

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания по выполнению практических работ
по дисциплине

Математический анализ

для студентов направления подготовки

09.03.02 Информационные системы и технологии

направленность (профиль)

**«Прикладное программирование в интеллектуальных
информационных системах»**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Множества
2. Действительные функции действительного переменного. Числовые последовательности
3. Предел функции в точке и на бесконечности
4. Непрерывность функций. Производная функции
5. Правила дифференцирования. Производная сложной функции
6. Производные высших порядков. Дифференциал
7. Основные теоремы дифференциального исчисления
8. Экстремум функции. Промежутки монотонности. Направление выпуклости. Точка перегиба
9. Исследование функций и построение графиков
10. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования
11. Метод интегрирование по частям
12. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций
13. Метод подстановки
14. Интегрирование рациональных функций
15. Определенный интеграл. Основная формула интегрального исчисления
16. Основные методы вычисления определенного интеграла. Геометрические приложения определенного интеграла
17. Несобственные интегралы
18. Функция нескольких переменных
19. Дифференцируемость функции нескольких переменных
20. Дифференциал функции нескольких переменных
21. Производные и дифференциалы высших порядков
22. Неявные функции
23. Экстремум функции нескольких переменных
24. Метод множителей Лагранжа
25. Метод наименьших квадратов
26. Двойные интегралы
27. Вычисление двойных интегралов
28. Замена переменной в двойном интеграле
29. Приложения двойных интегралов
30. Тройные интегралы
31. Замена переменных в тройном интеграле
32. Переход к сферическим координатам в тройном интеграле
33. Переход к цилиндрическим координатам в тройном интеграле
34. Криволинейные интегралы 1 рода
35. Криволинейные интегралы 2 рода
36. Поверхностные интегралы 1 рода
37. Поверхностные интегралы 2 рода
38. Числовые ряды
39. Ряды с положительными членами
40. Знакопеременные ряды
41. Степенные ряды
42. Разложение элементарных функций в степенные ряды
43. Тригонометрический ряд
44. Ряды Фурье
45. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент
46. Векторное поле. Дивергенция
47. Ротор. Циркуляция

48. Классификация векторных полей. Оператор Гамильтона

49. Гармоническое векторное поле

Приступая к работе, каждый студент должен принимать во внимание следующие положения.

Дисциплина построена по тематическому принципу, каждая тема представляет собой логически завершённый раздел.

Лекционный материал посвящён рассмотрению ключевых, базовых положений курсов и разъяснению учебных заданий, выносимых на самостоятельную работу студентов *(включается при наличии соответствующих занятий)*.

Практические занятия проводятся с целью закрепления усвоенной информации, приобретения навыков ее применения при решении практических задач в соответствующей предметной области *(включается при наличии соответствующих занятий)*.

1. Множества

1. Известно, что множество M состоит из двузначных чисел, кратных 7. Образуйте подмножество множества M , состоящее из чисел, которые не делятся на 14.
2. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна следующие множества: A - множество книг по математике, B - множество книг в твердом переплете, C - множество книг, изданных в 2021 г., D - множество документальных фильмов, E - множество книг, изданных в 2021 году по математике.
3. Найдите объединение и пересечение множеств A и B , если $A = \{ \text{э, к, з, а, м, е, н} \}$, $B = \{ \text{з, а, ч, е, т} \}$.
4. Найдите пересечение множеств: $A = \{ x | x \in \mathbb{N}, x - \text{двузначное число} \}$, $B = \{ x | x \in \mathbb{N}, x \text{ оканчивается цифрой } 7 \}$.
5. Сформулируйте свойства элементов множества $P \cap Q \cap S$ и перечислите его элементы, если, $P = \{ x | x \in \mathbb{N}, x < 20 \}$, $Q = \{ x | x \in \mathbb{N}, x - \text{четное число} \}$, $S = \{ x | x \text{ кратно } 3 \}$.
6. Найдите пересечение а) смежных углов, б) вертикальных углов.
7. Даны множества $A = \{ x | x \in \mathbb{R}, -6 \leq x \leq 2 \}$, $B = \{ x | x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 6 \}$; $C = \{ x | x \in \mathbb{R}, -5 \leq x \leq 5 \}$. Используя числовую прямую, укажите характеристическое свойство элементов множества $A \cup B \cup C$ и $A \cap B \cap C$.
8. Найдите дополнение к множеству B до множества A , если
а) $A = \{ 11, 12, 48, 54, 7 \}$, $B = \{ 7, 12 \}$,
б) $A = \{ \text{а, б, в, г, д, е} \}$, $B = \{ \text{а, е} \}$,
в) A - множество студентов СКФУ, B - множество отличников СКФУ
9. Найдите разность множеств P и Q , Q и P , если $P = \{ \text{к, о, м, п, ь, ю, т, е, р} \}$, $Q = \{ \text{м, ы, ш, ь} \}$
10. Даны два множества: $X = \{ 3; 4; 5 \}$, $Y = \{ \text{б; в} \}$. Запишите элементы множеств $X \times Y$ и $Y \times X$ в виде таблицы.
11. С помощью диаграмм Эйлера-Венна проверьте справедливость равенства $(A \setminus B) \cap A \cap (C \setminus B) = C \cap (A \setminus B)$, если $A \subset C$, $B \subset A$
12. С помощью диаграмм Эйлера-Венна проверьте справедливость равенства $(A \cap B) \setminus A \setminus (C \cup B) = C \setminus (A \cap B)$, если $A \cap C$, $B \cap C = \emptyset$ $B \subset A$
13. Расположите два угла так, чтобы их пересечение представляло собой отрезок.

ДОМАШНЯЯ РАБОТА по теме «Множества»

1. Пусть A - множество студентов в нашем университете, B - множество студентов старше 20 лет. Опишите множество $A \cap B$ и изобразите эти множества графически (изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна).
2. Используя числовую прямую, найдите пересечение и объединение множеств A и B , если $A = \{ x | x \in \mathbb{Z}, x > -1 \}$, $B = \{ x | x \in \mathbb{Z}, x < 4 \}$
3. A - множество букв в слове «единорог», B - множество букв в слове «легенда», C - множество букв в слове «год», а D - множество цифр в числе 12112212. Укажите элементы следующих множеств: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) $C \times D$; д) дополнение к подмножеству C до множества A .
4. С помощью диаграмм Эйлера-Венна проверьте справедливость равенства $(A \setminus B) \cup C = C \setminus (C \cap B)$, если $A \cap B$, $C \subset A$, $C \cap B$
6. Найдите дополнение к множеству B до множества A , если $A = \{ x | x \in \mathbb{N}, x < 5 \}$, $B = \{ x | x \in \mathbb{N}, x < 2 \}$

7. Найдите разность множеств $P \setminus Q$ и $Q \setminus P$, если $P = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -5 \leq x \leq 2\}$, $Q = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 4\}$

8. Даны множества $B = \{f; k; g\}$ и $C = \{2; 3; 4\}$. Запишите множества $B \times C$ и $C \times B$.

2. Действительные функции действительного переменного. Числовые последовательности

Найти область существования функций

1. $y = 3x^3 + 5x^2 - 7x + 2$ 2. $y = \frac{1}{x}$ 3. $y = \frac{5}{1-x}$ 4. $y = \frac{1}{7x-2}$ 5. $y = \frac{x-1}{x^2-7x+12}$
6. $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2+x+1}$ 7. $y = \sqrt{2-x}$ 8. $y = x+4$ 9. $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ 10. $y = \frac{5}{\sqrt{4-x}}$ 11.
 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}$ 12. $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x+3}$ 13. $y = \frac{\sin x}{\lg(x^2-4)}$ 14. $y = \lg \frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}$

Построить графики функций:

15. $y = 3x - 5$ 16. $y = -2x + 3$ 17. $y = 4x - 1$ 18. $y = -3x + 1$ 19. $y = x^2$

Проверить четность функций

20. $f(x) = \frac{(1+3^x)^2}{3^x}$ 21. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ 22. $f(x) = \frac{x^4+x^2-1}{2x^3+7}$ 23. $f(x) = \frac{x^3}{\cos x}$
24. $f(x) = \sin x + \cos x$ 25. $f(x) = 2x + 7$ 26. $f(x) = x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 27. $f(x) = x^3 \sin x$

Найти точки пересечения этих парабол с осями Ох и Оу

28. $y = -x^2 + 2x + 2$ 29. $y = -2x^2 + 3x - 4$ 30. $y = 5x^2 + 4x + 7$ 31. $y = 2x^2 + 4x$
32. $y = -3x^2 - 1$

33. По известному графику функции $y = x^2$ построить графики функций:

а) $y = 3x^2$ б) $y = \frac{1}{2}x^2$ в) $y = \frac{1}{3}x^2$ г) $y = -x^2$ д) $y = -3x^2$ е) $y = (x+1)^2$ ж)
 $y = (x-2)^2$ з) $y = x^2 + 2x + 2$

34. Исходя из графика функции $y = \sin x$, построить графики функции

а) $y = -\sin x$ б) $y = |\sin x|$ в) $y = \frac{1}{2}\sin x$ г) $y = 2\sin x$ д) $y = \sin(x+2)$ е)
 $y = \sin 2x$ ж) $y = \sin \frac{x}{2}$

Построить график функций

$$35. y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leq -1 \\ x + 3, & \text{если } -1 < x \leq 0 \\ -x + 3, & \text{если } 0 < x \leq 1 \\ 2, & \text{если } x > 1 \end{cases} \quad 36. \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 0 \\ x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

37. Построить точки, заданные полярными координатами:

$$M_1\left(2; \frac{\pi}{6}\right), \quad M_2\left(1; \frac{3\pi}{4}\right), \quad M_3\left(3; \frac{5\pi}{4}\right), \quad M_4\left(2; \frac{5\pi}{6}\right), \quad M_5\left(\frac{3}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad M_6(4; 0), \quad M_7\left(3; \frac{7\pi}{4}\right)$$

38. Найти декартовы координаты точек, заданных в предыдущем номере,

$$\text{учитывая, что } \begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi, & \rho \geq 0 \\ y = \rho \cdot \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

39. Точки заданы декартовыми координатами:

$A(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $B(0, -3)$, $C(\sqrt{3}, 1)$. Построить эти точки и найти их полярные координаты.

40. Записать уравнение линии $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 4(x^2 - 3y^2)$ в полярных координатах.

41. Записать уравнение линии $\rho^2 = 8\sin^2 2\varphi$ в декартовых координатах.

42. Построить кривую, заданную уравнением: $\rho = 2 + \cos^2 \varphi$.

43. Построить кардиоиду, заданную уравнением в полярных координатах $\rho = 4(1 - \sin \varphi)$.

44. Выяснить, какая линия определяется параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a \cdot t \cdot \cos t \\ y = a \cdot t \cdot \sin t, & a > 0, b > 0, t \geq 0 \\ z = bt \end{cases}$$

45. Выяснить, какая линия определяется параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a \cdot \sin^2 t \\ y = a \cdot \cos^2 t, & a > 0, b > 0, -\infty < t < \infty \\ z = 0 \end{cases}$$

Зная общий член последовательности, написать ее первые десять членов

$$46. x_n = n \quad 47. x_n = \frac{n}{n+2}$$

Написать формулу общего члена последовательности по первым членам:

48. $\frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, \frac{30}{31}, \dots$

49. Привести примеры:

- а) возрастающей ограниченной последовательности;
- б) возрастающей неограниченной последовательности;
- в) убывающей ограниченной последовательности;
- г) убывающей неограниченной последовательности.

50. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{2n+1}$ – монотонно возрастающая

51. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{n+1}$ – имеет предел, равный 1.

52. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{4n}{2n+1}$ – имеет предел, равный 2.

53. Доказать, что последовательность $q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots$ сходится к нулю, если абсолютная величина q меньше 1, т.е. если $|q| < 1$.

54. Доказать, что последовательность $3, 3^2, 3^3, \dots, 3^n, \dots$ не имеет предела.

55. Доказать, пользуясь определением предела последовательности, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}$ имеет предел = 1.

Домашняя работа

Найти область существования функций 1. $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 2. $y = \arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)$ 3.

$y = \lg(x^2 - 3)$

4. По известному графику функции $y = x^2$ построить графики функций а)

$y = 2(x+2)^2$ б) $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ в) $y = 4x^2 + 8x + 12$

5. Зная график $y = \lg x$, построить графики функций:

а. $y = \lg x^2$ б. $y = \lg(-x)$ в. $y = \lg x^3$ г. $y = \lg(x-1)$ д. $y = \lg \frac{1}{x}$

6. Исходя из графика функции $y = \cos x$, построить графики функции

а) $y = -\cos x$ б) $y = |\cos x|$ в) $y = \frac{1}{2} \cos x$ г) $y = 2 \cos x$ д) $y = \cos(x + 2)$ е) $y = \cos 2x$ ж) $y = \cos \frac{x}{2}$

Построить график функций

7. $\begin{cases} 2, \text{ если } x < 0 \\ -2, \text{ если } x > 0 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x, \text{ если } x \neq 2 \\ 5, \text{ если } x = 2 \end{cases}$

8. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

а) $\rho = 5$ б) $\varphi = \frac{\pi}{3}$ в) $\rho = a\varphi$ (спираль Архимеда) г) $\rho = 6 \cdot \cos \varphi$ д) $\rho = 10 \cdot \sin \varphi$

е) $\rho \cos \varphi = 2$ ж) $\rho \sin \varphi = 1$ з) $\rho = \frac{4}{1 - \cos \varphi}$ (парабола) и) $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ (кар-

диоида) к) $\rho = \frac{3}{\varphi}$ (гиперболическая спираль) л) $\rho = 2^\varphi$, $\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^\varphi$ (логариф-

мические спирали) м) $\rho = a \cdot \sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза) н) $\rho = a \cdot \sin^2 2\varphi$

(четырёхлепестковая роза) о) $\rho = a^2 \cdot \cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли)

9. Составить в полярных координатах уравнения следующих линий:

а) прямой, перпендикулярной к полярной оси и отсекающей на ней отрезок, равный 3 ($\rho \cos \varphi = 3$)

б) прямых, параллельных полярной оси и отстоящих от нее на расстоянии 5 ($\rho \cdot \sin \varphi = \pm 5$)

в) окружности радиусом $R=4$ с центром на полярной оси и проходящей через полюс ($\rho = 8 \cdot \cos \varphi$)

г) окружностей радиусом $R=3$, касающихся полярной оси в полюсе ($\rho = \pm 6 \cdot \sin \varphi$)

10. Построить следующие линии, заданные параметрическими уравнениями:

$$\text{a)} \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -2t + 5 \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} x = 3\cos t + 3 \\ y = 3\sin t - 2 \end{cases} \quad \text{в)} \begin{cases} x = 5 + 4\cos t \\ y = -1 + \sin t \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$\text{(циклоида) д)} \begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = a \cdot \sin^3 t \end{cases} \quad \text{(астроида) е)} \begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \sin t \\ z = bt \end{cases} \quad \text{(винтовая линия) ж)}$$

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \\ y = \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \end{cases}$$

Написать первые пять членов последовательности

$$11. x_n = \frac{2n}{3n-2} \quad 12. x_n = n! \quad 13. x_n = \frac{1}{n} \quad 14. x_n = -2^n \quad 15. x_n = \frac{1}{2^n} \quad 16. x_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} \quad 17.$$

$$x_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+1)} \quad 18. x_n = \frac{\sin \pi}{n} \quad 19. x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{для } n \text{ нечетных} \\ \frac{n}{n+1} & \text{для } n \text{ четных} \end{cases} \quad 20. x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$$

Написать формулу общего члена последовательности по первым членам:

$$21. \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \dots \quad 22. \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{5 \cdot 6}, \frac{1}{7 \cdot 8}, \frac{1}{9 \cdot 10}, \dots \quad 23. \frac{1}{6}, \frac{4}{11}, \frac{7}{16}, \frac{10}{21}, \frac{13}{26}, \dots$$

$$24. \frac{3}{5}, \frac{7}{8}, \frac{11}{11}, \frac{15}{14}, \frac{19}{17}, \dots \quad 25. \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \dots \quad 26. 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \dots$$

$$27. \frac{3}{5}, \frac{12}{17}, \frac{27}{37}, \frac{48}{65}, \frac{75}{101}, \dots$$

$$28. \text{Доказать, что последовательность с общим членом } x_n = \frac{n}{4n-3} \text{ — моно-}$$

тонно убывающая, а с общим членом $x_n = \frac{n-1}{n}$ — монотонно возрастающая.

$$29. \text{Доказать, что последовательность } \left\{ \frac{3n}{n+1} \right\} \text{ — ограниченная и монотонно}$$

$$\text{возрастающая, а последовательность } \left\{ \frac{2^n+1}{2^n} \right\} \text{ — ограниченная и монотонно}$$

убывающая.

$$20. \text{Доказать, что переменная } x_n = \frac{1}{n} \text{ имеет предел, равный нулю.}$$

3. Предел функции в точке и на бесконечности

Найти предел функции

1. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 7x + 4)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x+5}{x-5}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$ 4. $\lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{3x+5}{x-5}$ 5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ 6.
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$ 7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-5}{x^2-7x+12}$ 8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ 9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ 10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-4x+3}{2x^2-7x+5}$
11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-3x+2}$ 12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$ 13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$ 14. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$ 15.
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$ 16. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-3x-2}{x^2+x}$ 17. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$ 18. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$ 19.
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$ 20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ 21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$ 22. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$ 23.
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18}$ 24. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$ 25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+2}{x^2-x+4}$ 26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-2}{x^2-5x+7}$ 27.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3+2}{5x^2-2x+7}$ 28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2+3x-6}{3x^2-8x+12}$ 29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n+2}$ 30. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$ 31.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1})$ 32. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n^2-n+1}{8n^2+n+3}}$ 33. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{\frac{5n}{4n+3}} \right)^{-\frac{1}{2}}$ 34. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-n^3} + n)$
35. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 36. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$ 37. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$ 38.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1})$ 39. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+a)(n+b)} - n)$ 40. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+5n}}{3n+2}$ 41.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+5-6+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{4n^2-1}}$ 42. $\lim_{x \rightarrow 9} \lg(x+1)$ 43. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+5}{x^2-2}$ 44.
- $\lim_{x \rightarrow 4} \left[\ln \frac{x-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}} \right]$ 45. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$ 46. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1}$ 47. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}}$

Домашняя работа

Найти предел функции

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 7x^2 + 4x + 2)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{2}x^3 - x + 2 \right)$ 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 4}$ 4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{2x^3 - x^2 + x + 2}$ 5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 9x + 9}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}$ 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 - 6x^2}{4x^5 + 2x^3 + x^2}$ 8. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 - 3x^2 - 45x - 81}$ 9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt[6]{x}}$ 10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}$ 11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}$ 12. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$ 13. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ 14. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}$ 15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x + 2}{3x^2 - 2x + 5}$ 16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^2 + 5x - 9}{6x^2 - 2x + 19}$ 17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 2x^2 - 7x + 10}{3x^2 - 6x + 1}$ 18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 5x - 8}{3x^2 - 12x + 9}$ 19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5n}$ 20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4}$ 21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{9n}$ 22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^7}$ 23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n}$ 24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n+3}$ 25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{2}}$ 26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n+1)^{\frac{2}{3}} - (n-1)^{\frac{2}{3}} \right]$ 27. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n+7}{2n-5}$ 28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{9n+1}$ 29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 4n - 6}{2n^3 + 9n}$ 30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 + 6n - 11}{5n^3 - 2n^2}$ 31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{tg x} - 1}{x}$ 32. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + 5 \ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$ 33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ 34. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{5}{x}}$ 35. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$

4. Непрерывность функций. Производная функции

План занятий

1. Разобрать решение примеров
2. Обсудить проблемы решения индивидуальных задач для самостоятельной работы по данной теме.

Компетенции, формируемые на занятии: ПК1

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Основные правила дифференцирования.
2. Дифференцирование сложной функции.
3. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Функции заданные неявно и параметрически и их дифференцирование

Методические рекомендации

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Применяя правила дифференцирования и таблицу производных, най-

дите производные следующих функций:

$$y = \ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}$$

Решение. I способ. Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции: сначала находим производную логарифмической функции, затем корня и наконец производную дроби:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}} \right)' = \sqrt{\frac{1+e^{3x}}{e^{3x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}} \cdot \left(\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^{3x}}{e^{3x}} \cdot \frac{(e^{3x})'(1+e^{3x}) - (1+e^{3x})' \cdot e^{3x}}{(1+e^{3x})^2} = \frac{3e^{3x}(1+e^{3x}) - 3e^{3x} \cdot e^{3x}}{2e^{3x}(1+e^{3x})} = \frac{3e^{3x}}{2e^{3x}(1+e^{3x})} = \\ &= \frac{3}{2(1+e^{3x})}. \end{aligned}$$

II способ. Чтобы упростить дифференцирование, сначала преобразуем функцию на основании свойств логарифмов:

$$\begin{aligned} y &= \ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}} = \frac{1}{2} (\ln e^{3x} - \ln(1+e^{3x})) = \frac{1}{2} (3x - \ln(1+e^{3x})) \\ y' &= \frac{1}{2} \left(3 - \frac{(1+e^{3x})'}{1+e^{3x}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 + 3e^{3x} - 3e^{3x}}{1+e^{3x}} = \frac{3}{2(1+e^{3x})} \end{aligned}$$

Тогда

Замечание. Вообще, если под знаком подлежащей дифференцированию логарифмической функции содержится выражение, поддающееся логарифмированию (произведение, частное, степень, корень), то полезно сначала выполнить логарифмирование.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение производной функции в точке.
 2. Назовите основные правила дифференцирования функций.
 3. Запишите таблицу производных основных элементарных функций.
 4. Дайте определение сложной функции. Приведите примеры.
 5. Сформулируйте теорему для нахождения производной сложной функции.
 6. Составьте таблицу нахождения производных для функций вида $f(u)$, где f - одна из элементарных функций, $u = u(x)$.
-
1. Доказать, что функция $f(x) = 3x^3 - 4x + 5$ непрерывна при любом x , т.е. непрерывна на бесконечном интервале $(-\infty; +\infty)$.
 2. Доказать, что любой многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ непрерывен при всех значениях x .
 3. Доказать, что любая дробно-рациональная функция $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены непрерывна для всех значений x , за исключением тех из них, при которых знаменатель обращается в нуль.
 4. Найти приращение функции Δu функции $f(x) = x^2$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 3$ к новому значению $x_2 = 4$.
 5. Найти приращение функции Δu функции $f(x) = x^3$ при переходе аргумента от значения x к новому значению $x + \Delta x$.
 6. Найти приращение функции Δu функции $f(x) = \sin x$ при переходе аргумента от значения x к новому значению $x + \Delta x$.
 7. Найти приращение функции $y = a^x$.
 8. Доказать, что при $x=0$ функция $\sin x$ непрерывна.
 9. Доказать, что функция $\sin x$ непрерывна при любом значении x .
 10. Пользуясь вторым определением непрерывности функции, доказать, что функция $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$ непрерывна в произвольной точке x .
 10. Проверить на непрерывность при $x=1$ функцию $f(x) = 2 + \frac{1}{2^{1-x}}$.

11. Какого рода разрыв имеет функция

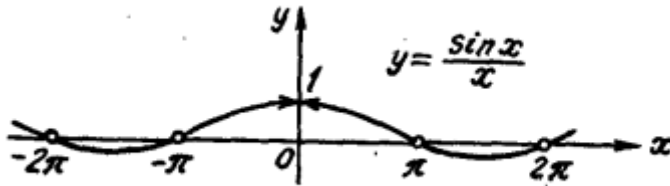
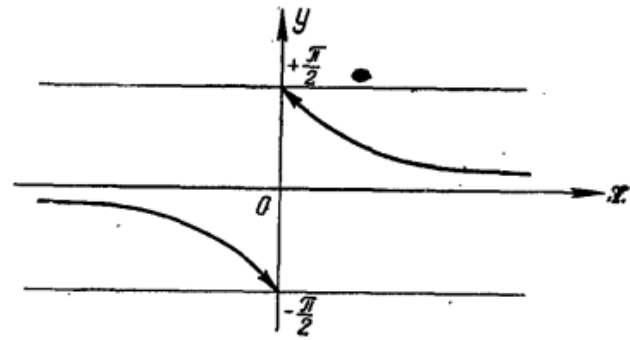
$$y = \frac{1}{x} \text{ в точке } x=0?$$

12. Какого рода разрыв имеет функция

$$y = \arctg \frac{1}{x} \text{ в точке } x=0?$$

13. Какого рода разрыв имеет функция

$$y = \frac{\sin x}{x} \text{ в точке } x=0?$$



14. Проверить непрерыв-

ность функции $y = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

15. Доказать, что функция $y = x^3 \cos^2 x + \frac{x^4}{x^2 + 1}$ непрерывна при всех значениях x .

Найти производные функций

16. $y = x^4$ 17. $y = x^5$ 18. $y = \sqrt{x}$ 19. $y = \sqrt[4]{x^3}$ 20. $y = 5x^3$ 21. $y = -4x^2$ 22. $y = 7\sqrt{x}$ 23.

$y = \frac{8}{x^2}$ 24. $y = 4\sqrt[3]{x^2}$ 25. $y = \frac{6}{\sqrt{x}}$ 26. $y = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$ 27. $y = -\frac{5}{4x^3}$ 28. $y = \frac{7\sqrt{x}}{8}$ 29.

$y = 5x^3 - 3x^2 + x - 1$ 30. $y = (5x^2 + 7x - 1)^3$ 31. $y = (5x^3 + 4x^2 + 9x + 2)^4$ в точке

$x_0 = 1$ 32. $y = \sqrt{(x^2 + 2)^5}$ в точке $x_0 = 1$ 33. $y = \sqrt{3x}$ 34. $y = \frac{2}{(3x^2 - 5)^3}$ в точке $x_0 = 2$

35. $y = \frac{3}{\sqrt[5]{(x^2 + x + 1)^2}}$ в точке $x_0 = 3$ 36. $y = 5x^3 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^4} + \sqrt[5]{x^3}$ в точке $x_0 = 2$ 37.

$y = x^2(5x - 4)^6$ 38. $y = \frac{4}{(3x^2 + 5x - 2)^5} + \sqrt{(x + 3x^2)^3}$ в точке $x_0 = 2$ 39.

$y = (9a^2 - 6abx + 5b^2x^2)\sqrt[3]{(a + bx)^2}$ 40. $y = (2a + 3bx)(2a - 3bx)^2\sqrt{4a + 6bx}$ 41.

$$y = \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2} \quad 42. y = \frac{5 + 3x + x^2}{5 - 3x + x^2} \quad 43. y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \quad 44. y = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad 45.$$

$$y = (4x - 7)(3x + 7)\sqrt[3]{3x + 7} \quad 46. y = \frac{a - x}{a + x} \quad 47. y = \frac{x}{1 + x^2} \quad 48. y = \frac{x^m}{(1 - x)^n}$$

Домашняя работа

1. При каких значениях x непрерывна дробно-рациональная функция

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 5}{x^2 - 6x + 8}$$

2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{x}$

3. Найти приращение функции Δy функции $f(x) = x^3$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 2$ к новому значению $x_2 = 3$.

4. Найти приращение функции Δy функции $f(x) = \cos x$ при переходе аргумента от значения x к новому значению $x + \Delta x$.

5. Найти приращение функции Δy функции $f(x) = \sin x$ при переходе аргумента от значения $x_1 = \frac{\pi}{6}$ к новому значению $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

6. Найти приращение функции ΔS функции $S = \frac{gt^2}{2}$ при переходе аргумента от значения t к новому значению $t + \Delta t$.

7. Доказать, что функция $\cos x$ непрерывна при любом значении x .

8. Доказать, что функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ непрерывны в любой точке своей области определения.

9. Пользуясь вторым определением непрерывности функции, доказать, что функция $f(x) = \frac{1 + x}{1 + x^2}$ непрерывна в произвольной точке x .

10. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ непрерывна при $x = 3$.

11. Доказать, что функция $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ непрерывна в произвольной точке x .

12. Проверить на непрерывность функцию $f(x) = \frac{2}{3 + 5^{\frac{1}{x-2}}}$ при $x = 2$.

13. Проверить на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{3 + 5^{\frac{1}{x}}}$ при $x = 0$.

14. Проверить на непрерывность функцию $f(x) = \frac{5}{2 + 7^{\frac{1}{5-x}}}$ при $x=5$.

15. Какого рода разрыв имеет функция $y = 3^{\frac{1}{x}}$ в точке $x=0$? Начертить график.

16. Какого рода разрыв имеет функция $y = \frac{1}{x}$ в точке $x=0$?

16. Какого рода разрыв имеет функция $y = \frac{1}{x-3}$ в точке $x=3$?

16. Какого рода разрыв имеет функция $y = \frac{1}{x^2}$ в точке $x=0$?

17. Определить точки разрыва функции $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ и род этих точек разрыва.

18. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ и начертить график функции. Чему должно быть равно $f(-3)$, чтобы дополненная этим значением функция была непрерывна при $x=-3$?

19. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ и начертить график функции. Как следует доопределить эту функцию, чтобы она была непрерывной?

20. Пользуясь теоремами о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций, решить вопрос о непрерывности функций

а) $f(x) = \frac{x^2}{9 - x^2}$ б) $g(x) = \frac{\sin x}{1 - x^3}$ в) $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{\sin x}$

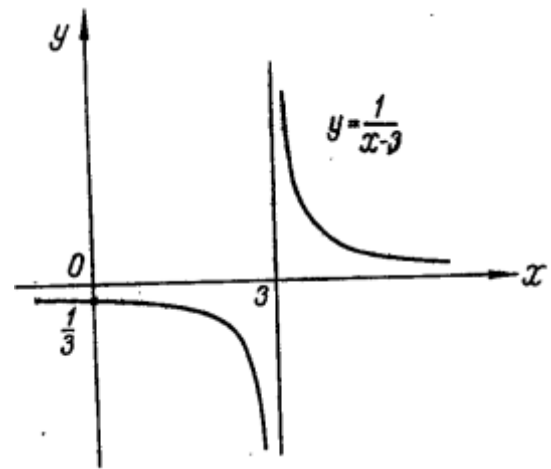
1. $y = 7x^6$ 2. $y = 8\sqrt{x}$ 3. $y = \frac{4}{x^5}$ 4. $y = \frac{a}{x^n}$ 5. $y = \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}$ 6. $y = \frac{\sqrt[6]{x^5}}{8}$ 7. $y = \frac{4\sqrt{x}}{7}$

8. $y = a\sqrt{x} + x\sqrt{a}$ 9. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2x^6 + \frac{4}{7}x^7$ 10.

$y = 9x^7 - \frac{3}{x^5} - \frac{3}{x^{11}} - \frac{a}{x^m}$ 11. $y = 3x^2\sqrt[3]{x} - 4x\sqrt[4]{x^3} + 9\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{4}{7x^2\sqrt[3]{x}}$

12. $y = \frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} + 30\sqrt[15]{x} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$ 13. $y = (5x^2 + 7)^3$ 14. $y = (1 + 5x - 8x^2)^5$ 15.

$y = \sqrt[3]{5x^4 + 4x + 7} + \frac{6}{(3x - 1)^5}$ в точке $x_0 = 2$ 16. $y = \left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}\right)^4$ в точке



$$x_0 = 4 \quad \mathbf{17.} y = \sqrt{3x^2 + 5x + 1} \text{ в точке } x_0 = 0 \quad \mathbf{18.} y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5}} \quad \mathbf{19.}$$

$$y = \frac{10}{(4x^3 - 5x^2 + 7x - 1)^4} \quad \mathbf{20.} y = \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{3x} + 3x} \quad \mathbf{21.} y = \sqrt[4]{(3 + 4\sqrt[3]{2x})^3} \quad \mathbf{22.}$$

$$y = (5x^2 - 7x + 2)(15x^2 + 5)^3 \quad \mathbf{23.} y = \left(40 - 12x + \frac{27}{5}x^2\right)\sqrt{5 + 3x} \quad \mathbf{24.}$$

$$y = \left(\frac{2}{27x} - \frac{1}{9x^2}\right)\sqrt{3x + x^2} \quad \mathbf{25.} y = (8x^3 - 21)\sqrt[3]{(7 + 4x^3)^2} \quad \mathbf{26.}$$

$$y = \left(\frac{10}{3} - 2x + x^2\right)\sqrt{(5 + 2x)^3} \quad \mathbf{27.} y = (3x^4 + 4)\sqrt[4]{9x^4 - 3} \quad \mathbf{28.}$$

$$y = \left(\frac{2}{3x^3} + \frac{28}{27x}\right)\sqrt{7x^2 - 9}$$

5. Правила дифференцирования. Производная сложной функции

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные следующих функций:

а) $y = \sqrt[5]{\frac{x(x^2+1)}{(1-x)^2}}$; б) $y = x^{e^x}$.

Решение. а) Производную функции найдем по следующему плану:

- 1) Прологарифмируем данную функцию:

$$\ln y = \ln \sqrt[5]{\frac{x(x^2+1)}{(1-x)^2}} = \frac{1}{5} (\ln x + \ln(x^2+1) - 2 \ln(1-x)).$$

- 2) Найдем производную от $\ln y$:

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{5} (\ln x + \ln(x^2+1) - 2 \ln(1-x)) \right)' = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{1-x} \right) = \frac{-x^3 + 3x^2 + x + 1}{5x(x^2+1)(1-x)}.$$

Определим производную данной функции

$$y' = y(\ln y)' = \sqrt[5]{\frac{x(x^2+1)}{(1-x)^2}} \cdot \frac{-x^3 + 3x^2 + x + 1}{5x(x^2+1)(1-x)} = \frac{-x^3 + 3x^2 + x + 1}{5\sqrt[5]{(1-x)^7} x^4 (x^2+1)^4}.$$

б) Производную функции с помощью логарифмического дифференцирования находим по указанному плану:

1) $\ln y = \ln x^{e^x} = e^x \ln x$.

2) $(\ln y)' = (e^x \ln x)' = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} = \frac{e^x(x \ln x + 1)}{x}$.

3) $y' = y(\ln y)' = x^{e^x} \frac{e^x(x \ln x + 1)}{x} = x^{e^x-1} e^x$.

2. Для функции $y = \operatorname{tg} x$ найдите производные второго и третьего порядков.

Решение. По определению производных высших порядков имеем:

$y'' = (y')'$ и $y''' = (y'')'$, т.е. производная второго порядка есть производная от производной первого порядка, а производная 3-го порядка есть производная от производной 2-го порядка. Поэтому последовательно находим:

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad y'' = (y')' = \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)' = 2 \cos^{-1} x \sin x = 2 \operatorname{tg} x, \quad y''' = (y'')' = (2 \operatorname{tg} x)' = \frac{2}{\cos^2 x}.$$

3. Для данных неявных функций найдите производные первого порядка $y(x)$:

а) $5x^2 + 3xy - 2y^2 + 2 = 0$; б) $x^y = y^x$.

Решение. а) Дифференцируем по x обе части равенства, считая, что y есть функция от x , получим:

$$10x + 3y + 3xy' - 4yy' = 0, \text{ отсюда } y'(4y - 3x) = 10x + 3y, \text{ или } y' = \frac{10x + 3y}{4y - 3x}.$$

б) Логарифмируем обе части данного уравнения, затем дифференцируем по x , рассматривая y как функцию от x :

$$y \ln x = x \ln y, \quad y' \left(\ln x - \frac{x}{y} \right) = \ln y - \frac{y}{x}, \quad \text{отсюда} \quad y' = \frac{(x \ln y - y)y}{x(y \ln x - x)}.$$

2. Для функции, заданной параметрически, найдите производную: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

Решение. Учитывая, что $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, найдем $x'_t = -\sin t$ и $y'_t = \cos t$.

Тогда $y'_x = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t$.

Найти производные функций

1. $y = \sin kx$ 2. $y = \cos px$ 3. $y = \operatorname{tg} 3x$ 4. $y = \operatorname{ctg} 7x$ 5. $y = \sin 2x^3$ 6. $y = \sin \sqrt{x}$

7. $y = \operatorname{tg} \frac{1+x}{x}$ 8. $y = \cos \frac{1}{1+x}$ 9. $y = 3\sin^2 x$ 10. $y = \cos^6 x$ 11. $y = \sqrt{\sin x}$

12. $y = \sqrt{\sin^2 x + 3\cos^3 4x}$ 13. $y = \frac{1}{\cos^3 x}$ 14.

$y = x\sin^3 x + 3x^2 \cos x - 6x\sin x - 6\cos x$ 15. $y = \arcsin 2x$ 16. $y = \arccos x^m$ 17.

$y = \operatorname{arctg} \sqrt{x} \quad (x > 0)$ 18. $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$ 19. $y = \arcsin^2 x$ 20.

$y = \arcsin^3 3x$ 21. $y = \operatorname{arctg}^4 \sqrt{x}$ 22. $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$

23. $y = \operatorname{tg}(\arcsin x)$ 24. $y = 2^{3x}$ 25. $y = 7^{\frac{1}{4x}}$ 26. $y = 2^{x^2}$ 27. $y = 4^{\sin^2 x}$ 28. $y = e^{x^4}$

29. $y = e^{\sqrt{x^2+x+2}}$ 30. $y = e^{\sqrt{\sin x}}$ 31. $y = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$ 32. $y = e^{\operatorname{tg} x}$ 33.

$y = e^{\arcsin^2 x}$

34. $y = \ln \frac{x}{1-x^4}$ 35. $y = \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 36. $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 37. $y = \sin^2 3x \cdot \operatorname{arctg} 3x^5$

38. $y = \cos \sqrt[5]{x} \cdot \operatorname{arctg} x^4$ 39. $y = \operatorname{tg}^6 2x \cdot \cos 7x^2$ 40. $y = \ln(x+9) \cdot \arcsin^3 \sqrt{x}$

41. $y = \lg(x+2) \cdot \arcsin^2 3x$

Домашняя работа

Найти производные функций

1. $y = \sin 3x$ 2. $y = \sin 5x$ 3. $y = \cos 15x$ 4. $y = \cos 4x$ 5. $y = \operatorname{tg} 5x$ 6. $y = \operatorname{ctg} 12x$

7. $y = \sin^3 x$ 8. $y = tg^3 x$ 9. $y = ctg^4 x$ 10. $y = 5 \cos^5 x$ 11. $y = 7tg^6 x$ 12. $y = 8 \sin^2 x$

13. $y = tgx + \frac{1}{3}tg^3 x$ 14. $y = \left(\frac{2}{\cos^4 x} + \frac{3}{\cos^2 x} \right) \sin x$ 15. $y = tgx - ctgx - 2x$

16. $y = \left(\cos^2 x + \frac{2}{3} \right) \sin^3 x$ 17. $y = \arcsin 5x$ 18. $y = \arcsin \sqrt{x} \quad (x > 0)$ 19.

$y = \arcsin mx$ 20. $y = \arccos 6x$ 21. $y = \arccos(1 - x^2)$ 22. $y = arctg 5x$ 23.

$y = arctg \frac{1}{x}$ 24. $y = arctg \frac{1}{x}$ 25. $y = \arcsin^3 x^2$ 26. $y = arctg^2 \frac{1}{x^2}$ 27.

$y = \arccos^4 5x$ 28. $y = arcctg \sqrt{x^3}$

29. $y = arctg \frac{1-x}{1+x}$ 30. $y = ctg^3 4x \cdot \arcsin \sqrt{x}$ 31. $y = ctg \frac{1}{x} \cdot \arccos x^4$

6. Производные высших порядков. Дифференциал

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Запишите формулу логарифмического дифференцирования.
2. Когда применяется формула логарифмического дифференцирования?
3. Расскажите о дифференцировании показательно-степенной функции.
4. Дайте определение производной второго порядка, производной n -го порядка.
5. Дайте определение неявного задания функции. Приведите примеры.
6. Как от неявного задания перейти к явному заданию функции? Всегда ли это можно сделать. Приведите примеры.
7. Как проводят дифференцирование неявной функции?
8. Расскажите о нахождении производных высших порядков от неявно заданных функций.
9. Дайте определение параметрически заданной функции. Приведите примеры.
10. Расскажите как от параметрического задания функции перейти к явному заданию функции.
11. Запишите формулы для нахождения производных первого и второго порядков от параметрически заданной функции.

Найти дифференциалы следующих функций

$$1. y = \cos^3 2x \quad 2. y = x \sqrt{7-2x} \quad 3. y = \frac{1}{12} \cdot \ln \frac{x-6}{x+6} \quad 4. y = -\frac{x}{2} \sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \quad 5.$$

$$y = \frac{e^{5x}}{x^2} \quad 6. y = \ln(1 + e^{10x}) + \operatorname{arctg} e^{5x}, \quad 7. y = \frac{x-1}{x+1} \quad 8. y = \sin^2 \sqrt{x} \quad 9.$$

$$y = x^3 \cdot \ln(1+x).$$

Найти производные третьего порядка

$$1. y = 5x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 6x + 5 \quad 2. y = \operatorname{tg} x \quad 3. y = \operatorname{ctg} x \quad 4. y = \arcsin \frac{x}{2} \quad 5. y = \sin^2 x$$

$$6. y = \cos^2 x \quad 7. y = \sqrt{1+x^2} \quad 8. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \quad 9. y = \ln(2x-3) \quad 10. y = e^x \cdot \cos x \quad 11. y = x \cdot \ln x$$

$$12. y = e^{x/2} \quad 13. y = x \cdot \cos x \quad 14. y = 2^{3x}$$

Найти указанные производные

$$1. y = 5x^4 \quad y^{(4)} = ? \quad 2. y = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 8 \quad y^{(4)} = ? \quad 3. y = \sin^2 x \quad y^{(5)} = ? \quad 4.$$

$$y = \sqrt{x+5} \quad y^{(4)} = ? \quad 5. y = \ln \sin x \quad y^{(4)} = ? \quad 6. y = a^x \quad y^{(n)} = ? \quad 7.$$

$$y = e^x \quad y^{(n)} = ? \quad 8. y = \ln x \quad y^{(n)} = ? \quad 9. y = \sin x \quad y^{(n)} = ? \quad 10.$$

$$y = e^{4x} \sin 3x \quad y^{(5)} = ?$$

Домашняя работа

Найти указанные производные

- 1.** $y = \arcsin x$ $y'' - ?$ **2.** $y = \operatorname{arctg} x$ $y'' - ?$ **3.** $y = \ln x$ $y^{(4)} - ?$ **4.**
 $y = \frac{1+x}{1-x}$ $y^{(3)} - ?$ **5.** $y = \sqrt{x}$ $y^{(3)} - ?$ **6.** $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $y^{(3)} - ?$ **7.** $y = \sqrt[3]{x}$ $y^{(4)} - ?$
8. $y = \cos x$ $y^{(n)} - ?$ **9.** $y = \frac{1}{x}$ $y^{(n)} - ?$ **10.** $y = x^4 e^{2x}$ $y^{(6)} - ?$ **11.**
 $y = x^2 e^x$ $y^{(n)} - ?$ **12.** $y = x^3 \ln \frac{x}{a}$ $y^{(4)} - ?$ **13.** $y = e^x \cos x$ $y^{(5)} - ?$

7. Основные теоремы дифференциального исчисления

План занятий

1. Разобрать решение примеров
2. Обсудить проблемы решения индивидуальных задач для самостоятельной работы по данной теме.

Компетенции, формируемые на занятии: ПК1

1. Приложения производной: уравнение касательной и нормали к плоской кривой,
2. Правило Лопиталя, формула Тейлора

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Составьте уравнения касательной и нормали к параболе $y = x^2$ в точке $A(2;4)$.

Решение. Так как надо составить уравнения касательной и нормали в точке $A(2;4)$, то $x_0 = 2, y_0 = 4$.

Тогда уравнение касательной в точке $A(2,4)$ будет иметь вид:
 $y = 4 + 4(x - 2)$, или $y = 4x - 4$.

А уравнение нормали: $y = \frac{1}{4}(x - 2)$ или $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$.

2. С помощью правила Лопиталя найдите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \operatorname{tg} 5x$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x) x^{\frac{1}{2}}$.

Решение. а) В данном пределе имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. По правилу Лопиталя заменим отношение этих величин отношением их производных:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x^4 + 2x^2 - 3)'}{(x^2 - 3x + 2)'} = \frac{4x^3 + 4x}{2x - 3} = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 3} = -\frac{8}{1} = -8.$$

Замечание. Аналогично можно раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

б) В данном пределе имеем неопределенность $0 \cdot \infty$. Сведем эту неопределенность к виду $\frac{0}{0}$, а затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \operatorname{tg} 5x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{1}{\operatorname{tg} 5x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)'}{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} 5x} \right)'}, = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \operatorname{tg}^2 5x \cdot \cos^2 5x}{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^2 5x = \frac{1}{5} \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin^2 \frac{5\pi}{2} = \frac{1}{5}.$$

в) В данном пределе имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Преобразуем функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, затем применим правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(ctgx - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{tgx} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - tgx}{xtgx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - tgx)'}{(xtgx)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{tgx + \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1-1}{0+1} = 0. \end{aligned}$$

г) В данном пределе имеем неопределенность вида 1^∞ . Заметим сразу, что таким образом можно раскрыть неопределенности вида ∞^0 и 0^0 . Эти случаи

нахождения предела функции сводятся к случаю $0 \cdot \infty$ (а затем к случаю $\frac{0}{\infty}$ и $\frac{\infty}{\infty}$) следующим путем: функция логарифмируется и сначала находится предел ее логарифма, а затем по найденному пределу логарифма находится и

предел самой функции. Таким образом, пусть $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)x^{\frac{1}{2}} = a$.

Логарифмируем функцию и находим предел ее логарифма:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)x^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x)x^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}.$$

Здесь нахождение предела свелось к случаю $\frac{0}{0}$. Применяя правило Ло-

питаля, получим: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x \cos x}$. Неопределенность $\frac{0}{0}$ осталась. Применим правило Лопиталя 2-й раз:

$$\ln a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\sin x)'}{(2x \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2x \sin x + 2 \cos x} = -\frac{1}{2}.$$

Теперь по найденному пределу логарифма функции находим искомый предел самой функции: $a = e^{\ln a} = e^{-\frac{1}{2}}$.

Таким образом: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)x^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

3. Разложите многочлен $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ по степеням $x + 2$ по формуле Тейлора.

Решение. Найдем значение многочлена и его производных при $x = 2$:

$$P(-2) = (-2)^3 - 6(-2)^2 + 11(-2) - 6 = -60,$$

$$P'(x) = 3x^2 - 12x + 11, P'(-2) = 12 + 24 + 11 = 47,$$

$$P''(x) = 6x - 12, P''(-2) = -12 - 12 = -24,$$

$$P'''(x) = 6, P'''(-2) = 6; P^{IV}(x) = 0 \text{ и все последующие производные равны } 0.$$

Тогда для разложения многочлена по степеням $(x + 2)$ по формуле Тейлора имеем:

$$P(x) = P(-2) + \frac{P'(-2)}{1!}(x+2) + \frac{P''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{P'''(-2)}{3!}(x+2)^3, \text{ т.е.}$$

$$P(x) = -60 + 47(x+2) + \frac{-24}{2!}(x+2)^2 + \frac{6}{3!}(x+2)^3 = \\ = -60 + 47(x+2) - 12(x+2)^2 + (x+2)^3.$$

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Сформулируйте геометрический смысл производной функции.
2. Выведите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
3. Какая прямая называется нормалью к кривой? Какой вид имеет уравнение нормали?
4. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов функции.
5. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ вида $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов функции.
6. Сколько раз подряд можно применять правило Лопиталя и когда это правило неприменимо?
7. Как можно раскрыть неопределенность вида $0 \cdot \infty$ при вычислении предела функции?
8. Что нужно сделать при вычислении предела функции, если он содержит неопределенность вида $\infty - \infty$?
9. Какой прием применяют для применения правил Лопиталя, если предел функции содержит неопределенность вида 0^0 , или ∞^0 , или 1^∞ ?
10. Расскажите о формуле Тейлора и формуле Маклорена. Для чего эти формулы могут использоваться?
11. Разложите по формуле Тейлора (Маклорена) функции $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Найти пределы

$$\begin{aligned}
 & 1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \sqrt[n]{a^n - x^n}}{x^n} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}} \quad 4. \\
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad 5. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad 6. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \quad 7. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad 8. \\
 & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x-1} \right) \quad 9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{2x^2} - \frac{1}{x(e^{2x} - 1)} \right) \quad 10. \lim_{x \rightarrow +0} (x \cdot \ln x) \quad 11. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x} \quad 12. \\
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2 + ax + x^2} - \sqrt{a^2 - ax + x^2}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} \quad 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} \quad 14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \quad 15. \\
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{\sin^3 x} \quad 16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} \quad 17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2 \cdot \cos x} \quad 18. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \quad 19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1}}{\operatorname{ctg} x} \quad 20. \\
 & \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \operatorname{tg} 2x} \quad 21. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} \quad 22. \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{\ln \left(x - \frac{1}{a} \right)}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{a}}
 \end{aligned}$$

Дополнительно

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 \ln x; \\
 & \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}; \quad \text{ж) } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 5x}; \quad \text{з) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}; \quad \text{и) } \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} \ln x; \\
 & \text{к) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{x^2-1} - \frac{7}{x^3-1} \right); \quad \text{л) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right); \quad \text{м) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.
 \end{aligned}$$

Домашняя работа

$$\begin{aligned}
 & \text{Найти пределы} \quad 1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 8x^2 + 17x - 10}{x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 11x - 5} \quad 3. \\
 & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 3x^2 - 4} \quad 4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 3x^2 - 4} \quad 5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 4x^2 + x + 6} \quad 6. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x} - \sqrt{3a}} \quad 7. \\
 & \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x^3 - a^3}}{\sqrt{x-a}} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}
 \end{aligned}$$

8. Экстремум функции. Промежутки монотонности. Направление выпуклости. Точка перегиба

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3x - x^3$ на отрезке $[0; 3]$

Решение. Функция достигает наибольшего и наименьшего значения либо в критических точках, принадлежащих заданному отрезку, либо на концах этого отрезка. Найдем критические точки (т.е. точки в которых производная равна нулю или не существует):

$$y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$$

$$y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 1 \in [0; 3] \quad \text{и} \quad x = -1 \notin [0; 3]$$

Найдем значение функции в этих точках и на концах отрезка

$$y(1) = 2; \quad y(0) = 0; \quad y(3) = -18$$

Выберем из предложенных значений наибольшее и наименьшее.

Итак, наибольшее значение функции на заданном отрезке равно 2 и достигается при $x = 1$, $y_{\text{наиб}}(1) = 2$, а наименьшее значение равно -18 при $x = 3$, $y_{\text{наим}}(3) = -18$.

Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости функции $y = x + 2 - \sqrt[3]{x^5}$.

Решение. 1. Ищем точки x , в которых $y' = 0$ или не существует, и которые лежат в области определения функции:

$$y' = 1 - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}; \quad y'' = -\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}.$$

ласти определения функции:

$$y'' \neq 0 \quad \text{ни при каких} \quad x; \quad y'' \text{ не существует при} \quad x = 0 \in D(y).$$

2. Исследуем точку $x = 0$ на перегиб, определяя знак y'' слева и справа от нее. Запишем это исследование в таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y''	+	0	-
y	$\cup$	2 перегиб	$\cap$

Таким образом, $x = 0$ - абсцисса точки перегиба кривой: $y(0) = 2$. Эта кривая в интервале $(-\infty; 0)$ вогнута, а в интервале $(0; +\infty)$ - выпукла.

6. Найдите асимптоты следующих функций:

$$\text{а) } y = \frac{x}{2x-1} + x; \quad \text{б) } y = xe^{\frac{1}{x}}.$$

$$D(y) = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

Решение. а) Область определения данной функции: Отсюда

следует, что $x = \frac{1}{2}$ - вертикальная асимптота, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-0} \left(\frac{x}{2x-1} + x \right) = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+0} \left(\frac{x}{2x-1} + x \right) = +\infty.$$

Наклонные (невертикальные) асимптоты определяем из условий:

$$y = ax + b, \quad \text{где} \quad a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - ax);$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{(2x-1)x} = 1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{(2x-1)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $y = x + \frac{1}{2}$ - наклонная асимптота.

б) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, следовательно, $x = 0$ - вертикальная асимптота, так как

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\left(\frac{1}{e^x} \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\left(\frac{1}{x} \right)' e^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} e^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} +\infty & \text{при } x \rightarrow +0 \\ 0 & \text{при } x \rightarrow -0 \end{cases},$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = 1.$$

Следовательно, $y = x + 1$ - наклонная асимптота.

Определить интервалы возрастания и убывания функции

$$1. y = x^3 - 12x + 11 \quad 2. y = \sin x \quad 3. y = \frac{2x}{1-x^2} \quad 4. y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$$

Найти экстремум функции, найти ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке

$$5. y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2 \quad [-2; 4] \quad 6. y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \quad [2; 5]$$

$$7. y = x^4 + 8x^3 + 16x^2 \quad [-3; 1]$$

Найти экстремум функции

$$8. y = (x-1)^3(x+1)^2 \quad 9. y = \sqrt[3]{x^2}$$

Определить интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции

$$9. y = 5x^2 + 20x + 9 \quad 10. y = -6x^2 + 8x - 11 \quad 11. y = x^3 \quad 12. y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$$

$$13. y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 45x - 14 \quad 14. y = (x-1)^4 \quad 15. y = e^{-x^2}$$

Найти асимптоты графика функции

$$16. y = \frac{1}{x} \quad 17. y = \frac{2}{x^2 - 4} \quad 18. y = \arctg x \quad 19. y = \frac{x^2 + 1}{2x + 3} \quad 20. y = \frac{2x^2 + 4x\sqrt{x} + 2}{2x + 4}$$

Домашняя работа

Определить интервалы возрастания и убывания функции

$$1. y = x^3 - 3x - 2 \quad 2. y = x^3 \quad 3. y = \operatorname{tg} x \quad 4. y = \frac{2x}{1+x^2} \quad 5. y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$$

6. Найти экстремум функции $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 7x^2 + 24x + 1$, а также наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $[-5; 2]$

Найти экстремум функции

$$7. y = x^4 - \frac{20}{3}x^3 + 8x^2 \quad 8. y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$$

Определить интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции

$$9. y = 3x^2 + x + 1 \quad 10. y = -2x^2 + 8x - 9 \quad 11. y = x^2 + x \quad 12. y = x(x^2 - b^2) \quad 13. y = -x^3 + 15x^2 - x - 250$$

Определить асимптоты графика функции

14. $y = \frac{3}{x-2}$ 15. $y = \frac{x-2}{x+4}$ 16. $y = \frac{x^2-1}{x^4}$ 17. $y = \frac{x}{1+x^2}$

9. Исследование функций и построение графиков

Общее исследование функции

- 1) Найти область определения функции
- 2) Исследовать на непрерывность определенный вид точки разрыва, если они есть
- 3) Определить четность, нечетность, периодичность
- 4) Найти точки пересечения с осями координат
- 5) Найти асимптоты графика функции. Если асимптот нет, то полезно изучить поведение функции в граничных точках области существования, т.е. найти пределы при приближении к этим точкам
- 6) Определить интервалы возрастания и убывания, точки экстремума графика функции.
- 7) Определить интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
- 8) Построение графика функции начинается с построения асимптот, а затем наносятся все замечательные точки.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на некотором промежутке.
2. Как найти интервалы монотонности функции?
3. Дайте определения экстремумов функции.
4. Определите наибольшее и наименьшее значения функции.
5. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
6. Какие точки называются критическими?
7. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.

8. Как ведется исследование функции на экстремум с помощью второй производной?
9. Укажите порядок исследования функции на возрастание и убывание и экстремумы.
10. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции? Укажите порядок решения этой задачи.
11. Определите понятия выпуклость и вогнутость графика функции.
12. Какую точку называют точкой перегиба?
13. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции?
14. Как определить точки перегиба?
15. Что называется асимптотой кривой $y = f(x)$?
16. Как найти асимптоту $y = ax + b$ кривой $y = f(x)$, т.е. как найти a и b ?
17. По какой схеме следует проводить исследование функции и построение ее графика?
18. Для решения каких вопросов исследования функции и построения ее графика:
 - а) не нужны теория пределов и дифференциальное исчисление?
 - б) необходимо уметь вычислять пределы?
 - в) нужна первая производная?
 - г) нужна вторая производная?

Пример .

Исследовать функцию $y = \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение.

Общая схема исследования функций:

1. Найти область определения функции.

- Исследовать поведение функции на концах области определения. Найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в этих точках. Найти вертикальные асимптоты.
- Выяснить, является функция четной, нечетной, периодической.
- Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.
- Найти наклонные асимптоты графика функции.
- Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.
- Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.
- Построить схематический график функции, используя все полученные результаты.

1. Функция не определена, если $x - 1 = 0$, ($x = 1$)

Область определения: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$

2. Т.к. $x = 1$ - точка разрыва функции исследуем поведение функции в этой точке слева и справа

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty$$

Т.к. пределы равны ∞ значит $x = 1$ точка разрыва второго рода.

Следовательно, прямая $x = 1$ - вертикальная асимптота.

1. Проверим функцию на четность, нечетность. Напомним, что функция $y = f(x)$ называется четной (нечетной) если выполнены два условия:

- Область определения симметрична относительно начала координат
- $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Если $y = f(x)$ четная, то график симметричен относительно оси ординат, а для нечетной – относительно начала координат.

$$f(-x) = \frac{(-x+2)^3}{4(-x-1)^2} = -\frac{(x-2)^3}{4(x+1)^2}$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. общего вида.

Функция не является периодической

4. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат

с ОХ: $y = 0$ при $x = -2$;

с ОУ: $x = 0$ при $y = 2$;

Найдем промежутки знакопостоянства функции

$$y < 0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} < 0 \Rightarrow x+2 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2);$$

$$y > 0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} > 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x \in (-2; 1) \cup (1; +\infty)$$

5. Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^3}{4x(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{4};$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4}x \right] = [\infty - \infty] = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 2$$

$$y = \frac{1}{4}x + 2 - \text{наклонная асимптота.}$$

Для $x \rightarrow -\infty$ k и b вычисляются аналогично

6. Найдем точки экстремума функции и промежутки монотонности.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной y' : если в некотором интервале $y' > 0$, то в этом интервале функция возрастает, а если $y' < 0$, то функция убывает в этом интервале.

Функция $y = f(x)$ может иметь экстремум только в тех точках, которые принадлежат области определения и в которых ее производная равна нулю или не существует. Если y' меняет знак с “+” на “-” при переходе через исследуемую точку, то эта точка максимума, если y' меняет знак с “-” на “+” при переходе через исследуемую точку, то эта точка является точкой минимума. Если y' не меняет знак при переходе через точку x_0 , в этой точке экстремума нет.

Найдем все точки из области определения функции $y = f(x)$, в которых производная (y') обращается в ноль или не существует.

$$y' = \frac{3(x+2)^2(x-1)^2 - 2(x-1)(x+2)^3}{4(x-1)^4} = \frac{(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^3}.$$

$$y' = 0 \text{ при } x_1 = -2, x_2 = 7;$$

$$y' \text{ не существует при } x = 1$$

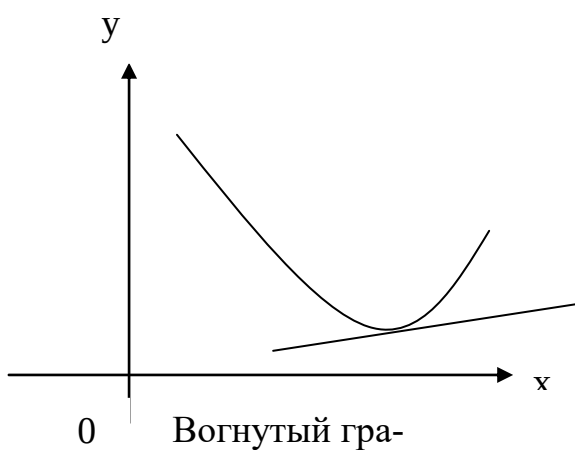
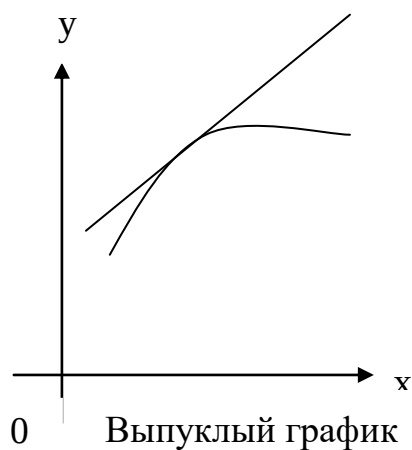
Составим таблицу

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 7)$	7	$(7; +\infty)$
y'	+	0	+	не существует	-	0	+
y		0		не существует		≈ 5	
	возрастает		возрастает		убывает	min	возрастает

Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$, $(7; +\infty)$ и убывает на интервале $(1; 7)$. Точка $x = 7$ есть точка минимума $y_{\min} = y(7) = \frac{729}{144}$

7. Найдем точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости функции

Напомним, что график функции $y = f(x)$ называется выпуклым на интервале $(a; b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит ниже любой своей касательной. График функции $y = f(x)$ называется вогнутым на интервале $(a; b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит выше любой своей касательной.



Точки, в которых функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называются точками перегиба.

Перегиб возможен в точках, в которых y'' равна нулю или не существует. Если $y'' < 0$ на интервале $(a; b)$, то график функции является выпуклым ($\cap$) на этом интервале, если же $y'' > 0$, то на интервале $(a; b)$ график вогнутый ($\cup$).

Найдем точки перегиба $y = f(x)$:

$$y'' = \frac{[2(x+2)(x-7) + (x+2)^2](x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^6} = \frac{54(x+2)}{4(x-1)^4} = \frac{27(x+2)}{2(x-1)^4}$$

$$y'' = 0 \text{ при } x = -2$$

$$y'' \text{ не существует при } x = 1$$

Составим таблицу

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	не существует	$+$
y	$\cap$	0	$\cup$	не существует	$\cup$

Точка $(-2; 0)$ - точка перегиба.

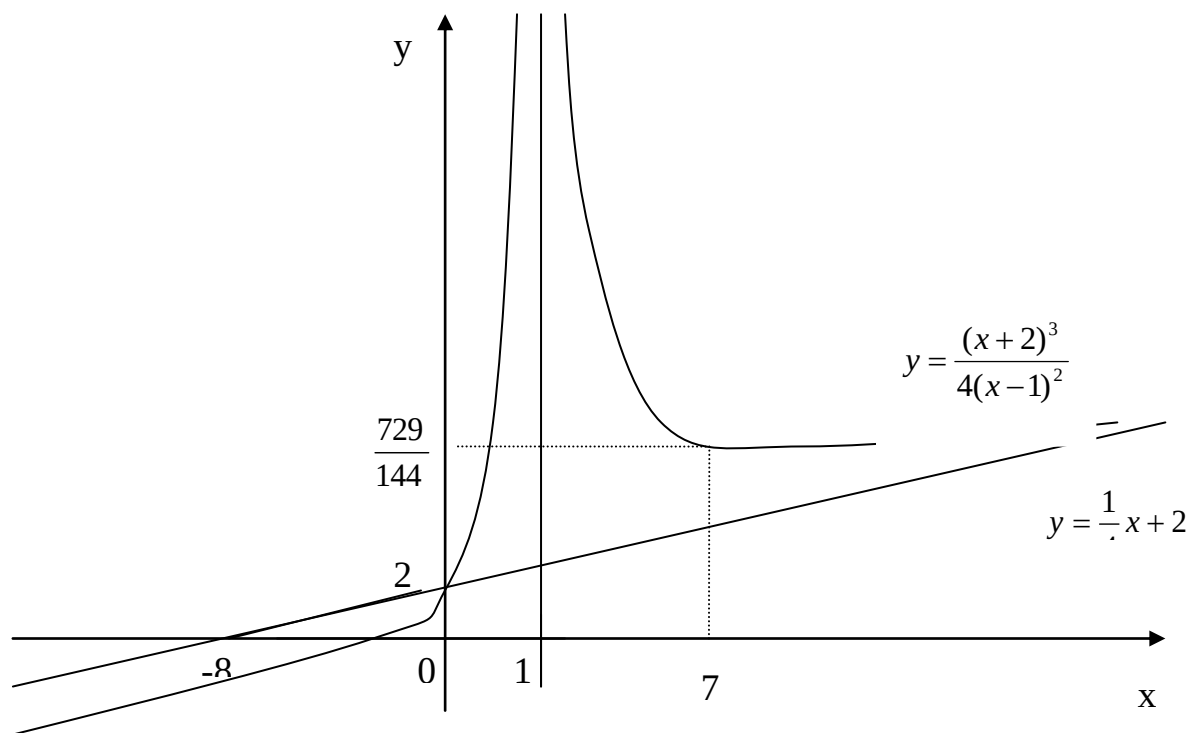
Дополнительные точки:

$$y(-3) \approx -0,01$$

$$y(3) \approx 7,8$$

$$y(-6) \approx -0,3$$

8. Построим график функции, используя результаты исследования.



Замечание:

При построении графика масштабы по оси ОХ и ОУ могут не совпадать.

Исследовать функцию и построить график функции

$$1. y = \frac{x^3}{2(x+1)^2} \quad 2. y = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 3} \quad 3. y = \frac{e^x}{x}$$

Домашняя работа

Исследовать функцию и построить график функции

$$1. y = \frac{3x^3}{3x^2 + 4x + 4} \quad 2. y = \frac{x}{e^x} \quad 3. y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \quad 4. y = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 \quad 5. y = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$6. y = x \cdot \ln x$$

10. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования

Вычислить интегралы:

1. $\int x \, dx$ 2. $\int x^3 \, dx$ 3. $\int x^5 \, dx$ 4. $\int \sqrt{x} \, dx$ 5. $\int \sqrt[3]{x^2} \, dx$ 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 7. $\int 7x^5 \, dx$ 8. $\int 3\sqrt[4]{x^3} \, dx$
9. $\int \frac{6}{x^2} \, dx$ 10. $\int \frac{4}{x^n} \, dx$ 11. $\int 5 \, dx$ 12. $\int (x^3 - 3x^2 + 5x - 4) \, dx$ 13.
 $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^3} - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}} \right) dx$ 14. $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 5\sqrt[3]{x} - 7x + 6}{\sqrt[3]{x}} \, dx$ 15.
 $\int (x^2 + 5)^7 \cdot 2x \, dx$ 16. $\int (3x^3 + 5x^2 - 8) \cdot (9x^2 + 10x) \, dx$ 17. $\int \sqrt{x^2 + 6} \cdot 2x \, dx$ 18.
 $\int (2x^2 + 7)^3 \cdot x \, dx$ 19. $\int \sqrt[3]{x^3 + 8} \cdot x^2 \, dx$ 20. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot x \, dx$ 21. $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$
22. $\int \cos^5 4x \cdot \sin 4x \, dx$ 23. $\int \frac{x^2}{(4x^3 + 9)} \, dx$ 24. $\int \frac{\arctg^3 x}{1 + x^2} \, dx$ 25. $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x} \, dx$ 26.
 $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \cdot \sin x \, dx$ 27. $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$ 28. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} \, dx$ 29. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^4 x}$ 30. $\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx$
31. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5 + \cos x}} \, dx$ 32. $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{3 - \sin^2 x}} \, dx$ 33. $\int \frac{dx}{x + a}$ 34. $\int \frac{2x}{x^2 + 5} \, dx$ 35. $\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} \, dx$
36. $\int \frac{x}{1 - x^2} \, dx$ 37. $\int \frac{dx}{a - x}$ 38. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$ 39. $\int \frac{x^2}{4 + 3x^3} \, dx$ 40. $\int \frac{x}{1 + x} \, dx$ 41.
 $\int \frac{e^x}{5 + e^x} \, dx$ 42. $\int \frac{x^3}{x + 2} \, dx$

43. Какая функция имеет производную $5x^2 - 7x + 4$ и принимает значение, равное 3, при $x=1$?

Домашняя работа

Вычислить интегралы:

1. $\int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt[7]{x^6}} \right) dx$ 2. $\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3} \right) dx$ 3. $\int (3x^2 - 5)^3 \, dx$ 4.
 $\int \frac{x^6 + 3x^5 - 7x^4 + 5\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} \, dx$ 5. $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} \, dx$ 6. $\int \frac{(4 + 2\sqrt{x}) \cdot (x^3 + 5)}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx$ 7.
 $\int (5x + 4)^4 \, dx$ 8. $\int (9 + 7x^2)^5 \, dx$ 9. $\int (8ax^2 + 9bx^3)^{\frac{4}{3}} \cdot (16ax + 27bx^2) \, dx$ 10.

$$\begin{aligned}
& \int \sqrt{4x^2 + 8x} \cdot (2x + 2) dx \quad 11. \int \frac{x^2}{\sqrt{7 + x^3}} dx \quad 12. \int \sqrt{1 - x} dx \quad 13. \int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx \quad 14. \\
& \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad 15. \int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^4}} dx \quad 16. \int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad 17. \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{1 + x^2} dx \quad 18. \\
& \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{7 - \cos^2 x}} dx \quad 19. \int \frac{2x}{\sqrt{1 - 3x^2}} dx \quad 20. \int \frac{dx}{a + bx} \quad 21. \int \frac{x}{a^2 - b^2 x^2} dx \quad 22. \\
& \int \frac{dx}{(1 + x^2) \cdot \arctg x} \quad 23. \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \tg x} \quad 24. \int \frac{\sin x}{5 + 7 \cos x} dx \quad 25. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x} \quad 26. \\
& \int \frac{dx}{x(1 - \ln x)} \quad 27. \int \frac{\sin 2x}{b^2 \cos^2 x + a^2} dx \quad 28. \int \frac{x^4}{x - 1} dx \quad 29. \int \frac{3x - 2}{2x + 3} dx \quad 30. \int \tg x dx \quad 31. \\
& \int \ctg x dx
\end{aligned}$$

31. Какая функция имеет производную $3x^2 + 2x + 1$ и принимает значение, равное 2, при $x=0$?

32. Какая функция имеет производную $5 - 9x + 4x^2$, если известно, что при $x=2$ эта функция равна 50?

11.Метод интегрирование по частям

Вычислить интегралы

$$\begin{aligned}
& 1. \int x \cdot e^x dx \quad 2. \int x \cdot \sin 3x dx \quad 3. \int x^2 \cdot \sin x dx \quad 4. \int \ln x dx \quad 5. \int \arctg x dx \quad 6. \\
& \int \arcsin 2x dx \quad 7. \int x \cdot \ln x dx \quad 8. \int x \cdot \ln x dx \quad 9. \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad 10. \int e^x \cdot \cos x dx \quad 11. \\
& \int e^{3x} \cdot \sin 3x dx \quad 12. \int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx \quad 13. \int \sin x \cdot \ln \cos x dx \quad 14. \int \frac{\ln(\arctg x)}{1 + x^2} dx \quad 15. \\
& \int e^x \cdot \ln(e^x + 1) dx \quad 16. \int (\ln x)^2 dx \quad 16. \int (\arcsin x)^2 dx
\end{aligned}$$

Домашняя работа

Вычислить интегралы

$$\begin{aligned}
& 1. \int x \cdot \cos x dx \quad 2. \int x^3 \cdot \ln x dx \quad 3. \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad 4. \int \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} dx \quad 5. \int \frac{\ln \tg x}{\sin^2 x} dx \quad 6. \\
& \int x \cdot e^{5x} dx \quad 7. \int \sqrt[3]{x} \cdot \ln^2 x dx \quad 8. \int e^{4x} \cdot \sin 5x dx \quad 9. \int \sin(\ln x) dx \quad 10. \int \cos(\ln x) dx
\end{aligned}$$

12. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций

Вычислить интегралы

Повторение

$$\begin{aligned} & 1. \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x}}{\cos^2 2x} dx \quad 2. \int \frac{x^2}{7+3x^3} dx \quad 3. \int \frac{\operatorname{ctg} ax}{\sin^2 ax} dx \quad 4. \int (ax^2+b)^n \cdot x dx \quad 5. \int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} \quad 6. \\ & \int \frac{e^{ax}}{e^{ax}+5} dx \quad 7. \int \frac{\sin 2x}{\sin^n x} dx \quad (n \neq -2) \quad 8. \int \frac{\ln x}{x \cdot \sqrt{7+\ln^2 x}} dx \quad 9. \int \frac{dx}{(1+4x^2)\sqrt{5+\operatorname{arctg} 2x}} \\ & 10. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{a^2+b^2 \sin^2 x}} dx \quad 11. \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{a \cdot \cos^2 x + b \cdot \sin^2 x} dx \quad 12. \\ & \int \frac{b \cos x - c \cdot \sin x}{\sqrt{a+b \cdot \sin x + c \cdot \cos x}} dx \quad 13. \int \frac{x}{a^2-x^2} dx \quad 14. \int \frac{3x}{4+7x^2} dx \quad 15. \int \frac{x^3}{\sqrt{5+4x^4}} dx \\ & 16. \int \frac{e^{3x}}{e^x+2} dx \quad 17. \int \frac{dx}{a+bx} \quad 18. \int \frac{dx}{x \cdot \ln^4 x} \quad 19. \int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx \quad 20. \int \frac{3x}{\sqrt{9-7x^2}} dx \end{aligned}$$

Вычислить интегралы

$$\begin{aligned} & 21. \int 3^x dx \quad 22. \int (\sqrt{2})^x dx \quad 23. \int 4^{-x} dx \quad 24. \int e^{-x} dx \quad 25. \int 2^{3x} dx \quad 26. \int e^{5x} dx \quad 27. \\ & \int e^{kx} dx \\ & 28. \int 5^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad 29. \int e^{\cos x} \cdot \sin x dx \quad 30. \int 7^{x^2} \cdot x dx \quad 31. \int e^{x^3} \cdot x^2 dx \quad 32. \int \frac{2^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx \\ & 33. \int e^{-(x^3+x+3)} \cdot (3x^2+1) dx \quad 34. \int e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx \quad 35. \int (e^x + e^{-x}) dx \quad 36. \int \sin mx dx \quad 37. \\ & \int \cos nx dx \quad 38. \int \operatorname{tg} kx dx \quad 39. \int \operatorname{ctg} px dx \quad 40. \int \frac{1}{\cos^2 kx} dx \quad 41. \int \frac{1}{\sin^2 qx} dx \end{aligned}$$

Домашняя работа

Вычислить интегралы

$$\begin{aligned} & 1. \int (e^{kx} - e^{-kx}) dx \quad 2. \int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad 3. \int e^{\sin x} \cdot \cos x dx \quad 4. \int \left(e^{\frac{x}{3}} + 2 \right)^3 \cdot e^{\frac{x}{3}} dx \quad 5. \\ & \int 9^{x^3+6x^2+3x} \cdot (x^2+4x+1) dx \quad 6. \int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x} dx \quad 7. \int (e^{ay} + e^{-ay})^3 dy \quad 8. \int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx \\ & 9. \int e^{5+\sin^2 2x} \cdot \sin 4x dx \quad 10. \int \frac{dx}{1-\cos x} \quad 11. \int \frac{dx}{1+\cos x} \quad 12. \int \sin x^2 \cdot x dx \quad 13. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad 14. \int \operatorname{tg}(2x-3) dx \quad 15. \int \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \quad 16. \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} \quad 17. \\
& \int \cos e^x \cdot e^x dx \quad 18. \int \frac{dx}{1+\sin x} \quad 19. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \quad 20. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \quad 21. \\
& \int \sin(2x+5) dx \quad 22. \int \frac{dx}{\left(x \cdot \cos \frac{1}{x}\right)^2} \quad 23. \int \frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x} dx \quad 24. \int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx \quad 25. \\
& \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} dx \quad 26. \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} dx \quad 27. \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx \quad 28. \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} \quad 29. \int \operatorname{ctg} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} dx
\end{aligned}$$

13. Метод подстановки

Вычислить интеграл

$$\begin{aligned}
& 1. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \quad 2. \int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x} \quad 3. \int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}} \quad 4. \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \quad 5. \int \frac{x dx}{\sqrt{x}-1} \quad 6. \int \frac{4dx}{3+\sin^2 x} \quad 7. \\
& \int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x} \quad 8. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} \quad 9. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} \quad 10. \int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} \quad 11. \int \sqrt{a^2-x^2} dx \quad 12. \\
& \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx \quad 13. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} \quad 14. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad 15. \int \frac{\cos x}{\sqrt{6-\sin^2 x}} dx \quad 16. \int \frac{dx}{1+\cos^2 x} \\
& 17. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x} \quad 18. \int \frac{dx}{\sin x \cdot \sqrt{4\sin^2 x - 9\cos^2 x}}
\end{aligned}$$

Домашняя работа

Вычислить интеграл

$$\begin{aligned}
& 1. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \quad (x = \sin t) \quad 2. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x = \operatorname{ctg} t) \quad 3. \int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}} \quad (x = z^2) \quad 4. \\
& \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} \quad \left(x = \frac{1}{z}\right) \quad 5. \int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{e^x-1}} dx \quad (x = 2\ln z) \quad 6. \int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+3} \quad \sqrt{x+2} = t \quad 7. \\
& \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \quad (t = 1+\sqrt{x}) \quad 8. \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \quad t = 1+\sqrt{x} \quad 9. \int \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \quad (t = \operatorname{ctg} x) \quad (t = \operatorname{ctg} x)
\end{aligned}$$

14. Интегрирование рациональных функций

Разложить на простейшие дроби следующие рациональные дроби

1. $\frac{x^2 + 2x - 4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}$
2. $\frac{x^3 + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)}$
3. $\frac{3x^3 - 10x^2 - 11x + 21}{x^2 - 5x + 4}$
4. $\frac{x^4 - x^3 - 9x^2 - 10x - 14}{x^2 - 2x - 8}$
5. $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3(x-5)}$
6. $\frac{30x^5 + 90x^4 + 165x^3 + 341x^2 + 271x + 30}{x^3 + 3x^2 + 2x}$
7. $\frac{x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 8x + 5}{(x-2)^3(x+3)^2}$
8. $\frac{-69x^3 - 12x^2 + 475x + 646}{(x+2)^2(x-3)^2}$
9. $\frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2(x+1)^2}$
10. $\frac{3x^2 + 13x + 11}{(x+2) \cdot (x+1)^2}$
11. $\frac{x^2 - x + 14}{(x-4)^3 \cdot (x-2)}$
12. $\frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 4}{(x-2)^2 \cdot x^2}$
13. $\frac{x^3 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2}$
14. $\frac{1}{x^3 + 1}$
15. $\frac{x^2}{1 - x^4}$
16. $\frac{x^2 + 2}{(x-1)(x+1)(x-2)(x^2 + 1)}$

Найти интегралы

17. $\int \frac{dx}{x-3}$
18. $\int \frac{dx}{5-x}$
19. $\int \frac{dx}{2x-1}$
20. $\int \frac{dx}{(x-2)^3}$
21. $\int \frac{dx}{(4x+3)^5}$
22. $\int \frac{dx}{(2x-1)^4}$
23. $\int \frac{dx}{(4-3x)^3}$
24. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$
25. $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$
26. $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 6}$
27. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$
28. $\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 1}$
29. $\int \frac{dx}{x^2 - x + 14}$
30. $\int \frac{dx}{5x^2 + 7x + 2}$
31. $\int \frac{dx}{4x^2 + x + 5}$
32. $\int \frac{dx}{3x^2 - 8x + 9}$
33. $\int \frac{3x+4}{x^2 + 7x + 14} dx$
34. $\int \frac{2x+3}{x^2 + x + 5} dx$
35. $\int \frac{7x-8}{x^2 + 5x + 3} dx$
36. $\int \frac{3x-11}{x^2 + 8x + 18} dx$
37. $\int \frac{x+7}{x^2 + 11x + 42} dx$
38. $\int \frac{x-3}{x^2 - 9x + 23} dx$
39. $\int \frac{7x+4}{x^2 + x + 9} dx$
40. $\int \frac{5x-7}{x^2 + 3x + 8} dx$
41. $\int \frac{4x+6}{x^2 + 3x + 2} dx$
42. $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$
43. $\int \frac{x+2}{x^2 + 4x + 6} dx$
44. $\int \frac{2x+1}{x^2 - 3x + 6} dx$
45. $\int \frac{x+2}{x^2 + 2x + 8} dx$
46. $\int \frac{3x+4}{2x^2 + 4x + 5} dx$
47. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 6}$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+8} dx \quad 48. \int \frac{x+1}{3x^2+x+1} dx \quad 49. \int \frac{x-4}{2x^2-4x+7} dx \quad 50. \int \frac{2x+7}{x^2-x+2} dx \quad 51. \\ \int \frac{3x-5}{2x^2-x+2} dx \quad 52. \int \frac{x+5}{x^2+2x+2} dx \quad 53. \int \frac{5x-4}{5x^2-x+3} dx \quad 54. \int \frac{5x+2}{5x^2+4x+3} dx \quad 55. \\ \int \frac{x+6}{4x^2-x+5} dx \quad 56. \int \frac{3x-2}{x^2-x+11} dx \quad 57. \int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx$$

Домашняя работа по теме «Простейшие дроби»

Разложить на простейшие дроби следующие рациональные дроби

$$1. \frac{x^2+1}{x^3+1} \quad 2. \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} \quad 3. \frac{x^2}{x^4+x^2-2} \quad 4. \frac{1}{1-x^6} \quad 5. \frac{11x-4}{x^2+2x-8} \\ 6. \frac{2x^3+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} \quad 7. \frac{3x^3-24x^2-41x+20}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-2)} \quad 8. \frac{5x^2-25x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ 9. \frac{11x+40}{4(x-4)(x+2)} \quad 10. \frac{3x^2+23x+28}{(x+2)(x+3)(x-4)} \quad 11. \frac{1}{x^4+1}$$

Найти интегралы

$$12. \int \frac{dx}{x-13} \quad 13. \int \frac{dx}{15-3x} \quad 14. \int \frac{dx}{4-7x} \quad 15. \int \frac{dx}{3-8x} \quad 16. \int \frac{3}{4x-9} dx \quad 17. \int \frac{dx}{x^2+x+5} \quad 18. \\ \int \frac{dx}{x^2+2x+6} \quad 19. \int \frac{dx}{x^2+6x+19} \quad 20. \int \frac{dx}{x^2+5x+12} \quad 21. \int \frac{dx}{x^2-7x+20} \quad 22. \int \frac{dx}{x^2-2x+2} \\ 23. \int \frac{2z+1}{2z^2+5z+40} dz \quad 24. \int \frac{2x+7}{x^2+x+2} dx \quad 25. \int \frac{x-7}{x^2+3x+4} dx \quad 26. \int \frac{3x+2}{x^2-2x+10} dx \quad 27. \\ \int \frac{x+1}{5x^2+6x+3} dx \quad 28. \int \frac{3x+8}{4x^2+4x+5} dx \quad 29. \int \frac{3x+1}{x^2+x+1} dx \quad 30. \\ \int \frac{dx}{5x^2+9x+10} \quad 31. \int \frac{dx}{7x^2-3x+5} \quad 32. \int \frac{dx}{9x^2+x+12} \quad 33. \int \frac{dx}{6x^2+7x+15} \quad 34. \\ \int \frac{dx}{3x^2-11x+17}$$

15.Определенный интеграл. Основная формула интегрального исчисления

Вычислить определенные интегралы методом непосредственного интегрирования

$$\begin{aligned}
 &1. \int_1^2 (3x^2 - 1) dx \quad 2. \int_1^2 \frac{dx}{x} \quad 3. \int_1^2 e^x dx \quad 4. \int_{0,25}^1 (\sqrt{x} - x^2) dx \quad 5. \int_0^\pi \sin x \, dx \quad 6. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad 7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \quad 8. \\
 &\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad 9. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2} dx \quad 10. \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{1+x^2} dx
 \end{aligned}$$

Вычислить определенные интегралы по частям

$$\begin{aligned}
 &11. \int_0^\pi x \sin 2x \, dx \quad 12. \int_0^1 x e^{-x} \, dx \quad 13. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx \quad 14. \int_1^e \ln x \, dx \quad 15. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \, dx}{\cos^2 x} \quad 16. \int_1^2 x \cdot \ln x \, dx \quad 17. \\
 &\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx \quad 18. \int_0^1 x^2 \ln x \, dx \quad 19. \int_1^e \ln^2 x \, dx \quad 20. \int_1^e x \cdot \ln^2 x \, dx
 \end{aligned}$$

ДОМАШНЯЯ РАБОТА

I.Вычислить определенные интегралы методом непосредственного интегрирования:

1. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$	2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	3. $\int_0^2 x(3-x) dx$	4. $\int_0^\pi \sin 2x \, dx$	5. $\int_0^\pi \sin^2 x \cdot \cos x \, dx$
6. $\int_1^3 x^3 dx$	7. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$	8. $\int_0^1 \sqrt{1+x} \, dx$	9. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$	10. $\int_1^4 \sqrt{x} \, dx$

III.Вычислить определенные интегралы по частям:

11. $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$	12. $\int_0^\pi e^x \cdot \cos x \, dx$	13. $\int_0^\pi e^x \cdot \sin x \, dx$	14. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \, dx}{\sin^2 x}$
--------------------------------	---	---	---

16. Основные методы вычисления определенного интеграла. Геометрические приложения определенного интеграла

Вычислить определенные интегралы методом замены переменной:

$$\left| \begin{array}{l} x = 2 \sin t \quad x \rightarrow 2 \quad t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ dx = 2 \cos t \, dt \quad x \rightarrow 0 \quad 0 \end{array} \right. \quad \int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t \, dt =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt = 2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \, dx = \left| \begin{array}{l} x=t^2 \quad x \rightarrow 9 \quad t \rightarrow 3 \\ dx=2t \, dt \quad x \rightarrow 4 \quad t \rightarrow 2 \end{array} \right. = \int_2^3 \frac{t}{t-1} 2t \, dt = 2 \int_2^3 \frac{t^2-1+1}{t-1} \, dx = 2 \int_2^3 \frac{t^2-1}{t-1} \, dt + 2 \int_2^3 \frac{dt}{t-1} =$$

$$= 2 \int_2^3 (t+1) \, dt + 2 \ln|t-1| \Big|_2^3 = 2 \cdot \frac{1}{2} (t+1)^2 \Big|_2^3 + 2 \ln 2 = 16 - 9 + 2 \ln 2 = 7 + 2 \ln 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad t \rightarrow 1 \\ x \rightarrow 0 \quad 0 \end{array} = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2) \left(1 + \frac{2t^2}{1+t^2} \right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \cdot t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Вычислить определенные интегралы методом замены переменной:

1. $\int_0^1 \frac{3^x}{1+9^x} \, dx$	2. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$	3. $\int_0^1 \frac{x \, dx}{(x^2+1)^2}$	4. $\int_1^2 \frac{x \, dx}{1+x^2}$	5. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x \, dx}{\sqrt{e^x+1}}$
6. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx$	7. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \, dx$	8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$	9. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$	10. $\int_0^{\ln 2} e^x \sqrt{e^x-1} \, dx$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

11. $y=4-x, \quad y=0$	12. $y=4x-x^2, \quad y=0$	13. $y=\sin x, \quad y=0, \quad 0 \leq x \leq \pi$	14. $y=16-x^4, \quad y=0$	15. $y=-2+3x-x^2, \quad y=0$
16. $y=x^2, \quad y=\frac{x^3}{3}$	17. $y=\frac{1}{1+x^2}, \quad y=\frac{x^2}{2}$	18. $y=x^2, \quad y=x^5$	19. $y=x^2+3x, \quad y=x^2+2x+1$	20. $y=x^2, \quad y=2-x^2$

Определить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Oх фигур, ограниченных линиями:

21. $y^2=9x, \quad y=3x$	22. $y=4x-x^2, \quad y=x$	23. $x^2+y^2=25$	24. $y=x^3$ при $x \in \left[0, \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right]$	25. $9y^2=x(3-x)^2$ при $x \in [0, 3]$
--------------------------	---------------------------	------------------	--	---

26. $x^2 + y^2 = 9$ при $x \in [-2, 1]$	27. $xy = 6, \quad x = 1,$ $y = 0$	28. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$	29. $y = \frac{x}{1+x^2}$ при $x \in [-1, 1]$	30. $xy = 1, \quad xy = 8,$ $y^2 = x, \quad y^2 = 8x$
---	---	--	---	---

Определить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Оу фигур, ограниченных линиями:

31. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$ $y = \pm b$	32. $y^2 = (x+4)^3,$ $x=0$	33. $y = 4x - x^2, \quad y = 0$	34. $x^2 + y^2 = z^2,$ $x^2 + y^2 = 2z^2 - 1$	35. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x,$ $y = 0$
--	--------------------------------------	---	---	--

ДОМАШНЯЯ РАБОТА

Вычислить определенные интегралы методом замены переменной:

1. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x \, dx}{x \sqrt{1 - (\ln x)^4}}$	2. $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$	3. $\int_0^1 (e^x - 1)^4 \cdot e^x \, dx$	4. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx$	5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}$
--	---	--	---	--

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

6. $x^2 + y^2 = 16$	7. $y^2 = x^3, \quad x=3$	8. $y^2 = 2x+4, \quad x=0$	9. $y = \ln x, \quad x=e,$ $y=0$	10. $y = x \sin x,$ $y=0, \quad 0 \leq x \leq \pi$
----------------------------	----------------------------------	-----------------------------------	--	--

Определить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Оу фигур, ограниченных линиями:

11. $y^2 = 2x, \quad x=1$	12. $y = x^2, \quad y^2 = x$	13. $y^2 = 8x, \quad 1 \leq x \leq 2$
----------------------------------	-------------------------------------	--

Определить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Оу фигур, ограниченных линиями:

14. $y^2 = 4-x, \quad x=0$	15. $y = x \sqrt{-x}, \quad x=-4, \quad y=0$
-----------------------------------	---

17. Несобственные интегралы

Вычислить интегралы или установить их расходимость;

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$	2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$	4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$	5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$	7. $\int_0^{+\infty} \arctg x \cdot \frac{dx}{x^2+1}$	8. $\int_0^{+\infty} \frac{3x^2 dx}{x^3+1}$	9. $\int_3^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x}$	10. $\int_0^{+\infty} 2xe^{x^2} dx$
11. $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$	12. $\int_0^{+\infty} x \cos x dx$	13. $\int_0^2 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$	14. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$	

18. Функция нескольких переменных

Найти область определения функции и изобразить ее графически

$$1. z = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad 2. z = \ln(x-y) \quad 3. z = \arcsin(3-x^2-y^2) \quad 4. z = \ln \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

$$5. z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1} \quad 6. z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad 7. z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \quad 8.$$

$$z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arccos(1-y^2) \quad 9. z = \ln \left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \right) \quad 10. z = \frac{\ln(x-4)}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$$

$$11. z = \sqrt{1-x^2+y} + \frac{x^2+3y}{\ln(y-2)}$$

Найти предел или доказать, что он не существует

$$12. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow -1}} \frac{x}{y} \quad 13. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow +\infty}} x^y \quad 14. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} \quad 15. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \quad 16. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2+2y}{y-x^2} \quad 17. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$$

$$18. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x}{x^4+y^2} \quad 19. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{\sqrt{x^2+y^2+6}+x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4+2(1+x^2 y^2)}-\sqrt{x^2+y^2}} \quad 20. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 y^2+1}-1}{x^2+y^2} \quad 21.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy^2} \quad 22. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\sin xy - \sin xy^2}{xy-x} \quad 23. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1+\sin xy)}{\arctg(3x^2)} \quad 24.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(1 + \frac{2}{3x^2+y^2} \right)^{xy}$$

25. Для заданной функции $z = \frac{\ln(1-x-y)}{(x+y)^2}$ вычислить следующие пределы:

а) $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} z$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} z$ в) $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} z$

Домашняя работа по теме Функции нескольких переменных

Найти область определения функции и изобразить ее графически

1. $u = \frac{z}{x+y}$ 2. $z = xy$ 3. $z = x^2 + y^2$ 4. $z = \arcsin 3xy$ 5.

$z = \arcsin(1-x^2-y^2) + \arcsin(2xy)$

6. $z = \ln x + \ln y$ 7. $z = \sqrt{\ln x + \ln y}$ 8. $z = \sqrt{\ln \frac{x^2+y^2}{4}} + \arcsin \frac{y}{x^2} + \sqrt{x}$

Найти предел или доказать, что он не существует

9. $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow -1}} \left(\frac{x}{y} - xy^3 \right)$ 10. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$ 11. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 12. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3x}{x+y^3}$ 13.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x^2-4y^2}{x^2+2x-2xy-4y}$ 14. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$ 15. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{1-\sqrt[3]{1+xy}}$ 16.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ 17. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ 18. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1+xy)^{\frac{1}{x^2+xy}}$ 19. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} (1+xy^2)^{\frac{y}{x^7+xy^2}}$

19. Дифференцируемость функции нескольких переменных

Найти частные производные функций:

1. $z = x^2 + 3xy + 4y^3$ 2. $u = \sin(3x + 5y - 4z)$ 3. $z = e^{\frac{x}{y}}$ 4. $u = x \cdot \ln(1-y^3) + \arcsin z$

5. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ 6. $u = \ln^2(x^2 + y^2 + z^2)$ 7. $z = (x^3 + y^3 - xy^2)^3$ 8. $z = \arcsin \frac{y}{x}$ 9.

$z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}$ 10. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ 11. $\ln(xy + \ln xy)$ 12. $u = \operatorname{arctg} \frac{xy}{z}$ 13.

$u = \ln \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}}$ 14. $u = (xy)^z$

15. Формула Клапейрона $pV=RT$, где R — величина постоянная, связывает для идеального газа его объем V , давление p и абсолютную температуру T . Счи-

тая каждую из этих величин V , p и T функцией, а две другие – независимыми переменными, определить частные производные этих функций.

16. Доказать, что функция $z = y^2 \cdot \sin(x^2 - y^2)$ удовлетворяет уравнению

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$$

17. Вычислить значения частных производных функции

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + x^3} - xyz \text{ в точке } M_0(2, -2, 1).$$

18. Вычислить $u'_x + u'_y + u'_z$ в точке $M_0(1, 1, 1)$, если $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$

19. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = \sin(3u + 2v - 4w)$, а $u = 2x^3$; $v = 3x^2$; $w = x^4$.

20. Найти полную производную $\frac{dz}{dt}$ функции $z = \sin \frac{x}{y}$, где $x = e^t$; $y = t^2$.

21. Определить полную производную функции $u = e^{ax}(y - z)$, $y = a \cdot \sin x$, $z = \cos x$

22. Движение точки задано уравнениями $x = 3t^2$; $y = 2t^4$; $z = 4t^6$. С какой скоростью возрастает ее расстояние от начала координат?

23. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$u = \sqrt{x + y + 3}, \quad x = \ln t, \quad y = t^2, \quad t_0 = 1$$

24. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \ln(u^2 + v^2)$, а $u = x \cdot \cos y$; $v = y \cdot \sin x$.

25. Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$, а $u = x \cdot \cos y$; $v = x \cdot \sin y$

26. Доказать, что функция $z = y\varphi(x^2 - y^2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$

27. Доказать, что функция $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$

28. Вычислить значение производной сложной функции $z = \arccos \frac{x^2}{y}$, где

$$x = 1 + \ln t, \quad y = -2e^{-t^2+1} \text{ при } t_0 = 1 \text{ с точностью до двух знаков после запятой.}$$

29. Продифференцировать сложную функцию $u = x^3 y z^2$, где $x = \sin t$, $y = \sqrt{t}$, $z = t^2$.

30. Найти производные сложной функции $z = \ln(xy^2 - 2x^2 y)$, где $x = \frac{u}{v^2}$, $y = u \cdot \sin v$.

31. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = f(x, u, v)$, $u = \frac{1}{x}$, $v = \ln x$

32. Найти $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y = \sin^2 x$

Домашняя работа

Найти частные производные функций:

1. $z = \frac{x}{y}$ 2. $z = x^3 + y^3$ 3. $z = \cos(2x + 3y)$ 4. $u = 5x + 8y^2 - 7z^3$ 5.

$z = u \cdot \sin x + \sin y$ 6. $z = x^{\sin y}$ ($x > 0$) 7. $u = z^{xy}$ ($z > 0$) 8. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 9.
 $z = e^x \cos y - e^y \sin x$

10. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 11. $z = \arctg \frac{x}{y}$ 12. $z = e^{\arctg \frac{y}{x}}$ 13. $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

14. Известно, что сторона треугольника a определяется через две другие стороны и угол β между ними по формуле $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \beta}$. Найти $\frac{\partial a}{\partial b}$, $\frac{\partial a}{\partial c}$, $\frac{\partial a}{\partial \beta}$.

15. Сила тока согласно закону Ома выражается по формуле $I = \frac{U}{R}$. Найти $\frac{\partial I}{\partial U}$, $\frac{\partial I}{\partial R}$.

16. Доказать, что функция $z = \ln(x^2 + y^2)$ удовлетворяет уравнению $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

17. Доказать, что если $z = \arctg \frac{y}{x}$, то имеет место равенство $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

18. Вычислить значения частных производных функции $z = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M_0(3, 4)$.

Найти полную производную $\frac{du}{dx}$ функции

19. $u = z^2 + y^2 + zy$; $z = \sin x$; $y = e^x$

20. $u = v^2 + vy, \quad v = \ln x, \quad y = e^x$

21. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = u^v, \quad u = \sin x, \quad v = \operatorname{tg} x$.

22. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = uvw, \quad u = \sin x, \quad v = \ln x, \quad w = \operatorname{tg} x$.

23. Найти $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z = x^y, \quad y = \ln x$

24. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = e^{\frac{x}{y}}, \quad y = \sin^3 x$

25. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = \ln(x^2 + y^2), \quad y = e^{x^2}$

26. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, \quad y = \cos x$

27. Определить $\frac{\partial u}{\partial t}; \frac{\partial u}{\partial v}; \frac{\partial u}{\partial w}$, если $u = \ln \cos \frac{xy}{\sqrt{z}}$, где $x = tvw, \quad y = e^{\frac{t}{v}}, \quad z = \sqrt{\frac{tv}{w}}$.

28. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v), \quad u = x^2 + y^2, \quad v = xy$

29. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t), y = y(t)$, при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$u = \operatorname{arctg}(x+y), \quad x = t^2 + 2, \quad y = 4 - t^2, \quad t_0 = 1$

30. Доказать, что функция $z = x + y + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$

31. Доказать, что функция $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \varphi(x - y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$

32. Доказать, что функция $z = e^y \varphi\left(y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$

33. Доказать, что функция $z = x \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$

20. Дифференциал функции нескольких переменных

1. Пусть функция $z = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x; y)$ (окрестностью точки M называется произвольная область, содержащая точку M).

Придадим переменной x произвольное приращение Δx , аргументу y — приращение Δy . Тогда функция z получит наращенное значение $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Величина (функция) $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называется **полным приращением функции** $z = f(M)$ в точке $M(x; y)$. Если задать только приращение аргумента x или только приращение аргумента y , то полученные приращения функции соответственно $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называются **частными**.

Полное приращение функции не равно сумме частных, т.е. $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$

Пример. Найти частные и полное приращение функции $z = xy$.

Решение. $\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x$; $\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y$,

$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$. Получили, что $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Определение. Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

Обозначается частная производная так: z'_x, z'_y , или $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, или $f'_x(x, y), f'_y(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

1. Основные понятия функции многих переменных

Основные понятия.

Определение. Символика. Переменная z называется однозначной функцией двух переменных x и y если каждой паре значений x и y в некоторой области их изменения поставлено в соответствие одно значение z . Переменные x, y называются независимыми переменными (или аргументами), z — зависимой переменной, а символ F означает закон соответствия.

Функциональную зависимость z от x и y записывают в виде:

$$z = F(x, y) \quad (1)$$

Частным значением функции $z = F(x, y)$ называется ее значение, соответствующее какой-либо определенной паре значений аргументов. Если, например, при $x = a$ и $y = b$ функция принимает частное значение c , то пишут $c = F(a, b)$.

Геометрическое изображение. Уравнение (1) геометрически определяет некоторую поверхность. Пара значений x и y определяет на плоскости $ХОУ$ точку $P(x, y)$, $z = F(x, y)$ - аппликату соответствующей точки $M(x, y, z)$ на поверхности. Поэтому говорят, что z есть функция точки $P(x, y)$ и пишут $z = F(P)$.

Область определения функции. Область определения функции $z = F(x, y)$ в общем случае может быть достаточно сложной, ограничимся рассмотрением только тех случаев, когда эта область есть конечная или бесконечная часть плоскости, ограниченная одной или несколькими непрерывными линиями - границами области. Не исключается и тот случай, когда какая-то из границ превращается в одну точку. Область называется замкнутой, если она включает в себя все свои границы. Область D определения функции задается вместе с определением самой функции и обуславливается теми геометрическими, физическими и т.д. условиями, которыми эта функция определена. Если функция задана аналитическим выражением (формулой) без каких-либо дополнительных условий, то под ее областью определения понимают область существования аналитического выражения, т.е. совокупность всех тех точек, в которых данное аналитическое выражение определено и принимает только действительные значения.

Область определения функции трех переменных представляет собой некоторую пространственную область, в частности, некоторый объем. Под пространственной областью понимается часть пространства, ограниченная одной или несколькими поверхностями.

Иными словами, как только расстояние переменной точки $P(x, y)$ от фиксированной точки $P_0(x_0, y_0)$ станет достаточно малым, значение функции z в точке P будет отличаться от числа A меньше, чем на ε , где ε может быть выбрано сколь угодно малым. При этом пишут

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} F(x, y) = A \quad \lim_{x \rightarrow x_0} F(P) = A$$

, или

1. Найти полное приращение Δu и полный дифференциал du функции $u(x, y) = 3x^2 + xy - y^2 + 1$ в точке $(1, 2)$, если а) $\Delta x = 1, \Delta y = 2$ б)

$\Delta x = 0,1, \Delta y = 0,2$ в) $\Delta x = 0,01, \Delta y = 0,02$

Найти частные производные, частные дифференциалы и полный дифференциал первого порядка

$$2. z = \ln(x^2 + y^2) \quad 3. z = x^y \quad 4. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad 5. z = \sin(x^2 y) \quad 6.$$

$$z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \quad 7. u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad 8. u = \frac{\operatorname{arctg} y}{1 + x^2} \quad 9. u = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y} \quad 10.$$

$$u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad 11. u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$$

Найти приближенные значения выражений

$$12. 1,03^{3,001} \quad 13. \ln(\sqrt{1,04} + \sqrt[3]{0,94} - 1) \quad 14. \sin 31^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ$$

15. Для вычисления объема цилиндра были вычислены его высота и диаметр основания. При этом оказалось, что высота $h = 60$ см, а диаметр $D = 50$ см, и границы ошибок,

допущенных при измерении, $\Delta h = \Delta D = 0,1$ см. Найти границу ошибки ΔV в объеме цилиндра, вычисленном по этим данным

16. Для вычисления удельного веса тела его взвешивают и измеряют его объем. Оказывается, что вес $P = 326$ г, а объем $V = 126$ см³, при этом границы ошибок величин P и V равны $\Delta P = 0,5$ г, $\Delta V = 1$ см³. Определите границу ошибки ΔD в удельном весе D , вычисленном по этим данным.

Домашняя работа по теме «Дифференциал ФНП»

1. Найти полное приращение и полный дифференциал этой функции

$$u(x, y) = x^3 y^2 \text{ в точке } (2, 1), \text{ при а) } \Delta x = -0,1, \quad \Delta y = -0,1 \quad б)$$

$$\Delta x = -0,01, \quad \Delta y = -0,01$$

Найти частные производные, частные дифференциалы и полный дифференциал первого порядка

$$2. z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad 3. z = y^{x^2} \quad 4. z = \sin \frac{y}{x} \quad 5. z = \frac{x^2 + 4}{y} \quad 6. z = \frac{ay - bx}{by - ax} \quad 7.$$

$$z = x \sin y + y \sin x$$

$$8. z = x + y e^{\frac{x}{y}}$$

Вычислить приближенные значения выражения

$$9. 0,97^{2,02} \quad 10. 1,003^{2,07} \quad 11. \sqrt{6,03^2 + 8,04^2}$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке

$$M_0$$

$$1. z = x^2 + 3y^2 \quad M_0(1; 1)$$

2. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1 = 0$ $M_0(1; 2; 2)$

3. $x^2 + 3y^2 - z^2 - 2yz + x = 5$ $M_0(1; -1; 2)$

4. $z = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4$ $M_0(-1; 0; 1)$

5. К поверхности $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $2x + 4y + z = 0$

6. Определить уравнение той касательной плоскости к эллипсоиду

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, которая отсекает равные отрезки на координатных осях.

7. В какой точке эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

Домашняя работа

Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке M_0

1. к эллиптическому параболоиду $z = 2x^2 + y^2$ в точке $M_0(1; 1; 3)$

2. к поверхности $z = x^4 + 2x^2y - xy + x$ в точке $M_0(1; 0; 2)$

3. к гиперболическому параболоиду $z = xy$ в точке $M_0(1; 2; 2)$

4. $x^2 + y^2 - x + 2y + 4z - 13 = 0$ $M_0(2; 1; 2)$

5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $M_0(x_0; y_0; z_0)$

6. К поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 = 0$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x - y + 2z = 0$

21. Производные и дифференциалы высших порядков

Найти частные производные второго порядка:

1. $z = x^4 + 3x^3y - 4x^2y^2 + 5xy^3 - y^4$ 2. $z = xy \ln \frac{x}{y}$ 3. $z = \sin x \operatorname{tg} y$

$$3. z = 3x^2 + 2xy^2 - 4xy + x^2y - y^3 \quad 4. u = e^{xyz} \quad 5. u = \sin\left(\frac{xy}{z}\right) \quad 6. z = \arcsin(x + y)$$

$$7. z = x \sin xy + y \cos xy \quad 8. z = \ln \operatorname{tg} \frac{x+y}{x-y} \quad 9. z = x^2 \ln(x+y) \quad 10. z = x^2 \sin \sqrt{y} \quad 11.$$

$$z = x^y$$

$$12. \text{Определить производную } \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z} \text{ функции } u = \sin(xyz).$$

$$13. \text{Показать, что функция } z = \ln r, \text{ где } r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \text{ удовлетворяет} \\ \text{уравнению Лапласа } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Домашняя работа

Найти частные производные второго порядка:

$$1. z = xy \quad 2. z = ye^x \quad 3. z = \sin x \cdot \cos 2y \quad 4. z = y \ln x \quad 5. z = e^{x+y^2} \quad 6. \\ z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{xy} \quad 7. z = \frac{y^2}{1+x} \quad 8. z = \ln(x^2 + y^2) \quad 9. z = e^{xy}$$

Дифференциалы высших порядков

Найти дифференциал второго порядка d^2z функции z :

$$1. z = x^2y^2 \quad 2. z = 2x^2 - 3xy - y^2 \quad 3. z = 5^{2x-3y} \quad 4. z = x^y, \text{ где } x = uv; \quad y = u + v$$

$$5. z = z(x; y); \quad x = \varphi(u; v); \quad y = \psi(u, v) \quad 6. z = \frac{y \cdot \sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$7. \text{Найти дифференциал третьего порядка } d^3z \text{ функции } z = \cos(x + 2y^2)$$

Домашняя работа

Найти дифференциал второго порядка d^2z функции z :

$$1. z = x^3y^3 \quad 2. z = e^{x-y^2} + \cos x \quad 3. z = y \cdot \ln x \quad 4. z = xy \quad 5. z = e^{ax+by} \quad 6. z = y + e^{xy} \\ 7. z = z(u; v), \text{ где } u = x^2 + y^2; \quad v = xy$$

$$8. \text{Найти дифференциал третьего порядка функции } z = \sin(2x + y) \text{ при}$$

$$x = \frac{\pi}{2}; \quad y = 0.$$

22. Экстремум функции нескольких переменных

Экстремум функции нескольких переменных

Исследовать на экстремум функцию нескольких переменных

1. $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$ 2. $z = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y$ 3.

$z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 6y$

4. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ 5. $z = xy(x + y - 2)$ 6.

$u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y - 2z$

7. $u = -2x^2 - y^2 + 2z^2 - 2xy + 3xz - 2yz - 4x + 8y + z + 48$.

$z = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 5x - y + 2$

9. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 10. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ 11. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$ 12.

$z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ 13. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ 14. $z = 4 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ 15. $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$

Домашняя работа

Исследовать на экстремум функцию нескольких переменных

1. $z = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 5y$ 2. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ 3.

$z = x^3y^2(12 - x - y)$

4. $z = xy(xy(x + y - 1))$ 5. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ 6.

$u = x^2 + y^2 + x^2 - xy + x - 2z$

7. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$ 8. $z = xy^2 - xy - xy^3$ ($x > 0, y > 0$)

Наибольшее и наименьшее значение функции нескольких переменных

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = z(x; y)$ в области D , ограниченной заданными линиями

1. $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ $D: x = 0, y = 0, x + y + 5 = 0$

2. $z = xy - y^2 + 3x + 4y$ $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$

3. $z = x^3 + 33xy^2 + 66y^2 - 147x$ $D: x = 0, y = 0, 3x + y = 27$

4. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$

5. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$

6. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ **D**: $x=3, y=0, x-y+1=0$
7. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$ **D**: $x=0, y=0, x+y-1=0$
8. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$ **D**: $x=0, x=1, y=0, y=6$
9. Доказать, что из всех треугольников, имеющих данный периметр $2p$, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.
10. Канал, подводящий воду к турбине, имеет в сечении равнобедренную трапецию, площадь которой задана и равна S . Определить глубину канала и угол α откоса так, чтобы периметр, смоченный водой, был наименьшим*.

Домашняя работа

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в прямоугольнике с вершинами $A(1, -3), B(1, 2), C(4, 2), D(4, -3)$,
Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = z(x, y)$ в области D , ограниченной заданными линиями
2. $z = xy(x + y + 1)$ **D**: $x=1, x=2, y=\frac{1}{x}, y=-\frac{3}{2}$
3. $z = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x + y)$ **D**: $x=0, x=2, x=\pi, y=0, y=\pi$
4. $z = xy(x + y + 1)$ **D**: $x=1, x=2, y=\frac{1}{x}, y=-\frac{3}{2}$
5. $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ **D**: $x=0, y=\frac{x^2}{2}, y=2$
6. $z = x^3 + 33xy^2 - 108x + 165y^2$ **D**: $x=0, y=0, 3x + y = 48$
7. $z = x^3 + 15xy^2 - 27x - 30y^2$ **D**: $x=0, y=0, 3x + y = 27$
8. $z = x^3 + 63xy^2 - 75x + 126y^2$ **D**: $x=0, y=0, 2x + y = 38$
9. Число a разделить на три слагаемых так, чтобы произведение этих трех слагаемых было наибольшим.

23.Метод множителей Лагранжа

Найти условный экстремум функции $z = z(x, y)$ при заданном уравнении связи

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1. $z = 5x^2y$ $2x + y - 3 = 0$ | 5. $z = x^2 - y^2$ $2x - y - 3 = 0$ |
| 2. $z = x + y - 1$ $y^3 - 6xy + x^3 = 0$ | 6. $z = xy^2$ $x + 2y - 1 = 0$ |
| 3. $z = xy$ $x + y - 1 = 0$ | 7. $z = x^2y$ $2x - y + 2 = 0$ |
| 4. $z = 2x^2 + y^2$ $x + 2y - 1 = 0$ | 8. $z = 3xy$ $x - y + 3 = 0$ |

Домашняя работа

1. $z = 2xy \quad x - 2y + 1 = 0$

2. $z = x^2 + 2y^2 \quad 2x + 3y - 4 = 0$

3. $z = 3x^2 - y^2 \quad x - 2y + 1 = 0$

4. $z = 4xy^2 \quad 3x - y + 2 = 0$

5. $z = 3x^2y \quad x + 2y + 3 = 0$

24. Метод наименьших квадратов

ВАРИАНТ – 1

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую.

x_i	1	12	20	30	32
y_i	8	9	11	13	14

ВАРИАНТ – 2

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую.

x_i	21	23	31	38	45
y_i	-9	-7	-13	-16	-18

ВАРИАНТ – 3

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	3	5	8	11	23
y_i	-4	-7	-9	-13	-18

ВАРИАНТ – 4

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	11	21	34	43	49
y_i	1	2	4	8	9

ВАРИАНТ – 5

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	5	8	12	13	40
y_i	6	7	9	9	16

ВАРИАНТ – 6

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	10	11	13	16	18
y_i	9	8	6	3	2

ВАРИАНТ – 7

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	12	17	33	41	43
y_i	-3	-5	-17	-23	-24

ВАРИАНТ – 9

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	7	9	13	16	23
y_i	7	8	9	10	12

ВАРИАНТ – 11

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	-35	-32	-31	-25	-15
y_i	-14	-13	-12	-9	-4

ВАРИАНТ – 13

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	2	2,5	3	3	3,5
y_i	11	13	14	14,5	15

ВАРИАНТ – 15

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	7	9	12	13	17
y_i	17	11	8	1	-5

ВАРИАНТ – 8

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	1	3	5	12	21
y_i	10	11	12	14	16

ВАРИАНТ – 10

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	32	41	53	67	73
y_i	16	14	11	9	7

ВАРИАНТ – 12

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	11	13	17	19	22
y_i	13	14	15	16	17

ВАРИАНТ – 14

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	2	3	4,5	5	6
y_i	1	-4	-12	-16	-18

ВАРИАНТ – 16

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	1	2,5	3,5	4	5
y_i	3	5	5	7	8

ВАРИАНТ – 17

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	-11	-5	2	4	7
y_i	2	3,5	5	6	7

ВАРИАНТ – 19

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	-12	-7	3	2	2
y_i	6	5	0	0,5	-1

ВАРИАНТ – 21

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	2	3	3,5	4	5
y_i	3,5	8	9	13	15

ВАРИАНТ – 23

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	1	-6	-20	-30	-50

ВАРИАНТ – 25

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	-1	2	5	9	12
y_i	-7	-6	-4,5	-3	-1

ВАРИАНТ – 18

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	2	3	4	4,5	6
y_i	-3	-4	-5	-5	-6

ВАРИАНТ – 20

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	-11	-7	-5	-1	12
y_i	2	2,5	3	4	5

ВАРИАНТ – 22

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	-10	-8	-2	-1	2
y_i	24	20	5	1	-6

ВАРИАНТ – 24

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	4,5	5	5,5	6	6,5
y_i	8,5	10	10,5	13	13

ВАРИАНТ – 26

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

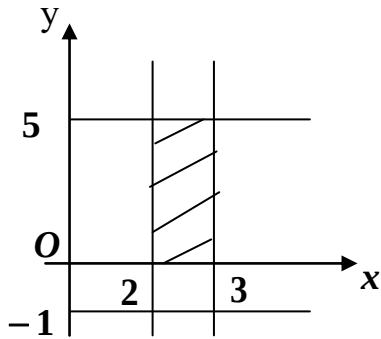
x_i	-3	-1,5	-1	1	2
y_i	14	8	5	-2	-5

25. Двойные интегралы

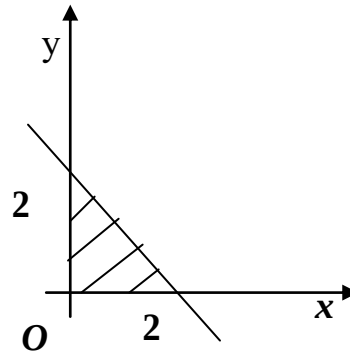
Изменение порядка интегрирования

Расставить пределы интегрирования

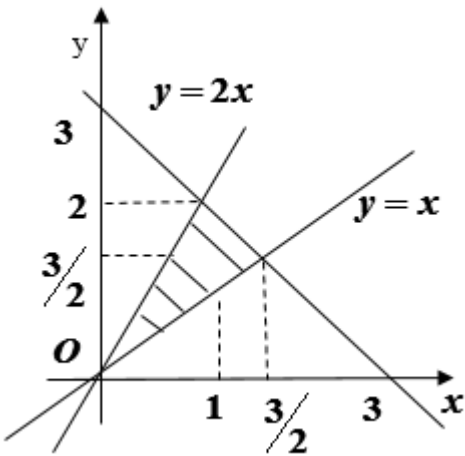
1.



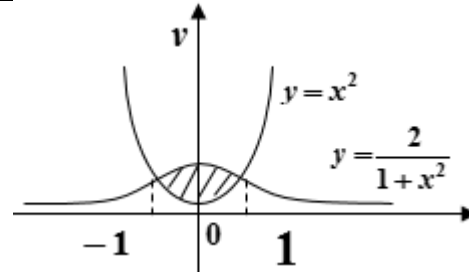
2.



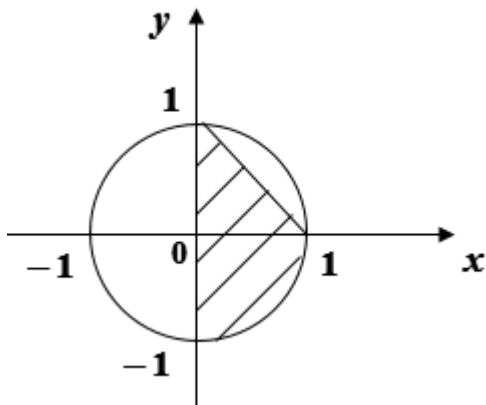
3.



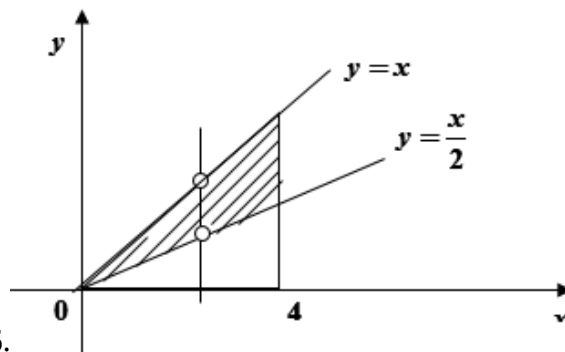
4.



5.



6.



$$\iint_{(P)} f(x, y) dx dy$$

Записать двойной интеграл ^(P) как повторный

7. P: $x=1, \quad x=7, \quad x-y+5=0, \quad x-y=0$

8. P: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

9. P: треугольник OAB с вершинами $O(0;0), \quad A(2;1), \quad B(3;-2)$

10. Р: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

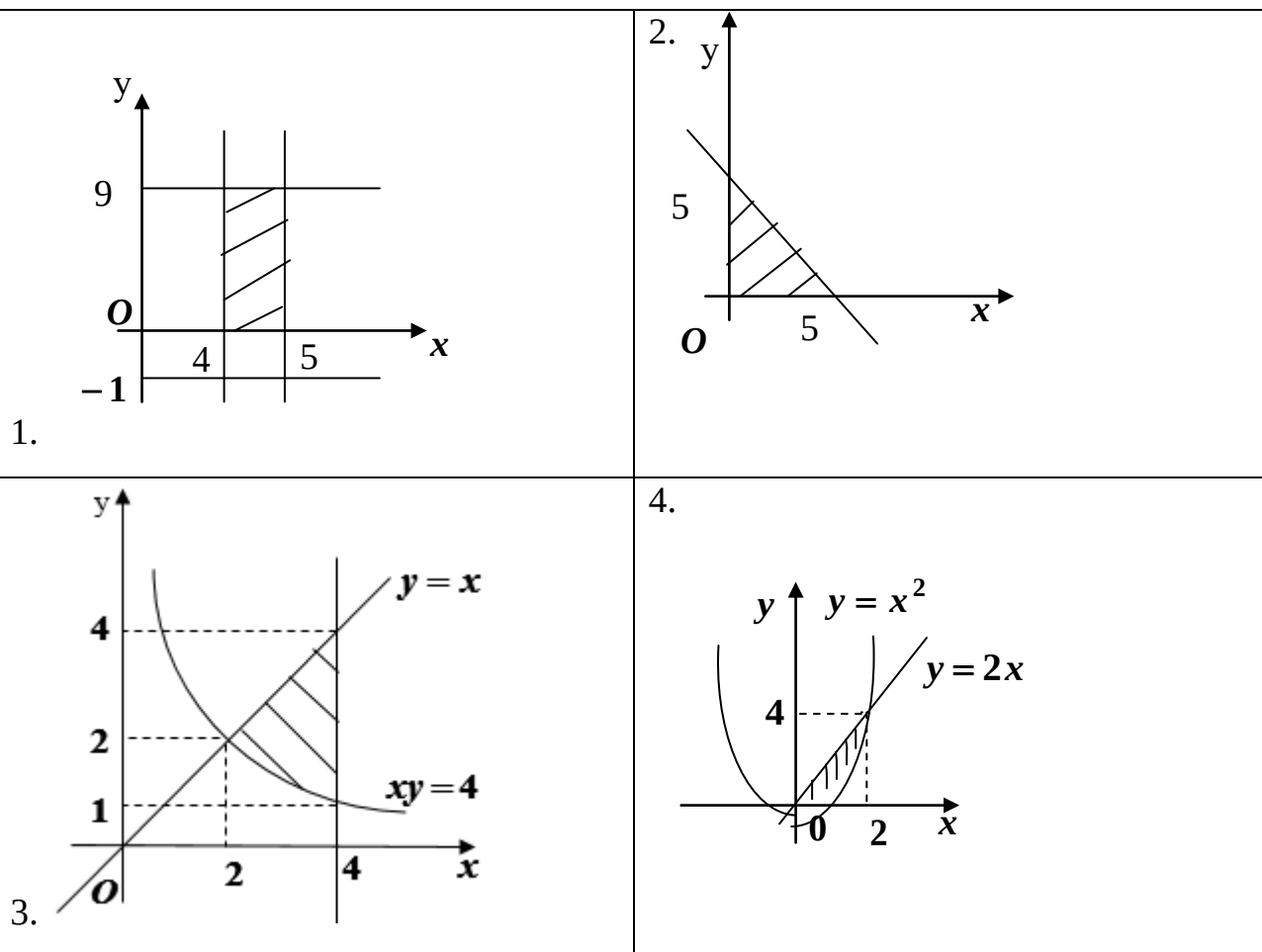
Изменить порядок интегрирования

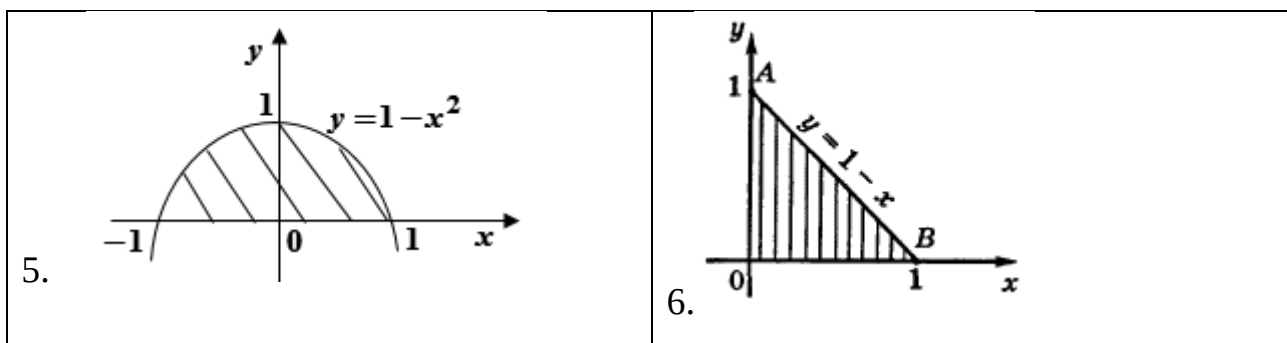
11. $\int_{-1}^5 dx \int_3^4 f(x, y) dy$

12. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}} f(x, y) dy$

Домашняя работа «Изменение порядка интегрирования»

Расставить пределы интегрирования





Записать двойной интеграл $\iint_{(P)} f(x, y) dx dy$ как повторный

7. P: $x=1, \quad x=7, \quad y=3, \quad y=5$

8. P: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$

9. P: треугольник OAB с вершинами $O(0;0), \quad A(3;4), \quad B(5;-1)$

10. P: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Изменить порядок интегрирования

11. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$

12. $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$

26. Вычисление двойных интегралов

Вычислить двойные интегралы

1. $\iint_{(P)} \frac{x^2}{1+y^2} dx dy; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$

$$2. \iint_{(P)} x^2 y \cdot \cos(xy^2) dx dy; \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq 2$$

$$3. \iint_D \frac{y^2}{1+x^2} dx dy, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$4. \iint_D \frac{y}{x} dx dy, \text{ если область } y = x; y = 2x, \quad x = 2; x = 4$$

$$5. \int_2^4 dy \int_0^y \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx$$

$$6. \int_0^1 dx \int_x^{2x} (x - y + 1) dy$$

$$7. \iint_{(D)} xy dx dy; \quad x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y = b$$

$$8. \iint_{(D)} xy dx dy \quad y = x - 4 \text{ и } y^2 = 2x.$$

$$9. \int_{-1}^5 dx \int_3^4 xy dy$$

$$10. \int_0^3 dx \int_3^4 (x + y) dy$$

$$11. \iint_{(P)} (x^2 + y) dx dy \quad P: y = x^2, \quad y^2 = x$$

Домашняя работа по теме Вычисление двойных интегралов

Вычислить двойные интегралы

$$1. \iint_{(P)} x \, dx dy, \quad y = \sqrt{x}, y = x$$

$$2. \iint_{(P)} 2y \, dx dy \quad y = -x^3, y = 1, x = 0$$

$$3. \iint_{(P)} \frac{y^2}{x^2} \, dx dy, \quad y = x, xy = 1, y = 2$$

$$4. \iint_{(P)} (2x + y) \, dx dy, \quad x + y = 3, y = 0, x = 0$$

$$5. \iint_{(P)} (2y^3 - x) \, dx dy, \quad y = x + 2, y = 0, x = 0$$

$$6. \iint_{(P)} (xy - 4x + 2y - 1) \, dx dy, \quad x = 1, y = x^2, y = 0 \quad 7. \int_2^4 dx \int_3^4 2xy^2 \, dy$$

$$8. \int_1^2 dx \int_{-1}^1 (3x^2 + y^3) \, dy$$

$$9. \iint_{(P)} \cos(x + y) \, dx dy \quad P: x = 0, \quad y = \pi, \quad y = x$$

27. Замена переменной в двойном интеграле

1. Вычислить интеграл $\iint_{(P)} dx dy$ где область (P) ограничена параболой

$y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$ и гиперболами $xy = 1$, $xy = 2$.

2. Вычислить интеграл $\iint_{(P)} (x^2 + y^2) \, dx dy$ где область (P) ограничена прямыми

$y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 2a$ ($a > 0$)

3. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_{(P)} f(x, y) \, dx dy$, где

а) P – круг $x^2 + y^2 \leq R^2$

б) P – область, ограниченная линиями $x^2 + y^2 = 4x$; $x^2 + y^2 = 8x$; $y = x$; $y = 2x$

в) P – треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$; $y = 0$; $y = 1 - x$.

Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты

$$4. \iint_{(P)} xy^2 dx dy \quad P: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 16, x \geq 0, y \leq 0$$

$$5. \iint_{(P)} \frac{y-4x}{x^2+y^2} dx dy \quad P: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 9, x \leq 0, y \geq 0$$

$$6. \iint_{(P)} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy \quad P: x^2 + y^2 = R^2, 0 < R \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$$

Домашняя работа «Замена переменных в двойном интеграле»

1. Вычислить интеграл $\iint_{(P)} (y-x) dx dy$ где область (P) ограничена прямыми

$$y = x+1, y = x-3, y = -\frac{x}{3}+2, y = -\frac{x}{3}+4.$$

2. Вычислить интеграл $\iint_{(P)} (y+x) dx dy$ где область (P) ограничена прямыми

$$y = x, y = 2x, x + y = 2.$$

3. В интегралах перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования

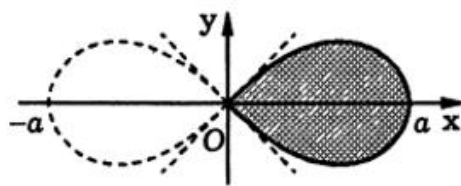
$$\iint_{(P)} f(x, y) dx dy \quad P: x \geq 0, \text{ область, ограниченная}$$

$$\text{лемнискатой } (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты

$$4. \iint_{(P)} dx dy \quad P: x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3} \cdot x$$

$$5. \iint_{(P)} dx dy \quad P: x^4 = a^2(x^2 - 3y^2) \quad (a > 0)$$



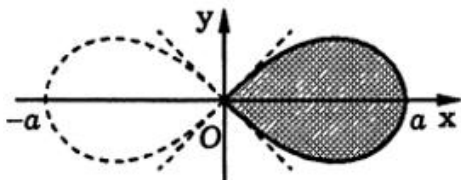
28. Приложения двойных интегралов

1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 - 2y = 0, x = 0 (x \geq 0)$, с помощью двойного интеграла, используя полярную систему координат

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 3x, 3x + y - 4 = 0$

3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x, y = 0, x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0$

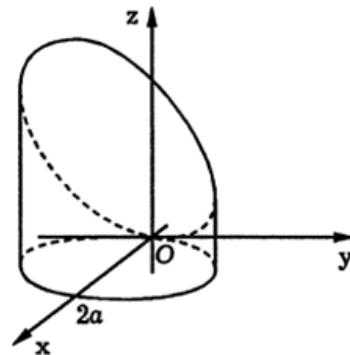
4. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (Лемниската Бернулли).



5. Найти объем тела, ограниченного плоскостями координат, плоскостями $x=4$, $y=4$ и параболоидом вращения $z = x^2 + y^2 + 1$
6. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $y=0$, $z=0$, $3x+y=6$, $3x+2y=12$, $x+y+z=6$
7. Найти объем тела, ограниченного плоскостями $z = \sqrt{1-y}$, $y=x$, $y=-x$, $z=0$
8. Найти площадь части поверхности $z^2 = 4x$, вырезанной цилиндром $y^2 = 4x$ и плоскостью $x=1$.
9. Вычислить площадь части поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, вырезанной поверхностью $(x^2 + y^2)^2 = R^2(x^2 - y^2)$.
10. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$, осью Ox и прямой $x = \frac{\pi}{4}$.

Домашняя работа по теме *Приложения двойных интегралов*

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $xu=1$, $xu=2$, $y=x^2$, $y=2x^2$
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x$, $y = x$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$
4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y = 1 + x^2 + z^2$, $y = 5$
6. Вычислить площадь цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, заключенной между плоскостью xOy и конусом $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ над плоскостью xOy .
7. Вычислить объем тела, ограниченного трехосным эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



29.Тройные интегралы

Тройные интегралы

Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz$,

если область V ограничена указанными поверхностями. Начертить область интегрирования.

1. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x + 3y = 6, z = 3 + x^2 + y^2$

2. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y = 4, z = 16 - x^2 - y^2$

3. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x + 3y + 4z = 12$

4. $x = 1, y = 4x, z \geq 0, z = \sqrt{3y}$

5. $x = 1, y = 3x, y \geq 0, z \geq 0, z = 2(x^2 + y^2)$

6. Вычислить повторный интеграл $\int_0^2 dx \int_{-1}^2 dy \int_1^e \frac{xy^3}{z} dz$

7. Вычислить тройной интеграл $\iiint_{(V)} (x + y + z) dx dy dz$, где V – параллелепипед,

ограниченный плоскостями $x = -1, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 2$

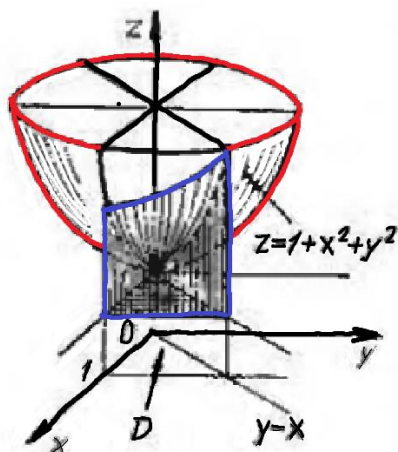
8. Вычислить интеграл $\iiint_{(V)} x dx dy dz$, где V – тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $2x + 2y + z - 6 = 0$

9. Вычислить тройной интеграл $\iiint_{(V)} (x + y + z) dx dy dz$, где V – пирамида, ограни-

ченная плоскостью $x + y + z = 1$ и координатными плоскостями

10. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$z = y^2, y = 1 - x, x = 0, y = 0, z = 0$



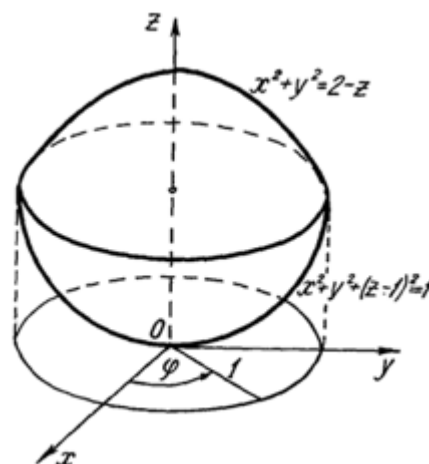
8. Вычислить тройной интеграл $\iiint_{(V)} (2x + y) dx dy dz$,

где V – ограничена поверхностями:

$y = x, y = 0, x = 1, z = 1, z = 1 + x^2 + y^2$.

9. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ и $x^2 + y^2 = 2 - z$

9. Вычислить тройной интеграл $\iiint_{(V)} z^2 dx dy dz$, где V – тело, ограниченное поверхностью, образованной вращением кривой $y = \sqrt{z}$ вокруг оси Oz плоскостью $z=h$ ($h>0$).



Домашняя работа

Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz$, если область V ограничена указанными поверхностями. Начертить область интегрирования.

1. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 5x + y = 5, z = x^2 + y^2$

2. $x = 3, y \geq 0, z \geq 0, y = 2x, z = 4\sqrt{y}$

3. $x = 2, y = 4x, y = 3\sqrt{x}, z \geq 0, z = 4$

4. Вычислить интеграл $\int_0^2 dz \int_0^z dy \int_0^y xyz dx$

5. Вычислить тройной интеграл $\iiint_{(V)} (xyz) dx dy dz$, если область V ограничена плоскостью $x + y + z = 1$ и координатными плоскостями.

Вычисления тройных интегралов

1. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V (x + y) dx dy dz$ по области V , ограниченной

плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0,$
 $x = 1, y = 1, z = 1.$

2. Вычислить $\iiint_V x^2 z dx dy dz$, если V ограничена плоскостями

$x = 0, y = 0, z = 2.$
 $x = 3, y = 2, z = 5.$

3. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V (1-y)xz dx dy dz$, если область V ограничена плоскостями $x=0, y=0, z=0, z=1-x-y$.

4. Вычислить $\iiint_{(V)} x dx dy dz$, если область – тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $2x+2y+z-6=0$

5. Вычислить $\iiint_v y \cos(z+x) dx dy dz$, если область

$$V: y = \sqrt{x}, y=0, z=0, x+z = \frac{\pi}{2}$$

Домашнее задание по теме *Вычисления тройных интегралов*

1. Вычислить тройной интеграл $\iiint_{(V)} xy dx dy dz$,

$$x=1, x=2, y=-2, y=-1, z=0, z=\frac{1}{2} \quad \text{Ответ: } -\frac{9}{8}$$

2. Вычислить тройной интеграл $\iiint_{(V)} (x+2y+3z+4) dx dy dz$,

$$x=0, x=3, y=0, y=2, z=0, z=1 \quad \text{Ответ: } 54$$

3. Вычислить тройной интеграл $\iiint_{(V)} x dx dy dz$,

$$x=0, y=0, z=0, y=1, x+z=1 \quad \text{Ответ: } \frac{1}{6}$$

30. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть функция $f(x;y;z)$ определена и непрерывна в замкнутой области (V) пространства $Oxyz$, а функции

$$x = x(u;v;w); y = y(u;v;w); z = z(u;v;w)$$

непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой области (T) пространства uvw и взаимно однозначно отображают область (V) на область (T) и обратно, тогда имеет место формула

$$\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{(T)} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \cdot |I(u, v, w)| du dv dw,$$

где якобиан отображения представляет собой определитель:

$$I(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Найти объем наклонного параллелепипеда, заданного неравенствами:

$$\begin{cases} 0 \leq 2x - 3y + z \leq 5 \\ 1 \leq x + 2y \leq 4 \\ -3 \leq x - z \leq 6 \end{cases}$$

Решение.

$$\text{Введем новые переменные} \begin{cases} u = 2x - 3y + z \\ v = x + 2y \\ w = x - z \end{cases}$$

Вычислим якобиан обратного преобразования

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

Тогда якобиан прямого преобразования равен

$$|I(u, v, w)| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \left| \frac{1}{-9} \right| = \frac{1}{9}$$

Вычисляем объем тела:

$$V = \iiint_{(U)} |I(u, v, w)| du dv dw = \iiint_{(U)} \frac{1}{9} du dv dw = \frac{1}{9} \int_0^5 du \int_1^4 dv \int_{-3}^6 dw = \frac{1}{9}$$

Переход к сферическим координатам в тройном интеграле

Вычисление тройных интегралов в сферических координатах

	Сферическая система координат $\begin{cases} x = \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = \rho \cdot \cos \theta \end{cases} \quad J = \rho^2 \sin \theta$
Обобщенные сферические координаты $\begin{cases} x = a\rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = b\rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = c\rho \cdot \cos \theta \end{cases} \quad dV = abc \cdot \rho^2 \cdot \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$	

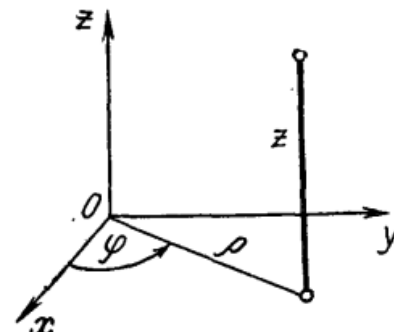
1. Вычислить тройной интеграл $\iiint_{(V)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, если область V ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = z$.
2. Вычислить $\iiint_{(V)} \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \, dx \, dy \, dz$, если область интегрирования ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскостью $y = 0$ ($y \geq 0$)
3. Вычислить интеграл $\iiint_{(V)} xyz \, dx \, dy \, dz$, где область (V) представляет собой часть шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, расположенную в 1 октанте.
4. Найти интеграл $\iiint_{(V)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx \, dy \, dz$, если область (V) ограничена эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
5. Вычислить интеграл $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^2 dz$

31. Переход к цилиндрическим координатам в тройном интеграле

Цилиндрическая система координат

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$J = \rho$$



1. Найти объем области V , заданной неравенствами $0 \leq z \leq 2$, $0 \leq y + z \leq 5$, $0 \leq x + y + z \leq 10$

2. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V (x^2 + z^2) dx dy dz$, если область V ограничена плоскостью $y = 2$ и параболоидом $x^2 + z^2 = 2y$.

3. Вычислить интеграл $\iiint_V ((x + y)^2 - z) dx dy dz$, если область V ограничена поверхностями $z = 0$, $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - ax = 0$

5. Вычислить $\iiint_{(V)} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, если область интегрирования V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $z = 1$, $z = 2 + x^2 + y^2$

6. Вычислить $\iiint_{(V)} \frac{xz}{x^2 + y^2 + R^2} dx dy dz$ по области, расположенной в 1 октанте и ограниченной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x = h$ и конусом

$$z^2 = \frac{h^2}{R^2} (x^2 + y^2).$$

Домашняя работа

1. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, если область V ограничена

поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$

2. Вычислить тройные интегралы при помощи цилиндрически или сферических координат

3. $\iiint_V x \, dx dy dz$ $V: z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ Ответ: $\frac{81}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$

С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж

4. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, y = 3 - x, z = 9 - x^2$

5. $x \geq 0, z \geq 0, x + y = 4, z = 4\sqrt{y}$

32. Криволинейные интегралы 1 рода

Криволинейный интеграл первого рода сводится к определенному интегралу.

1) Если кривая **AB** задана явным уравнением $y = y(x)$, ($a \leq x \leq b$), то

$$dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx, \text{ тогда}$$

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f[x, y(x)] \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

2) Если кривая **AB** задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

где $\alpha < t < \beta$, то $dl = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$.

Тогда интеграл равен:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, и их производные непрерывны.

3) Если кривая задана в полярных координатах

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi) \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2} d\varphi$$

Криволинейные интегралы 1 рода

1. Вычислить интеграл $\int_L y \, dl$ от точки $A(0;0)$ до точки $(1;\sqrt{2})$, если кривая L задана уравнением $y^2 = 2x$.

2. Вычислить интеграл $\int_L x^2 y \, dl$ вдоль отрезка прямой $y=x$ от начала координат до точки $(2;2)$

3. Вычислить интеграл $\int_C y^2 \, dl$, где C – длина окружности

$$x = a \cos t, \quad y = a \cdot \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

4. Вычислить интеграл $\int_C x^2 \, dl$, где C – кривая, заданная уравнением

$$y = \ln x, \quad 1 \leq x \leq e.$$

5. Вычислить интеграл $\int_C (x^2 + y^2) z \, dl$, где кривая C задана в параметрическом

виде $x = \sin 3t, y = \cos 3t, z = 4t, \quad 0 \leq t \leq \pi$.

6. Вычислить $\int_l \sqrt{x^2 + y^2} \, dl$, где l -контур окружности $x^2 + y^2 = ax \quad (a > 0)$.

7. Вычислить $\int_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dl$, где L - дуга кривой заданной параметри-

чески:
$$\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \\ z = t. \end{cases}$$

8. Вычислить интеграл $\int_{(AB)} x^2 y \, dl$, где AB – есть часть окружности

$$x^2 + y^2 = R^2, \text{ лежащая в первой четверти.}$$

9. Вычислить $\int_{(AB)} (x - y) \, dl$, где AB - отрезок прямой от $A(0,0)$ до $B(4,3)$.

10. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{AB} (x - y) \, dl$, где AB – отрезок прямой от точки $(0; -2)$ до $(4,0)$.

33. Криволинейные интегралы 2 рода

Если кривая лежит в плоскости Oxy и задана уравнением $y=f(x)$, то

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy = \int_a^b \left[P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot \frac{df}{dx} \right] dx$$

Если кривая **AB** задана параметрически $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t), \end{cases}$ где $t \in [t_1; t_2]$ и

функции $x(t); y(t); z(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[t_1; t_2]$, то:

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz = \\ = \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt. \end{aligned}$$

Вычислить криволинейные интегралы второго рода

1. $\int_L (x^2 + 3xy) dx + (2y^2 - xy) dy$, где L – дуга параболы $y = x^2$; $x \in [-1; 1]$
2. $\int_L -x \cdot \cos y dx + y \cdot \sin x dy$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $(0; 0)$ и $(\pi; 2\pi)$.
3. $\int_L 2xy dx - x^2 dy$, где L – ломанная ОВА $O(0; 0)$, $B(2, 0)$, $A(2, 1)$
4. $\int_L yz dx + zx dy + xy dz$, где L – дуга винтовой линии
 $x = a \cdot \cos t$; $y = a \cdot \sin t$; $z = \frac{bt}{2\pi}$; $0 \leq t \leq 2\pi$
5. $\oint_L ydx - x^2 dy + (x + y)dz$, где L – кривая пересечения цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ с плоскостью $x + y - z = 0$, «пробегаемая» в положительном направлении относительно выбранной верхней стороны данной плоскости.

6. $\int_L y \, dx + (x + z) \, dy + (x - y) \, dz$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, -1, 1)$ и $B(2, 3, 4)$.

7. $\int_L xy \, dx + (x^2 + y) \, dy$, где L – дуга параболы $y = x^2$, расположенная между точками $(0, 0)$ и $(2, 4)$.

8. $\int_L y \, dx + (x + z) \, dy + (x - y) \, dz$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, -1, 1)$ и $B(2, 3, 4)$.

Домашняя работа

1. Вычислить $\int_L (x^2 - 2xy) \, dx + (2xy + y^2) \, dy$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2,4)$.

2. Вычислить $\int_L (x^2 + y^2) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy$, где L – кривая $y = 1 - |1 - x|$; $x \in [0; 2]$

Ответ $40\frac{19}{30}$

3. Вычислить $\int_L x \, dx + y \, dy + (x + y - 1) \, dz$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1,1,1)$ и $B(2,3,4)$.

Ответ 13

4. Вычислить $\int_L yz \, dx + zx \, dy + xy \, dz$, где L – дуга винтовой линии

$x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$, от точки пересечения линии с плоскостью $z=0$ до точки ее пересечения с плоскостью $z=a$

Ответ 0

34. Поверхностные интегралы 1 рода

Вычислить поверхностные интегралы первого рода

1. $\iint_{(D)} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) dS$, где D – часть плоскости $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, ограниченная плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0$.

2. $\iint_{(D)} (x + y + z) dS$, где D – поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$,

3. $\iint_{(D)} z^2 dS$, где D – часть конической поверхности:

$$x = r \cdot \cos \varphi \cdot \sin a; \quad y = r \cdot \sin \varphi \cdot \sin a; \quad z = r \cdot \cos a$$

$$0 \leq r \leq a; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad a = \text{const} \quad \left(0 < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

4. $\iint_{(D)} (x + y + z) dS$, где D – часть плоскости $x + 2y + 4z = 4$, лежащая в первом октанте.

5. $\iint_{(D)} z^2 dS$, где D представляет собой полную поверхность конуса

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2,$$

6. $\iint_{(D)} (xy + yz + zx) dS$, где D – часть конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ внутри поверхности $x^2 + y^2 = 2ax$.

7. $\iint_{(D)} x dS$, где D – часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, лежащей в первом октанте.

8. $\iint_{(D)} \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где D – часть цилиндрической поверхности, заданной па-

раметрически в виде: $x = a \cdot \cos u, \quad y = a \cdot \sin u, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq H$

$$x + 2y + 4z = 4,$$

9. $\iint_{(D)} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dS$, где D задана параметрически в виде:

$$x = u \cdot \cos v, \quad y = u \cdot \sin v, \quad z = v, \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq \pi$$

10. $\iint_{(D)} (3y - 2z) dS$, где D – часть плоскости $3x + y + 2z = 6$ в первом октанте.

Поверхностный интеграл I рода

Если $z = \varphi(x; y)$

$$\iint_{(S)} f(x; y; z) ds = \iint_{(P)} f(x; y; \varphi(x, y)) \sqrt{1 + (\varphi'_x(x; y))^2 + (\varphi'_y(x; y))^2} dx dy$$

Если $\begin{cases} x = x(u; v) \\ y = y(u; v) \\ z = z(u; v) \end{cases}$

$$\iint_{(S)} f(x; y; z) ds = \iint_{(P)} f(x(u; v); y(u; v); z(u; v)) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Где $E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$ $G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

35. Поверхностные интегралы 2 рода

Вычислить поверхностный интеграл второго рода

1. $\iint_{(D)} x^2 y^2 z dx dy$, где D – положительная сторона нижней половины сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

2. $\iint_{(D)} (x + z) dy dz + (x + 3y) dx dz + y dx dy$, где D – верхняя сторона плоскости

$$x + 2y + z = 2, \text{ расположенная в 1 октанте.}$$

3. $\iint_{(D)} (x - 3y + 6z) dydz$ по верхней стороне плоскости $x - y - 2z + 4 = 0$, ограниченной координатными плоскостями.

4. $\iint_{(D)} x dydz + dx dz + xz^2 dx dy$, где D – внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенной в первом октанте.

5. $\iint_{(D)} (x + y) dydz + (y + z) dx dz + (z + x) dx dy$, где D – внешняя сторона тела, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y + 3z = 6$

6. $\iint_{(D)} x dydz + y dx dz + z dx dy$, где D – верхняя часть поверхности $x + 2y + z - 6 = 0$, расположенная в первом октанте.

Домашняя работа

Вычислить поверхностный интеграл второго рода

1. $\iint_{(D)} (x + y) dydz + (y - x) dx dz + (z - 2) dx dy$, где D – часть поверхности конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, отсекаемая плоскостями $z = 0$, $z = 1$, нормаль к которой образует тупой угол с осью Oz . Ответ: $\frac{8\pi}{3}$

2. $\iint_{(D)} x dydz + z^3 dx dy$, где D – внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Ответ: $\frac{32\pi}{15}$

3. $\iint_{(D)} x dydz + y dx dz + z dx dy$, где D – внешняя сторона цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ с основаниями $z = 0$, $z = H$. Ответ: $3\pi R^2 H$

4. $\iint_{(D)} xz dydz + xy dx dz + yz dx dy$, где D – внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и состоящей из цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$ Ответ: $R^2 H^2 \left(\frac{2R}{3} + \frac{\pi H}{8} \right)$

5. $\iint_{(D)} xz \, dydz + xy \, dx dz + yz \, dx dy$, где D – внешняя сторона пирамиды, гранями

которой являются плоскости $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ Ответ: $\frac{1}{8}$

6. $\iint_{(D)} z \, dydz + (3y - x) \, dx dz - z \, dx dy$, где D – внешняя часть поверхности тела, ог-

раниченного плоскостями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = x^2 + y^2 + 2$ Ответ: 5π

36. Числовые ряды

Понятие ряда и его сходимости. Свойства сходящихся рядов

Написать три первых члена ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2}{n+3}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+1}{10n+6}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+21}{4\sqrt{n}}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3-1}{8n+3}$

Написать общий член ряда:

6. $\frac{4}{3} + \frac{7}{4} + \frac{10}{5} + \frac{13}{6} + \dots$ 7. $\frac{3}{5} + \frac{8}{10} + \frac{15}{17} + \frac{24}{26} + \dots$

Суммой числового ряда называется предел n -ой частичной суммы, если он существует и конечен $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $S = \frac{b_1}{1-q}$

Найти сумму ряда, доказав, что он сходится:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n - 2^n}{18^n}$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$

Домашняя работа по теме «Понятие ряда и его сходимости. Свойства сходящихся рядов»

Написать три первых члена ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{4n-3}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+1}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n+3}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{2^n}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n - 1}{5^{n+1}}$

Написать общий член ряда:

$$6. \frac{4}{1} + \frac{5}{4} + \frac{6}{7} + \frac{7}{10} + \dots \quad 7. \frac{4}{1} + \frac{9}{7} + \frac{16}{17} + \frac{25}{31} + \dots$$

Найти сумму ряда, доказав, что он сходится:

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \quad 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 8^n}{24^n} \quad 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n - 3^n}{24^n} \quad 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

Знакоположительные ряды

Определение. Ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^n a_i$ называется **знакоположительным**, или просто **положительным**, если все его члены неотрицательны.

Определение. Пусть даны два положительных ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots \quad (2)$$

Если при всех n имеет место $a_n \leq b_n$, то

ряд (2) называют **мажорантным**, по отношению к (1), а

ряд (1) называют **минорантным** по отношению к (2).

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Первый признак сравнения

Теорема. Пусть даны два положительных ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2). Если, хотя бы начиная с некоторого номера n , выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда (2) вытекает сходимость ряда (1), или из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

ИЛИ:

Из сходимости мажорантного ряда следует сходимость минорантного ряда.

Из расходимости минорантного ряда следует расходимость мажорантного ряда.

Наиболее часто в качестве «эталонных» для сравнения используют следующие ряды:

1. геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ – сходится при $|q| < 1$, расходится при $|q| \geq 1$;

2. гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится;

3. обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$

сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 1$

Если общий член ряда представляет собой отношение двух многочленов, то при подборе эталонного обобщенного гармонического ряда значение α выбирают равным разности наибольших показателей знаменателя и числителя.

Исследовать сходимость ряда с помощью первого признака сравнения:

$$\begin{aligned}
 &1. 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \\
 &3. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}} \quad 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}} \\
 &6. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\pi+2} \quad 7. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} \dots \quad 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 2n}{n^3 + 5n - 5} \quad 9. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)
 \end{aligned}$$

Второй признак сравнения (предельный признак сравнения)

Пусть даны два положительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2). Если существует конечный и отличный от нуля предел отношения одинаковых по номеру членов рядов (1) и (2) $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \left(0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty \right)$, то эти ряды одновременно сходятся или расходятся.

Исследовать сходимость ряда с помощью второго признака сравнения:

$$\begin{aligned}
 &10. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \quad 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 5}{n^3} \quad 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}} \quad 13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 2n}{n^3 + 5n - 5}
 \end{aligned}$$

Признаки Даламбера и Коши

Исследовать сходимость ряда

$$\begin{aligned}
 &1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n} \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(3n)^n} \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2 + 1} \right)^n \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n} \quad 5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \quad 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n} \\
 &9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n} \quad 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}} \quad 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n} \quad 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(n-1)!}, \quad 13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad 14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n} \quad 15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n} \\
 &16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} \quad 17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}
 \end{aligned}$$

Домашняя работа по теме «Признаки Даламбера и Коши»

Исследовать сходимость ряда

$$\begin{aligned}
 &1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{2n^2 + 1}{5n^2 + 1} \right)^n \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n})^n}{n!} \quad 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 3^{2n-1}} \\
 &6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 3^n}
 \end{aligned}$$

Интегральный признак сходимости

Пусть ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ и функция $f(x)$, заданная при $x \geq 1$, связаны так, что при всех натуральных n имеет место равенство $f(n) = a_n$ и пусть $f(x)$ непрерывная, положительная и убывающая функция. Тогда ряд и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Исследовать сходимость ряда с помощью интегрального признака:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}; \quad m > 1$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)}$

37.Ряды с положительными членами

38.Знакопеременные ряды

Знакопеременными называют ряды, члены которых имеют произвольные знаки.

Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится одновременно с рядом $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$, то

он называется **абсолютно сходящимся**.

Если же сам ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится, то он называется **условно сходящимся**.

Теорема Коши.

Если сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ из абсолютных величин членов ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, то сходится

и сам ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Знакопеременные ряды

Теорема Лейбница. Признак сходимости знакопеременующегося ряда.

Если модуль n -го члена знакопеременующегося ряда $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + c_5 - \dots$ с возрастанием n убывает и стремится к нулю, то ряд сходится.

или: Знакопеременующийся ряд сходится, если абсолютные величины его членов монотонно убывают, а общий член стремится к нулю, т.е. выполняются следующие два условия:

1). $|c_1| > |c_2| > |c_3| > \dots$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$

Сумма знакопеременующегося ряда меньше первого члена ряда, т.е. $S < c_1$

Замечание. Стремление к нулю n -го члена знакопеременующегося ряда - есть необходимое и достаточное условия сходимости ряда.

Погрешность в определении суммы ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, допущенная при отбрасывании членов ряда, начиная с $(k+1)$ -го, имеет тот же знак, что и первый отброшенный член, а по модулю меньше его.

Исследовать на сходимость ряд

$$\begin{aligned}
 & 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 7^n} \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [2 + (-1)^n]}{n} \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 7} \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{2^n + n^3} \quad 5. \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right) \quad 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1} \quad 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)} \quad 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (2n-1)}{3^n} \quad 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1} \quad 10. \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\ln(n+1))^n} \quad 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln^3 n} \quad 12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \quad 13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^{\frac{5}{2}}} \quad 14. \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{9n-1}
 \end{aligned}$$

Домашняя работа

Исследовать на сходимость ряд

$$\begin{aligned}
 & 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{3^n n^2 + 1} \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot \ln^2 n}{n} \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}} \right) \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{(2n-1)^3} \quad 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)} \\
 & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} \quad 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{n^4} \quad 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n^2 + 1)}{n^3} \quad 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \ln n} \quad 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{(n+1)!} \\
 & 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{12^n} \quad 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (2n+1)}{n(n+1)}
 \end{aligned}$$

39. Степенные ряды

Теорема Абеля. 1°. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ сходится для значения $x_0 \neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.

2°. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ расходится в точке $x = x_1$, то он расходится и для всех x , $|x| > |x_1|$.

Степенной ряд имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$

$$1. R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$2. R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

Степенные ряды

Определить область сходимости степенного ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^{n-1}}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{\sqrt{n} \cdot 3^{n-1}}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-2)^n}{2^n \cdot \sqrt{n+1}}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} (3-x^2)^n$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cdot (x+4)^{2n+1}}{(n+1)!}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n \cdot (x-2)^{n+1}}{10^n}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (x+2)^n}{5^n \cdot (3n-1)}$ 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (x+3)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (x-1)^{2n}}{9^n \cdot \sqrt{n^5+3}}$

40. Разложение элементарных функций в степенные ряды

Разложение в ряд Маклорена и в ряд Тейлора

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням. Найти область сходимости полученного ряда.

1. $y = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ по степеням $(x-1)$.

2. $y = \frac{1}{x+3}$ по степеням $(x+1)$

3. $y = \ln(1+2x)$ по степеням $(x-3)$

4. $y = \cos^2 x$ в окрестности точки $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

5. $y = x^4 - 3x^2 + 2x + 2$ по степеням $(x-1)$

6. $y = \frac{1}{x}$ в окрестности точки $x_0 = 1$.

Разложить функцию в ряд Маклорена. Найти область сходимости полученного ряда к этой функции

7. $(1+x)^a$

Разложение элементарных функций в степенные ряды

Разложение элементарных функций в степенные ряды	
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$ $-\infty < x < \infty$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$ $-\infty < x < \infty$
$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots \quad x < \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{2x^7}{4725} + \dots \right)$ $ x < \pi$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$ $-1 < x < 1$
$a^x = 1 + \frac{x \cdot \ln a}{1!} + \frac{(x \cdot \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \cdot \ln a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x \cdot \ln a)^n}{n!} + \dots$	
$\ln x = 2 \cdot \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \dots \right]$	
$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots$ $x \in \begin{cases} (-1; 1) & m \leq -1 \\ (-1; 0] & -1 < m < 0 \\ [-1; 1] & m \geq 0 \end{cases}$	
$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots \quad x \in [-1; 1]$	
$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots \right) \quad x \in [-1; 1]$	
$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad x \in [-1; 1]$	

Разложить функцию в ряд Маклорена. Найти область сходимости полученного ряда к этой функции

- $y = x \cdot \cos 3x$
- $y = \frac{\sin 2x}{x}$
- $y = \ln(1-x^2)$
- $y = \frac{1-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$
- $y = \frac{1}{1+3x^3}$
- $y = \frac{6x}{2-3x}$
- $y = \ln(10+x)$

41. Тригонометрический ряд

Найти значение функций

1. $\cos 0$ 2. $\cos \pi$ 3. $\cos \frac{\pi}{2}$ 4. $\sin 0$ 5. $\sin \pi$ 6. $\sin \frac{\pi}{2}$ 7. $\cos \pi n$ 8. $\sin \pi n$

Вычислить определенные интегралы

9. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx$ 10. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{\pi nx}{L} \, dx$ 11. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{\pi nx}{3} \, dx$ 12. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{\pi nx}{3} \, dx$ 13. $\int_{-\pi}^0 \sin \frac{\pi nx}{3} \, dx$ 14. $\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos nx \, dx$ 15. $\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin nx \, dx$ 16. $\int_{-\pi}^0 (x+2) \cdot \sin \frac{\pi nx}{2} \, dx$

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$$

Вычислить значение $\frac{\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)}{2}$, где x_0 – точка разрыва первого рода функции

17. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } -\pi < x < 0 \\ \pi, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ 18. $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } -2 < x < -1 \\ 2x+3, & \text{если } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2+1, & \text{если } 1 < x \leq 4 \end{cases}$

Домашняя работа по теме: **Тригонометрический ряд**

Вычислить определенные интегралы

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx$ 2. $\int_{-2}^2 \cos \frac{\pi nx}{2} \, dx$ 3. $\int_{-1}^1 \cos \frac{\pi nx}{L} \, dx$ 4. $\int_0^4 \sin \frac{\pi nx}{5} \, dx$ 5.

$\int_{-4}^0 x \cdot \sin \pi nx \, dx$

6. $\int_0^1 (x-1) \cdot \cos \frac{\pi nx}{2} \, dx$ 7. $\int_0^{\pi} (2x-1) \cdot \sin nx \, dx$ 8. $\int_0^{\pi} (2x-1) \cdot \cos nx \, dx$

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$$

Вычислить значение $\frac{\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)}{2}$, где x_0 – точка разрыва первого рода функции

9. $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } -\pi < x < 0 \\ x-2, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ 10. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } -1 < x < 0 \\ 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1 \\ x+1, & \text{если } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

42.Ряды Фурье

Ряд Фурье с периодом 2π

План решения задач

1) исследовать функцию и построить график; проверить условия Дирихле;

Теорема Дирихле (достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье).

Пусть функция $f(x)$ периодическая с периодом $T=2\pi$, если:

1.эта функция на любом отрезке, равном периоду, непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода,

2.эта функция на любом отрезке длиной, равной периоду, имеет конечное число экстремумов,

тогда ряд Фурье, составленный для этой функции, сходится в функции $f(x)$ во всех точках непрерывности, а в точках разрыва x_0 ряд Фурье сходится к числу

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}, \text{ где } f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

2) формально записать ряд Фурье и вычислить его коэффициенты;

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

3) записать ряд Фурье функции и выяснить вопрос о его сходимости.

Найти ряд Фурье для функции

$$1. \quad f(x) = x + 2 \quad \text{на} \quad [-\pi, \pi]. \quad 2. \quad f(x) = \begin{cases} 4, & \text{если } 0 \leq x < \pi \\ -3 & \text{если } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \quad 3.$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } -\pi < x < 0 \\ \pi, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad 4. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad 5. \quad f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi \quad 6.$$

$$f(x) = x, \quad -\pi < x \leq \pi$$

$$7. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi < x < 0 \\ x - 1, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\text{Отв:} \quad f(x) = \frac{\pi - 2}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + \frac{\pi - 2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2kx)}{2k}$$

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi < x < 0 \\ \frac{x}{2} + 1, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Отв:
$$f(x) = \frac{\pi - 4}{8} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + \frac{\pi - 4}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2kx)}{2k}$$

Ряд Фурье на периоде $2l$

План решения задач

- 1) исследовать функцию и построить график; проверить условия Дирихле
- 2) формально записать ряд Фурье и вычислить его коэффициенты:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

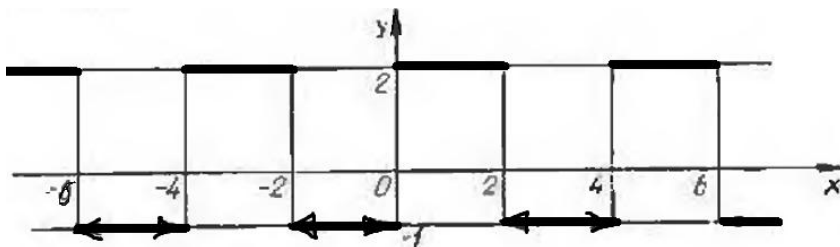
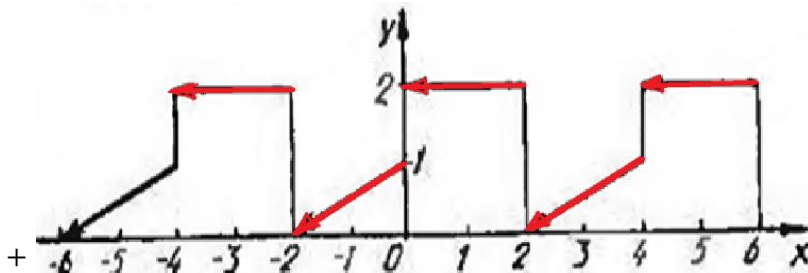
$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

- 3) записать ряд Фурье функции и выяснить вопрос о его сходимости.

Разложить в ряд Фурье функцию

$$\begin{aligned} 1. f(x) &= \begin{cases} -1 & \text{при } -2 < x < 0 \\ 2 & \text{при } 0 \leq x \leq 2 \end{cases} & 2. f(x) &= |x| & -2 \leq x \leq 2 & 3. f(x) &= \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0 \\ 0,5, & x = 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \end{cases} \\ 4. f(x) &= \begin{cases} 6, & 0 < x < 2 \\ 3x, & 2 \leq x < 4 \end{cases} & 5. f(x) &= x^2 & -1 \leq x \leq 1 & 6. f(x) &= \frac{x}{2}, & x \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

7. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графически



Функция Фурье для четных и нечетных функций

Если разлагаемая в ряд Фурье функция **$f(x)$ четная**, график четной функции симметричен относительно оси ординат. Тогда $b_n = 0$,

если $T = 2\pi$ то $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx,$$

если $T = 2L$, то $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{L}$,

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

Варианты формулировок: разложить в ряд Фурье «четным образом», «по косинусам».

Если функция **$f(x)$ нечетная**, график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Тогда

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0,$$

если $T = 2\pi$, то $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$,

если $T = 2L$, то $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$,

Варианты формулировок: разложить в ряд Фурье «нечетным образом», «по синусам».

1. Разложить функцию $f(x) = x$, заданную на отрезке $[0; \pi]$ в ряд по а) синусам, б) косинусам. Построить графики для каждого продолжения

2. Разложить функцию $f(x) = 2 - x$, заданную на отрезке $[0; 2]$ в ряд по синусам. Построить график для продолжения

3. Функцию $f(x) = x^2$, заданную на отрезке $[0; \pi]$ разложить в ряд Фурье: а) по косинусам; б) по синусам в интервале $[0; 2\pi]$. Построить график для продолжения.

4. Разложить функцию $f(x) = 8^{\frac{x}{2}}$, заданную на интервале $(0; \pi)$ в ряд, определив ее четным и нечетным образом. Построить графики для каждого продолжения

43. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент

Скалярное поле

Какое поле называется скалярным?

Что называется линией уровня?

Что называется поверхностью уровня?

Установить область определения поля и составить уравнения поверхностей (направляющих линий) равного уровня данного скалярного поля. Дать заключение о скорости изменения поля в различных точках пространства

1. $\varphi(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 2. $\varphi(x, y, z) = \arccos \frac{x}{\sqrt{z^2 + y^2}}$

3. Скалярное поле задано функцией $U(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Найти уравнения

поверхностей уровня. Какая из этих поверхностей проходит через точку

$A\left(2; 0; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$?

4. Построить семейство поверхностей равного уровня скалярного поля потен-

циала $v(r) = \frac{e}{r}$ электростатического поля заряда e , помещенного в начале коор-

динат, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - расстояние от точки $M(x, y, z)$ до заряда.

5. Построить семейство направляющих линий плоскопараллельного поля

$\varphi(x, y) = xy$

Найти поверхность уровня скалярного поля

6. $u = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ 7. $u = \frac{1}{2x + 3y - 4z + 1}$ 8. $u = \cos r, \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ 9.

Домашняя работа

Установить область определения поля и составить уравнения поверхностей (направляющих линий) равного уровня данного скалярного поля. Дать заключение о скорости изменения поля в различных точках пространства

1. $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$ 2. $\varphi(x, y, z) = \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$

3. Построить семейство направляющих линий уровней для поля $u = 4 - x^2 - y^2$

Составить уравнения поверхностей равного уровня для поля

4. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 5. $u = \ln(x^2 + y^2 - 4z - 4)$

Производная по направлению. Градиент

Найти поверхности уровня скалярного поля

$$1. V = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} \quad 2. V = \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

3. Найти производную функции $z = x^3 - y^3$ в точке $M(1;1)$ в направлении $\vec{l}$, составляющем угол $\alpha = 60^\circ$ с положительным направлением оси Ox .

4. Найти производную функции $z = 3x^2 - 6xy + y^2$ в точке $A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$ в направлении $\vec{l}$, составляющем угол α с положительным направлением оси Ox . В каком направлении эта производная имеет: а) наибольшее значение; б) наименьшее значение; в) значение, равное нулю? Найти градиент этой функции, его модуль и его направляющие косинусы.

5. Определить производную функции $u = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$ в точке

$A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; \frac{1}{\sqrt[3]{4}}; \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ в направлении $\vec{l}$, составляющем с осями прямоугольной системы координат Ox , Oy , Oz углы, соответственно равные α , β , γ , градиент этой функции, его величину и направляющие косинусы.

6. Найти $|\text{grad } u|$ и направляющие косинусы градиента в точке $A(x_0, y_0, z_0)$, если функция $u = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

7. Дана функция $z = y^3 - x^2y + 2xy$, точка $M_0(2; -1)$ и вектор $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$. Найти а) производную функции в точке M_0 по направлению вектора $\vec{a}$; б) градиент функции в данной точке.

Домашняя работа

1. Найти производную функции $z = x^2 + y^2 - xy + 2x + 3y$ в точке $M(-9; -1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(4; 5)$

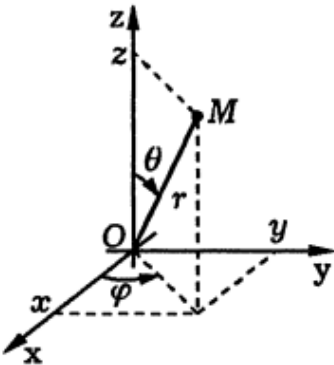
2. Найти производную функции $z = 3$ в точке $M_0(-1; 2)$ по направлению вектора $\vec{a} = (1; 3)$.

3. Найти градиент функции $u = xyz$ в точке $M(1; 1; 1)$.

4. Найти производную функции $z = x - y$ в точке $M(0; 0)$ по направлению:

а) координатных осей; б) вектора $\vec{a} = (2; 2)$; в) градиента.

Векторное поле. Дивергенция

Дивергенция векторного поля $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$ выражается формулой $\operatorname{div}\vec{F}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}$	
Потоком векторного поля $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$ через поверхность S в сторону единичного вектора нормали $\vec{n}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ поверхности S называется поверхностный интеграл $\Pi = \iint_{(S)} \vec{F}(M) \cdot \vec{n}^0 dS = \iint_{(P)} [P(x,y) \cdot \cos \alpha + Q(x,y) \cdot \cos \beta + R(x,y) \cdot \cos \gamma] \cdot \frac{dx dy}{\cos \gamma}$	
Теорема Остроградского-Гаусса: Поток вектора изнутри замкнутой поверхности равен тройному интегралу по объему, ограниченному этой поверхностью, от дивергенции поля. $\Pi = \iiint_{(G)} \operatorname{div}\vec{F}(M) = \iiint_{(G)} \left(\frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} \right) dx dy dz$	
	Сферическая система координат $\begin{cases} x = \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = \rho \cdot \cos \theta \end{cases} J = \rho^2 \sin \theta$

1. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{F}(M) = (x^2 + y)\vec{i} + (y^2 + z)\vec{j} + (z^2 + x)\vec{k}$ в точке $M_0(1; -2; 3)$.
2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}(M) = x\vec{i} - 2y\vec{j} + z\vec{k}$ через верхнюю часть плоскости $x + 2y + 3z - 6 = 0$, расположенной в первом октанте.
3. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}(M) = (x + z)\vec{i} + (x + 3y)\vec{j} + z\vec{k}$ через верхнюю часть плоскости $x + 2y + z = 2$, расположенной в первом октанте.
4. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}(M) = xz^2 \cdot \vec{i} + yx^2 \cdot \vec{j} + zy^2 \cdot \vec{k}$ через поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ во внешнюю его сторону.
5. Найти поток векторного поля $\vec{F}(M) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ через поверхность прямого цилиндра S радиусом R и высотой H , ось которого совпадает с

осью Oz, а нижнее основание находится в плоскости Oxy. Нормаль направлена во внешнюю сторону цилиндра.

6. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}(M) = (x+z)\vec{i} + (2y-x)\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $x-2y+2z=4$ и координатными плоскостями.
7. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{F}(M) = (xy+z^2)\vec{i} + (yz+x^2)\vec{j} + (zx+y^2)\vec{k}$ в точке $M_0(1;3;-5)$.
8. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}(M) = (x-3z)\vec{i} + (x+2y+z)\vec{j} + (4x+y)\vec{k}$ через верхнюю часть плоскости $x+y+z=2$, расположенной в первом октанте.

44.Ротор. Циркуляция

Ротор

$\vec{\nabla}$ – векторный дифференциальный оператор набла (оператор Гамильтона)	
$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$	
Градиент $\vec{grad} U = (\vec{\nabla}, U(M_0)) = \frac{\partial U(M_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U(M_0)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U(M_0)}{\partial z} \vec{k}$	
Вектор поля $\vec{F} = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$	
Дивергенция	$div \vec{F}(M) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) =$
	$= \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}$
Ротор	
$\vec{rot} \vec{F}(M) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) =$	
$= \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) =$	

1. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{F}$, если $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.
2. Найти ротор от градиента скалярного поля $U = x^2 + y^2 + z^2$
3. Проверить, что поле $\vec{F} = (3x+y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j}$ потенциально и восстановить по-

тенциал (вычислить скалярную функцию)

4. Дано векторное поле $\vec{F} = (2x + 4z^2)\vec{i} + \cos y\vec{j} + (z^2 + 8xz)\vec{k}$. Убедиться в том, что данное поле потенциально, и построить его потенциал.

5. Показать, что векторное поле является потенциальным и найти его потенциал $\vec{F} = (3x + yz)\vec{i} + (3x + xz)\vec{j} + (3z + xy)\vec{k}$

Домашняя работа

1. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - z^2\vec{k}$.

2. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{F} = 2x\vec{i} + y\vec{j} - 3z\vec{k}$.

3. Вычислить потенциальную функцию векторного поля

$$\vec{F} = \left(\frac{x}{y} + y \cdot \cos x \right) \vec{i} + \left(-\frac{x^2}{2y^2} + \sin x \right) \vec{j}$$

Циркуляция

$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(S)} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}^0 dS$ Формула Стокса
$\text{grad } U = \nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k};$
$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$
$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

1. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = -x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ вдоль треугольника ABC в положительном направлении

$$A(3;0;0), B(1;2;0), C(0;0;2)$$

2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = 4z\vec{i} + (x - y - z)\vec{j} + (3y + z)\vec{k}$ вдоль треугольника ABC в положительном направлении

$$A(2;0;0), B(0;3;0), C(0;0;3)$$

3. Найти величину градиента функции $u = \operatorname{tg} x - x + 3 \sin y - \sin^3 y + z + \operatorname{ctg} z$ в точке $M\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.
4. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $M(5;3)$, если $z = \sqrt{x^3 - y^3}$
5. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{F}(M) = x^2 y \vec{i} - 2xy^2 \vec{j} + 2xyz \vec{k}$ в точке $(1;2;-3)$
6. Найти ротор векторного поля $\vec{F} = x^3 y^2 z \vec{i} + xy^2 \vec{j} - (x^3 + y - z^2) \vec{k}$

45. Классификация векторных полей. Оператор Гамильтона

Дифференциальные операции – градиент, дивергенция, ротор удобно представлять при помощи символического вектора – оператора Гамильтона ∇ (набла)

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Оператор Гамильтона является векторно-дифференциальным оператором, т.к. сочетает в себе черты вектора и оператора дифференцирования.

Сам вектор не имеет реального смысла, но, действуя на скалярную функцию или вектор, он приобретает вполне определенный смысл.

Так, например,

$$\begin{aligned} 1) \quad \nabla u &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \overline{\operatorname{grad} u}; \\ 2) \quad \nabla \vec{F} &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{F}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \nabla \times \vec{F} &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \operatorname{rot} \vec{F}. \end{aligned}$$

Рассмотренные операции $\overline{\operatorname{grad} u}, \operatorname{div} \vec{F}, \operatorname{rot} \vec{F}$, переводящие соответственно скаляр в вектор, вектор в скаляр и вектор в вектор, называются дифференциальными операциями первого порядка. Они порождают пять дифференциальных операций второго порядка:

$$\operatorname{div}(\overline{\operatorname{grad} u}), \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}), \operatorname{rot}(\overline{\operatorname{grad} u}), \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}), \overline{\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F})}.$$

Дифференциальные операции второго порядка могут быть получены с помощью скалярного дифференциального оператора

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

который называется оператором Лапласа или Лапласианом.

Применительно к скалярному полю имеют место две операции второго порядка:

$$1) \operatorname{div}(\overline{\operatorname{grad} u}) = \nabla(\nabla u) = \nabla^2 u = \Delta u,$$

$$2) \operatorname{rot}(\overline{\operatorname{grad} u}) = \nabla \times (\nabla u) = u(\nabla \times \nabla) = \mathbf{0}.$$

Применительно к векторному полю имеет смысл три операции:

$$1) \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \nabla[\nabla \vec{F}]$$

По свойству смешанного произведения векторов переставим векторы $\nabla[\nabla \vec{F}] = \vec{F}[\nabla \nabla] = \mathbf{0}$.

$$\text{Итак,} \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \nabla[\nabla \vec{F}] = \mathbf{0}.$$

$$2) \overline{\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F})} = \nabla(\nabla \vec{F});$$

$$3) \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}.$$

Векторное поле, в каждой точке которого ротор поля равен нулю, называется **потенциальным** или **безвихревым**.

$$\overline{\operatorname{rot} a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Потенциал поля определяется по формуле

$$u(M) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz$$

Векторное поле $\vec{F}(x, y, z)$, в каждой точке которого $\operatorname{div} \vec{F} = \mathbf{0}$, называется **соленоидальным** или **трубчатым**.

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

46. Гармоническое векторное поле

Векторное поле, которое одновременно является потенциальным и соленоидальным называется гармоническим.

Для такого поля, заданного вектором $\vec{F}(x, y, z)$ выполняются условия:
 $\overline{\text{rot } \vec{F}} = \vec{0}; \text{div } \vec{F} = 0.$

Из условия $\overline{\text{rot } \vec{F}} = \vec{0}$, следует, что существует скалярное поле $u(x, y, z)$,
 во всех точках которого $\vec{F}(x, y, z) = \overline{\text{grad } u(x, y, z)}.$

Из условия $\text{div } \vec{F} = 0$, следует, что $\text{div } \overline{\text{grad } u(x, y, z)} = 0$. Используя, операторы Гамильтона и Лапласа получим,

$$\text{div } \overline{\text{grad } u(x, y, z)} = \nabla \cdot \nabla u = \Delta u = 0, \text{ т.е. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Получили уравнение Лапласа, откуда следует, что $u(x, y, z)$ - гармоническая функция.

Дано векторное поле $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$. Показать, что поле $\vec{a}$ потенциальное, и найти его потенциал.

2. Показать, что потенциальное векторное поле $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$ одновременно является и соленоидальным полем.

3. Показать, что векторное поле $\vec{b} = (yz - 2x)\vec{i} + (xz + 2y)\vec{j} + xy\vec{k}$ есть гармоническое поле.

4. Является ли соленоидальным поле радиус-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$?

5. Показать, что данное поле $\vec{a}$ потенциально и найти его потенциал. а) $\vec{a} = 6xy\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j}$; б) $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$;

Ответ: а) $3x^2y - y^2 + C$; б) $xyz + C$.

6. Показать, что электромагнитное поле $\vec{H} = \frac{2I}{R^2}(-y\vec{i} + x\vec{j})$ является соленоидальным.

7. Показать, что векторное поле является гармоническим $\vec{b} = wy\vec{i} + wx\vec{j}$.

Перечень основной литературы:

1. Гурьянова К.Н. Математический анализ Электронный ресурс: учебное пособие / В.В. Бояршинов / У.А. Алексеева / К.Н. Гурьянова. - Математический анализ. - Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2014. - 332 с. - Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks. - ISBN 978-5-7996-1340-2

2. Математический анализ. Ч.І: учебное пособие / И.А. Антипова [и др.]. - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2018. - 196 с. - ISBN 978-5-7638-3326-3. - Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/84232.html>

3. Математический анализ. Ч.ІІ: учебное пособие / И.А. Антипова [и др.]. - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2018. - 188 с. - ISBN 978-5-7638-3327-0. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/84231.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Быкова О. Н. Практикум по математическому анализу Электронный ресурс: Учебное пособие / О. Н. Быкова, С. Ю. Колягин, Б. Н. Кукушкин. - Москва: Прометей, 2014. - 277 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-9905-8861-5

2. Ильин В.А. Основы математического анализа: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, І. - 7-е изд., стер. - Москва: Физматлит, 2009. - 647 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 1). - <http://biblioclub.ru/>. - ISBN 978-5-9221-0902-4

3. Ильин В.А. Основы математического анализа. В 2-х частях: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, ІІ. - 5-е изд. - Москва: Физматлит, 2009. - 464 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 2). - <http://biblioclub.ru/>. - ISBN 978-5-9221-0537-8

4. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа: учебник / Л.Д. Кудрявцев. - 3-е изд., перераб. - Москва: Физматлит, 2009. - 400 с. - <http://biblioclub.ru/>. - ISBN 978-5-9221-0184-4

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

3. <http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.

4. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

5. <http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России. Основные разделы: журналы, персоналии, организации, конференции, семинары, видеотека, библиотека.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Методические указания по организации и проведению
самостоятельной работы
по дисциплине
Математический анализ
для студентов направления подготовки
09.03.02 Информационные системы и технологии
направленность (профиль)
«Прикладное программирование в
интеллектуальных информационных системах»**

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Математический анализ» является формирование общепрофессиональной компетенции (ОПК-1) будущего бакалавра по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, путем освоения возможностей использования средств и методов математического анализа для решения прикладных задач в области информатики и компьютерных технологий.

Основными **задачами** освоения дисциплины являются:

- дать студентам абстрактные понятия математического анализа, такие как функция, предел функции, бесконечно малая и бесконечно большая величина, производная и дифференциал функции, определенный интеграл, используемые для описания и моделирования, различных по своей природе математических задач;
- привить студентам навыки использования аналитических методов в практической деятельности;
- показать студентам универсальный характер основных понятий математического анализа для получения комплексного представления о подходах к созданию математических моделей физических систем и объектов;
- воспитание математической и профессиональной культуры;
- расширение математического кругозора студентов;
- получение углубленных знаний, навыков для успешной профессиональной деятельности и для продолжения профессионального образования в магистратуре.

Дисциплина «Математический анализ» относится к дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений.

1 Требования к уровню освоения содержания дисциплины

В результате освоения дисциплины обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных урав-	ИД-1_{опк-1} консультирует и использует в профессиональной деятельности фундаментальные знания	Умеет использовать фундаментальные знания в области математического анализа в будущей профессиональной деятельности, выбирать метод необходимый для решения поставленной задачи. Владеет навыками ис-

нений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	математического анализа	пользования аппарата математического анализа для решения профессиональных задач.
---	-------------------------	--

2 Организационно-методические рекомендации по освоению дисциплины

Самостоятельная работа студентов является важнейшим условием формирования научного способа познания. Она проводится накануне каждого практического и лабораторного занятия и включает выполнение конкретного задания.

Подготовленный материал, практическое задание оформляются в конспекте.

Самостоятельные занятия (СЗ) являются одной из активных форм обучения.

Самостоятельные занятия по дисциплине «Математический анализ» имеют целью:

- закрепить и углубить знания, полученные студентами на лекциях, на лабораторных занятиях;
- привить практические навыки по работе с современными информационными технологиями.

Самостоятельные занятия проводятся в специализированных аудиториях, оборудованных средствами вычислительной техники и возможностью пользования Интернет-ресурсами и библиотечными ресурсами.

Предлагаемые методические рекомендации содержат информацию для студентов, необходимую при подготовке и проведении практических занятий по дисциплине «Математический анализ», а также могут быть полезны должностным лицам, в обязанности которых входит работа с организационно - распорядительными документами(ОРД).

ГОСТ Р 51141-08 определяет ОРД, как вид письменного документа, в котором фиксируют решение административных и организационных вопросов, а также вопросов управления, взаимодействия, обеспечения и регулирования деятельности органов власти, учреждений, предприятий, организаций, их подразделений и должностных лиц.

Согласно общероссийскому классификатору управленческой документации (ОКУД)ОРДклассифицированы на четыре группы:

- организационно-правовая документация (уставы, положения, правила, штатное расписания, инструкции);
- распорядительная документация (приказы, распоряжения, постановления, решения, указания);
- информационно-справочная документация (письма, телеграммы, факсы, акты, протоколы, докладные и служебные записки и др.);

- документы по личному составу (заявления, личные карточки, приказы по личному составу и др.).

3 Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Методические указания включают следующие разделы:

- цель работы;
- задание, которое должно быть выполнено студентом в результате проведения самостоятельной работы;
- варианты заданий;
- основные теоретические положения, необходимые для выполнения задания, они должны быть краткими и содержать ссылки на литературу, в которой эти положения изложены в объеме, достаточном для выполнения самостоятельной работы;
- этапы выполнения задания с указанием конкретных сроков выполнения каждого из этапов и всего задания в целом;
- требования к оформлению графической и текстовой части самостоятельной работы;
- пример выполнения одного из вариантов задания и оформления отчета;
- библиографический список использованных источников.

Для помощи студентам и контроля самостоятельной работы применяются консультации преподавателя.

Консультации являются одной из форм работы кафедры по оказанию педагогически целесообразной помощи студентам в их самостоятельной работе.

Консультации должны носить индивидуальный характер. В случае необходимости разъяснения общих вопросов нескольким студентам проводятся групповые консультации.

Консультации проводятся с целью:

- разъяснения вопросов, возникающих у студентов при самостоятельном изучении учебного материала и выполнении домашних заданий;
- углубления и закрепления знаний по отдельным вопросам и темам дисциплины;
- оказания методической помощи в выборе методов самостоятельной работы.

Посещение консультаций студентов добровольное. Однако преподаватель может организовывать вызовы на собеседование тех студентов, которые в процессе обучения не показывают твердых знаний и не пользуются консультациями по своей инициативе.

На консультации преподаватель объясняет непонятные студентам наиболее сложные вопросы, и указывают литературу, в которой они освещаются.

Консультируя студентов, преподаватель обязан знакомиться с тем, как они изучают рекомендованную литературу, давать указания и советы о методах

работы над учебным материалом, способствующие более глубокому и прочному его усвоению

Консультации не должны являться дополнительными занятиями или подменять их. На них запрещается выполнять за студентов или совместно с ними домашние задания. Консультации не должны превращаться в форму натаскивания студентов перед зачетами и экзаменами.

Если в процессе консультации выясняется, что непонимание студентом вопроса связано с недостаточным изучением каких-либо разделов программы, то консультирующий обязан порекомендовать студенту изучить их и проконтролировать степень усвоения этих вопросов.

Консультации не являются проверкой знаний. Знания учебной дисциплины, показанные слушателем на консультации, не должны влиять на оценку знаний на экзаменах и зачетах.

4 Организация контроля знаний студентов.

Формы контроля знаний студентов

Контроль и оценка знаний, умений и навыков студентов осуществляется на лабораторных занятиях, консультациях, при приеме экзамена. В ходе контроля знаний преподаватель оценивает понимание студентом содержания дисциплины «Математический анализ», его способность применять методы управления при решении конкретных задач.

Контроль знаний студентов может осуществляться в следующих формах:

- текущий контроль знаний;
- промежуточный контроль знаний.

Текущий контроль знаний студентов имеет целью:

- дать оценку работы каждого студента по усвоению им учебного материала, выявить недостатки в его подготовке и оказать практическую помощь в их устранении;

Основными формами текущего контроля знаний студентов являются:

- устный контрольный опрос;
- письменный контрольный блиц-опрос;
- защита практической работы;
- написание контрольной работы;
- проверка конспектов лекций.

Устный контрольный опрос студентов проводится на лекциях (и лабораторных занятиях). По его результатам преподаватель оценивает качество подготовки студента к занятию.

Письменный контрольный блиц-опрос студентов проводится в течение запланированного преподавателем времени на лекциях и лабораторных занятиях путем письменного ответа их на поставленные вопросы, заданные преподавателем. Результаты его проведения отмечаются в журнале. На лабораторных занятиях знания и практические навыки студентов оцениваются по 4-балльной системе. Полученные оценки выставляются в журнале.

При проверке конспектов лекций дается анализ качества их ведения. Отмечаются допущенные ошибки, в рецензии преподавателя оценивается качество конспектирования учебного материала, даются рекомендации по улучшению качества конспектирования лекционного материала.

Промежуточный контроль по дисциплине осуществляется в двух формах:

1, 2, 4 семестр в форме экзамена

3 семестр в форме зачета с оценкой.

Процедура зачета с оценкой как отдельное контрольное мероприятие не проводится, оценивание знаний обучающегося происходит по результатам текущего контроля.

Зачет с оценкой выставляется по результатам работы в семестре, при сдаче всех контрольных точек, предусмотренных текущим контролем успеваемости. Если по итогам семестра обучающийся имеет от 33 до 60 баллов, ему автоматически доставляются баллы приведенные в следующей таблице:

Количество баллов за зачет ($S_{зач}$) при различных рейтинговых баллах по дисциплине по результатам работы в семестре

Рейтинговый балл по дисциплине по результатам работы в семестре ($R_{сем}$)	Количество баллов за зачет ($S_{зач}$)
$50 \leq R_{сем} \leq 60$	40
$39 \leq R_{сем} < 50$	35
$33 \leq R_{сем} < 39$	27
$R_{сем} < 33$	0

Далее используется шкала пересчета рейтингового балла по дисциплине в оценку по 5-балльной системе

Шкала пересчета рейтингового балла по дисциплине в оценку по 5-балльной системе

Рейтинговый балл по дисциплине	Оценка по 5-балльной системе
88 – 100	<i>Отлично</i>
72 – 87	<i>Хорошо</i>
53 – 71	<i>Удовлетворительно</i>
<53	<i>Неудовлетворительно</i>

Процедура проведения экзамена осуществляется в соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования в СКФУ – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры – в СКФУ, Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам аспирантуры, программам ординатуры – в СКФУ.

В экзаменационный билет включаются два вопроса и практическое задание.

Для подготовки по билету отводится 30 минут

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования Программой дисциплины, средой программирования языком Python

При проверке практического задания, оцениваются: верность решения, использованные методы решения, логика рассуждений.

5 Рекомендации по работе с литературой и источниками

Изучение литературы и источников необходимо начинать с прочтения соответствующих глав учебных изданий, учебных пособий или литературы, рекомендованной в качестве основной или дополнительной по дисциплине «Математический анализ», которые прямо или косвенно относятся к отрабатываемой теме.

Изучая литературу и источники, студенту рекомендуется вести краткий конспект. Однако не следует переписывать все содержание изучаемой темы, нужно выписывать лишь основные идеи и главные на ваш взгляд мысли. В отдельных случаях, когда встречаются важные определения, понятия, необходимый фактический материал и примеры, статистическая информация, имеющие отношение к изучаемой теме, студенту следует выписать их в виде цитат с полным указанием библиографических источников.

Конспектирование рекомендуемой литературы и источников необходимо вести с распределением собранных материалов по отдельным главам и параграфам согласно учебно-тематическому плану. Необходимо выписывать все выходные данные по используемой литературе и источникам.

Важным этапом при работе с рекомендуемой литературой и источниками является изучение законодательных и нормативных актов федерального, регионального, местного и ведомственного уровней. При изучении Указов Президента РФ, Законов и Кодексов РФ, постановлений, положений, рекомендаций и т.д., студент должен выяснить все изменения и дополнения, которые могли быть внесены после их выхода в свет.

Основой технологии интенсификации обучения на платформе цифровых образовательных технологий являются учебно-иллюстрационные материалы (опорный конспект) по дисциплине «Математический анализ».

Работа с учебно-иллюстрационными материалами имеет следующие этапы.

1. Изучение теоретических основ учебного материала в аудитории: изложение преподавателем изучаемого материала студентам с объяснением по опорному конспекту;
2. Самостоятельная работа: индивидуальная работа студентов по опорному конспекту; фронтальное закрепление по блокам опорного конспекта.
3. Первое повторение - воспроизведение содержания заданной темы опорного конспекта по памяти.
4. Устное проговаривание материала опорного конспекта - необходимый этап внешнеречевой деятельности при усвоении учебного материала.
5. Второе повторение - взаимопрос и взаимопомощь студентов друг другу.

Применение учебно-иллюстрационных материалов позволяет обобщить сложный по содержанию материал, активизировать мыслительную деятельность студентов.

Необходимо помнить, что главное для студента в самостоятельной работе с рекомендуемой литературой и источниками - это формирование своего индивидуального стиля, который может стать основой в будущей профессиональной деятельности.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Перечень основной литературы:

1. Гурьянова К.Н. Математический анализ Электронный ресурс: учебное пособие / В.В. Бояршинов / У.А. Алексеева / К.Н. Гурьянова. - Математический анализ. - Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2014. - 332 с. - Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks. - ISBN 978-5-7996-1340-2

2. Математический анализ. Ч.І: учебное пособие / И.А. Антипова [и др.]. - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2018. - 196 с. - ISBN 978-5-7638-3326-3. - Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/84232.html>

3. Математический анализ. Ч.ІІ: учебное пособие / И.А. Антипова [и др.]. - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2018. - 188 с. - ISBN 978-5-7638-3327-0. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/84231.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Быкова О. Н. Практикум по математическому анализу Электронный ресурс: Учебное пособие / О. Н. Быкова, С. Ю. Колягин, Б. Н. Кукушкин. - Москва: Прометей, 2014. - 277 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-9905-8861-5

2. Ильин В.А. Основы математического анализа: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, І. - 7-е изд., стер. - Москва: Физматлит, 2009. - 647 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 1). - <http://biblioclub.ru/>. - ISBN 978-5-9221-0902-4

3. Ильин В.А. Основы математического анализа. В 2-х частях: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, ІІ. - 5-е изд. - Москва: Физматлит, 2009. - 464 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 2). - <http://biblioclub.ru/>. - ISBN 978-5-9221-0537-8

4. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа: учебник / Л.Д. Кудрявцев. - 3-е изд., перераб. - Москва: Физматлит, 2009. - 400 с. - <http://biblioclub.ru/>. - ISBN 978-5-9221-0184-4

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.
4. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.
5. <http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России. Основные разделы: журналы, персоналии, организации, конференции, семинары, видеотека, библиотека.