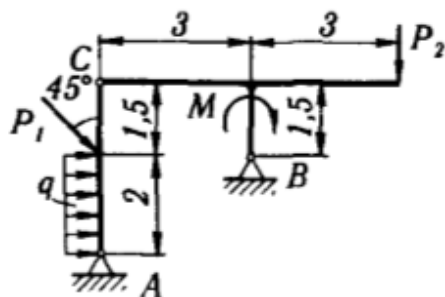
15



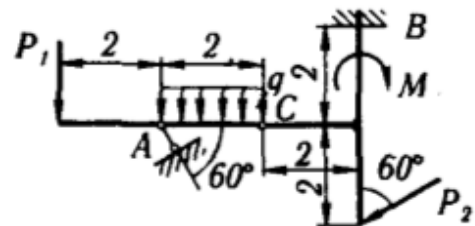
16



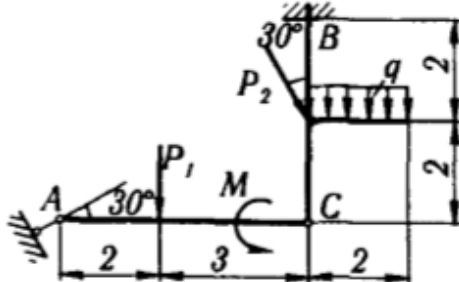
17



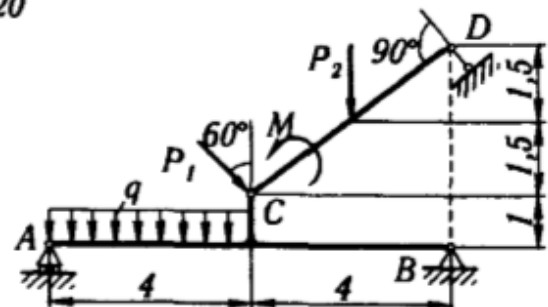
18

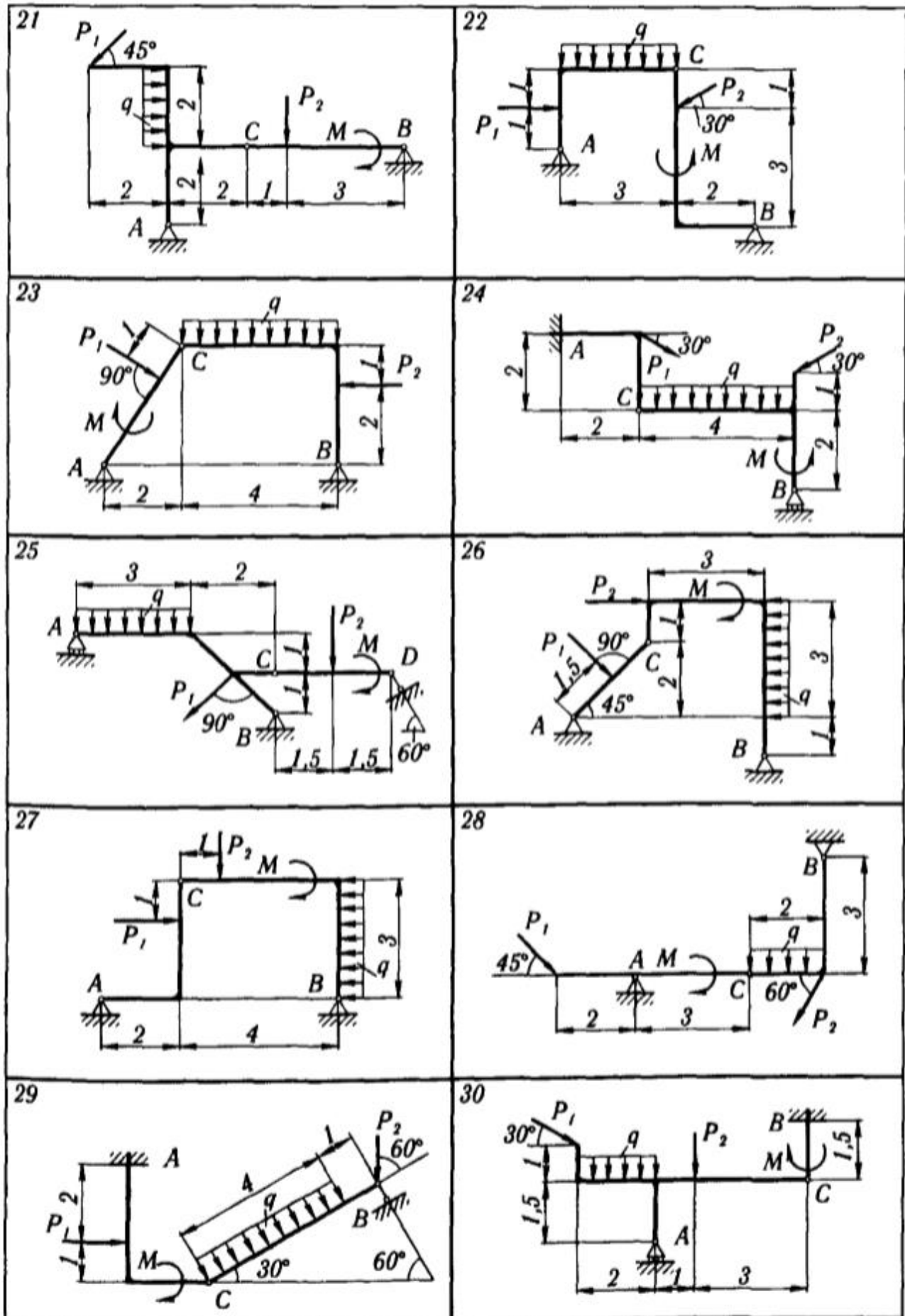


19



20





Вопросы для самопроверки:

1. Что такое сосредоточенная сила?
2. Определение распределённой нагрузки.
3. Разложения силы по правилу параллелограмма.
4. Вычисление проекции силы, разложенной по правилу параллелограмма.
5. Виды связей и их реакции.
6. Способы расчёта составных конструкций.
7. Уравнения равновесия плоской произвольной системы сил.
8. Определение внутренних усилий и их свойства.
9. Определение пары сил. Свойства пары сил.
10. Определение алгебраического момента силы относительно неподвижной точки на плоскости и его свойства.

Рекомендуемая литература

1. Теоретическая механика : учебник / А. Я. Корнилов, А. В. Воробьева, С. К. Иванов, А. В. Лановая. — Москва : Юриспруденция, 2024. — 248 с. — ISBN 978-5-9516-0952-6. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/147352.html>
2. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87388.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/87388>
3. Игнатьева, Т. В. Теоретическая механика. Статика : учебное пособие / Т. В. Игнатьева, Д. А. Игнатьев. — Саратов : Вузовское образование, 2018. — 101 с. — ISBN 978-5-4487-0131-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL:

- <http://www.iprbookshop.ru/72539.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/72539>
4. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. - <http://biblioclub.ru/>
 5. Красюк, А. М. Теоретическая механика. Конспект лекций : учебное пособие / А. М. Красюк. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2009. — 138 с. — ISBN 978-5-7782-1245-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/45438.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

РАВНОВЕСИЕ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ ТРЕНИЯ

Цель работы: получение навыков составления уравнений равновесия с учётом сил трения.

Теоретическая часть

Тело весом $\bar{P}$ положим на неподвижную поверхность, которая служит связью (рисунок 1, а). Это тело будет находиться в состоянии относительного покоя, так как действующая на него сила тяжести $\bar{P}$ уравнивается нормальной силой реакции связи $\bar{N}$.

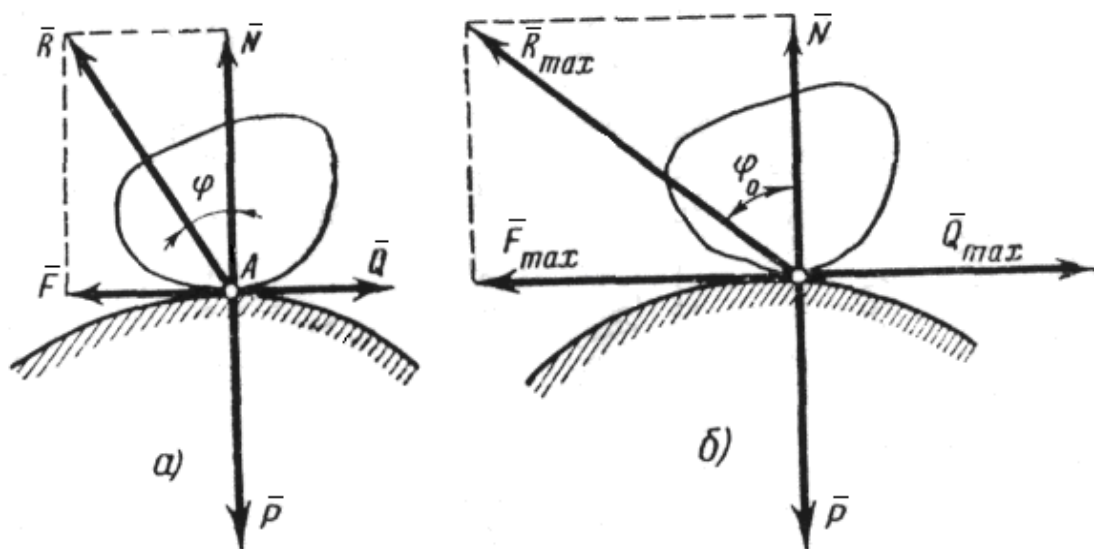


Рисунок 1

Тело продолжает оставаться в состоянии относительного покоя, пока модуль силы $\bar{Q}$ не достигнет некоторого определенного максимального значения $\bar{Q}_{\max}$, зависящего от природы и состояния соприкасающихся поверхностей, а также от данного давления между ними. При дальнейшем увеличении модуля силы $\bar{Q}$ тело начнет скользить по связи. Это свидетельствует о том что, кроме нормальной реакции, на тело действует еще другая реакция связи $\bar{F}$, лежащая в плоскости, касательной к связи, и противодействующая скольжению тела по этой связи. Эта сила $\bar{F}$ называется *силой трения скольжения*.

До тех пор, пока не возникло скольжения тела по связи, будет иметь место равенство

$$\bar{F} = -\bar{Q},$$

из которого видим, что с увеличением силы $\bar{Q}$ увеличивается и сила трения скольжения F . Значит, сила трения скольжения $\bar{F}$, так же как и сила $\bar{Q}$, может изменяться от нуля до некоторого максимального значения $\bar{F}_{\max}$, соответствующего моменту начала относительного скольжения тела по связи. В этом отношении сила трения скольжения неопределенна. Поэтому за меру сопротивления скольжению в состоянии относительного покоя принимают максимальную силу трения скольжения $\bar{F}_{\max}$.

Сила трения скольжения, возникающая при относительном покое тела, называется *силой трения скольжения в покое*.

Возникновение силы трения скольжения обусловлено многими факторами, среди которых существенную роль играют степень шероховатости поверхностей трущихся тел, силы сцепления, возникающие между частицами поверхностных слоев трущихся тел, и твердость трущихся тел. Если соприкасающиеся тела достаточно тверды и хорошо отполированы, то сила трения скольжения резко уменьшается. Но в инженерных расчетах силу трения скольжения всегда приходится принимать во внимание. Обычно при этом исходят из установленных опытным путем общих законов трения скольжения в покое, которые формулируются следующим образом:

1. Сила трения скольжения в покое направлена в сторону, противоположную возможному перемещению одного из трущихся тел относительно другого.
2. Сила трения скольжения в покое не может по модулю превосходить максимальной силы трения скольжения в покое $\bar{F}_{\max}$.

Модуль максимальной силы трения скольжения в покое прямо пропорционален нормальному давлению одного из трущихся тел на другое, или, что то же, модулю нормальной силы реакции:

$$\bar{F}_{\max} = f_o N,$$

где f_0 называется *коэффициентом трения скольжения в покое*. Из этого равенства следует, что f_0 есть отношение сил. Экспериментально установлено, что f_0 зависит от природы, состояния и степени обработки трущихся поверхностей. При этом f_0 часто считают не зависящим от силы нормального давления и площади контакта трущихся поверхностей. Однако следует иметь в виду, что это упрощение применимо лишь при небольших интервалах изменения давления между трущимися поверхностями.

Для воображаемых «абсолютно гладких тел» f_0 равен нулю. Для реальных тел $f_0 > 0$.

Из сказанного следует, что при отсутствии скольжения сила трения скольжения в покое

$$F \leq F_{\max}, \text{ или } F \leq f_0 N,$$

где знак равенства относится к тому моменту, когда тело будет находиться, так сказать, на границе между покоем и скольжением.

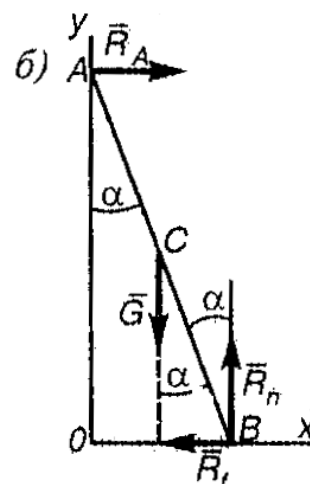
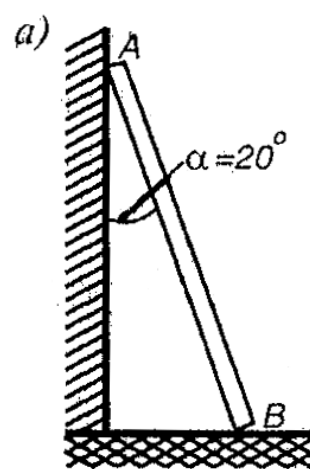
Пример решения задачи:

При каком минимальном коэффициенте трения между полом и лестницей последняя может находиться в равновесии, опираясь верхним концом о гладкую стену, как показано на рисунке а)? Центр тяжести лестницы находится в её середине.

Решение:

1. На лестницу действует только одна активная сила – ее собственный вес G , приложенный в точке C посередине длины лестницы AB .

2. Вес лестницы уравновешен реакцией $\bar{R}_A$ гладкой стены и реакцией опоры шероховатого пола, которую заменим двумя составляющими: $\bar{R}_n$ – нормальной составляющей и $\bar{R}_f$ – силой трения (рис. б))



3. Составим три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad R_A - R_f = 0$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_n - G = 0$$

$$\sum T_B(F_x) = 0; \quad G \frac{AB}{2} \sin \alpha - R_A AB \cos \alpha = 0$$

4. Из уравнений (1) и (3)

$$R_f = R_A = \frac{G \sin \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{G}{2} \operatorname{tg} \alpha = 60 \operatorname{tg} 20^\circ = 21,8 \text{ Н}$$

$$R_f = R_A = \frac{G \sin \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{G}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

А так как $R_n = G$ [из уравнения (2)], то минимальный коэффициент трения, обеспечивающий равновесие лестницы:

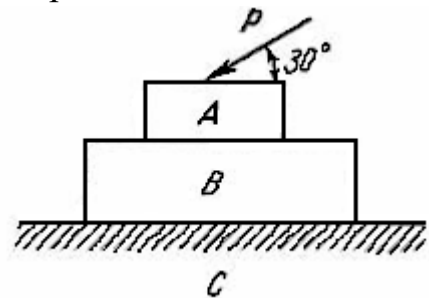
$$f = \frac{R_f}{R_n} = \frac{G}{2G} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{2} = 0,182 \approx 0,2$$

Таким образом, при $f \geq 0,2$ лестница находится в равновесии.

Решить самостоятельно:

Задача 1.

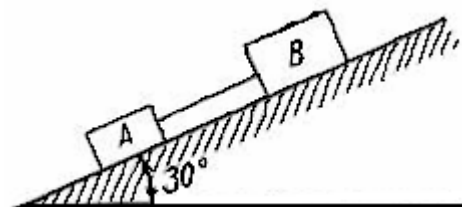
На верхней грани прямоугольного бруса B , вес которого 200 Н, находится прямоугольный брус A веса 100 Н. Брус B опирается своей нижней гранью на горизонтальную поверхность C , причем коэффициент трения между ними $f_1 = 0,5$. На брус A действует сила $P = 60$ Н, образующая с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Будет ли брус A двигаться относительно B ? Будет ли брус B двигаться относительно плоскости C ?



Ответ: Брусы A и B остаются в покое.

Задача 2.

На наклонной плоскости лежит прямоугольный брус B веса 400 Н. к нему с помощью

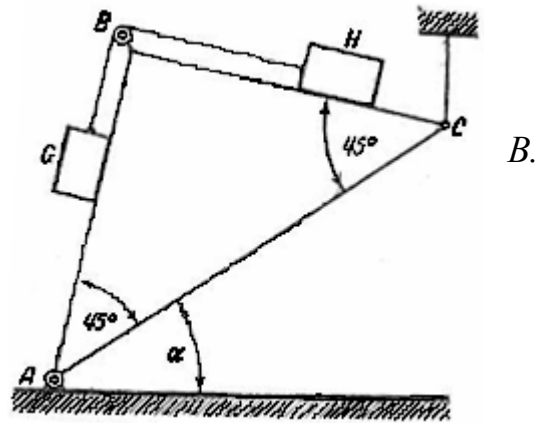


троса присоединяют прямоугольный брус A веса 200 Н , который, скользя по наклонной плоскости, натягивает трос. Коэффициенты трения с наклонной плоскостью $f_A = 0,5$ и $f_B = 2/3$. Будет ли система в дальнейшем находиться в покое? Найти натяжение T троса и величины сил трения, действующие на каждое тело. Весом троса пренебречь.

Ответ: Система останется в покое. $F_A = 86,6\text{ Н}$, $F_B = 213,4\text{ Н}$, $T = 13,4\text{ Н}$.

Задача 4.

На гранях AB и BC призмы ABC помещены два одинаковых тела G и H веса P , связанные нитью, перекинутой через блок в точке B . Коэффициент трения между телами и гранями призмы равен f . Углы BAC и BCA равны 45° . Определить, пренебрегая трением на блоке, величину угла α наклона грани AC к горизонту, необходимую для того, чтобы груз G начал опускаться.



Ответ: $\operatorname{tg} \alpha = f$.

Вопросы для самопроверки:

1. Коэффициент трения скольжения.
2. Реакция нормального давления (свободная опора).
3. Сила трения скольжения.
4. Сила трения скольжения в покое.
5. Коэффициент трения скольжения в покое.
6. Угол трения.
7. Зависит ли предельный коэффициент трения в примере с лестницей от веса лестницы? От положения центра тяжести лестницы? От положения общего центра тяжести лестницы и стоящего на ней человека?
8. Какой должна быть форма грузов в задаче 4 для «чистоты эксперимента» с трением?

Рекомендуемая литература

1. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87388.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/87388>
2. Теоретическая механика : учебник / А. Я. Корнилов, А. В. Воробьева, С. К. Иванов, А. В. Лановая. — Москва : Юриспруденция, 2024. — 248 с. — ISBN 978-5-9516-0952-6. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/147352.html>
3. Игнатьева, Т. В. Теоретическая механика. Статика : учебное пособие / Т. В. Игнатьева, Д. А. Игнатьев. — Саратов : Вузовское образование, 2018. — 101 с. — ISBN 978-5-4487-0131-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/72539.html> - DOI: <https://doi.org/10.23682/72539>
4. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. - <http://biblioclub.ru/>
5. Красюк, А. М. Теоретическая механика. Конспект лекций : учебное пособие / А. М. Красюк. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2009. — 138 с. — ISBN 978-5-7782-1245-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/45438.html>

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЁРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ

Цель работы: получение навыков расчёта скоростей и ускорений точек твёрдого тела при поступательном и вращательном движениях.

Движение груза 1 должно описываться уравнением

$$x = C_2 t^2 + C_1 t + C_0,$$

где t – время; C_2, C_1, C_0 – некоторые постоянные.

В начальный момент времени ($t = 0$) координата груза должна быть x_0 , а его скорость – V_0 .

Кроме того, необходимо, чтобы координата груза в момент времени $t = t_2$ была равна x_2 .

Определить коэффициенты C_2, C_1, C_0 , при которых осуществляется требуемое движение груза 1 (А). Определить также в момент времени $t = t_1$ скорость и ускорение груза 1 и точки М одного из колёс механизма.

Схемы механизмов показаны на рис. 1 – 5, а необходимые данные приведены в таблице 1.

Таблица 1

№ варианта (рис. 1- 5)	Радиусы, см				Координаты и скорости груза 1			Расчётные моменты времени, с	
	R_2	r_2	R_3	r_3	x_0 , см	V_0 , см/с	x_2 , см	t_2	t_1
1	60	45	36	—	2	12	173	3	2
2	80	—	60	45	5	10	41	2	1
3	100	60	75	—	8	6	40	4	2
4	58	45	60	—	4	4	172	4	3
5	80	—	45	30	3	15	102	3	2
6	100	60	30	—	7	16	215	4	2
7	45	35	105	—	8	5	124	4	3

8	35	10	10	—	6	2	111	3	2
9	40	30	15	—	10	7	48	2	1
10	15	—	40	35	5	3	129	4	3
11	40	25	20	—	9	8	65	2	1
12	20	15	10	—	5	10	179	3	2
13	30	20	40	—	7	0	557	5	2
14	15	10	15	—	6	3	80	2	1
15	15	10	15	—	5	2	189	4	2
16	20	15	15	—	4	6	220	4	3
17	15	10	20	—	8	4	44	2	1
18	20	15	10	—	3	12	211	4	1
19	15	10	20	—	5	10	505	5	3
20	25	15	10	—	10	8	277	3	1
21	20	10	30	10	6	5	356	5	2
22	40	20	35	—	7	6	103	2	1
23	40	30	30	15	5	9	194	3	2
24	30	15	40	20	9	8	105	4	2
25	50	20	60	—	8	4	119	3	2
26	32	16	32	16	6	14	862	4	2
27	40	18	40	18	5	10	193	2	1
28	40	20	40	15	8	5	347	3	2
29	25	20	50	25	4	6	32	2	1
30	30	15	20	—	10	7	128	2	1
31	40	30	30	20	4	12	173	4	2
32	60	30	80	45	5	8	41	2	3
33	60	45	50	30	10	6	50	4	2
34	100	60	50	30	4	3	172	4	2
35	60	40	30	20	4	20	102	3	2
36	60	20	40	30	5	16	215	4	1
37	25	10	20	15	12	6	124	4	3
38	60	20	40	30	6	3	111	3	2
39	60	40	50	20	16	7	48	2	1
40	60	40	30	20	10	6	129	4	3
41	50	25	30	—	9	2	340	4	1
42	30	20	30	—	4	3	134	5	2

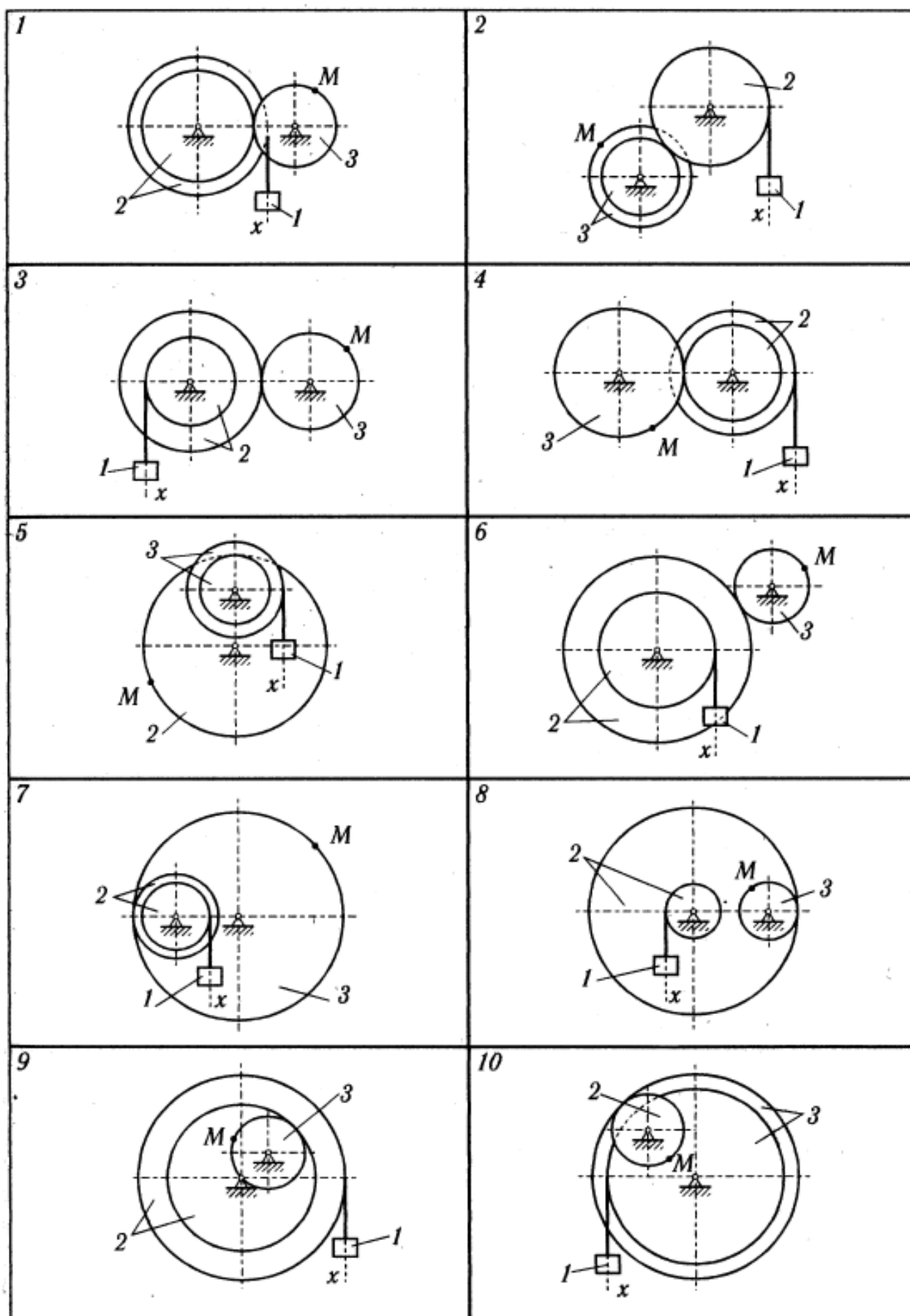


Рисунок 1

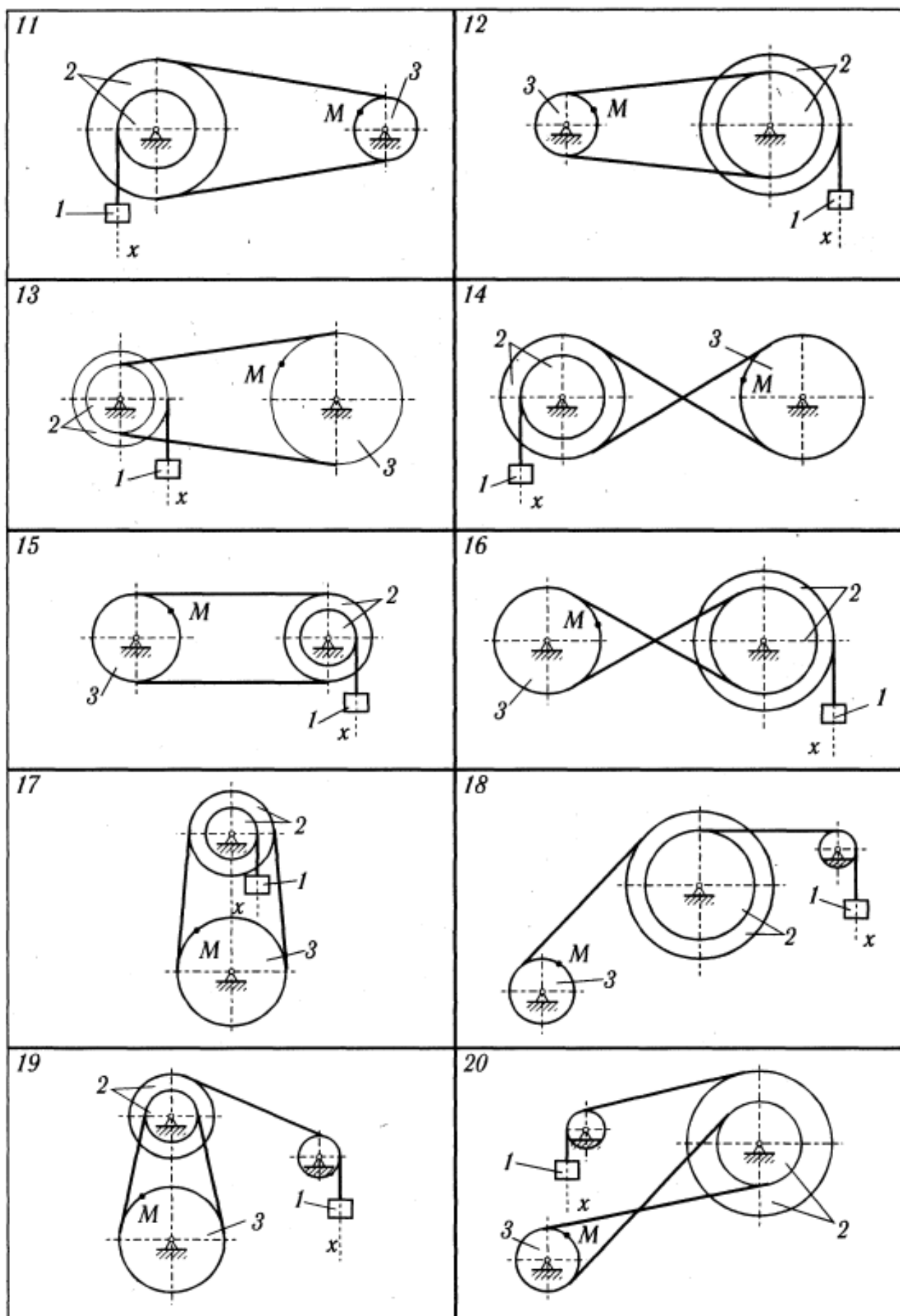


Рисунок 2

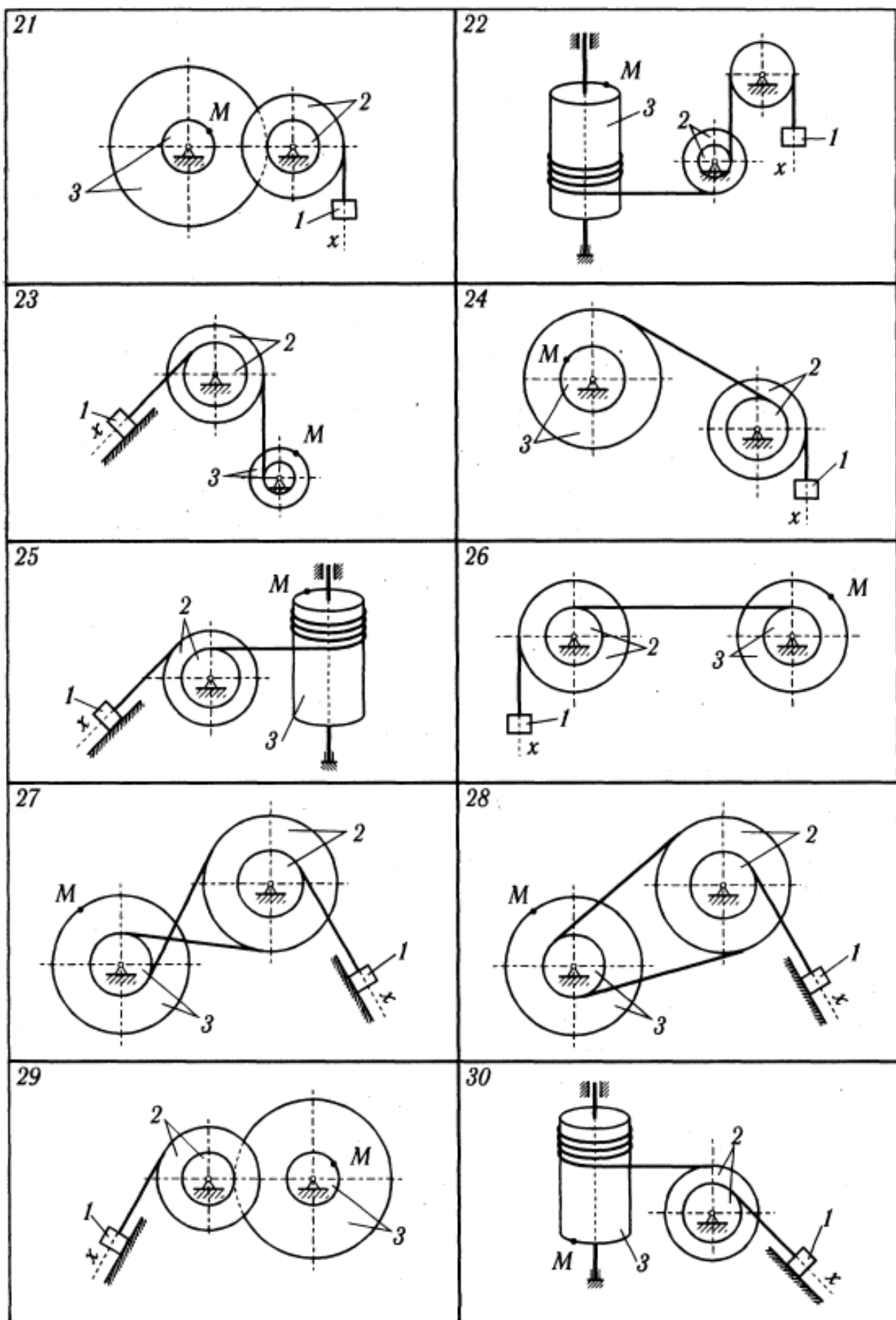


Рисунок 3

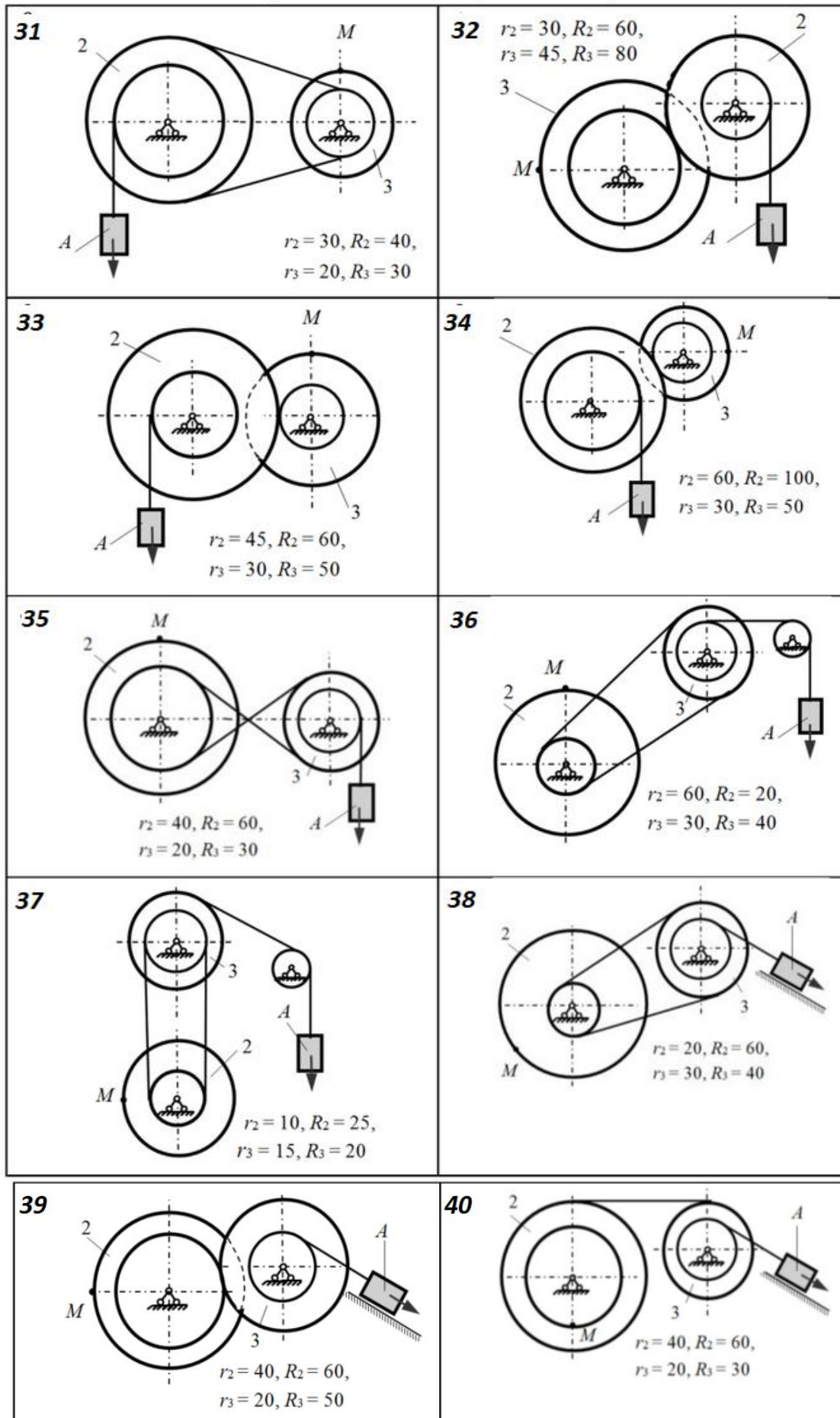


Рисунок 4

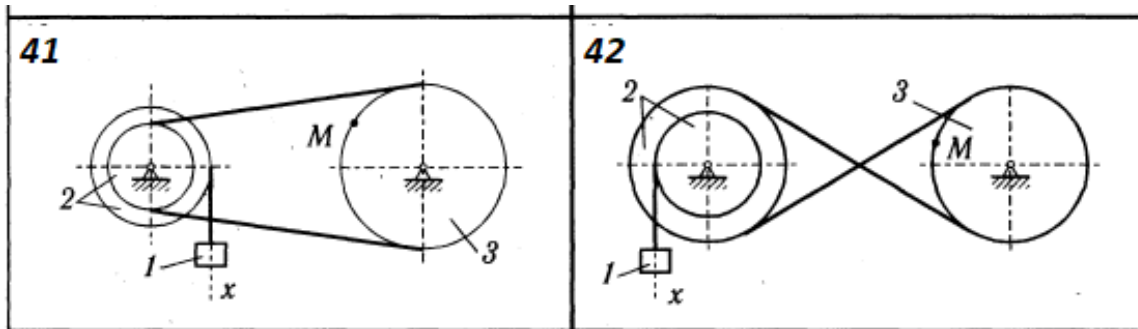


Рисунок 5

Пример

Исходные данные: $r_2 = 10\text{ см}$, $R_2 = 15\text{ см}$, $R_3 = 15\text{ см}$, $x_0 = 5\text{ см}$, $x_2 = 189\text{ см}$, $V_0 = 2\text{ см/с}$, $t_1 = 2\text{ с}$, $t_2 = 4\text{ с}$.

Найти уравнение движения груза 1, а также скорость и ускорение точки M в момент времени $t = t_1$ (рисунок 4).

Решение:

1. Уравнение движения груза 1 имеет вид

$$x = C_2 \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_0 \quad (1)$$

Коэффициенты C_2, C_1, C_0 могут быть определены из заданных граничных условий:

$$\text{при } t=0 \quad x = x_0 = C_0 = 5 \text{ см}; \quad (2)$$

$$V = x' = 2C_2 \cdot t + C_1; \quad \text{при } t_0=0 \quad V_0 = 2C_2 \cdot 0 + C_1; \quad C_1 = V_0 = 2 \text{ см/с}; \quad (3)$$

Подставляя (2), (3) и $t_2 = 4\text{ с}$ в (1), находим коэффициент C_2 :

$$x_2 = C_2 \cdot t_2^2 + C_1 \cdot t_2 + C_0; \quad 189 = C_2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 5; \quad C_2 = 11.$$

Таким образом, уравнение движения груза 1 имеет вид:

$$x = 11 \cdot t^2 + 2 \cdot t + 5 \quad (4)$$

1. Скорость груза 1 находим по определению:

$$V = x' = (11 \cdot t^2 + 2 \cdot t + 5)' = 22 \cdot t + 2; \quad \text{при } t_1 = 2\text{ с} \quad V_1 = 22 \cdot 2 + 2 = 46 \text{ см/с}; \quad (5)$$

Аналогично находим ускорение груза 1:

$$a = V' = (22 \cdot t + 2)' = 22 \text{ см/с}^2, \quad (6)$$

– величина постоянная, и при $t = t_1$ $a_1 = 22 \text{ см/с}^2$.

3. Для определения скорости и ускорения точки M выполним кинематический анализ преобразования поступательного движения груза 1 во вращательное движение ступенчатого колеса 2 и колеса 3, т. е. запишем уравнения, связывающие скорость груза 1 и угловые скорости ω_2 и ω_3 (рис. 4):

$$V = \omega_2 \cdot r_2; \Rightarrow \omega_2 = V / r_2; \quad \omega_2 \cdot R_2 = \omega_3 \cdot R_3 \Rightarrow \omega_3 = (\omega_2 \cdot R_2) / R_3 =$$

$$= ((V / r_2) \cdot R_2) / R_3 = ((22 \cdot t + 2) / r_2) \cdot R_2 / R_3; \quad (7)$$

$$\omega_3(t_1) = ((22 \cdot 2 + 2) / 10) \cdot 15 / 15 = 4,6 \text{ рад/с}; - \text{угловая скорость колеса 3.}$$

$$\text{Угловое ускорение колеса 3: } \varepsilon_3 = (\omega_3)' = (((22 \cdot t + 2) / r_2) \cdot R_2 / R_3)' =$$

$$= (((22 / r_2) \cdot R_2) / R_3); \quad \varepsilon_3(t_1) = (((22 / 10) \cdot 15) / 15) = 2,2 \text{ рад/с}^2.$$

Скорость точки M , её вращательное (касательное), центростремительное (нормальное) ускорения определяются по формулам:

$$V_M = \omega_3 \cdot R_3; \quad V_M(t_1) = \omega_3 \cdot R_3 = 4,6 \cdot 15 = 69 \text{ см/с}; \quad (8)$$

$$a_M^{\text{с}} = \varepsilon_3 \cdot R_3; \quad (9)$$

$$a_M^{\text{с}}(t_1) = 2,2 \cdot 15 = 33 \text{ см/с}^2. \quad (10)$$

$$a_M^{\text{н}} = \omega_3^2 \cdot R_3 = (4,6)^2 \cdot 15 = 317,4 \text{ см/с}^2. \quad (11)$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^{\text{с}})^2 + (a_M^{\text{н}})^2} = R_3 \sqrt{\varepsilon_3^2 + \omega_3^4};$$

$$a_M(t_1) = \sqrt{(33)^2 + (317,4)^2} = 319,11 \text{ см/с}^2. \quad (12)$$

Результаты расчётов приведены в таблице 2.

Таблица 2

U_1 см/с	a_1 см/с ²	ω_3 рад/с	ε_3 рад/с ²	U_M см/с	$a_M^{\text{с}}$ см/с ²	$a_M^{\text{н}}$ см/с ²	a_M см/с ²
46	22	4,6	2,2	69	33	317,4	319,11

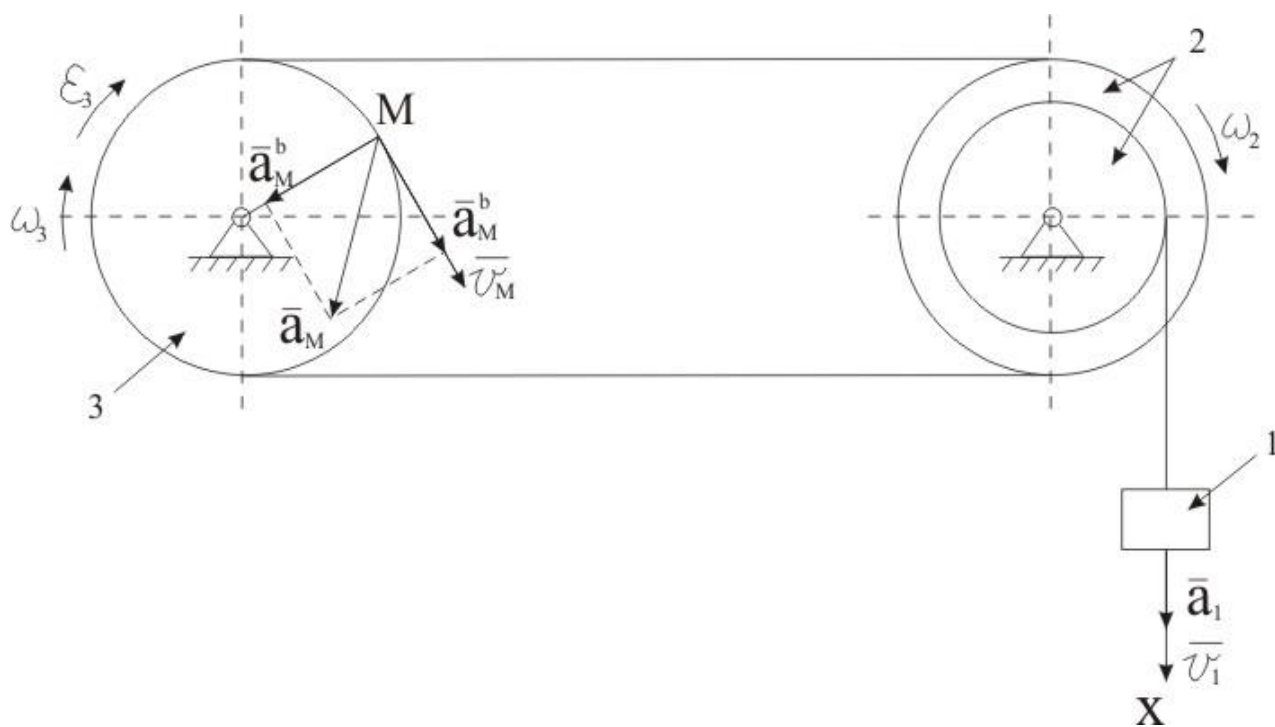


Рисунок 4

Вопросы для самопроверки:

1. Определение поступательного движения тела. Примеры поступательного движения тела.
2. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек тела, совершающих поступательное движение.
3. Определение вращательного движения тела. Примеры.
4. Сколько степеней свободы имеет тело, вращающееся вокруг неподвижной оси? Закон или уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.
5. Определение угловой скорости и углового ускорения.
6. Как вычисляются угловая скорость и угловое ускорение?
7. Каким образом вводится понятие о векторах угловой скорости и углового ускорения? Можно ли сказать, что они являются скользящими векторами?
8. Классификация вращений по угловому ускорению тела.
9. Вывод формулы для вычисления линейной (окружной) скорости точек тела,

вращающегося вокруг неподвижной оси.

10. Составляющие ускорения точек тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси. По каким формулам они вычисляются?

11. Формула для вычисления полного ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

12. Как можно представить скорость, касательное и нормальное ускорение в виде векторных произведений? Соответствующие выражения.

Рекомендуемая литература

1. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87388.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/87388>
2. Теоретическая механика : учебник / А. Я. Корнилов, А. В. Воробьева, С. К. Иванов, А. В. Лановая. — Москва : Юриспруденция, 2024. — 248 с. — ISBN 978-5-9516-0952-6. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/147352.html>
3. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. - <http://biblioclub.ru/>
4. Красюк, А. М. Теоретическая механика. Конспект лекций : учебное пособие / А. М. Красюк. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2009. — 138 с. — ISBN 978-5-7782-1245-9. —

Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS :
[сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/45438.html> (дата обращения:
19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Практическое занятие 7
**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК И УГЛОВОЙ СКОРОСТИ
 ЗВЕНА ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА**

Цель работы: получение навыков определения скоростей точек и угловых скоростей звеньев плоского механизма.

Теоретическое обоснование

Движение плоской фигуры складывается из поступательного движения, когда все точки фигуры движутся со скоростью $\bar{V}_A$ полюса A , и из вращательного движения вокруг этого полюса (рис. 2.18). Скорость любой точки M фигуры складывается геометрически из скоростей, которые точка получает в каждом из этих движений.

Действительно, положение точки M по отношению к осям Oxy определяется радиусом – вектором $\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{r}'$, где $\bar{r}_A$ - радиус-вектор полюса A , $\bar{r}' = \overline{AM}$ - радиус-вектор, определяющий положение точки M относительно $Ax'y'$, перемещающихся вместе с полюсом A поступательно. Тогда

$$\bar{V}_M = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt} \quad (2.48)$$

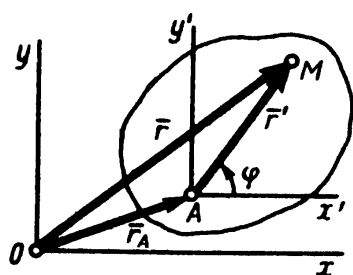


Рисунок 2.18

$\frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{V}_A$ есть скорость полюса A , $\frac{d\bar{r}'}{dt}$ равна скорости $\bar{V}_{MA}$, которую точка M получает при $\bar{r}_A = const$, т.е. относительно осей $Ax'y'$, или, иначе, при вращении фигуры вокруг полюса A . Таким образом следует, что

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA}. \quad (2.49)$$

При этом скорость $\bar{V}_{MA}$, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A , определится так

$$\bar{V}_{MA} = \omega \cdot MA \quad (\bar{V}_{MA} \perp \overline{MA}), \quad (2.50)$$

где ω – угловая скорость фигуры.

Таким образом, *скорость любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A , принятой за полюс, и скорости, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.* Модуль и направление скорости $\bar{V}_M$ находятся построением соответствующего параллелограмма (рис. 2.19).

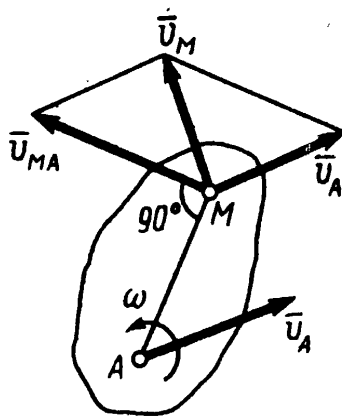


Рисунок 2.19

Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

Одним из простых способов определения скоростей точек плоской фигуры (или тела движущегося плоскопараллельно) является теорема: *проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу.*

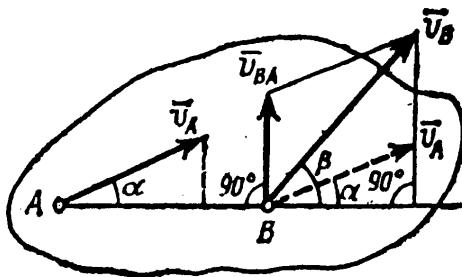


Рисунок 2.20

Рассмотрим какие-нибудь две точки A и B плоской фигуры (или тела) (рис.2.20). Принимая точку A за полюс получаем, что $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$. Отсюда, проектируя обе части равенства на ось, направленную по AB , и учитывая, что вектор $\vec{V}_{BA}$ перпендикулярен AB , находим

$$V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha, \quad (2.51)$$

и теорема доказана. Заметим, что этот результат ясен и из чисто физических соображений: если равенство $V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha$ не будет выполняться, то при движении расстояние между точками A и B должно изменяться, что невозможно – тело абсолютно твердое. Поэтому это равенство выполняется не только при плоскопараллельном, но и при любом движении твердого тела.

Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей

Другой простой и наглядный метод определения скоростей точек плоской фигуры (или тела при плоском движении) основан на понятии о мгновенном центре скоростей.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Если фигура движется непоступательно, то такая точка в каждый момент времени t существует и притом единственная. Пусть в момент времени t точки A и B плоскости фигуры имеют скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$, непараллельные друг другу (рис. 2.21.). Тогда точка P , лежащая на пересечении перпендикуляров Aa к вектору $\vec{V}_A$ и Bb к вектору $\vec{V}_B$, и будет мгновенным центром скоростей, так как $\vec{V}_P = 0$.

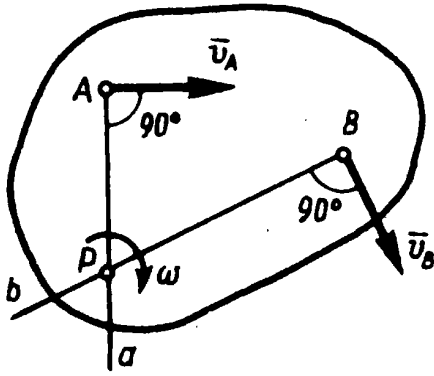


Рисунок 2.21

В самом деле, если $\bar{V}_P \neq 0$, то по теореме о проекциях скоростей вектор $\bar{V}_P$ должен быть одновременно перпендикулярен и AP (так как $\bar{V}_A \perp AP$), и BP (так как $\bar{V}_B \perp BP$), что невозможно. Из этой же теоремы видно, что никакая другая точка фигуры в этот момент времени не может иметь скорость, равную нулю.

Если теперь в момент времени t взять точку P за полюс, то скорость точки A будет

$$\bar{V}_A = \bar{V}_P + \bar{V}_{AP} = \bar{V}_{AP}, \quad (2.52)$$

так как $\bar{V}_P = 0$. такой же получается для любой другой точки фигуры. Тогда, *скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей.* При этом

$$v_A = \omega \cdot PA \quad (\vec{v}_A \perp PA); \quad v_B = \omega \cdot PB \quad (\vec{v}_B \perp PB) \quad (2.53)$$

и так для любой точки фигуры.

Из этого следует еще, что $\frac{V_A}{AP} = \omega$ и $\frac{V_B}{BP} = \omega$, тогда

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}, \quad (2.54)$$

т.е. что скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстоянию от мгновенного центра скоростей.

Полученные результаты приводят к следующим выводам:

1. Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей, например, $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры.

2. Для определения скорости любой точки плоской фигуры надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки A фигуры и направление скорости другой её точки B .

3. Угловая скорость ω плоской фигуры равна в каждой момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к её расстоянию от мгновенного центра скоростей P :

$$\omega = \frac{V_B}{BP}. \quad (2.55)$$

Найдем, еще другое выражение для ω из равенств $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B'}$ и $(\vec{V}_{BA} \perp \vec{BA})$ следует, что $v_{BA} = |\vec{v}_B - \vec{v}_A|_{\text{и}} \quad v_{BA} = \omega \cdot AB$, откуда

$$\omega = \frac{|\vec{v}_B - \vec{v}_A|}{AB} = \frac{|\vec{v}_B + (-\vec{v}_A)|}{AB}. \quad (2.56)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи определения МЦС, которые помогут решать теоретической механики.

1. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного, то точка P катящегося тела, касающаяся неподвижной поверхности (рис. 2.22), имеет в данный момент времени вследствие отсутствия скольжения скорость, равную нулю ($V_P = 0$), и следовательно, является мгновенным центром скоростей.

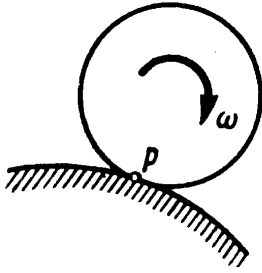


Рисунок 2.22

2. Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, причем линия AB не перпендикулярна $\vec{V}_A$ (рис.2.23,а), то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек $\parallel \vec{V}_A$. При этом из теоремы о проекциях скоростей следует, что $V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta$, т.е. $V_A = V_B$, в этом случае фигура имеет мгновенное поступательное движение.

3. Если скорости точек A и B плоской фигуры $\parallel$ друг другу и при этом линия AB перпендикулярна $\vec{V}_A$, то мгновенный центр скоростей P определяется построением (рис. 2.23,б).

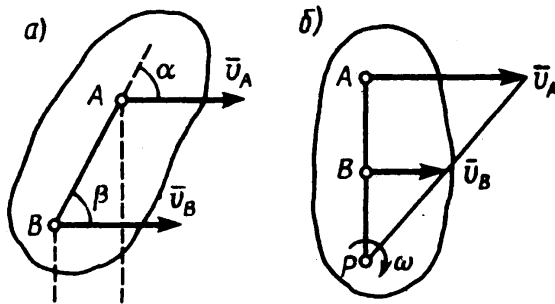


Рисунок 2.23

Справедливость построений следует из $\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB}$. В этом случае, в отличие от предыдущих, для нахождения центра P надо кроме направлений знать еще и модули скоростей V_A и V_B .

4. Если известны вектор скорости $\vec{V}_B$ какой-нибудь точки B фигуры и её угловая скорость ω , то положение мгновенного центра скоростей P , лежащего

на перпендикуляре к $\vec{V}_B$ (см. рис. 2.21), можно найти из равенства $\omega = \frac{V_B}{PB}$,
 которое дает $BP = \frac{V_B}{\omega}$.

Пример выполнения задания. Дано: схема механизма в заданном положении (рис. 1); исходные данные (табл. 1). Для заданного положения плоского механизма определить скорости точек B и C , а также угловую скорость звена, которому эти точки принадлежат.

Таблица 1

Размеры, см			ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²
OA	AB	AC		
10	60	20	1,5	2

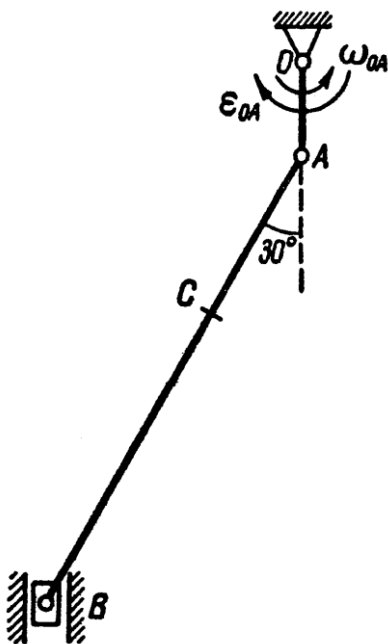


Рис. 1

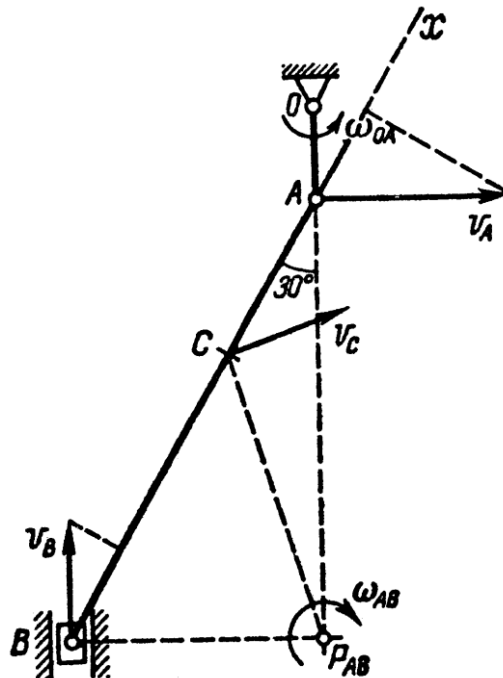


Рис. 2

Решение. Вычисляем модуль скорости пальца A кривошипа OA при заданном положении механизма:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA.$$

Скорость точки A перпендикулярна кривошипу OA . Скорость ползуна B направлена по вертикали. Мгновенный центр скоростей P_{AB} шатуна AB

находится в точке пересечения перпендикуляров, проведённых из точек A и B к их скоростям (рисунок 2).

Угловая скорость звена AB

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}}.$$

Модули скоростей точек B и C

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}; \quad v_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB}.$$

Расстояния AP_{AB} , BP_{AB} и CP_{AB} определяются из рассмотрения треугольников ABP_{AB} и ACP_{AB} :

$$AP_{AB}=52,0 \text{ см}; \quad BP_{AB}=30,0 \text{ см}; \quad CP_{AB}=36,1 \text{ см}.$$

В соответствии с этим $v_A=15,0 \text{ см/с}$; $\omega_{AB}=0,29 \text{ рад/с}$; $v_B=8,7 \text{ см/с}$; $v_C=10,5 \text{ см/с}$.

Вектор $\vec{v}_C$ направлен перпендикулярно отрезку CP_{AB} в сторону, соответствующую направлению вращения звена AB .

Для проверки определим скорость точки B другим способом. Воспользуемся теоремой о равенстве проекций скоростей точек на ось, проведённую через эти точки.

Направим ось x вдоль шатуна AB в направлении от B к A . Имеем

$$v_A \cos(\vec{v}_A, x) = v_B \cos(\vec{v}_B, x), \text{ или как видно из рисунка}$$

$$v_A \cos 60^\circ = v_B \cos 30^\circ.$$

Отсюда $v_B=8,7 \text{ см/с}$.

Полезно убедиться, что и найденная ранее скорость точки C удовлетворяет этой теореме.

Задание

Для заданного положения плоского механизма определить скорости точек B и C , а также угловую скорость звена, которому эти точки принадлежат.

Схемы механизмов изображены на рис. 3, 4, 5, а необходимые для расчёта данные приведены в таблице.

Таблица 2 – Исходные данные для расчёта

Номер варианта	Размеры, см				$\omega_{OA},$	$\omega_I,$	$\varepsilon_{OA},$	$v_A,$	$a_A,$
	OA	r	AB	AC	рад/с	рад/с	рад/с ²	см/с	см/с ²
1	40	15	–	8	2	–	2	–	–
2	30	15	–	8	3	–	2	–	–
3	–	50	–	–	–	–	–	50	100
4	35	–	–	45	4	–	8	–	–
5	25	–	–	20	1	–	1	–	–
6	40	15	–	6	1	1	0	–	–
7	35	–	75	60	5	–	10	–	–
8	–	–	20	10	–	–	–	40	20
9	–	–	45	30	–	–	–	20	10
10	25	–	80	20	1	–	2	–	–
11	–	–	30	15	–	–	–	10	0
12	–	–	30	20	–	–	–	20	20
13	25	–	55	40	2	–	4	–	–
14	45	15	–	8	3	12	0	–	–
15	40	15	–	8	1	–	1	–	–
16	55	20	–	–	2	–	5	–	–
17	–	30	–	10	–	–	–	80	50
18	10	–	10	5	2	–	6	–	–
19	20	15	–	10	1	2,5	0	–	–
20	–	–	20	6	–	–	–	10	15
21	30	–	60	15	3	–	8	–	–
22	35	–	60	40	4	–	10	–	–
23	–	–	60	20	–	–	–	5	10
24	25	–	35	15	2	–	3	–	–
25	20	–	70	20	1	–	2	–	–
26	20	15	–	10	2	1,2	0	–	–
27	–	15	–	5	–	–	–	60	30
28	20	–	50	25	1	–	1	–	–
29	12	–	35	15	4	–	6	–	–
30	40	–	–	20	5	–	10	–	–

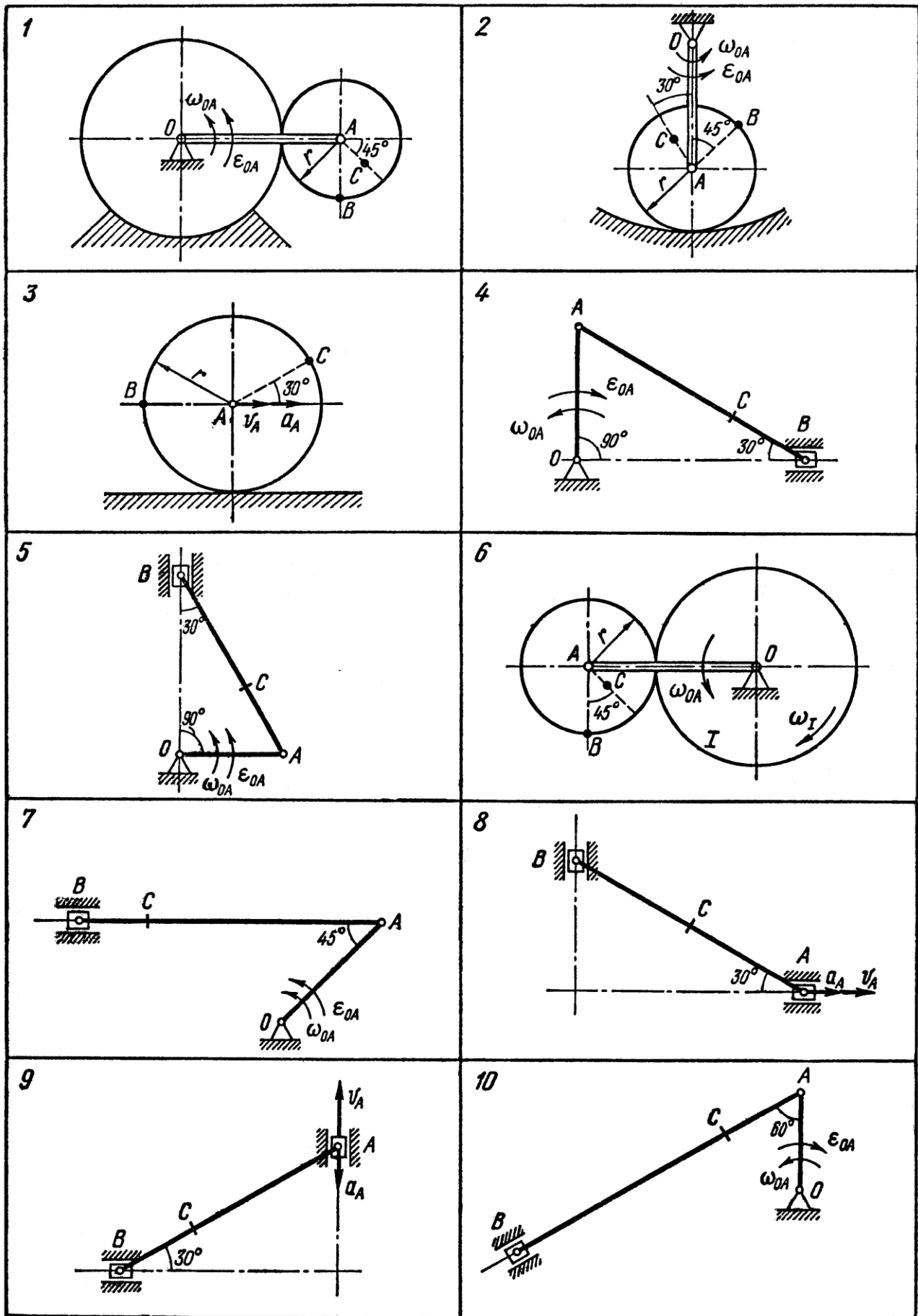


Рисунок 3

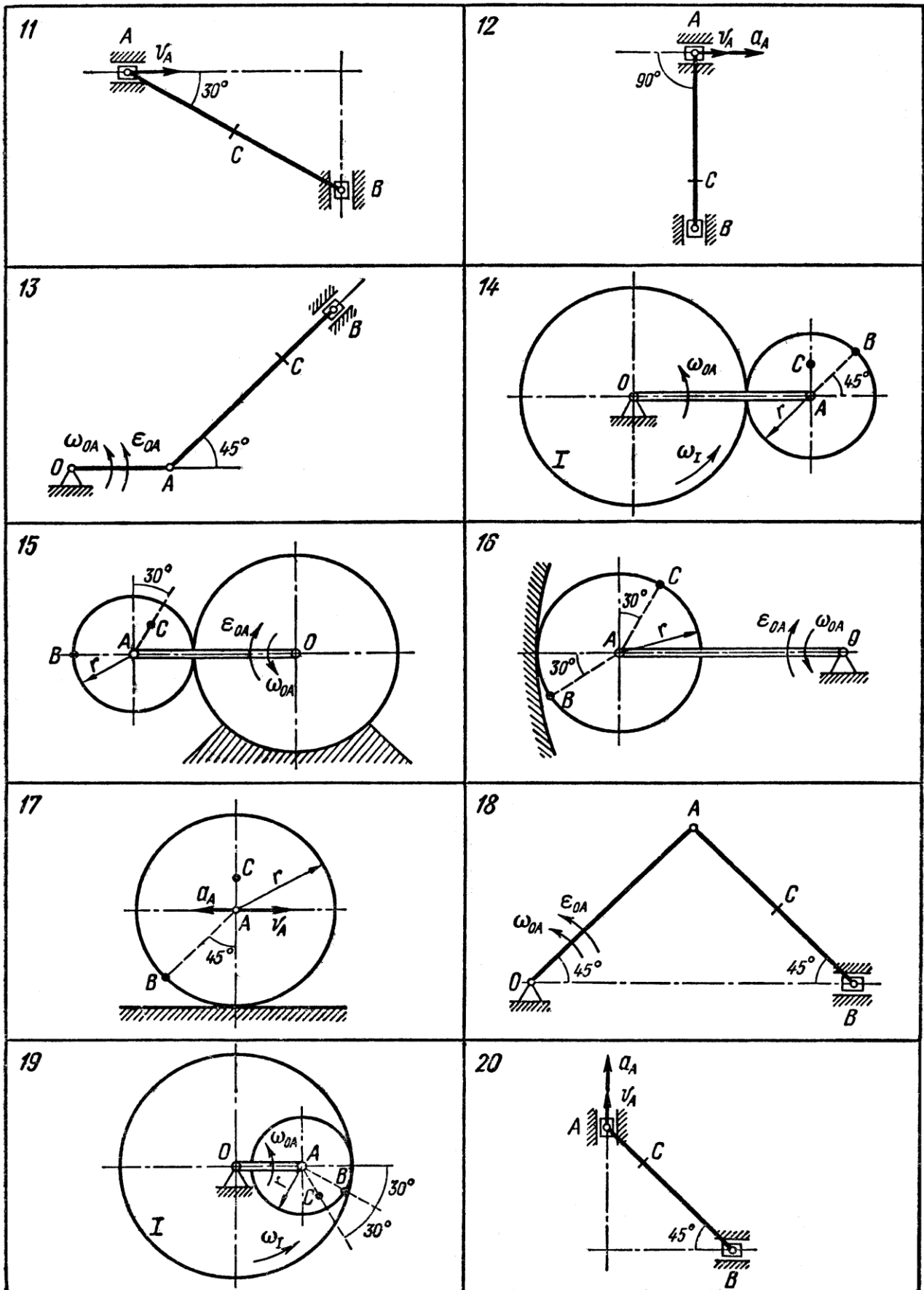


Рисунок 4

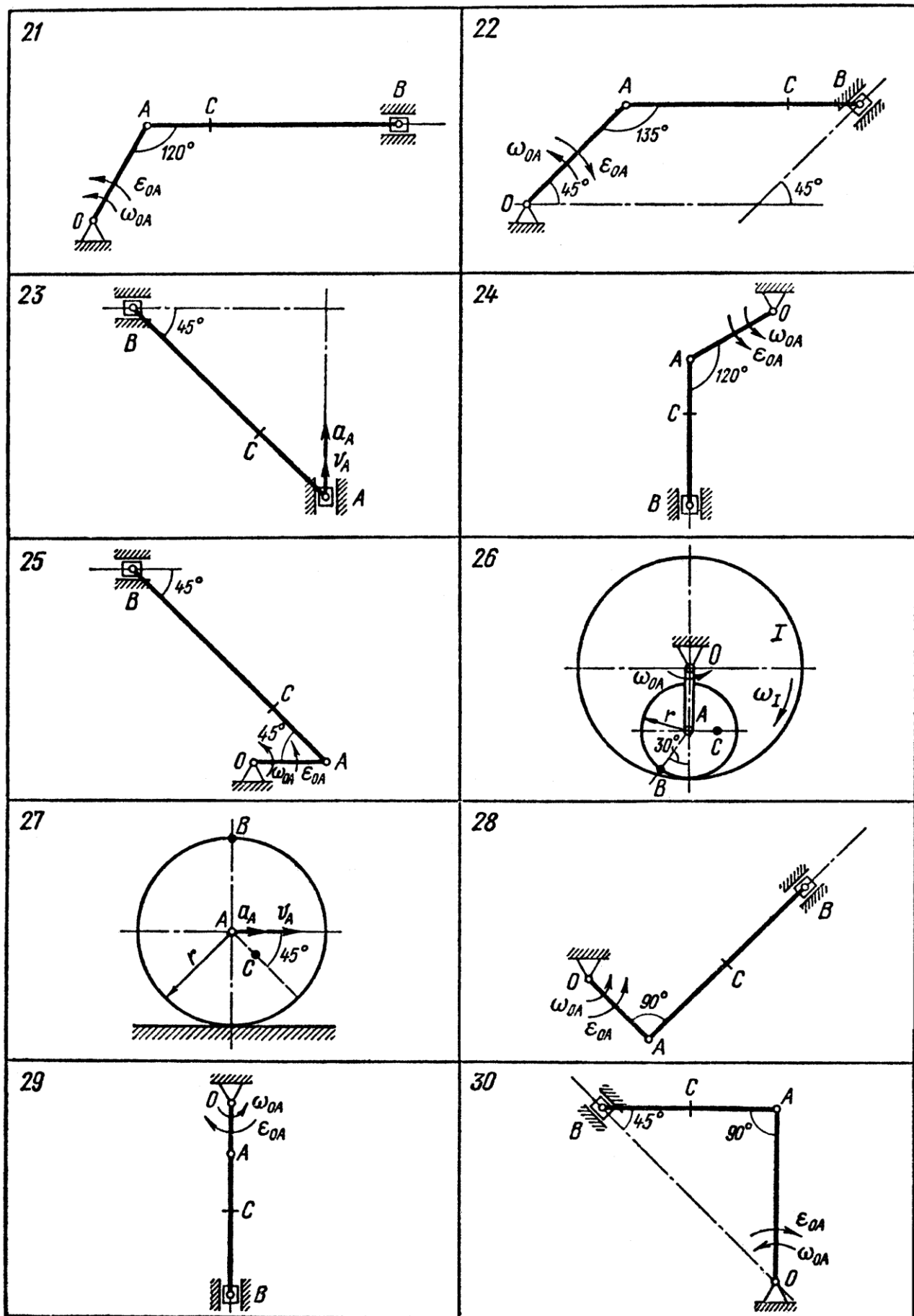


Рисунок 5

Вопросы для защиты работы

1. Методы определения скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении.
2. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела.
3. Мгновенный центр скоростей.
4. Как найти положение мгновенного центра скоростей?
5. Как определить угловую скорость плоской фигуры в данный момент времени?
6. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.
7. Где может находиться мгновенный центр скоростей, если скорости двух точек тела параллельны друг другу?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ДАННОЙ ТЕМЕ

1 Теоретическая механика : учебник / А. Я. Корнилов, А. В. Воробьева, С. К. Иванов, А. В. Лановая. — Москва : Юриспруденция, 2024. — 248 с. — ISBN 978-5-9516-0952-6. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/147352.html>

2 Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

3 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

4 Хибник, Т. А. Вопросы теоретической механики и теории механизмов и машин в курсе «Прикладная механика» : учебное пособие / Т. А. Хибник, И. С. Барманов. — Самара : Самарский университет, 2022. — 80 с. — ISBN 978-5-7883-1833-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/336788>

Практическое занятие 8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК И УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯ ЗВЕНА ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

Цель работы: получение навыков определения ускорений точек и угловых ускорений звеньев плоского механизма.

Пример выполнения задания. Дано: схема механизма в заданном положении (рис. 1); исходные данные (табл. 1) приведены в примере выполнения задания предыдущей работы. Там же определены скорости точек механизма и угловая скорость звена АВ:

$$v_A = 15,0 \text{ см/с}; \omega_{AB} = 0,29 \text{ рад/с}; v_B = 8,7 \text{ см/с}; v_C = 10,5 \text{ см/с}.$$

Таблица 1

Размеры, см			ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²
OA	AB	AC		
10	60	20	1,5	2

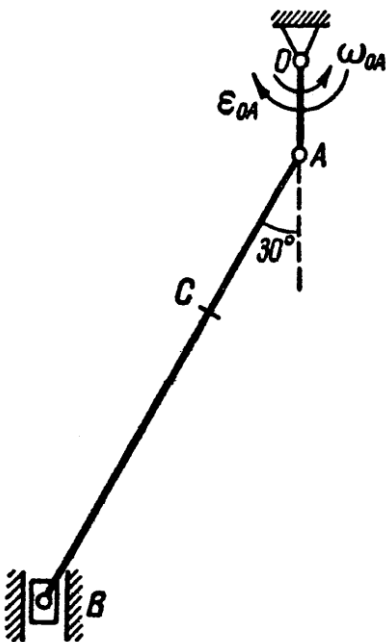


Рис. 1

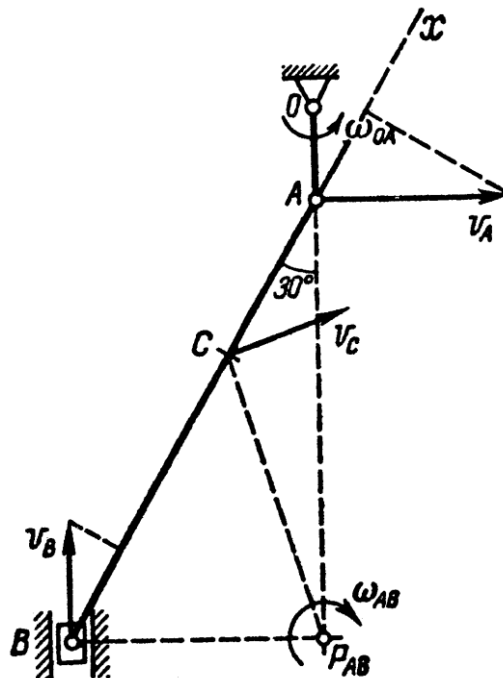


Рис. 2

Определить ускорения точек B и C , а также угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Решение.

Продолжение кинематического исследования механизма, начатого в предыдущем практическом занятии.

2. Определение ускорений точек и углового ускорения звена (рис. 78). Ускорение точки A складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\text{в}} + \vec{a}_A^{\text{ц}}; \quad a_A^{\text{в}} = \varepsilon_{OA} \cdot OA; \quad a_A^{\text{ц}} = \omega_{OA}^2 \cdot OA.$$

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^{\text{в}} + \vec{a}_{AB}^{\text{ц}},$$

или

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\text{в}} + \vec{a}_A^{\text{ц}} + \vec{a}_{AB}^{\text{в}} + \vec{a}_{AB}^{\text{ц}}. \quad (1)$$

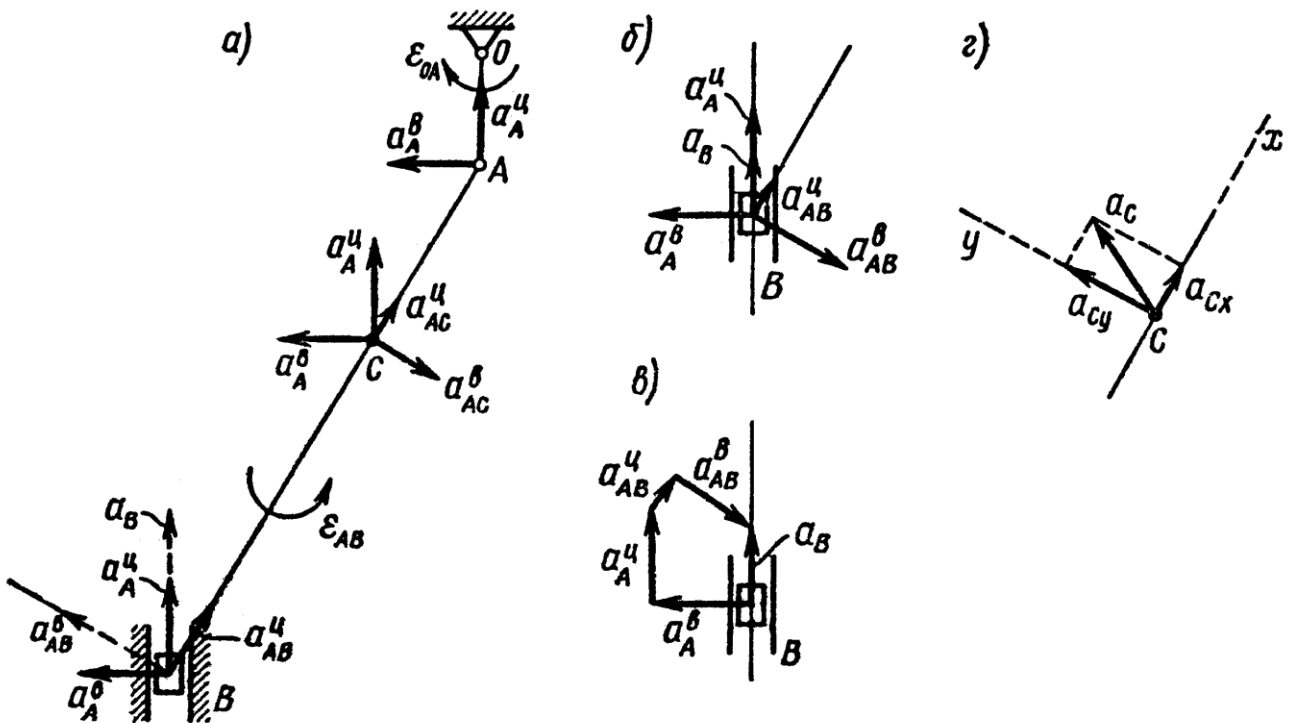


Рисунок 78

Центростремительное ускорение точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A

$$a_{AB}^u = \omega_{AB}^2 \cdot AB.$$

По приведенным формулам вычисляем:

$$a_A^B = 20,0 \text{ см/с}^2; \quad a_A^u = 22,5 \text{ см/с}^2; \quad a_{AB}^u = 5,0 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_A^u$ направлен от A к O . Вектор $\vec{a}_A^B$ перпендикулярен вектору $\vec{a}_A^u$ и направлен противоположно v_A (вращение кривошипа OA — замедленное).

Вектор $\vec{a}_{AB}^u$ направлен от B к A . Что касается ускорения $\vec{a}_B$ точки B и вращательного ускорения $\vec{a}_{AB}^B$, то известны только линии действия этих векторов: $\vec{a}_B$ — по вертикали вдоль направляющих ползуна, $\vec{a}_{AB}^B$ — перпендикулярно AB .

Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям (рис. 78, а). Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (1) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли истинное направление вектора принятому при расчете.

Выбрав направление осей x и y , как показано на рис. 78, а, получаем:

$$a_B \cos 30^\circ = -a_A^B \cos 60^\circ + a_A^u \cos 30^\circ + a_{AB}^u; \quad (2)$$

$$a_B \cos 60^\circ = a_A^B \cos 30^\circ + a_A^u \cos 60^\circ + a_{AB}^B. \quad (3)$$

Из уравнения (2) находим

$$a_B = 16,7 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение $\vec{a}_B$ направлено, как показано на рис. 78, а.

Из уравнения (3) получаем

$$a_{AB}^B = -20,2 \text{ см/с}^2.$$

Направление $\vec{a}_{AB}^B$ противоположно показанному на рис. 78, а.

Ускорение $\vec{a}_B$ и все его составляющие с учетом их истинных направлений и масштаба показаны на рис. 78, б.

Угловое ускорение шатуна AB с учетом того, что здесь a_{AB}^B — алгебраическая величина, определяется по формуле

$$\varepsilon_{AB} = |a_{AB}^B| / AB.$$

Вычисляя, находим

$$\varepsilon_{AB} = 0,34 \text{ рад/с}^2.$$

Направление ускорения $\vec{a}_{AB}^B$ относительно полюса A определяет направление углового ускорения ε_{AB} . Здесь под направлением углового ускоре-

ния понимается направление дуговой стрелки, которое при ускоренном вращении звена совпадает с направлением его вращения, а при замедленном — противоположно ему. В данном случае угловое ускорение противоположно направлению вращения шатуна.

Определить $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{AB}^B$ можно и графически — построением многоугольника ускорений.

Отложим из точки B согласно (1) в выбранном масштабе последовательно векторы $\vec{a}_A^B$, $\vec{a}_A^n$ и $\vec{a}_{AB}^n$ (рис. 78, в). Через конец вектора $\vec{a}_{AB}^n$ проведем прямую, параллельную вращательному ускорению $\vec{a}_{AB}^B$, т. е. перпендикулярно AB , до пересечения ее с прямой, по которой направлено ускорение $\vec{a}_B$.

Последнее определяется как замыкающая сторона многоугольника ускорений.

Модули a_B и a_{AB}^B могут быть найдены измерением на чертеже.

Определяем ускорение точки C :

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^B + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{AC}^B + \vec{a}_{AC}^n.$$

Вращательное и центростремительное ускорения точки C во вращательном движении AB вокруг полюса A

$$a_{AC}^B = \varepsilon_{AB} \cdot AC; \quad a_{AC}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC,$$

или

$$a_{AC}^B = 6,8 \text{ см/с}^2; \quad a_{AC}^n = 1,7 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{AC}^B$ перпендикулярен вектору $\vec{a}_{AC}^n$ и направлен соответственно угловому ускорению ε_{AB} .

Ускорение точки C находим способом проекций (рис. 78, а):

$$a_{Cx} = a_{AC}^n + a_A^n \cos 30^\circ - a_A^B \cos 60^\circ,$$

$$a_{Cy} = a_A^n \cos 60^\circ + a_A^B \cos 30^\circ - a_{AC}^B,$$

$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2}.$$

В результате вычислений получаем: $a_{Cx} = 11,2 \text{ см/с}^2$; $a_{Cy} = 21,8 \text{ см/с}^2$; $a_C = 24,5 \text{ см/с}^2$ (рис. 78, з).

Другой способ решения

Обе части кинематического исследования механизма можно выполнить аналитически, дифференцируя векторные уравнения связи интересующей точки механизма с точкой O , в которой расположим начало координат. Производную функции по времени обозначаем точкой над буквой.

Приведем решение этой же задачи другим, более общим методом.

На рис. 79 показана схема механизма в некотором произвольном положении.

Проведем оси координат. Уравнениями связи для данного механизма являются условия

$$\vec{r}_B = \vec{OA} + \vec{AB} \quad (4)$$

($\vec{r}_B$ — радиус-вектор точки B , проведенный из центра O),

$$x_B = a = \text{const.} \quad (5)$$

Проецируя (4) на ось x , с учетом (5) имеем

$$-OA \cdot \sin \alpha + AB \cdot \sin \beta = a. \quad (6)$$

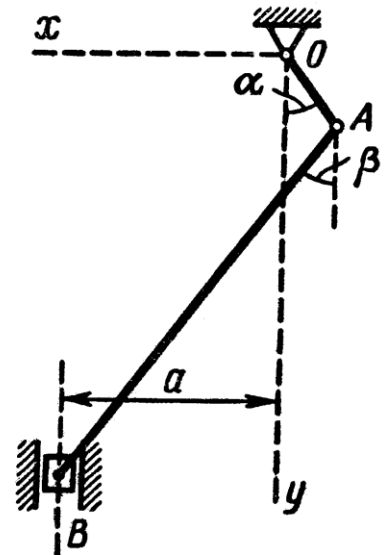


Рис. 79

Для определения угловой скорости звена AB $\omega_{AB} = \dot{\beta}$ и углового ускорения $\epsilon_{AB} = \ddot{\beta}$ нет необходимости выражать β из (6). Проще непосредственно дважды продифференцировать (6).

Имея в виду, что $\dot{\alpha} = \omega_{OA}$, получаем в результате первого дифференцирования

$$-OA \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{OA} + AB \cdot \cos \beta \cdot \omega_{AB} = 0. \quad (7)$$

Отсюда

$$\omega_{AB} = \omega_{OA} \cdot OA \cos \alpha / (AB \cdot \cos \beta). \quad (8)$$

Дифференцируя (7) и учитывая, что $\dot{\omega}_{OA} = \epsilon_{OA}$, имеем

$$OA \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \cos \alpha \cdot \epsilon_{OA} - AB \cdot \sin \beta \cdot \omega_{AB}^2 + AB \cdot \cos \beta \cdot \epsilon_{AB} = 0;$$

$$\epsilon_{AB} = \omega_{AB}^2 \tan \beta + OA (\epsilon_{OA} \cos \alpha - \omega_{OA}^2 \sin \alpha) / (AB \cdot \cos \beta). \quad (9)$$

Выражения (8) и (9) позволяют вычислять ω_{AB} и ϵ_{AB} для любого положения механизма, в частности для заданного ($\alpha = 0^\circ$, $\beta = 30^\circ$).

Заметим, что ω_{OA} и ϵ_{OA} входят в эти выражения со знаком «+» или «-» в соответствии с принятым направлением отсчета угла α . В данном случае $\omega_{OA} = 1,5$ рад/с, $\epsilon_{OA} = -2,0$ рад/с². Смысл знаков ω_{AB} и ϵ_{AB} определяется направлением отсчета угла β .

Модуль скорости точки B $v_B = |\dot{y}_B|$. Модуль ускорения $a_B = |\ddot{y}_B|$. Проецируя (4) на ось y , получаем

$$y_B = OA \cdot \cos \alpha + AB \cdot \cos \beta.$$

Отсюда после дифференцирования получаем

$$\dot{y}_B = -OA \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{OA} - AB \cdot \sin \beta \cdot \omega_{AB};$$

$$\ddot{y}_B = -OA \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \sin \alpha \cdot \epsilon_{OA} - AB \cdot \cos \beta \cdot \omega_{AB}^2 - AB \cdot \sin \beta \cdot \epsilon_{AB}.$$

Для определения скорости и ускорения точки C следует составить уравнения ее движения в координатной форме, проецируя радиус-вектор $\vec{r}_C = \vec{OA} + \vec{AC}$ на оси x и y .

Задание

Для заданного положения плоского механизма, используя результаты предыдущей работы, определить ускорения точек B и C , а также угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат. Схемы механизмов изображены на рис. 3, 4, 5, а необходимые для расчёта данные приведены в таблице 1 предыдущего практического занятия.

Вопросы к практическому занятию

1. Как вычислить центростремительное ускорение точки вращающегося тела?
2. Как вычислить вращательное ускорение точки вращающегося тела?
3. Как вычислить полное ускорение точки вращающегося тела?
4. Как вычислить полное ускорение точки звена механизма, совершающего плоскопараллельное движение?
5. Как определяются направления ускорений точек звена при его плоскопараллельном движении?
6. Как вычислить угловое ускорение шатуна?
7. Как графически определить полное ускорение ползуна?
8. Сколько уравнений связи записано для кривошипно-ползунного механизма во втором способе решения?
9. По какой переменной производится дифференцирование уравнений связи?

Рекомендуемая литература

1. Теоретическая механика : учебник / А. Я. Корнилов, А. В. Воробьева, С. К. Иванов, А. В. Лановая. — Москва : Юриспруденция, 2024. — 248 с. —

- ISBN 978-5-9516-0952-6. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/147352.html>
2. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87388.html> - DOI: <https://doi.org/10.23682/87388>
 3. Хибник, Т. А. Вопросы теоретической механики и теории механизмов и машин в курсе «Прикладная механика» : учебное пособие / Т. А. Хибник, И. С. Барманов. — Самара : Самарский университет, 2022. — 80 с. — ISBN 978-5-7883-1833-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/336788>
 4. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. - <http://biblioclub.ru/>
 5. Красюк, А. М. Теоретическая механика. Конспект лекций : учебное пособие / А. М. Красюк. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2009. — 138 с. — ISBN 978-5-7782-1245-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/45438.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Практическое занятие 9

ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Цель работы: получение навыков применения теорем динамики к исследованию движения материальной точки.

Задания

Шарик, принимаемый за материальную точку, движется из положения **A** внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости (рис. 23 – 25). Найти скорость шарика в положениях **B** и **C** и давление шарика на стенку трубки в положении **C**. Трением на криволинейных участках траектории пренебречь. В вариантах 3, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 19, 25, 28, 29 шарик, пройдя путь h_0 , отделяется от пружины.

Таблица 1 – Данные для расчёта

№ варианта	$m, \text{кг}$	$V_A, \text{м/с}$	$\tau, \text{с}$	$R, \text{м}$	f	$\alpha, \text{град}$	$\beta, \text{град}$	$h_0, \text{см}$	$c, \text{Н/см}$	Величины, которые требуется определить дополнительно
1	0,5	20	2,0	2,0	0,20	30	45	—	—	—
2	0,6	16	0,2	4	0,10	45	20	—	—	H
3	0,4	0	2,0	0,2	0,15	30	—	10	1	V_D
4	0,2	5	0,5	1,0	0,10	45	—	—	—	V_D
5	0,1	8	1,5	2,0	0,20	30	—	—	—	—
6	0,3	2	2,0	4,0	0,10	30	20	30	2	V_D
7	0,4	5	1,0	1,0	0,10	30	—	50	5	V_D
8	0,2	1	0,5	1,5	0,15	30	60	0	4	h
9	0,5	2	1,5	4,0	0,25	20	60	—	—	V_D
10	0,4	4	0,1	0,5	0,10	30	60	0,2	0,2	V_D
11	0,2	6	1,0	1,0	0,30	45	—	—	3	V_D, h
12	0,4	5	0,4	2,0	0,20	30	60	—	—	V_D
13	0,3	0	0,1	1,0	0,10	30	60	50	10	V_D
14	0,6	0	2,0	3,0	0,20	60	30	—	—	S
15	0,1	1	0,1	1,0	0,15	60	20	50	0,2	V_D
16	0,4	2	0,2	2,0	0,40	30	—	—	—	V_D
17	0,2	0	0,1	1,0	0,20	30	—	40	1,0	V_D
18	0,3	3	0,4	1,5	0,10	45	—	—	—	—

19	0,1	4	0,1	0,4	0,30	30	60	10	0,5	V_D
20	0,2	10	1,0	0,5	0,10	60	—	0	1,2	h
21	0,7	3	0,3	0,3	0,20	45	—	—	—	—
22	0,4	1	0,2	0,2	0,40	45	—	0	1,1	V_D, h
23	0,6	2	0,4	0,2	0,20	45	—	—	—	—
24	0,5	0	0,5	0,6	0,30	60	30	—	—	H
25	0,1	0	0,2	0,5	0,25	—	30	30	0,4	V_D
26	0,2	2	0,1	0,2	0,20	30	—	—	—	V_D
27	0,8	3	0,2	0,4	0,15	45	—	—	—	V_D
28	0,3	4	0,1	0,6	0,35	30	15	60	0,1	V_D
29	0,5	0	0,2	0,5	0,20	45	30	50	0,8	V_D
30	0,8	5	0,3	0,6	0,15	30	—	—	—	t_{DE}

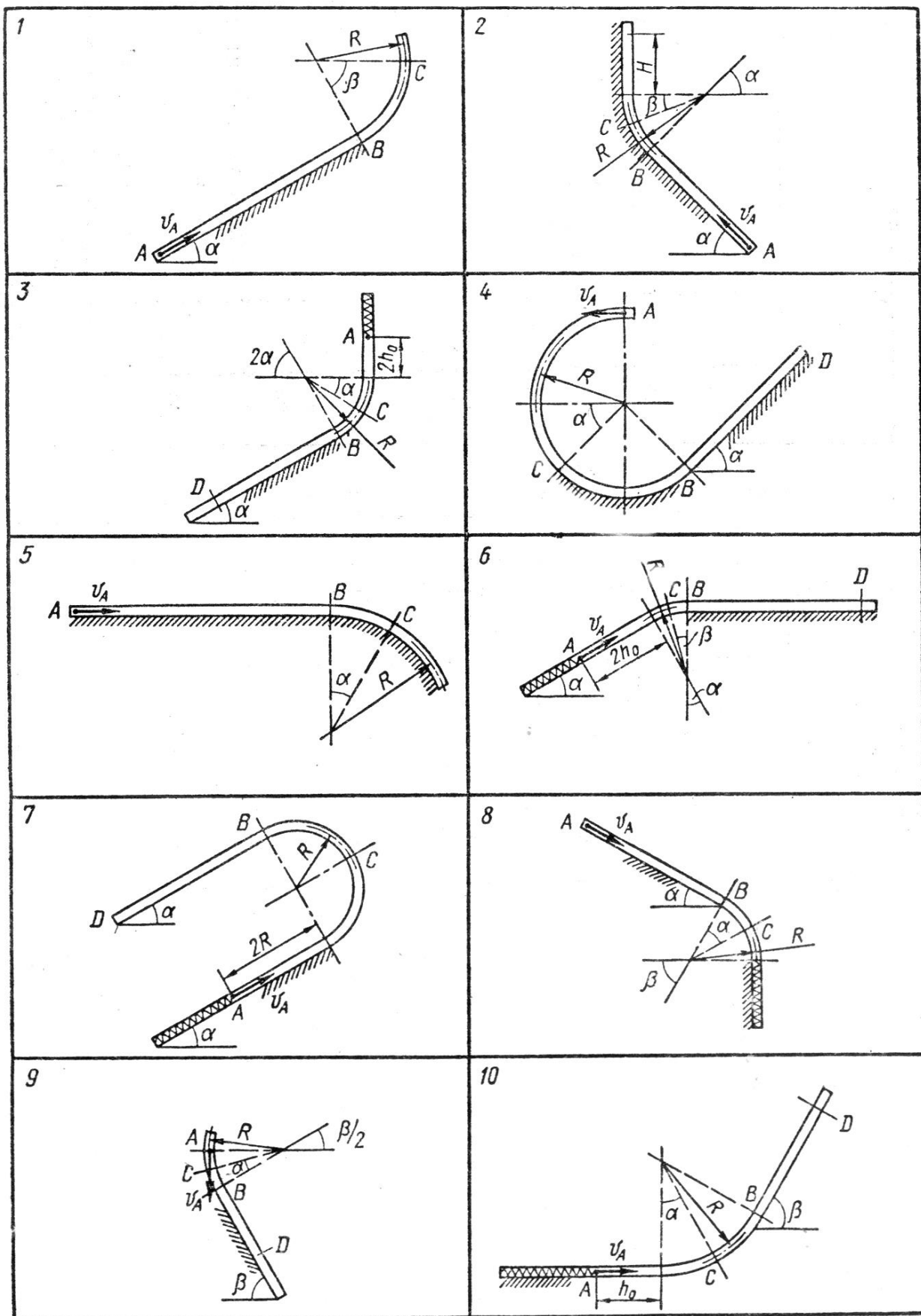


Рисунок 23

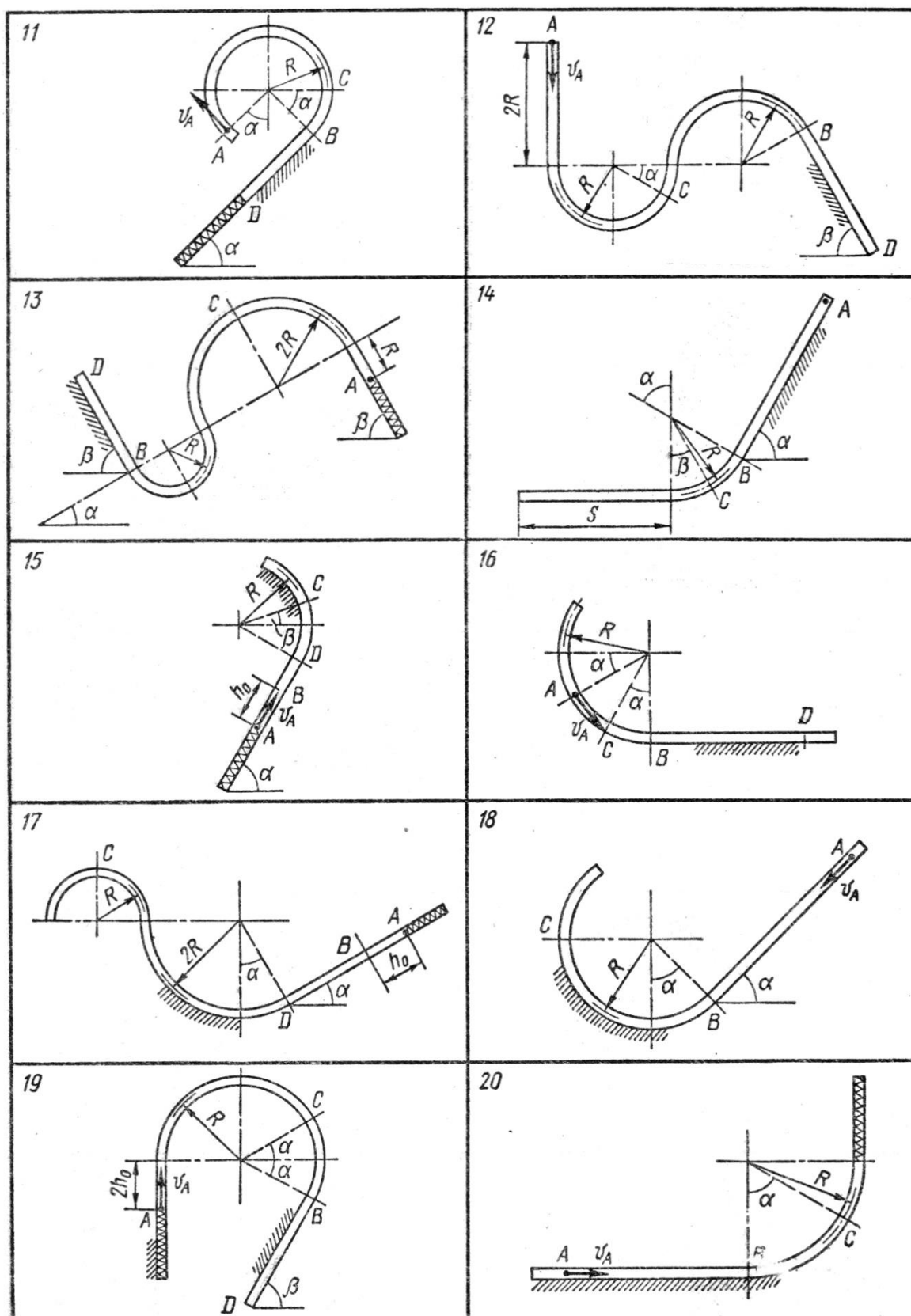


Рисунок 24

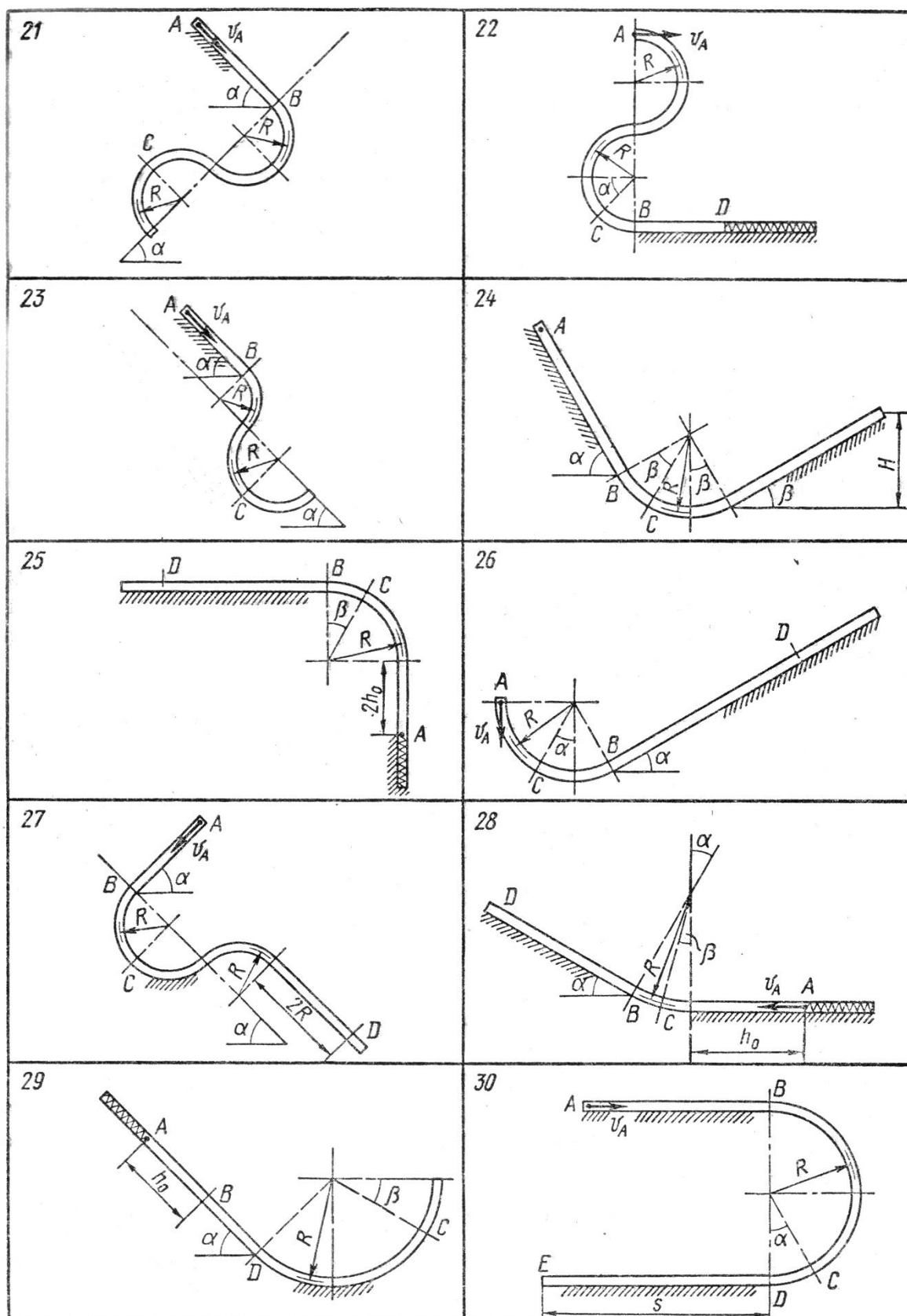


Рисунок 25

В задании приняты следующие обозначения: m – масса шарика; v_A – начальная скорость шарика; τ – время движения шарика на участке AB (в вариантах 1, 2, 5, 8, 14, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 30) или на участке BD (в вариантах 3, 4, 6, 7, 9-13, 15-17, 19, 22, 25, 26, 28, 29); f – коэффициент трения скольжения шарика по стенке трубки; h_0 – начальная деформация пружины; h – наибольшее сжатие пружины; c – коэффициент жесткости пружины; H – наибольшая высота подъема шарика; s – путь, пройденный шариком до остановки.

Пример выполнения задания:

Дано: $m = 0,5$ кг; $v_A = 0,8$ м/с; $\tau = 0,1$ с (время движения на участке BD);
 $R = 0,2$ м; $f = 0,1$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $h_0 = 0$; $c = 10$ Н/см = 1000 Н/м.

Определить v_B, v_C, N_C, v_D, h . (рис. 26).

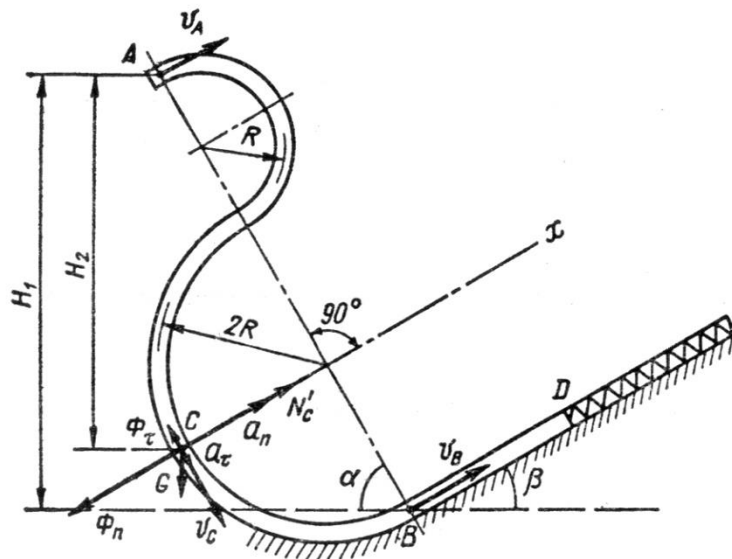


Рисунок 26

Решение:

Для определения v_B и v_C применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки. Движение шарика на участках AC и AB траектории происходит под действием силы тяжести G (силы трения на криволинейных участках не учитываем):

$$mv_B^2/2 - mv_A^2/2 = \sum A_i = GH_1 = mg|AB|\sin\alpha = mg6R\sin\alpha;$$

$$v_B^2 - v_A^2 = 2g6R\sin\alpha;$$

$$v_B = 4,59 \text{ м/с};$$

$$mv_C^2/2 - mv_A^2/2 = \sum A_i = GH_2 = mg(4R \sin \alpha + 2R \cos \alpha);$$

$$v_C^2 - v_A^2 = 4gR(2 \sin \alpha + \cos \alpha);$$

$$v_C = \sqrt{v_A^2 + 4gR(2 \sin \alpha + \cos \alpha)},$$

$$v_C = 4,26 \text{ м/с}.$$

Определяем давление шарика на стенку канала в положении C .

В соответствии с принципом Даламбера для материальной точки геометрическая сумма сил, приложенных к точке, и силы инерции этой точки равны нулю:

$$\vec{G} + \vec{N}'_C + \vec{\Phi} = 0.$$

Силу инерции материальной точки можно разложить на нормальную и касательную составляющие:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_\tau.$$

Сумма проекций сил $\vec{G}$, N'_C и $\vec{\Phi}$ на ось x должна быть равна нулю:

$$N'_C - G \cos 60^\circ - \Phi_n = 0.$$

Отсюда

$$N'_C - G \cos 60^\circ - \Phi_n = mg \cos 60^\circ + \frac{mv_C^2}{2R},$$

$$N'_C = 25,2 \text{ Н}.$$

Реакцию N'_C можно также определить с помощью естественного уравнения движения:

$$\frac{mv_C^2}{R} = \sum P_i \cos(\vec{P}_i, \vec{n}) = N'_C - G \cos 60^\circ.$$

Отсюда

$$N'_C = G \cos 60^\circ + \frac{mv_C^2}{R}.$$

Искомое давление N_C шарика на стенку трубки по числовому значению равно найденной реакции N'_C и направлено в противоположную сторону.

Скорость шарика в положении D найдем, применив на участке BD теорему об изменении количества движения материальной точки (рис. 27):

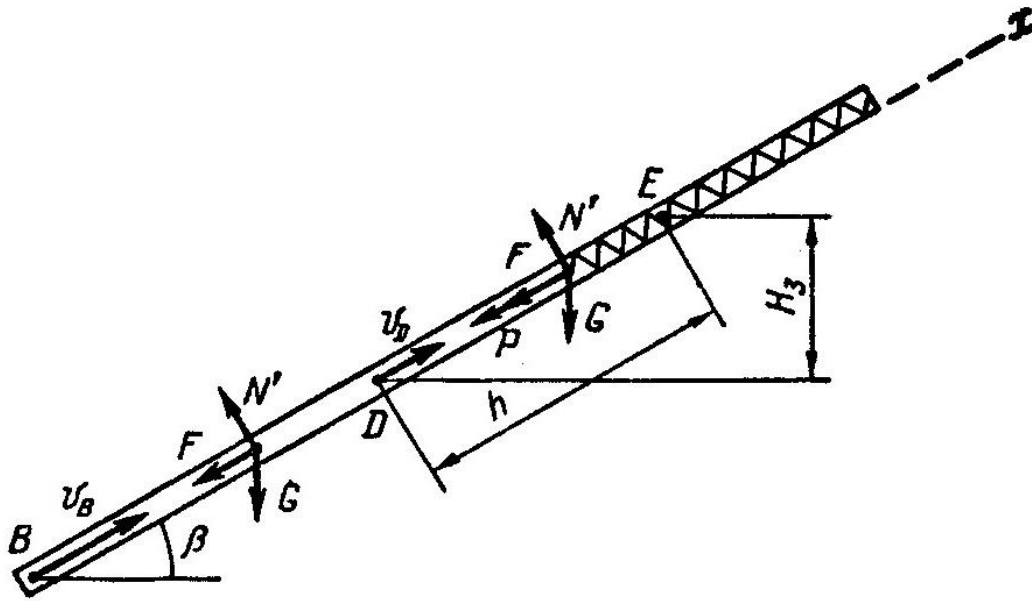


Рисунок 27

$$mv_{Dx} - mv_{Bx} = \sum S_{ix}$$

К точке приложена сила тяжести $\vec{G}$, реакция стенки трубки $\vec{N}'$ и сила трения $\vec{F}$:

$$F = fN' = fG \cos \beta.$$

Так как

$$v_{Dx} = v_D, v_{Bx} = v_B, \sum S_{ix} = -G \sin \beta \cdot t - Ft = -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t,$$

то $mv_D - mv_B = -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t,$

Откуда $v_D = 4,01 \text{ м/с}.$

Для определения максимального сжатия h пружины воспользуемся на участке DE теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$mv_E^2/2 - mv_D^2/2 = \sum A_i = -ch^2/2 - CH_3 - Fh.$$

Учитывая, что $v_E = 0$ и $H_3 = h \sin \beta$, получаем

$$ch^2/2 + G(\sin \beta + f \cos \beta) h - mv_D^2/2 = 0,$$

или $h^2 + 2Gh(\sin \beta + \cos \beta)/c - mv_D^2/c = 0.$

Решая полученное квадратное уравнение относительно h , получим

$$h = (-0,003 \pm 0,090) \text{ м.}$$

Принимаем в качестве искомой величины положительный корень квадратного уравнения:

$$h = -0,003 + 0,090 = 0,087 \text{ м.}$$

Вопросы к практическому занятию

1. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.
2. Работа силы тяжести.
3. Принцип Даламбера для материальной точки.
4. Составляющие силы инерции материальной точки.
5. Теорема об изменении количества движения материальной точки.
6. Потенциальная энергия деформации пружины.

Рекомендуемая литература

1. Теоретическая механика : учебник / А. Я. Корнилов, А. В. Воробьева, С. К. Иванов, А. В. Лановая. — Москва : Юриспруденция, 2024. — 248 с. — ISBN 978-5-9516-0952-6. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/147352.html>
2. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87388.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/87388>
3. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. - <http://biblioclub.ru/>

4. Красюк, А. М. Теоретическая механика. Конспект лекций : учебное пособие / А. М. Красюк. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2009. — 138 с. — ISBN 978-5-7782-1245-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/45438.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по организации самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

«ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ»

для студентов направления подготовки

**15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных
производств**

направленность (профиль) «Технология машиностроения»

Ставрополь, 2026

Данные методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «Основы прикладной механики» предназначены для бакалавров направления 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств».

В методических указаниях определена цель самостоятельной работы и приведен теоретический материал, необходимый студентам для выполнения поставленных перед ними задач. Приведен список необходимой литературы.

Составитель: к.т.н., доцент. В. Г. Терещенко.

Рецензент: д.т.н., проф. В.Г. Копченков.

Содержание

	Стр.
1. Цель и задачи самостоятельной работы по освоению дисциплины	4
2. Подготовка к лабораторным и практическим занятиям	5
3. Самостоятельное изучение теоретических вопросов	6
4. Подготовка к экзамену	7
5. Рекомендуемая литература и сайты	9

1. Цель и задачи самостоятельной работы по освоению дисциплины.

На самостоятельную работу студентов дневной формы обучения отводится 72 академических часа и ещё 54 академических часа на подготовку к экзамену. В сумме (126 академических часов) это в 2,33 раза больше времени всех аудиторных занятий (54 академических часа). Поэтому самостоятельная работа – очень важная, неотъемлемая часть обучения. Целью самостоятельной работы по дисциплине «основы прикладной механики» в комплексе с аудиторными занятиями является формирование компетенций (ОПК-5, ОПК-8) будущего бакалавра по направлению 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств. Содержание компетенций представлено в таблице 1.

Таблица 1. – Компетенции, формируемые при изучении «Прикладной механики»

№ п/п	Содержание компетенции	Шифр
1	Способен использовать основные закономерности, действующие в процессе изготовления машиностроительных изделий требуемого качества, заданного количества при наименьших затратах общественного труда	ОПК-5
2	Способен участвовать в разработке обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами, выборе оптимальных вариантов прогнозируемых последствий решения на основе их анализа	ОПК-8

Задачами освоения дисциплины являются: овладение наиболее актуальными для данного направления основными положениями технической механики.

2. Подготовка к лабораторным и практическим занятиям

На лабораторных занятиях по основам прикладной механики студенты выполняют эксперименты, изучают образцы, выполняют расчёты, графические построения, эскизы образцов и деталей. На практических занятиях по основам прикладной механики студенты изучают примеры выполнения заданий и выполняют задания самостоятельно. Все задания предполагают выполнение графических изображений и вычислений.

Поэтому на каждом лабораторном и практическом занятии студент должен иметь тетрадь, ручку, карандаш, ластик, два треугольника (с углами 30, 60, и 90 градусов, и с углами 45, 45 и 90 градусов) или треугольник и линейку, циркуль, транспортир, инженерный калькулятор.

Перед лабораторным или практическим занятием (накануне) студент должен внимательно прочесть записи последних текущих лекций по основам технической механики. С теоретическим материалом по данному лабораторному или практическому занятию можно также предварительно ознакомиться (в сжатом виде) по методическим указаниям к выполнению лабораторных работ или по методическим указаниям к практическим занятиям по дисциплине «основы прикладной механики» для бакалавров направления 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств.

Свою готовность к выполнению лабораторной работы или практического занятия студент проверяет самостоятельно, мысленно отвечая на вопросы для защиты работы (вопросы к практическому занятию).

Тем студентам, кому трудно даются решение задач и понимание различных разделов дисциплины «основы прикладной механики», рекомендуется вернуться к ранее пройденному и вновь прочитать соответствующие места в своём школьном учебнике физики, геометрии или алгебры.

Выполненную полностью и оформленную работу студент должен предоставить для проверки преподавателем. Для защиты проделанной работы студент должен уметь объяснить смысл и логику своих записей, выполнить небольшое задание, аналогичное части проделанной работы, ответить на вопросы к занятию.

3. Самостоятельное изучение теоретических вопросов

№ п/п	Виды самостоятельной работы	Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
		Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	Подготовка к лабораторной работе	1 2	1 2 3 4	1 2	3 3
2	Подготовка к практическому занятию	1 2	1 2 3 4	1 3	4 1 2 4 3
3	Подготовка к лекции	1 2	1 2 3 4	1	1 2 3 4
4	Самостоятельное изучение литературы	1 2	1 2 3 4	1	1 2

4. Подготовка к экзамену

Вопросы к экзамену (1 семестр)

Вопросы (задача, задание) для проверки уровня обученности

Знать

1. Дисциплина «основы прикладной механики», её разделы, объекты изучения, модели и методы.
2. Системы координат и векторы в механике.
3. Число степеней свободы материальной точки, системы материальных точек, твёрдого тела, механизма.
4. Структура механизмов. Классификация кинематических пар.
5. Структурные формулы механизмов.
6. Структурные группы механизмов. Структурный анализ и синтез механизмов.
7. Основные и производные величины в механике и их размерности. Физическая и техническая системы единиц. Интернациональные системы величин и единиц.
8. Модели материальных тел и их систем в механике.
9. Взаимодействие материальных тел в законах классической механики. Силы и системы сил.

10. Задачи статики и методы их решения.
11. Аксиомы статики.
12. Плоская система сходящихся сил. Графический способ сложения сил, его преимущества и недостатки.
13. Система сходящихся сил. Аналитический способ сложения сил, его преимущества и недостатки.
14. Система сходящихся сил. Геометрический (графоаналитический) способ сложения сил, его преимущества и недостатки.
15. Момент силы относительно точки как скалярная величина. Его свойства и порядок определения. Сложение моментов сил плоской системы сил.
16. Пара сил, момент пары сил как скалярная величина, - определение и основные свойства. Сложение пар. Случай равновесия.
17. Теорема о параллельном переносе силы (метод Пуансо).
18. Момент силы относительно точки как векторная величина. Сложение векторов моментов.
19. Пара сил как векторная величина.
20. Приведение системы сил к данному центру. Условия эквивалентности систем сил.
21. Момент силы относительно оси.
22. Определение проекций вектора момента силы относительно точки на оси системы координат.
23. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
24. Условие равновесия пространственной системы сходящихся сил.
25. Условия равновесия пространственной системы параллельных сил.
26. Аналитические условия равновесия плоской произвольной системы сил.
27. Аналитические условия равновесия плоской системы параллельных сил.
28. Свободное и несвободное тело. Связи. Активные силы и реакции связей. Аксиома связей или принцип освобожденности от связей.
29. Направления реакций связей без учёта сил трения. Примеры.
30. Реакции связей с учётом трения скольжения. Коэффициент трения и угол трения. Сила трения покоя (сцепления).
31. Что изучает кинематика? Её разделы. Что значит задать закон движения точки или тела? Траектория. Способы задания движения точки. Размерности и единицы измерения кинематических величин.
32. Векторный способ задания движения точки. Закон движения,

вектор перемещения, вектор скорости, вектор ускорения точки.
Область применения векторного способа.

33. Координатный способ задания движения точки. Закон движения, перемещение, скорость, ускорение точки. Область применения координатного способа.
34. Естественный (траекторный) способ задания движения точки. Закон движения, оси естественного трёхгранника, перемещение, скорость точки. Область применения естественного способа.
35. Естественный (траекторный) способ задания движения точки. Ускорение точки и его составляющие. Кривизна и радиус кривизны траектории.
36. Поступательное движение твёрдого тела. Траектории, скорости и ускорения точек тела при поступательном движении.
37. Вращательное движение твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Закон движения, угловая скорость и угловое ускорение.
38. Скорости и ускорения точек вращающегося тела.
39. Плоскопараллельное движение твёрдого тела: уравнения движения, определение скоростей точек плоской фигуры.
40. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела.
41. Мгновенный центр скоростей. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.
42. Методы кинематического исследования механизма. Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев с помощью плана скоростей.
43. Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев с помощью плана ускорений.
44. Дифференциальное уравнение движения свободной материальной точки и его проекции на оси координат.
45. Дифференциальное уравнение движения несвободной материальной точки и его проекции на оси координат.
46. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси естественного трёхгранника.
47. Принцип Даламбера для материальной точки.
48. Определения и формулы количества движения, импульса силы, кинетической энергии точки.
49. Теорема об изменении количества движения точки.
50. Момент количества движения точки относительно центра и оси. Теорема об изменении момента количества движения точки.
51. Работа силы.
52. Мощность.
53. Теорема об изменении кинетической энергии точки.

Уметь,
владеть

1. Определение неизвестных сил из условия равновесия плоской системы сходящихся сил.
2. Определение реакции в опоре твёрдого тела при действии

плоской произвольной системы сил.

3. Определение скорости точки твёрдого тела в механизме, звенья которого совершают вращательное и поступательное движения.

4. Определение ускорения точки твёрдого тела в механизме, звенья которого совершают вращательное и поступательное движения.

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения экзамена осуществляется в соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования в СКФУ - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры - в СКФУ, Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования - программам аспирантуры, программам ординатуры - в СКФУ.

В экзаменационный билет включаются два вопроса и задача

Для подготовки по билету отводится 60 минут

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования

- калькулятором,
- справочными таблицами.

При проверке практического задания, оцениваются:

- последовательность и рациональность выполнения,
- правильность и точность расчетов.

5. Рекомендуемая литература и сайты

5.1. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

5.1.1. Перечень основной литературы

- 1 Теоретическая механика : учебник / А. Я. Корнилов, А. В. Воробьева, С. К. Иванов, А. В. Лановая. — Москва : Юриспруденция, 2024. — 248 с. — ISBN 978-5-9516-0952-6. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/147352.html>
- 2 Хибник, Т. А. Вопросы теоретической механики и теории механизмов и машин в курсе «Прикладная механика» : учебное пособие / Т. А. Хибник, И. С. Барманов. — Самара : Самарский университет, 2022. — 80 с. — ISBN 978-5-7883-1833-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/336788>

5.1.2. Перечень дополнительной литературы

1. Молотников, В. Я. Механика конструкций. Теоретическая механика. Сопротивление материалов : учебное пособие / В. Я. Молотников. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-1327-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/211064>

2. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87388.html> - DOI: <https://doi.org/10.23682/87388>

3. Рябцев, В. А. Основы механики : учебное пособие / В. А. Рябцев, А. А. Воропаев, Д. В. Хван. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2021. — 295 с. — ISBN 978-5-4497-1051-2. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/108306.html>

4. Численное моделирование машин и механизмов. Теоретическая механика в примерах и задачах : учебное пособие / А. И. Боровков, И. Б. Войнов, И. А. Керестень [и др.]. — Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2024. — 130 с. — ISBN 978-5-7422-8708-7. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/147749.html>

5.2. Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов по дисциплине «основы технической механики» для студентов направления 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств. Составитель Терещенко В.Г.
2. Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «основы технической механики» для студентов направления 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств. Составитель Терещенко В.Г.
3. Методические указания по выполнению практических занятий по дисциплине «основы технической механики» для студентов направления 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств. Составитель Терещенко В.Г.

5.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. «Прикладная механика» - электронный учебный курс для студентов очной и заочной форм обучения. — Режим доступа: <http://www.prikladmeh.ru/>
2. «Прикладная механика» - контрольные задания. Учебное пособие для

заочников. Теоретическая механика и сопротивление материалов.

Изложены теоретические вопросы, приведены контрольные задания с примерами решения задач. – Режим доступа:

<http://www.kstu.ru/servlet/contentblob?id=76413>

3. <http://mexcaf.narod.ru/index.html> Кафедра теоретической и прикладной механики МГГУ <http://mexcaf.narod.ru/archieve.html> примеры расчётов в Excel и анимаций механизмов
4. https://istina.msu.ru/download/23170188/1fHZno:VS8wYE_QWTntMwyH8P_mr2oyTtE4/ Майер Р. В. Решение физических задач в электронных таблицах Excel

5.4 Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Информационно-справочные системы, используемые при изучении дисциплины:

1	http://catalog.ncstu.ru/catalog – Официальный сайт библиотеки ФГАОУ ВПО СКФУ.
2	http://www.iprbookshop.ru/home.html – Электронно-библиотечная система
3	www.biblioclub.ru – Университетская библиотека онлайн
4	https://e.lanbook.com/books/930 – Электронно-библиотечная система Лань
5	https://urait.ru/ - ЮРАЙТ образовательная платформа

Программное обеспечение:

1	Операционная система: Альт Рабочая станция К 10
2	Пакет офисных программ - Р7-Офис