

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Грובה Татьяна Анатольевна

Должность: и.о. декана факультета математики и компьютерных наук имени

профессора Н.И. Червякова

Дата подписания: 05.07.2025 10:17:15

Уникальный программный ключ:

bd39d4208aa94cf4422feb787c81619d42de79a7

Аннотация дисциплины

Наименование дисциплины

Функциональный анализ

Краткое содержание

Введение. Возникновение функционального анализа как самостоятельной дисциплины; современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики.

I. Метрические пространства. Определение метрического пространства. Примеры метрических пространств. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах. Ограниченные множества. Сходимость в метрических пространствах. Свойства сходящихся последовательностей. Полнота метрических пространств. Примеры полных и неполных метрических пространств. Теорема о вложенных шарах. Принцип сжимающих отображений. Теорема Качиполли-Банаха о сжимающем отображении полного метрического пространства. Применение метода сжимающих отображений к теории дифференциальных, интегральных уравнений, в алгебре и математическом анализе. Структура непустого совершенного ограниченного множества. Канторово совершенное множество. Мощность совершенных множеств.

II. Мера и интеграл Лебега. Внешняя и внутренняя мера ограниченного множества. Измеримые множества, мера Лебега. Примеры измеримых множеств. Свойства внешней и внутренней меры. Критерий измеримости множеств. Свойства измеримых множеств. Измеримые функции. Определение и свойства измеримых функций. Арифметические операции над измеримыми функциями. Измеримость непрерывных функций. Сходимость почти всюду, сходимость по мере последовательности измеримых функций. Теорема Лебега, Рисса, Егорова, Лузина о сходимости последовательностей измеримых функций. Нижняя и верхняя суммы Лебега от ограниченной измеримой функции. Свойства сумм Лебега. Интеграл Лебега. Свойства интеграла Лебега. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Восстановление первообразной от ограниченной функции. Срезка неотрицательной измеримой функции. Определение интеграла Лебега от произвольной неотрицательной измеримой функции. Теорема Бореля – Лебега. Свойства интеграла от произвольной неотрицательной измеримой функции. Теоремы Фату, Леви. Определение суммируемой функции. Свойства суммируемых функций и интегралов от них. Пространство L_1 , сходимость последовательностей функций в среднем. Полнота L_1 , банаховы пространства. Пространства L_2 , сходимость последовательностей функций в среднем квадратичном. Гильбертовы пространства.

III. Нормированные пространства, компактность и сепарабельность. Сепарабельные пространства. Определение, примеры. Компактность множества в метрических пространствах. Свойства компактных множеств. Теорема Хаусдорфа, критерий

	Арцела. Компактность множества в пространстве l_p. Теорема. Признаки компактности множеств в себе. Определение покрытия. Центрированная система множеств. IV. Линейные и непрерывные функционалы. Непрерывные функционалы. Определение. Свойства непрерывных функционалов. Непрерывные операторы. Линейная система. Определение и примеры банаховых пространств. Определение и примеры линейных функционалов. Свойства линейных функционалов. Теорема об ограниченности линейного функционала. Определение слабой сходимости линейных функционалов. Теорема о слабой сходимости функционалов (аналог теоремы Больцано-Вейерштрасса). V. Линейные и непрерывные операторы. Обратные операторы. Сопряженные операторы. Линейные операторы. Определение. Ограниченные оператор. Определение нормы оператора. Теорема о множестве значений непрерывного оператора, заданного на компактном множестве метрического пространства. Примеры и свойства линейных операторов. Теорема о сумме двух линейных операторов. Ограниченные операторы. Свойства нормы оператора. Норма интегрального оператора $y(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$ с непрерывным ядром $K(t,s)$. Обратные операторы. Определение взаимобратных операторов. Линейность обратного оператора. Теоремы об обратных операторах. Лемма. Теорема Банаха об обратном операторе. Сопряженные операторы. Определение $E_x^*, E_y^*, (E_x^* \rightarrow E_y^*)$. Примеры сопряженных операторов. Теорема об операторе, сопряженном с линейным ограниченным оператором. Матричная форма оператора в пространстве с базисом. Вид сопряженного оператора в этом пространстве. Определение собственных значений и собственных элементов сопряженного оператора.
Результаты освоения дисциплины	Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности
Трудоемкость, з.е.	3
Формы отчетности	Зачет с оценкой 7 семестр
Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины	
Основная литература	1. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. 3 – е изд., стер., Изд – во «Лань», 2009. 2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. 2 – е изд., стер., Изд – во «Лань», 2009. 3. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. 3-е изд., испр. Учебное пособие. Изд-во «Лань», 2009. 4. Федоров В.М. Курс функционального анализа. 1-е издание. Учебник. Изд-во «Лань», 2005.

Дополнительная литература	1. Садовничий В.А. Теория операторов. – М.: Высшая школа, 1999. 2. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1993. 3. Березанский Ю.М. Функциональный анализ. – Киев.: Высшая школа, 1990. 4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. 5. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1981.
---------------------------	---