

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ
по дисциплине «**Математический анализ**»
для студентов

Направления подготовки	09.03.01 Информатика и вычислительная техника
Направленность (профиль)	Программное обеспечение средств вычислительной техники и автоматизированных систем

Ставрополь
2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАЗДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ.....	3
Занятие № 1. Множества. Метод математической индукции. Неравенство Бернулли	3
Занятие № 2. Функция действительной переменной	6
Занятие № 3. Вычисление предела последовательности	8
Занятие № 4. Вычисление предела функции	11
Занятие № 5. Замечательные пределы	12
Занятие № 6. Непрерывность функции	14
РАЗДЕЛ II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....	17
Занятие № 7. Вычисление производной по определению	17
Занятие № 8. Техника нахождения производных.....	19
Занятие № 9. Дифференцирование сложных функций	21
Занятие № 10. Основные теоремы дифференциального исчисления	27
Занятие № 11. Применение производной для исследования функции.....	31
Занятие № 12. Полное исследование функции и построение графика.....	37
РАЗДЕЛ III. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	38
Занятие № 13. Неопределенный интеграл и его свойства	38
Занятие № 16. Интегрирование рациональных функций	38
Занятие № 17. Интегрирование иррациональных функций	39
Занятие № 18. Интегрирование тригонометрических функций.....	39
Занятие № 19. Определенный интеграл и его свойства	39
Занятие № 20. Методы вычисления определенного интеграла.....	40
Занятие № 22. Несобственные интегралы.....	40
РАЗДЕЛ IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	41
Занятие № 23. Функции нескольких переменных. Основные понятия, область определения	41
Занятие № 24. Частные производные функции нескольких переменных	41
Занятие № 25. Полный дифференциал функции нескольких переменных.....	41
Занятие № 26. Частные производные и дифференциалы высших порядков	42
Занятие № 27. Дифференцирование сложных функций	42
Занятие № 28. Экстремум функции нескольких переменных.....	42
Занятие № 29. Наибольшее и наименьшее значение функции нескольких переменных	43
РАЗДЕЛ V. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	43
Занятие № 30. Вычисление двойных интегралов двукратным интегрированием.....	43
Занятие № 31. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах	44
Занятие № 32. Переход к полярным координатам в двойных интегралах.....	44
Занятие № 34. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах	44
Занятие № 35. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах.....	45
Занятие № 36. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах	45
Занятие № 37. Геометрические приложения тройных интегралов.....	45
РАЗДЕЛ VI. РЯДЫ.....	46
Занятие № 38. Понятие числового ряда с положительными членами.....	46
Занятие № 39. Признаки сравнения сходимости числового ряда, признак Даламбера.....	46
Занятие № 40. Радиальный и интегральный признаки Коши сходимости числового ряда.....	46
Занятие № 41. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница	47
Занятие № 42. Исследование сходимости функциональных рядов.....	47
Занятие № 43. Исследование сходимости степенных рядов	47
Занятие № 44. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.....	48
Занятие № 45. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом	48

ПЛАНЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1 семестр

РАЗДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Занятие № 1. Множества. Метод математической индукции. Неравенство Бернулли

Цель занятия: определить содержание понятия «множество», научиться выполнять различные действия над множествами, отработать классификацию числовых множеств. Познакомиться с методом математической индукции, используемым при доказательстве математических высказываний, использовать неравенство Бернулли при доказательстве неравенств.

Вопросы для обсуждения:

1. Определение множества, операции над множествами, их изображение с помощью диаграмм Эйлера - Венна.
2. Числовые множества.
3. Метод математической индукции, неравенство Бернулли.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 1. Решить неравенство $|x+3|+4x > |2x-8|$.

Так как значение выражения стоящего под знаком модуля меняет свой знак при переходе от положительных к отрицательным значениям, то найдем эти критические точки: $x+3=0$, $2x-8=0$, следовательно $x_1=-3$, $x_2=4$. Разобьем числовую прямую этими точками на интервалы $(-\infty-3]$, $(-3,4)$, $[4,+\infty)$ и на каждом интервале раскроем модули в исходном неравенстве по определению:

$$\begin{aligned} 1). & \begin{cases} x \in (-\infty-3], \\ -x-3+4x > -2x+8 \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty-3], \\ 5x > 11 \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty-3], \\ x > 2,2 \end{cases} x \in \emptyset; \\ 2). & \begin{cases} x \in (-3,4], \\ x+3+4x > -2x+8 \end{cases} \begin{cases} x \in (-3,4], \\ 7x > 5 \end{cases} \begin{cases} x \in (-3,4], \\ x > \frac{5}{7} \end{cases} x \in \left(\frac{5}{7}, 4\right]; \\ 3). & \begin{cases} x \in (4,+\infty], \\ x+3+4x > 2x-8 \end{cases} \begin{cases} x \in (4,+\infty], \\ 3x > -11 \end{cases} \begin{cases} x \in (4,+\infty], \\ x > -\frac{11}{3} \end{cases} x \in (4,+\infty]; \end{aligned}$$

Решением данного неравенства являются значения $x \in \left(\frac{5}{7}, +\infty\right]$.

Задания для самостоятельной работы

1. С помощью диаграмм Эйлера – Венна показать справедливость следующих утверждений:

- а). $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;
- б). $(A \cup C) \setminus B = (A \setminus B) \cup (C \setminus B)$;
- в). $(A \setminus B) \cup C = (A \setminus C) \setminus B$;
- г). $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.

2. Задать перечислением всех элементов множества определенные с помощью следующих характеристических свойств:

а). $A = \{x \in N \mid x \leq 5\}$;

б). $B = \{x \in N \mid x < 0\}$;

в). $C = \{x \in Z \mid |x| \leq 2\}$;

г). $D = \{x \in Z \mid (x-3)(x^2-1) = 0; \quad x \geq 0\}$.

3. Определить множества $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$, если

а). $A = \{x \in Z \mid |x| \leq 2\}$, $B = \{x \in Z \mid x^2 - 5x < 0\}$;

б). $A = \{x \in Z \mid |x-2| < 1\}$, $B = \{x \in Z \mid (-1; 2]\}$;

в). $A = \{x \in Z \mid |x-1| < 2\}$, $B = \{x \in Z \mid |x-2| < 3\}$;

г). $A = \{x \in R \mid |x-1| < 2\}$, $B = \{x \in R \mid |x-1| + |x-2| < 3\}$;

д). $A = \{x \in R \mid x^2 + x - 20 < 0\}$, $B = \{x \in R \mid x^2 - 7x + 12 < 0\}$.

4. Решить уравнения

а). $2|x+3| - 4|x+5| + |x-2| = 0$;

б). $|x+2| - 3|x-1| + 5|x-4| = 0$;

в). $|x+5| + 4|x+3| - |x-1| = 0$;

г). $|x-1| + 5|x+5| - 3|x-2| = 4$.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 2. Доказать что для любого натурального n верно тождество:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1). Проверим равенство при $n=1$: $1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $1 = \frac{6}{6} = 1$ - верно.

2). Предположим, что равенство верно при $n=k$, то есть $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

- верно.

3). Докажем, истинность равенства и при $n=k+1$, то есть докажем

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Преобразуем левую часть этого равенства, заменив первые k слагаемых правой частью равенства из пункта 2):

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали равенство пункта 3), используя равенство пункта 2), согласно ММИ, данное утверждение справедливо $\forall n \in N$.

Пример 3. Доказать, что $2^n > 2n+1$ при любом натуральном $n \geq 3$.

1). При $n=3$ неравенство верно: $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$.

2). Предположим, что $2^k > 2k + 1$ ($k \geq 3$).

3). Докажем, что верно неравенство $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$.

В самом деле, $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot (2k + 1) = (2k + 3) + (2k - 1)$. Но $2k - 1 > 0$ при любом натуральном k . Значит, $2^{k+1} > 2k + 3$. Отсюда следует, что неравенство $2^n > 2n + 1$ справедливо при всех натуральных $n \geq 3$.

Пример 4. Доказать что $(3^{2n+1} + 40n - 67) : 64$ для любого натурального n .

1). Если $n = 1$, то $3^3 + 40 - 67 = 0$, а $0 : 64$.

2). Предположим, что при $n = k$ $(3^{2k+1} + 40k - 67) : 64$.

3). Докажем истинность утверждения при $n = k + 1$, то есть что $(3^{2k+3} + 40(k+1) - 67) : 64$.

$$\begin{aligned} \text{В самом деле, } 3^{2k+3} + 40(k+1) - 67 &= 9 \cdot 3^{2k+1} + 40k + 40 - 67 = \\ &= 9 \cdot (3^{2k+1} + 40k - 67) - 8 \cdot (40k - 67) + 40 = 9 \cdot (3^{2k+1} + 40k - 67) - 320k + 576 = \\ &= 9 \cdot (3^{2k+1} + 40k - 67) + 64 \cdot (9 - 5k), \end{aligned}$$

но первое слагаемое делится на 64 по предположению, а второе слагаемое делится на 64, так как один из множителей равен 64. Следовательно, и сумма разделится на 64. Таким образом, мы доказали, что $(3^{2n+1} + 40n - 67) : 64$ для любого натурального числа n .

Задания для самостоятельной работы

С помощью метода математической индукции докажите равенства

а). $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1) \cdot n^2 = \frac{n(n^2 - 1)(3n + 2)}{12};$

б). $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3};$

в). $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2, n \in N;$

г). $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$

6. С помощью метода математической индукции докажите следующие неравенства

а). $2^n > n^3, \forall n \geq 10;$

б). $2^{n-1} > n(n+1) \forall n \geq 7;$

в). $4^n \geq 3^n + n^2 \forall n \in N;$

г). $3^n > 5n + 1 \forall n \geq 3.$

7. Докажите, что при любом натуральном n $9^{n+1} - 8n - 9$ кратно 16.

8. Докажите, что при любом натуральном n $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ кратно 19.

9. Докажите, что при любом натуральном n $n(2n^2 - 3n + 1)$ кратно 6.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 2. Функция действительной переменной

Цель занятия: определить содержание понятия «действительная функция действительного аргумента», основные свойства функций, их простейшую классификацию.

Вопросы для обсуждения:

1. Простейшая классификация функций действительной переменной: монотонные, четные и нечетные, периодические, ограниченные и неограниченные функции.
2. Способы задания функций.
3. Арифметические действия над функциями.
4. Основные элементарные функции, их свойства, графики.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 5. Найти область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 7x + 12} + \frac{2x - 3}{x - 5}$.

Область определения этой функции состоит из тех значений x , при которых оба слагаемых принимают действительные значения. Поэтому

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 \geq 0 \\ x - 5 \neq 0. \end{cases}$$

Решая квадратное неравенство $x^2 - 7x + 12 \geq 0$, получим $x \leq 3$ и $x \geq 4$. Таким образом, область определения данной функции состоит из совокупности трех промежутков: $x \leq 3$; $x \geq 4$; $x \neq 5$ (рис. 6).

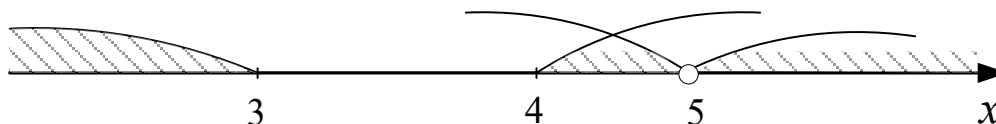


Рис. 6

Следовательно, $D(y) = (-\infty; 3] \cup [4; 5) \cup (5; +\infty)$.

Пример 6. Установить четность или нечетность функции $y = x^3 \cos 2x$.

$D(y) = (-\infty; +\infty)$, то есть область определения функции есть симметричное множество,

$$f(x) = x^3 \cos 2x, \quad f(-x) = (-x)^3 \cos 2(-x) = -x^3 \cos 2x.$$

Следовательно, $f(-x) = -f(x)$, то есть данная функция нечетная.

Задания для самостоятельной работы

Найти область определения функции

а). $y = 3x^3 + 5x^2 - 7x + 2$;

б). $y = \frac{1}{7x - 2}$;

в). $y = \frac{x - 1}{x^2 - 7x + 12}$;

г). $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x + 1}$;

$$\text{д). } y = \frac{5}{\sqrt{x-4}};$$

$$\text{е). } y = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}};$$

$$\text{ж). } y = \sqrt{4-x^2};$$

$$\text{з). } y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}};$$

$$\text{и). } y = \lg(x^3 - 3);$$

$$\text{к). } y = \sin(2x + 3);$$

$$\text{л). } y = \operatorname{tg} 2x;$$

$$\text{м). } y = \arcsin(5x - 8);$$

$$\text{н). } y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}} + \lg(x - 1);$$

$$\text{о). } y = \log_2(x - 1) + x^2;$$

$$\text{п). } y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x+3};$$

$$\text{р). } y = 2x^2 + \lg(x - 1) + \frac{1}{x-3};$$

$$\text{с). } y = \frac{\sin x}{\lg(x^2 - 4)};$$

$$\text{т). } y = \lg \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 1};$$

$$\text{у). } y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2};$$

$$\text{ф). } y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5};$$

$$\text{х). } y = \arcsin \frac{x-3}{2} - \lg \sqrt{4-x};$$

$$\text{ч). } y = \arccos \frac{x-4}{x}.$$

11. Найти область значений функции

$$\text{а). } y = \frac{1}{2 - \cos 3x};$$

$$\text{б). } y = \frac{x^2 + 8}{x};$$

$$\text{в). } y = \frac{x+2}{x-3};$$

$$\text{г). } y = \frac{x^2 - 4}{x-1}.$$

12. Какие из указанных ниже функций чётны, какие нечётны, какие не являются ни чётными, ни нечётными

$$\text{а) } y = x^2 - 2x^2;$$

$$\text{б) } y = x - x^2;$$

$$\text{в) } y = \cos x;$$

$$\text{г) } y = x - \frac{x^2}{6} + \frac{x^5}{120};$$

$$\text{д) } y = \sin x - \cos x;$$

$$\text{е) } f(x) = x + \sin x;$$

$$\text{ж) } y = \frac{x^2}{\sqrt{3x^2 - 2}};$$

$$\text{з) } q(x) = \sqrt{1 - x^2};$$

$$\text{и) } s(t) = \lg \frac{1-t}{1+t};$$

$$\text{к) } f(x) = x^3, x \in [-4; 7].$$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 3. Вычисление предела последовательности

Цель занятия: рассмотреть основные понятия теории числовых последовательностей и их пределов, научиться вычислять пределы числовых последовательностей.

Вопросы для обсуждения:

1. Предел числовой последовательности и его геометрический смысл.
2. Свойства сходящихся последовательностей.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, связь между ними.
4. Вычисление пределов числовой последовательности: неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right), (\infty - \infty)$.
5. Число e и натуральные логарифмы.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 7. Последовательность $\{(-1)^{n+1}\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$ ни к какому пределу не стремится.

В самом деле, допустим, что эта последовательность имеет предел равный числу a . Пусть $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Рассмотрим окрестность этой точки $\left(a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3}\right)$.

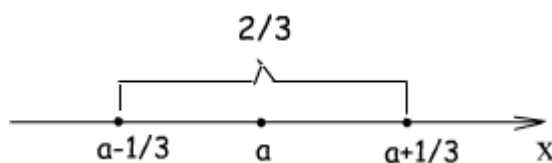


Рис. 21

Длина ее равна $2/3$, то есть $\rho\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \left|-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}$. Очевидно, что эта окрестность не может содержать в себе одновременно и точку 1 и точку (-1), потому что $\rho(-1; 1) = 2$, а $2 > 2/3$. Для определенности будем считать, что точка 1 не принадлежит нашей окрестности. Но $x_n = 1$ при $n = 1, 3, 5, \dots$ то есть вне нашей окрестности имеется бесконечное число элементов последовательности.

Таким образом, точка a не может быть пределом нашей последовательности, и так как эта точка произвольная, то данная последовательность предела не имеет, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} = \infty$.

Пример 8. Доказать, что последовательность $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \dots$ при $n \rightarrow \infty$ имеет пределом число $\frac{1}{2}$.

Пусть ε – произвольное положительное число. Требуется доказать, что существует такое число $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N$ выполняется неравенство $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

Составим разность по модулю $\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{1}{2(2n+1)} \right| = \frac{1}{2(2n+1)}$. Таким образом, неравенство $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ выполняется, если $\frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$, откуда $2(2n+1)\varepsilon > 1$ или $n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$. Понятно, что в качестве числа N можно взять целую часть числа $\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$, то есть $N = \left[\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right]$, что и требовалось доказать.

Зададим $\varepsilon = \frac{1}{80}$, тогда $n > \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{80}} - \frac{1}{2} = 19\frac{1}{2}$. Следовательно, начиная с номера $n = 20$,

будет выполняться неравенство $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, то есть $\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{80}$, что означает

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$. С геометрической точки зрения это означает, что вне интервала $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{80}, \frac{1}{2} + \frac{1}{80} \right)$ находятся 19 первых членов данной последовательности $u_1, u_2, \dots, u_{19}$,

а начиная с двадцатого, все члены последовательности будут попадать в указанный интервал.

Пример 9. Последовательность $x_n = (-1)^n$ ограничена, так как $|x_n| = 1$, но является расходящейся, потому что предела не имеет.

Задания для самостоятельной работы

1. Пользуясь определением предела числовой последовательности доказать, что

а). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{3n-1} = 1;$

б). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-5}{3n+1} = \frac{2}{3};$

в). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-3n}{n+1} = -3;$

г). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3n^2}{n^2+2} = -3.$

2. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$.

Укажите номер, начиная с которого, все члены последовательности $\{u_n\}$ находятся в ε -окрестности точки a , если

а). $u_n = \frac{6n+7}{11-2n}, \quad a = -3, \quad \varepsilon = 0,001;$

б). $u_n = \frac{3n^2+2}{5n^2+4}, \quad a = \frac{3}{5}, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$

Задания, решаемые в аудитории

Пример 10. Вычислить предел каждой числовой последовательности

$$\begin{aligned}
1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{35n^4 + 7n^3 - 4n + 2}{5n^4 + 3n^2 - 150n - 4} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{35 + \frac{7}{n} - \frac{4}{n^3} + \frac{2}{n^4}}{5 + \frac{3}{n^2} - \frac{150}{n^3} - \frac{4}{n^4}} = \frac{35}{5} = 7; \\
2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25n^4 + 5n^3 - 7n + 4}{n^5 + n - 9} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{25}{n} + \frac{5}{n^2} - \frac{7}{n^4} + \frac{4}{n^5}}{1 + \frac{1}{n^4} - \frac{9}{n^5}} = \frac{0}{1} = 0; \\
3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{30 - n + 8n^2 + 5n^5}{15n + 4n^2 + n^3} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{30}{n^5} - \frac{1}{n^4} + \frac{8}{n^3} + 5}{\frac{15}{n^4} + \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\downarrow 0} = \infty.
\end{aligned}$$

Из приведенного решения следует сделать вывод:

1. Если старшие степени в числителе и знаменателе равны, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях;
2. Если степень числителя меньше степени знаменателя, то предел равен 0;
3. Если степень числителя больше степени знаменателя, то предел равен ∞ .

Пример 11. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n+1)!}{(n+2)!}$.

Воспользуемся свойством $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n$, тогда числитель и знаменатель можно привести к виду:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n+1)!}{(n+2)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!(1 + n(n+1))}{(n-1)!n(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0
\end{aligned}$$

Пример 12. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n-3)} - (n+2))$.

Избавимся от разности бесконечно больших величин, для этого умножим и разделим на выражение, сопряженное данному, получая при этом разность квадратов

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n(n-3)} - (n+2))(\sqrt{n(n-3)} + (n+2))}{\sqrt{n(n-3)} + n + 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n(n-3) - (n+2)^2)}{\sqrt{n(n-3)} + 2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n - n^2 - 4n - 4}{\sqrt{n(n-3)} + 2 + n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n - 4}{\sqrt{n(n-3)} + 2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7 - \frac{4}{n}}{\sqrt{1 - \frac{3}{n}} + \frac{2}{n} + 1} = -\frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Пример 13. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1} \right)^{3n}$.

Воспользуемся пределом $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$, поскольку, подставляя предельное значение n , будем иметь неопределенность вида (1^∞) , получим

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1} \right)^{3n} &= (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1+4}{2n-1} \right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2n-1} \right)^{3n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2n-1} \right)^{\frac{2n-1}{4} \cdot \frac{4}{2n-1} \cdot 3n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{2n-1} \cdot 3n} = e^6.
\end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, если

а). $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$;

б). $u_n = \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}{n + 2}$;

в). $u_n = \frac{(n + 3)!}{2(n + 1)! - (n + 2)!}$;

г). $u_n = \left(n - \sqrt[3]{n^3 - n^2} \right)$.

2. Вычислить предел числовой последовательности:

а). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + n!}{(n + 2)!}$;

д). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 5}{7 + n\sqrt{n}}$;

б). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n - 2)(n - 1)}{n^4 + 5n + 3}$;

е). $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \sqrt[3]{1 - n^3} \right)$;

в). $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n})$;

ж). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}$.

г). $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 1} - \frac{n}{6} \right]$;

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 4. Вычисление предела функции

Цель занятия: познакомиться с основными понятиями теории пределов функций, научиться вычислять пределы функций, использовать правило раскрытия неопределенности.

Вопросы для обсуждения:

1. Предел функции в точке и его свойства.
2. Правило раскрытия неопределенности при вычислении предела функции.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 14. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$.

Так как $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5 \neq 0$, то применим теорему о пределе частного

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = \frac{4 + 2 - 2}{4 + 1} = \frac{4}{5}.$$

Пример 15. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x}$.

Воспользуемся правилом, раскладывая числитель и знаменатель дроби на множители, получим $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x} = \frac{0}{1} = 0$.

Пример 16. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Пример 17. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = -2.$$

Пример 18. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x}$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2 - 1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} = \frac{2}{-1 \cdot (1+1)} = -1. \end{aligned}$$

Пример 19. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+3} - 2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+3} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1-2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x+3-4)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1+3} + 2}{\sqrt{1+1} + \sqrt{2}} = \frac{2+2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 5. Замечательные пределы

Цель занятия: научиться вычислять пределы функций, используя первый и второй замечательные пределы, их следствия, а также замечательные пределы, связанные с показательной и логарифмической функциями.

Вопросы для обсуждения:

1. Первый замечательный предел, следствия.
2. Второй замечательный предел, следствия.
3. Замечательные пределы, связанные с показательной и логарифмической функциями.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 20. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2} \cdot 2} \right)^2 = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 21. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \frac{5}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} = \frac{5}{7}.$$

Пример 22. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\pi/4 - x)}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\sin(\pi/4 - x)}{2\sqrt{2}(\pi/4 - x)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Пример 23. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$.

Вычислим предел, используя замену переменной $y = \pi/2 - x$, откуда $x = \pi/2 - y$ и $\pi - 2x = \pi - \pi + 2y$, тогда $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi/2 - y)}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}.$

Пример 24. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{4} \cdot \frac{4}{x-1} \cdot (x+3)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{x-1} \right) \cdot (x+3)} = e^4 \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить предел функции:

а). $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2};$

в). $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 4}{x^3 - x^2 - 3x - 1};$

д). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1};$

ж). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{1 - \sqrt{1+x}};$

б). $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 1};$

г). $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4};$

е). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4};$

з). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{6x};$

- и). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 10x};$
- л). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 3x};$
- н). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{6x^2};$
- п). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x \sin 5x}{(1 - \cos 4x) \operatorname{tg} 2x};$
- с). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x};$
- у). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sqrt{x+4} - 2};$
- к). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{15x};$
- м). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{ctg} 4x \sin 5x};$
- о). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\sin^2 4x};$
- р). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x \sin^2 5x}{x^3 \sin 4x};$
- т). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{\cos 2x - \cos 8x};$
- ф). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 4x}.$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 6. Непрерывность функции

Цель занятия: научиться исследовать функции на непрерывность, определять классификацию точек разрыва функции.

Вопросы для обсуждения:

1. Понятие непрерывности функции.
2. Точки разрыва функции и их классификация.
3. Свойства функций, непрерывных в точке.
4. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 25. Дана функция. Найти ее точки разрыва, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва:

- 1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4};$
- 2) $f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 + 2x + 10};$
- 3) $f(x) = \frac{x - 8}{x^2 - 11x + 24};$
- 4) $f(x) = \operatorname{arccctg} \frac{1}{x}.$

- 1) Нули знаменателя функции $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ определяются из уравнения

$x^2 - 4 = 0$, откуда следуют возможные точки разрыва $x = \pm 2$. Для проверки: являются ли эти точки действительно точками разрыва, вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty.$$

В результате легко видеть, что точки $x = -2$ и $x = 2$ являются точками разрыва второго рода.

2) Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{3x-5}{x^2+2x+10}$. Найдем нули знаменателя из уравнения $x^2 + 2x + 10 = 0$. Нетрудно убедиться, что оно не имеет действительных корней. Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой.

3) Точками разрыва в данном случае могут быть нули знаменателя, то есть $x=8$ и $x=3$. В точке $x=8$ функция не определена, так как при подстановке $x=8$ в дробь имеем неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, вычислим предел функции при $x \rightarrow 8$:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{x^2-11x+24} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{x^2-11x+24} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{(x-8)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{5},$$

следовательно точка $x=8$ является точкой устранимого разрыва. Исследуем точку $x=3$, для этого вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x-8}{x^2-11x+24} = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x-3} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x-8}{x^2-11x+24} = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x-3} = +\infty,$$

на основании чего делаем вывод, что точка $x=3$ является точкой бесконечного разрыва (второго рода).

4) Вначале рассмотрим функцию $f(y) = \text{arctg } y$. Поскольку областью определения этой функции является вся числовая прямая, и она нигде не обращается в бесконечность, функция $f(y)$ является непрерывной на всей области определения.

Поэтому единственной возможной точкой разрыва функции $f(x) = \text{arctg} \frac{1}{x}$ может быть точка $x=0$, для того, чтобы проверить: действительно ли здесь функция $f(x)$ испытывает разрыв, вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \text{arctg} \frac{1}{x} = \text{arctg}(-\infty) = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \text{arctg} \frac{1}{x} = \text{arctg}(+\infty) = 0.$$

В результате имеем, что при $x=0$ функция $f(x) = \text{arctg} \frac{1}{x}$ терпит разрыв первого рода, совершая скачок $d = f(+0) - f(-0) = -\pi$.

Пример 26. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \leq x \leq 1. \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Найдем односторонние пределы:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = 3 & \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = 3 & \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2 \end{array}$$

Таким образом, в точке $x = -1$ функция непрерывна, точка $x = 1$ - точка разрыва первого рода, определим скачок функции в этой точке $d = f(x_0+0) - f(x_0-0) = 2 - 3 = -1$ (рис. 23).

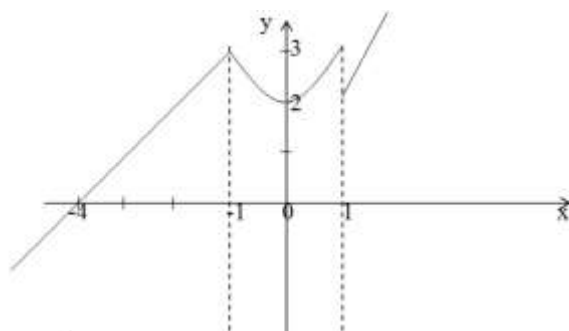


Рис. 23

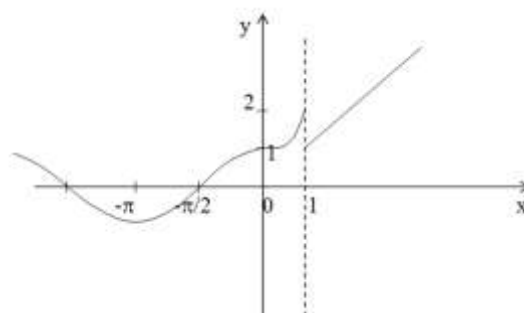


Рис. 24

Пример 27. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1. \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$$

Приходим к заключению, что в точке $x = 0$ функция непрерывна, точка $x = 1$ - точка разрыва первого рода, определим скачок функции в этой точке $d = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = 1 - 2 = -1$ (рис. 24).

Задания для самостоятельной работы

Исследовать данные функции на непрерывность

а). $f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}} + 1$;

б). $f(x) = \frac{x-5}{x+3}$;

в). $f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}} + 2$;

г). $f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}}$.

3. Исследовать данные функции на непрерывность, построить графики функций

а). $f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$

б). $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$

в). $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases}$

$$г). f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

РАЗДЕЛ II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Занятие № 7. Вычисление производной по определению

Цель занятия: дать определение производной функции как предел разностного отношения, освоить технику нахождения таких пределов для элементарных функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Определение производной, ее геометрический и механический смысл.
2. Непрерывность дифференцируемой функции.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 28. Используя определение производной функции (способ непосредственного дифференцирования), найти производную для $y = \frac{2}{x+3}$.

1. Находим приращенное значение функции: $y + \Delta y = \frac{2}{x + \Delta x + 3}$.

2. Находим приращение функции Δy :

$$\Delta y = \frac{2}{x + \Delta x + 3} - \frac{2}{x + 3} = \frac{2x + 6 - 2x - 2 \cdot \Delta x - 6}{(x + \Delta x + 3) \cdot (x + 3)} = \frac{-2 \cdot \Delta x}{(x + \Delta x + 3) \cdot (x + 3)}.$$

3. Составляем разностное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{(x + \Delta x + 3) \cdot (x + 3)}$.

4. Находим предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2}{(x + \Delta x + 3) \cdot (x + 3)} = -\frac{2}{(x + 3)^2}.$$

Следовательно, производная $y' = -\frac{2}{(x + 3)^2}$.

Пример 29. Пользуясь формулами дифференцирования, найти производные следующих функций

1) $y = x^2 - 5x + 4$;

2) $y = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3}$;

$$3) z = x^5 \left(2 - \frac{x}{3} + 3x^2 \right); \quad 4) f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

$$1) y' = (x^2 - 5x + 4)' = (x^2)' - (5x)' + (4)' = 2x - 5.$$

2) Преобразуем данную функцию, используя дробные и отрицательные показатели степени

$$y = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3} = x^{1/2} + 5x^{-1/3} - x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3}.$$

$$y' = \left(x^{1/2} + 5x^{-1/3} - x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3} \right)' = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{5}{3}x^{-4/3} + 2x^{-3} + \frac{1}{3}(-3)x^{-4} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}$$

3) 1-й способ. Воспользуемся формулой производной произведения

$$z' = (x^5)' \left(2 - \frac{x}{3} + 3x^2 \right) + x^5 \left(2 - \frac{x}{3} + 3x^2 \right)' = 5x^4 \left(2 - \frac{x}{3} + 3x^2 \right) + x^5 \left(-\frac{1}{3} + 6x \right) = 10x^4 - \frac{5}{3}x^5 + 15x^6 - \frac{1}{3}x^5 + 6x^6 = 21x^6 - 2x^5 + 10x^4$$

2-й способ. Вначале преобразуем исходное выражение, а затем выполним дифференцирование

$$z = 2x^5 - \frac{1}{3}x^6 + 3x^7, \quad z' = 10x^4 - 2x^5 + 21x^6.$$

Легко видеть, что в ряде задач этот способ быстрее приводит к результату.

4) Вычислим производную как производную частного

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(x^2)'(x^2 + 1) - (x^2 + 1)'x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x \cdot x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти производные указанных функций способом непосредственного дифференцирования

$$а). y = x^3 - 2x + 3; \quad б). y = \frac{x+1}{x-3};$$

$$в). y = \sqrt{2x-3}; \quad г). y = \ln x.$$

2. Используя формулы дифференцирования, найти производные следующих функций

$$а). y = x + 3x^2 - \frac{x^2}{3}; \quad ж). y = -3 \cos t \operatorname{ctg} t;$$

$$б). y = x - 2\sqrt{x}; \quad з). r = \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi};$$

$$\text{в). } S = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2};$$

$$\text{г). } z = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} + 4;$$

$$\text{д). } u = \frac{2t}{t+3};$$

$$\text{е). } v = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3};$$

$$\text{и). } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}; \text{ вычислить } f'(1);$$

$$\text{к). } r(\varphi) = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi; \text{ вычислить } r'(\pi);$$

$$\text{л). } u(r) = \frac{r^2}{2x^2} - \frac{2x^2}{r^2}; \text{ вычислить } \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=x};$$

$$\text{м). } z = (y^2 - 2y) \operatorname{tg} y; \text{ вычислить } z'(0).$$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 8. Техника нахождения производных

Цель занятия: дать определение производной функции, освоить технику нахождения производных элементарных и сложных функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных.

Вопросы для обсуждения:

1. Правила дифференцирования. Таблица производных.
2. Производная сложной функции.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 30. Найти производную для каждой функции

$$1). y = x \cos x \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x.$$

Сначала выполним преобразования $y = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x$,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} x 2 \cos 2x + \frac{1}{2} 2 \cos x (-\sin x) = \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x + x \cos 2x - \sin x \cos x = x \cos 2x. \end{aligned}$$

$$2). y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2 + 1}.$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2 + 1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2xe^{x^2}(x^4 + 1 + x^2)}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

$$3). y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}.$$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x - \sin x + x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{x \cos x}{\sin^2 x}.$$

4). $y = \operatorname{arctg} \frac{2x^4}{1-x^8}.$

$$y' = \frac{1}{\left(1 + \frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3-8x^{11}+16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3+8x^{11}}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}.$$

5). $y = x^2 e^{x^2} \ln x.$

$$y' = \left(x^2 e^{x^2}\right)' \ln x + x^2 e^{x^2} \frac{1}{x} = \left(2xe^{x^2} + x^2 e^{x^2} 2x\right) \ln x + xe^{x^2} =$$

$$= 2xe^{x^2} (1+x^2) \ln x + xe^{x^2} = xe^{x^2} (1+2 \ln x + 2x^2 \ln x).$$

Задания для самостоятельной работы

Найти производные указанных функций

а). $y = \sin(x^3 + 3x);$

б). $y = (2x^4 - 5x + 1)^3;$

в). $y = 5^{\cos x};$

г). $y = \ln(1 + \sin x);$

д). $y = \arcsin \sqrt{x};$

е). $y = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \cos^3 x;$

ж). $y = \ln \sin 5x;$

з). $y = e^{\cos x^2};$

и). $y = e^{\arcsin \frac{1}{x}};$

к). $y = \arccos \sqrt{1-x^2};$

л). $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2});$

м). $y = (2^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} + 1)^3;$

н). $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$

о). $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}};$

п) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}),$ вычислить $y'(0).$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 9. Дифференцирование сложных функций

Цель занятия: освоить технику нахождения производных сложных функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных.

Вопросы для обсуждения:

1. Производная сложной и обратной функции.
2. Дифференцирование неявных функций. Логарифмическое дифференцирование.
3. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Свойства дифференциала.
4. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 31. Найти производную y' функции y , определяемой уравнением $x^3 + x^2y + y^2 = 0$.

Дифференцируем по переменной x обе части равенства, считая, что y есть функция от x : $3x^2 + 2xy + x^2y' + 2yy' = 0$, разрешаем полученное уравнение относительно искомой производной y' : $y'(x^2 + 2y) = -3x^2 - 2xy$, $y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y}$.

Пример 32. Пользуясь способом логарифмического дифференцирования, найти производную функции $y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2 + 1}}$.

Логарифмируя обе части равенства, получим

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{3} \cdot \ln x^2 - \frac{1}{3} \cdot \ln(x^2 + 1) = \ln x + \frac{2}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot \ln(x^2 + 1),$$

или $\ln y = \frac{5}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot \ln(x^2 + 1)$.

Дифференцируя обе части полученного равенства, имеем

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}; \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{5x^2 + 5 - 2x^2}{3x \cdot (x^2 + 1)};$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{3x^2 + 5}{3x \cdot (x^2 + 1)},$$

откуда следует, что $y' = y \cdot \frac{3x^2 + 5}{3x \cdot (x^2 + 1)} \Rightarrow y' = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2 + 1}} \cdot \frac{3x^2 + 5}{3x \cdot (x^2 + 1)}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти производную y' функции y , заданной в неявной форме

а). $x^3 + x^2y + y^2 = 0$;

б). $\operatorname{tg} y - xy = 0$;

в). $\cos(x - y) - y = 0$;

г). $x^2y + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = 0$;

д). $e^{x+y} - \ln \sin \frac{y}{x} = 0$.

2. Пользуясь способом логарифмического дифференцирования, найти производные указанных функций

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= \frac{x \cdot (1+x^2)^2}{\sqrt{1-x^2}}; & \text{б) } y &= x^3 \cdot \sqrt{\frac{1+x^2}{1+x}}; \\ \text{в) } y &= \sqrt[3]{\frac{x \cdot (x^3+1)}{\cos^2 x}}; & \text{г) } y &= \frac{e^{\sin^2 x} \cdot \sqrt[3]{\arcsin x}}{(1+x)^3}. \end{aligned}$$

3. Пользуясь способом логарифмического дифференцирования, найти производные показательных – степенных функций

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= x^x; & \text{б) } y &= (\cos x)^{\sin x}; & \text{в) } y &= (tg x)^{ctg x}; \\ \text{г) } y &= (1-x^2)^{\arccos x}; & \text{д) } y &= (\arctg x)^{\arcsin^2 x}. \end{aligned}$$

Задания, решаемые в аудитории

Пример 33. Найти дифференциал dy функции $y = e^{x^2+1}$.

Исходя из определения дифференциала, имеем

$$dy = y' \cdot dx = (e^{x^2+1})' \cdot dx = e^{x^2+1} \cdot 2x \cdot dx.$$

Данную функцию можно представить так: $y = e^u$, где $u = x^2 + 1$, тогда будем иметь $dy = e^u \cdot du = e^{x^2+1} \cdot d(x^2 + 1) = e^{x^2+1} \cdot 2x \cdot dx$.

Пример 34. Найти дифференциал dy функции $y = \arctg e^{\sin 3x}$.

Найдем производную y' , пользуясь правилом дифференцирования сложной функции: $y' = \frac{1}{1+(e^{\sin 3x})^2} \cdot e^{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3$, тогда

$$dy = \frac{1}{1+(e^{\sin 3x})^2} \cdot e^{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3 \cdot dx.$$

Дифференциал dy можно найти также непосредственно

$$\begin{aligned} dy &= d(\arctg e^{\sin 3x}) = \frac{1}{1+(e^{\sin 3x})^2} \cdot d(e^{\sin 3x}) = \\ &= \frac{1}{1+(e^{\sin 3x})^2} \cdot e^{\sin 3x} \cdot d(\sin 3x) = \frac{1}{1+(e^{\sin 3x})^2} \cdot e^{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3 \cdot dx. \end{aligned}$$

Пример 35. Найти дифференциал dy функции y , заданной в неявном виде уравнением $x \cdot \sin y + y^2 \cdot \cos x - 1 = 0$.

Найдем производную y' , для этого дифференцируем обе части уравнения по x , считая при этом y функцией от аргумента x

$$\sin y + x \cdot \cos y \cdot y' + 2y \cdot y' \cdot \cos x - y^2 \cdot \sin x = 0.$$

Из полученного равенства выразим y'

$$y' \cdot (x \cdot \cos y + 2y \cdot \cos x) = y^2 \cdot \sin x - \sin y; \quad y' = \frac{y^2 \cdot \sin x - \sin y}{x \cdot \cos y + 2y \cdot \cos x}.$$

Следовательно, дифференциал $dy = \frac{y^2 \cdot \sin x - \sin y}{x \cdot \cos y + 2y \cdot \cos x} \cdot dx$.

Пример 36. Найти приближенное значение функции $f(x) = \sqrt{x^2 + 7}$ при $x=3,02$, исходя из ее точного значения при $x=3$.

Пусть $x_1=3$, а $x_2=3,02$. Применяя приближенное равенство (5.7), получаем:

$$f(3,02) = \sqrt{(3,02)^2 + 7} \approx \sqrt{3^2 + 7} + f'(3) \cdot (3,02 - 3) \approx 4 + f'(3) \cdot 0,02.$$

Чтобы найти $f'(3)$, надо предварительно продифференцировать данную функцию и затем найти численное значение производной при $x=3$.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 7}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 7}}, \quad f'(3) = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, $\sqrt{(3,02)^2 + 7} \approx 4 + \frac{3}{4} \cdot 0,02 = 4,015$.

Пример 37. Найти приближенное значение величины $\operatorname{tg} 47^\circ$.

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$. Известно, что $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Поэтому удобно положить $x_1 = 45^\circ$ и $x_2 = 47^\circ$. Чтобы воспользоваться приближенным равенством (5.7), необходимо найти предварительно значение функции $y = \operatorname{tg} x$ и ее производной

$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ при $x_1 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$: $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$. Выразим в радианной мере разность $x_2 - x_1 = \frac{\pi}{180} \cdot 47 - \frac{\pi}{4} = \frac{47\pi - 45\pi}{180} = \frac{\pi}{90} = 0,035$.

Следовательно, $\operatorname{tg} 47^\circ \approx 1 + 2 \cdot 0,035 = 1,070$.

Пример 38. Найти приближенное значение величины $A = \sqrt[3]{26,46}$.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$. Так как при $x=27$ функция $y=3$, то удобно положить $x_1=27$ и $x_2=26,46$. Вычислим значение производной $y' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ при $x_1=27$:

$y'(27) = \frac{1}{3 \cdot 3^2} = \frac{1}{27}$. Применяя приближенное равенство (5.7), будем иметь

$$A = \sqrt[3]{26,46} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{27} \cdot (26,46 - 27) = 3 - 0,02 = 2,98.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти дифференциалы функций

а). $y = \sin 5x - 5 \cdot e^{-x^2}$;

б). $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

в). $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4} \right)$;

г). $y = 5 \sqrt{\operatorname{arctg}(x^2)}$.

2. Пользуясь приближенным равенством (5.7), вычислить приближенно значение указанных функций при указанных значениях аргумента

а). $y = \sqrt{x^3 - 2}$, $x=3,02$; б). $y = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$, $x=0,02$; в). $y = e^{1-x^2}$, $x=1,05$.

3. Пользуясь приближенным равенством (5.7), вычислить приближенно значение указанных величин

а). $\cos 61^\circ$; б). $\operatorname{tg} 44^\circ$; в). $e^{0,2}$; г). $\sqrt[3]{7,76}$; д). $\operatorname{arctg} 1,05$; е). $\arcsin 0,54$.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 39. Для данных функций найти производные указанного порядка

1) $y = x^5 - 7x^3 + 2$; $y''' = ?$ 2) $y = \ln x$; $y^{(5)} = ?$

3) $s = \operatorname{arctg} 2x$; $s'''(-1) = ?$

1) Выполним последовательное дифференцирование функции y

$$y' = (x^5 - 7x^3 + 2)' = 5x^4 - 21x^2,$$

$$y'' = (5x^4 - 21x^2)' = 20x^3 - 42x,$$

$$y''' = (20x^3 - 42x)' = 60x^2 - 42;$$

2) Выполняя последовательное дифференцирование функции $y = \ln x$, имеем

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3},$$

$$y^{(4)} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{6}{x^4}, \quad y^{(5)} = \left(-\frac{6}{x^4}\right)' = \frac{24}{x^5};$$

3) Вначале выполним последовательное дифференцирование функции $s = \operatorname{arctg} 2x$:

$$s' = (\operatorname{arctg} 2x)' = \frac{1}{1 + (2x)^2} \cdot 2 = \frac{2}{1 + 4x^2},$$

$$s'' = \left(\frac{2}{1 + 4x^2}\right)' = -\frac{2}{(1 + 4x^2)^2} (1 + 4x^2)' = -\frac{16x}{(1 + 4x^2)^2},$$

$$\begin{aligned} s''' &= \left(-\frac{16x}{(1 + 4x^2)^2}\right)' = -\frac{(16x)'(1 + 4x^2)^2 - 16x((1 + 4x^2)^2)'}{(1 + 4x^2)^4} = \\ &= -\frac{16(1 + 4x^2)^2 - 16x \cdot 2(1 + 4x^2) \cdot 8x}{(1 + 4x^2)^4} = -\frac{16 + 64x^2 - 256x^2}{(1 + 4x^2)^3} = \frac{192x^2 - 16}{(1 + 4x^2)^3}. \end{aligned}$$

Подставляя значение аргумента $x = -1$, имеем

$$s'''(-1) = \frac{192 \cdot (-1)^2 - 16}{(1 + 4(-1)^2)^3} = \frac{192 - 16}{(1 + 4)^3} = \frac{176}{125}.$$

Пример 40. Найти производную четвертого порядка от функции $y = x^3 \cdot \sin x$.

Полагая в формуле Лейбница (5.12) $n = 4$, будем иметь $(u \cdot v)^{(IV)} = u^{(IV)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(IV)}$. Пусть $u = x^3$, $v = \sin x$,

$$u = x^3, u' = 3x^2, u'' = 6x, u''' = 6, u^{IV} = 0;$$

$$v = \sin x, v' = \cos x, v'' = -\sin x, v''' = -\cos x, v^{IV} = \sin x,$$

тогда

$$\begin{aligned} (x^3 \cdot \sin x)' &= 4 \cdot 6 \cdot \cos x + 6 \cdot 6x \cdot (-\sin x) + 4 \cdot 3x^2 \cdot (-\cos x) + x^3 \cdot \sin x = \\ &= 24 \cos x - 36x \sin x - 12x^2 \cos x + x^3 \sin x. \end{aligned}$$

Пример 41. Найти общее выражение производной n -го порядка для функции $y = \ln x$.

Найдем несколько первых производных

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3},$$

$$y^{(4)} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \quad y^{(5)} = \left(-\frac{6}{x^4}\right)' = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5},$$

откуда становится очевидна производная n -го порядка функции $y = \ln x$

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Пример 42. Найти производную второго порядка функции y , заданной в неявном виде уравнением $x^2 + 2x + y^2 - 5 = 0$.

Дифференцируя обе части равенства по переменной x и считая при этом y некоторой функцией от x , будем иметь $2x + 2 + 2y \cdot y' = 0$, откуда $y' = -\frac{x+1}{y}$ (1).

Дифференцируя обе части равенства (1) по переменной x , рассматривая при этом y как функцию от x , получим $y'' = -\frac{y - (x+1) \cdot y'}{y^2}$ (2). Заменив в правой части (2) y' его

выражением из равенства (1), получим $y'' = -\frac{y + \frac{(x+1)^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + (x+1)^2}{y^3}$.

Пример 43. Найти y''' , если функция задана уравнением $e^y + y - x = 0$.

$$e^y \cdot y' + y' - 1 = 0, \quad y' = \frac{1}{e^y + 1},$$

$$y'' = -\frac{e^y \cdot y'}{(e^y + 1)^2}, \quad y'' = -\frac{e^y}{(e^y + 1)^3},$$

$$y''' = -\frac{e^y \cdot y' \cdot (e^y + 1)^3 - e^y \cdot 3 \cdot (e^y + 1)^2 \cdot e^y \cdot y'}{(e^y + 1)^6} =$$

$$= -\frac{e^y \cdot y' \cdot (e^y + 1 - 3 \cdot e^y)}{(e^y + 1)^4} = -\frac{e^y \cdot (1 - 2e^y)}{(e^y + 1)^5}.$$

Пример 44. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$, если функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = r \cdot \cos t, \\ y = r \cdot \sin t \end{cases}$.

Найдем производную первого порядка $\frac{dy}{dx} = y'_x$. Так как $\frac{dx}{dt} = -r \cdot \sin t$, а

$\frac{dy}{dt} = r \cdot \cos t$, то $y'_x = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} t$. Чтобы найти производную второго порядка

$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(y'_x)}{dx}$, рассматриваем производную первого порядка y'_x как функцию

параметра t и снова применяем формулу (5.12). Так как

$$\frac{d(y'_x)}{dt} = \frac{d(-\operatorname{ctg} t)}{dt} = \frac{1}{\sin^2 t}, \text{ а } \frac{dx}{dt} = -r \cdot \sin t,$$

то

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 t} \div (-r \cdot \sin t) = -\frac{1}{r \cdot \sin^3 t}.$$

Пример 45. Найти $\frac{d^3 y}{dx^3}$, если $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3 \end{cases}$.

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{(t^3)'}{(\ln t)'} = \frac{3t^2}{\frac{1}{t}} = 3t^3; \quad y''_x = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(3t^3)'}{(\ln t)'} = \frac{9t^2}{\frac{1}{t}} = 9t^3;$$

$$y'''_x = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{(9t^3)'}{(\ln t)'} = \frac{27t^2}{\frac{1}{t}} = 27t^3.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти дифференциалы функций, заданных в неявном виде

а). $x^3 + y^2 + xy = 0$; б). $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0$.

2. Пользуясь формулой Лейбница, найти производную четвертого порядка для функций

а). $y = x^3 \cdot e^x$; б). $y = x^4 \cdot \ln x$.

3. Найти y'' от функции y , заданной в неявном виде

а). $\operatorname{arctg} y - y + x = 0$; б). $x - y + e^x - e^y = 0$.

4. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ от функции y , заданной в параметрическом виде

$$\text{а). } \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases};$$

$$\text{б). } \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}.$$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 10. Основные теоремы дифференциального исчисления

Цель занятия: освоить основные теоремы дифференциального исчисления, их геометрический смысл, научиться применять правило Лопиталья при вычислении пределов функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Теорема Ферма, ее геометрический смысл.
2. Теорема Ролля, ее геометрический смысл.
3. Теорема Лагранжа, ее геометрический смысл.
4. Теорема Коши о конечных приращениях, ее геометрический смысл.
5. Правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 46. Функция $f(x) = -x^2 + 8x$ дифференцируема на отрезке $[2; 6]$ и на концах отрезка принимает равные значения: $f(2) = -4 + 16 = 12$, $f(6) = -36 + 48 = 12$. Следовательно, по теореме Ролля на интервале $(2; 6)$ найдется по крайней мере одно значение аргумента x , при котором производная $f'(x)$ обращается в нуль. Действительно, $f'(x) = -2x + 8$, откуда видно, что при $x = 4$ производная $f'(x)$ обращается в нуль. При этом $2 < 4 < 6$.

Пример 47. Определить значение ξ в формуле Лагранжа для функции $f(x) = \ln x$ на отрезке $[1; e]$.

Согласно условию задачи, имеем: $a=1$, $b=e$, $f(a) = \ln 1 = 0$, $f(b) = \ln e = 1$,
 $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$. Применяя теорему Лагранжа, будем иметь:
 $1 - 0 = \frac{1}{\xi} \cdot (e - 1)$, откуда $\xi = e - 1$.

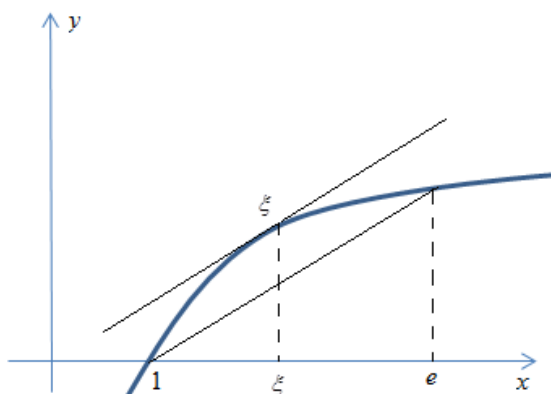


Рис. 25

Пример 48. Написать формулу Коши для функций $f(x)=x^3$ и $g(x)=x^2$ и определить значение ε на отрезке $[-2;1]$.

По условию имеем $f(a)=(-2)^3=-8$, $f(b)=1^3=1$, $g(a)=(-2)^2=4$, $g(b)=1^2=1$. Далее, $f'(x)=3x^2$, $f'(\varepsilon)=3\varepsilon^2$, $g'(x)=2x$, $g'(\varepsilon)=2\varepsilon$. Подставляя в формулу Коши, получим $\frac{1-(-8)}{1-4}=\frac{3\varepsilon^2}{2\varepsilon}$, откуда $\varepsilon=-2$.

Задания для самостоятельной работы

1. Показать, что между двумя корнями функции $f(x)=x^2-x-6$ содержится корень производной $f'(x)$.
2. На параболе $y=x^2+3x-4$ даны две точки: $A(-4, 0)$ и $B(2,6)$. Найти на дуге AB точку C , в которой касательная параллельна хорде AB .
3. Определить значение c в формуле Лагранжа для функций
 - а). $f(x)=\ln x$ на отрезке $[1,2]$;
 - б). $f(x)=\arcsin x$ на отрезке $[0,1]$;
 - в). $f(x)=\arctg x$ на отрезке $[0,1]$.
4. Написать формулу Коши и найти c для указанных функций
 - а). $f(x)=\sin x$ и $\varphi(x)=\cos x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
 - б). $f(x)=\cos x$ и $\varphi(x)=x-\sin x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 49. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя: $f'(x)=2x+\frac{1}{x}$; $g'(x)=e^x$; поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e}.$$

Пример 50. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin 3x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin 3x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)'}{(\sin 3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{3\cos 3x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 3x \sqrt{1+x}} = \frac{1}{6}.$$

Пример 51. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{\frac{3}{e^x} - 1}$.

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}; \quad g'(x) = e^{\frac{3}{x}} \cdot \frac{-3}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)} \right] = \frac{-2}{(0+1) \cdot 1 \cdot (-3)} = \frac{2}{3}.$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталья попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталья может быть применено второй раз, третий и так далее, пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталья.

Пример 52. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$.

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}x \right); \quad g'(x) = 1 + e^x;$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x); \quad g''(x) = e^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}(4+x)}{\frac{x}{e^{\frac{x}{2}}}};$$

$$f'''(x) = \frac{1}{4}; \quad g'''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{x}{2e^{\frac{x}{2}}}} = 0.$$

Следует отметить, что правило Лопиталья – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталья может быть использован и какой – либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Пример 53. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2; \quad g'(x) = 1 - \cos x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1+1-2}{1-1} = \left(\frac{0}{0}\right) -$$

опять получилась неопределенность. Применим правило Лопиталя еще раз:

$$f''(x) = e^x - e^{-x}; \quad g''(x) = \sin x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{1-1}{0} = \left(\frac{0}{0}\right) - \text{применяем правило}$$

$$\text{Лопиталя еще раз } f'''(x) = e^x + e^{-x}; \quad g'''(x) = \cos x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Неопределенности вида (0^0) ; (1^∞) ; (∞^0) можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y = [f(x)]^{g(x)}$, $f(x) > 0$ вблизи точки a при $x \rightarrow a$. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции $\ln y = g(x) \ln f(x)$.

Пример 54. Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x$.

Здесь $y = x^x$, $\ln y = x \ln x$, тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln y = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1/x}{-1/x^2} = - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0.$$

$$\text{Следовательно } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln y = \ln \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} y = 0; \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} y = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x = 1.$$

Пример 55. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$.

$$f'(x) = 2x; \quad g'(x) = 2e^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) - \text{получили неопределенность. Применяем}$$

$$\text{правило Лопиталя еще раз } f''(x) = 2; \quad g'(x) = 4e^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Задания для самостоятельной работы

Пользуясь правилом Лопиталя, вычислить пределы функций

- 1). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6};$
- 2). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1};$
- 3). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 2x)};$
- 4). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3};$
- 5). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x};$
- 6). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x};$
- 7). $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2};$
- 8). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x};$
- 9). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2};$
- 10). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(1 + x)};$
- 11). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\cos ec x};$
- 12). $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x};$
- 13). $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln \sin x);$
- 14). $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \cdot \operatorname{tg} x;$
- 15). $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x - 1) \cdot \operatorname{tg} \pi x;$

$$16). \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right]; \quad 17). \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right); \quad 18). \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\ln x};$$

$$19). \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}; \quad 20). \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 11. Применение производной для исследования функции

Цель занятия: научиться применять аппарат дифференциального исчисления при исследовании функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Признаки возрастания и убывания функций.
2. Экстремум функции.
3. Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке.
4. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба графика функции.
5. Асимптоты графика функции.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 56. Исследовать функцию $y = x^3 + 3x^2 + 3x$ на возрастание и убывание.

Найдем сначала производную данной функции $y' = 3x^2 + 6x + 3$, затем промежутки знакопостоянства функции, для чего определим нули функции $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2$, $3(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$, отметим их на множестве ее определения и расставим знаки производной в каждом из полученных промежутков

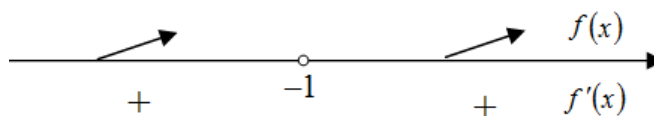


Рис. 26

Из рисунка видно, что на всей области определения функция $y = x^3 + 3x^2 + 3x$ является возрастающей.

Пример 57. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2$.

Определим критические точки функции: $y' = x^2 - 2x - 3$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, откуда $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ - критические точки. Определим знаки первой производной вблизи найденных критических точек. Для этого удобно производную представить в виде произведения сомножителей $y' = (x+1)(x-3)$. Видим, что на интервале $(-\infty; -1)$

производная $y' > 0$, на интервале $(-1; 3)$ производная $y' < 0$, а на интервале $(3; +\infty)$ производная $y' > 0$. Следовательно, в критической точке $x_1 = -1$ максимум. В критической точке $x_2 = 3$ производная y' меняет свой знак с минуса на плюс, в этой точке функция имеет минимум

$$y_{\max} = y(-1) = -\frac{1}{3} - (-1)^2 + 3 + 2 = 3\frac{2}{3},$$

$$y_{\min} = y(3) = 9 - 9 - 9 + 2 = -7.$$

Экстремальные точки: $A\left(-1; 3\frac{2}{3}\right)$ и $B(3; -7)$.

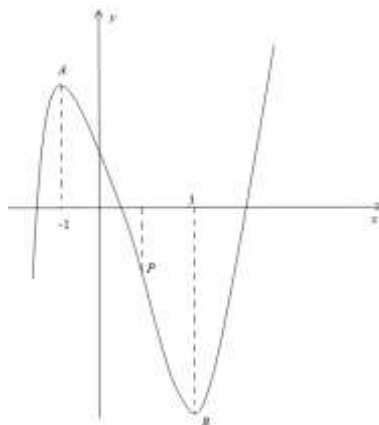


Рис. 27

Пример 58. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 3$ на отрезке $[-1, 2]$.

Находим критические точки, принадлежащие интервалу $(-1, 2)$, и значения функции в этих точках $y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$, $5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

Критическая точка $x_3 = 3$ не принадлежит заданному отрезку. Вычислим значения функции в двух критических точках $y(0) = 3$, $y(1) = 4$. Вычислим значения функции на концах заданного отрезка $y(-1) = -8$, $y(2) = -5$. Сравнивая полученные результаты, имеем: наибольшее значение функции $M = y(1) = 4$, а наименьшее $m = y(-1) = -8$.

Пример 59. Найти точки перегиба и определить интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2$.

Найдем вторую производную функции $y' = x^2 - 2x - 3$, $y'' = 2x - 2$. Определим критические точки второго рода $2x - 2 = 0$, откуда видно, что точка $x_0 = 1$ разбивает всю область определения данной функции на два интервала $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$; в первом интервале вторая производная отрицательна, а во втором – положительна. Следовательно, точка $P\left(1; -\frac{5}{3}\right)$ – точка перегиба графика функции. Кривая является выпуклой на интервале $(-\infty; 1)$ и вогнутой на интервале $(1; +\infty)$.

Пример 60. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

1) Вертикальные асимптоты: $y \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 0-0$: $y \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow 0+0$, следовательно, $x = 0$ -вертикальная асимптота.

2) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 1,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2. \end{aligned}$$

Таким образом, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой. Построим график функции.

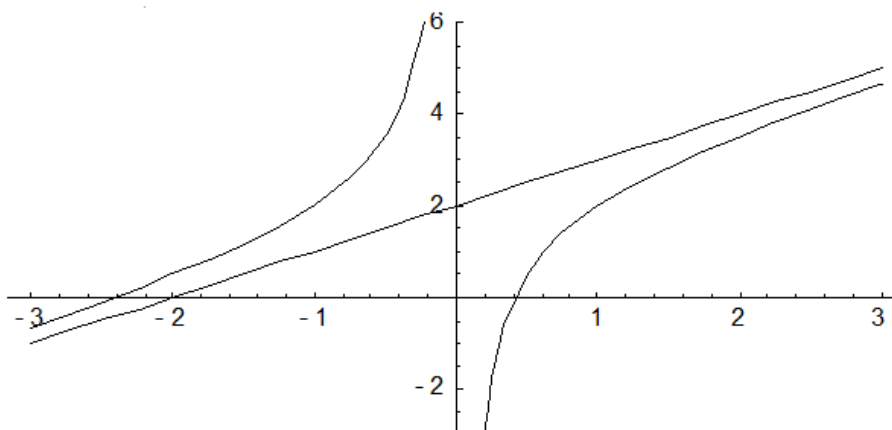


Рис. 28

Пример 61. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{9x}{9 - x^2}$.

Прямые $x = 3$ и $x = -3$ являются вертикальными асимптотами кривой. Найдем

$$\text{наклонные асимптоты } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{9 - x^2} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x}{9 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = 0.$$

$y = 0$ – горизонтальная асимптота.

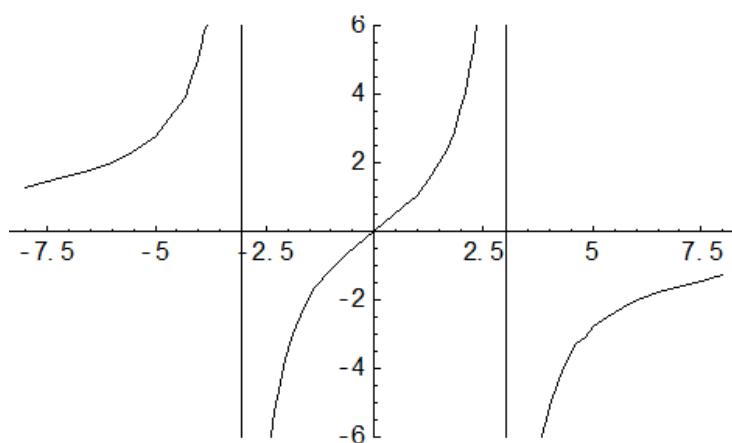


Рис. 29

Пример 62. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

Прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой кривой.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2x}{x + 2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -4.$$

Итак, прямая $y = x - 4$ является наклонной асимптотой.

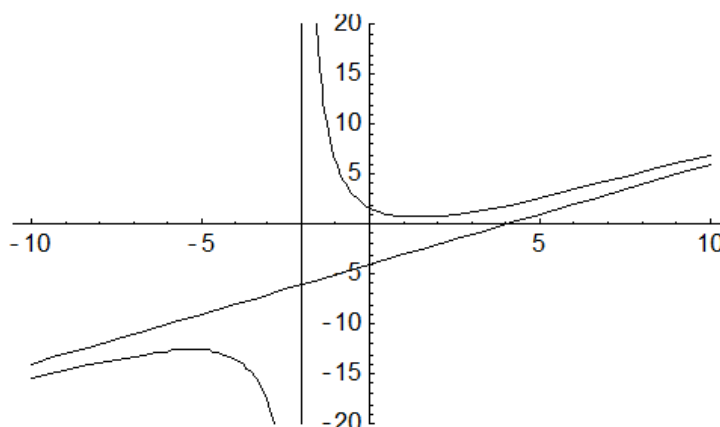


Рис. 30

Пример 63. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Находим **область определения** функции: $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$. В свою очередь, видно, что прямые $x = 1$, $x = -1$ являются **вертикальными асимптотами** кривой, так как **точками разрыва второго рода** функции являются точки $x = 1$, $x = -1$. **Областью значений** данной функции является интервал $(-\infty; \infty)$. Если $x = 0$, то $y = 0$, то есть точка $(0; 0)$ принадлежит графику. Данная функция не является ни четной, ни нечетной.

Определим **критические точки**, для этого найдем производную функции:

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Критические точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$. Установим промежутки **возрастания** и **убывания** функции, для этого определим знаки производной функции на промежутках:

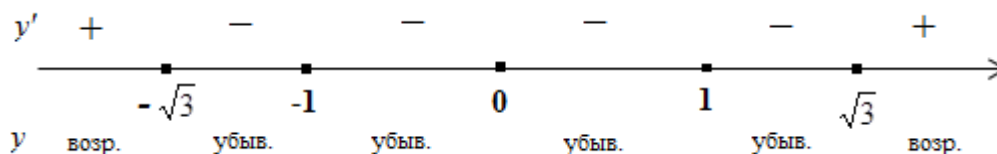


Рис. 31

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает

$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает

$0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y' > 0$, функция возрастает

Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой **максимума**, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой **минимума**. Значения функции в этих точках равны соответственно $3\sqrt{3}/2$ и $-3\sqrt{3}/2$, иначе говоря, **экстремальные точки** – $A(-\sqrt{3}; 3\sqrt{3}/2)$ и $B(\sqrt{3}; -3\sqrt{3}/2)$.

Далее ищем вторую производную функции:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Итак, **критические точки второго рода**: $x = 0$; $x = -1$; $x = 1$. Определим **выпуклость** и **вогнутость** кривой на промежутках:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y''	-	∞	+	0	-	∞	+

y	вып.	разрыв	вогн.	перегиб	вып.	разрыв	вогн.
$-\infty < x < -1,$	$y'' < 0,$	кривая выпуклая,					
$-1 < x < 0,$	$y'' > 0,$	кривая вогнутая,					
$0 < x < 1,$	$y'' < 0,$	кривая выпуклая,					
$1 < x < \infty,$	$y'' > 0,$	кривая вогнутая.					

Точка перегиба $P(0;0)$.

Про **вертикальные асимптоты** было сказано выше. Теперь найдем **наклонные асимптоты**

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Таким образом, уравнение наклонной асимптоты – $y = x$. Построим **график** функции, основываясь на результатах проведенного исследования.

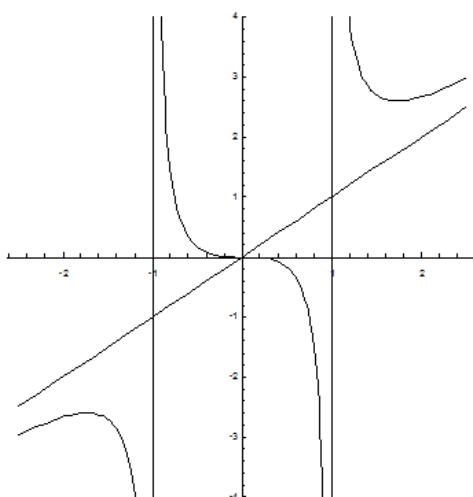


Рис. 32

Задания для самостоятельной работы

Определить интервалы возрастания и убывания следующих функций

а). $y = x^2 - 2x + 3$;

б). $y = x^3 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x$;

в). $y = -2 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 1$;

г). $y = \frac{x}{x - 2}$;

д). $y = x + \sin x$;

е). $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

7. Найти стационарные точки функций

а). $y = x^2 - 6x - 4$;

б). $y = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 36 \cdot x + 5$.

8. Найти критические точки функций

а). $y = \sqrt{x}$;

б). $y = (x - 1) \cdot \sqrt[3]{x^2}$;

в). $y = \sqrt[3]{2x^2} - \sqrt[3]{(x - 2)^2}$;

г). $y = \frac{e^{2x^2}}{x}$.

9. Исследовать на экстремум функции

а). $y = 2x^2 - 4x + 5$;

б). $y = \frac{4x}{4 + x^2}$;

в). $y = 3 - 2 \cdot \sqrt[3]{x - 4}$;

г). $y = \sqrt{e^{x^2} + 8}$;

д). $y = \ln x + \frac{1}{x}$;

е). $y = x - \arctg x$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке

а). $y = x^3 e^{x+1}$, $[-4; 0]$;

б). $y = \frac{x}{9 - x^2}$, $[-2; 2]$;

в). $y = \frac{2(x^2 + 3)}{x^2 - 2x + 5}$, $[-3; 3]$;

г). $y = 3 - x - \frac{4}{(x + 2)^2}$, $[-1; 2]$;

д). $y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59$, $[2; 4]$;

е). $y = x^2 - 2x + \frac{16}{x - 1} - 13$, $[2; 5]$.

11. Найти точки перегиба и определить интервалы выпуклости и вогнутости заданных кривых

а). $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$;

б). $y = \frac{x^3}{x^2 + 12}$;

в). $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$;

г). $y = x^2 \cdot \ln x$.

12. Найти асимптоты указанных кривых

а). $y = x \cdot \arctg x$;

б). $y = \frac{2x^2 - 9}{x + 2}$;

в). $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$;

г). $y = x \cdot e^{-x}$.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 12. Полное исследование функции и построение графика

Цель занятия: проводить полное исследование функции по отработанной ранее схеме и выполнять построение ее графика.

Вопросы для обсуждения:

1. Схема полного исследования функции и построение ее графика.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

РАЗДЕЛ III. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Занятие № 13. Неопределенный интеграл и его свойства

Цель занятия: освоить понятия первообразной и неопределенного интеграла, основных свойств неопределенного интеграла.

Вопросы для обсуждения:

1. Первообразная и неопределенный интеграл.
2. Геометрический смысл неопределенного интеграла, его свойства.
3. Метод непосредственного интегрирования (используя свойства неопределенного интеграла и таблицу).

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 14. Метод замены переменной

Цель занятия: освоить метод интегрирования - метод замены переменной (метод подстановки).

Вопросы для обсуждения:

1. Метод замены переменной (метод подстановки).

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 15. Метод интегрирования по частям

Цель занятия: освоить метод интегрирования по частям.

Вопросы для обсуждения:

1. Метод интегрирования по частям.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 16. Интегрирование рациональных функций

Цель занятия: освоить интегрирование различных рациональных функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Интегрирование элементарных дробей.
2. Интегрирование рациональностей с помощью разложения на сумму простых дробей (метод неопределенных коэффициентов).

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 17. Интегрирование иррациональных функций

Цель занятия: освоить интегрирование различных иррациональных функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, где n - натуральное число.
2. Интегрирование биномиальных дифференциалов.
3. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 18. Интегрирование тригонометрических функций

Цель занятия: освоить интегрирование различных тригонометрических функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$.
2. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, если функция R является нечетной относительно $\cos x$.
3. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, если функция R является нечетной относительно $\sin x$.
4. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, функция R четная относительно $\sin x$ и $\cos x$.
5. Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

2 семестр

Занятие № 19. Определенный интеграл и его свойства

Цель занятия: освоить понятие определенного интеграла, изучить его основные свойства, научиться вычислять определенный интеграл с использованием формулы Ньютона-Лейбница.

Вопросы для обсуждения:

1. Понятие определённого интеграла, его геометрический и физический смысл.
2. Основные свойства определенного интеграла.
3. Связь определенного интеграла с неопределённым, формула Ньютона-Лейбница.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 20. Методы вычисления определенного интеграла

Цель занятия: освоить методы вычисления определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница, отработать метод замены переменной и метод интегрирования по частям в определенном интеграле.

Вопросы для обсуждения:

1. Связь определенного интеграла с неопределённым, формула Ньютона-Лейбница.
2. Метод замены переменной в определенном интеграле.
3. Метод интегрирования по частям в определенном интеграле.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 21. Приложения определенного интеграла

Цель занятия: познакомиться с приложениями определённого интеграла.

Вопросы для обсуждения:

1. Вычисление площади плоской фигуры.
2. Вычисление длины дуги плоской кривой.
3. Вычисление объема тела вращения.
4. Вычисление площади поверхности вращения.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 22. Несобственные интегралы

Цель занятия: научиться вычислять несобственные интегралы первого и второго типа в случае их сходимости или устанавливать их расходимость.

Вопросы для обсуждения:

1. Несобственные интегралы первого типа.
2. Несобственные интегралы второго типа.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.*Основная:* 1-2*Дополнительная:* 1-4*Интернет-ресурсы:* 1-4

РАЗДЕЛ IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Занятие № 23. Функции нескольких переменных. Основные понятия, область определения

Цель занятия: освоить определение функции нескольких переменных, научиться выполнять их общее исследование, находить область определения.

Вопросы для обсуждения:

1. Определение функции нескольких переменных.
2. Основные понятия, область определения функции нескольких переменных.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.*Основная:* 1-2*Дополнительная:* 1-4*Интернет-ресурсы:* 1-4

Занятие № 24. Частные производные функции нескольких переменных

Цель занятия: научиться вычислять частные производные и частные дифференциалы функции нескольких переменных.

Вопросы для обсуждения:

1. Частные производные функций нескольких переменных.
2. Частные дифференциалы функций нескольких переменных.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.*Основная:* 1-2*Дополнительная:* 1-4*Интернет-ресурсы:* 1-4

Занятие № 25. Полный дифференциал функции нескольких переменных

Цель занятия: выработать навыки нахождения полного дифференциала функции нескольких переменных.

Вопросы для обсуждения:

1. Полный дифференциал и его связь с частными производными функции нескольких переменных.
2. Инвариантность формы полного дифференциала. Геометрический смысл частной производной и полного дифференциала.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.*Основная:* 1-2*Дополнительная:* 1-4*Интернет-ресурсы:* 1-4**Занятие № 26. Частные производные и дифференциалы высших порядков**

Цель занятия: научиться вычислять частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

Вопросы для обсуждения:

1. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.*Основная:* 1-2*Дополнительная:* 1-4*Интернет-ресурсы:* 1-4**Занятие № 27. Дифференцирование сложных функций**

Цель занятия: освоить дифференцирование сложных функций нескольких переменных в зависимости от вида функции (рассмотреть три случая).

Вопросы для обсуждения:

1. Дифференцирование сложных функций нескольких переменных, случай 1.
2. Дифференцирование сложных функций нескольких переменных, случай 2.
3. Дифференцирование сложных функций нескольких переменных, случай 3.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.*Основная:* 1-2*Дополнительная:* 1-4*Интернет-ресурсы:* 1-4**Занятие № 28. Экстремум функции нескольких переменных**

Цель занятия: освоить определение экстремума функции нескольких переменных, необходимое и достаточное условия существования точек экстремума.

Вопросы для обсуждения:

1. Экстремум функции нескольких переменных.
2. Необходимое и достаточное условия существования точек экстремума функции нескольких переменных.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 29. Наибольшее и наименьшее значение функции нескольких переменных

Цель занятия: освоить технику решения задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции нескольких переменных, определения производной функции по заданному направлению, вычислять градиент функции нескольких переменных.

Вопросы для обсуждения:

1. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных.
2. Производная по направлению. Градиент функции.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

**РАЗДЕЛ V. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Занятие № 30. Вычисление двойных интегралов двукратным интегрированием

Цель занятия: освоить определение двойного интеграла, необходимое условие его существования, технику вычисления двойного интеграла в декартовых координатах приведением к повторному интегралу.

Вопросы для обсуждения:

1. Определение двойного интеграла, необходимое условие его существования. Критерий существования двойного интеграла.
2. Классы интегрируемых функций.
3. Свойства двойного интеграла.
4. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах приведением к повторному интегралу.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 31. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Цель занятия: освоить определение двойного интеграла, необходимое условие его существования, технику вычисления двойного интеграла в декартовых координатах приведением к повторному интегралу.

Вопросы для обсуждения:

1. Свойства двойного интеграла.
2. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах приведением к повторному интегралу.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 32. Переход к полярным координатам в двойных интегралах

Цель занятия: освоить замену переменных под знаком двойного интеграла, вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

Вопросы для обсуждения:

1. Замена переменных под знаком двойного интеграла.
2. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 33. Геометрические приложения двойных интегралов

Цель занятия: научиться решать задачи на вычисление площадей криволинейных областей, объемов тел произвольной формы с помощью двойного интеграла.

Вопросы для обсуждения:

1. Геометрические приложения двойного интеграла.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 34. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Цель занятия: познакомиться с понятием «тройной интеграл», освоить технику его вычисления в декартовых координатах сведением к трехкратному интегралу.

Вопросы для обсуждения:

1. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 35. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Цель занятия: отработать вычисление тройных интегралов в цилиндрических координатах.

Вопросы для обсуждения:

1. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 36. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах

Цель занятия: отработать вычисление тройных интегралов в сферических координатах.

Вопросы для обсуждения:

1. Тройной интеграл в сферических координатах.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 37. Геометрические приложения тройных интегралов

Цель занятия: решать геометрические задачи на приложение тройных интегралов.

Вопросы для обсуждения:

1. Геометрические приложения тройного интеграла.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

РАЗДЕЛ VI. РЯДЫ

Занятие № 38. Понятие числового ряда с положительными членами

Цель занятия: освоить основные понятия и определения теории числовых рядов с положительными членами.

Вопросы для обсуждения:

1. Числовой ряд и его частичные суммы, сходящиеся и расходящиеся числовые ряды.
2. Простейшие свойства сходящихся рядов. Остаток ряда.
3. Необходимые условия сходимости числовых рядов.
4. Гармонический ряд.
5. Критерий Коши сходимости числовых рядов.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 39. Признаки сравнения сходимости числового ряда, признак Даламбера

Цель занятия: отработать применение признаков сравнения, признака Даламбера исследования сходимости числовых рядов с положительными членами.

Вопросы для обсуждения:

1. Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.
2. Предельный признак сравнения рядов с неотрицательными членами.
3. Признак Даламбера сходимости рядов с неотрицательными членами.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 40. Радиальный и интегральный признаки Коши сходимости числового ряда

Цель занятия: отработать применение радиального и интегрального признаков Коши исследования сходимости числовых рядов с положительными членами.

Вопросы для обсуждения:

1. Радиальный признак Коши сходимости рядов с неотрицательными членами.
2. Интегральный признак Коши сходимости рядов с неотрицательными членами.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 41. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница

Цель занятия: освоить понятие знакопеременного ряда и научиться исследовать его сходимость с помощью признака Лейбница.

Вопросы для обсуждения:

1. Знакопеременные ряды, признак Лейбница.
2. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.
3. Перестановка членов в абсолютно сходящихся рядах.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 42. Исследование сходимости функциональных рядов

Цель занятия: освоить понятие функционального ряда и изучить вопросы исследования его сходимости.

Вопросы для обсуждения:

1. Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей.
2. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.
3. Функциональные ряды, область их сходимости.
4. Равномерная сходимость функциональных рядов, признак Вейерштрасса.
5. Предельный переход под знаком интеграла. Почленное интегрирование функциональных рядов.
6. Предельный переход под знаком производной. Почленное дифференцирование функциональных рядов.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 43. Исследование сходимости степенных рядов

Цель занятия: освоить определение степенного ряда и изучить вопросы исследования его сходимости.

Вопросы для обсуждения:

1. Понятие степенного ряда, теорема Абеля.
2. Интервал и радиус сходимости степенного ряда, формула Коши-Адамара.
3. Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда.
4. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

5. Задачи разложения функции в степенной ряд, существование разложения функции в ряд Тейлора.
6. Разложение в степенные ряды элементарных функций.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 44. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Цель занятия: освоить понятие тригонометрического ряда Фурье и технику разложения четных и нечетных функций в ряд Фурье.

Вопросы для обсуждения:

1. Тригонометрический ряд Фурье. Коэффициенты Фурье.
2. Достаточные признаки разложимости в ряд Фурье.
3. Разложение в ряд Фурье непериодической функции.
4. Ряд Фурье для четных и нечетных функций.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 45. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом

Цель занятия: решать задачу разложения в ряд Фурье функций с произвольным периодом.

Вопросы для обсуждения:

1. Ряды Фурье для функций любого периода.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕ- ЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для организации и проведения самостоятельной работы
студентов по дисциплине «Математический анализ»
направления подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника,
направленность (профиль) «Программное обеспечение средств вычислительной
техники и автоматизированных систем»

Ставрополь, 2026

Методические указания по организации самостоятельной работы студентов составлено в соответствии с требованиями программы дисциплины «Математический анализ» для бакалавров направления подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника. Учебно-методическое пособие посвящено планируемой учебной работе студентов, выполняемой во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, при частичном, непосредственном участии преподавателя.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Самостоятельная работа как важнейшая форма учебного процесса
2. Цели и основные задачи СРС
3. Виды самостоятельной работы
4. Организация СРС
5. Общие рекомендации по организации самостоятельной работы
6. Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления исследователя
7. Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы
8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1. Самостоятельная работа как важнейшая форма учебного процесса

Самостоятельная работа – это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Изначально необходимо ознакомиться с технологической картой самостоятельной работы обучающегося.

№	Раздел (тема) дисциплины и краткое содержание	Формируемые компетенции, индикаторы	Самостоятельная работа, часов
1	Функция действительной переменной 1. Понятие множества, операции над множествами. Числовые множества. Окрестность точки. 2. Абсолютная величина действительного числа, ее основные свойства 3. Понятие функции. Основные свойства функций 4. Основные элементарные функции, их свойства и графики <i>Занятие № 1. Множества. Метод математической индукции. Неравенство Бернулли</i> <i>Занятие № 2. Функция действительной переменной</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	10
2	Предел числовой последовательности 1. Числовые последовательности и их основные свойства 2. Предел последовательности и его геометрическая интерпретация 3. Основные теоремы о пределах 4. Вычисление пределов числовых последовательностей. Число e и натуральные логарифмы <i>Занятие № 3. Вычисление предела последовательности</i> <i>Занятие № 4. Вычисление предела функции</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	10

3	Предел функции 1. Предел функции в точке и его свойства 2. Односторонние пределы функции в точке. Вычисление предела функции в точке 3. Бесконечно малые и бесконечно большие величины и их свойства 4. Первый замечательный предел и основные следствия из него. Второй замечательный предел <i>Занятие № 5. Замечательные пределы</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	10
4	Непрерывность функции 1. Понятие непрерывности функции 2. Точки разрыва функции и их классификации 3. Свойства функций, непрерывных в точке 4. Свойства функций, непрерывных на отрезке <i>Занятие № 6. Непрерывность функции</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	10
5	Производная функции и дифференциал 1. Определение производной, ее геометрический и механический смысл. 2. Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции 3. Формулы дифференцирования основных элементарных функций (таблица производных) 4. Дифференцирование неявных функций и функций, заданных параметрически 5. Дифференциал функции, его геометрический смысл и свойства 6. Производные и дифференциалы высших порядков <i>Занятие № 7. Вычисление производной по определению</i> <i>Занятие № 8. Техника нахождения производных</i> <i>Занятие № 9. Дифференцирование сложных функций</i> <i>Занятие № 10. Основные теоремы дифференциального исчисления</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	10
6	Применение производной для исследования функции 1. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей 2. Признаки возрастания и убывания функций. Экстремум функции 3. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции 4. Асимптоты графика функции 5. Исследование функции и построение ее графика <i>Занятие № 11. Применение производной для исследования функции</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	10

7	Функции нескольких переменных 1. Функции двух и многих переменных. Область определения функции. 2. Линии и поверхности уровня. 3. Предел ФНП 4. Непрерывность ФНП. <i>Занятие № 12. Полное исследование функции и построение графика</i> <i>Занятие № 23. Функции нескольких переменных. Основные понятия, область определения</i> <i>Занятие № 24. Частные производные функции нескольких переменных</i> <i>Занятие № 25. Полный дифференциал функции нескольких переменных</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	30
	ИТОГО за 1 семестр		90
9	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных 1. Функции двух и многих переменных. Область определения функции. 2. Частные производные первого порядка от функции нескольких переменных 3. Частные производные высших порядков от функции нескольких переменных 4. Дифференциал I-го порядка функций нескольких переменных, свойство инвариантности 5. Дифференциалы высших порядков функций нескольких переменных <i>Занятие № 26. Частные производные и дифференциалы высших порядков</i> <i>Занятие № 27. Дифференцирование сложных функций</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	4
10	Неопределенный интеграл и его свойства 1. Первообразная функция и неопределенный интеграл 2. Основные свойства неопределенного интеграла 3. Таблица основных интегралов. Непосредственное интегрирование <i>Занятие № 28. Экстремум функции нескольких переменных</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	2
11	Основные методы интегрирования 1. Замена переменной (подстановка) в неопределенном интеграле 2. Интегрирование по частям 3. Интегрирование некоторых рациональных выражений <i>Занятие № 29. Наибольшее и наименьшее значение функции нескольких переменных</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	2

12	Определенный интеграл и его свойства. 1. Понятие определённого интеграла. 2. Геометрический, физический и экономический смысл определенного интеграла. 3. Основные свойства определенного интеграла 4. Связь определенного интеграла с неопределенным, формула Ньютона-Лейбница <i>Занятие № 30. Вычисление двойных интегралов двукратным интегрированием</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	2
13	Методы вычисления определенного интеграла 1. Метод непосредственного интегрирования 2. Замена переменной в определенном интеграле 3. Интегрирование по частям в определенном интеграле <i>Занятие № 31. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	2
14	Геометрические приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы 1. Вычисление площадей плоских фигур 2. Вычисление объемов тел вращения 3. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода) 4. Несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода) <i>Занятие № 32. Переход к полярным координатам в двойных интегралах</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	2
15	Дифференциальные уравнения первого порядка. 1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях. 2. Дифференциальное уравнение первого порядка: задача Коши, общее и частное решение. 3. Уравнения с разделяющимися переменными. 4. Однородные уравнения. <i>Занятие № 34. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	2
16	Линейные и однородные уравнения первого порядка 1. Линейные уравнения первого порядка. 2. Уравнения Бернулли. 3. Однородные уравнения <i>Занятие № 35. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	2

17	Дифференциальные уравнения высших порядков. 1. Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия. 2. Понижение порядка уравнения, которое не содержит искомой функции. 3. Понижение порядка уравнения, которое не содержит независимой переменной. <i>Занятие № 36. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	4
18	Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 1. Интегрирование ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами 2. Структура общего решения ЛНДУ. 3. Подбор частного решения линейного неоднородного уравнения с правой частью специального вида. <i>Занятие № 37. Геометрические приложения тройных интегралов</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	4
19	Ряды с положительными членами 1. Основные понятия числового ряда. Свойства сходящихся рядов. 2. Необходимый признак сходимости числовых рядов. Гармонический ряд. 3. Признаки сравнения положительных рядов. 4. Признак Даламбера 5. Радикальный и интегральный признаки Коши. <i>Занятие № 40. Радикальный и интегральный признаки Коши сходимости числового ряда</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	4
20	Функциональные и степенные ряды 1. Знакопередающие ряды. Теорема Лейбница. 2. Общий достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. 3. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Свойства абсолютно сходящихся рядов. <i>Занятие № 41. Знакопередающие ряды. Признак Лейбница</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	4
21	Разложения функций в степенные ряды 1. Ряды Тейлора и Маклорена. 2. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена <i>Занятие № 42. Исследование сходимости функциональных рядов</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	4
22	Некоторые приложения степенных рядов. <i>Занятие № 43. Исследование сходимости степенных рядов</i>	ОПК-1 ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1	4
	ИТОГО за 2 семестр		44

	ИТОГО		134
--	-------	--	-----

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования - "подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности".

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в лабораторных или практических занятиях, в выполнении контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. По данной дисциплине «Математический анализ» предусмотрены следующие:

Использование материала учебно-методического комплекса дисциплины

На первом этапе необходимо ознакомиться с обязательным минимумом содержания основной образовательной программы по изучаемой дисциплине. Далее необходимо изучить рабочую программу дисциплины, в которой рассмотрено содержание тем дисциплины лекционного курса, взаимосвязь тем

лекций лабораторных/практических занятий, темы и виды самостоятельной работы. По каждому виду самостоятельной работы предусмотрены определённые формы отчетности, представленные в учебной программе по дисциплине «Математический анализ».

Работа с литературой

Для успешного освоения дисциплины, необходимо самостоятельно детально изучить представленные темы по рекомендуемым источникам информации, которые представлены в учебной программе.

Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.

2. Цели и основные задачи СРС

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной

подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3. Виды самостоятельной работы

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации, содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.):

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателя по данной дисциплине являются:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- подготовка к лабораторным или практическим работам, их оформление.

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

- текущие консультации;
- прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р, если они предусмотрены учебным планом);
- выполнение заданий на практических занятиях (если таковые предусмотрены учебным планом дисциплины);
- выполнение курсовой работы или проекта, если они предусмотрены учебным планом.

4. Организация СРС

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей дисциплины «Математический анализ», объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя студент должен:

- освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем в соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования;
- планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем;
- самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя;
- выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

студент может:

сверх предложенного преподавателем (при обосновании и согласовании с ним) минимума обязательного содержания, определяемого программой по данной дисциплине:

- самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;
- предлагать темы и вопросы для самостоятельной проработки;
- в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы

предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;

- предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;

- использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;

- использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего профессионала, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий.

5. Общие рекомендации по организации самостоятельной работы

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на лабораторных или практических занятиях (в зависимости от учебного плана). Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических и инженерных дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

- а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;

- б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством

сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение регулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой. Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность - способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;
- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;
- привычная последовательность и систематичность деятельности;

– правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является *утреннее время (с 8 до 14 часов)*, причем максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* - (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1-1,5 часа нужны перерывы по 10 - 15 мин, через 3 - 4 часа работы отдых должен быть продолжительным - около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них – это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

6. Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления исследователя

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не только к моральным, нравственным свойствам человека, но и в особенности, постоянно возрастающие требования в области образования – обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной мыслью и языком науки является необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для реализации этой задачи. Поскольку во время учебы в вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этого пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения (лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контролирования

за их деятельностью. Отметим, что нельзя ограничиваться только приобретением знаний, предусмотренных программой изучаемой дисциплины, надо постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т. е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность методов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать его, чтобы изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебы с будущей профессиональной деятельности

7. Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности.

Работа с литературой

При работе с литературой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой – это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все

выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента. Различают два вида чтения; первичное и вторичное. *Первичное* - это внимательное, неторопливое чтение, при котором можно остановиться на трудных местах. После него не должно остаться ни одного непонятого слова. Содержание не всегда может быть понятно после первичного чтения.

Задача *вторичного* чтения полное усвоение смысла целого (по счету это чтение может быть и не вторым, а третьим или четвертым).

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют четыре основные установки в чтении научного текста:

1. информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию);
2. усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения, излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений);
3. аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему);
4. творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и

т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких **видов чтения**:

1. библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;

2. просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;

3. ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;

4. изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

5. аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;

3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;

4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений,

наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;

5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта.

2. Выделите главное, составьте план.

3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора.

4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

Лабораторные/Практические занятия (в зависимости от учебного плана)

Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на лабораторных или практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью выполнения заданий лабораторной или практической работы, поставленных задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и

научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном выполнении заданий нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что выполнение каждого учебного задания должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Выполнение заданий данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих заданий на лабораторных занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных материалов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при выполнении заданий у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

Подготовка к экзамену по дисциплине «Математический анализ».

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин

завершается экзаменом. Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к нему, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания.

Для успешной сдачи экзамена студенту важно в течение семестра полностью выполнить задания лабораторных или практических работ, подготовить отчет по каждой работе и отчет по результатам самостоятельного изучения тем, согласно учебной программе. Затем сама процедура экзамена позволяет студенту ответить на вопросы экзаменационного билета, а также решить соответствующие задачи и получить оценку по пятибалльной системе оценивания.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Текущая аттестация студентов проводится преподавателями, ведущими лабораторные или практические занятия по дисциплине в следующих формах: собеседование при защите лабораторной работы или заданий практической работы с предоставлением письменного (или в электронной форме) отчета, в зависимости от предъявляемых требований.

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература	1. Боронина, Е. Б. Математический анализ Электронный ресурс : Учебное пособие / Е. Б. Боронина. - Математический анализ, 2020-02-05. - Саратов : Научная книга, 2019. - 159 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-9758-1745-7, экземпляров неограниченно 2. Трухан, А. А. Математический анализ. Функция одного переменного Электронный ресурс / Трухан А. А. : учебное пособие для вузов. - Санкт-Петербург : Лань, 2020. - 324 с. - ISBN 978-5-8114-5936-0, экземпляров неограничено 3. Игонина, Т. Р. Функции нескольких переменных. Математический анализ Электронный ресурс / Игонина Т. Р. : учебно-методическое пособие. - Москва : РТУ МИРЭА, 2020. - 97 с., экземпляров неограничено
Дополнительная литература	1. Нурмагомедов, А. А Математический анализ. Курс лекций Электронный ресурс / Нурмагомедов А. А. : курс лекций. - Махачкала : ДагГАУ имени

	М.М.Джамбулатова, 2020. - 95 с., экземпляров неограничено 2. Белецкая, Н. В. Математический анализ. Контрольные задания Электронный ресурс / Белецкая Н. В., Драгилева И. П., Зайцев А. Б. - Москва : РТУ МИРЭА, 2020. - 36 с., экземпляров неограничено
Программное обеспечение	Альт Рабочая станция 10 Альт Рабочая станция К Альт «Сервер» Пакет офисных программ - Р7-Офис