

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению практических занятий
по дисциплине «Механика в машиностроении»
для студентов направления подготовки

15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных
производств»
направленность (профиль) «Технология машиностроения»

Ставрополь 2026

Данные методические указания предназначены для подготовки студентов к практическим занятиям по дисциплине «Механика в машиностроении». Методические указания составлены в соответствии с рабочим учебным планом и программой дисциплины для студентов очной формы обучения. Методические указания содержат основные теоретические положения по соответствующей теме практического занятия; практические задачи; приводятся примеры решения типовых задач. Приведены задачи, предлагаемые студенту для самостоятельного решения; вопросы для самопроверки, список рекомендуемой литературы.

Практические занятия способствуют формированию компетенций:

ОПК-5 – Способен использовать основные закономерности, действующие в процессе изготовления машиностроительных изделий требуемого качества, заданного количества при наименьших затратах общественного труда;

ОПК-8 – Способен участвовать в разработке обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами, выборе оптимальных вариантов прогнозируемых последствий решения на основе их анализа.

Практические занятия по дисциплине «механика в машиностроении» имеют целью расширение знаний по этому предмету, получение навыков практических расчётов и принятия конструкторских решений.

Составитель: к.т.н., доц. В.Г. Терещенко

Рецензент: д.т.н., проф. В.Г. Копченков

СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие 1. ИЗУЧЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЯ НА РАСТЯЖЕНИЕ МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ	4
Практическое занятие 2. ИЗУЧЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА СЖАТИЕ	14
Практическое занятие 3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛ И НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ	19
Практическое занятие 4. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ	30
Практическое занятие 5. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ СТЕРЖНЕЙ	33
Практическое занятие 6. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ	43
Практическое занятие 7. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР НАПРЯЖЕНИЙ КРУЧЕНИЯ И УГЛОВ ПОВОРОТА ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ	50
Практическое занятие 8. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ВАЛОВ ПРИ КРУЧЕНИИ	54
Практическое занятие 9. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ИЗГИБЕ КОНСОЛЬНЫХ БАЛОК СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ НАГРУЗКАМИ	66
Практическое занятие 10 ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ИЗГИБЕ КОНСОЛЬНЫХ БАЛОК РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ НАГРУЗКАМИ	78
Практическое занятие 11 ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ИЗГИБЕ ДВУХОПОРНЫХ БАЛОК	84
Практическое занятие 12 ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА БАЛОК ПРИ ПРЯМОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ	96
Практическое занятие 13 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ	106
Практическое занятие 14 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СЛОЖНОЙ ФИГУРЫ	117
Практическое занятие 15 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНОЙ ФИГУРЫ	130
Практическое занятие 16 НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ	143
Практическое занятие 17 РАСЧЁТ ВАЛА НА ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ	148
Практическое занятие 18 РАСЧЁТ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ	155

ИЗУЧЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЯ НА РАСТЯЖЕНИЕ МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ

Цель работы: изучение поведения малоуглеродистой стали в процессе испытания на растяжение.

Задача: определение механических характеристик материала образца по диаграмме испытания.

Теоретическое обоснование

Для решения практических задач необходимо знать числовые характеристики пластических и прочностных свойств материалов, которые обычно называются механическими характеристиками. Существует много методов испытаний материалов, но основным является испытание на растяжение. Опыты проводятся на специальных машинах, рабочее усилие в которых создаётся либо при помощи рычажного устройства (рычажные машины), или с помощью гидравлического давления, передаваемого на поршень (гидравлические машины). При испытаниях на растяжение применяются так называемые нормальные образцы круглого или прямоугольного сечения. Это вызвано тем, что результаты испытаний образцов разной формы, хотя и изготовленных из одного и того же материала, несколько отличаются. Как доказал русский учёный В. В. Кирпичёв, только при употреблении геометрически подобных образцов становится возможным сравнение результатов испытаний.

Полное геометрическое подобие обеспечивается при испытании образцов круглого поперечного сечения с одинаковым отношением длины к диаметру $l_0/d_0 = \text{const}$. Обычно принимается $l_0 = 10d_0$ (иногда используются укороченные образцы с $l_0 = 5d_0$), где l_0 – расчетная длина, т. е. длина участка образца, на которой измеряется его удлинение. Образец (рисунок 1), кроме

цилиндрической рабочей части, имеет плавные переходы к цилиндрическим утолщенным головкам, предназначенным для закрепления образцов в машине.

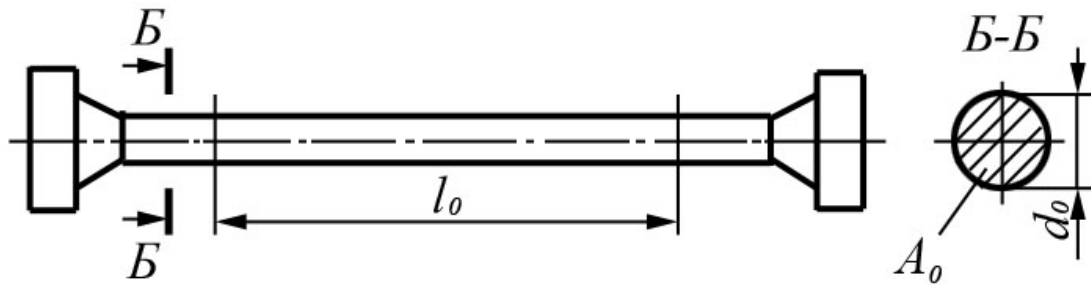


Рисунок 1 – Эскиз образца до испытаний

При испытаниях металлов на растяжение необходимо руководствоваться требованиями ГОСТ 1497-61. Большинство современных испытательных машин снабжены диаграммным аппаратом, который автоматически в процессе испытания вычерчивает график изменения удлинения образца Δl в зависимости от статического увеличения растягивающей силы F – диаграмму растяжения $F=f(\Delta l)$.

На рисунке 2 изображена машинная диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали (типа Ст.3). Приведенная диаграмма, хотя и характеризует поведение материала, но зависит от размеров образца, т. е. если взять образец с другим поперечным сечением, то получим иную диаграмму.

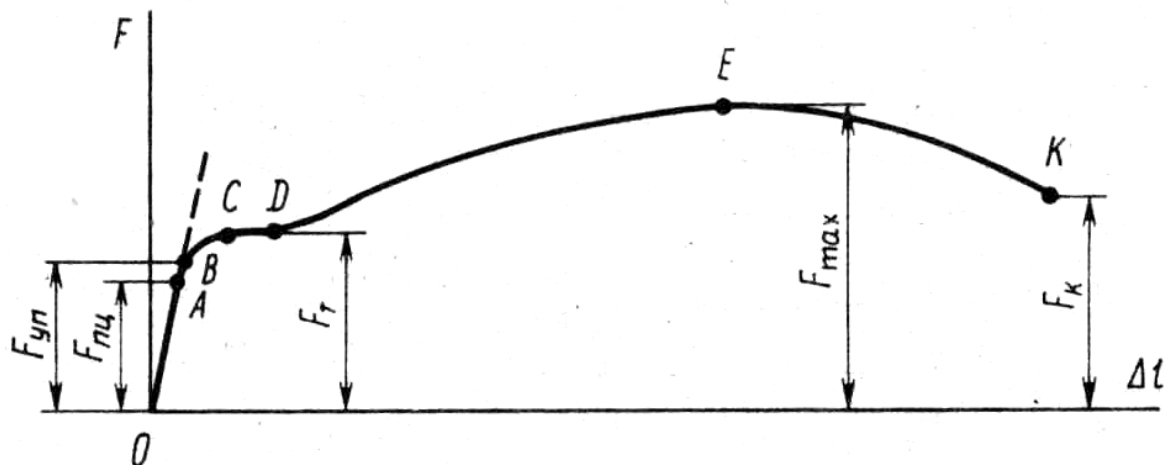


Рисунок 2 – Машинная диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

Для исключения влияния поперечных размеров и длины рабочей части образца, удобно перестроить машинную диаграмму растяжения $F=f(\Delta l)$, разделив силы F на первоначальную площадь сечения образца A_0 , а абсолютное удлинение Δl на расчётную длину l_0 т. е.

$$\sigma = \frac{F}{A_0}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (1)$$

В результате получим условную диаграмму растяжения $\sigma=f(\varepsilon)$ (рисунок 3). Вначале диаграмма имеет прямолинейный участок OA , на котором соблюдается прямая пропорциональная зависимость между напряжением и относительным удлинением, то есть закон Гука.

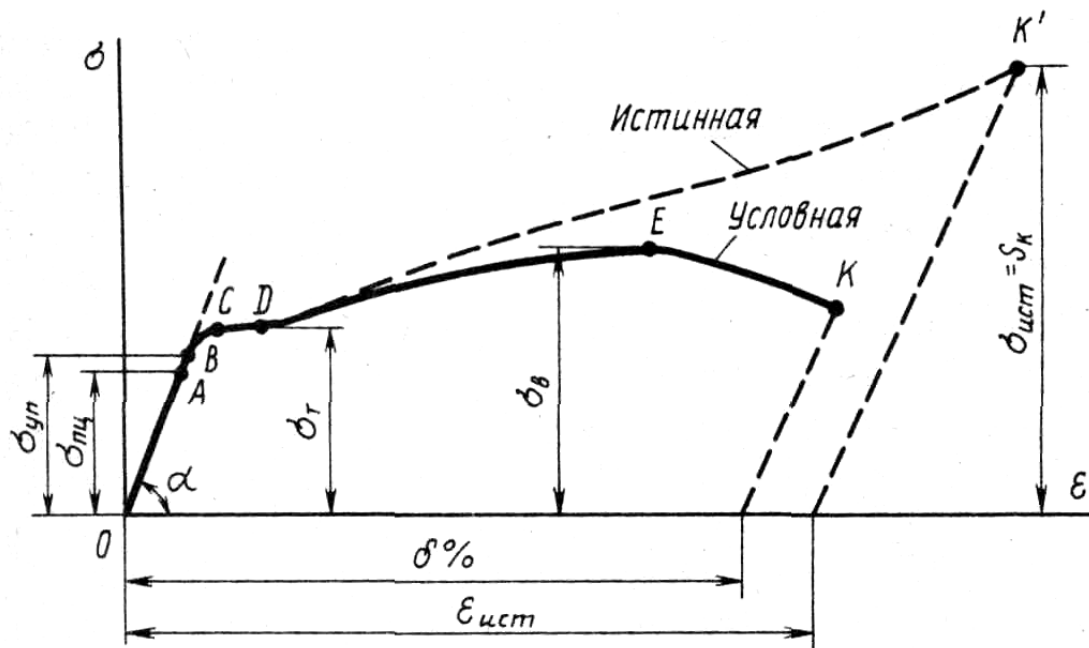


Рисунок 3 – Условная диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

Наибольшее напряжение, до которого материал следует закону Гука, называется пределом пропорциональности и обозначается $\sigma_{пц}$ (на диаграмме — точка A):

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{A_0}, \quad (2)$$

где $F_{\text{пл}}$ – нагрузка, соответствующая пределу пропорциональности. Для малоуглеродистой стали $\sigma_{\text{пл}} = 2 \cdot 10^8 \text{ Па} = 200 \text{ МПа} = 2000 \text{ кг/см}^2$.

Тангенс угла α наклона участка OA к оси абсцисс пропорционален модулю упругости:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\mu_{\varepsilon}}{\mu_{\sigma}} = E \frac{\mu_{\varepsilon}}{\mu_{\sigma}}, \quad (3)$$

где μ_{ε} , μ_{σ} – масштабные коэффициенты относительного удлинения и напряжения на диаграмме.

Выше точки A диаграмма начинает несколько искривляться, и закон Гука нарушается. Можно отметить такое значение напряжения (точка B на рисунке 2), до которого в материале имеют место только упругие деформации, полностью исчезающие после снятия нагрузки. Это напряжение называется пределом упругости:

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_0}, \quad (4)$$

Чтобы найти предел упругости, необходимо после каждого малого приращения нагрузки за пределом пропорциональности образец разгружать и следить, не образовалась ли пластическая деформация, не исчезающая при снятии нагрузки. Так как пластические деформации в отдельных кристаллах появляются уже в самой ранней стадии нагружения, то величина σ_y , как и $\sigma_{\text{пл}}$, будет зависеть от требований точности, которые накладываются на производимые замеры. Обычно остаточную деформацию, соответствующую пределу упругости, принимают в пределах 0,001 – 0,003 %. Соответственно этому допуску предел упругости обозначается через $\sigma_{0,001}$ или $\sigma_{0,003}$. Точки A и B на диаграмме (рисунок 3) настолько близки друг к другу, что часто предел упругости и предел пропорциональности считают совпавшими, хотя это не совсем верно.

За точкой B деформации растут быстрее нагрузки, искривление увеличивается, и в некоторой точке C поведение материала резко меняется:

деформации возрастают без заметного увеличения нагрузки (или даже при постоянной нагрузке) до точки D – материал, как говорят, «течёт» (явление текучести металлов). Горизонтальный (или почти горизонтальный) участок CD на диаграмме растяжения называется площадкой текучести, а напряжение, при котором происходит течение материала (увеличение деформаций при приблизительно постоянной нагрузке), называется пределом текучести и обозначается σ_T , причём

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}, \quad (5)$$

где F_T – нагрузка, соответствующая площадке текучести на рисунке 2 (для Ст.3 предел текучести примерно равен $\sigma_T = 2,4 \cdot 10^8 \text{ Па} = 240 \text{ МПа} = 2400 \text{ кг/см}^2$).

Многие пластичные металлы и сплавы (среднеуглеродистые стали, медь, алюминий, дюралюмин и др.) не имеют четко выраженной площадки текучести на диаграмме растяжения (рисунок 4). Для таких материалов определяется условный предел текучести: напряжение, при котором остаточное удлинение составляет 0,2% (иногда 0,5%). Условный предел текучести обозначается $\sigma_{0,2}$ и определяется по формуле:

$$\sigma_{0,2} = \frac{F_{0,2}}{A_0}, \quad (6)$$

где $F_{0,2}$ – нагрузка, соответствующая остаточному удлинению 0,2% от расчётной длины образца. Для ее определения на оси абсцисс диаграммы откладывают величину остаточного удлинения $ON = 0,0002 l_0$ (рисунок 4) в масштабе удлинений и из точки N проводят прямую, параллельную первоначальному прямолинейному участку диаграммы OA . Ордината точки D пересечения ее с диаграммой растяжения и определяет нагрузку $F_{0,2}$, соответствующую условному пределу текучести $\sigma_{0,2}$.

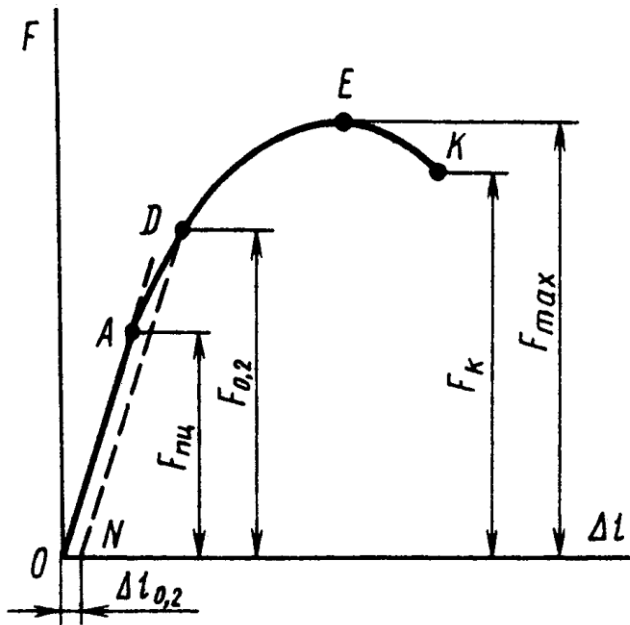


Рисунок 4 – Диаграмма растяжения низколегированной стали.

Определение условного предела текучести

При дальнейшем деформировании образца за точкой D напряжения и растягивающее усилие вновь увеличиваются, то есть происходит упрочнение стали, причём этот процесс идёт до момента достижения силой F своего наибольшего значения.

На диаграмме этапу упрочнения отвечает наклоненная кривая DE (рисунок 2), называемая зоной упрочнения. Напряжения, соответствующие наибольшему значению F_{max} , называются временным сопротивлением или пределом прочности σ_B :

$$\sigma_B = \frac{F_{max}}{A_0}, \quad (7)$$

На диаграмме σ_B соответствует точке E (для Ст. 3 $\sigma_{вр} \approx 4000 \text{ кг/см}^2 = 400 \text{ МПа}$). Ввиду того, что временное сопротивление очень просто определяется из опыта (достаточно разорвать образец с известной площадью A_0 сечения на машине и отметить при этом F_{max}), эта характеристика является основной для суждения о прочности металла.

До достижения предела прочности продольные и поперечные деформации равномерно распределяются по расчетной длине образца. В момент достижения предела прочности поведение образца еще раз резко меняется: деформация образца локализуется в одном, наиболее слабом месте

(или в месте наличия дефектов-надрезов, царапин и т. д.), вследствие чего наблюдается местное поперечное сужение образца, где и начинает образовываться так называемая шейка (рисунок 5), остальные же сечения остаются практически неизменными.

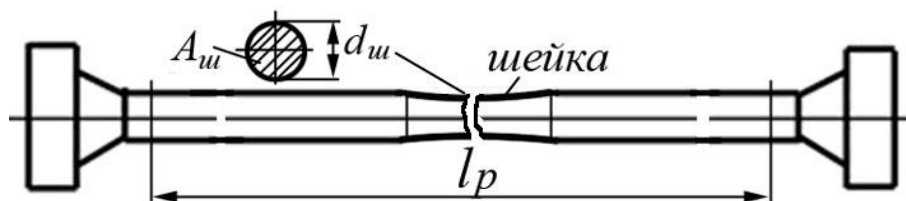


Рисунок 5 – Эскиз образца после испытаний

Вследствие резкого уменьшения поперечного сечения образца для дальнейшего его растяжения нужна все меньшая и меньшая сила и, наконец, в точке *K* (рисунок 3) происходит разрыв (разрушение) образца. Ниспадающая ветвь *EK* диаграммы растяжения называется зоной местной текучести.

Рассмотрев характерные ординаты диаграммы растяжения, устанавливают ряд механических характеристик материала: $\sigma_{\text{пл}}$, σ_y , σ_t , σ_b , которые являются характеристиками прочности материала.

Рассмотрим теперь абсциссы диаграммы σ - ϵ (рисунок 3). Полную деформацию образца при разрыве $\epsilon_{\text{разр}}$ можно разделить на упругую $\epsilon_{\text{разр}}^y$, мгновенно исчезающую после разрыва, и пластическую, которая обычно обозначается через δ и называется относительным остаточным удлинением при разрыве:

$$\delta = \frac{l_p - l_0}{l_0} \cdot 100\%, \quad (8)$$

В формуле (8) l_p – длина расчётной части образца после разрыва, измеренная после соединения частей разорванного образца. Величина δ характеризует пластичность материала. Для Ст.3 $\delta = (21 \dots 23)\%$, а для наиболее распространенных сортов стали $\delta = (8 \dots 28)\%$.

Для оценки пластичности материала определяется и другая характеристика – относительное остаточное сужение поперечного сечения в шейке после разрыва:

$$\psi = \frac{A_0 - A_{\text{ш}}}{A_0} \cdot 100\%, \quad (9)$$

где A_0 – первоначальная площадь поперечного сечения образца;

$A_{\text{ш}}$ – площадь поперечного сечения шейки в месте разрыва (в наиболее тонком месте шейки); для Ст.3 $\psi = 55 \dots 70 \%$.

Величина ψ более точно характеризует пластические свойства, т. е. пластическая деформация по длине образца распределяется неравномерно, и величина δ является некоторым средним удлинением. Чем больше δ и ψ , тем пластичнее материал, поэтому δ и ψ называются механическими характеристиками пластичности материала.

Задание

Получив от преподавателя разорванный образец из низкоуглеродистой стали, машинную диаграмму его испытания и значение максимального усилия испытания F_{max} , определить:

- Масштабный коэффициент сил диаграммы.
- Силы $F_{\text{ПЦ}}$, F_{T} , F_{K} , напряжения $\sigma_{\text{ПЦ}}$, σ_{T} , σ_{B} , $\sigma_{\text{РАЗ}}$.
- Диаметр шейки образца.
- Относительное остаточное удлинение при разрыве.
- Относительное остаточное сужение поперечного сечения в шейке после разрыва.

Вопросы для защиты работы

1. Какие образцы применяют для испытаний?
2. В каких координатах вычерчивается диаграмма растяжения диаграммным аппаратом испытательной машины?
3. Какой вид имеет машинная диаграмма растяжения малоуглеродистой стали?
4. Как строится условная диаграмма растяжения?
5. Какие изменения, происходящие с образцом в процессе растяжения, не учитываются условной диаграммой растяжения?
6. Что называется пределом пропорциональности, пределом упругости, пределом текучести, пределом прочности (или временным сопротивлением разрыву) и как они определяются?
7. Как определить предел пропорциональности по машинной диаграмме растяжения?
8. Какие зоны можно выделить на диаграмме растяжения?
9. Как определить, в какой точке заканчивается зона упругости при испытании на растяжение?
10. По каким участкам образца происходит его растяжение в зоне упрочнения и в зоне местной текучести?
11. Какие деформации называются упругими, а какие пластическими (остаточными)?
12. Почему после нагружения образца выше временного сопротивления нормальное напряжение σ начинает падать?
13. Какие механические характеристики служат для оценки пластичности металлов и как эти характеристики определить?
14. Как определяется предел условной текучести по диаграмме растяжения, не имеющей четко выраженной площадки текучести?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ДАННОЙ ТЕМЕ

1 Филатов, Ю. Е. Введение в механику материалов и конструкций : учебное пособие для вузов / Ю. Е. Филатов. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 320 с. — ISBN 978-5-507-50444-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/433220>

2 Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

3 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

ИЗУЧЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА СЖАТИЕ

Цель и содержание работы: ознакомление с методикой испытаний и определения механических характеристик при сжатии; сравнительное изучение особенностей разрушения пластичных и хрупких, изотропных и анизотропных материалов при испытаниях на сжатие.

Теоретическое обоснование

Для изучения механических характеристик материалов существенное значение имеют испытания не только на растяжение, но и на сжатие, причём для хрупких материалов испытания на сжатие являются основными.

Многие пластичные материалы совсем не разрушаются при сжатии, или разрушаются только при значительной остаточной деформации.

При испытании пластичных материалов (например, стального образца) диаграмма сжатия вначале аналогична диаграмме растяжения: предел пропорциональности и предел текучести почти совпадают, но площадка текучести не получается столь же ярко выраженной, как при растяжении. Довести до разрушения образец из малоуглеродистой стали практически не удастся. Для таких материалов условно принимают предел прочности при сжатии равным пределу прочности при растяжении. Испытание обычно прекращается по достижении нагрузки, в 3 – 5 раз превышающей P_T .

Хрупкие материалы (чугун, камень, бетон и т.п.) разрушаются при сжатии, однако характерным является то, что разрушение происходит при напряжениях, значительно больших, чем при растяжении. При испытании чугунного образца диаграмма сжатия сохраняет качественные особенности диаграммы растяжения, однако сопротивление сжатию значительно выше (в 4 – 5 раз) сопротивления растяжению.

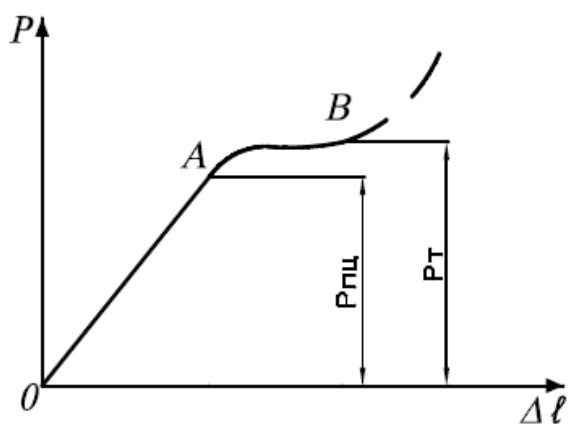


Рисунок 2.1

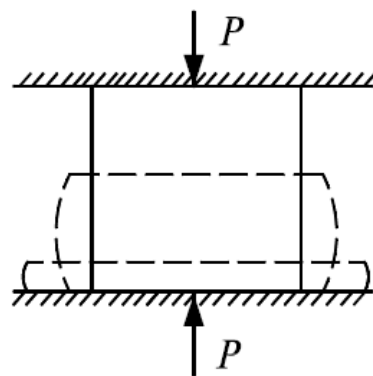


Рисунок 2.2

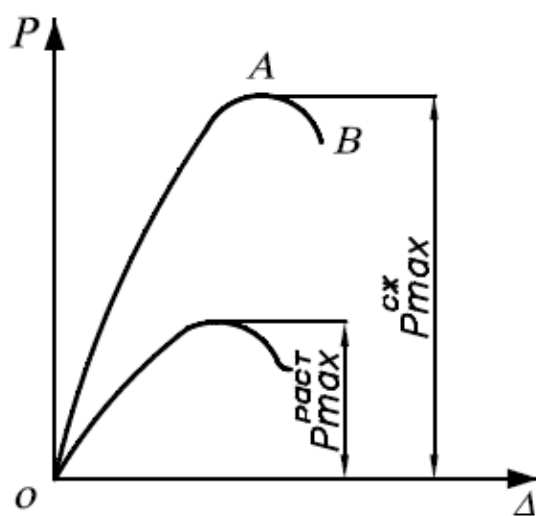
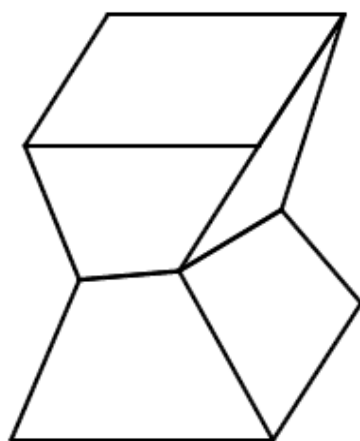


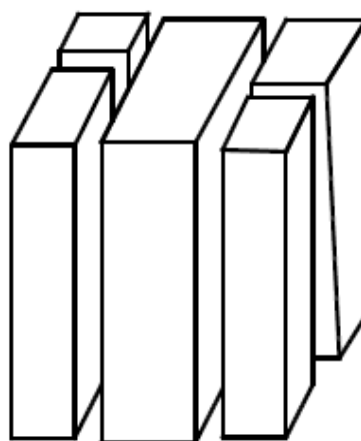
Рисунок 2.3



Рисунок 2.4



а



б

Рисунок 2.5

Все материалы можно условно разделить на два типа: изотропные (имеющие одинаковые механические свойства в разных направлениях) и анизотропные (имеющие различные свойства в разных направлениях).

Древесина является анизотропным материалом и поэтому результаты, полученные при сжатии вдоль и поперек волокон, резко отличны. Характерным для диаграммы сжатия древесины поперек волокон является значение нагрузки, после которой её рост существенно замедляется, а деформация продолжает возрастать. При дальнейшем нагружении древесина не разрушается, а лишь пресуется. За предел прочности в таком случае принимается ордината переломной точки.

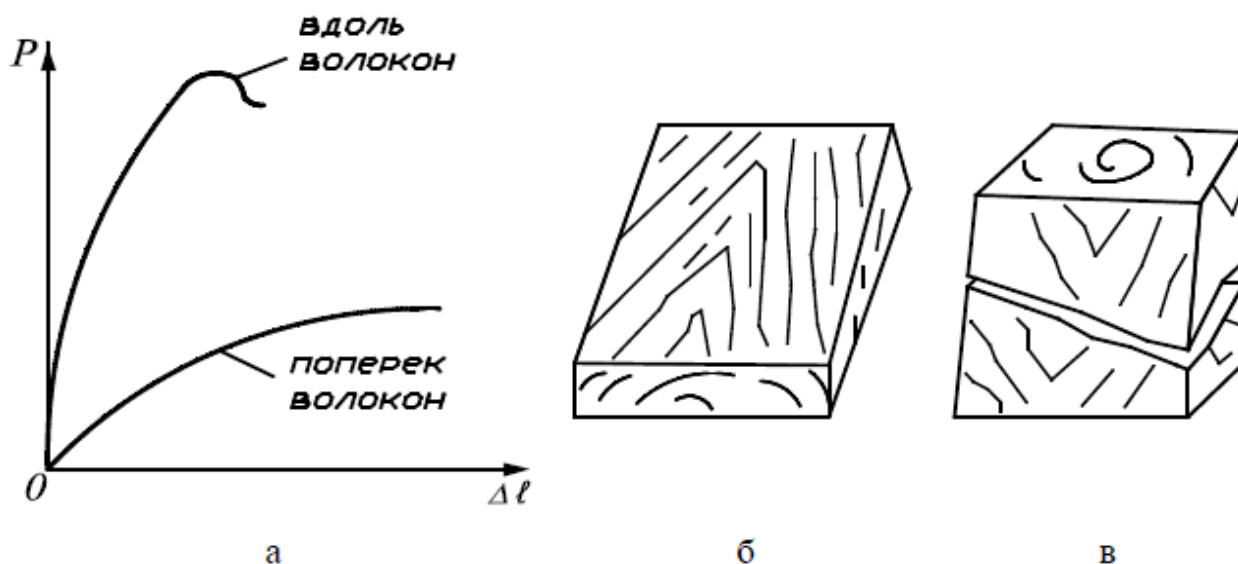


Рисунок 2.6

Для проведения испытаний на сжатие применяется гидравлический пресс П-125 или одна из разрывных машин Р-10, Р-20, Р-50. Разрывные машины снабжены диаграммным аппаратом, автоматически записывающим в процессе испытаний диаграмму сжатия. Для испытания металлов на сжатие используются образцы в виде коротких цилиндров-крешеров, у которых высота равна одному - двум диаметрам. Для других материалов применяются образцы в виде кубиков (стороны кубиков: для дерева 50 мм, для цемента и камня 70 мм, для бетона 200 – 300 мм).

Задание

Выполнить

- краткий конспект основных теоретических положений;
- эскизы всех образцов до и после испытаний;
- диаграммы сжатия;

Вопросы для защиты работы

1. Какова цель работы?
2. Какие образцы используются при испытаниях на сжатие?
3. Чем обусловлено определенное соотношение высоты и поперечных размеров образцов при сжатии?
4. Какой вид имеет диаграмма сжатия малоуглеродистой стали?
5. Какие механические характеристики можно определить при испытании пластичной стали на сжатие?
6. Можно ли довести до разрушения образец из пластичной стали при сжатии?
7. Какой вид имеет диаграмма сжатия для чугунного образца? Её отличие от диаграммы растяжения.
8. Порядок определения механических характеристик при испытаниях чугунного образца на сжатие?
9. Каков характер разрушения чугунного образца при сжатии? Чем объясняется приобретение образцом бочкообразной формы?
10. Какие механические характеристики можно определить при испытании цементного кубика на сжатие?
11. Каков характер разрушения при сжатии цементного кубика при наличии и отсутствии сил трения?
12. Какой вид имеют диаграммы для деревянных образцов, испытанных на сжатие вдоль и поперек волокон? В чем различия этих диаграмм?
13. Можно ли довести до разрушения деревянный образец при сжатии поперек волокон?
14. Каков характер разрушения деревянного образца при испытании на сжатие вдоль волокон?
15. Каков порядок проведения испытаний на сжатие и обработки результатов испытаний?

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛ И НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Теоретическая часть

Растяжением или сжатием называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях нагруженного элемента возникают внутренние усилия, приводимые к равнодействующей, направленной вдоль продольной оси z . Эта равнодействующая называется продольной силой и обозначается N_z . Брус, работающий преимущественно на растяжение или сжатие, принято называть стержнем.

Из условия равновесия отсеченной части бруса следует, что продольная сила N_z в произвольном поперечном сечении численно равна алгебраической сумме проекций на ось бруса z внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Продольную силу, вызывающую растяжение, считают положительной (рисунок 2.1); продольную силу, вызывающую сжатие – отрицательной (рисунок 2.2).

Для определения значений внутренних усилий в поперечных сечениях бруса строят эпюры продольных сил. Эпюра продольных сил N_z представляет собой график, выражающий изменение величины продольной силы N_z по длине стержня.

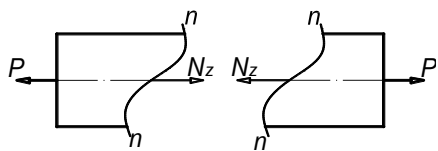


Рисунок 2.1 – $N_z > 0$

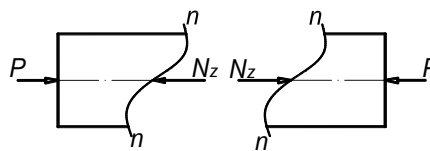


Рисунок 2.2 – $N_z < 0$

Для построения эпюр внутренних усилий при растяжении – сжатии используют метод сечений:

1) определяют опорные реакции (для консольной схемы нагружения опорные реакции можно не определять);

2) разбивают стержень на участки нагружения, в пределах которых закон распределения внутренних усилий в поперечном сечении стержня не меняется; границами участков нагружения являются начало и конец стержня, а также сечения, в которых:

- приложены сосредоточенные силы,
- начинается и заканчивается действие распределенной нагрузки,
- изменяется площадь поперечного сечения стержня;

3) рассекают стержень произвольным сечением в пределах первого участка нагружения;

4) отбрасывают часть стержня, содержащую большее количество внешних нагрузок (для консольной схемы нагружения следует отбросить часть стержня, содержащую жесткую заделку, если опорная реакция предварительно не определялась);

5) заменяют действие отброшенной части стержня внутренним усилием – продольной силой N_{zi} (в тех случаях, когда направление силы N_{zi} неизвестно, следует принимать ее положительной, то есть растягивающей, и направлять на схеме вектор N_{zi} от сечения);

6) составляют уравнение равновесия, из которого определяют величину и направление продольной силы N_{zi} (если после решения уравнения сила N_{zi} получилась со знаком плюс, то стержень в данном сечении растянут, со знаком минус – сжат);

7) выполняют пункты 3 – 6 для каждого участка нагружения;

8) по расчетным значениям строят эпюру продольных сил N_z ; для построения эпюры продольных сил проводят прямую, параллельную оси бруса (нулевую или базовую линию), перпендикулярно к которой откладываются ординаты, изображающие в некотором масштабе величины продольных сил в соответствующих сечениях стержня; положительные значения продольной силы откладывают выше, а отрицательные – ниже нулевой линии; заштриховывают эпюру тонкими вертикальными линиями, а внутри поля эпюры в кружке указывают знак (плюс или минус);

9) определяют значения нормальных напряжений для каждого участка нагружения стержня по формуле

$$\sigma_i = \frac{N_{zi}}{F_i}, \quad (2.1)$$

где σ_i – нормальное напряжение на i -м участке стержня;

N_{zi} – значение продольной силы на i -м участке; в формулу (2.1) значения продольной силы следует подставлять с учетом знака;

F_i – площадь поперечного сечения стержня на рассматриваемом участке стержня;

10) по данным расчетов пункта 9 строят эпюру нормальных напряжений;

11) построенные эпюры продольных сил и нормальных напряжений следует проверить на соответствие следующим правилам:

- в сечениях, где приложены сосредоточенные силы, на эпюре продольных сил возникают «скачки» (мгновенные изменения значения продольной силы), численно равные приложенной силе и направленные вверх, если сила вызывает растяжение и вниз, если приложенная сила вызывает сжатие;

- «скачки» на эпюрах нормальных напряжений возникают в тех же сечениях, что и на эпюрах продольных сил, а также дополнительно в сечениях, где изменяется площадь поперечного сечения стержня;

- если на участке нагружения отсутствует распределенная нагрузка, эпюры продольных сил и нормальных напряжений для данного участка ограничены прямыми, параллельными оси стержня;

- знак нормальных напряжений на каждом участке нагружения соответствует знаку продольной силы для этого участка;

12) из анализа эпюры нормальных напряжений определяют опасное сечение; при растяжении (сжатии) опасным считается сечение или участок стержня, в котором нормальные напряжения максимальны по абсолютной величине (по модулю).

Пример 2.1

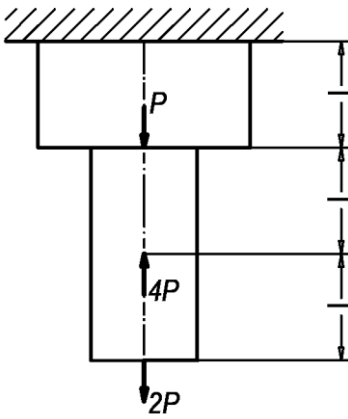


Рисунок 2.3

Для ступенчатого стержня, неподвижно заделанного в одном сечении и нагруженного сосредоточенными силами, как показано на расчетной схеме (рисунок 2.3), требуется построить эпюры продольных сил N_z и нормальных напряжений σ ; определить опасное сечение.

Решение

Величину продольной силы N_z определим методом сечений. Для этого разобьем стержень на участки нагружения, начиная от сечения, максимально удаленного от закрепления. Границами участков нагружения будем считать сечения, в которых приложены внешние силы, а также сечения, в которых изменяются размеры поперечного сечения стержня (на рисунке 2.4 а эти участки отмечены римскими цифрами). Проведем произвольное сечение $I-I$ на участке I и, отбросив верхнюю часть стержня, рассмотрим условие равновесия оставшейся (нижней) части, изображенной отдельно на рисунке 2.4 б). На оставшуюся часть действует сила P_1 и искомое усилие N_{z1} . Направление вектора N_{z1} на схеме выбрано произвольно. Для оставшейся части стержня сумма проекций всех сил на ось z запишется в виде

$$N_{z1} = 2P.$$

Продольная сила N_{z1} получилась со знаком «плюс», значит она действительно направлена от сечения, как и было предварительно принято (рисунок 2.4 б); таким образом, первый участок стержня испытывает растяжение.

Проведем произвольное сечение $II-II$ на участке II , отбросим верхнюю часть стержня и рассмотрим равновесие оставшейся нижней части, изображенной отдельно на рисунке 2.4 в. На оставшуюся часть действуют силы $2P$ и $4P$ и искомое усилие N_{z2} . Проецируя эти силы на ось z , получаем

$$N_{z2} = 2P - 4P = -2P.$$

Знак «минус» указывает, что в действительности сила N_{z2} направлена к сечению, а не от сечения, как было предположено ранее (рисунок 2.4 в). Следовательно, участок *II* испытывает сжатие.

Проведем произвольное сечение *III–III* на участке *III*, отбросим верхнюю часть стержня и рассмотрим равновесие оставшейся нижней его части, изображенной отдельно на рисунке 2.4 д. На оставшуюся часть действуют силы $2P$, $4P$ и P и искомое усилие N_{z3} . Проецируя эти силы на ось z , получаем

$$N_{z3} = -4P + 2P + P = -P.$$

Знак «минус» указывает, что первоначальное предположение о том, что сила N_{z3} направлена от сечения, неверно.

Построим график (эпюру), показывающий, как меняется продольная сила по длине стержня. Проведя ось абсцисс графика параллельно оси стержня, откладываем в произвольно выбранном масштабе найденные значения продольных сил по оси ординат. Положительные значения продольных сил откладываем вправо от оси эпюры, а отрицательные – влево (рисунок 2.4 д).

Эпюру нормальных напряжений получим, разделив значения N_z для каждого участка на величины соответствующих площадей поперечных сечений стержня (рисунок 2.4 е).

$$\text{Для первого участка } \sigma_1 = \frac{N_{z1}}{F_1} = \frac{2P}{F}.$$

$$\text{Для второго участка } \sigma_{II} = \frac{N_{z2}}{F_{II}} = -\frac{2P}{F}.$$

$$\text{Для третьего участка } \sigma_{III} = \frac{N_{z3}}{F_{III}} = -\frac{P}{2F} = -\frac{0,5P}{F}.$$

Построим график (эпюру), показывающий, как меняется нормальное напряжение по длине стержня. Проведя ось абсцисс графика параллельно оси стержня, откладываем в произвольно выбранном масштабе найденные значения нормальных напряжений по оси ординат. Положительные значения нормальных напряжений откладывают вправо от оси эпюры, а отрицательные – влево

(рисунок 2.4 е). Построенные таким образом эпюры заштриховываются тонкими линиями, перпендикулярными оси стержня.

В сечениях, где приложены внешние силы, значения продольной силы на эпюре (рисунок 2.4 д) меняются скачкообразно. На эпюре нормальных напряжений скачкообразное изменение значений наблюдается еще и в сечениях, где изменяется площадь поперечного сечения стержня (рисунок 2.4 е).

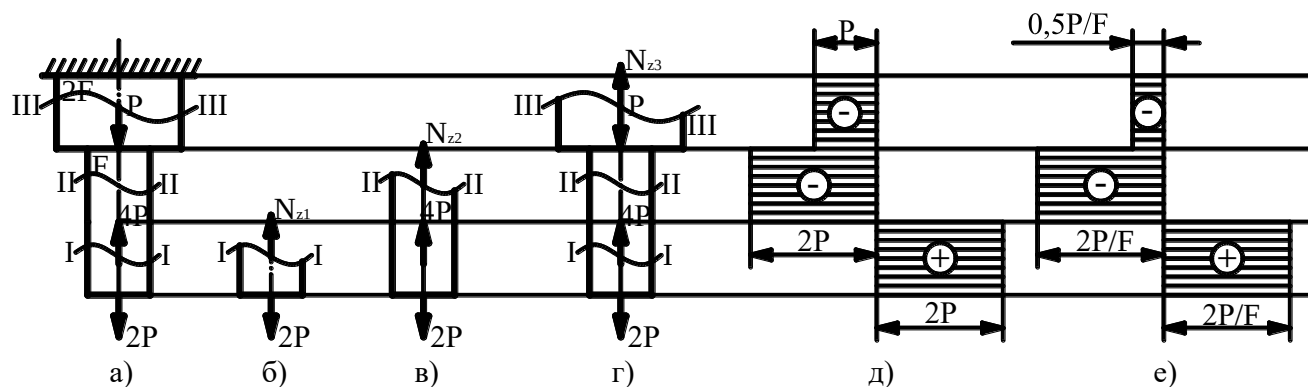
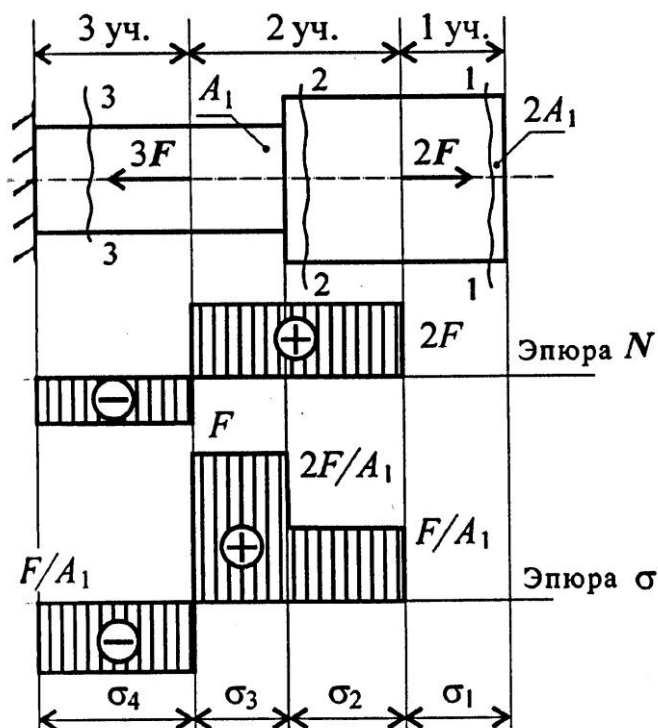


Рисунок 2.4

Пример 2.2

Построить эпюры продольных внутренних сил и напряжений для стержня, схема которого показана на рисунке.



Задания

Каждый студент выбирает задание для самостоятельного выполнения по номеру варианта из таблицы 2.2.

Задание 2.1

Для ступенчатого стержня, изображенного на схеме 1 (таблица 2.1), построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений, определить опасное сечение.

Задание 2.2

Для ступенчатого стержня, изображенного на расчетной схеме 2 (таблица 2.1), построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений, определить опасное сечение.

Задание 2.3

Для ступенчатого стержня, изображенного на расчетной схеме 3 (таблица 2.1), построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений, определить опасное сечение. Проверить прочность стержня в опасном сечении, если площадь поперечного сечения $F = 20 \text{ см}^2$, усилие $P = 50 \text{ кН}$, допускаемые напряжения для материала стержня $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.

Таблица 2.1

Номер схемы	Схема к заданию 2.1	Схема к заданию 2.2	Схема к заданию 2.3
10			
1			
2			
3			

Продолжение таблицы 2.1

4			
5			
6			
7			
8			
9			

Таблица 2.2

Номер варианта	Схема к заданию 2.1 (таблица 2.1)	Схема к заданию 2.2 (таблица 2.1)	Схема к заданию 2.3 (таблица 2.1)
1	1	3	1
2	2	4	2
3	3	5	3
4	4	6	4
5	5	7	5
6	6	8	6
7	7	9	7
8	8	10	8
9	9	1	9
10	10	2	10
11	1	4	3
12	2	5	4
13	3	6	5
14	4	7	6
15	5	8	7
16	6	9	8
17	7	10	9
18	8	1	10
19	9	2	1
20	10	3	2
21	1	2	4
22	2	3	5
23	3	4	6
24	4	5	7
25	5	6	8
26	6	7	9
27	7	8	10
28	8	9	1
29	9	10	2
30	10	1	3
31	1	5	2
32	2	6	3
33	3	7	4
34	4	8	5
35	5	9	6
36	6	10	7
37	7	1	8
38	8	2	9
39	9	3	10
40	10	4	1
41	1	9	5
42	2	10	6
43	3	1	7
44	4	2	8
45	5	3	9

Вопросы к практическому занятию

- a. Какой вид деформации называется растяжением (сжатием)?
- b. Что называется эпюрой продольных сил? Что называется эпюрой нормальных напряжений?
- c. Как определяется знак продольной силы? Как определяется знак нормальных напряжений?
- d. Как определить опасное сечение стержня при растяжении (сжатии)?
- e. Каким методом пользуются при построении эпюр произвольно нагруженных стержней? Сформулируйте правила проверки правильности построения эпюр продольных сил и нормальных напряжений при растяжении (сжатии).
- f. Постройте эпюры продольных сил и нормальных напряжений для стержня, схема нагружения которого задана преподавателем.

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Теоретическая часть

При постоянных на данном участке стержня значениях площади поперечного сечения и продольной силы, можно на основании закона Гука $\sigma = E\varepsilon$ записать формулу Гука $N/F = E\Delta l/l$, из которой выразить изменение длины участка стержня $\Delta l = Nl/(EF)$. Перемещение λ произвольного участка бруса равно изменению длины участка, заключённого между этим сечением и заделкой.

Пример 2.5. Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений по длине бруса, изображенного на рис. 2.19, а.

Решение. Разбиваем брус на участки, начиная от свободного конца. Границы участков проходят через точки приложения внешних сил и места изменения размеров поперечного сечения. Строим эпюры продольных сил (рис. 2.19, б) и нормальных напряжений (рис. 2.19, в), как изложено выше в примерах 2.1 и 2.3.

Для построения эпюры перемещений достаточно определить перемещения сечений, совпадающих с границами участков, так как между указанными сечениями эпюра линейна (см. стр. 46).

Сечение A неподвижно, т. е. $\lambda_A = 0$ (построение эпюры перемещений следует всегда начинать от неподвижного или условно принятого неподвижным сечения).

Перемещение сечения B равно изменению длины (в данном случае удлинению) участка AB (участка V) бруса:

$$\lambda_B = \Delta l_V = \frac{N_V l}{E \cdot 2,5F} = \frac{3Pl}{E \cdot 2,5F} = 1,2 \frac{Pl}{EF}.$$

Сечение B перемещается вправо; соответствующую ординату условно будем считать положительной и отложим (в выбранном масштабе) вверх от оси эпюры (рис. 2.19, г).

Перемещение сечения C равно алгебраической сумме изменений длин участков V и IV бруса:

$$\begin{aligned} \lambda_C = \Delta l_V + \Delta l_{IV} &= \frac{N_V l}{E \cdot 2,5F} + \frac{N_{IV} l}{E \cdot 2,5F} = \frac{3Pl}{E \cdot 2,5F} - \frac{Pl}{E \cdot 2,5F} = \\ &= 0,8 \frac{Pl}{EF}. \end{aligned}$$

То же самое можно записать несколько компактнее:

$$\lambda_C = \lambda_B + \Delta l_{IV} = 1,2 \frac{Pl}{EF} - \frac{Pl}{E \cdot 2,5F} = 0,8 \frac{Pl}{EF}.$$

Сечение C также перемещается вправо.

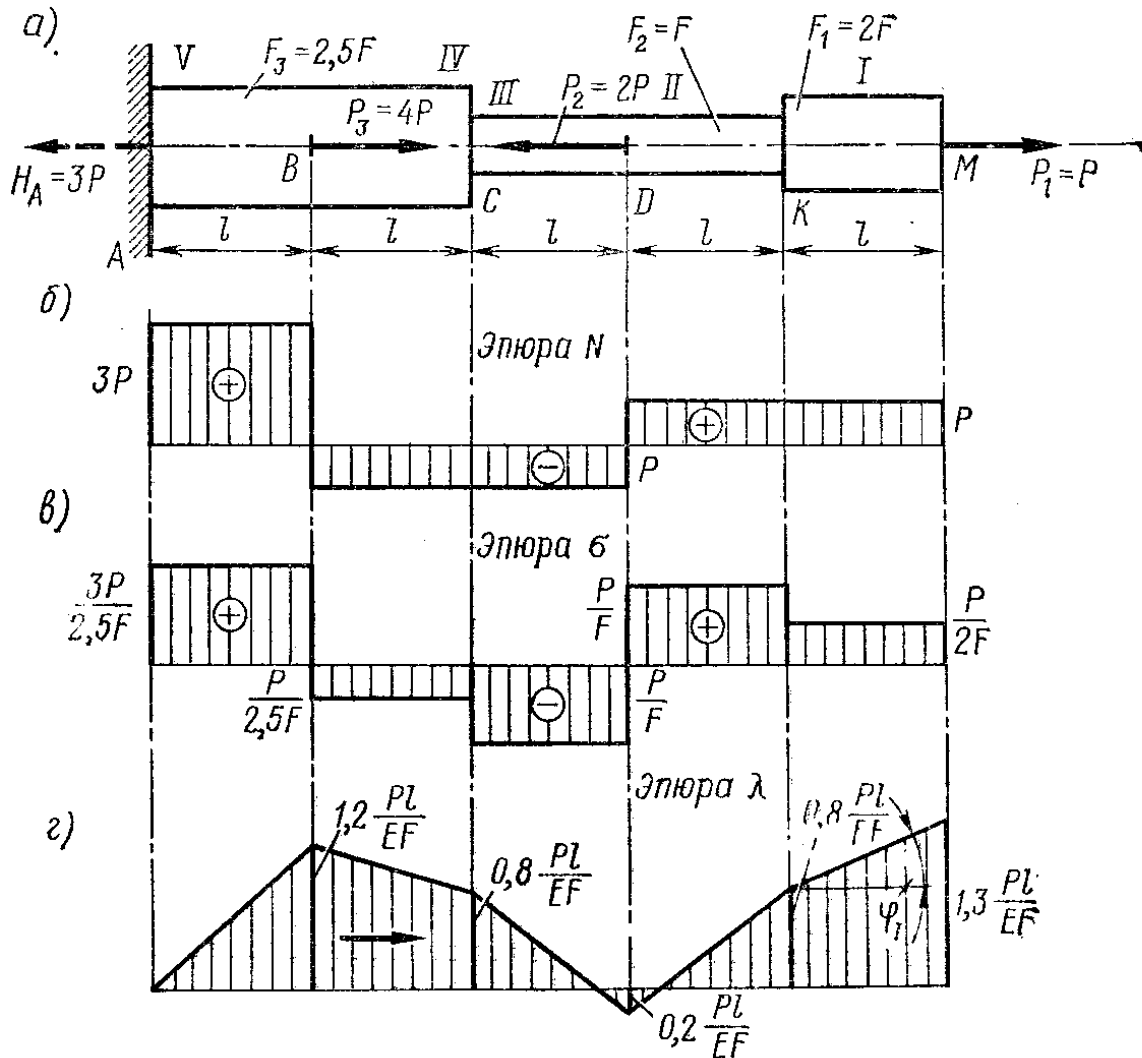


Рис. 2.19

Аналогично

$$\lambda_D = \lambda_C + \Delta l_{III} = \lambda_C + \frac{N_{III}l}{EF} = 0,8 \frac{Pl}{EF} - \frac{Pl}{EF} = -0,2 \frac{Pl}{EF}.$$

Знак минус указывает, что сечение D перемещается влево (так как ранее было принято считать перемещения вправо положительными).

Значения λ_K и λ_M указаны на эпюре (рис. 2.19, з); читателю рекомендуется самостоятельно проверить определение соответствующих ординат.

Тангенс угла наклона эпюры к оси абсцисс пропорционален нормальным напряжениям, возникающим в поперечных сечениях данного участка бруса. Например (рис. 2.19, з):

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\lambda_M - \lambda_K}{l} = \frac{\Delta l_I}{l} = \varepsilon_I = \frac{\sigma_I}{E} = \frac{P}{E \cdot 2F}.$$

Задания

Для ступенчатых стержней из предыдущей работы построить эпюры перемещений, считая заделку неподвижным сечением.

Вопросы к практическому занятию

1. Закон Гука при растяжении и сжатии.
2. Формула Гука для определения перемещения границы участка.
3. Как зависит изменение длины участка от его начальной длины?

ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ СТЕРЖНЕЙ

Цель работы: получение навыков прочностного расчёта при растяжении и сжатии.

Задача: проверка стержней кронштейна на прочность.

Теоретическая часть

Условие прочности при действии продольной внутренней силы N приведём в российских и международных обозначениях.

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm}$$

где σ – наибольшее нормальное напряжение, возникающее в рассчитываемом элементе при рабочей нагрузке;

$[\sigma] = \sigma_{adm}$ – допускаемое нормальное напряжение (*admissible* – допустимый);

N – внутренняя продольная сила;

A – площадь поперечного сечения стержня.

Допускаемое нормальное напряжение определяют по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[s]} \quad \text{или} \quad \sigma_{adm} = \frac{\sigma_{dan}}{S_{adm}},$$

где $\sigma_{пред} = \sigma_{dan}$ – предельное (опасное) напряжение, при котором в материале появляются признаки разрушения или заметные остаточные деформации (*dangerous* – опасный).

$[s] = s_{adm}$ – допускаемый коэффициент запаса прочности. При статическом приложении нагрузки принимают: для пластичных материалов, например, сталей $1,4 \leq [s] \leq 2,5$, для хрупких материалов $2,5 \leq [s] \leq 3$.

Опасным напряжением при статической нагрузке является: для пластичных материалов $\sigma_T = \sigma_y$ – предел текучести материала (индекс y от английского *yield* – текучесть); для хрупких материалов $\sigma_B = \sigma_u$ – предел прочности материала (индекс u от английского *ultimate* – предел). Поскольку

хрупкие материалы неодинаково сопротивляются растяжению и сжатию, для них определяют два допускаемых напряжения. При растяжении $[\sigma_p] = \sigma_{t adm}$ (t – от английского *tension* – растяжение), при сжатии $[\sigma_c] = \sigma_{c adm}$ (c – от английского *compression* – сжатие).

Имея запись условия прочности, можно решать задачи трёх типов:

- 1) Подставить известные значения N , A , σ в неравенство $\frac{N}{A} \leq [\sigma]$ и

проверить его выполнение, т.е. выполнить проверочный расчёт.

- 2) Найти минимально необходимую площадь поперечного сечения

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} - \text{проектный расчёт.}$$

- 3) Определить допускаемую нагрузку $N \leq [\sigma]A$.

Как правило, при изготовлении стержней со стандартными или нормализованными профилями, полученную из проектного расчёта площадь нужно округлить до одного из стандартных значений. При этом действительный коэффициент запаса прочности $s = \frac{[\sigma]}{\sigma} \geq [s]$ может быть меньше допускаемого только на величину погрешности расчётов (не более 3%). Значительное превышение значения s по сравнению с $[s]$, когда можно выбрать меньшее стандартное значение площади, ведёт к неоправданному удорожанию и утяжелению конструкции.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Используя значения продольных сил в стержнях ВА и ВС, которые были найдены аналитическим методом:

- 1) Проверить прочность стержней, если они выполнены из стали Ст5, имеющей предел текучести $\sigma_t = \sigma_y = 200$ Мпа. Допускаемый коэффициент запаса прочности принять $[s] = s_{adm} = 2$. Площади сечений $A_{BC} = 700 \text{ мм}^2$, $A_{BA} = 1000 \text{ мм}^2$.

- 2) Если расчётное напряжение больше допускаемого более чем на 3 процента, или если расчётное напряжение меньше допускаемого более чем на 15 процентов – выбрать для данного стержня другую площадь поперечного

сечения при том же материале. Площадь округлять до целого числа сотен квадратных миллиметров.

Решение

Для стали Ст5, имеющей предел текучести $\sigma_T = \sigma_y = 200$ МПа, при коэффициенте запаса прочности $[s] = s_{adm} = 2$, допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[s]} = \frac{200}{2} = 100 \text{ МПа}.$$

Определяем расчётные нормальные напряжения в стержнях при расчётных значениях сил $N_C = 73,95$ кН, $N_A = 40,3$ кН и заданных площадях поперечных сечений $A_{BC} = 700 \text{ мм}^2$, $A_{BA} = 1000 \text{ мм}^2$:

$$\sigma_{BC} = \frac{N_C}{A_{BC}} = \frac{73,95 \cdot 10^3}{7 \cdot 10^2} = 105,6 \text{ МПа} > 100 \text{ МПа} - \text{условие прочности не выполняется};$$

$$\sigma_{BA} = \frac{N_A}{A_{BA}} = \frac{40,3 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^2} = 40,3 \text{ МПа} < 100 \text{ МПа} - \text{условие прочности выполняется}.$$

$$\text{Перегрузка стержня ВС составляет } \delta_{BC} = \frac{105,6 - 100}{100} = \frac{5,6}{100}, \text{ т.е. больше } 3\%.$$

Площадь его сечения нужно увеличить, как минимум, до

$$A_{BC} \geq \frac{N_C}{[\sigma]} = \frac{73,95 \cdot 10^3}{100} = 739,5 \text{ мм}^2. \text{ Но стержня с такой площадью сечения у}$$

нас нет, а есть с площадью 700 мм^2 и 800 мм^2 . При площади 700 мм^2 условие прочности не выполняется и перегрузка больше 3% (см. выше). Если возьмём площадь 800 мм^2 , то

$$\sigma_{BC} = \frac{N_C}{A_{BC}} = \frac{73,95 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^2} = 92 \text{ МПа} < 100 \text{ МПа} - \text{условие прочности выполняется и}$$

$$\text{недогрузка стержня ВС составляет } \Delta_{BC} = \frac{100 - 92}{100} = \frac{8}{100}, \text{ т.е. меньше } 15\%.$$

Поэтому для стержня ВС принимаем окончательно площадь $A_{BC} = 8 \text{ см}^2$.

$$\text{Недогрузка стержня ВА составляет } \Delta_{BA} = \frac{100 - 43}{100} = \frac{57}{100}, \text{ т.е. больше } 15\%.$$

Площадь его сечения можно уменьшить до

$$A_{BA} \geq \frac{N_A}{[\sigma]} = \frac{40,3 \cdot 10^3}{100} = 403 \text{ мм}^2.$$

Если округлить площадь до 400 мм², то расчётное напряжение будет

$$\sigma_{BA} = \frac{N_A}{A_{BA}} = \frac{40,3 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^2} = 100,75 \text{ МПа}$$

и перегрузка составит $\delta_{BA} = \frac{100,75 - 100}{100} = \frac{0,75}{100}$, т.е. меньше 3%, что допустимо.

Поэтому для стержня ВА принимаем окончательно площадь $A_{BA} = 4 \text{ см}^2$.

Задание

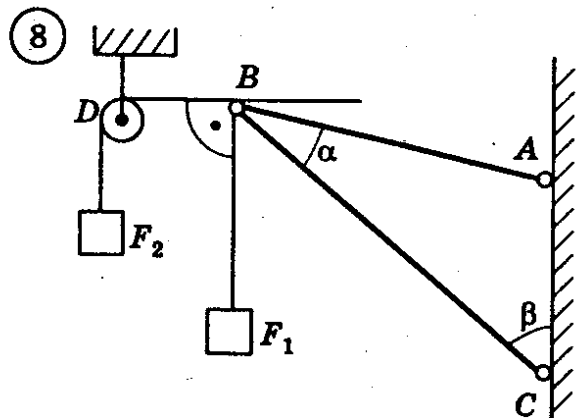
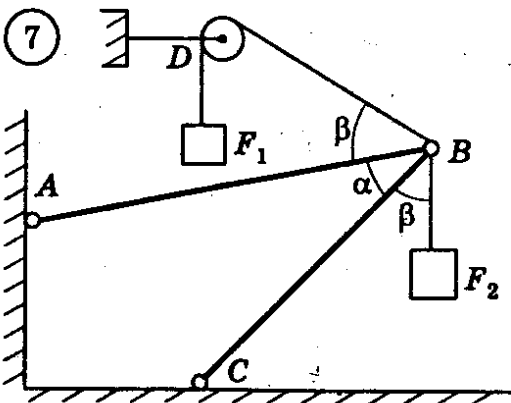
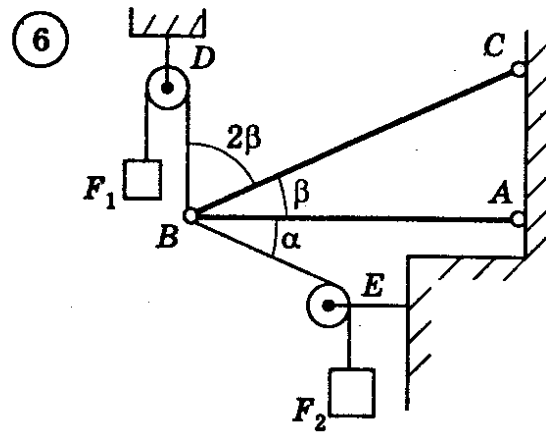
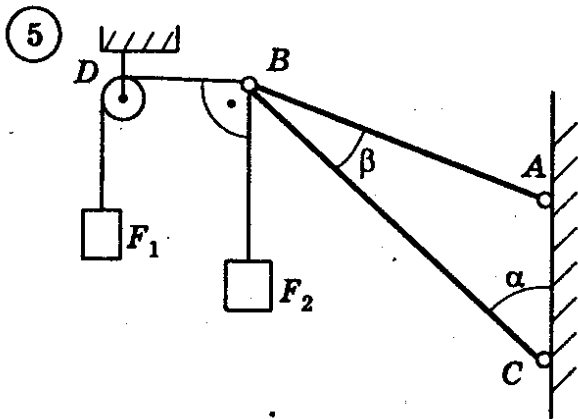
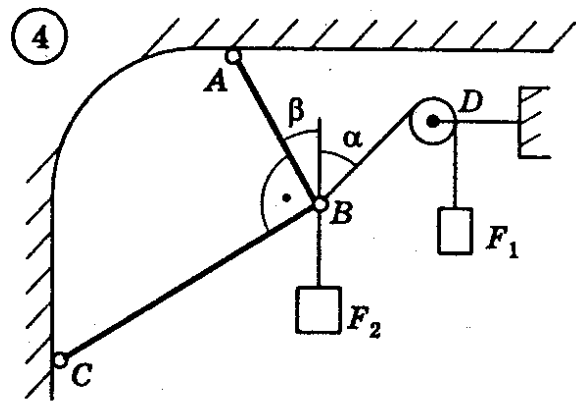
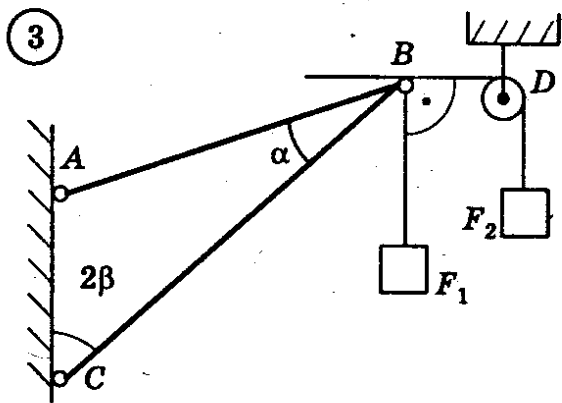
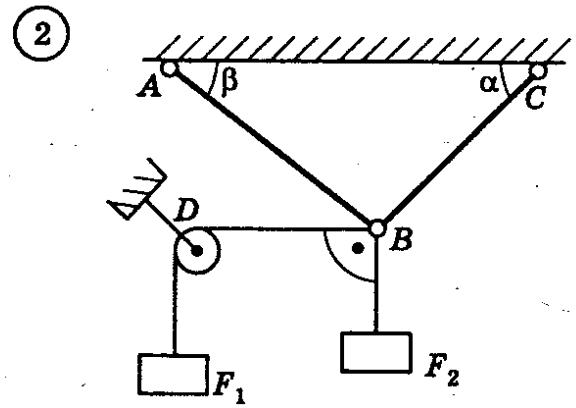
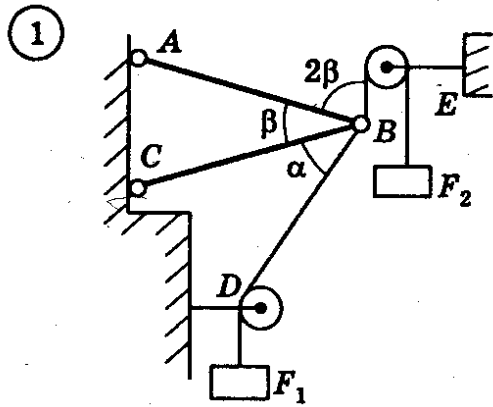
Используя значения продольных сил в стержнях ВА и ВС, которые были найдены в работе «Аналитический и графоаналитический методы сложения сил плоской сходящейся системы»:

1) Проверить прочность стержней, если они выполнены из стали Ст5, имеющей предел текучести $\sigma_T = \sigma_y = 200 \text{ МПа}$. Допускаемый коэффициент запаса прочности принять $[s] = s_{adm} = 2$. Площади сечений A_{BC} и A_{BA} указаны в таблице данных для расчёта (таблица 1).

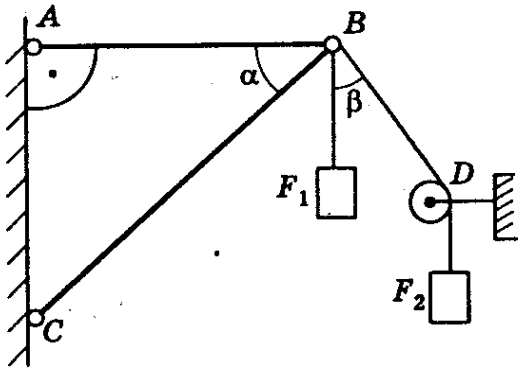
2) Если расчётное напряжение больше допускаемого более чем на 3 процента, или если расчётное напряжение меньше допускаемого более чем на 15 процентов – выбрать для данного стержня другую площадь поперечного сечения при том же материале. Площадь округлять до целого числа квадратных сантиметров.

Схемы конструкций приведены в таблице 1. Как правило, номер схемы выбирается по номеру студента в списке группы. Числовые данные приведены в таблице 2. Номер варианта числовых данных, общий для всех студентов группы, назначает преподаватель.

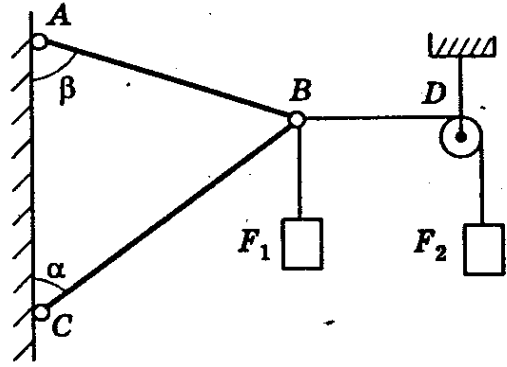
Таблица 1 – Схемы к заданию



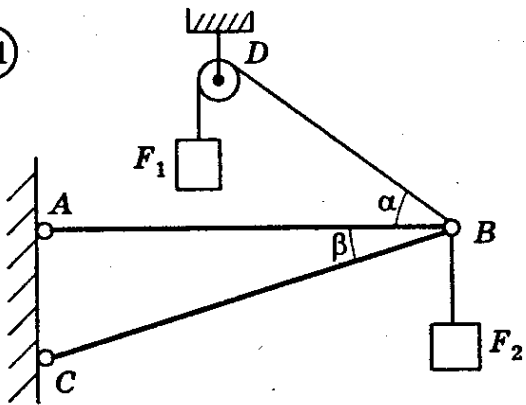
⑨



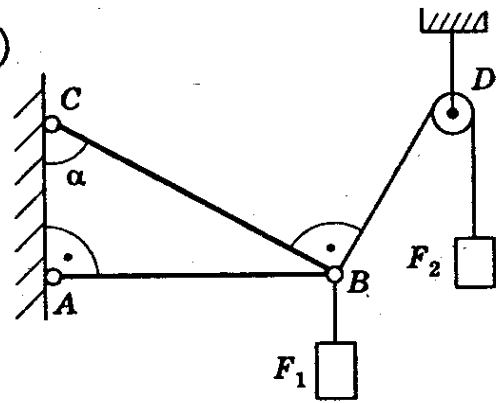
⑩



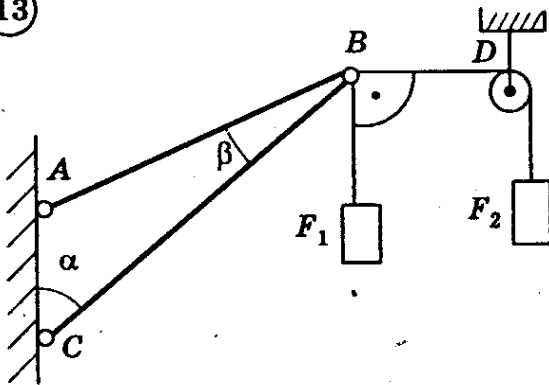
⑪



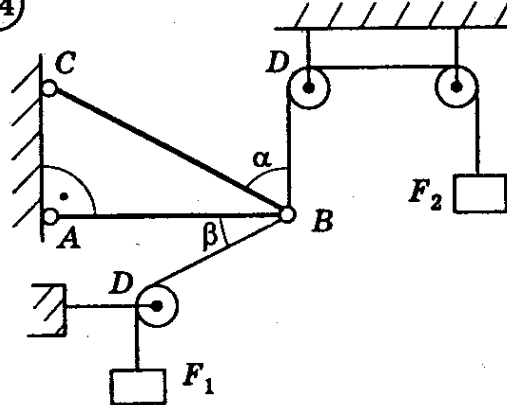
⑫



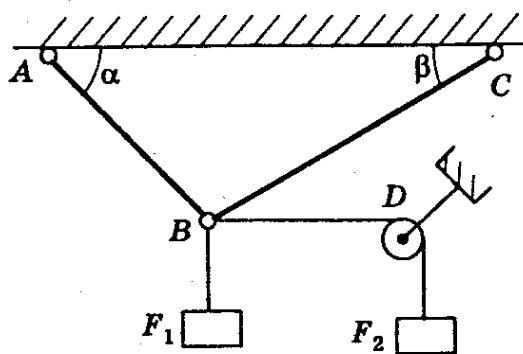
⑬



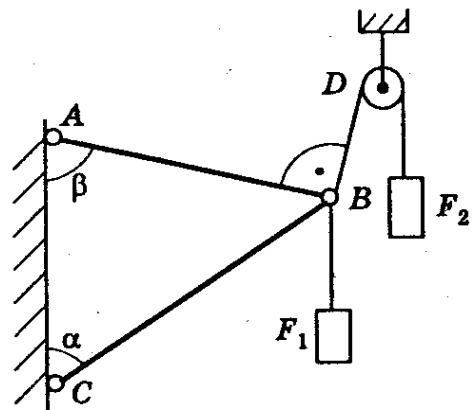
⑭

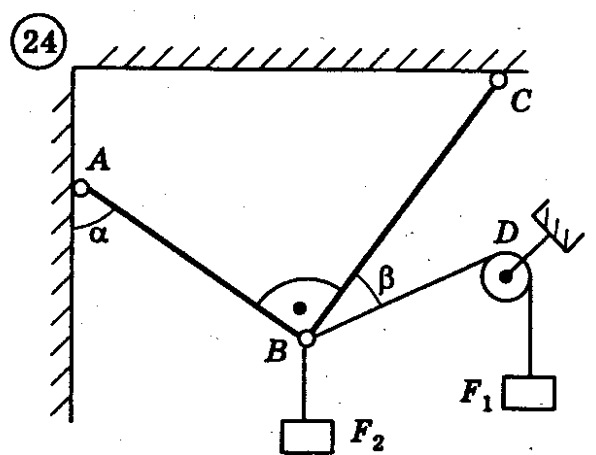
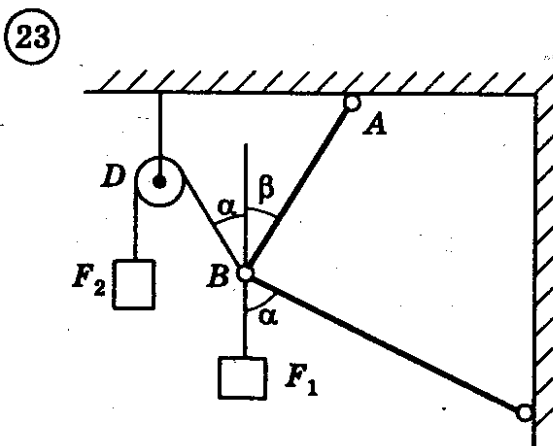
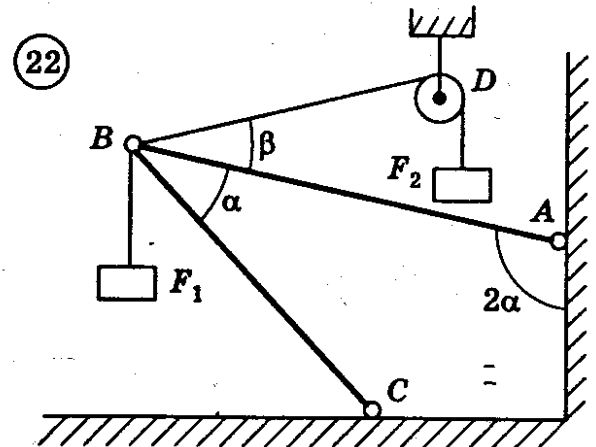
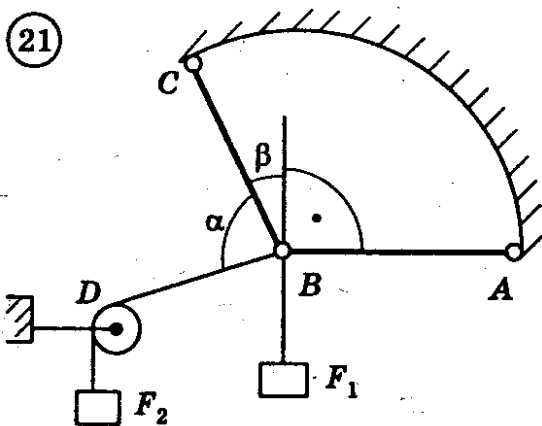
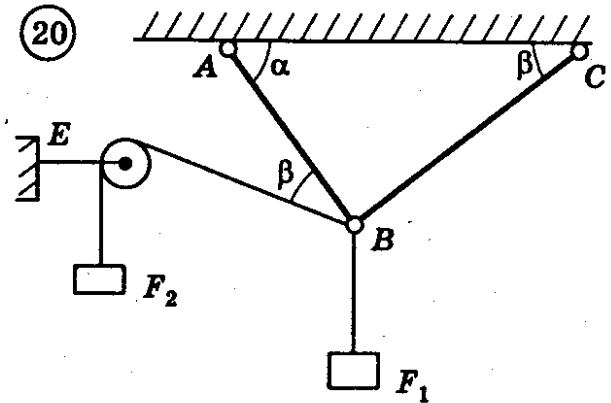
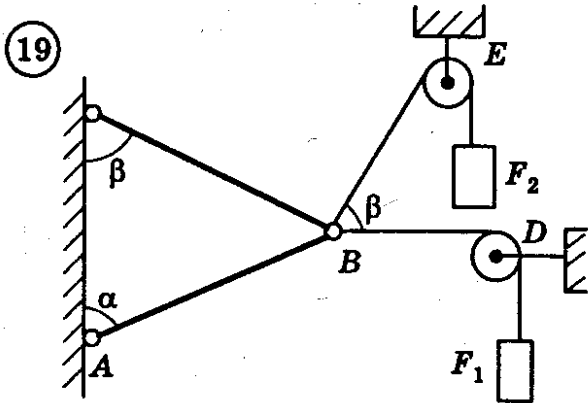
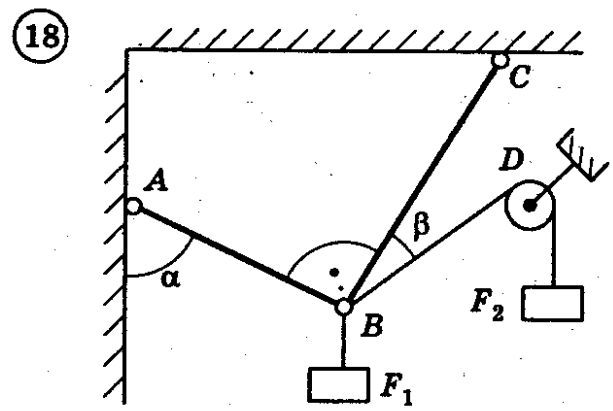
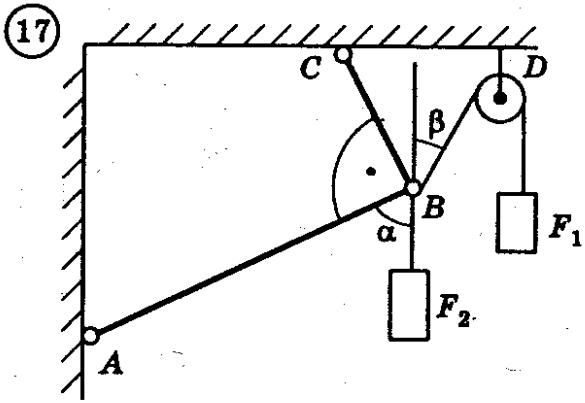


⑮

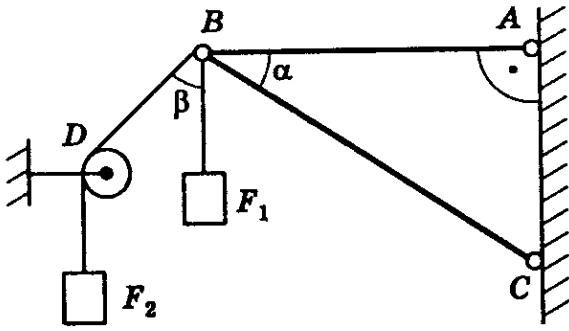


⑯

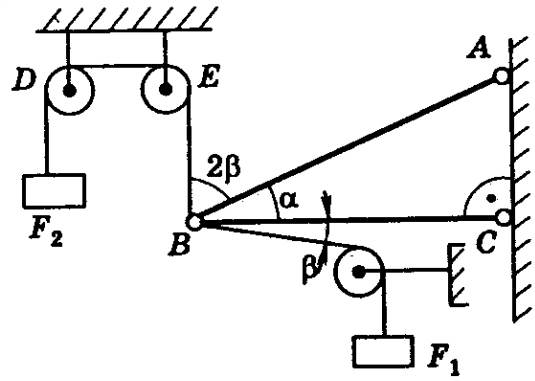




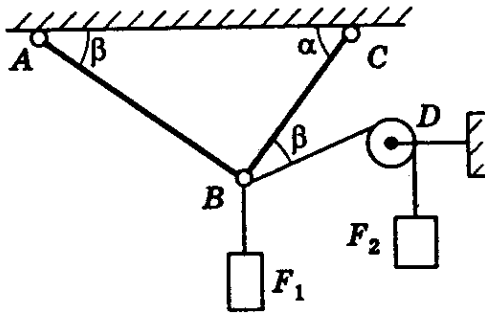
(25)



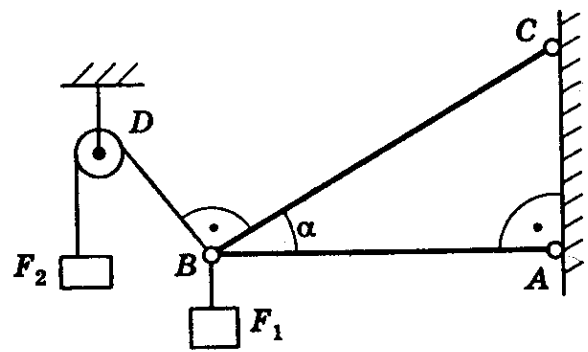
(26)



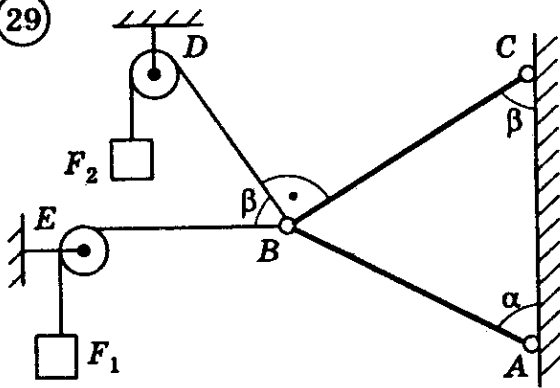
(27)



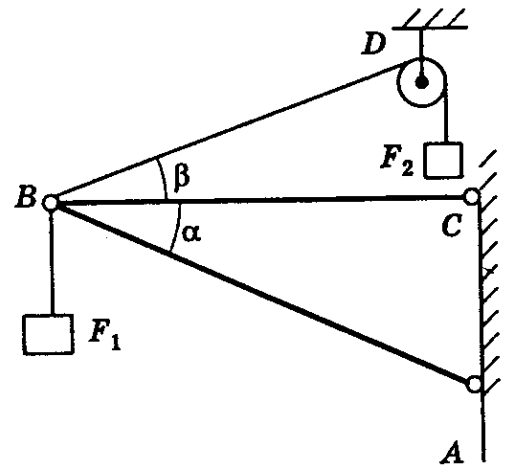
(28)



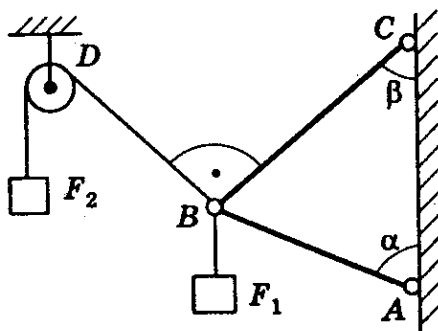
(29)



(30)



(31)



(32)

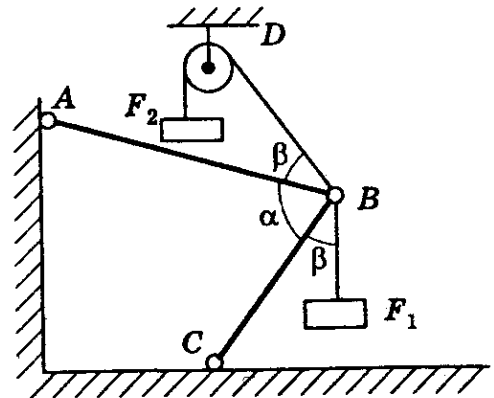


Таблица 2 – Числовые данные для определения сил в стержнях (и проверки стержней на прочность – в одном из следующих занятий)

Номер варианта	Угол наклона, град		Модуль силы, кН		Площадь поперечного сечения стержня, см ²	
	α	β	F_1	F_2	A_1	A_2
1	50	40	100	90	10	16
2	40	30	140	100	12	14
3	50	20	120	100	14	12
4	60	10	100	90	16	10
5	70	10	90	80	18	8
6	80	20	80	120	8	10
7	80	30	100	70	10	12
8	70	40	120	80	12	14
9	60	50	110	90	14	16
10	50	30	140	100	16	18
11	40	30	140	100	18	20
12	40	20	140	90	20	18
13	50	40	120	80	18	16
14	60	50	120	70	16	14

Вопросы по прочности стержней

1. Как направлены внутренние силы при растяжении или сжатии?
2. Как определяют механическое напряжение при растяжении или сжатии?

3. Какие значения напряжений выбирают в качестве предельных для пластичных материалов?
4. Какие значения напряжений выбирают в качестве предельных для хрупких материалов?
5. Коэффициент запаса прочности расчётный и допускаемый.
6. Три формы записи условия прочности.

Литература

1. Прикладная механика / Х.С. Гумерова. - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. - ISBN 978-5-7882-1571-6; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=428011&sr=1
2. [Бегун П. И.](#) , [Кормилицын О. П.](#) Прикладная механика. Учебник/ П.И. Бегун, О.П. Кормилицын. – [2-е изд., перераб. и доп.](#) – СПб: Политехника, 2012. – 467 с. ISBN 5-7325-0859-7
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=124008>

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ**Теоретическая часть**

Под кручением понимается такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только крутящий момент. Кручение прямого бруса происходит при нагружении его внешними скручивающими моментами, действующими в плоскости поперечного сечения бруса. Брус, работающий в основном на кручение, называется валом.

Знак крутящего момента не имеет физического смысла, и общепринятого правила знаков не существует. При построении эпюр крутящих моментов для удобства построения условимся считать, что внешние скручивающие моменты, действующие на оставшуюся часть вала против часовой стрелки, если смотреть со стороны сечения (разреза), вызывают в этом сечении положительный крутящий момент, а действующие по часовой стрелке – отрицательный.

Для построения эпюры крутящих моментов используют метод сечений, считая крутящий момент в произвольном сечении численно равным алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных по одну сторону от сечения. Для построения эпюр крутящих моментов произвольно нагруженного вала:

1) определяют опорные реакции (для консольной схемы нагружения опорные реакции можно не определять);

2) разбивают вал на участки нагружения, в пределах которых закон распределения внутренних усилий в поперечном сечении вала не меняется; границами участков нагружения являются начало и конец вала, а также сечения, в которых:

- приложены внешние скручивающие моменты,
- начинается и заканчивается действие распределенной нагрузки,
- изменяется форма и размеры поперечного сечения вала;

3) рассекают вал произвольным сечением в пределах первого участка нагружения;

4) отбрасывают часть вала, содержащую большее количество внешних нагрузок (для консольной схемы следует отбросить часть вала, содержащую жесткую заделку, если опорная реакция предварительно не определялась);

5) заменяют действие отброшенной части стержня внутренним усилием – крутящим моментом M_{zi} (в тех случаях, когда направление M_{zi} неизвестно, следует принимать его положительным);

6) составляют уравнение равновесия, из которого определяют величину и направление крутящего момента M_{zi} (если после решения уравнения M_{zi} получился со знаком плюс, то знак крутящего момента совпадает с первоначально выбранным на схеме, со знаком минус – знак крутящего момента противоположен первоначально выбранному на схеме);

7) выполняют пункты 3 – 6 для каждого участка нагружения;

8) по полученным значениям строят эпюру крутящих моментов M_z : для построения эпюры крутящих моментов проводят прямую, параллельную оси вала (нулевую или базовую линию), перпендикулярно к которой откладываются ординаты, изображающие в некотором масштабе величины крутящих моментов в соответствующих сечениях вала; положительные значения крутящего момента откладывают выше, а отрицательные – ниже нулевой линии; заштриховывают эпюру тонкими спиральными линиями, а внутри поля эпюры в кружке указывают знак (плюс или минус);

9) после построения эпюры следует проверить построения по следующим правилам:

- в сечениях, где приложены сосредоточенные внешние скручивающие моменты, на эпюре крутящих моментов возникают «скачки» (мгновенные изменения значения), численно равные приложенной паре сил и направленные в сторону ее действия;

- если на участке нагружения отсутствует распределенная нагрузка, эпюры крутящих моментов для данного участка ограничены прямыми, параллельными оси вала. Положительные значения момента откладываются выше, отрицательные – ниже «нулевой линии»;

10) из эпюры крутящих моментов определяют опасное сечение; при кручении вала постоянной жесткости опасным считается сечение или участок вала, в котором крутящий момент максимален по абсолютной величине (по модулю).

Пример 3.1

Построить эпюру крутящих моментов для вала, жестко закрепленного в сечении C (рисунок 3.2 а) и нагруженного скручивающими моментами $M_1=5q\ell^2$, $M_2=3q\ell^2$, $M_3=4q\ell^2$.

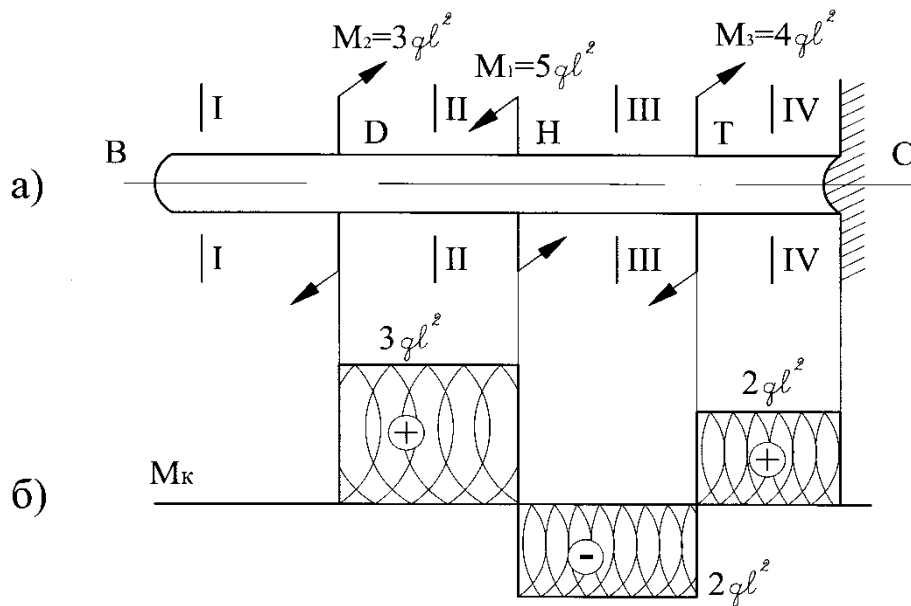


Рисунок 3.2

Решение

Вал разбивается на четыре участка нагружения: BD , DH , HT , TC .

1-й участок

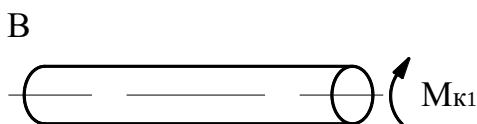


Рисунок 3.3

$$0 \leq Z_1 \leq \ell_1$$

$$M_{z1} = 0.$$

2-й участок

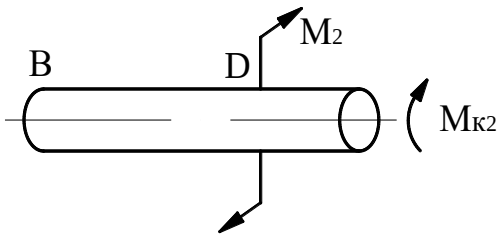


Рисунок 3.4

$$0 \leq Z_2 \leq \ell_2$$

$$M_{z2} = M_2 = 3q\ell^2$$

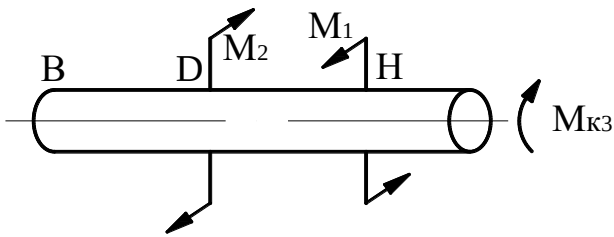
3-й участок

Рисунок 3.5

$$0 \leq Z_3 \leq \ell_3$$

$$M_{z3} = -M_1 + M_2 = -5q\ell^2 + 3q\ell^2 = -2q\ell^2.$$

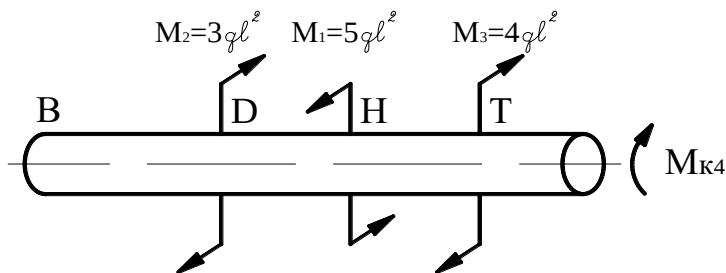
4-й участок

Рисунок 3.6

$$0 \leq Z_4 \leq \ell_4$$

$$M_{z3} = -M_1 + M_2 + M_3 = -5q\ell^2 + 3q\ell^2 + 4q\ell^2 = 2q\ell^2.$$

Из анализа эпюры крутящих моментов следует, что опасным сечением является участок вала DH : $M_{\max} = |M_{z1}| = 3q\ell^2$.

Задание 3.1

Для консольного вала, (расчетная схема приведена в таблице 3.1), построить эпюры крутящих моментов и определить опасное сечение.

Таблица 3.1

Номер схемы	Расчетная схема	Номер схемы	Расчетная схема
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

Таблица 3.2

Номер варианта	Расчетная схема	Моменты, $q\ell^2$			
		M_1	M_2	M_3	M_4
1	1	1	2	3	10
2	2	2	3	4	9
3	3	3	4	5	8
4	4	4	5	6	7
5	5	5	6	7	6
6	6	6	7	8	5
7	7	7	8	9	4
8	8	8	9	10	3
9	9	9	10	1	2
10	10	10	1	2	1
11	1	1	3	4	9
12	2	2	4	5	8
13	3	3	5	6	7
14	4	4	6	7	6
15	5	5	7	8	5
16	6	6	8	9	4
17	7	7	9	10	3
18	8	8	10	3	2
19	9	9	3	2	1
20	10	10	4	1	10
21	1	1	5	2	8
22	2	2	6	3	7
23	3	3	7	4	6
24	4	4	8	5	5
25	5	5	9	6	4
26	6	6	10	7	3
27	7	7	3	8	2
28	8	8	4	9	1
29	9	9	5	10	8
30	10	10	6	5	6
31	1	1	7	6	5
32	2	2	8	7	4
33	3	3	9	8	3
34	4	4	10	9	2
35	5	5	3	10	1

Вопросы для защиты работы

1. Какой вид деформации называется кручением?

2. Что называется эпюрой крутящих моментов? Как определяется знак крутящего момента?
3. Как определить опасное сечение вала постоянного сечения при кручении?
4. Каким методом пользуются при построении эпюр произвольно нагруженных валов?
5. Сформулируйте правила проверки правильности построения эпюр крутящих моментов.
6. Постройте эпюры крутящих моментов для вала, схема нагружения которого задана преподавателем.

Практическое занятие 7

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР НАПРЯЖЕНИЙ КРУЧЕНИЯ И УГЛОВ ПОВОРОТА ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Цель работы: получение навыков построения эпюр напряжений кручения и углов поворота поперечных сечений.

Пример выполнения задания

Пример 5.1. Ступенчатый стальной брус круглого поперечного сечения жестко заделан одним концом и нагружен, как показано на рис. 5.14, а. Построить эпюры крутящих моментов, максимальных касательных напряжений и углов поворота поперечных сечений. Проверить прочность бруса при $[\tau_k] = 60 \text{ Н/мм}^2$.

Решение. Эпюру крутящих моментов строим, начиная от свободного (левого) конца, что позволяет не определять реактивный момент в заделке. Проведя произвольное сечение $a-a$ на участке AB и составляя для оставленной части (рис. 5.14, б) уравнение равновесия $\sum m_z = 0$, получаем $M_z^I = m$.

Согласно принятому правилу знаков (см. стр. 145), считаем момент M_z^I отрицательным. Крутящий момент сохраняет постоянное значение ($-m$) во всех сечениях участков AB и BC . Для остальных участков находим крутящие моменты как алгебраические суммы внешних моментов, приложенных по одну сторону (в нашем случае левую) от сечения. Отсеченные части отдельно не изображаем. Эпюра M_z дана на рис. 5.14, в. Вообще следует заметить, что построение эпюры крутящих моментов совершенно аналогично построению эпюры продольных сил.

Для нахождения опасного сечения строим эпюру максимальных касательных напряжений, пользуясь формулой

$$\tau_{\max} = M_z / W_p, \text{ где } W_p = \pi d^3 / 16.$$

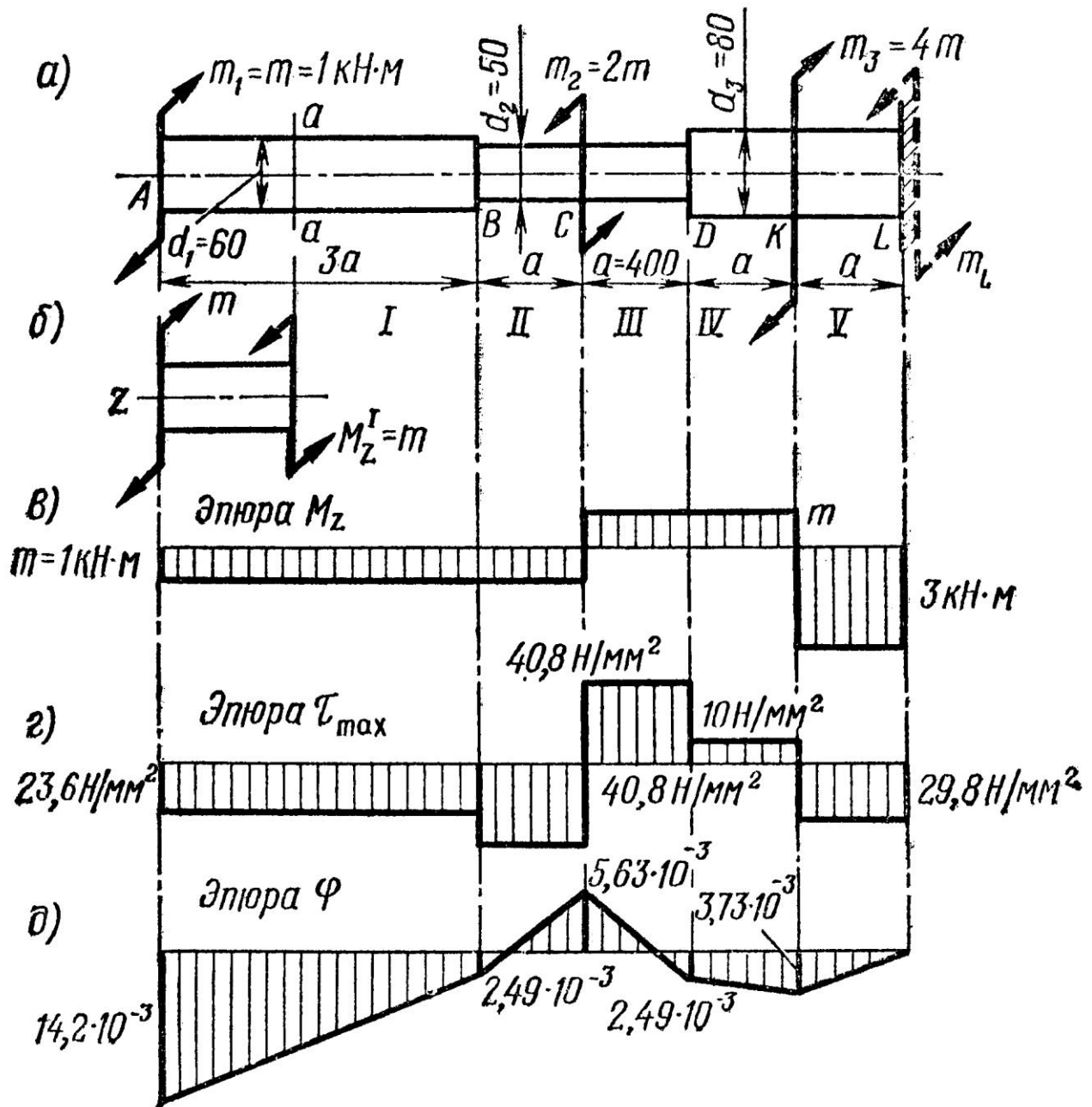
Для участка AB

$$(\tau_{\max})_{AB} = \frac{M_z^I}{\pi d^3 / 16} = \frac{1,0 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 60^3 / 16} = 23,6 \text{ Н/мм}^2.$$

Заданное значение момента умножено на 10^6 для перевода из $\text{кН}\cdot\text{м}$ в $\text{Н}\cdot\text{мм}$.

Аналогично определяем $\tau_{\max}$ в поперечных сечениях остальных участков бруса.

Ординаты эпюры $\tau_{\max}$ (рис. 5.14, г) откладываем в ту же сторону, что и соответствующие ординаты эпюры M_z . Знак касательного напряжения при расчете на прочность никакой роли не играет, и принятое направление ординат эпюры условно.



Опасными оказались поперечные сечения участков BC и CD . Таким образом, опасными оказались не те сечения, в которых крутящий момент максимален. Условие прочности $\tau_{\max} \leq [\tau_k]$ выполняется. Очевидно, что материал бруса использован нерационально; даже в опасном сечении максимальное напряжение на 32% ниже допускаемого.

Эпюру углов поворота строим, начиная от защемленного конца. Ординаты этой эпюры в выбранном масштабе дают величины углов поворота соответствующих поперечных сечений бруса. Эпюра строится совершенно аналогично эпюре линейных перемещений (см. § 2.3). В пределах каждого из участков бруса эпюра линейна, поэтому достаточно вычислить углы поворота только для граничных сечений участ-

ков: угол поворота сечения K , равный углу закручивания участка KL :

$$\varphi_{KL} = \frac{M_z^V a}{GJ_p^V} = - \frac{3,0 \cdot 10^6 \cdot 400}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 80^4 / 32} = - 3,73 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

где принято для стали $G = 8 \cdot 10^4 \text{ Н/мм}^2$;

угол поворота сечения D относительно K , равный углу закручивания участка DK :

$$\varphi_{DK} = \frac{M_z^{IV} a}{GJ_p^V} = \frac{1,0 \cdot 10^6 \cdot 400}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 80^4 / 32} = 1,24 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Абсолютный угол поворота сечения D (относительно заделки) равен алгебраической сумме углов закручивания участков KL и DK . Таким образом, ордината эпюры φ в сечении D равна

$$\varphi_{KL} + \varphi_{DK} = (-3,73 + 1,24) \cdot 10^{-3} = -2,49 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Аналогично вычисляются углы поворота остальных граничных сечений. Эпюра φ представлена на рис. 5.14, δ . Рекомендуем читателю выполнить остальные вычисления, необходимые для построения этой эпюры.

Вопросы для защиты работы

1. Какой вид деформации называется кручением?
2. Что называется эпюрой крутящих моментов? Как определяется знак крутящего момента?
3. Как определить опасное сечение вала постоянного сечения при кручении?

4. Каким методом пользуются при построении эпюр произвольно нагруженных валов?
5. Сформулируйте правила проверки правильности построения эпюр крутящих моментов.
6. Постройте эпюры крутящих моментов для вала, схема нагружения которого задана преподавателем.

Практическое занятие 8
**РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ВАЛОВ
ПРИ КРУЧЕНИИ**

Цель работы: Освоить методику расчета на прочность и жесткость валов.

Теоретическая часть

Под кручением понимается такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только крутящий момент. Кручение прямого бруса происходит при нагружении его **внешними** скручивающими моментами, действующими на брус извне. Влиянию внешних моментов сопротивляются **внутренние** моменты, которые развиваются во внутренних поперечных сечениях бруса и направлены в противоположную сторону. Принято обозначать внешние моменты буквой M , а внутренние моменты – буквой T (от англ. *torsion, torque*). Поскольку эти обозначения являются условными и на методику расчета никак не влияют, то для удобства расчета на схемах, а также в расчетных формулах будем использовать букву T .

Брус, работающий в основном на кручение, называется *валом*.

Знак крутящего момента также не имеет физического смысла, и общепринятого правила знаков не существует.

Проверочный и проектный расчет валов

При нагружении вала на его внешнем контуре развиваются максимальные касательные напряжения (рисунок 5.2), которые определяют по формуле

$$\tau_{\max} = T_{\max} / W_p, \quad (5.1)$$

где $T_{\max}$ – максимальный крутящий момент; W_p – полярный момент сопротивления.

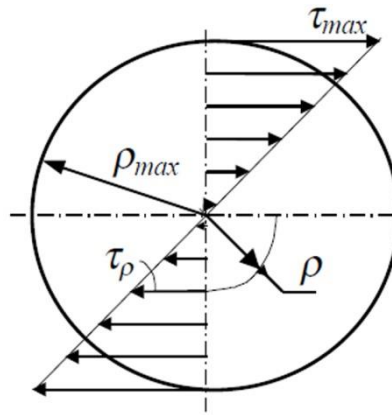


Рисунок 5.2 – Эпюра напряжений

Полярный момент сопротивления для круглого сечения

$$W_p = \pi \cdot d^3 / 16. \quad (5.2)$$

где d – диаметр вала.

Отсюда

$$\tau_{\max} = 16T_{\max} / \pi d^3, \quad (5.3)$$

Прочность бруса, работающего на кручение, считается обеспеченной, если наибольшие касательные напряжения, возникающие в его опасном сечении, не превышают величины допускаемого напряжения.

$$\tau_{\max} = T_{\max} / W_p \leq [\tau_{кр}], \quad (5.4)$$

где $[\tau_{кр}]$ – допускаемое крутящее напряжение.

По третьей гипотезе прочности для пластичных материалов принимают

$$[\tau_{кр}] = (0,55...0,6)[\sigma_p] = (0,55...0,6)\sigma_T / [s], \quad (5.5)$$

где σ_T – предел текучести материала вала (сталь); $[s] = 1,5...2$ – коэффициент запаса прочности.

При практических расчетах значения $[\tau_{кр}]$ принимают в пределах 20...50 МПа.

С учетом выражения (5.3) уравнение *проверочного* расчета для валов имеет вид

$$\tau = 16T / \pi d^3 \leq [\tau_{кр}]. \quad (5.6)$$

Если необходимо определить размеры проектируемого изделия, то такой расчет называется *проектным*. Для валов таким параметром является диаметр, который может быть определен по формуле

$$d_i = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T_i}{\pi \cdot [\tau_{кр}]}} \quad (5.7)$$

где T_i – текущее значение крутящего момента; d_i – диаметр вала в сечении.

Вычисленные значения диаметров округляют в ближайшую большую сторону в соответствии с рядом нормальных линейных размеров, определяемых по ГОСТ 6636-86. Для этих целей чаще используют ряд *Ra40*: 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 52; 55; 60; 63; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 125; 130; 140; 150 мм.

Как отмечалось выше, для валов **постоянного** диаметра, опасным является участок, в котором действует наибольший крутящий момент. Для **ступенчатых** валов, опасным считают участок вала, в поперечных сечениях которого действуют наибольшие по величине напряжения кручения, что необходимо учитывать при расчетах подобных валов.

В любом произвольном сечении вала напряжения кручения могут быть определены по выражению

$$\tau_i = 16T_i / \pi d_i^3 \quad (5.8)$$

где T_i – текущее значение крутящего момента; d_i – диаметр вала в сечении.

По этим данным строят эпюру напряжений кручения по методике, аналогичной эпюре крутящих моментов.

Расчет валов на жесткость

Дополнительной характеристикой вала при кручении является угол закручивания φ (рисунок 5.3) – это угол, на который поперечное сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению. В пределах упругих деформаций угол закручивания связан с крутящим моментом линейной зависимостью. При превышении некоторого предельного значения этого

параметра, валы теряет свою работоспособность, поэтому помимо расчета на прочность валы рассчитывают и на **жесткость**.

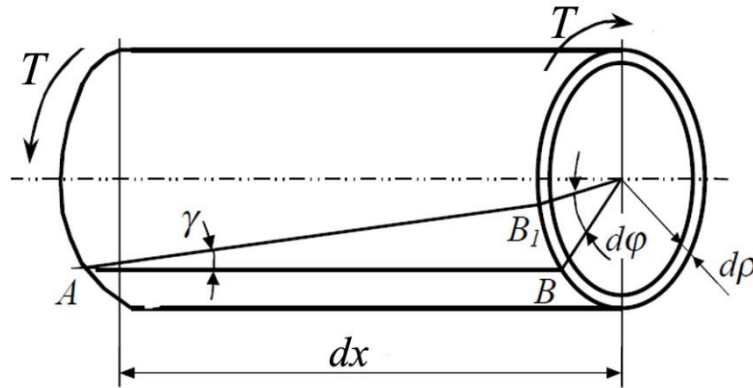


Рисунок 5.3 – Деформация вала при кручении

Для этого на отдельных участках ступенчатого вала определяют углы закручивания по формуле

$$\varphi_i = \frac{T_i \cdot l_i}{G \cdot I_{pi}} = \frac{32 \cdot T_i \cdot l_i}{\pi \cdot d_i^4 \cdot G}, \text{ рад}, \quad (5.8)$$

где T_i – крутящий момент на текущем участке вала; l_i – длина участка; d_i – диаметр вала; G – модуль упругости 2-го рода (модуль Юнга).

Если вал имеет жесткую заделку (угол поворота в которой, равен нулю), то углы закручивания на последующих участках бруса определяют, двигаясь от заделанного к свободному концу вала. При этом углы закручивания последовательно суммируют друг с другом с учетом знака поворота. По этим данным строят эпюру углов закручивания.

Мерой жесткости при кручении валов является **относительный угол закручивания θ** (угол закручивания на единицу длины вала), который определяют по выражению

$$\theta = \frac{\varphi_i}{l_i} = \frac{T_i}{G \cdot J_{pi}}, \text{ рад} / \text{м},$$

Условие жесткости при кручении

$$\theta = \frac{T}{G \cdot J_p} \leq [\theta], \text{ рад} / \text{м},$$

где допускаемый относительный угол закручивания $[\theta]$ имеет размерность рад/м. На практике чаще используют градусную меру относительного угла закручивания

$$\theta^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \cdot \frac{T}{GJ_p} \leq [\theta^{\circ}], \text{ град} / \text{ м}.$$

Допускаемый угол закручивания зависит от назначения вала; чаще принимают

$$[\theta^{\circ}] = (0,25 \dots 1), \text{ град} / \text{ м}.$$

При наличии эпюры углов закручивания проверку на жесткость также можно проводить по уравнению

$$\theta^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \frac{\varphi_{\max}}{l_i} \leq [\theta^{\circ}], \text{ град} / \text{ м},$$

где $\varphi_{\max}$ – максимальное значение угла закручивания, определяемое по эпюре.

5.4 Пример выполнения задания

К стальному ступенчатому валу, имеющему сплошное поперечное сечение, приложены четыре момента. Левый конец вала жестко закреплен в заделке, а правый конец – свободен и его торец имеет угловое перемещение относительно левого конца.

Требуется:

1. Определить крутящие моменты на отдельных участках вала и построить эпюру крутящих моментов по длине вала.
2. При заданном значении допустимого напряжения на кручение определить диаметры d_1 и d_2 вала из расчета на прочность и полученные значения округлить.
3. Определить действительные напряжения кручения на отдельных участках вала и построить эпюру напряжений.

4. Определить углы закручивания на отдельных участках вала и построить эпюру углов закручивания. По максимальному относительному углу закручивания проверить вал на жесткость.

Исходные данные (принимаются из таблицы): крутящие моменты $T_1 = 6,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $T_2 = 3,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $T_3 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $T_4 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$; длина участков вала: $a = 1,9 \text{ м}$, $b = 1,9 \text{ м}$, $c = 1,9 \text{ м}$; допустимое напряжение кручения $[\tau_{кр}] = 50 \text{ МПа}$. Материал вала – сталь.

Решение.

1. Составим в произвольном масштабе расчетную схему вала (рисунок 5.1, а), приложив крутящие моменты, указав длину отдельных участков и их диаметр.

Разобьем вал на отдельные участки, двигаясь от свободного (правого) конца вала. В качестве границ участка принимаем сечения, где приложены крутящие моменты или изменяются диаметры вала. В результате имеем четыре участка: *I*, *II*, *III* и *IV*.

Мысленно отсекаем вал на этих участках и определяем крутящие моменты, соблюдаем правило знаков: если крутящий момент направлен против хода часовой стрелки – он положительный, если по часовой стреле – отрицательный:

на участке *I*: $T_I = T_4 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

на участке *II*: $T_{II} = T_4 + T_3 = 1,0 + 2,0 = 3,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

на участке *III*: $T_{III} = T_4 + T_3 - T_2 = 1,0 + 2,0 - 3,0 = 0$;

на участке *IV*: $T_{IV} = T_4 + T_3 - T_2 - T_1 = 1,0 + 2,0 - 3,0 - 6,0 = -6,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

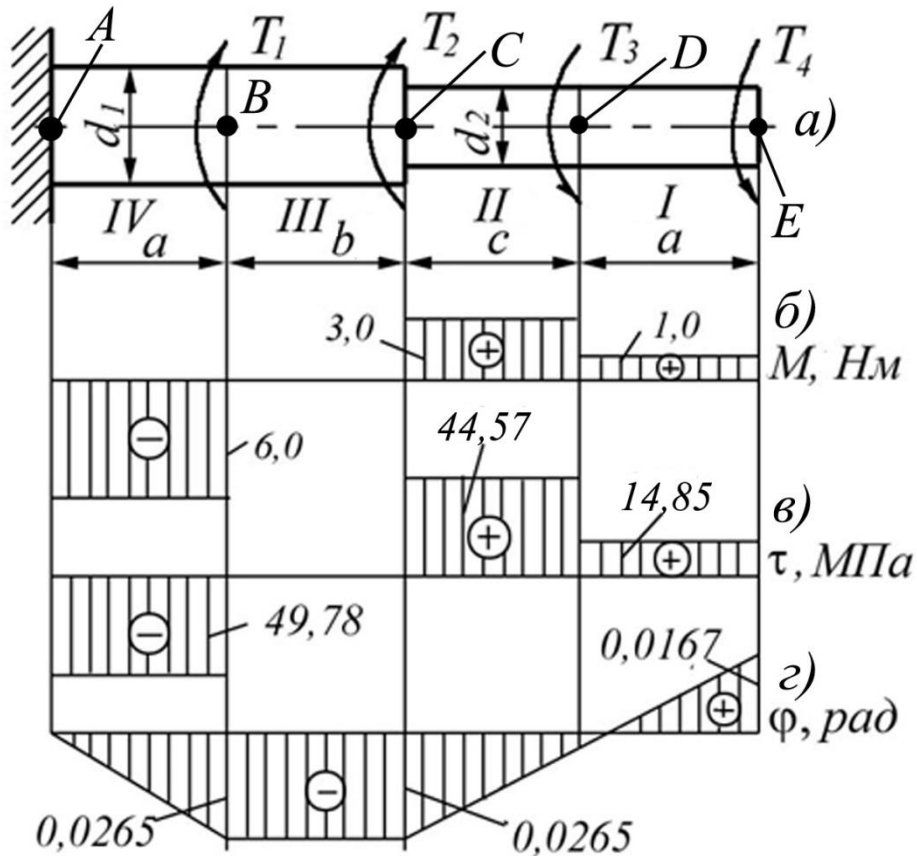


Рисунок 5.1 – Расчетная схема вала

Строим эпюру крутящих моментов. Для этого проводим горизонтальную линию (рисунок 5.2, б) и, перемещаясь **справа** налево, по вертикали откладываем значения крутящих моментов, соблюдая масштаб (можно принять, например, $1,0 \text{ кН}\cdot\text{м} = 10 \text{ мм}$). Согласно вычислениям на первых двух участках момент положительный, на третьем равен нулю, а на четвертом – отрицательный.

2. Зная крутящие моменты, определим диаметры валов на отдельных участках бруса при допустимом напряжении кручения $[\tau_{кр}] = 50 \text{ МПа}$.

На участке I

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16T_I}{\pi[\tau_{кр}]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1 \cdot 10^6}{\pi \cdot 50}} = 46,71 \text{ мм}.$$

На участке II

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{II}}{\pi[\tau_{кр}]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3 \cdot 10^6}{\pi \cdot 50}} = 67,367 \text{ мм}.$$

Так как на этом участке диаметр вала больше чем на предыдущем, то по стандартному ряду чисел *Ra40* принимаем $d_2 = 70$ мм, что распространяется и на первый участок.

На участке *III* момент $T_{III} = 0$, но это не означает, что диаметр вала должен быть равен нулю. В этой ситуации следует определить диаметр вала на участке *IV*:

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{IV}}{\pi[\tau_{кр}]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 6 \cdot 10^6}{\pi \cdot 50}} = 84,88 \text{ мм}$$

По стандартному ряду чисел *Ra40* принимаем $d_1 = 85$ мм.

3. Определим напряжения кручения на отдельных участках вала:

на участке *I*:

$$\tau_I = \frac{16T_I}{\pi d_2^3} = \frac{16 \cdot 1 \cdot 10^6}{\pi \cdot 70^3} = 14,85 \text{ МПа};$$

на участке *II*

$$\tau_{II} = \frac{16T_{II}}{\pi d_2^3} = \frac{16 \cdot 3 \cdot 10^6}{\pi \cdot 70^3} = 44,57 \text{ МПа};$$

на участке *III* момент $T_{III} = 0$, поэтому $\tau_{III} = 0$;

на участке *IV*

$$\tau_{IV} = \frac{16T_{IV}}{\pi d_1^3} = \frac{16 \cdot (-6 \cdot 10^6)}{\pi \cdot 85^3} = -49,78 \text{ МПа}.$$

Так как на всех участках расчетные напряжения не превышают допускаемых значений ($[\tau_{кр}] = 50$ МПа), то прочность вала обеспечена.

По полученным значениям строим эпюру касательных напряжений (рисунк 5.2, в), используя методику аналогичную эпюре крутящих моментов.

4. Определим углы закручивания отдельных участков вала, двигаясь от **левого, закрепленного** конца к правому, свободному концу.

Для стали модуль упругости второго рода (модуль Юнга): $G = 0,4E = 0,4 \cdot 2,1 \cdot 10^5 = 0,84 \cdot 10^5$ МПа.

Угол закручивания в заделке (точка A) равен нулю: $\varphi_A = 0$.

Угол закручивания в точке B :

$$\varphi_B = \frac{32 \cdot T_{IV} \cdot a}{\pi \cdot d_1^4 \cdot G} + \varphi_A = \frac{32 \cdot (-6 \cdot 10^6) \cdot 1,9 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 85^4 \cdot 0,84 \cdot 10^5} + 0 = -0,0265 \text{ рад}.$$

Угол закручивания в точке C равен углу закручивания в точке B , так как на участке BC момент $T_{III} = 0$:

$$\varphi_C = \varphi_B = -0,0265 \text{ рад}.$$

Угол закручивания в точке D :

$$\varphi_D = \varphi_C + \frac{32 \cdot T_{II} \cdot c}{\pi \cdot d_2^4 \cdot G} = -0,0265 + \frac{32 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 1,9 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 68^4 \cdot 0,84 \cdot 10^5} = 0,0058 \text{ рад}.$$

Угол закручивания в точке E :

$$\varphi_E = \varphi_D + \frac{32 \cdot T_I \cdot a}{\pi \cdot d_2^4 \cdot G} = 0,0058 + \frac{32 \cdot 1 \cdot 10^6 \cdot 1,9 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 68^4 \cdot 0,84 \cdot 10^5} = 0,0167 \text{ рад}.$$

По этим данным строим эпюру углов закручивания бруса, двигаясь от левого, закрепленного конца вала (рисунок 5.1, $г$). Из эпюры следует, что наибольший относительный угол закручивания имеет место на участке IV , увеличиваясь от нуля в точке A до $\varphi_{\max} = 0,0265$ рад в точке B .

Определяем максимальный относительный угол закручивания

$$\theta^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{\varphi_{\max}}{a} = \frac{180^\circ}{3,14} \cdot \frac{0,0265}{1,9} = 0,8, \text{ град} / \text{м},$$

что меньше допускаемого значения

$$[\theta^\circ] = 1,0 \text{ град} / \text{м}.$$

Поэтому условие жесткости вала выполняется.

5.5 Контрольные задания

К стальному ступенчатому валу, имеющему сплошное поперечное сечение, приложены четыре момента. Левый конец вала жестко закреплен в задел-

ке, а правый конец – свободен и его торец имеет угловое перемещение относительно левого конца.

Требуется:

1. Определить крутящие моменты на отдельных участках вала и построить эпюру крутящих моментов по длине вала.
2. При заданном значении допустимого напряжения на кручение определить диаметры d_1 и d_2 вала из расчета на прочность и полученные значения округлить.
3. Определить действительные напряжения кручения на отдельных участках вала и построить эпюру напряжений.
4. Определить углы закручивания на отдельных участках вала и построить эпюру углов закручивания. По максимальному относительному углу закручивания проверить вал на жесткость.

Варианты заданий: исходные данные представлены в таблице 5.1, а схемы фигур – в таблице 5.2.

Таблица 5.1 – Исходные данные

Вариант	Расстояние, м			Момент, кН·м				$[\tau_{кр}]$, МПа
	a	b	c	T_1	T_2	T_3	T_4	
1	1,0	1,0	1,0	5,1	2,1	1,1	3,1	30
2	1,1	1,1	1,1	5,2	2,2	1,2	3,2	35
3	1,2	1,2	1,2	5,3	2,3	1,3	3,3	30
4	1,3	1,3	1,3	5,4	2,4	1,4	3,4	35
5	1,4	1,4	1,4	5,5	2,5	1,5	3,5	40
6	1,5	1,5	1,5	5,6	2,6	1,6	3,6	40
7	1,6	1,6	1,6	5,7	2,7	1,7	3,7	45
8	1,7	1,7	1,7	5,8	2,8	1,8	3,8	45
9	1,8	1,8	1,8	5,9	2,9	1,9	3,9	50
10	1,9	1,9	1,9	6,0	3,0	2,0	4,0	50

Таблица 5.2 – Схема нагружения вала

Номер схемы	Расчетная схема	Номер схемы	Расчетная схема
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

Вариант исходных данных принять по **последней** цифре шифра в зачетной книжке студента, а номер расчетной схемы принять по **предпоследней** цифре шифра в зачетной книжке студента (если последняя или предпоследняя цифра шифра ноль, то следует принять десятый вариант или десятую схему).

5.6 Вопросы к практическому занятию

1. Какой вид деформации называется кручением?
2. Что называется эпюрой крутящих моментов? Как определяется знак крутящего момента?
3. Как определить опасное сечение вала постоянного сечения при кручении?
4. Каким методом пользуются при построении эпюр произвольно нагруженных валов?
5. Сформулируйте правила проверки правильности построения эпюр крутящих моментов.

6. Постройте эпюры крутящих моментов и касательных напряжений для вала, схема нагружения которого задана преподавателем.

5.7 Библиографический список

1. Вереина, Л. И. Техническая механика: учебник / Л. И. Вереина. – 10-е изд., стер. – М.: Изд. центр «Академия», 2015. – 224 с.

2. Яблонский, А. А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие / А. А. Яблонский, С. С. Норе́йко, С. А. Вольфсон и др. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 384 с.

3. Эрдеди, А. А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: учебное пособие / А. А Эрдеди, Н. А. Эрдеди. – 8-е изд., стер. – М.: Изд. центр «Академия», 2007. – 320 с.

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ИЗГИБЕ КОНСОЛЬНЫХ БАЛОК СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ НАГРУЗКАМИ

Цель работы: Изучение методики построения эпюр внутренних усилий при изгибе консольных балок сосредоточенными силами и моментами.

Задача: построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил для консольно закреплённой балки.

Теоретическое обоснование

Изгиб – это такой вид нагружения, при котором к брусу приложены в плоскостях, проходящих через его ось, пары сил или силы, перпендикулярные к оси. Продольная ось стержня искривляется, а в произвольном сечении возникает изгибающий момент M и, возможно, поперечная сила Q . Брус, работающий на изгиб называют балкой.

В сопротивлении материалов термин «балка» значительно шире, чем в обычном употреблении этого слова: с точки зрения расчета на прочность, жесткость и устойчивость балкой является не только строительная балка, но также и вал, болт, оси железнодорожного вагона, зуб шестерни и т.д.

Ограничимся построением эпюр для простейшего случая изгиба балок, при котором все заданные нагрузки лежат в одной плоскости, причем эта плоскость совпадает с одной из главных плоскостей балки. Такой случай называют прямым изгибом.

На расчетной схеме балку принято заменять ее осью. При этом все нагрузки должны быть приведены к оси балки и силовая плоскость будет совпадать с плоскостью чертежа.

Балки имеют те или иные опорные устройства – опоры. Конструкционные формы опор весьма разнообразны. Для расчета же их схематизируют в виде трех основных типов опор:

а) *шарнирно-подвижная опора* (рисунок 1), в которой может возникнуть только одна составляющая реакций - R_A , направленная вдоль опорного стержня;

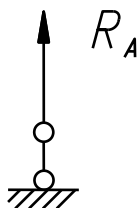


Рисунок 1 – Шарнирно-подвижная опора

б) *шарнирно-неподвижная опора* (рисунок 2), в которой могут возникнуть две составляющие – вертикальная реакция R_A и горизонтальная реакция H_A ;

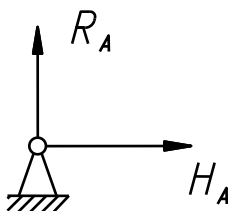


Рисунок 2 – Шарнирно-неподвижная опора

в) *защемление* (иначе *жесткое защемление* или *заделка*), где могут быть три составляющие - вертикальная реакция R_A и горизонтальная H_A реакции и опорный момент M_A (рисунок 3).

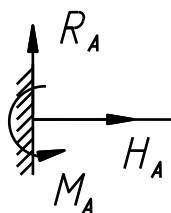


Рисунок 3 – Защемление

Все реакции и моменты считаются приложенными в точке А – в центре тяжести опорного сечения.

Статически определимая балка при действии плоской системы сил должна иметь три независимых реакции. Поэтому статически определимые балки могут быть установлены: 1) на одной жёсткой заделке, 2) на одной шарнирно-неподвижной и другой шарнирно-подвижной опорах. Здесь рассмотрим первый случай, который называют консольным закреплением балки.

Внутренняя сила Q в произвольном сечении равна алгебраической сумме всех внешних поперечных сил, взятых по одну сторону от сечения с учетом правила знаков. Поперечные силы считаются положительными, если они стремятся повернуть элемент балки по часовой стрелке (рисунок 4, а).

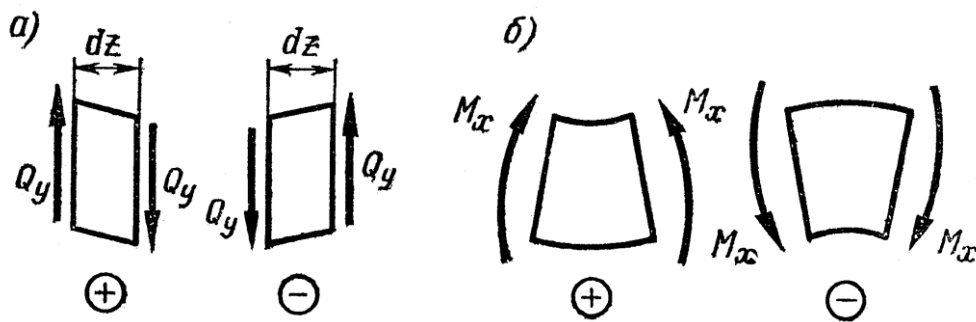


Рисунок 4 – Правила знаков для внутренней поперечной силы – а), и внутреннего изгибающего момента – б)

Внутренний момент M в произвольном сечении равен алгебраической сумме моментов от всех внешних сил, взятых по одну сторону от сечения относительно центра тяжести сечения с учетом правила знаков. Изгибающий момент считается положительным, если элемент бруса изгибается выпуклостью вниз (рисунок 4, б), т.е. таким образом, что его сжатые волокна находятся в верхней части.

Строить эпюры поперечных сил $Q(z)$ и изгибающих моментов $M(z)$ можно различными способами, например, аналитическим. При этом построения эпюр составляют аналитические уравнения $Q(z)$ и $M(z)$ для каждого участка

нагружения балки; решая полученные уравнения для граничных точек участков нагружения, строят графики зависимостей $Q(z)$ и $M(z)$ по участкам.

Эпюры изгибающих моментов следует строить на растянутых волокнах, то есть положительные значения откладываются ниже, отрицательные – выше базовой (нулевой) линии. Эпюры заштриховываются прямыми линиями, перпендикулярными оси балки, в кружках внутри поля эпюр указываются знаки внутренних усилий.

Построенные эпюры проверяются на соответствие правилам, основанным на дифференциальных зависимостях между поперечной силой, изгибающим моментом и интенсивностью распределенной нагрузки

$$q = \frac{dQ(z)}{dz}; \quad Q = \frac{dM(z)}{dz}. \quad (4.1)$$

1) на участках балки, где отсутствует распределенная нагрузка q , эпюра поперечных сил $Q(z)$ ограничена прямой, параллельной оси балки (поперечная сила $Q(z)$ имеет постоянное значение), а эпюра изгибающих моментов $M(z)$ ограничена наклонной прямой (изгибающий момент $M(z)$ меняется по линейному закону);

2) на участках балки, где приложена равномерно распределенная нагрузка q , эпюра поперечных сил $Q(z)$ ограничена наклонной прямой (поперечная сила $Q(z)$ меняется по линейному закону), а эпюра изгибающих моментов $M(z)$ – квадратной параболой, обращенной выпуклостью в сторону действия нагрузки (изгибающий момент $M(z)$ меняется по закону квадратной параболы);

3) в точке приложения сосредоточенной силы P на эпюре поперечных сил $Q(z)$ имеется скачок (уступ), равный по величине приложенной в этой точке силе P , а на эпюре изгибающих моментов $M(z)$ – точка перегиба (излом) в сторону действия силы;

4) в точке приложения сосредоточенного момента M на эпюре изгибающих моментов $M(z)$ имеется скачок (уступ), равный по величине приложенному в этой точке моменту M . Сосредоточенный момент $M(z)$, приложенный в любом сечении балки, на эпюре поперечных сил $Q(z)$ не отражается;

5) если в пределах одного участка нагружения знак поперечной силы $Q(z)$ меняется в направлении слева направо с (+) на (–), то в сечении, где $Q(z)=0$, на эпюре изгибающих моментов $M(z)$ для этого участка будет экстремальное значение (точка максимума);

6) если в пределах одного участка нагружения знак поперечной силы $Q(z)$ меняется в направлении слева направо с (–) на (+), то в сечении, где $Q(z)=0$, на эпюре изгибающих моментов $M(z)$ для этого участка будет экстремальное значение (точка минимума);

7) тангенс угла наклона к оси абсцисс (оси балки) касательной к кривой изгибающего момента в любом сечении балки численно равен ординате поперечной силы в рассматриваемом сечении, поэтому:

- если на протяжении какого-либо участка балки поперечная сила положительна $Q(z)>0$, то изгибающий момент на этом участке (в направлении слева направо) будет алгебраически возрастать;

- если на протяжении какого-либо участка балки поперечная сила отрицательна $Q(z)<0$, то изгибающий момент на этом участке (в направлении слева направо) будет алгебраически убывать;

- если на протяжении какого-либо участка балки поперечная сила равна нулю $Q(z)=0$, то изгибающий момент на этом участке не будет меняться (имеет постоянное значение);

8) для линейных участков эпюры изгибающих моментов рекомендуется выполнить дифференциальную, а для нелинейных участков – интегральную проверку. При выполнении дифференциальной и интегральной проверок начало и конец участка выбираются в направлении слева направо. Дифференциальная проверка выполняется по формуле

$$Q = \frac{dM(z)}{dz} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (4.2)$$

где $\operatorname{tg} \alpha$ – тангенс угла наклона эпюры изгибающих моментов к продольной оси балки z . Положительный знак $Q(z)$ определяется совмещением оси балки с эпюрой $M(z)$ поворотом по часовой стрелке, отрицательный знак $Q(z)$ определя-

ется совмещением оси балки с эпюрой $M(z)$ поворотом против часовой стрелки. Интегральная проверка выполняется по формуле

$$M_K - M_H = \int_H^K Q(z) dz = \Omega_Q^{HK}, \quad (4.3)$$

где Ω_Q^{HK} – площадь эпюры поперечных сил на рассматриваемом участке;
 M_K – значение изгибающего момента в конечной точке участка;
 M_H – значение изгибающего момента в начальной точке участка.

В общем случае задача по построению эпюр внутренних усилий при изгибе решается в следующей последовательности.

- 1) Определяются опорные реакции.
- 2) Балка разбивается на участки нагружения, границами которых являются сечения:
 - начала и конца балки;
 - в которых приложены сосредоточенные (активные и реактивные) внешние силы;
 - в которых приложены внешние моменты (активные и реактивные);
 - в которых начинается и заканчивается действие распределенной нагрузки.
- 3) Строятся эпюры поперечных сил $Q(z)$ и изгибающих моментов $M(z)$.
- 4) Проверяется построение эпюр $Q(z)$ и $M(z)$ по правилам 1 – 8.
- 5) Определяется опасное сечение.

Пример

Построить эпюры внутренних усилий для балки, схема которой приведена на рисунке 5.

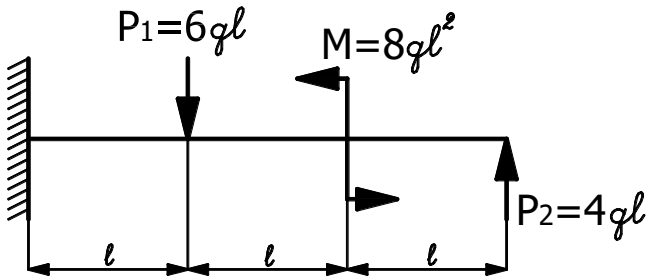


Рисунок 5

Решение

Используя правила, разобьем балку на три участка нагружения, пронумеровав их в соответствии с планом решения задачи. Из каждого сечения, обозначенного как граница участка

нагружения, проводим тонкую вертикальную прямую.

1 – й участок

$$0 \leq z_1 \leq \ell_1 = \ell$$

$$в(\cdot)A \quad в(\cdot)B$$

$$M(z_1) = P_2 \cdot z_1 = 4q\ell \cdot z_1:$$

в точке A:

$$z_1=0; \quad M(z_1=0) = P_2 \cdot z_1 = 4q\ell \cdot 0 = 0;$$

в точке B:

$$z_1=\ell; \quad M(z_1=\ell) = 4q\ell \cdot \ell = 4q\ell^2.$$

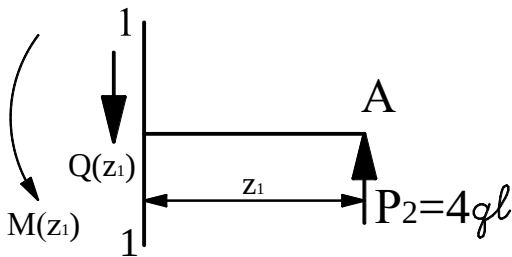


Рисунок 6

$$Q(z_1) = -P_2 = -4q\ell = const. \text{ По по-}$$

лученным данным строим эпюры $Q(z_1)$ и $M(z_1)$. Эпюру изгибающего момента строим на растянутых волокнах. Проводим две линии, параллельные оси балки – нулевые (базовые) линии эпюр изгибающих моментов и поперечных сил, рядом с которыми записываем величины $q\ell^2$ на эпюре $M(z)$ и $q\ell$ на эпюре $Q(z)$. Откладываем значения изгибающего момента, записав лишь цифры «0» и «4» на растянутых волокнах в начале и в конце первого участка. Знак на эпюре $M(z)$ опускаем; соединяем точки «0» и «4» прямой, так как выражение момента есть функция первой степени от текущей координаты z_1 . Эпюра моментов заштриховывается перпендикулярно оси балки, и каждая ордината покажет величину изгибающего момента в любой интересующей нас точке рассматриваемого участка.

На эпюре $Q(z)$ величина поперечной силы постоянна, то есть эпюра представляет собой прямоугольник; отложив «4» ниже оси балки так как

$Q(z) < 0$, заканчиваем эпюру штриховкой перпендикулярно оси балки. Внутри поля эпюры в кружке необходимо проставить знак поперечной силы.

Ввиду линейности эпюры $M(z)$ выполним дифференциальную проверку по формуле (4.2):

$$Q(z_1) = \frac{dM(z_1)}{dz_1} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{0 - 4q\ell^2}{\ell} = -4q\ell.$$

2 – й участок

$$0 \leq z_2 \leq \ell_2 = \ell$$

$\psi(\cdot)B \quad \psi(\cdot)C$

$$M(z_2) = P_2(\ell + z_2) + M = 4q\ell(\ell + z_2) + 8q\ell^2:$$

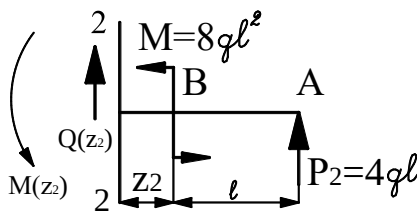


Рисунок 7

при $z_2 = 0$

$$M(z_2) = P_2(\ell + 0) + M = 4q\ell(\ell + 0) + 8q\ell^2 = 12q\ell^2;$$

при $z_2 = \ell$

$$M(z_2) = P_2(\ell + \ell) + M = 4q\ell \cdot 2\ell + 8q\ell^2 = 16q\ell^2.$$

$$Q(z_2) = -P_2 = -4q\ell = \text{const}. \text{ В выражение попе-}$$

речной силы на втором участке внешний момент M не вошел, так как проекция пары сил всегда равна нулю.

По полученным данным строим эпюры $Q(z_2)$ и $M(z_2)$ и выполняем диф-

$$\text{ференциальную проверку: } Q(z_2) = \frac{dM(z_2)}{dz_2} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{12q\ell^2 - 16q\ell^2}{\ell} = -4q\ell.$$

3 – й участок

$$0 \leq z_3 \leq \ell_3 = 2\ell$$

$\psi(\cdot)C \quad \psi(\cdot)D$

$$M(z_3) = P_2(2\ell + z_3) + M - P_1 \cdot z_3 = 4q\ell(2\ell + z_3) + 8q\ell^2 - 6q\ell \cdot z_3:$$

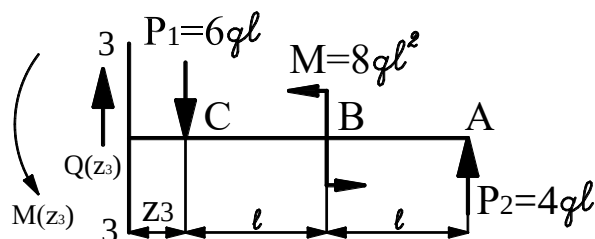


Рисунок 8

при $z_3=0$;

$$M(z_3) = 4q\ell(2\ell + 0) + 8q\ell^2 - 6q\ell \cdot 0 = \\ = 16q\ell^2;$$

при $z_3=2\ell$;

$$M(z_3) = 4q\ell(2\ell + \ell) + 8q\ell^2 - 6q\ell \cdot \ell = \\ = 14q\ell^2;$$

$$Q(z_3) = -P_2 + P_1 = -4q\ell + 3q\ell = q\ell = \text{const}.$$

По полученным данным строим эпюры $Q(z_3)$ и $M(z_3)$ (рисунок 4.13) и выполняем дифференциальную проверку:

$$Q(z_3) = \frac{dM(z_3)}{dz_3} = \text{tg } \alpha = \frac{16q\ell^2 - 18q\ell^2}{\ell} = -4q\ell.$$

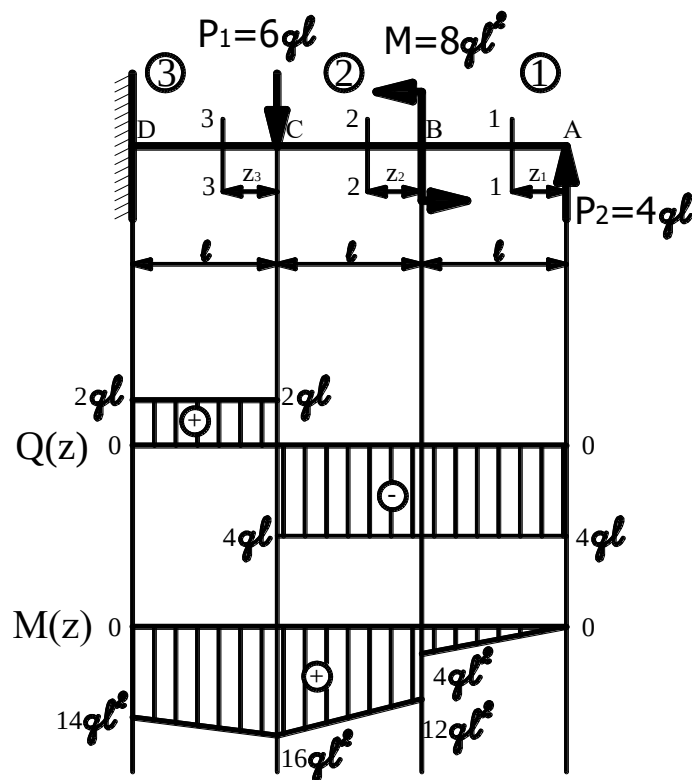


Рисунок 9

Задание

Для консольной балки, схема нагружения которой представлена на рисунке 10, исходные значения по таблице 1, построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15

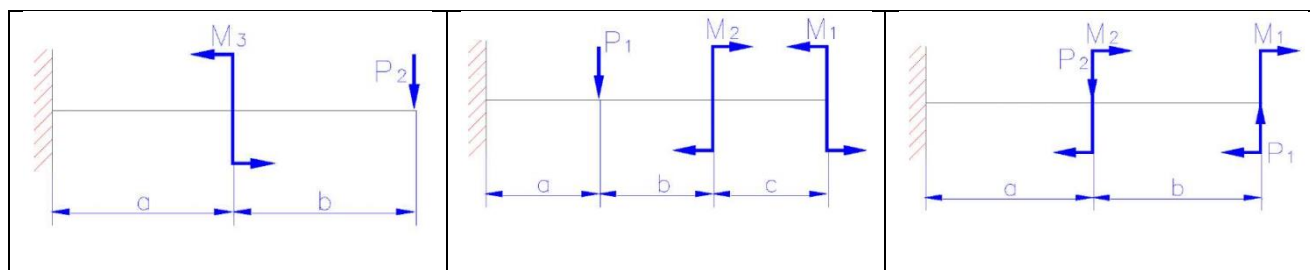


Рисунок 10 – Схемы нагружения консольных балок

Таблица 1 – Числовые значения

подгруппа	P_1 , кН	P_2 , кН	M_1 , кН·м	M_2 , кН·м	M_3 , кН·м	a , м	b , м	c , м
А	10	22	8	4	3	0,2	0,2	0,2
Б	16	8	6	3	4	0,3	0,2	0,4
В	24	5	4	7	5	0,4	0,3	0,2

Вопросы для защиты работы

1. Обязательно ли определять опорные реакции для построения эпюр внутренних усилий в консольных балках?
2. Какие сечения являются границами участков нагружения балок?
3. Постройте эпюры внутренних усилий для консольных балок, схемы которых предложены преподавателем.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ДАННОЙ ТЕМЕ

- 1 Щербакова, Ю. В. Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебное пособие / Ю. В. Щербакова. - Сопротивление материалов, 2020-02-05. - Саратов : Научная книга, 2019. - 159 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-9758-1776-1

2. Коргин, А. В Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебно-методическое пособие к выполнению практических работ для обучающихся по направлению подготовки 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, профиль «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные средства и оборудование» / А. В. Коргин, В. А. Ермаков, В. А. Романец. - Москва : МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 186 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-7264-1842

3. Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

2 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ИЗГИБЕ КОНСОЛЬНЫХ БАЛОК РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ НАГРУЗКАМИ

Цель и содержание работы: Изучение методики построения эпюр внутренних усилий при изгибе консольных балок распределёнными нагрузками.

Пример выполнения задания

Построить эпюры Q и M для консоли, изображённой на рисунке 1.

Решение. Строим эпюры, начиная от свободного конца балки, что позволяет не определять опорные реакции. Начинаем с эпюры Q .

На свободном конце $Q_A = 0$, так как здесь к балке не приложено сосредоточенной силы. На участке I Q меняется по линейному закону. Для построения этой части эпюры надо знать два значения Q ; одно из них известно. Определяем Q в сечении B как сумму сил, приложенных к балке слева от этого сечения:

$$Q_B = -2qa.$$

На участках II и III распределенная нагрузка отсутствует, следовательно, сохраняется то же значение поперечной силы:

$$Q_{II} = Q_{III} = Q_B.$$

Наличие сосредоточенной пары сил на эпюре Q не отражается.

В сечении D на эпюре Q — скачок вверх на величину приложенной силы и правее этого сечения $Q_{IV} = -qa$. Нетрудно убедиться, что опорная реакция равна qa .

Строим эпюру изгибающих моментов.

На свободном конце $M_A = 0$, так как сосредоточенной пары сил в сечении A нет. На участке I момент изменяется по квадратичному закону, при этом касательная к эпюре в сечении A горизонтальна, так как $Q_A = 0$. Эпюра обращена выпуклостью вверх, т. е. навстречу нагрузке. Определим величину M в сечении B :

$$M_B = -q2aa = -2qa^2.$$

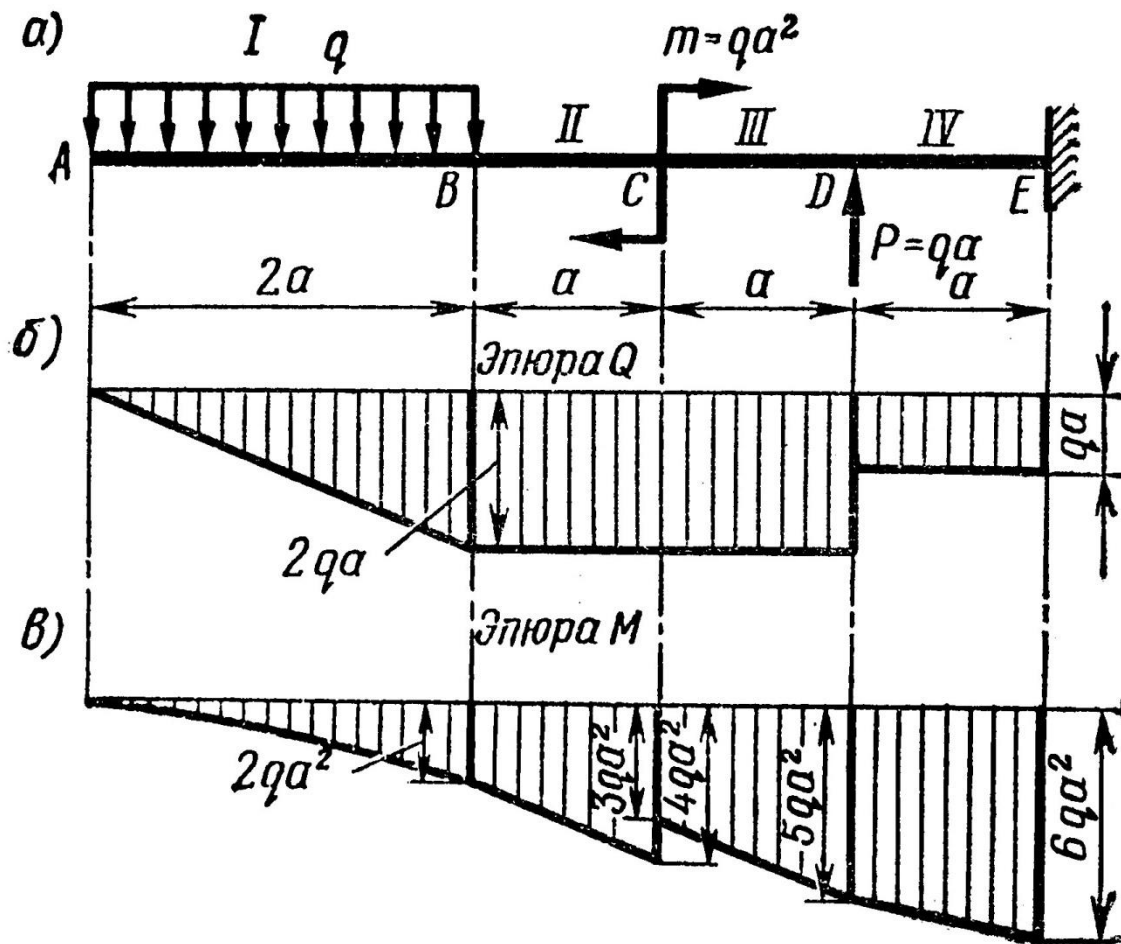


Рисунок 1. – построение эпюр Q и M при наличии равномерно распределённой поперечной силы

Задание 4.1

Для консольной балки, схема нагружения которой представлена на рисунке 2, исходные значения по таблице 1, построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

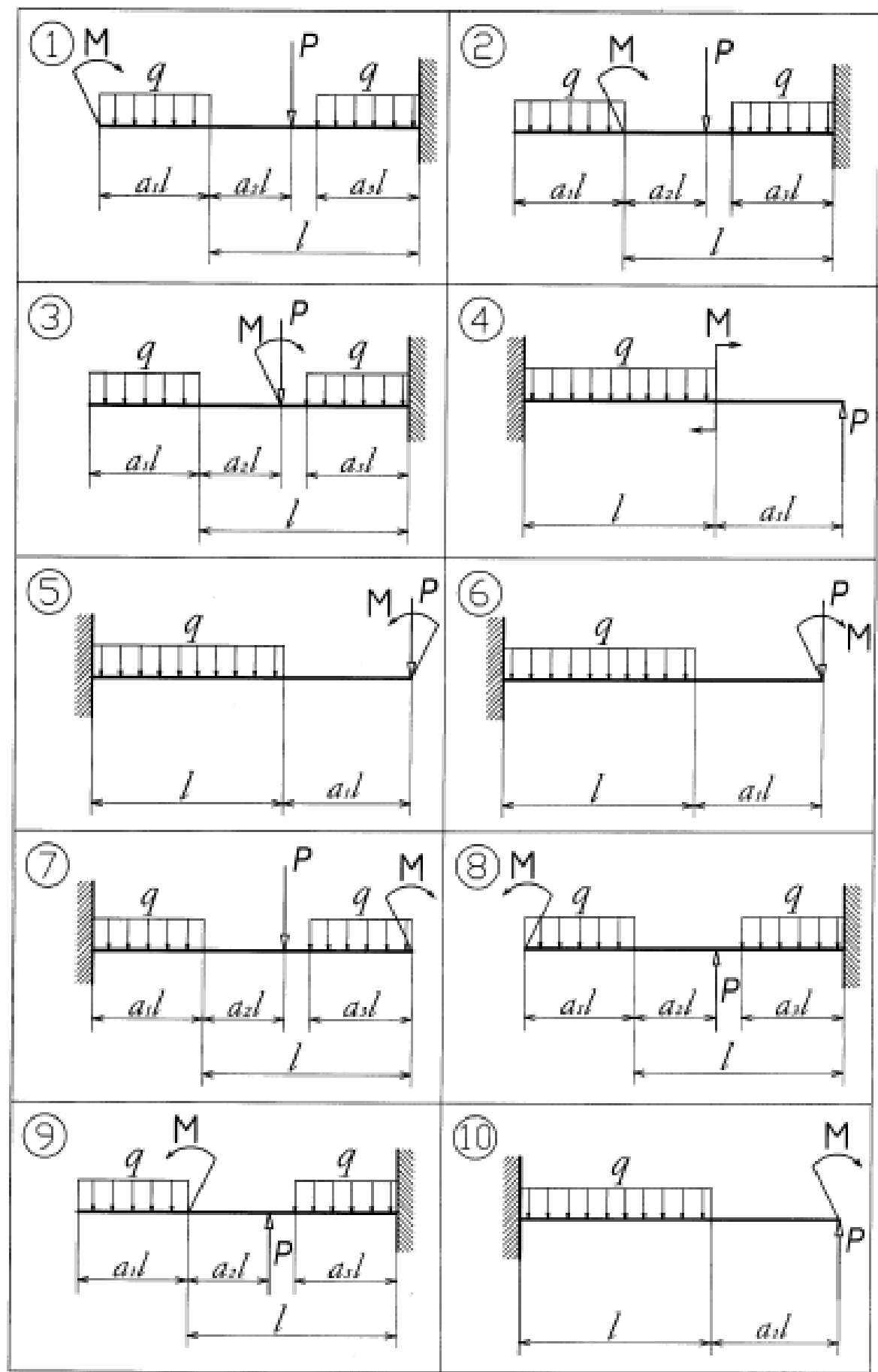
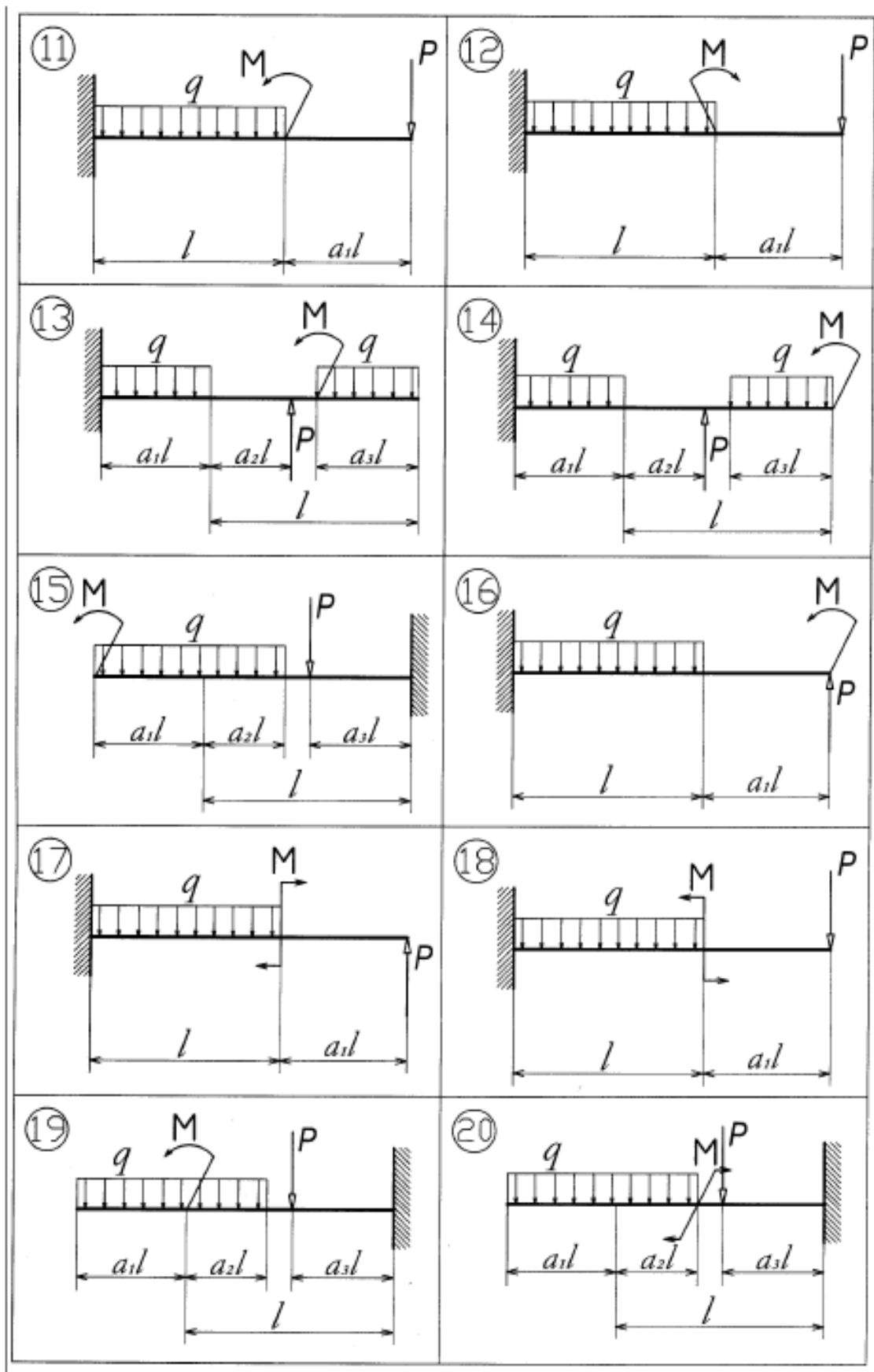
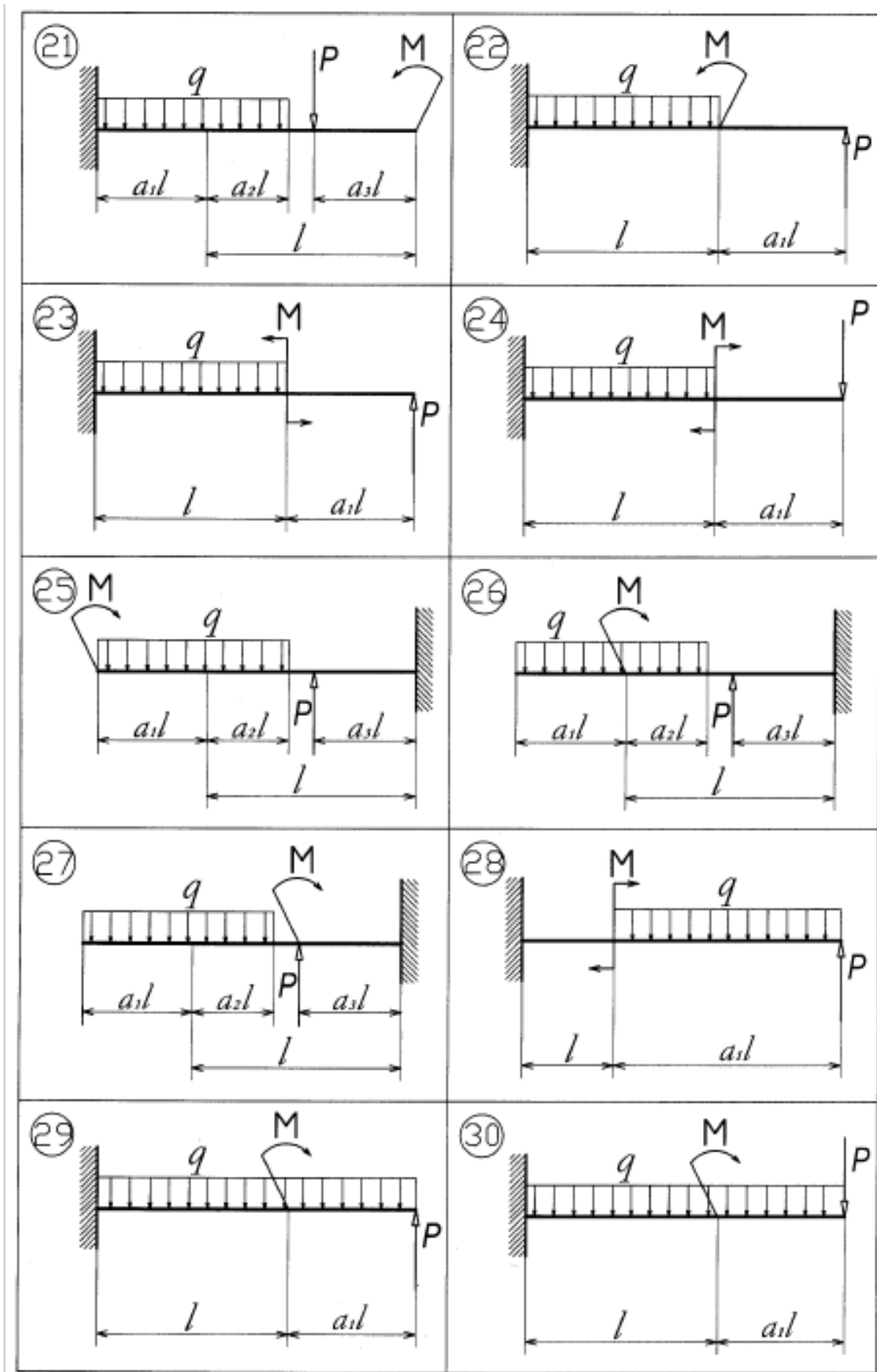


Рисунок 2



Продолжение рисунка 2



Продолжение рисунка 2

Таблица 1

№ строки	P	M	a ₁	a ₂	a ₃	№ строки	P	M	a ₁	a ₂	a ₃
1	qℓ	qℓ ²	1	0,5	0,5	16	0,5qℓ	qℓ ²	2	0,5	0,5
2	qℓ	qℓ ²	1	0,2	0,7	17	0,5qℓ	qℓ ²	2	0,2	0,7
3	qℓ	qℓ ²	1	0,3	0,6	18	0,5qℓ	qℓ ²	2	0,3	0,6
4	qℓ	qℓ ²	1	0,4	0,5	19	0,5qℓ	qℓ ²	2	0,4	0,5
5	qℓ	qℓ ²	1	0,6	0,2	20	0,5qℓ	qℓ ²	2	0,6	0,2
6	2qℓ	qℓ ²	0,5	0,5	0,5	21	1,5qℓ	qℓ ²	2,5	0,5	0,5
7	2qℓ	qℓ ²	0,5	0,2	0,7	22	1,5qℓ	qℓ ²	2,5	0,2	0,7
8	2qℓ	qℓ ²	0,5	0,3	0,6	23	1,5qℓ	qℓ ²	2,5	0,3	0,6
9	2qℓ	qℓ ²	0,5	0,4	0,5	24	1,5qℓ	qℓ ²	2,5	0,4	0,5
10	2qℓ	qℓ ²	0,5	0,6	0,2	25	1,5qℓ	qℓ ²	2,5	0,6	0,2
11	3qℓ	qℓ ²	1,5	0,5	0,5	26	2,5qℓ	qℓ ²	3	0,5	0,5
12	3qℓ	qℓ ²	1,5	0,2	0,7	27	2,5qℓ	qℓ ²	3	0,2	0,7
13	3qℓ	qℓ ²	1,5	0,3	0,6	28	2,5qℓ	qℓ ²	3	0,3	0,6
14	3qℓ	qℓ ²	1,5	0,4	0,5	29	2,5qℓ	qℓ ²	3	0,4	0,5
15	3qℓ	qℓ ²	1,5	0,6	0,2	30	2,5qℓ	qℓ ²	3	0,6	0,2

Вопросы для защиты работы

1. Обязательно ли определять опорные реакции для построения эпюр внутренних усилий в консольных балках?
2. Какие сечения являются границами участков нагружения балок?
3. Постройте эпюры внутренних усилий для консольных балок, схемы которых предложены преподавателем.

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ИЗГИБЕ ДВУХОПОРНЫХ БАЛОК

Цель и содержание работы: изучение построения эпюр внутренних силовых факторов при изгибе двухопорных балок.

Теоретическая часть

Правила построения и проверки эпюр внутренних усилий при изгибе изложены в теоретической части к практическому занятию 4.

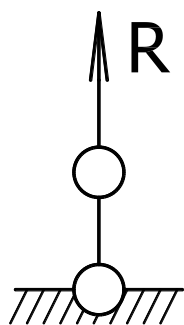


Рисунок 5.1

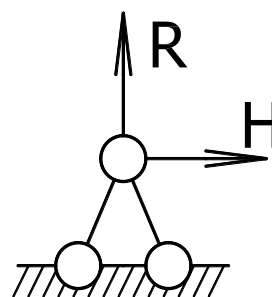


Рисунок 5.2

При конструировании двухопорных балок, как правило, используют два основных типа опорных закреплений. В шарнирно-подвижной опоре (рисунок 5.1) направление реакции R совпадает с направлением связи. В шарнирно-неподвижной опоре (рисунок 5.2) направление реакции неизвестно, поэтому пользуются двумя составляющими – вертикальной R и горизонтальной H , совпадающих с направлением связей. В частных случаях некоторые опорные реакции могут быть равны нулю; например, если балка нагружена только вертикальными усилиями, то горизонтальная составляющая опорной реакции равна нулю.

Пример 5.1

Построить эпюры внутренних усилий для двухопорной балки, нагруженной по всему пролету равномерно распределенной нагрузкой q (рисунок 5.3).

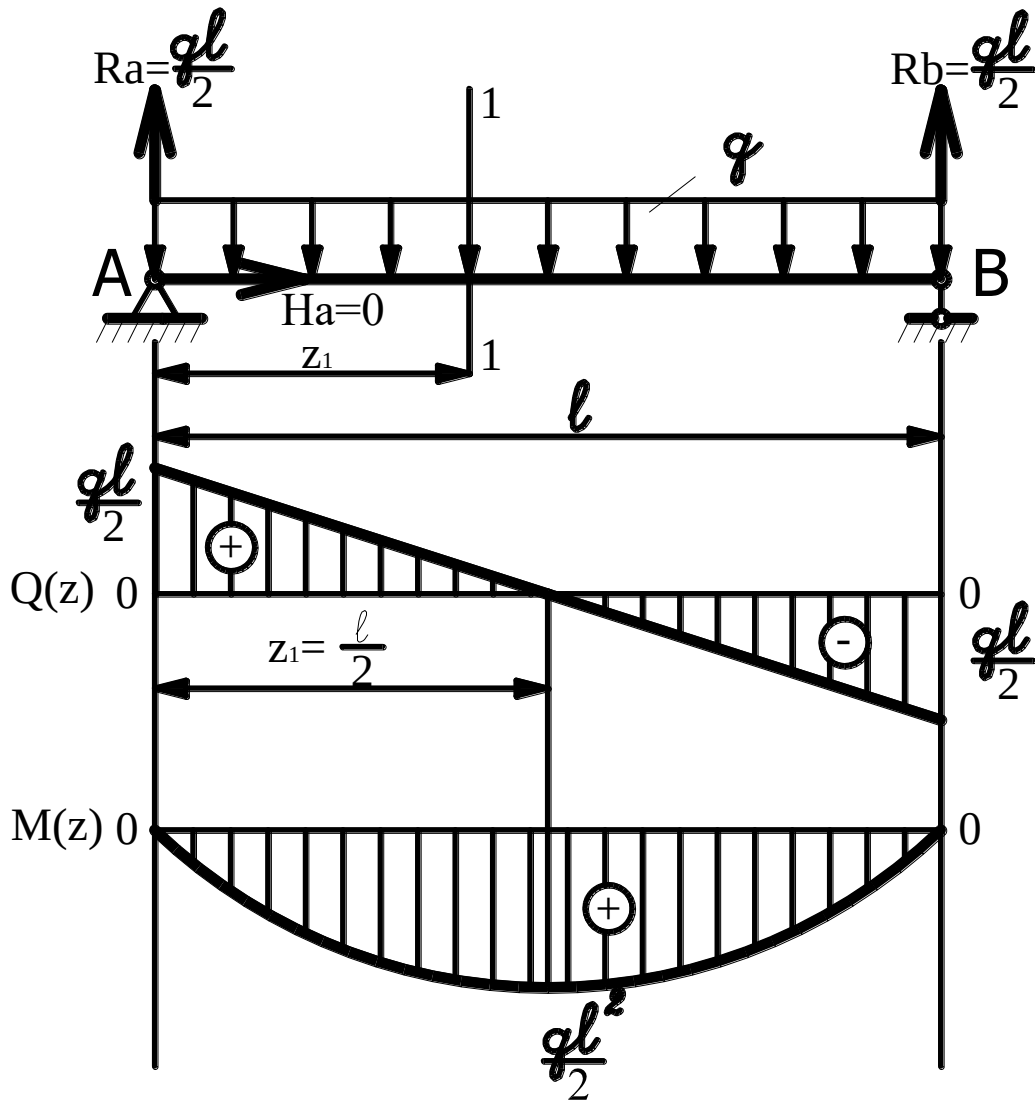


Рисунок 5.3

Решение

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0, \quad -q\ell \cdot \frac{\ell}{2} + R_B \cdot \ell = 0; \quad R_B = \frac{q\ell^2}{2\ell} = \frac{q\ell}{2},$$

$$\sum M_B = 0, \quad q\ell \cdot \frac{\ell}{2} - R_A \cdot \ell = 0; \quad R_A = \frac{q\ell^2}{2\ell} = \frac{q\ell}{2}.$$

Проверка:

$$\sum y = 0, \quad R_A + R_B - q\ell = 0, \quad \frac{q\ell}{2} + \frac{q\ell}{2} - P = 0, \quad 0 \equiv 0.$$

Балка имеет один участок нагружения, для которого определяем внутренние усилия.

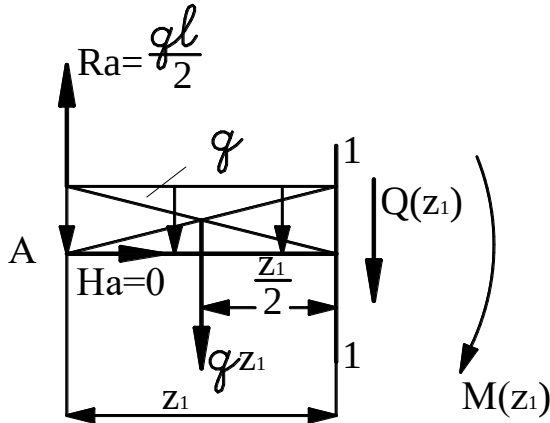


Рисунок 5.4

1-й участок

$$0 \leq z_1 \leq \ell_1 = \ell$$

 $v(\cdot)A$ $v(\cdot)B$

$$M(z_1) = R_A \cdot z_1 - qz_1 \frac{z_1}{2} = \frac{q\ell}{2} z_1 - \frac{qz_1^2}{2}:$$

$$\text{в точке } A: z_1=0; \quad M(z_1) = -R_A \cdot 0 = 0;$$

$$\text{в точке } B: z_1=\ell; \quad M(z_1) = \frac{q\ell}{2} \ell - \frac{q\ell^2}{2} = 0.$$

$$Q(z_1) = R_A - qz_1 = \frac{q\ell}{2} - qz_1:$$

$$\text{в точке } A: z_1=0; \quad Q(z_1) = \frac{q\ell}{2} - 0 = \frac{q\ell}{2};$$

$$\text{в точке } B: z_1=\ell; \quad Q(z_1) = \frac{q\ell}{2} - q\ell = -\frac{q\ell}{2}.$$

Поскольку поперечная сила в пределах одного участка нагружения меняет знак с плюса на минус, то на эпюре изгибающих моментов в сечении, где поперечная сила равна нулю, будет экстремум (точка максимума). Определим, при каком значении координаты z_1 поперечная сила $Q(z_1)$ обращается в ноль. Для этого приравняем к нулю уравнение поперечной силы $Q(z_1)=0$ для рассматриваемого участка:

$$Q(z_1) = R_A - qz_1 = \frac{q\ell}{2} - qz_1 = 0; \quad \frac{q\ell}{2} = qz_1; \quad z_1 = \frac{\ell}{2}.$$

Определим значение изгибающего момента $M(z_1)$ при $z_1=\ell/2$:

$$M(z_1) = \frac{q\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} - \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{q\ell^2}{4} - \frac{q\ell^2}{8} = \frac{q\ell^2}{8}.$$

По полученным данным строим эпюры $Q(z_1)$ и $M(z_1)$. Эпюру изгибающего момента строим на растянутых волокнах.

Ввиду нелинейности эпюры $M(z)$ выполним интегральную проверку по формуле (4.2):

$$\Omega_Q^{AB} = M_B - M_A; \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{q\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{q\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} = 0 - 0; \quad 0 \equiv 0,$$

где Ω_Q^{AB} – площадь эпюры поперечных сил на рассматриваемом участке AB ; поскольку на рассматриваемом участке часть эпюры лежит ниже базовой линии, ее площадь полагаем отрицательной, а площадь части эпюры, расположенной выше базовой линии – положительной;

M_B – значение изгибающего момента в точке B – конечной точке рассматриваемого участка;

M_A – значение изгибающего момента в точке A – начальной точке рассматриваемого участка.

Для середины участка нагружения сечения C , где $z_1 = \ell/2$, интегральная проверка выполняется по тем же правилам:

$$\Omega_Q^{AC} = M_C - M_A; \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{q\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} - 0 = \frac{q\ell^2}{8} - 0; \quad \frac{q\ell^2}{8} = \frac{q\ell^2}{8}; \quad 0 \equiv 0.$$

Пример 5.2

Построить эпюры внутренних усилий для двухопорной балки, нагруженной как показано на рисунке 5.5.

Решение

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0,$$

$$R_B \cdot 6\ell - 6q\ell^2 + 2q \cdot 2\ell \cdot \ell - 6q\ell \cdot 2\ell - 2q \cdot 2\ell \cdot \ell = 0; \quad R_B = \frac{q\ell^2}{6\ell} (6 + 12) = 3q\ell;$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-R_A \cdot 6\ell - 6q\ell^2 + 2q \cdot 4\ell \cdot 6\ell + 6q\ell \cdot 4\ell = 0; \quad R_A = \frac{q\ell^2}{6\ell} (48 + 24 - 6) = 11q\ell.$$

Проверка:

$$\sum y = 0, \quad R_A + R_B - 6ql - 2q \cdot 4\ell = 0, \quad 11ql + 3ql - 6ql - 2q \cdot 4\ell = 0, \quad 0 \equiv 0.$$

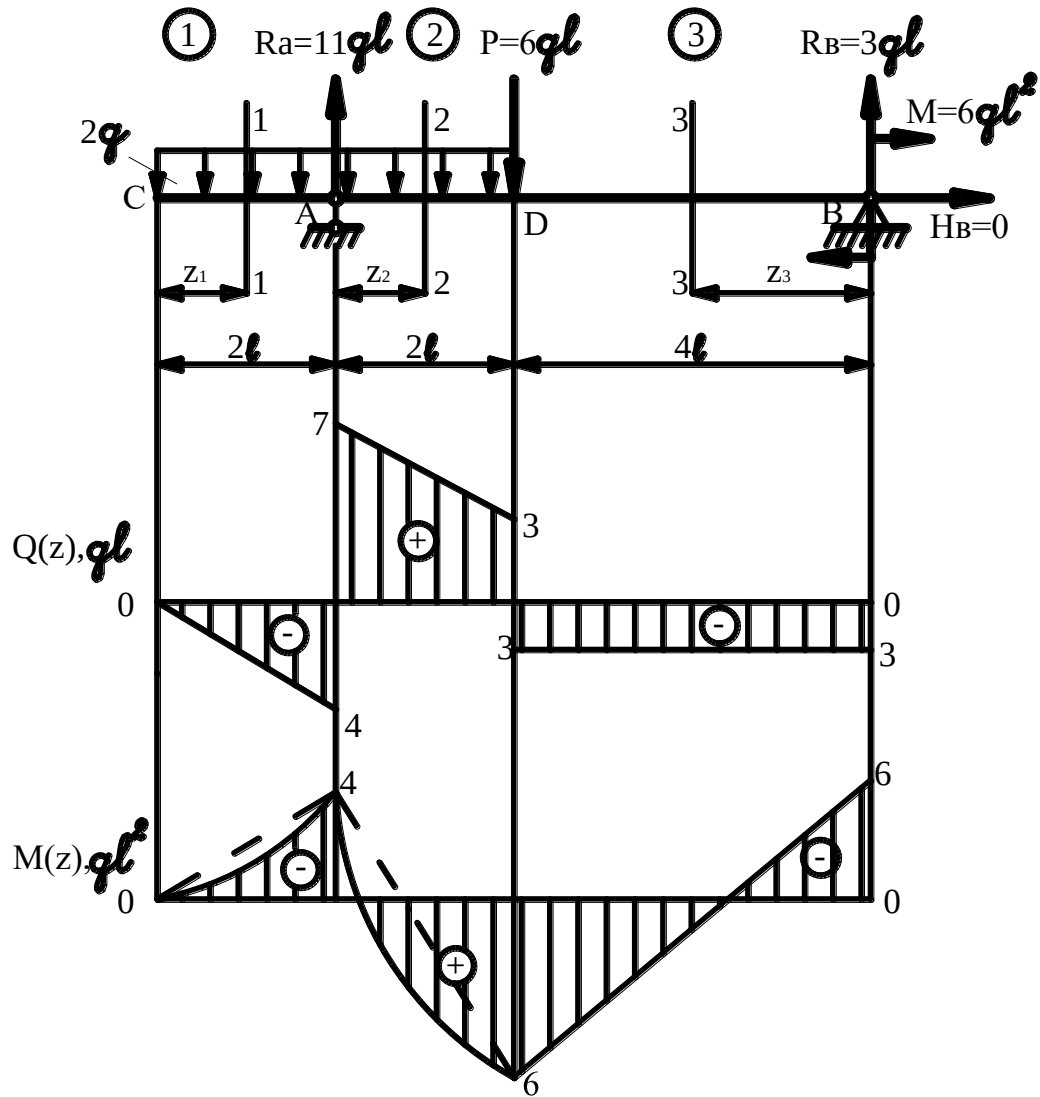


Рисунок 5.5

1 – й участок

$$0 \leq z_1 \leq 2\ell$$

$v(\cdot)C$

$v(\cdot)A$

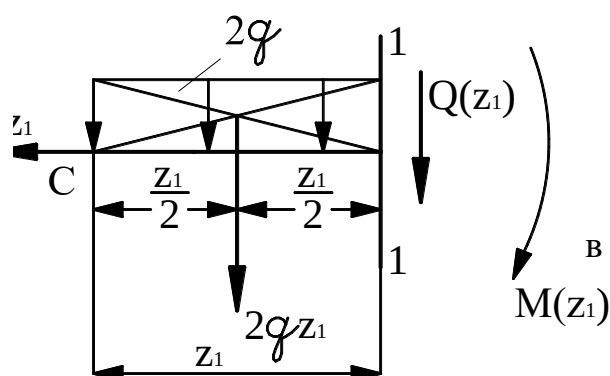


Рисунок 5.6

$$M(z_1) = -2qz_1 \frac{z_1}{2} = -qz_1^2 :$$

в точке C: $z_1=0$; $M(z_1)=0$;

в точке A: $z_1=2\ell$; $M(z_1) = -4q\ell^2$.

$$Q(z_1) = -2qz_1 :$$

в точке C: $z_1=0$; $Q(z_1)=0$;

в точке A: $z_1=4\ell$; $Q(z_1) = -4q\ell$.

2-й участок

$$0 \leq z_2 \leq 2\ell$$

$\sigma(\cdot)A$ $\sigma(\cdot)D$

$$M(z_2) = -2q(2\ell + z_2) \frac{2\ell + z_2}{2} + R_A \cdot z_2 :$$

в точке A: $z_2=0$; $M(z_2) = -4q\ell^2$;

в точке D: $z_2=2\ell$; $M(z_2) = 6q\ell^2$.

$$Q(z_1) = -2q(2\ell + z_2) + R_A :$$

в точке A: $z_1=0$; $Q(z_1) = 7q\ell$;

в точке B: $z_1=4\ell$; $Q(z_1) = 3q\ell$.

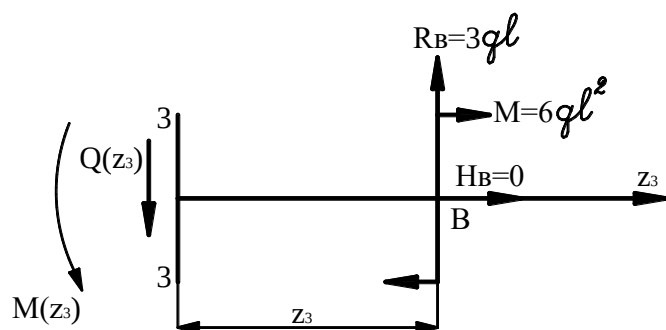


Рисунок 5.8

3-й участок

$$0 \leq z_3 \leq 4\ell$$

$\sigma(\cdot)B$ $\sigma(\cdot)D$

$$M(z_3) = -6q\ell^2 + R_B \cdot z_3 :$$

в точке B: $z_3=0$; $M(z_3) = -6q\ell^2$;

в точке D: $z_3=4\ell$; $M(z_3) = 6q\ell^2$.

$$Q(z_1) = -R_B = -3q\ell = \text{const.}$$

Задание 5.1

Для двухопорной балки, схема нагружения которой представлена на рисунке 5.9, построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, выполнить проверки и определить положение опасного сечения. Значения нагрузок и размеры элементов балки принять по таблице 5.1.

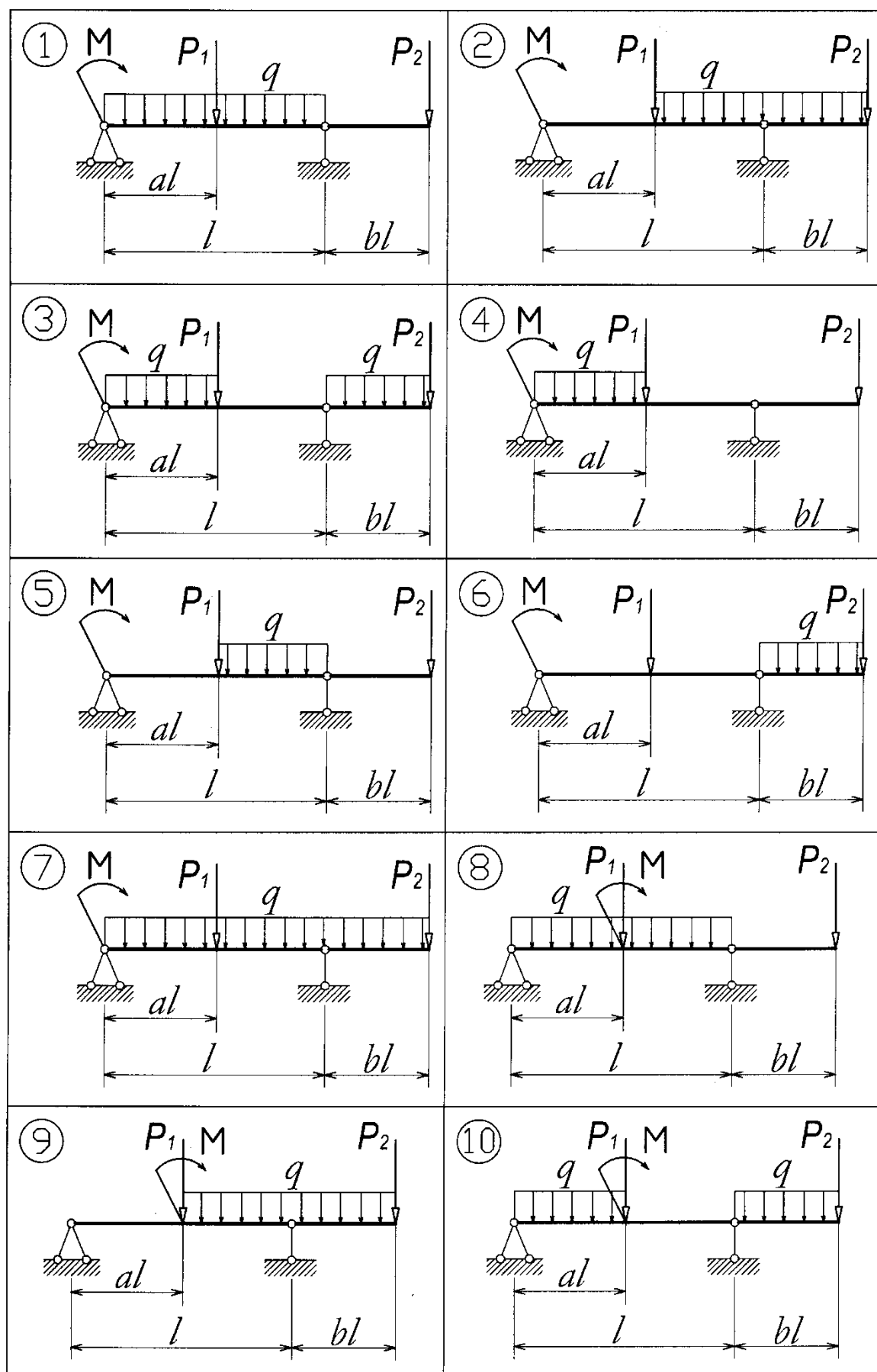
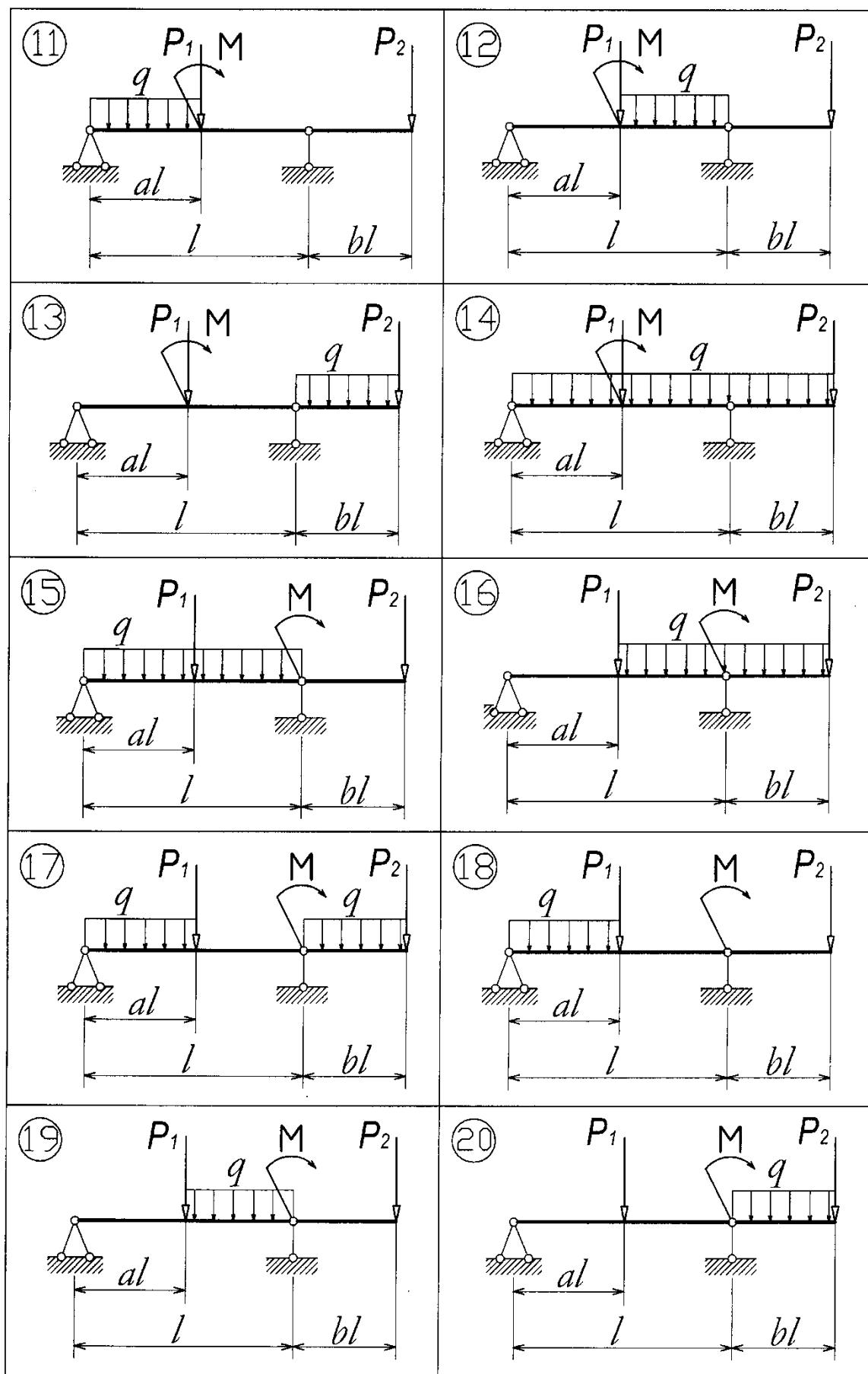
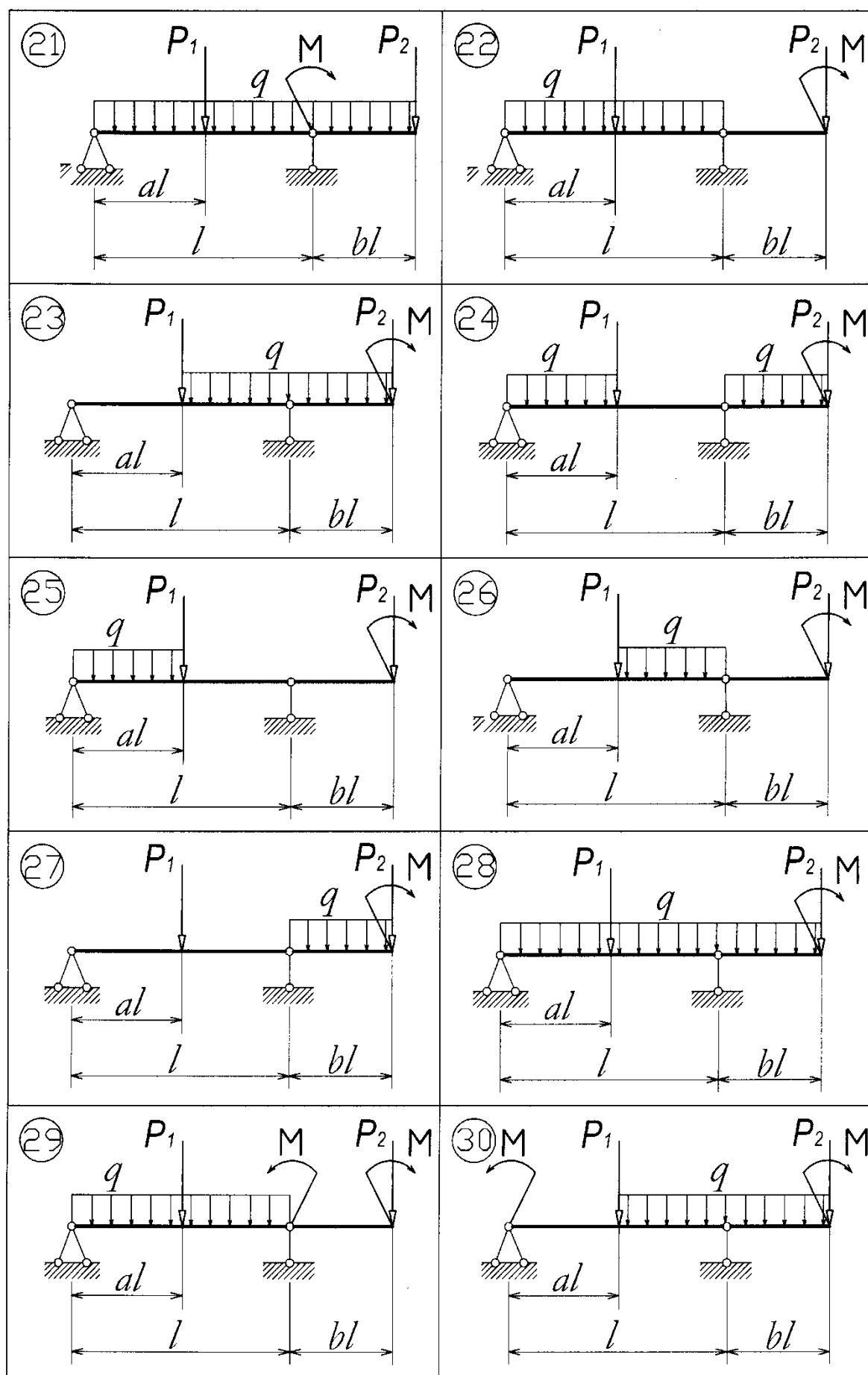


Рисунок 5.9



Продолжение рисунка 5.9



Продолжение рисунка 5.9

Таблица 5.1

№ строки	P_1	P_2	M	a	b	№ строки	P_1	P_2	M	a	b
1	$q\ell$	$0,5q\ell$	$q\ell^2$	0,5	1	16	$0,5q\ell$	$0,5q\ell$	$q\ell^2$	0,5	2,5
2	$q\ell$	$q\ell$	$q\ell^2$	0,2	1	17	$0,5q\ell$	$q\ell$	$q\ell^2$	0,2	2,5
3	$q\ell$	$1,5q\ell$	$q\ell^2$	0,3	1	18	$0,5q\ell$	$1,5q\ell$	$q\ell^2$	0,3	2,5
4	$q\ell$	$2q\ell$	$q\ell^2$	0,4	1	19	$0,5q\ell$	$2q\ell$	$q\ell^2$	0,4	2,5
5	$q\ell$	$2,5q\ell$	$q\ell^2$	0,6	1	20	$0,5q\ell$	$2,5q\ell$	$q\ell^2$	0,6	2,5
6	$2q\ell$	$0,5q\ell$	$q\ell^2$	0,5	1,5	21	$1,5q\ell$	$0,5q\ell$	$q\ell^2$	0,5	3
7	$2q\ell$	$q\ell$	$q\ell^2$	0,2	1,5	22	$1,5q\ell$	$q\ell$	$q\ell^2$	0,2	3
8	$2q\ell$	$1,5q\ell$	$q\ell^2$	0,3	1,5	23	$1,5q\ell$	$1,5q\ell$	$q\ell^2$	0,3	3
9	$2q\ell$	$2q\ell$	$q\ell^2$	0,4	1,5	24	$1,5q\ell$	$2q\ell$	$q\ell^2$	0,4	3
10	$2q\ell$	$2,5q\ell$	$q\ell^2$	0,6	1,5	25	$1,5q\ell$	$2,5q\ell$	$q\ell^2$	0,6	3
11	$3q\ell$	$0,5q\ell$	$q\ell^2$	0,5	2	26	$2,5q\ell$	$0,5q\ell$	$q\ell^2$	0,5	0,5
12	$3q\ell$	$q\ell$	$q\ell^2$	0,2	2	27	$2,5q\ell$	$q\ell$	$q\ell^2$	0,2	0,5
13	$3q\ell$	$1,5q\ell$	$q\ell^2$	0,3	2	28	$2,5q\ell$	$1,5q\ell$	$q\ell^2$	0,3	0,5
14	$3q\ell$	$2q\ell$	$q\ell^2$	0,4	2	29	$2,5q\ell$	$2q\ell$	$q\ell^2$	0,4	0,5
15	$3q\ell$	$2,5q\ell$	$q\ell^2$	0,6	2	30	$2,5q\ell$	$2,5q\ell$	$q\ell^2$	0,6	0,5

Вопросы для защиты работы

1. Сформулируйте правила проверки правильности построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
2. Объясните дифференциальные и интегральные зависимости, используемые для проверки правильности построения эпюр внутренних усилий при изгибе.
3. Какие сечения являются границами участков нагружения балок?
4. Обязательно ли определять опорные реакции для построения эпюр внутренних усилий в двухопорных балках?
5. Постройте эпюры внутренних усилий для двухопорных балок, схемы которых предложены преподавателем.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ДАННОЙ ТЕМЕ

1 Щербакова, Ю. В. Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебное пособие / Ю. В. Щербакова. - Сопротивление материалов, 2020-02-05. - Саратов : Научная книга, 2019. - 159 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-9758-1776-1

2. Коргин, А. В Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебно-методическое пособие к выполнению практических работ для обучающихся по направлению подготовки 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, профиль «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные средства и оборудование» / А. В. Коргин, В. А. Ермаков, В. А. Романец. - Москва : МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 186 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-7264-1842

3. Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

2 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА БАЛОК ПРИ ПРЯМОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Цель работы

Целью работы является закрепление знаний по основам теории, относящимся к рассматриваемой теме, и освоение практических навыков, необходимых для определения прочностных характеристик и деформаций балок, работающих на изгиб.

Теоретическая часть

Изгибом называется такой вид деформации, когда в любом поперечном сечении твердого тела (бруса) действует изгибающий момент.

Брус, работающий на изгиб, называется *балкой*. Влиянию изгибающего момента также подвержены оси, валы и другие тела.

Если изгибающий момент приложен в плоскости симметрии детали, то такой изгиб называют *прямым*.

В поперечном сечении бруса при прямом изгибе возникают внутренние силовые факторы – изгибающий момент M и поперечная сила Q .

Момент – это сила, умноженная на плечо, поэтому изгибающий момент можно представить в виде пары сил, приложенных к общему плечу

$$M = F \cdot l.$$

В процессе нагружения изгибающим моментом M одни волокна балки подвергаются деформациям *сжатия* (верхние на рисунке 6.1), а другие – *растяжения* (нижние на рисунок 6.1). При этом в сечении балки располагается так называемый *нейтральный слой*, волокна которого искривляются, не изменяя свою первоначальную длину.



Рисунок 6.1 – Деформации изгиба балки

Из анализа особенностей деформирования балок и других деталей следует, что:

1. Волокна бруса, расположенные со стороны вогнутой стороны всегда сжаты, а выпуклой – растянуты.
2. На границе между этими слоями расположен нейтральный слой, длина которого в процессе деформации не изменяется.
3. Сечения балки, плоские до деформации, остаются такими же и после деформации.
4. При чистом изгибе в поперечных сечениях балки возникают только нормальные напряжения сжатия и растяжения, распределенные неравномерно по сечению.
6. На нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю.

Проверочный и проектный расчет при прямом изгибе

При нагружении балки на ее внешнем контуре развиваются максимальные нормальные напряжения (рисунок 6.4), которые определяют по зависимости

$$\sigma_{\max} = M_{\max} / W_x, \quad (6.1)$$

где $M_{\max}$ – максимальный изгибающий момент; W_x – осевой момент сопротивления изгибу относительно оси x .

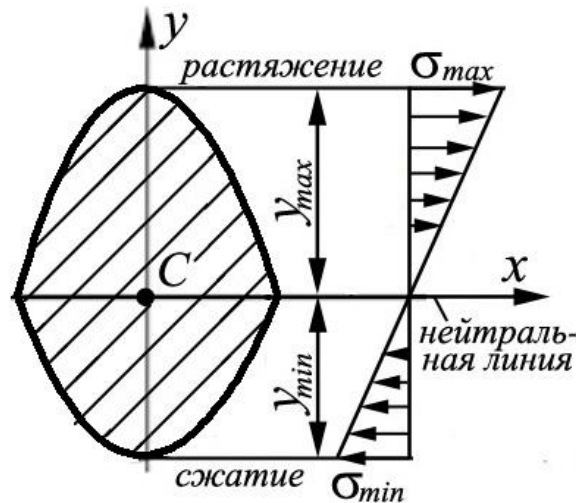


Рисунок 6.4 – Эпюра распределения напряжений по сечению балки

Этот момент определяют по выражению

$$W_x = J_x / y_{\max}, \quad (6.2)$$

где J_x – момент инерции сечения балки относительно оси x ; $y_{\max}$ – максимальное расстояние от центра тяжести сечения до внешнего контура балки.

Осевой момент сопротивления зависит от формы поперечного сечения балки, например, для круглого сечения

$$W_x = W_y = \pi \cdot d^3 / 32, \quad (6.3)$$

где d – диаметр вала.

Отсюда

$$\sigma_{\max} = 32M_{\max} / \pi d^3. \quad (6.4)$$

Прочность бруса, работающего на изгиб, считается обеспеченной, если наибольшие нормальные напряжения, возникающие в его опасном сечении, не превышают величины допускаемого напряжения.

$$\sigma_{\max} = M_{\max} / W_x \leq [\sigma_u], \quad (6.5)$$

где $[\sigma_u]$ – допускаемое напряжение изгиба.

Поскольку внешний контур балок подвергается деформациям растяжения и сжатия, то допускаемое напряжение при изгибе определяют таким же путем, как при растяжении и сжатии

$$[\sigma_u] = \sigma_T / [s], \quad (6.6)$$

где σ_T – предел текучести материала вала (сталь); $[s]$ – коэффициент запаса прочности.

С учетом выражения (6.4) уравнение *проверочного* расчета для осей и валов круглого сечения будет иметь вид

$$\sigma = 32M / \pi d^3 \leq [\sigma_u]. \quad (6.7)$$

Если необходимо определить размеры проектируемого изделия, то такой расчет называется *проектным*. Для осей и валов таким параметром является диаметр, который может быть определен по формуле

$$d_i = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_i}{\pi \cdot [\sigma_u]}}, \quad (6.8)$$

где M_i – текущее значение крутящего момента; d_i – диаметр оси или вала в рассматриваемом сечении.

Вычисленные значения диаметров округляют в ближайшую большую сторону в соответствии с рядом нормальных линейных размеров, определяемых по ГОСТ 6636-86. Для этих целей чаще используют ряд *Ra40*: 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 52; 55; 60; 63; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 125; 130; 140; 150 мм.

6.3.3 Стандартные прокатные профили

Так как вблизи нейтрального слоя поперечного слоя балок действуют минимальные напряжения изгиба, а на внешнем контуре наоборот – максимальные (рисунок 6.4), то выгодно большую часть материала, располагать подальше от нейтральной оси. В этой связи в машиностроении редко применяют металлические балки сплошного сечения (прямоугольные, квадратные, круглые и т.п.), а отдают предпочтения *стандартным прокатным профилям*, у которых большинство материала располагается на максимальном удалении от нейтрального слоя.

Промышленностью выпускаются стандартные прокатные профили *таврового, двутаврового, швеллерного и углового сечения*, которые могут быть использованы как готовые элементы конструкций (балки, стойки, элементы ферм и т. д.).

За счет специальной формы сечений обеспечивается повышенная прочность и жесткость изделий с одновременным значительным снижением массы и габаритных размеров. Форма сечений этих профилей показана на рисунке 6.5.

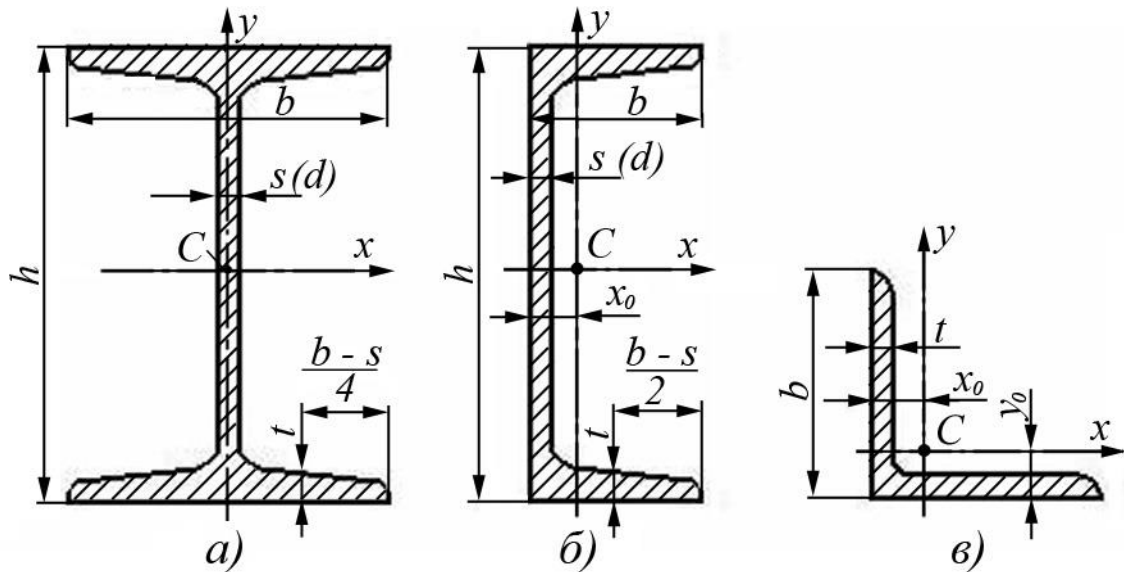


Рисунок 6.5 – Сечения стандартных прокатных профилей: *a* – двутавр; *б* – швеллер; *в* – уголок.

Размеры прокатных профилей стандартизованы и даны в таблицах сортовментов прокатной стали, которые содержатся в справочниках. В этих таблицах приводятся все размеры сечений и основные геометрические характеристики прокатных профилей в соответствии с их номером. Обозначения, приведенные на рисунке 6.5, соответствуют следующим параметрам: h – высота профиля, b – ширина полки, s – толщина стенки, t – толщина полки, x_0 , y_0 – расстояние от центра тяжести профиля до внешней стенки.

Моменты инерции, осевые моменты сопротивления и другие характеристики прокатных фасонных профилей стандартных размеров приведены в таблицах ГОСТа. Сортамент двутавров приведен в ГОСТ 8239-89(93), сортамент швеллеров – ГОСТ 8240-89(93), сортамент уголков – ГОСТ 8509-93.

Геометрические характеристики всех прокатных профилей могут быть найдены в системе ИНТЕРНЕТ по соответствующим ГОСТам.

В таблице 6.1 приведены геометрические характеристики двутавров.

Таблица 6.1 – Двутавры (в соответствии с ГОСТ 8239-93)

№ двутавра	h , см	b , см	s , см	t , см	A , см ²	J_x , см ⁴	J_y , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см
10	10	5,5	0,45	0,72	12	198	17,9	39,7	4,06
12	12	6,4	0,48	0,73	14,7	650	27,9	58,4	4,88
14	14	7,3	0,49	0,75	17,4	572	41,9	61,7	5,73
16	16	8,1	0,5	0,78	20,2	873	58,6	109	6,57
18	18	9,0	0,51	0,81	23,4	1290	82,6	143	7,42
20	20	10,0	0,52	0,84	26,8	1840	115	184,6	8,28
22	22	11,0	0,54	0,87	30,6	2550	157	232	9,13
24	24	11,5	0,56	0,95	34,8	3460	198	289	9,97
27	27	12,5	0,60	0,98	40,2	5010	260	371	11,2
30	30	13,5	0,65	1,02	46,5	7080	337	472	12,3
33	33	14,0	0,70	1,12	53,8	9840	419	597	13,5
36	36	14,5	0,75	1,23	61,9	13380	516	743	14,7
40	40	15,5	0,83	1,30	72,6	19062	667	953	16,2
45	45	16,0	0,90	1,42	84,7	27696	808	1231	18,1
50	50	17,0	1,0	1,52	100	39727	1049	1589	19,9
55	55	18,0	1,1	1,65	118	55962	1356	2035	21,8
60	60	19,0	1,2	1,78	138	76806	1725	2560	23,6

6.4 Пример выполнения задания

Для заданной схемы балки (рисунок 6.6, а) построить эпюру поперечных сил и эпюру изгибающих моментов. По эпюре найти максимальный изгибающий момент M_{max} и по нему подобрать стальную двутавровую балку с указанием номера и значения моментов сопротивления сечения при изгибе W_x по ГОСТ 8239-93. Допускаемые напряжения на изгиб $[\sigma_u] = 150$ МПа.

Исходные данные: изгибающий момент $M = 11$ кН·м; сосредоточенные силы: $F_1 = 49,4$ кН и $F_2 = 11$ кН; длина участков балки: $a = 1,9$ м; $b = 4,4$ м; $c = 5$ м; $d = 2,7$ м.

Решение.

1. Составим расчетную схему.

Для этого отбросим опоры и заменим их влияние реакциями опор R_A и R_B , направленными снизу-вверх. Разобьем балку на отдельные участки – I , II , III и IV .

На рисунке 6.6, б показана расчетная схема.

2. Определим реакции опор.

Для этого составив уравнения равновесия в виде суммы изгибающих моментов относительно точек B и A . При составлении подобных уравнений рекомендуется в качестве первого параметра использовать неизвестную реакцию и считать ее положительной. Если в результате расчета знак не изменится, то направление реакции выбрано правильно. Если получится отрицательный результат, то направление реакции следует изменить.

Отсюда

$$\Sigma M_B = 0; \quad R_A \cdot (a + b + c) - F_1(b + c) - F_2 \cdot c + M = 0.$$

Подставим данные и, произведя вычисления, получим

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{F_1(b + c) + F_2 \cdot c - M}{a + b + c} = \\ &= \frac{49,4 \cdot (4,4 + 5) + 11 \cdot 5 - 11}{1,9 + 4,4 + 5} = 45 \text{ кН}. \end{aligned}$$

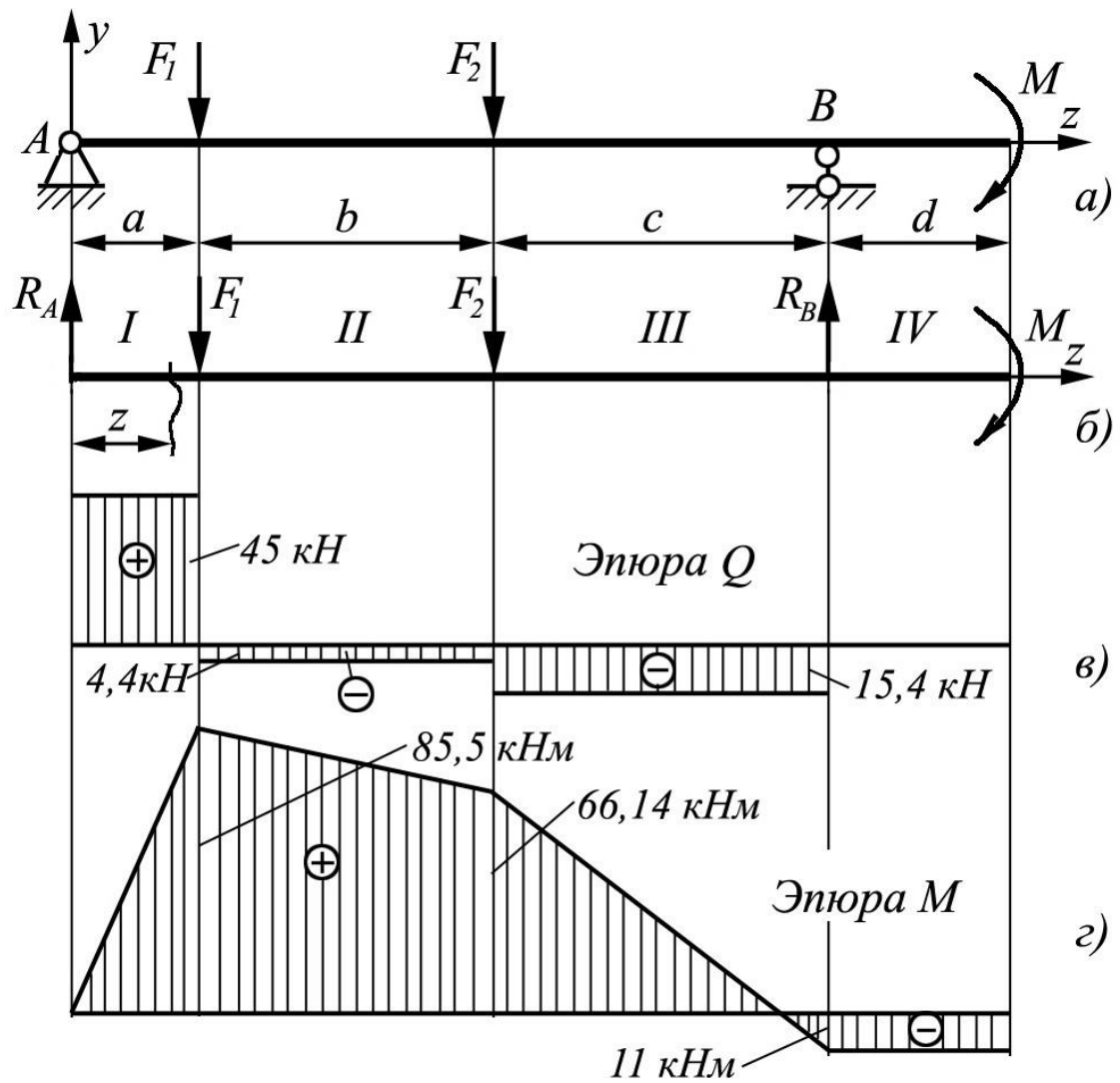


Рисунок 6.6 – Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Аналогично

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot (c + b + a) - F_2 \cdot (b + a) - F_1 \cdot a - M = 0.$$

Подставим данные и, произведя вычисления, получим

$$R_B = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot (b + a) + M}{c + b + a} = \frac{49,4 \cdot 1,9 + 11(4,4 + 1,9) + 11}{5 + 4,4 + 1,9} = 15,4 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности решения воспользуемся уравнением равновесия в виде проекции сил на ось y :

$$\sum Y = 0; \quad R_A - F_1 - F_2 + R_B = 0; \quad 45 - 49,4 - 11 + 15,4 = 0.$$

Полученное тождество $0 \equiv 0$ говорит о том, что реакции определены правильно.

3. Определим значения **поперечных сил** на отдельных участках бруса. Для этого отсекаем часть бруса и проецируем, приложенные к ней силы, на ось y :

на участке I ($0 \leq z \leq 1,9$ м):

на первом участке поперечная сила Q_I постоянна, положительна и равна R_A , так как слева от сечения z других сил нет:

$$Q_I = R_A = 49,4 \text{ кН};$$

на участке II ($1,9 \leq z \leq 6,3$ м)

$$Q_{II} = R_A - F_1 = 45 - 49,4 = -4,4 \text{ кН};$$

на участке III ($6,3 \leq z \leq 11,3$ м)

$$Q_{III} = R_A - F_1 - F_2 = 45 - 49,4 - 11 = -15,4 \text{ кН},$$

что соответствует значению реакции на опоре B и подтверждает правильность решения.

На участке IV поперечная сила равна нулю.

По этим данным строим эпюру поперечных сил (рисунок 6.6, в). На участке I , II и III эпюра изображается прямыми линиями, параллельными оси z . На границах этих участков имеются скачки, равные усилиям R_A , F_1 , F_2 , R_B .

3. Определим значения изгибающих моментов на границах отдельных участках балки, двигаясь слева направо.

На участке I ($0 \leq z \leq 1,9$ м):

$$M_I = R_A z;$$

при $z = 0$, $M_I = 0$;

при $z = 1,9$ м, $M_I = 45 \cdot 1,9 = 85,5 \text{ кНм}$.

На участке II ($1,9 \leq z \leq 6,3$ м):

$$M_{II} = R_A z - F_1(z - a);$$

при $z = 1,9$ м: $M_{II} = 45 \cdot 1,9 - 49,4(1,9 - 1,9) = 85,5 \text{ кНм.}$;

при $z = 6,3$ м: $M_{II} = 45 \cdot 6,3 - 49,4(6,3 - 1,9) = 66,14 \text{ кНм.}$

На участке III ($6,3 \leq z \leq 11,3$ м):

$$M_{III} = R_A z - F_1(z - a) - F_2(z - a - b);$$

при $z = 6,3$ м:

$$M_{III} = 45 \cdot 6,3 - 49,4(6,3 - 1,9) - 11(6,3 - 1,9 - 4,4) = 66,14 \text{ кНм.}$$

при $z = 11,3$ м:

$$M_{III} = 45 \cdot 11,3 - 49,4(11,3 - 1,9) - 11(11,3 - 1,9 - 4,4) = -10,86 \text{ кНм.}$$

На участке IV ($11,3 \leq z \leq 14$ м):

$$M_{IV} = R_A z - F_1(z - a) - F_2(z - a - b) + R_B(z - 11,3);$$

при $z = 11,3$ м: $M_{IV} = -10,86 \text{ кНм.}$

при $z = 14$ м:

$$M_{IV} = 45 \cdot 14 - 49,4(14 - 1,9) - 11(14 - 6,3) + 15,4(14 - 11,3) = -10,86 \text{ кНм.}$$

Для сокращения объема расчета на последнем участке балки рекомендуется определять крутящие моменты, исходя из уравнения равновесия правой части бруса. В рассматриваемом случае на последнем участке действует момент M , изгибающий балку выпуклостью вверх, поэтому принимаем $M_{IV} = -M = -11 \text{ кНм}$, что практически совпадает с полученным выше значением и свидетельствует о правильности расчета.

По полученным данным строим эпюру изгибающих моментов (рисунок 6.6, з). На первых трех участках эпюра изображается наклонными прямыми линиями, а на последнем участке – прямой линией, параллельной оси z .

4. По максимальному значению изгибающего момента подбираем балку двутаврового сечения.

Согласно эпюре $M_{max} = 85,5 \text{ кНм}$.

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_u = M_{\max} / W_x \leq [\sigma_u].$$

Отсюда

$$W_x = M_{\max} / [\sigma_u] = 85,5 \cdot 10^6 / 150 = 570 \cdot 10^3 \text{ мм}^3 = 570 \text{ см}^3.$$

По ГОСТ 8239-93 (таблица 6.1) подбираем двутавровую балку № 33 с осевым моментом сопротивления $W_x = 597 \text{ см}^3$.

6.5 Контрольные задания

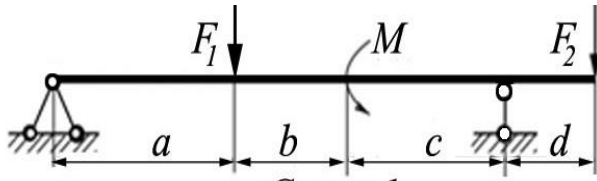
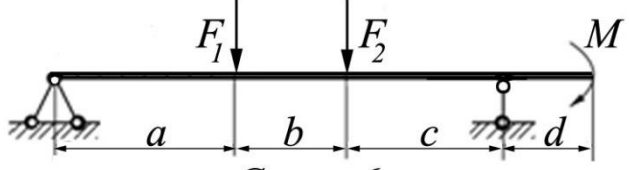
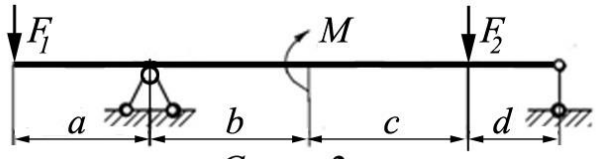
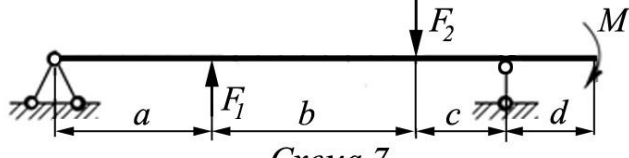
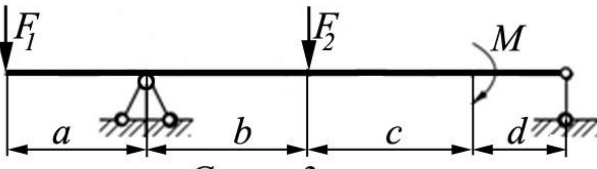
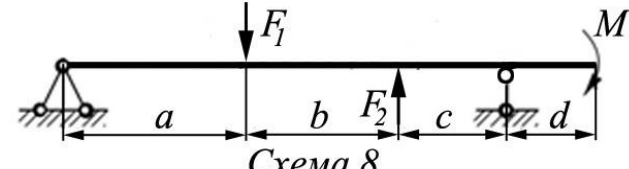
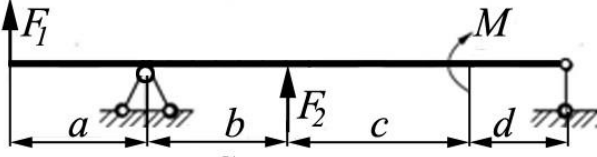
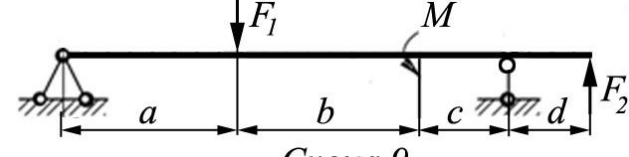
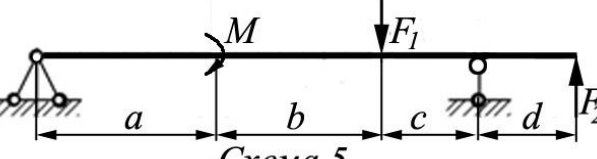
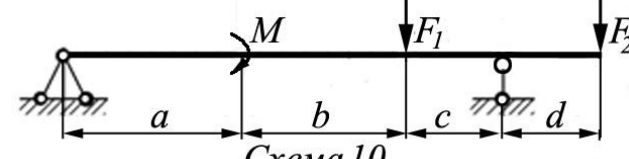
Для заданной схемы балки построить эпюру поперечных сил и эпюру изгибающих моментов, найти максимальный изгибающий момент $M_{\max}$ и по нему подобрать стальную двутавровую балку с указанием номера и значения моментов сопротивления сечения при изгибе W_x по ГОСТ 8339-89. Допускаемые напряжения на изгиб $[\sigma_u] = 150 \text{ МПа}$. Исходные данные для расчета принять по таблице 6.2, а схему балки – по таблице 6.3.

Примечание: номер расчетной схемы принять по **последней** цифре шифра студента, а вариант – по **предпоследней** цифре шифра студента (если последняя цифра шифра ноль, то следует принять десятую схему).

Таблица 6.2 – Исходные данные

Вариант	Линейные размеры (м) и нагрузки						
	$a,$ м	$b,$ м	$c,$ м	$d,$ м	Изгибающий момент $M,$ кН·м	Нагрузка $F_1,$ кН	Нагрузка $F_2,$ кН
1	2,0	3,2	1,8	3	7	20	22
2	2,2	3,4	1,9	2,5	7	19	21
3	2,4	3,6	2,0	3,0	8	18	20
4	2,6	3,8	2,1	2,5	8	17	19
5	2,8	4,0	2,2	2,0	9	16	18
6	3,0	4,2	2,3	2,5	9	15	17
7	3,2	4,4	2,4	3,0	10	14	16
8	3,4	4,6	2,5	2,5	10	13	15
9	3,6	4,8	2,6	3,0	11	12	14
10	3,8	5,0	2,7	2,5	11	11	13

Таблица 6.3 – Схема нагружения балки

 Схема 1	 Схема 6
 Схема 2	 Схема 7
 Схема 3	 Схема 8
 Схема 4	 Схема 9
 Схема 5	 Схема 10

6.6 Контрольные вопросы

1. Для чего строят эпюры внутренних силовых факторов?
2. Как можно контролировать построение эпюр поперечных сил Q и изгибающих моментов M ?
3. Опишите особенности очертания эпюр M_x и Q_y . В каких сечениях наблюдаются скачкообразные изменения ординат в эпюре M_x ; на каких участ-

ках эпюра M_x – линейная функция, а $Q_y = \text{const}$, почему в местах приложения поперечной сосредоточенной силы в эпюре Q_y – скачок, а в эпюре M_x – «излом» направления касательной; почему в сечениях, в которых M_x имеет экстремальные значения, $Q_y = 0$ или проскакивает через нулевое значение?

4. Если эпюра поперечной силы ограничена наклонной прямой, как выглядит эпюра изгибающего момента?

5. Как находят опасные сечения?

6. В какой последовательности строят эпюры поперечных сил и изгибающих моментов?

7. Почему для определения значения поперечной силы и изгибающего момента в произвольном сечении балки на двух опорах необходимо знать реакции опор?

8. Как изменяется поперечная сила в сечении балки, к которому приложена сосредоточенная сила? Как изменяется значение изгибающего момента в сечении балки, к которому приложен сосредоточенный момент?

9. Как определить максимум и минимум эпюры изгибающих моментов?

6.7 Библиографический список

1. Вереина, Л. И. Техническая механика: учебник / Л. И. Вереина. – 10-е изд., стер. – М.: Изд. центр «Академия», 2015. – 224 с.

2. Яблонский, А. А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие / А. А. Яблонский, С. С. Нореико, С. А. Вольфсон и др. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 384 с.

3. Эрдеди, А. А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: учебное пособие / А. А Эрдеди, Н. А. Эрдеди. – 8-е изд., стер. – М.: Изд. центр «Академия», 2007. – 320 с.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ

Цель и содержание работы: изучение и вычисление геометрических характеристик сечений произвольной формы и простых фигур.

Теоретическая часть

Основными геометрическими характеристиками поперечных сечений, определяющими сопротивление различным видам деформаций, являются: площади поперечных сечений, статические моменты, моменты инерции и моменты сопротивления. Для определения напряжений при центральном растяжении и сжатии используют площадь. При определении напряжений кручения используют полярный момент инерции и момент сопротивления кручению. При определении напряжений изгиба используют статический момент сечения относительно оси (для определения положения нейтрального слоя), осевой момент инерции, центробежный момент инерции, момент сопротивления изгибу, радиус инерции.

Площадь сложной фигуры равна сумме площадей её частей. В сечении выделим элементарную площадь dF (рисунок 9.1). В общем случае площадь сложной фигуры вычисляется путём интегрирования по области сечения

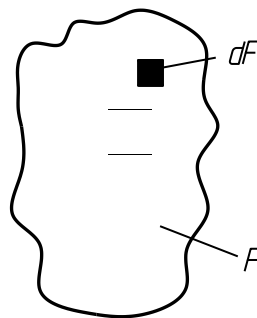


Рисунок 9.1 – Определение площади

$$F = \int_F dF \quad (1)$$

Данный интеграл инвариантен (независим) от выбора системы осей координат. Размерность площади – длина в квадрате $\dim F = L^2$, единицы измерения $m^2, mm^2 \dots$

Статическим моментом сечения относительно некоторой оси называется взятая по всей площади F сумма произведений площадей элементарных площадок dF на их расстояния до этой оси

$$S_x = \int_F y dF \quad (2)$$

$$S_y = \int_F x dF \quad (3)$$

В зависимости от положения оси, относительно которой вычисляется статический момент, он может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Размерность статического момента – длина в третьей степени $\dim S_x = L^3$, единицы измерения $m^3, mm^3 \dots$

Рассмотрим сечение произвольной формы площадью F . Выделим элементарную площадку dF с координатами x и y в данной системе координат XY . Параллельно осям XY введем новую систему координат X_1Y_1 на расстоянии a и b между осями.

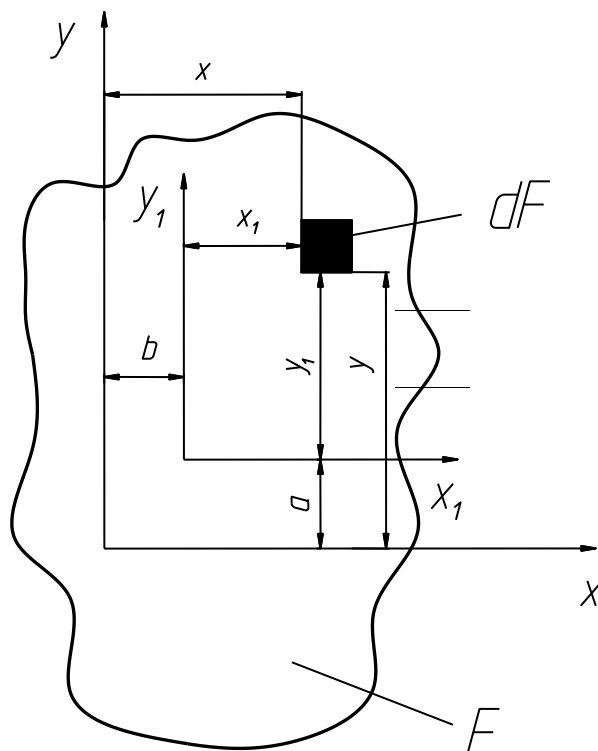


Рисунок 9.2 – Определение координат центра тяжести сечения

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x - b \\ y_1 &= y - a \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

По аналогии с формулами (2) и (3) можно записать:

$$S_{x_1} = \int y_1 dF = \int (y - a) dF = \int y dF - a \int dF = S_x - aF \quad (5)$$

$$S_{y_1} = \int x_1 dF = \int x dF - b \int dF = S_y - bF \quad (6)$$

Центральными называются оси, относительно которых статические моменты равны 0. Точку пересечения центральных осей называют центром тяжести сечения.

Пусть оси X_1Y_1 – центральные, следовательно, уравнения (5) и (6) имеют вид:

$$0 = S_x - aF;$$

$$0 = S_y - bF;$$

Выполним подстановку: $a = y_c$, $b = x_c$, следовательно:

$$\left. \begin{aligned} y_c &= \frac{S_x}{F} \\ x_c &= \frac{S_y}{F} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где x_c и y_c – координаты центра тяжести относительно произвольной системы координат XY . Из (7) следует, что статический момент можно определить, как произведение площади фигуры на расстояние её центра тяжести до оси координат.

$$S_x = Fy_c, \quad S_y = Fx_c \quad (7 \text{ а})$$

Осевым моментом инерции плоского сечения относительно некоторой оси называют взятую по всей площади F сумму произведений площадей элементарных площадок dF на квадраты их расстояний до этой оси.

$$I_x = \int_F y^2 dF \quad (9)$$

$$I_y = \int_F x^2 dF \quad (10)$$

Осевой (его иногда называют экваториальным) момент инерции является величиной существенно положительной, т.к. координата возведена в квадрат.

Полярным моментом инерции I_ρ относительно некоторого полюса называется взятая по всей площади сечения F сумма произведений площадей элементарных площадок dF на квадраты их расстояний до этого полюса:

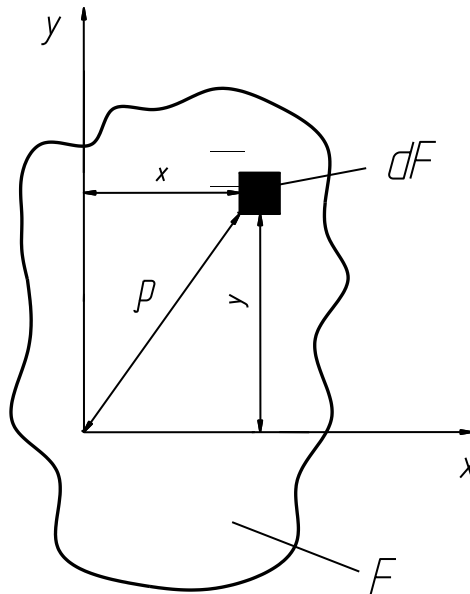


Рисунок 9.4 - Определение осевых и полярного моментов

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF \quad (11)$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad (12)$$

$$I_\rho = \int (x^2 + y^2) dF = \int x^2 dF + \int y^2 dF = I_y + I_x \quad (13)$$

Сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей (начала координат).

Значения I_x и I_y для простых фигур приведены в справочной литературе.

Для наиболее распространенных сечений эти значения приведены в таблице 9.1

Центробежным моментом инерции I_{xy} относительно двух взаимно перпендикулярных осей называется взятая по всей площади сечения сумма произведений площадей элементарных площадок dF на произведение их расстояний до этих осей

$$I_{xy} = \int_F xy dF \quad (14)$$

Размерность осевого, полярного и центробежного моментов инерции – длина в четвёртой степени $\dim I_x = \dim I_\rho = \dim I_{xy} = L^4$, единицы измерения m^4 , $mm^4 \dots$

В зависимости от расположения осей он может быть как положительным, так и отрицательным и в частных случаях равным нулю. Если сечение имеет ось симметрии, то его центробежный момент инерции относительно этой оси и перпендикулярной к ней оси равен нулю.

Части площади, находящиеся в I и III квадрантах системы координат XOY, (рисунок 4.3) дают положительные слагаемые центробежного момента, а площади во II и IV квадрантах дают отрицательные значения. В зависимости от расположения осей центробежный момент инерции всей фигуры может быть как положительным, так и отрицательным, и в частных случаях – равным нулю. Если сечение имеет ось симметрии, то его центробежный момент инерции относительно этой оси и перпендикулярной к ней оси равен нулю.

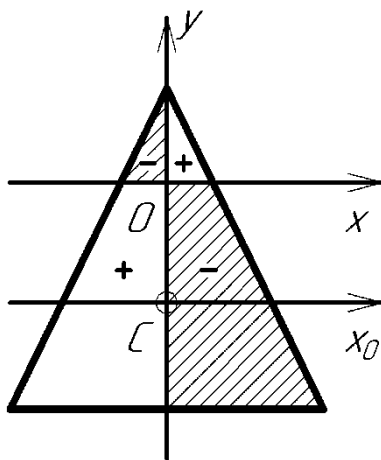


Рисунок 4.3 Главные оси инерции:

CY, CX₀ – главные центральные,

OY, OX – главные.

Две взаимно перпендикулярных оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями инерции, а осевые моменты инерции относительно этих осей – главными моментами инерции.

Осевым моментом сопротивления сечения называется частное от деления осевого момента инерции, взятого относительно этой же оси, на расстояние $y_{\max}$ или $x_{\max}$ от рассматриваемой оси до наиболее удаленной точки сечения:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} \quad (15)$$

$y_{\max}$ – это расстояние от оси X до наиболее удаленной точки сечения.

$x_{\max}$ – расстояние от оси Y до наиболее удаленной точки сечения.

$\dim W_x = L^3$. Единица измерения осевого момента сопротивления

$$[W_x] = [J_x] / [y_{\max}] = M^4 / M = M^3. \quad (16)$$

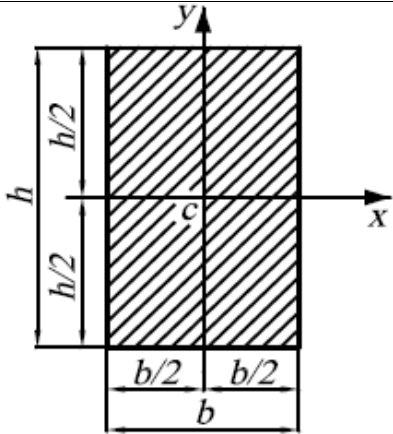
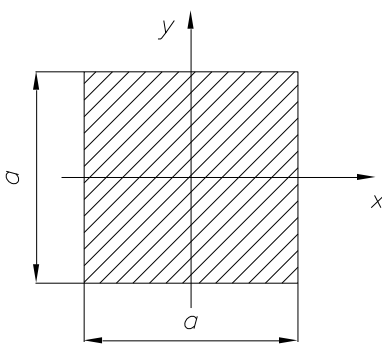
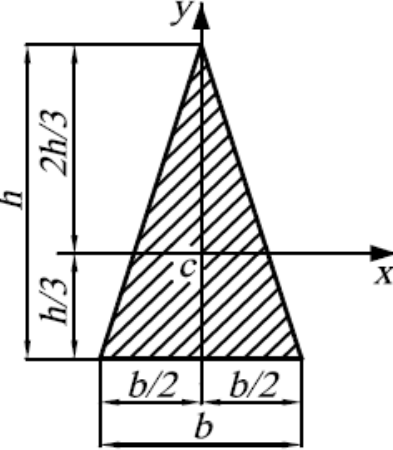
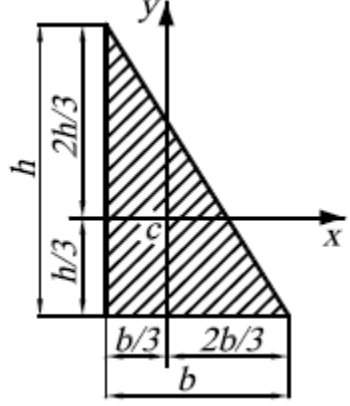
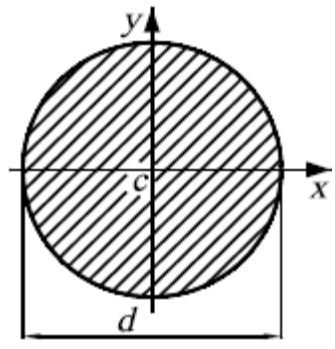
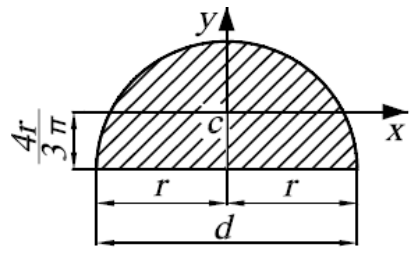
(Момент сопротивления плоского сечения и объём – величины разного рода, их нельзя сравнивать или суммировать между собой.)

Радиусами инерции поперечного сечения относительно осей x и y называют величины, определяемые соответственно из выражений

$$i_x = \sqrt{J_x / F}, \quad i_y = \sqrt{J_y / F}, \quad (17)$$

где F – площадь поперечного сечения фигуры.

Таблица 9.1 – Моменты инерции сечений

№	Сечение	I_x	I_y	№	Сечение	I_x	I_y
1		$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	2		$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$
3		$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{48}$	4		$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$
5		$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	6		$0,11r^4$	$\frac{\pi d^4}{128}$

Примечание к таблице:

1. Оси X и Y – центральные оси
2. Для второй и пятой фигур значения I_x и I_y не изменяются при любом повороте оси.
3. Для первой, третьей, четвертой фигур в кубе берется та сторона, которую пересекает данная ось.

Задание

Изучить:

геометрические характеристики плоских сечений брусьев;

формулы вычисления геометрических характеристик для сечения произвольной формы;

взаимосвязь между разными геометрическими характеристиками одного сечения;

формулы вычисления геометрических характеристик для сечений простых геометрических форм относительно центра тяжести;

расположение центра тяжести для простых геометрических плоских фигур.

Сделать конспект теоретических положений с эскизами фигур и формулами.

Вопросы для защиты работы:

1. Перечислите геометрические характеристики плоских сечений. Для каких целей применяются геометрические характеристики каждого рода?
2. Размерности и единицы измерения геометрических характеристик плоских сечений.
3. Дайте словесную формулировку и формулу определения для геометрической характеристики каждого типа.
4. Относительно каких осей следует определять моменты сопротивления и моменты инерции сечения при изгибе?
5. Какие оси называются главными и центральными?
6. Какой знак имеют осевые моменты инерции сечения?
7. Какие моменты инерции называются главными?
8. Чему равны осевые моменты инерции прямоугольника, круга, квадрата, треугольника, полукруга относительно их главных центральных осей инерции?
9. Что называется осевым моментом сопротивления сечения?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ДАННОЙ ТЕМЕ

1 Щербакова, Ю. В. Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебное пособие / Ю. В. Щербакова. - Сопротивление материалов, 2020-02-05. - Саратов : Научная книга, 2019. - 159 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-9758-1776-1

2. Коргин, А. В Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебно-методическое пособие к выполнению практических работ для обучающихся по направлению подготовки 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, профиль «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные средства и оборудование» / А. В. Коргин, В. А. Ермаков, В. А. Романец. - Москва : МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 186 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-7264-1842

3. Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

2 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-

1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. -
URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СЛОЖНОЙ ФИГУРЫ

Цель и содержание работы: Определение центра тяжести сложного симметричного сечения, составленного из нескольких простейших геометрических фигур.

Для теоретического определения положения центра тяжести сложного сечения его разбивают на простые фигуры (прямоугольник, треугольник, круг, полукруг). Координаты центра тяжести определяются по известным из теоретической механики зависимостям

$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{yi}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$ $y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{xi}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$	(8)
---	-----

где x_c, y_c – координаты центра тяжести сложного сечения; x_i, y_i – координаты центров тяжести простейших фигур, на которые разбито сечение, подставляются в выражения (8) с учетом знаков. В формулах (8) координаты x_i, y_i и площади F_i могут иметь положительный и отрицательный знак. При наличии отверстий или вырезов в сечениях значения площадей подставляются с отрицательным знаком.

Для экспериментального определения положения центра тяжести сечения нужно подвесить плоский образец сечения в произвольной точке, с помощью отвеса отбить вертикальную линию; изменить точку подвеса, вновь отбить

отвесом вертикальную прямую; на пересечении отбитых линий отметить центр тяжести сечения.

Первый пример определения центра тяжести сложного сечения

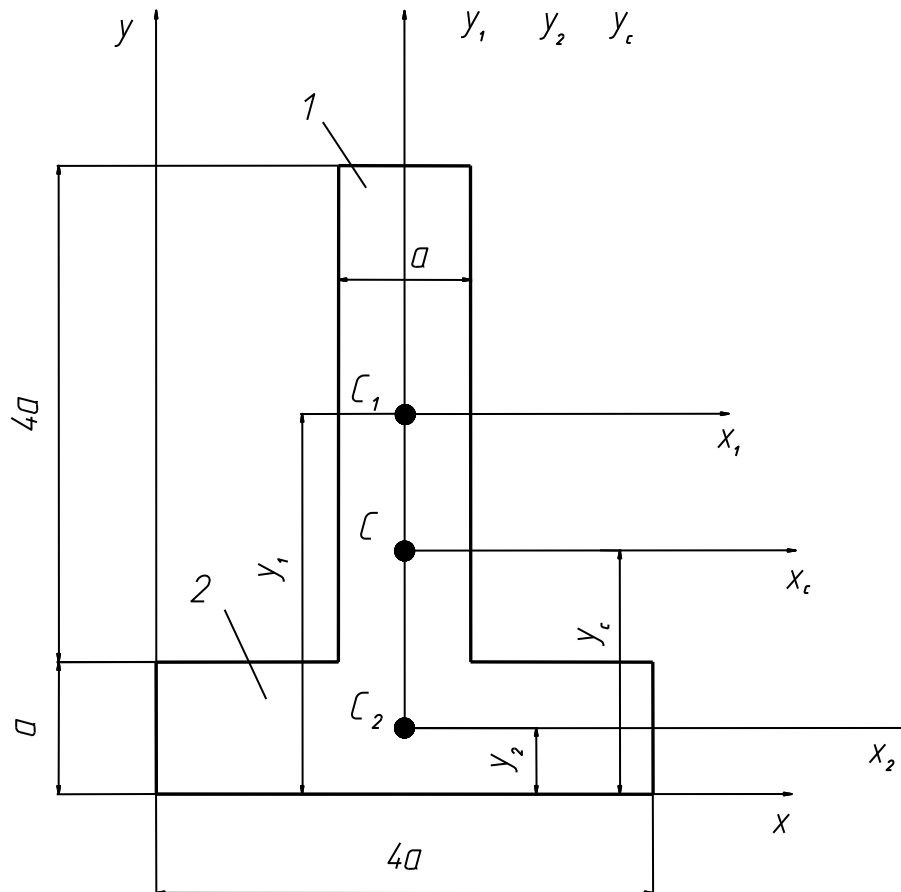


Рисунок 9.3 - Пример

$$F_1 = F_2 = 4a^2$$

$$x_1 = 2a; \quad x_2 = 2a$$

$$X_c = \frac{\sum S_y}{\sum F} = \frac{S_y^{(1)} + S_y^{(2)}}{F_1 + F_2} = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2} = \frac{4a^2 \times 2a + 4a^2 \times 2a}{8a^2} = 2a$$

Если сечение имеет ось симметрии, то эта ось – центральная.

$$y_c = \frac{\sum S_x}{\sum F} = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} = \frac{4a^2 \times 3a + 4a^2 \times 0,5a}{8a^2} = 1,75a$$

$$y_1 = 3a, \quad y_2 = \frac{a}{2} = 0,5a$$

Второй пример определения центра тяжести сложного сечения

Определим положение центра тяжести плоской фигуры, показанной на рисунке 4.4. Для этого вводим систему координат $x'Oy$, где ось y является осью симметрии, т. е. главной осью, а ось x' совпадает с основанием фигуры.

Т.к. фигура является симметричной, то координата центра тяжести находится в точке $x' = 0$.

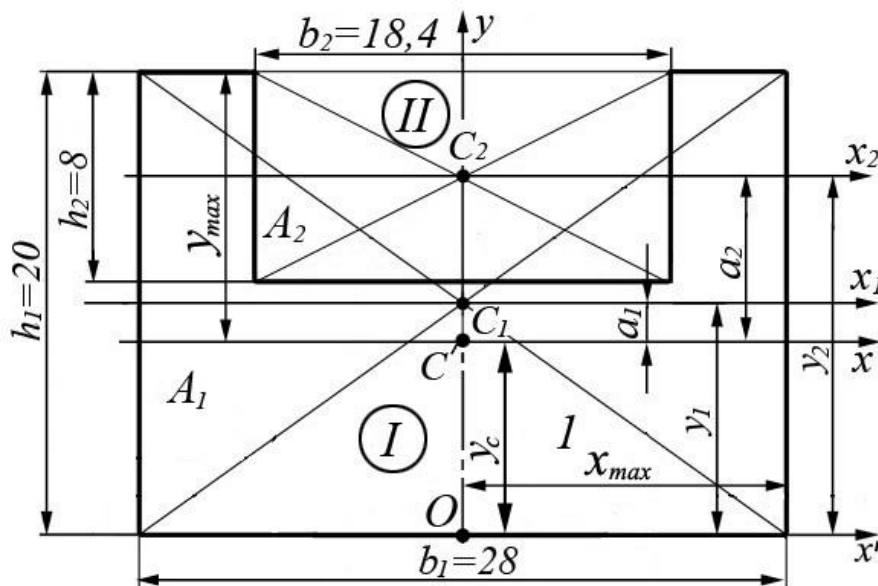


Рисунок 4.4 – Расчетная схема

Для определения координаты центра тяжести по оси y , разобьем сложную фигуру на простейшие фигуры. В результате получим два прямоугольника – I и II .

Площади этих прямоугольников (в этом примере площадь обозначена буквой A):

$$A_1 = b_1 h_1 = 28 \cdot 20 = 560 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = -b_2 h_2 = -18,4 \cdot 8 = -147,2 \text{ см}^2.$$

Знак минус в формуле свидетельствует о том, что фигура 2 является вырезом в контуре общей фигуры.

Положение центров тяжести фигур *I* и *II* на рисунке 4.4 находим на пересечении диагоналей:

$$C_1 (x_1 = 0; y_1 = 10 \text{ см}); C_2 (x_2 = 0; y_2 = 16 \text{ см}),$$

где y_1, y_2 – расстояние от оси x' до центров тяжести прямоугольников.

Тогда координаты центра тяжести всей фигуры относительно оси x'

$$y_c = \frac{S_x}{A_2} = \frac{A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2}{A_1 - A_2} = \frac{560 \cdot 10 - 147,2 \cdot 16}{560 - 147,2} = 7,86 \text{ см}.$$

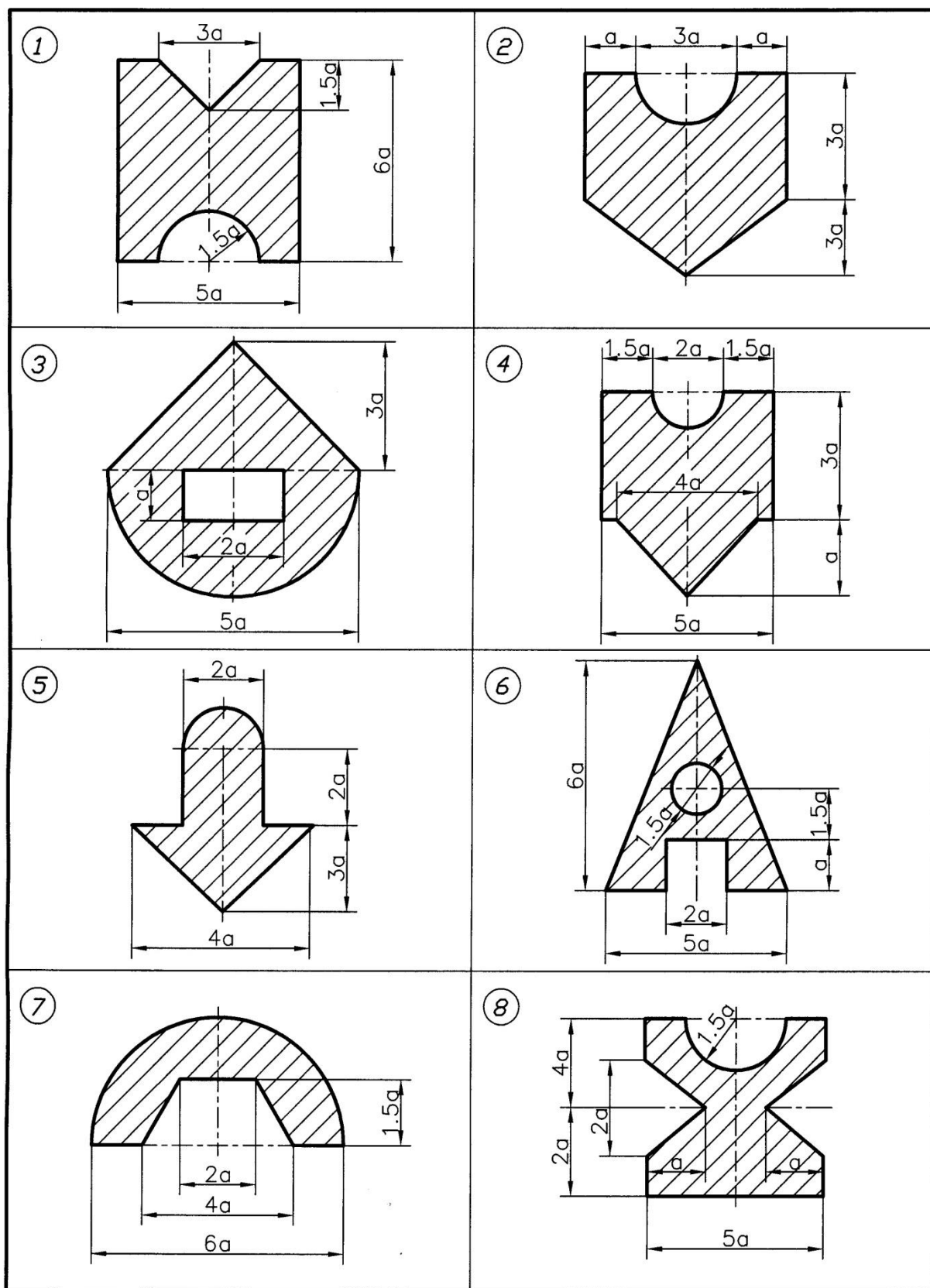
Задание

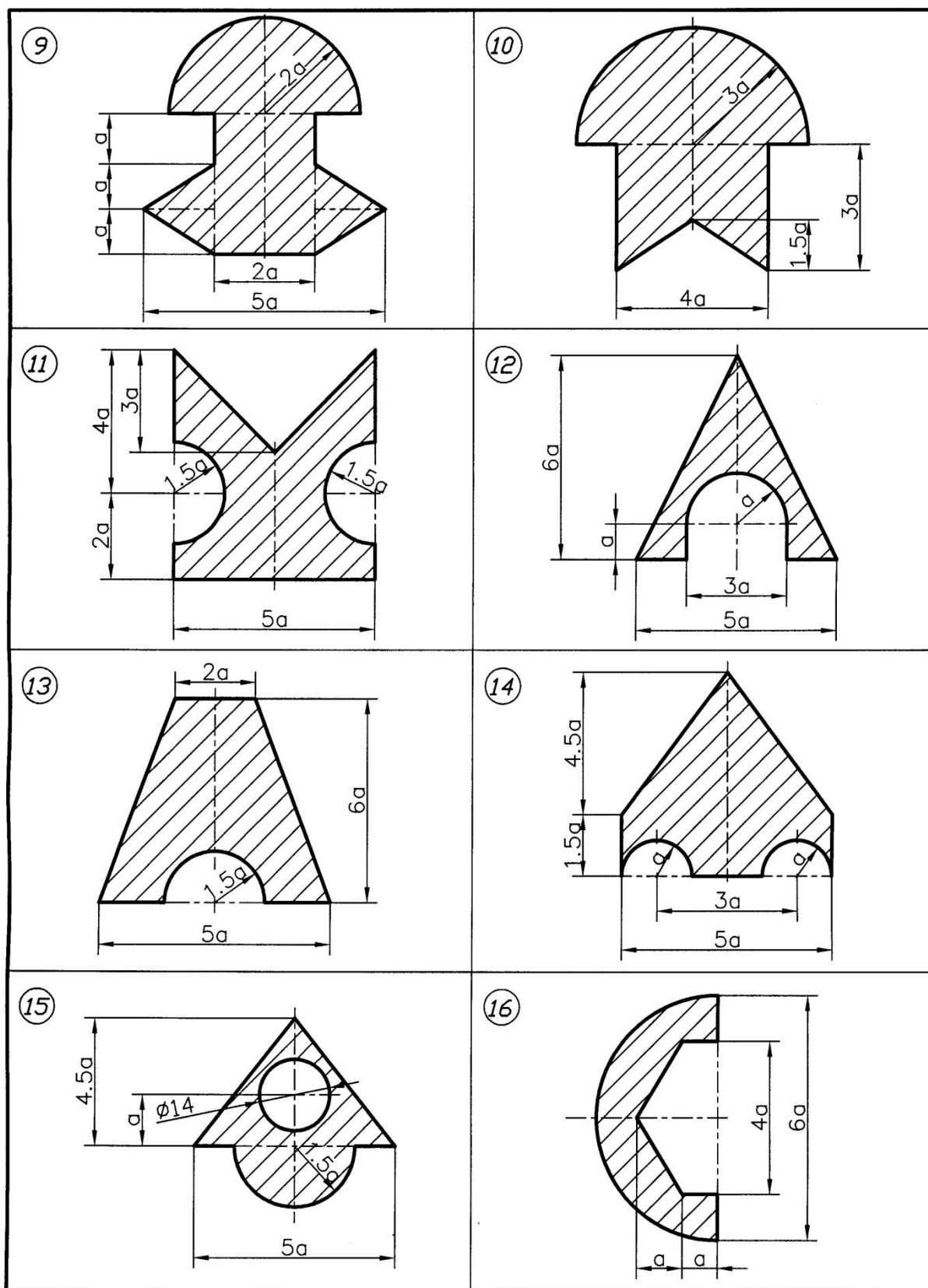
В таблице 9.2 заданы варианты сложных симметричных сечений, для которых требуется:

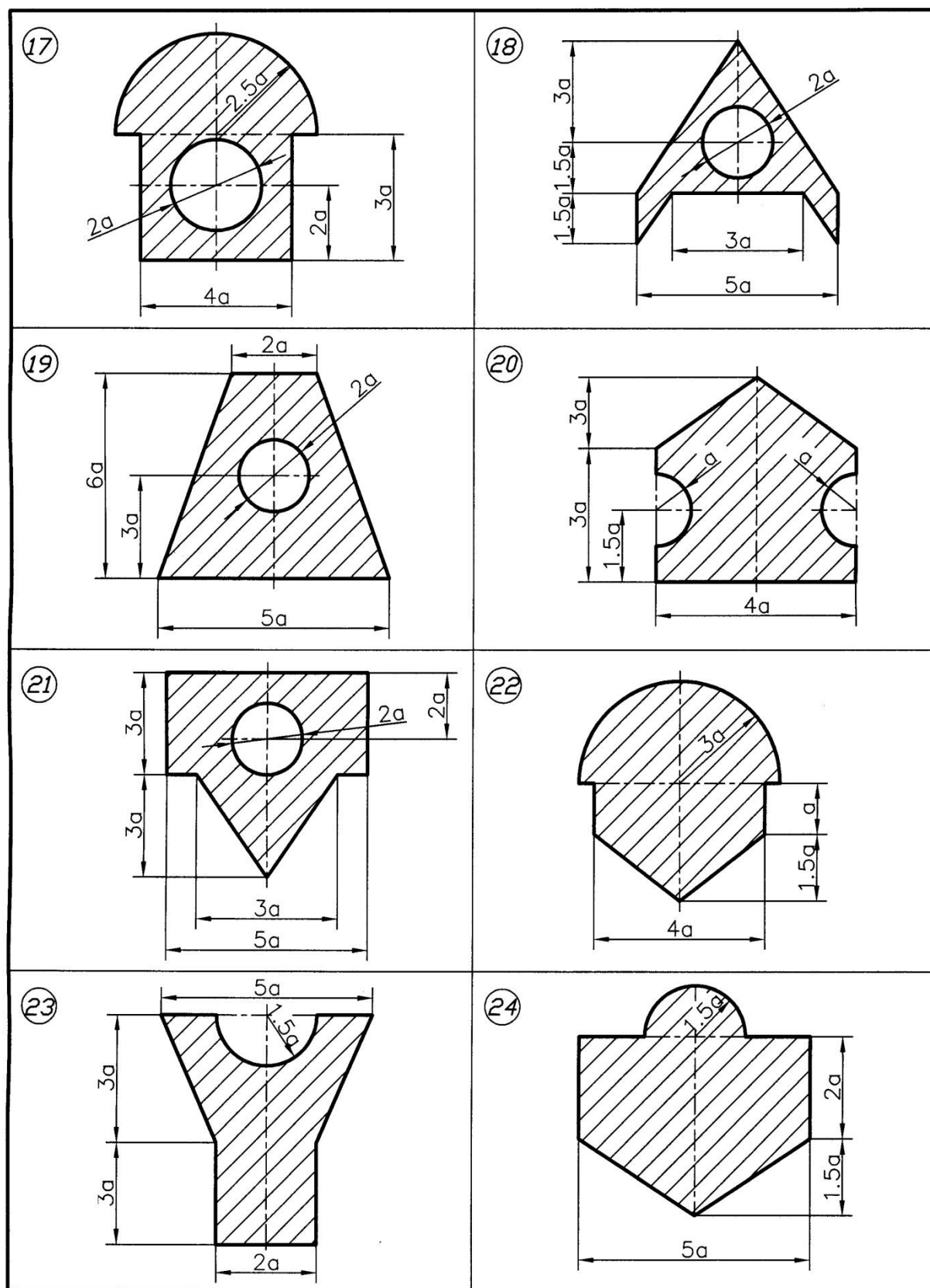
- экспериментально определить положение центра тяжести сечения;
- вычертить заданное сечение в масштабе, нанести на него систему координат XOY так, чтобы ось Y являлась одновременно осью симметрии сечения;
- разбить заданное сечение на простейшие (прямоугольник, треугольники, полукруг), определить площадь каждой простой фигуры F_i и площадь всей фигуры F ;
- нанести на схему центры тяжести каждой простой фигуры C_i и провести через них координатные оси X_i и Y_i , параллельные ранее выбранным осям X и Y ;
- определить координаты центра тяжести каждой из фигур в предварительно выбранной случайной системе координат XOY ;
- по схеме найти расстояния y_i между осями X и X_i ; и расстояния x_i между осями Y и Y_i ;
- по формулам (5, 6) вычислить статические моменты каждой простой фигуры относительно ранее выбранных случайных осей X и Y ;

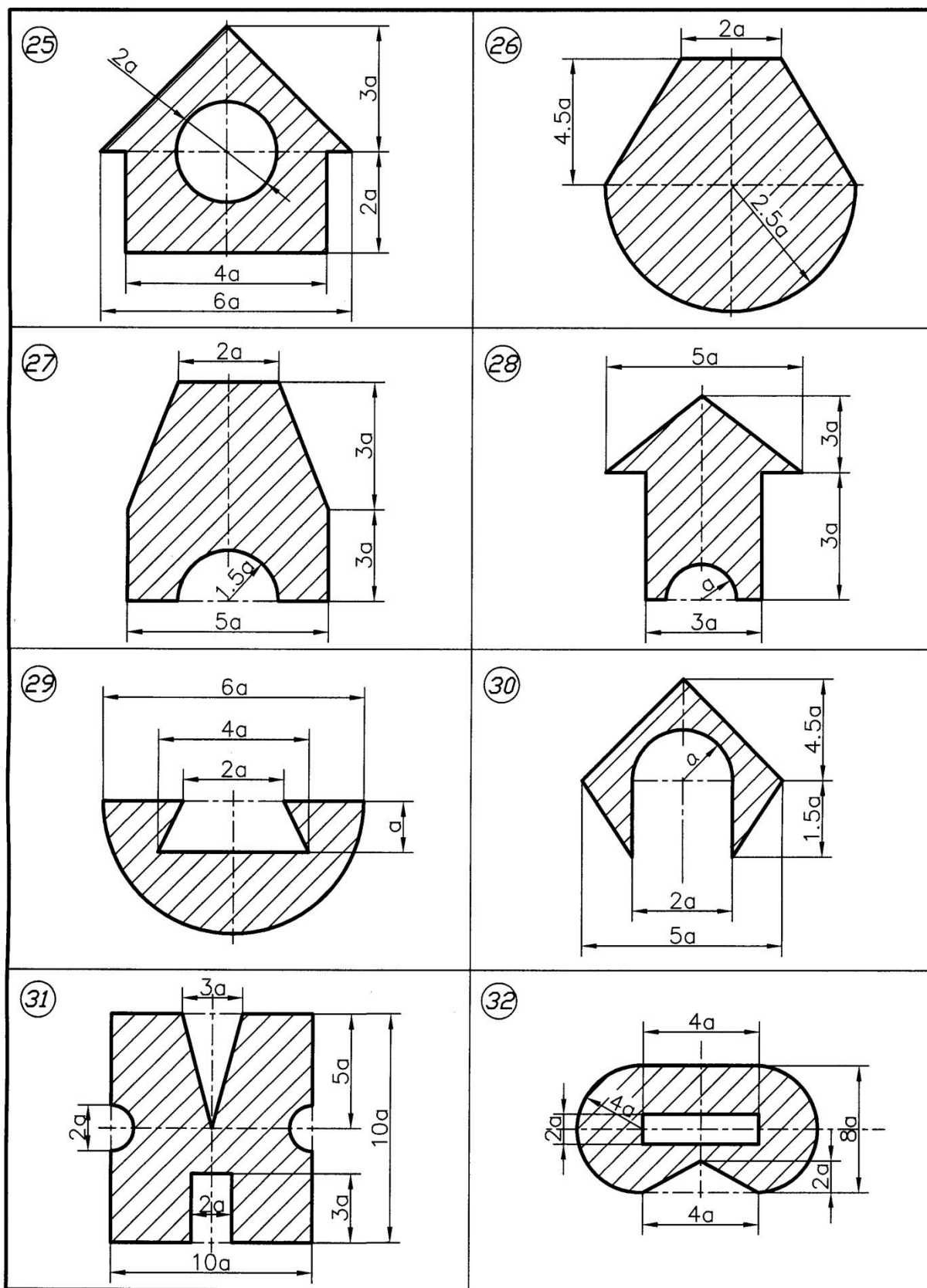
- по формулам (8) вычислить координаты центра тяжести сечения x_C и y_C ; сравнить расчетные значения с экспериментальными, полученными в п.1, определить погрешность измерений;
- отметить на схеме положение центра тяжести фигуры – точки C и провести через нее координатные оси X_C и Y_C , параллельные осям X и Y ;
- найти расстояния между осями X_C и X_i : $a_i = y_i - y_C$ и показать их на чертеже;
- найти расстояния между осями Y_C и Y_i : $b_i = x_i - x_C$ и показать их на чертеже.

Таблица 9.2 – Расчетные схемы сложных сечений









Вопросы для защиты работы:

1. Относительно каких осей следует определять моменты сопротивления и моменты инерции сечения при изгибе?
2. Какие оси называются главными и центральными?
3. Как определить положение центра тяжести простых фигур: прямоугольника, треугольника, полукруга?
4. Как определить положение центра тяжести сложного сечения?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ДАННОЙ ТЕМЕ

1 Щербакова, Ю. В. Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебное пособие / Ю. В. Щербакова. - Сопротивление материалов, 2020-02-05. - Саратов : Научная книга, 2019. - 159 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-9758-1776-1

2. Коргин, А. В Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебно-методическое пособие к выполнению практических работ для обучающихся по направлению подготовки 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, профиль «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные средства и оборудование» / А. В. Коргин, В. А. Ермаков, В. А. Романец. - Москва : МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 186 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-7264-1842

3. Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

2 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНОЙ ФИГУРЫ

Цель и содержание работы: изучение геометрических характеристик сложных симметричных сечений, составленных из нескольких простейших геометрических фигур.

Теоретическая часть

Геометрические характеристики сечений изменяются по величине с изменением положения системы координат. При параллельном переносе осей координат осевые и центробежный моменты инерции преобразуются в соответствии с формулой Гюйгенса и определяются из выражений (16):

$$\begin{aligned}I_{x_1} &= I_x + a^2 F \\I_{y_1} &= I_y + b^2 F \\I_{x_1 y_1} &= I_{xy} + abF\end{aligned}\tag{16}$$

где a – расстояние между осями X и X_1 ; b – расстояние между осями Y и Y_1 . При этом оси координат X и Y должны быть обязательно центральными, т. е. проходить через центр тяжести фигуры.

Моменты инерции сложного сечения I определяются как алгебраическая сумма моментов инерции составных частей

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n.\tag{17}$$

Через любую точку сечения всегда можно провести две взаимно перпендикулярные главные оси. Как правило, практическое значение имеют главные оси, проходящие через центр тяжести; они называются главными центральными осями инерции. Эти оси принято обозначать u и v . Моменты инерции относительно главных центральных осей (I_u и I_v) называются главными центральными моментами инерции.

Главные оси u и v характерны тем, что относительно одной из них осевой момент инерции максимален, а относительно другой – минимален по сравнению с моментами инерции относительно любых других осей, проходящих через ту же точку.

Для сечений, имеющих одну или несколько осей симметрии, положение главных осей определяется на следующих основаниях:

о если сечение имеет ось симметрии, то эта ось и любая другая ось, ей перпендикулярная, образуют систему главных осей;

о если сечение имеет две оси симметрии, то эти оси симметрии являются главными центральными осями инерции сечения;

о если сечение имеет три и более осей симметрии, то любая центральная ось сечения является главной и все главные центральные моменты инерции сечения равны между собой.

Задание

В таблице 9.2 заданы варианты сложных симметричных сечений, для которых требуется:

- вычертить фигуру в масштабе (лучше 1:1), при этом показать все необходимые оси с указанием расстояний между ними, а также все необходимые размеры. Рисунок выполнить на отдельном листе формата А4. Для этих целей можно использовать масштабно-координатную бумагу (миллиметровку).

- отметить на схеме положение центра тяжести фигуры – точки C и провести через нее координатные оси X_C и Y_C , параллельные осям X и Y ;

- найти расстояния между осями X_C и X_i : $a_i = y_i - y_C$ и показать их на чертеже;

- найти расстояния между осями Y_C и Y_i : $b_i = x_i - x_C$ и показать их на чертеже;

- пользуясь таблицей 9.1, вычислить осевые I_{xi} , I_{yi} моменты инерции каждой простой фигуры относительно её собственных центральных осей инерции $X_i C_i Y_i$;
- по формулам (16) вычислить моменты инерции всей фигуры относительно главных центральных осей инерции X_C и Y_C ;
- найти моменты сопротивления сечения в главных осях инерции по формулам (15).

Первый пример определения геометрических характеристик сложного сечения

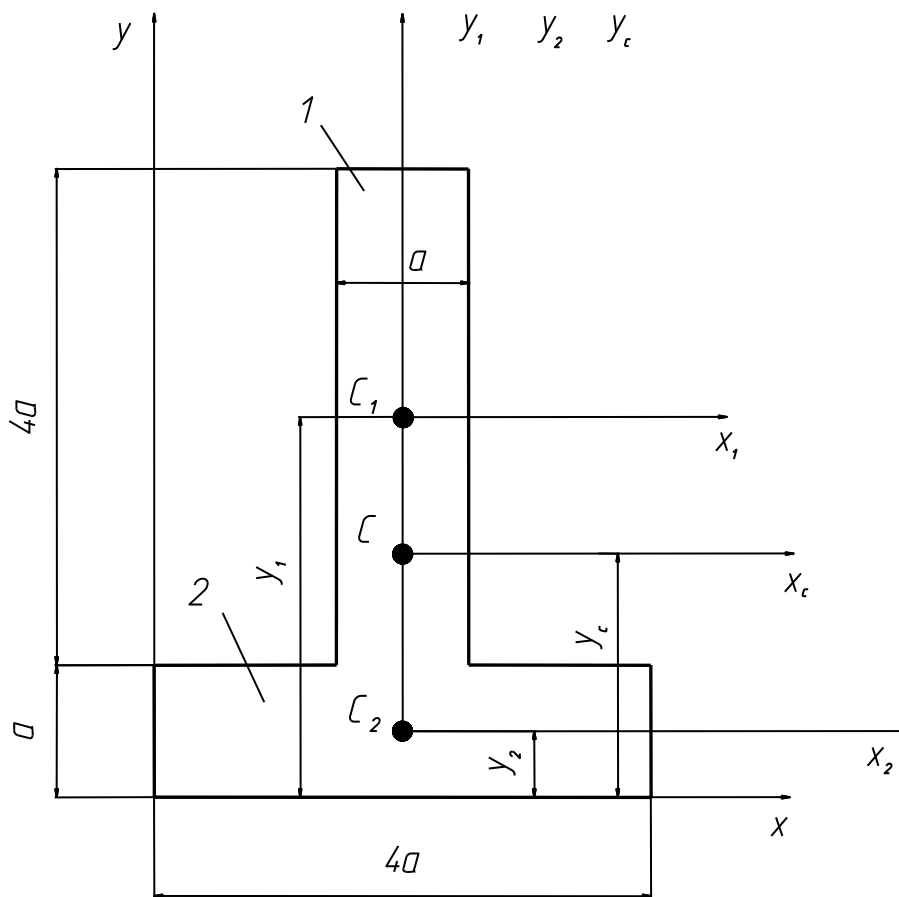


Рисунок 9.3 - Пример

$$F_1 = F_2 = 4a^2$$

$$x_1 = 2a; \quad x_2 = 2a$$

$$X_c = \frac{\sum S_y}{\sum F} = \frac{S_y^{(1)} + S_y^{(2)}}{F_1 + F_2} = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2} = \frac{4a^2 \times 2a + 4a^2 \times 2a}{8a^2} = 2a$$

Если сечение имеет ось симметрии, то эта ось – центральная.

$$y_c = \frac{\sum S_x}{\sum F} = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} = \frac{4a^2 \times 3a + 4a^2 \times 0,5a}{8a^2} = 1,75a$$

$$y_1 = 3a, \quad y_2 = \frac{a}{2} = 0,5a$$

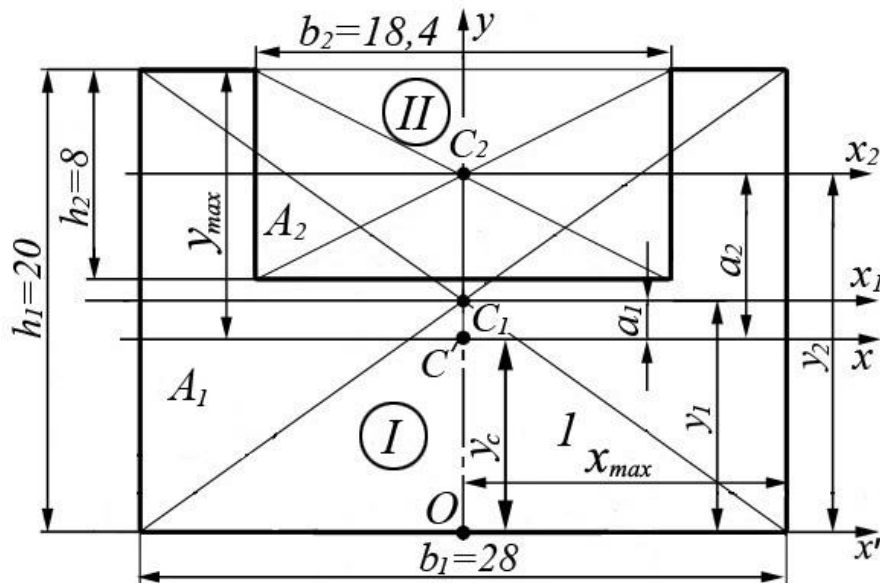
$$I_{yc}^{(1)} = I_{y_1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{4aa^3}{12} \approx 0,3a^4$$

$$I_{yc}^{(2)} = I_{y_2} = \frac{a(4a)^3}{12} \approx 5a^4$$

$$I_{yc} = I_{yc}^{(1)} + I_{yc}^{(2)} \approx 5,3a^4$$

$$W_{yc} = \frac{I_{yc}}{x_{\max}} = \frac{5,3a^4}{2a} \approx 2,7a^3$$

Второй пример определения геометрических характеристик сложного сечения



Вводим систему координат xCy , совпадающую с центром тяжести фигуры, и определяем моменты инерции фигур относительно центральных осей x и y по выражениям

$$J_x = J_x^I - J_x^{II}; \quad J_y = J_y^I - J_y^{II},$$

где J_x^I, J_x^{II} – моменты инерции отдельных фигур относительно оси x ; J_y^I, J_y^{II} – моменты инерции отдельных фигур относительно оси y .

Значения этих параметров для фигуры I вычисляем по формуле:

$$J_x^I = J_{x1}^I + a_1^2 \cdot A_1,$$

где J_{x1}^I – момент инерции прямоугольника I относительно собственной центральной оси x_1 ; a_1 – расстояние от оси x_1 до центральной оси x ; A_1 – площадь фигуры.

Отсюда

$$J_{x1}^I = b_1 h_1^3 / 12 = 28 \cdot 20^3 / 12 = 18667 \text{ см}^4;$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 10 - 7,86 = 2,14 \text{ см};$$

$$J_x^I = 18,667 \cdot 10^3 + 2,14^2 \cdot 560 = 21232 \text{ см}^4.$$

Аналогично вычисляем момент инерции для фигуры II:

$$J_x^{II} = J_{x2}^{II} + a_2^2 \cdot A_2,$$

$$J_{x2}^{II} = b_2 h_2^3 / 12 = 18,4 \cdot 8^3 / 12 = 785,07 \text{ см}^4;$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 16 - 7,86 = 8,14 \text{ см};$$

$$J_x^{II} = 785,07 + 8,14^2 \cdot 147,2 = 10538 \text{ см}^4.$$

Суммарный момент инерции фигуры относительно оси x

$$J_x = J_x^I - J_x^{II} = 21232 - 10538 = 10694 \text{ см}^4.$$

Для вычисления момента инерции фигуры относительно оси y используем формулу

$$\begin{aligned} J_y &= J_y^I - J_y^{II} = \frac{(h_1 \cdot b_1^3) - (h_2 \cdot b_2^3)}{12} = \\ &= \frac{(20 \cdot 28^3) - (8 \cdot 18,4^3)}{12} = 32434 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

3. Центробежный момент инерции плоской фигуры

$$I_{xy} = 0,$$

вследствие симметрии фигуры относительно оси y.

4. Осевые моменты сопротивления фигуры относительно осей x и y определяются из соотношений

$$W_x = J_x / [y_{\max}], \quad W_y = J_y / [x_{\max}],$$

где $[y_{\max}]$ и $[x_{\max}]$ – наибольшее расстояние от осей x и y до наиболее удаленных точек сечения.

Для рассматриваемой фигуры

$$[y_{\max}] = h_1 - y_c = 20 - 7,86 = 12,14 \text{ см}, \quad [x_{\max}] = b_1 / 2 = 28 / 2 = 14 \text{ см}.$$

Тогда

$$W_x = 10694 / 12,14 = 881 \text{ см}^3,$$

$$W_y = 32434 / 14 = 2316,7 \text{ см}^3.$$

5. Радиусы инерции поперечных сечений относительно центральных осей x и y определяются из выражений

$$i_x = \sqrt{J_x / A}, \quad i_y = \sqrt{J_y / A},$$

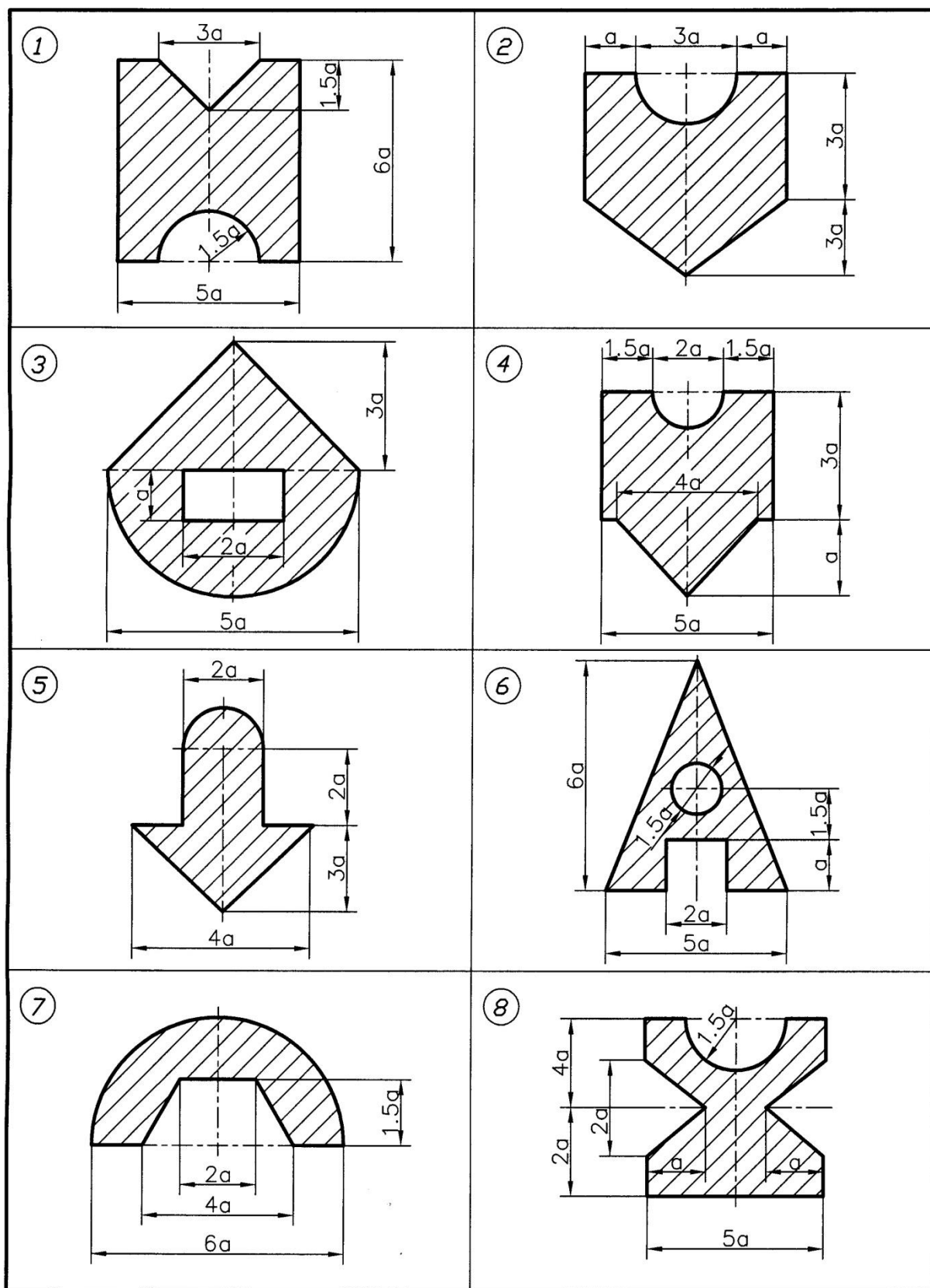
где A – площадь поперечного сечения

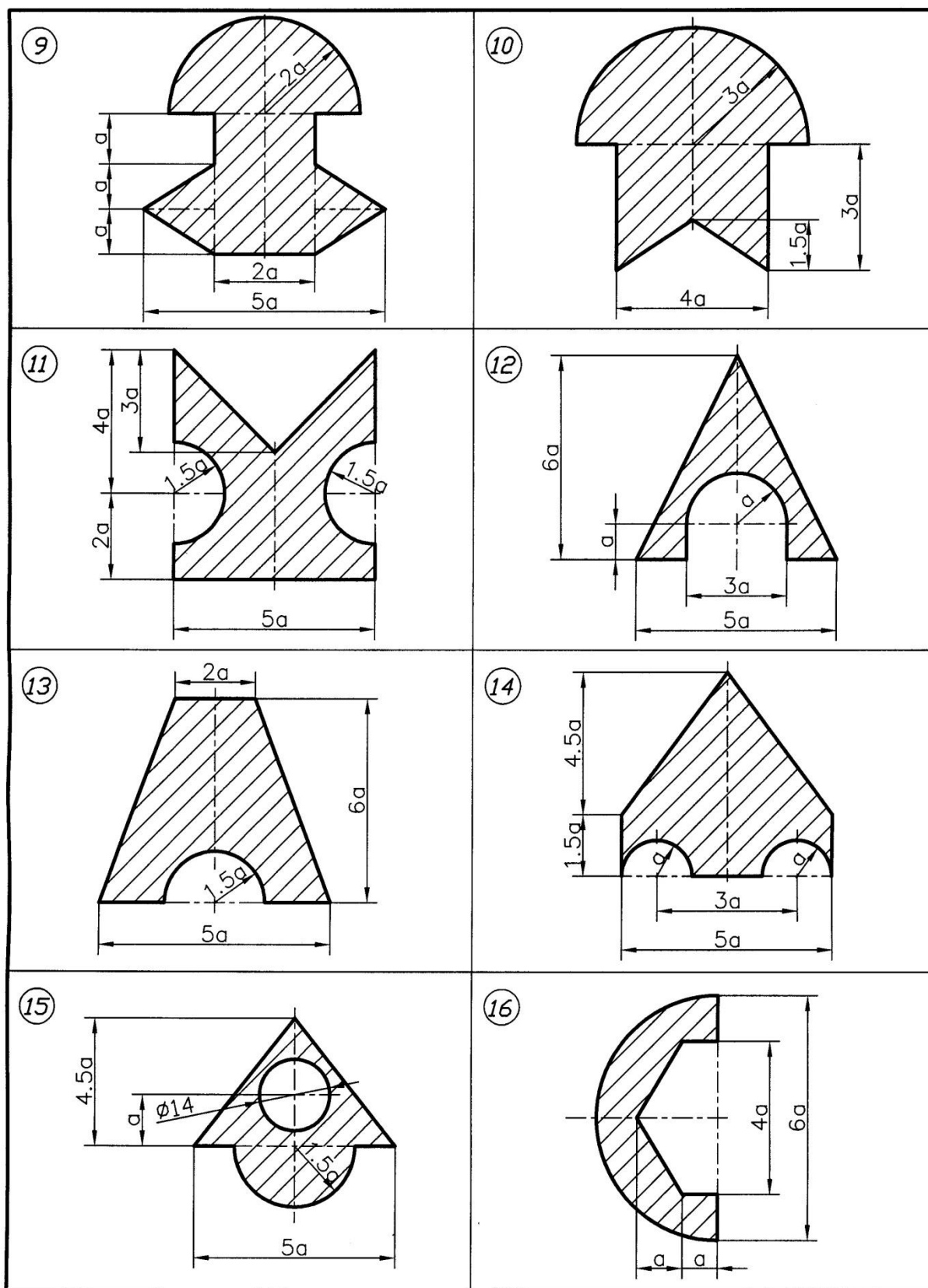
$$A = A_1 - A_2 = 560 - 147,2 = 412,8 \text{ см}^2.$$

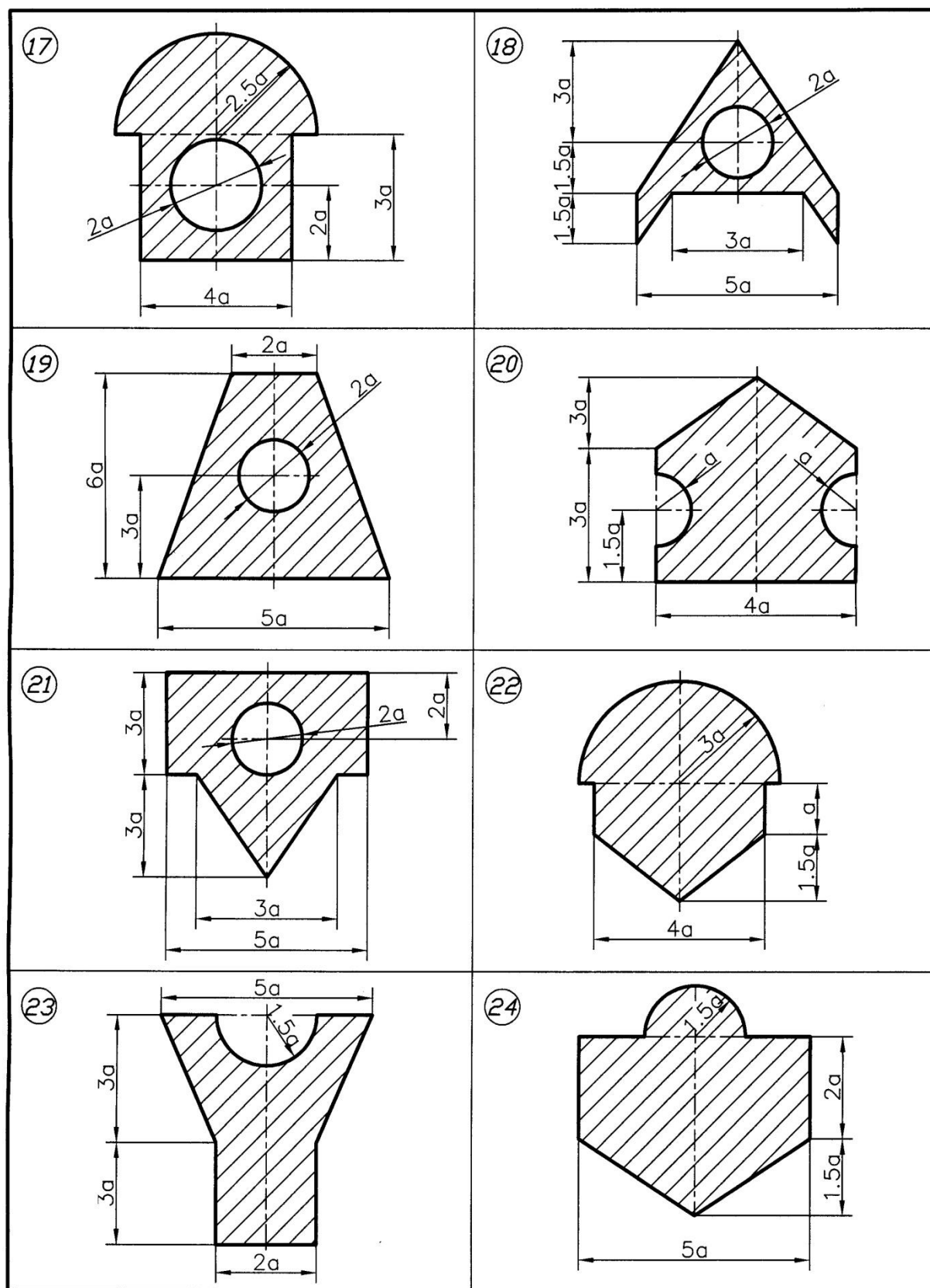
Отсюда

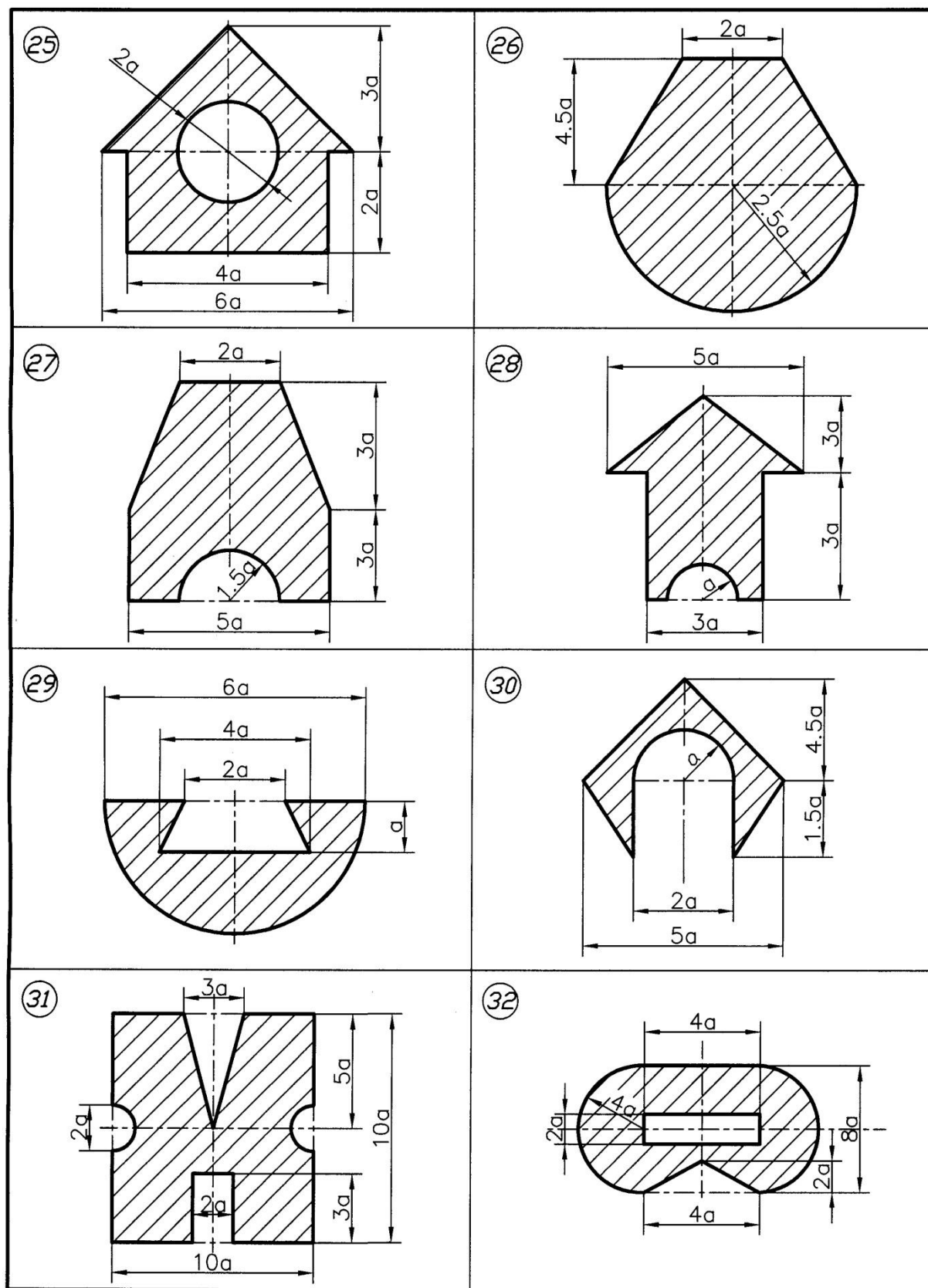
$$i_x = \sqrt{10694 / 412,8} = 5,1 \text{ см}, \quad i_y = \sqrt{32434 / 412,8} = 8,864 \text{ см}.$$

Таблица 9.2 – Расчетные схемы сложных сечений









Вопросы для защиты работы:

1. Относительно каких осей следует определять моменты сопротивления и моменты инерции сечения при изгибе?
2. Какие оси называются главными и центральными?
3. Как определить положение центра тяжести сложного сечения?
4. Какой знак имеют осевые моменты инерции сечения?
5. Как определить моменты инерции сечения относительно параллельных осей, одни из которых центральные?
6. Какие моменты инерции называются главными?
7. Чему равны осевые моменты инерции прямоугольника, круга, квадрата, треугольника, полукруга относительно их главных осей инерции?
8. Что называется осевым моментом сопротивления сечения?
9. Как определить положение главных центральных осей составной фигуры?
10. Как вычислить главные центральные моменты инерции составной фигуры?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ДАННОЙ ТЕМЕ

1 Щербакова, Ю. В. Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебное пособие / Ю. В. Щербакова. - Сопротивление материалов, 2020-02-05. - Саратов : Научная книга, 2019. - 159 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-9758-1776-1

2. Коргин, А. В Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебно-методическое пособие к выполнению практических работ для обучающихся по направлению подготовки 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, профиль «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные средства и оборудование» / А. В. Коргин, В. А. Ермаков, В. А.

Романец. - Москва : МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 186 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-7264-1842

3. Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

2 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

Практическое занятие 16

**НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ БРУСА КРУГЛОГО
ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

Цель и содержание работы: изучить напряжённое состояние материала при изгибе с кручением бруса круглого поперечного сечения.

Теоретическая часть

В общем случае нагружения наблюдается комбинация простых деформаций, что вызывает сложное сопротивление и появление одновременно нормальных и касательных напряжений. Один из видов сложного сопротивления – изгиб с кручением – характерен для валов редукторов, коробок скоростей и др. На рисунке 1, а показаны изгибающие моменты $M_x = M^B$, $M_y = M^I$ в вертикальной и горизонтальной плоскостях, и крутящий момент $M_z = T$, возникающие в поперечном сечении вала. Во всех точках прямого вала круглого сечения (кроме точек, лежащих на его продольной оси) возникает плоское напряжённое состояние (рисунок 1, в). Площадка, касательная к наружной поверхности, от напряжений свободна. На площадке поперечного сечения возникают нормальное напряжение (от изгиба и продольной силы) и касательное напряжение (от кручения). На площадке продольного сечения возникает только касательное напряжение (из-за отсутствия взаимного надавливания волокон бруса). Т.е. имеет место не общий, а частный случай плоского напряжённого состояния, который принято условно называть *упрощённым плоским напряжённым состоянием*.

При расчёте валов, испытывающих одновременное действие изгиба и кручения, влиянием поперечных сил, как правило, пренебрегают, так как соответствующие им касательные напряжения невелики по сравнению с касательными напряжениями от кручения и нормальными напряжениями от изгиба в опасных точках. На рисунке 1, б изгибающие моменты относительно осей x , y

изображены векторами. Нулевая линия совпадает с направлением вектора суммарного момента $M_u = M_\Sigma$, а силовая линия ей перпендикулярна. Эпюра нормальных напряжений на силовой линии сечения обозначена σ_{Mu} .

Касательные напряжения от кручения τ_{Mz} распределены вдоль любого радиуса по линейному закону и достигают максимального значения в точках контура сечения. Опасными являются точки пересечения контура с силовой линией, в которых одновременно и нормальные напряжения от изгиба и касательные напряжения от кручения имеют наибольшие значения (рисунок 1, б). Для пластичного материала точки А и В равноопасны, для хрупкого или хрупкопластичного опаснее точка А, в которой от изгиба возникают нормальные напряжения растяжения.

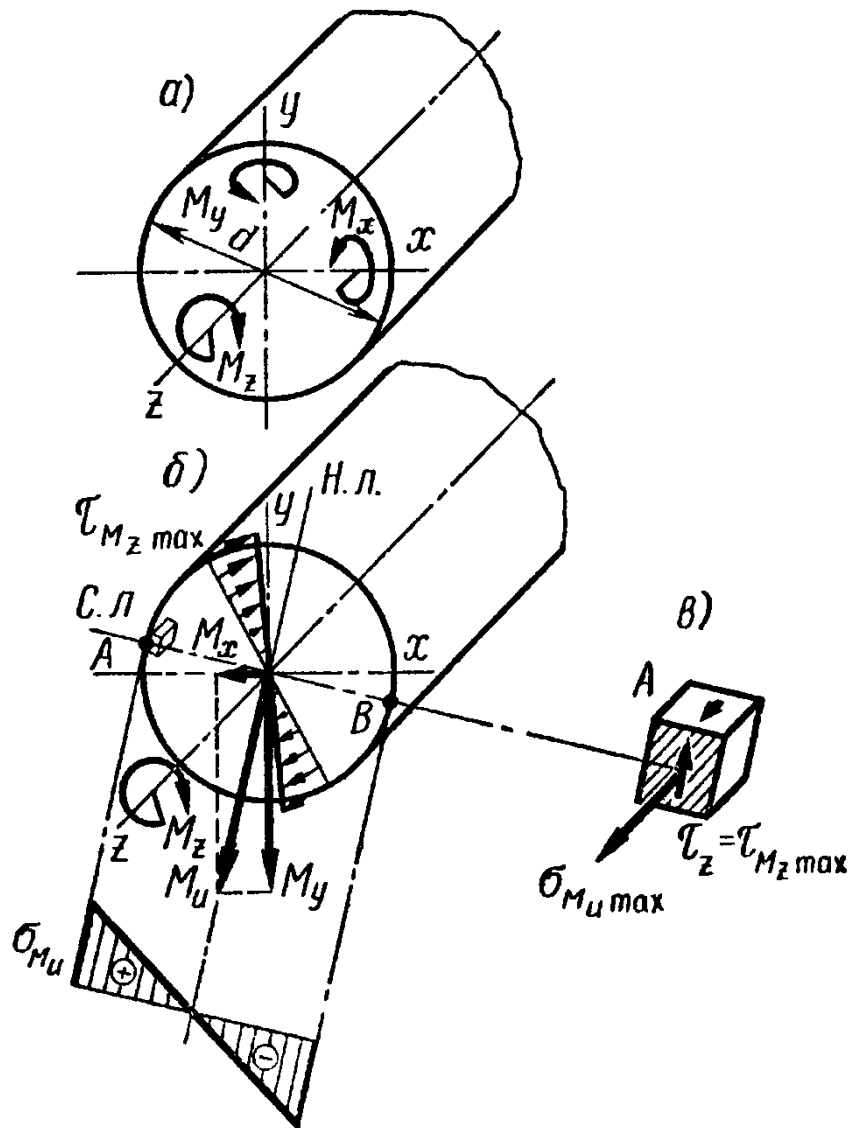


Рисунок 1. – Напряжения при изгибе с кручением бруса круглого поперечного сечения

На рисунке 1, в показан элемент, выделенный у опасной точки А, и возникающие на его гранях напряжения

$$\sigma_z = \sigma_{M_{II} \max} = \frac{M_{II}}{W_{II}}; \quad \tau_z = \tau_{M_z \max} = \frac{T}{W_\rho}, \quad (1)$$

где W_{II} – момент сопротивления изгибу, $W_\rho = 2W_{II}$ – момент сопротивления кручению для круглого сечения.

По гипотезе наибольших касательных напряжений (третьей теории прочности) для упрощённого плоского напряжённого состояния эквивалентное напряжение определяется по формуле

$$\sigma_{\text{эIII}} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{II}}{W_{II}}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{2W_{II}}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{II}^2 + T^2}}{W_{II}} = \frac{M_{\text{э}}}{W_{II}}, \quad (2)$$

где

$$M_{\text{эIII}} = \sqrt{M_{II}^2 + T^2} \quad (3)$$

называют эквивалентным моментом по гипотезе наибольших касательных напряжений.

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{э}} = \frac{M_{\text{э}}}{W_{II}} \leq [\sigma]. \quad (4)$$

Таким образом, расчёт бруса круглого поперечного сечения на изгиб с кручением ведётся аналогично расчёту на изгиб, но вместо изгибающего момента в расчётную формулу входит так называемый эквивалентный момент, величина которого зависит от изгибающих и крутящего моментов, а также от принятой гипотезы прочности.

Независимо от применяемой гипотезы прочности расчётную формулу можно привести к виду (4).

По гипотезе удельной потенциальной энергии изменения формы (V теории прочности) эквивалентные напряжения при упрощённом плоском напряжённом состоянии

$$\sigma_{\text{эВ}} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} \quad (4)$$

После преобразований, аналогичных рассмотренным, получим эквивалентный момент

$$M_{\text{эВ}} = \sqrt{M_{\text{И}}^2 + 0,75T^2} . \quad (5)$$

Понятие «эквивалентный момент» не имеет смысла при изгибе с кручением бруса некруглого поперечного сечения. Неприменимо оно и в случае, если, помимо изгиба и кручения, брус круглого сечения испытывает растяжение или сжатие.

Задание

Изобразить схему внутренних усилий при изгибе с кручением бруса круглого поперечного сечения.

Изобразить схему механических напряжений при изгибе с кручением бруса круглого поперечного сечения.

Вывести формулы определения эквивалентных напряжений при упрощённом плоском напряжённом состоянии.

Контрольные вопросы:

1. Какое напряжённое состояние называют упрощённым плоским?
2. Как определяется эквивалентное напряжение при упрощённом плоском напряжённом состоянии по гипотезе наибольших касательных напряжений (третьей теории прочности)?
3. Как определяется эквивалентное напряжение при упрощённом плоском напряжённом состоянии по гипотезе удельной потенциальной энергии изменения формы (V теории прочности)?

4. Какое сечение является опасным в условиях совместного действия изгиба и кручения?
5. Какие точки круглого сечения вала являются опасными?
6. Что называют эквивалентным моментом?

РАСЧЁТ ВАЛА НА ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

Цель и содержание работы: изучить порядок расчёта вала на изгиб с кручением.

При проектном расчёте определяют требуемое значение момента сопротивления поперечного сечения:

$$W_{\text{и}} \geq \frac{M_{\text{э}}}{[\sigma]}. \quad (6)$$

Учитывая, что для сплошного круглого сечения

$$W_{\text{и}} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3, \quad (7)$$

получаем формулу для определения требуемого диаметра вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{э}}}{\pi[\sigma]}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_{\text{э}}}{0,1[\sigma]}} \quad (8)$$

Расчёт вала на статическую прочность производят в целях предупреждения пластических деформаций и разрушений при кратковременных перегрузках, которые могут возникнуть, например, в период пуска. Расчёт выполняют по эквивалентному напряжению, определённом в опасном сечении для опасной точки. Для вала постоянного диаметра опасным является сечение, в котором эквивалентный момент $M_{\text{э}}$ наибольший.

Задача. Вал (рисунок 2) передаёт мощность P при угловой скорости ω . На валу расположен шкив диаметром d_1 и зубчатое колесо диаметром d_2 . Натяжение ведущей ветви ремня вдвое больше натяжения ведомой ($F_1=2F_2$). В зацеплении на зубчатое колесо действуют три силы: окружная сила F_t , направленная по касательной к делительной окружности колеса; осевая сила F_a , направленная параллельно оси вала; радиальная сила F_r , направленная по радиусу к центру

зубчатого колеса. Принять $F_r=0,38F_t$, $F_a=0,2F_t$. Материал вала – сталь 45 ($[\sigma]=65$ МПа). Определить диаметр опасного сечения вала.

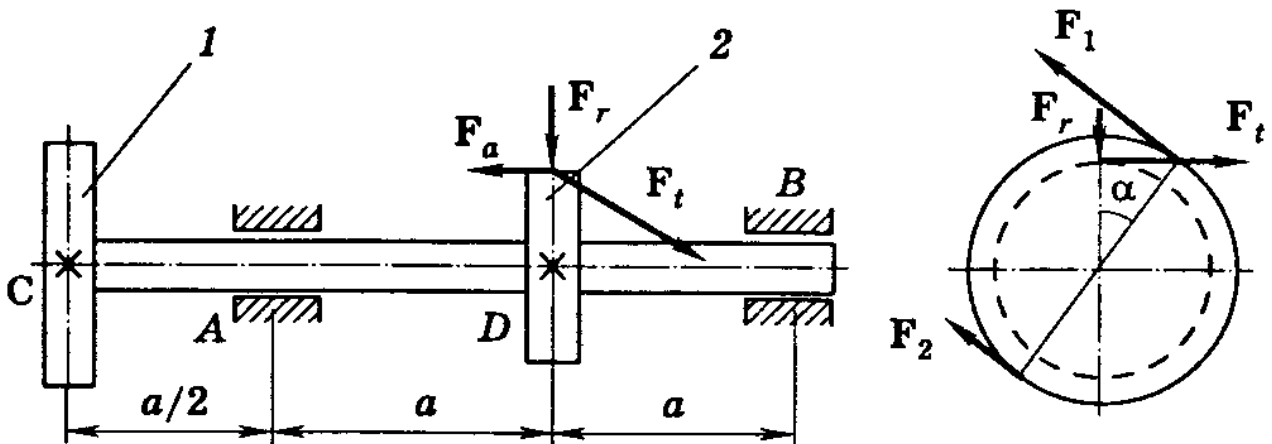


Рисунок 2. – Схема вала со шкивом в точке С и зубчатым колесом в точке D.

Исходные данные

Диаметр, м		Мощность, кВт	Угловая скорость, рад/с	Длина a , м	Угол α , град
d_1	d_2				
0,6	0,25	30	42	0,2	25

Решение.

Составляем расчётную схему вала (рисунок 3).

Сечение С. Перенесём силы F_1 и F_2 , действующие на шкив 1 (рисунок 3, а), параллельно самим себе к продольной оси вала, присоединив при этом пары сил с моментами $F_1 \frac{d_1}{2}$ и $F_2 \frac{d_1}{2}$ (рисунок 3, в). В результате имеем центральную силу $F = F_1 + F_2 = 3F_2$, вызывающую изгиб вала и скручивающий момент

$$T_{e1} = F_1 \frac{d_1}{2} - F_2 \frac{d_1}{2} = 2F_2 \frac{d_1}{2} - F_2 \frac{d_1}{2} = F_2 \frac{d_1}{2}$$

Сечение D. Приведём к оси вала все силы, действующие на зубчатое колесо 2 (рисунок 3, г). Силу F_t переносим параллельно самой себе в точку D на оси вала. В результате получаем скручивающий момент $F_t \frac{d_2}{2}$ и центральную силу

F_t , изгибающую вал в горизонтальной плоскости. Кроме того, следует учесть радиальную F_r и осевую F_a силы, изгибающие вал в вертикальной плоскости.

Для дальнейших расчётов представим вал как балку на двух опорах, рассматривая подшипники А и В как шарнирные опоры, одна из которых имеет продольную неподвижность.

По заданной мощности и угловой скорости определяем момент, передаваемый валом:

$$T_e = \frac{P}{\omega} = \frac{30 \cdot 10^3}{42} = 714,3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Внутренний момент в сечениях вала на участке CD определяем методом сечений: $T = T_e$. Строим эпюру T (рисунок 3, e).

Определяем силы натяжения ремней и силы, возникающие в зацеплении зубчатой передачи. Из равенства моментов $T_{e1} = T_{e2} = T_e$ находим:

силы натяжения ветвей ременной передачи

$$F_2 = \frac{2T_e}{d_1} = \frac{2 \cdot 714,3}{0,6} = 2381 \text{ Н}; \quad F_1 = 2F_2 = 2 \cdot 2381 = 4762 \text{ Н};$$

силы в зацеплении зубчатой передачи, равные соответственно:

$$\text{окружная} - F_t = \frac{2T_e}{d_2} = \frac{2 \cdot 714,3}{0,25} = 5714,5 \text{ Н};$$

$$\text{радиальная} - F_r = 0,38F_t = 0,38 \cdot 5714,5 = 2171,5 \text{ Н};$$

$$\text{осевая} - F_a = 0,2F_t = 0,2 \cdot 5714,5 = 1143 \text{ Н}.$$

Определяем силы, изгибающие вал в вертикальной и горизонтальной плоскостях, и строим эпюры изгибающих моментов.

Силы в зацеплении зубчатой передачи действуют в нашем примере строго в горизонтальной (F_t) и вертикальной (F_a , F_r) плоскостях.

На шкиве силы натяжения ремня действуют под углом α , поэтому раскладываем их равнодействующую на горизонтальную и вертикальную составляющие (рисунок 3, d):

$$F = F_1 + F_2 = 2381 + 4762 = 7143 \text{ Н};$$

$$F_x = F \cos 25^\circ = 6473 \text{ Н}; \quad F_y = F \sin 25^\circ = 3018,6 \text{ Н}.$$

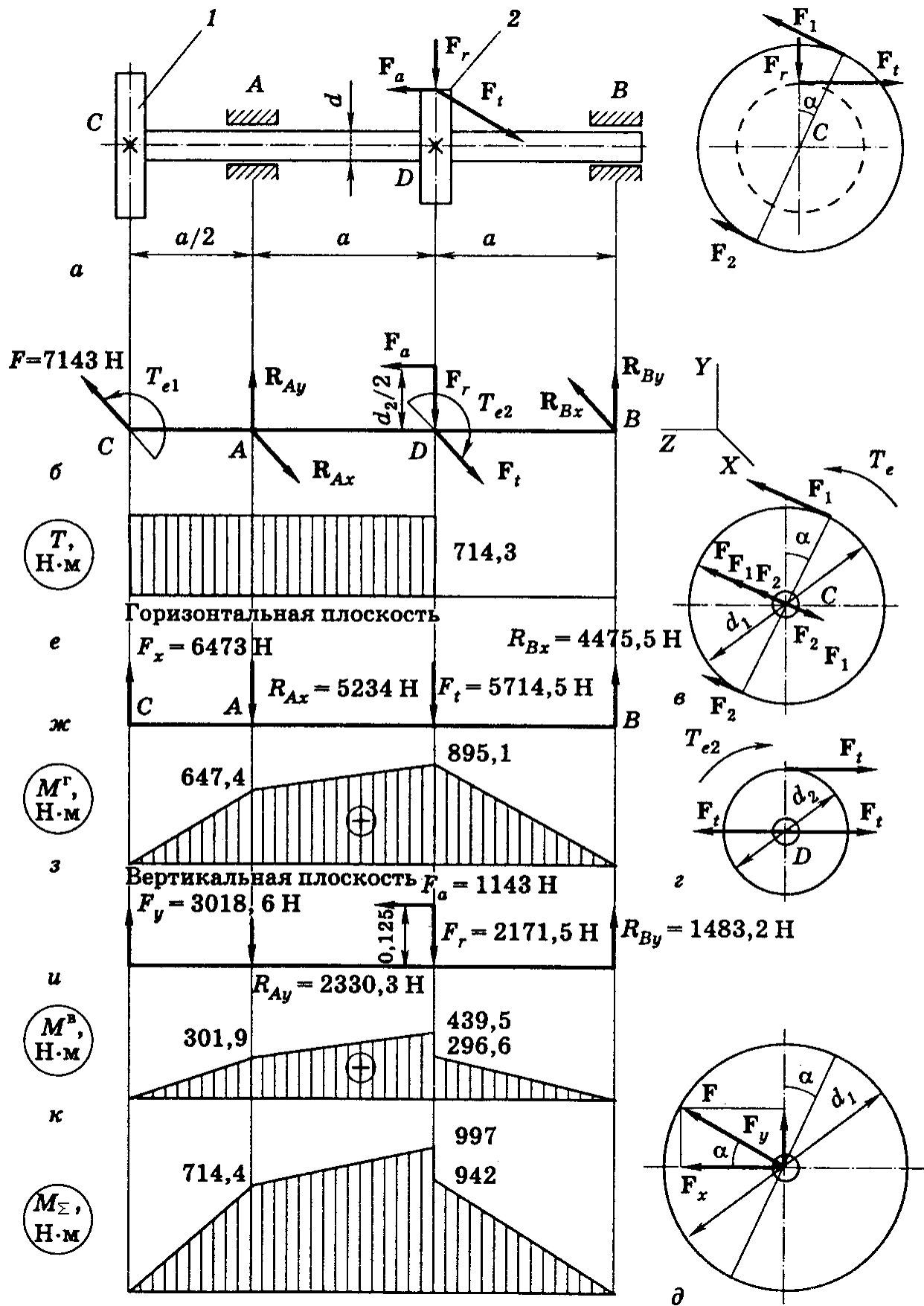


Рисунок 3. – Расчётная схема вала и эпюры.

Рассматриваем изгиб вала в горизонтальной плоскости (на рисунке 3, *ж* показана горизонтальная проекция).

Находим реакции опор R_{Ax} и R_{Bx} :

$$\sum M_A = 0; \quad F_x \cdot 0,1 - R_{Bx} \cdot 0,4 + F_t \cdot 0,2 = 0;$$

$$R_{Bx} = \frac{6473 \cdot 0,1 + 5714,5 \cdot 0,2}{0,4} = 4475,5 \text{ Н};$$

$$\sum M_B = 0; \quad F_x \cdot 0,5 - R_{Ax} \cdot 0,4 - F_t \cdot 0,2 = 0;$$

$$R_{Ax} = \frac{6473 \cdot 0,5 + 5714,5 \cdot 0,2}{0,4} = 5234 \text{ Н}.$$

Проверяем правильность определения реакций опор:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad F_x - R_{Ax} - F_t + R_{Bx} = 0;$$

$$6437 - 5234 - 5714,5 + 4475,5 = 0.$$

Реакции определены верно.

Определяем величину и строим эпюру изгибающих моментов в горизонтальной плоскости M^F (рисунок 3, *з*). В результате получаем:

$$M_A^F = 6473 \cdot 0,1 = 647,3 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_D^F = 4475,7 \cdot 0,2 = 895,1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Рассматриваем изгиб вала в вертикальной плоскости (рисунок 3, *и*).

Вычисляем реакции опор R_{Ay} и R_{By} :

$$\sum M_A = 0; \quad F_y \cdot 0,1 - F_a \cdot 0,125 - R_{By} \cdot 0,4 + F_r \cdot 0,2 = 0;$$

$$R_{By} = \frac{3018,6 \cdot 0,1 - 1143 \cdot 0,125 + 2171,5 \cdot 0,2}{0,4} = 1483,2 \text{ Н};$$

$$\sum M_B = 0; \quad F_y \cdot 0,5 - F_a \cdot 0,125 - F_r \cdot 0,2 - R_{Ay} \cdot 0,4 = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{3018,6 \cdot 0,5 - 1143 \cdot 0,125 - 2171,5 \cdot 0,2}{0,4} = 2330,3 \text{ Н}.$$

Проверяем правильность определения реакций опор:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad F_y - R_{Ay} - F_r + R_{By} = 0;$$

$$3018,6 - 2330,3 - 2171,5 + 1483,2 = 0.$$

Реакции определены верно.

Определяем величину и строим эпюру изгибающих моментов в вертикальной плоскости M^B (рисунок 3, *к*):

$$M_A^B = F_y \cdot 0,1 = 301,9 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$\text{при подходе слева } M_D^B = F_y \cdot 0,3 - R_{Ay} \cdot 0,2 = 439,5 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$\text{при подходе справа } M_D^B = R_{By} \cdot 0,2 = 296,6 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Строим суммарную эпюру M_Σ изгибающих моментов (рисунок 3, л).

Суммарный изгибающий момент в сечениях вала:

$$M_\Sigma = \sqrt{(M^r)^2 + (M^B)^2};$$

$$M_{\Sigma C} = 0;$$

$$M_{\Sigma A} = \sqrt{647,4^2 + 301,9^2} = 714,4 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$\text{при подходе слева } M_{\Sigma D} = \sqrt{895,1^2 + 439,5^2} = 997 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$\text{при подходе справа } M_{\Sigma D} = \sqrt{895,1^2 + 296,6^2} = 942 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{\Sigma B} = 0.$$

Определяем положение опасного сечения, анализируя эпюры суммарного изгибающего M_Σ и крутящего T моментов. Это сечение D.

Определяем требуемый диаметр вала в опасном сечении. Эквивалентный момент в опасном сечении по теории наибольших касательных напряжений:

$$M_{\Sigma D}^{III} = \sqrt{M_{\Sigma D}^2 + T^2} = \sqrt{997^2 + 714,3^2} = 1226,5 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Вычисляем диаметр вала из условия прочности при изгибе с кручением:

$$\sigma_\vartheta = \frac{M_\vartheta}{W_\vartheta} \leq [\sigma]; \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{M_\vartheta^{III}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{1226,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 65}} = 57,3 \text{ мм}.$$

Учитывая ослабление вала в этом сечении шпоночной канавкой, округляем диаметр до большего стандартного значения $d=60 \text{ мм}$.

Задание

Изучить на примере порядок расчёта вала на изгиб с кручением.

Выполнить схему вала и записать исходные данные примера расчёта.

Определить реакции в опорах вала.

Самостоятельно построить эпюры крутящего и изгибающих моментов, суммарную эпюру изгибающих моментов.

Определить требуемый диаметр вала в опасном сечении.

Сравнить порядок и результаты собственного расчёта с примером расчёта и внести необходимые исправления.

Контрольные вопросы:

1. Как определяется эквивалентное напряжение при упрощённом плоском напряжённом состоянии по гипотезе наибольших касательных напряжений (третьей теории прочности)?
2. Момент сопротивления изгибу вала круглого поперечного сечения.
3. Что называют эквивалентным моментом?
4. Какие эпюры необходимо построить для расчёта вала на совместное действие изгиба и кручения?
5. Запишите для пластичного материала условие прочности при изгибе с кручением.

Список литературы

1. Степин, П. А. Сопротивление материалов : учебник для вузов / П.А. Степин. – 12-е изд., стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2012. – 319, [1] с. : ил., портр. ; 22. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – Библиогр.: с. 309-310. – ISBN 978-5-8114-1038-5
2. Ицкович, Г. М. Сопротивление материалов : учебник для студентов машиностроит. техникумов / Г. М. Ицкович. – Изд. 9-е, стер. – М. : Высшая школа, 2001. – 368 с. : ил. – Гриф: Доп. МО. – Библиогр.: с. 363

РАСЧЁТ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Цель и содержание работы: изучение методики расчёта стержня на устойчивость при центральном сжатии. Определение критической силы и критического напряжения.

Теоретическая часть

При центральном сжатии прямого стержня его прямолинейная форма устойчива до определённого критического значения сжимающей силы. Даже незначительное превышение сжимающей силой критического значения связано с появлением существенных прогибов, а значит, с возникновением больших изгибающих моментов и напряжений. Практически потеря устойчивости равносильна выходу конструкции из строя, даже если это явление не сопровождается разрушением (изломом) стержня.

Расчёт на устойчивость обеспечивает такие соотношения величин сжимающей нагрузки, размеров стержня и характеристик его материала, при которых исключена опасность продольного изгиба. Критической силой $P_{кр}$ называется наименьшая сжимающая нагрузка, при которой сжатый стержень теряет способность сохранять прямолинейную форму равновесия.

Чтобы гарантировать отсутствие продольного изгиба, допускаемое значение силы, сжимающей стержень, $[P_y]$ должно быть в некоторое число раз меньше критической

$$[P_y] = \frac{P_{кр}}{[n_y]}, \quad (1)$$

где $[n_y]$ – требуемый (заданный, допускаемый) коэффициент запаса устойчивости. Его значение зависит от материала и назначения стержня, а для элементов строительных конструкций – также от их гибкости. Для стальных конструкций типа кронштейнов, ферм принимают $[n_y]=1,8...3,0$; для ходовых и грузовых винтов $[n_y]=4...5$; для конструкций из чугунного литья $[n_y]=5,0...6,5$; для кон-

струкций из алюминиевого сплава $[n_y]=2,5\dots3,5$; для деревянных стоек $[n_y]=3\dots5$.

Допускаемые напряжения

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{[n_y]}, \quad (2)$$

где $\sigma_{кр}$ – критическое напряжение.

В пределах применимости закона Гука критическая сила определяется по формуле Эйлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (3)$$

где E – модуль упругости материала стержня; $I_{\min}$ – минимальный главный центральный момент инерции поперечного сечения стержня; μ – коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления концов; l – длина стержня; μl – приведённая длина.

Критическое напряжение определяют по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 F} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (4)$$

где F – площадь поперечного сечения; $i_{\min}$ – минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}}; \quad (5)$$

λ – гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}. \quad (6)$$

Закон Гука, и, следовательно, формула Эйлера применимы при условии, что критическое напряжение $\sigma_{кр}$ не превышает предела пропорциональности материала стержня $\sigma_{пц}$

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}. \quad (7)$$

Подставляя значение $\sigma_{кр}$ по (4), получаем

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}, \quad (8)$$

отсюда

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пл}}}}, \text{ то есть } \lambda_{\text{пред}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пл}}}}, \quad (9)$$

где $\lambda_{\text{пред}}$ – предельная гибкость, зависящая только от механических свойств материала. То есть формула Эйлера применима при $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$.

Критические напряжения при гибкостях меньше предельных определяются по эмпирической формуле Ясинского

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda, \quad (10)$$

где a, b – опытные коэффициенты, зависящие от материала стержня и имеющие размерность напряжения.

Условие прочности при продольном изгибе

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma_y], \quad (11)$$

где $[\sigma_y]$ – допускаемое напряжение на устойчивость, которое можно выразить через основное допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma_c]$

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c] \quad (12)$$

с помощью коэффициента φ – коэффициента понижения допускаемого напряжения при продольном изгибе. Расчёт по формуле

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi [\sigma_c] \quad (13)$$

универсален в том смысле, что он не связан с пределами применимости формулы Эйлера и может быть использован при всех значениях гибкости, для которых имеются табличные значения коэффициента φ . Коэффициент запаса устойчивости в этом расчёте в явном виде не фигурирует, он включён в величину φ .

Из (13) получаем допускаемое значение сжимающей силы

$$[P] = F\varphi[\sigma_c]. \quad (14)$$

Для стержней малой гибкости ($\lambda < \lambda_0$) расчёт на устойчивость не требуется.

Значения λ_0 приведены в таблице 2.

Расчёт на устойчивость может выполняться в двух вариантах: 1) при заданном в условии допускаемом коэффициенте запаса на устойчивость $[n_y]$; 2) с помощью таблиц коэффициентов уменьшения φ .

Задания

Для заданной стойки (выбрать вариант из таблицы 4) определить значения критической силы, критического напряжения и допускаемой сжимающей нагрузки, приняв $[\sigma_c]=160$ МПа для стали, $[\sigma_c]=140$ МПа для чугуна.

Пример выполнения задания

Задача.

Для заданной стойки (рисунок 1) определить значения критической силы, критического напряжения и допускаемой сжимающей нагрузки, приняв $[\sigma_c]=160$ МПа для стали, $[\sigma_c]=140$ МПа для чугуна.

Решение.

Для кольцевого сечения любая центральная ось является главной и все центральные моменты инерции равны между собой. Соотношение диаметров $c=d_0/d=56/94=0,6$.

Момент инерции сечения

$$I_{\min} = I = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4) =$$

$$= \frac{3,14 \cdot 94^4}{64} (1 - 0,6^4) = 333,4 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Площадь поперечного сечения стойки

$$F = \frac{\pi d^2}{4} (1 - c^2) = \frac{3,14 \cdot 94^2}{4} (1 - 0,6^2) =$$

$$= 44,4 \cdot 10^2 \text{ мм}^2$$

Радиус инерции

$$i = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{333,4 \cdot 10^4}{44,4 \cdot 10^2}} = 27,4 \text{ мм}.$$

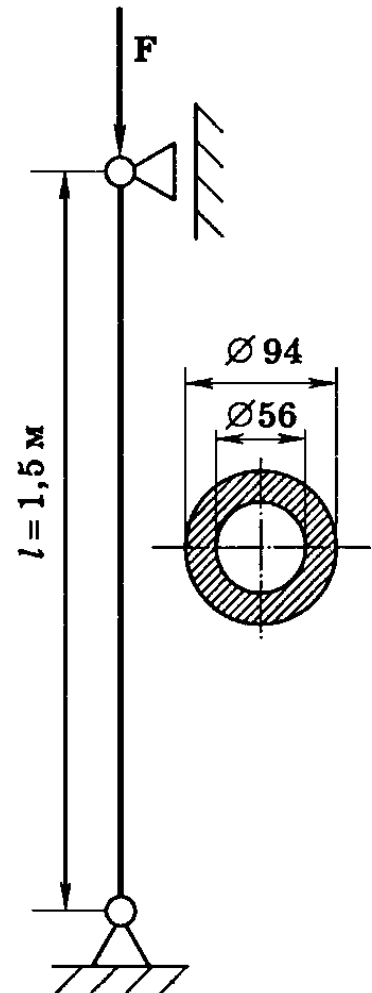


Рисунок 1.

При данном способе закрепления концов коэффициент приведения длины $\mu=1$ (согласно таблице 1). Гибкость стойки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1,5 \cdot 10^3}{27,4} = 55.$$

Для чугуна по таблице 2 находим: $\varphi=0,57$ при $\lambda=50$; $\varphi=0,44$ при $\lambda=60$.

Интерполируя, для $\lambda=55$ имеем:

$$\varphi = 0,44 \cdot \frac{0,57 - 0,44}{10} \cdot 5 = 0,505.$$

Допускаемое значение сжимающей силы

$$[P] = F\varphi[\sigma_c] = 4440 \cdot 0,505 \cdot 140 = 314 \cdot 10^3 \text{ Н} = 314 \text{ кН}.$$

Критическое напряжение для стержней средней гибкости при

$\lambda=55 < \lambda_{\text{пред}}=80$ (для чугуна) определяется по формуле из таблицы 2

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2 = 761 - 11,77 \cdot 55 + 0,052 \cdot 55^2 = 271 \text{ МПа},$$

где a, b, c – коэффициенты, определяемые по таблице 2.

Критическая сила

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F = 271 \cdot 4440 = 1203 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1203 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{P_{\text{кр}}}{[P]} = \frac{1203}{314} = 3,8.$$

Справочные таблицы

Таблица 1. – Влияние условий закрепления концов стержня на критическую силу

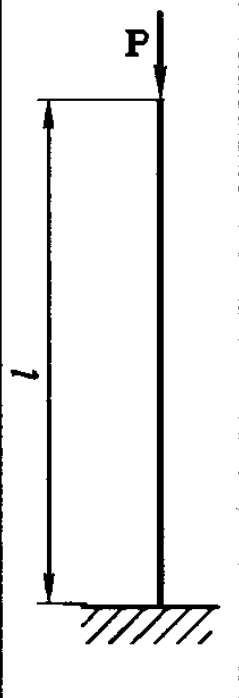
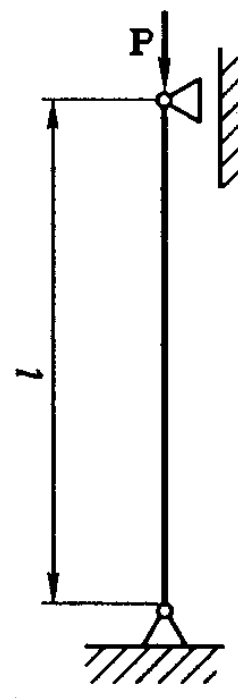
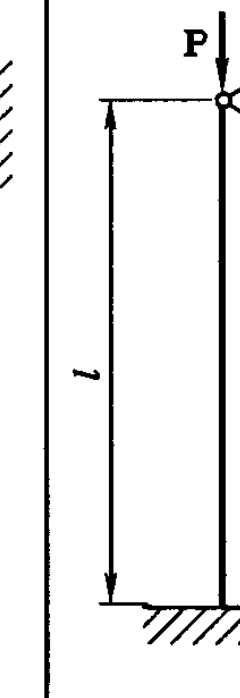
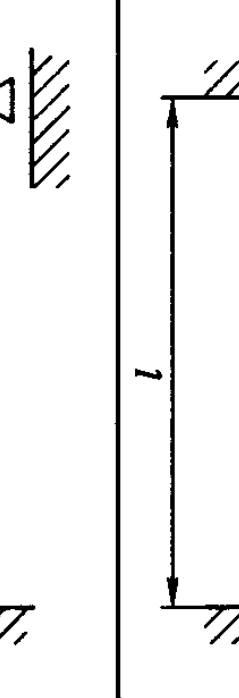
Схема стойки				
μ	2	1	0,7	0,5

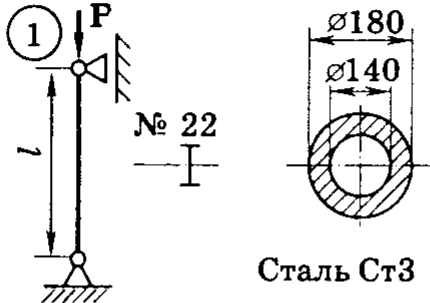
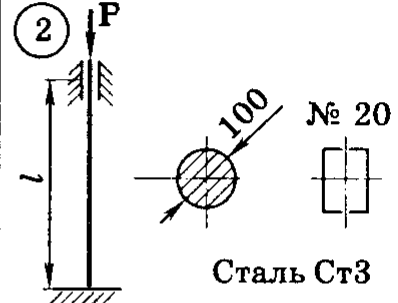
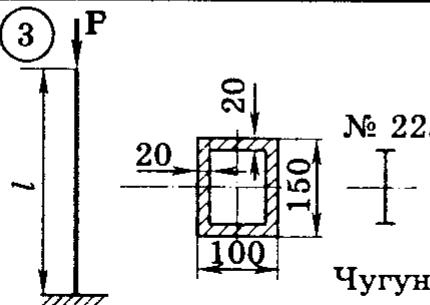
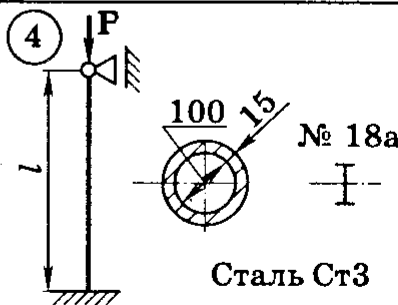
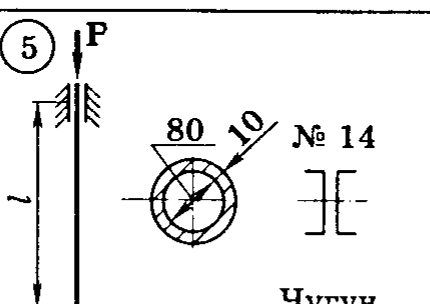
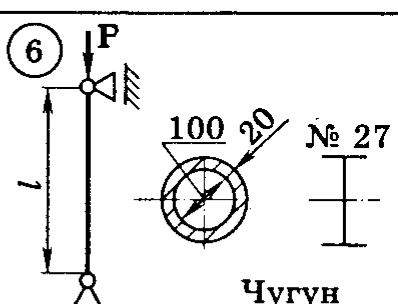
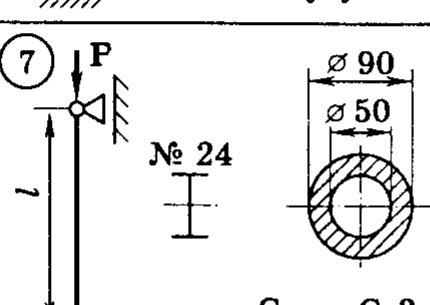
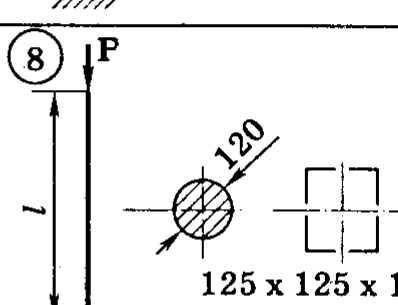
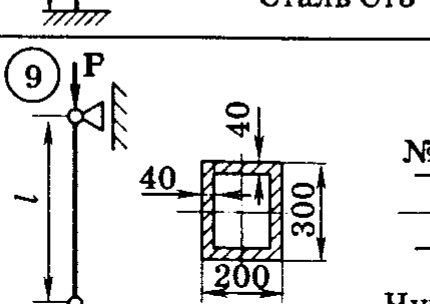
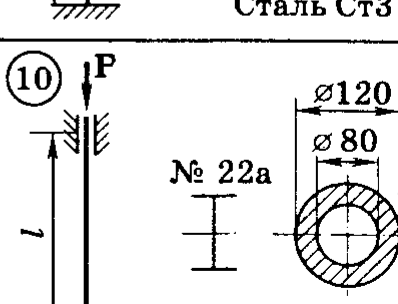
Таблица 2. – Параметры для определения критических напряжений

Материал	$\sigma_y (\sigma_{0,2}),$ МПа	$\sigma_{пц},$ МПа	$a,$ МПа	$b,$ МПа	Граничное значение гибкости	
Сталь:						
Ст2	215	185	258	0,68	105	62
Ст3	235	195	304	1,11	100	61
20, Ст4	255	215	328	1,07	96	60
25, Ст5, 35л	275	235	343	1,13	92	57
35, 45л	314	265	390	1,40	90	55
45	353	300	440	1,64	85	52
50, 55л	373	314	464	1,83	82	50
Сосна, ель	—	—	28,7	0,19	70	—
Чугун	$\sigma_{cr} = 761 - 11,77 \lambda + 0,052 \lambda^2$					

Таблица 3. – Значения коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения (φ)

Гибкость $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$	Материал				
	Сталь Ст1, Ст2, Ст3, Ст4	Сталь Ст5	Сталь повышенного качества ($\sigma_y = 320$ МПа)	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,37	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

Таблица 4. – Схемы и исходные данные к задаче

Номер варианта	$l, \text{ м}$	Схемы стоек и сечений	
1	1,2	 № 22 Сталь Ст3	 № 20 Сталь Ст3
2	1,7		
3	1,6		
4	1,5		
5	1,6	 № 22a Чугун	 № 18a Сталь Ст3
6	1,9		
7	1,8		
8	1,7		
9	1,5	 № 14 Чугун	 № 27 Чугун
10	2,0		
11	1,8		
12	1,9		
13	1,7	 № 24 Сталь Ст3	 125 x 125 x 10 Сталь Ст3
14	1,6		
15	1,7		
16	1,8		
17	2,2	 № 24 Чугун	 № 22a Сталь Ст3
18	2,0		
19	2,1		
20	1,8		

Контрольные вопросы

10. Какая сила называется критической?
11. Как изменится критическая сила, если увеличить диаметр стального сечения стойки в 2, в 3 и в 5 раз? (Формула Эйлера применима во всех случаях.)
12. Как изменится критическая сила, если уменьшить длину стойки в 3, в 4, в 5 раз? (Формула Эйлера применима во всех случаях.)
13. Шатуны двигателя внутреннего сгорания имеют, как правило, двутавровое сечение. Чем это объяснить?
14. Что называется гибкостью стержня?
15. В каких пределах справедлива формула Эйлера?
16. Назовите способы расчёта стержней на устойчивость.

Список литературы

1. Кривошапко, С. Н. Сопротивление материалов : лекции, семинары, расчетно-графические работы : учебник для бакалавров / С. Н. Кривошапко. – Москва : Юрайт, 2013. – 413 с. : ил., табл. ; 21 см. – (Бакалавр. Базовый курс) (Учебник). – Гриф: Доп. МО. – Библиогр.: с. 412-413. – ISBN 978-5-9916-2122-9
2. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – Изд. 15-е, перераб. – М. : Наука, 1976. – 608 с. – Прил.: с. 592-597. – Предм. указ.: с. 600-607
3. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов : учебник для вузов / В. И. Феодосьев. – Изд. 9-е, перераб. – М. : Наука, 1986. – 512 с. : ил. – Прил.: с. 493-508. – Предм. указ.: с. 509-512

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания
по организации самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

«Механика в машиностроении»

для студентов направления подготовки 15.03.05 «Конструкторско-
технологическое обеспечение машиностроительных производств»
направленность (профиль) «Технология машиностроения»

Ставрополь 2026

Данные методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «Механика в машиностроении» предназначены для бакалавров направления 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств».

В методических указаниях определена цель самостоятельной работы и приведен теоретический материал, необходимый студентам для выполнения поставленных перед ними задач. Приведен список необходимой литературы.

Составитель: к.т.н., доцент. В. Г. Терещенко.

Рецензент: д.т.н., проф. В.Г. Копченков.

Содержание

	Стр.
1. Цель и задачи самостоятельной работы по освоению дисциплины	4
2. Подготовка к практическим занятиям	5
3. Самостоятельное изучение теоретических вопросов	6
4. Выполнение РГР	7
5. Рекомендуемая литература и сайты	9

1. Цель и задачи самостоятельной работы по освоению дисциплины.

На самостоятельную работу отводится 94,5 астрономических часа. Это намного больше времени всех аудиторных занятий (40,5 астрономических часов). Поэтому самостоятельная работа – очень важная, неотъемлемая часть обучения. Целью самостоятельной работы по дисциплине «механика в машиностроении» в комплексе с аудиторными занятиями является формирование компетенций (ОПК-5, ОПК-8) будущего бакалавра по направлению 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств. Содержание компетенций представлено в таблице 1.

Таблица 1. – Компетенции, формируемые при изучении «Прикладной механики»

№ п/п	Содержание компетенции	Шифр
1	Способен использовать основные закономерности, действующие в процессе изготовления машиностроительных изделий требуемого качества, заданного количества при наименьших затратах общественного труда	ОПК-5
2	Способен участвовать в разработке обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами, выборе оптимальных вариантов прогнозируемых последствий решения на основе их анализа	ОПК-8

Задачами освоения дисциплины являются: овладение наиболее актуальными для данного направления основными положениями прикладной и технической механики, механики сплошных сред.

2. Подготовка к практическим занятиям

На практических занятиях по механике в машиностроении студенты изучают примеры выполнения заданий и выполняют задания самостоятельно. Все задания предполагают выполнение графических изображений и вычислений.

Поэтому на каждом лабораторном и практическом занятии студент должен иметь тетрадь, ручку, карандаш, ластик, два треугольника (с углами 30, 60, и 90 градусов, и с углами 45, 45 и 90 градусов) или треугольник и линейку, циркуль, транспортир, инженерный калькулятор.

Перед практическим занятием (накануне) студент должен внимательно прочесть записи последних текущих лекций по механике в машиностроении. С теоретическим материалом по данному практическому занятию можно также предварительно ознакомиться (в сжатом виде) по методическим указаниям к практическим занятиям по дисциплине «механика в машиностроении» для бакалавров направления 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств.

Свою готовность к выполнению практического занятия студент проверяет самостоятельно, мысленно отвечая на вопросы для защиты работы (вопросы к практическому занятию).

Тем студентам, кому трудно даются решение задач и понимание различных разделов дисциплины «механика в машиностроении», рекомендуется вернуться к ранее пройденному и вновь прочитать соответствующие места в своём школьном учебнике физики, геометрии или алгебры.

Выполненную полностью и оформленную работу студент должен предоставить для проверки преподавателем. Для защиты проделанной работы студент должен уметь объяснить смысл и логику своих записей, выполнить небольшое задание, аналогичное части проделанной работы, ответить на вопросы к занятию.

3. Самостоятельное изучение теоретических вопросов

№ п/п	Виды самостоятельной работы	Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
		Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет- ресурсы
1	Выполнение РГР	1 2	1 2 3	1 2	1 2 3
2	Подготовка к практическому занятию	1 2	1 2 3	1 3	1 2 3
3	Подготовка к лекции	1 2	1 2 3	1	1 2 3
4	Самостоятельное изучение литературы	1 2	1 2 3	1	1 2 3

4. Выполнение РГР

Общие требования к выполнению и оформлению расчётно-графической работы.

Задания расчётно-графической работы выполняются на одной стороне отдельных листов формата 203 x 298 мм (А4) с исполнением рамки (см. Приложение 3). В Приложении 4 приводится пример оформления титульного листа расчётно-графической работы. Правильно выполненные и зачтённые задания сброшюровываются в отдельную папку согласно структуре расчётно-графической работы.

Методические указания по выполнению расчётно-графической работы:

Изучить теоретический материал по теме

Изучив материал данной темы, надо сначала обязательно разобраться в решениях соответствующих задач, примеры приводятся в МУ, обратив особое внимание на методические указания по их решению. Затем решите соответствующую задачу из контрольного задания.

Пример решения контрольного задания, приведённый в МУ, является примером оформления данного задания студентом в своей контрольной работе. Необходимо записать название задания, полностью переписать текст задачи, выписать из соответствующих заданному варианту таблиц все исходные данные и аккуратно, в произвольно выбранном масштабе, сделать свой чертёж

или схему конструкции. Следует помнить, что небрежно выполненный чертёж часто является причиной ошибок.

Расчётно-графическая работа подлежит защите в индивидуальной беседе с преподавателем (диалоговая форма общения «преподаватель – студент» или «студент – преподаватель») по вопросам теории, приводимым в конце каждого задания, в соответствии с календарным планом выполнения расчётно-графической работы.

5. Рекомендуемая литература и сайты

5.1. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

5.1.1. Перечень основной литературы

- 1 Филатов, Ю. Е. Введение в механику материалов и конструкций : учебное пособие для вузов / Ю. Е. Филатов. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 320 с. — ISBN 978-5-507-50444-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/433220>
- 2 Сопротивление материалов / Б. Е. Мельников, Л. К. Паршин, А. С. Семенов, В. А. Шерстнев. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 576 с. — ISBN 978-5-507-48147-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/341261>

5.1.2. Перечень дополнительной литературы

1. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - <http://biblioclub.ru/>. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6

2. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87388.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/87388>

3. Бегун, П. И. Прикладная механика : учебник / П. И. Бегун, О. П. Кормилицын. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : Политехника, 2020. — 464 с. — ISBN 978-5-7325-1089-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/94831.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

4. Салахутдинов, Ш. А. Сопротивление материалов : учебное пособие / Ш. А. Салахутдинов, С. А. Одинцова, Д. В. Шейкман. — Москва, Вологда : Инфра-Инженерия, 2022. — 192 с. — ISBN 978-5-9729-1075-5. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/123850.html> (дата обращения: 14.09.2022). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

5. Сопротивление материалов : учебное пособие / Н. И. Дедов, Н. А. Глазунова, И. Е. Адеянов, В. Н. Исуткина. — 2-е изд. — Самара : Самарский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2019. — 219 с. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/111789.html> (дата обращения: 29.01.2023). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

5.2. Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов по дисциплине «механика в машиностроении» для студентов направления 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств. Составитель Терещенко В.Г. (электронная версия)
2. Методические указания по выполнению расчётно-графической работы по дисциплине «механика в машиностроении» для студентов направления 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств. Составитель Терещенко В.Г. (электронная версия)
3. Методические указания по выполнению практических занятий по дисциплине «механика в машиностроении» для студентов направления 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств. Составитель Терещенко В.Г.

5.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. «Прикладная механика» - электронный учебный курс для студентов очной и заочной форм обучения. — Режим доступа: <http://www.prikladmeh.ru/>
2. «Прикладная механика» - контрольные задания. Учебное пособие для заочников. Теоретическая механика и сопротивление материалов. Изложены теоретические вопросы, приведены контрольные задания с

примерами решения задач. – Режим доступа:

<http://www.kstu.ru/servlet/contentblob?id=76413>

3. <http://mexcaf.narod.ru/index.html> Кафедра теоретической и прикладной механики МГТУ

5.4 Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

При чтении лекций используется компьютерная техника, демонстрации презентационных мультимедийных материалов. Для подготовки докладов на конференции студенты создают презентации.

Информационные справочные системы:

Информационно-справочные и информационно-правовые системы, используемые при изучении дисциплины:

1. <http://catalog.ncstu.ru/catalog> – Официальный сайт библиотеки ФГАОУ ВПО СКФУ.
2. <http://www.iprbookshop.ru/home.html> Электронно-библиотечная система
3. www.biblioclub.ru – Университетская библиотека онлайн

Программное обеспечение

1. Лицензионное программное обеспечение: MicrosoftOfficeStandard 2013.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания
по выполнению расчётно-графической работы по дисциплине
«Механика в машиностроении»
для студентов направления подготовки 15.03.05 «Конструкторско-
технологическое обеспечение машиностроительных производств»
направленность (профиль) «Технология машиностроения»

Ставрополь 2026

Данные методические указания к выполнению расчётно-графической работы по дисциплине «Механика в машиностроении» предназначены для бакалавров направления 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств».

В методических указаниях приведены задания на расчётно-графическую работу. Приведен список необходимой литературы.

Составитель: к.т.н., доцент. В. Г. Терещенко.

Рецензент: д.т.н., проф. В.Г. Копченков.

1. Задания

Вал передаёт мощность P при угловой скорости ω . Определить диаметр опасного сечения вала, несущего шкив диаметром d_1 и зубчатое колесо диаметром d_2 . Натяжение ведущей ветви ремня вдвое больше натяжения ведомой ($F_1=2F_2$). В зацеплении на зубчатое колесо действуют три силы: окружная сила F_t , направленная по касательной к делительной окружности колеса; осевая сила F_a , направленная параллельно оси вала; радиальная сила F_r , направленная по радиусу к центру зубчатого колеса. Принять $F_r=0,38F_t$, $F_a=0,2F_t$. Материал вала – сталь 45 ($[\sigma]=65$ МПа). Расчёт выполнить с использованием теории наибольших касательных напряжений.

Исходные данные приведены в таблице 1. Схемы к вариантам задачи приведены на рисунках 1-3.

Таблица 1. – Числовые данные к задачам

Номер варианта	Диаметр, мм		Мощ- ность, кВт	Угловая скорость, рад/с	Длина a , м	Угол α , град
	d_1	d_2				
1	850	400	80	70	0,10	25
2	550	250	70	65	0,20	30
3	500	300	90	75	0,25	45
4	900	500	80	70	0,15	60
5	750	300	50	40	0,20	50
6	450	200	100	80	0,25	45
7	700	600	70	65	0,15	40
8	800	400	100	80	0,10	50
9	500	250	60	50	0,20	70
10	650	300	40	60	0,25	60
11	500	250	90	75	0,15	30
12	800	400	70	65	0,25	45
13	700	350	50	40	0,10	35
14	650	300	100	80	0,20	40
15	750	400	60	50	0,25	25
16	850	500	80	70	0,10	30
17	600	300	70	65	0,25	60
18	550	200	100	80	0,20	75
19	450	200	90	75	0,15	75
20	700	250	80	70	0,10	60
21	900	600	100	80	0,20	45
22	500	300	80	70	0,25	30
23	400	200	60	50	0,15	25
24	550	300	90	75	0,25	45
25	750	350	70	65	0,20	60
26	600	300	90	75	0,20	30
27	400	200	40	30	0,15	45
28	850	450	100	80	0,10	75
29	800	400	80	70	0,10	60
30	650	325	50	40	0,15	30

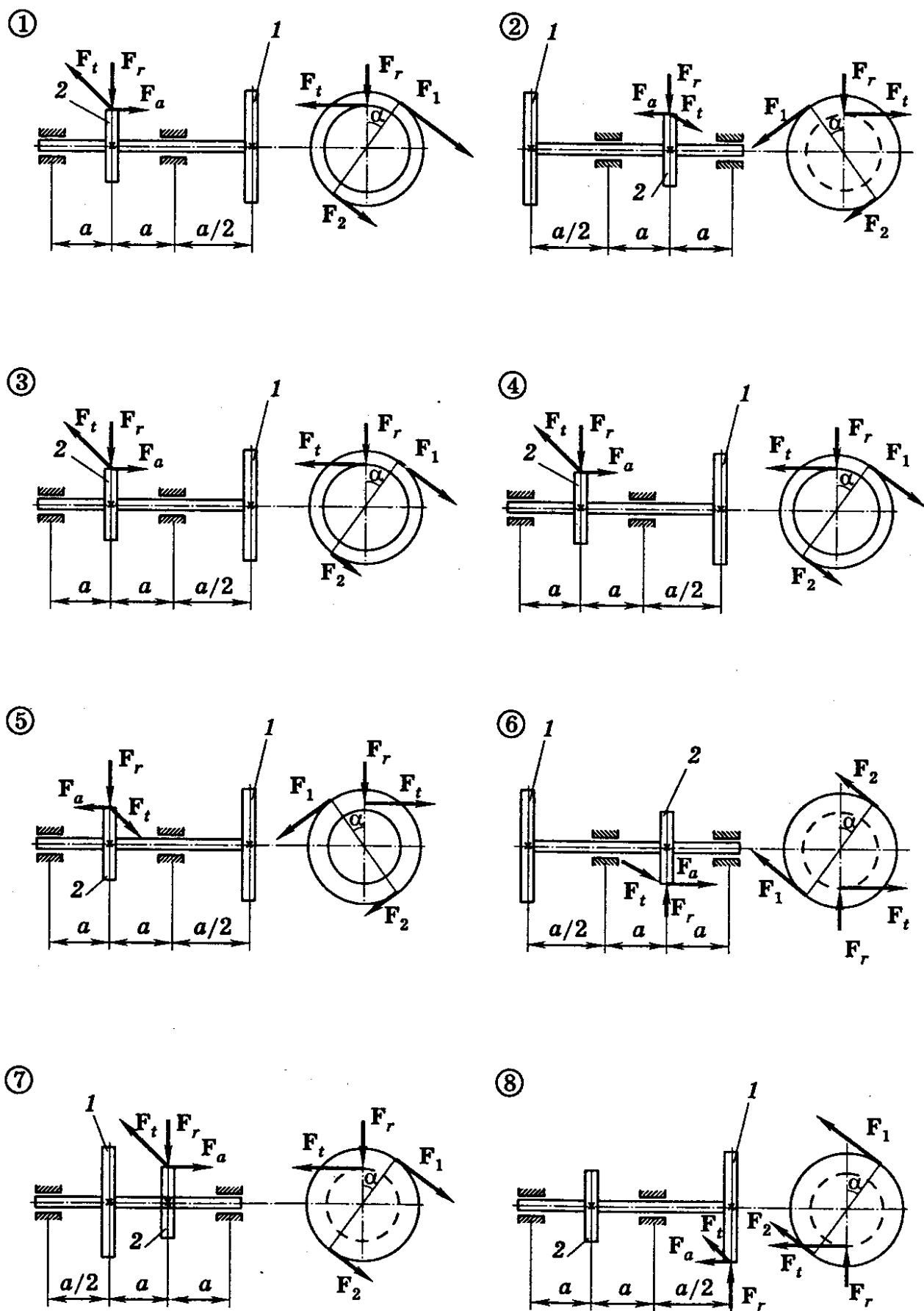


Рисунок 1.

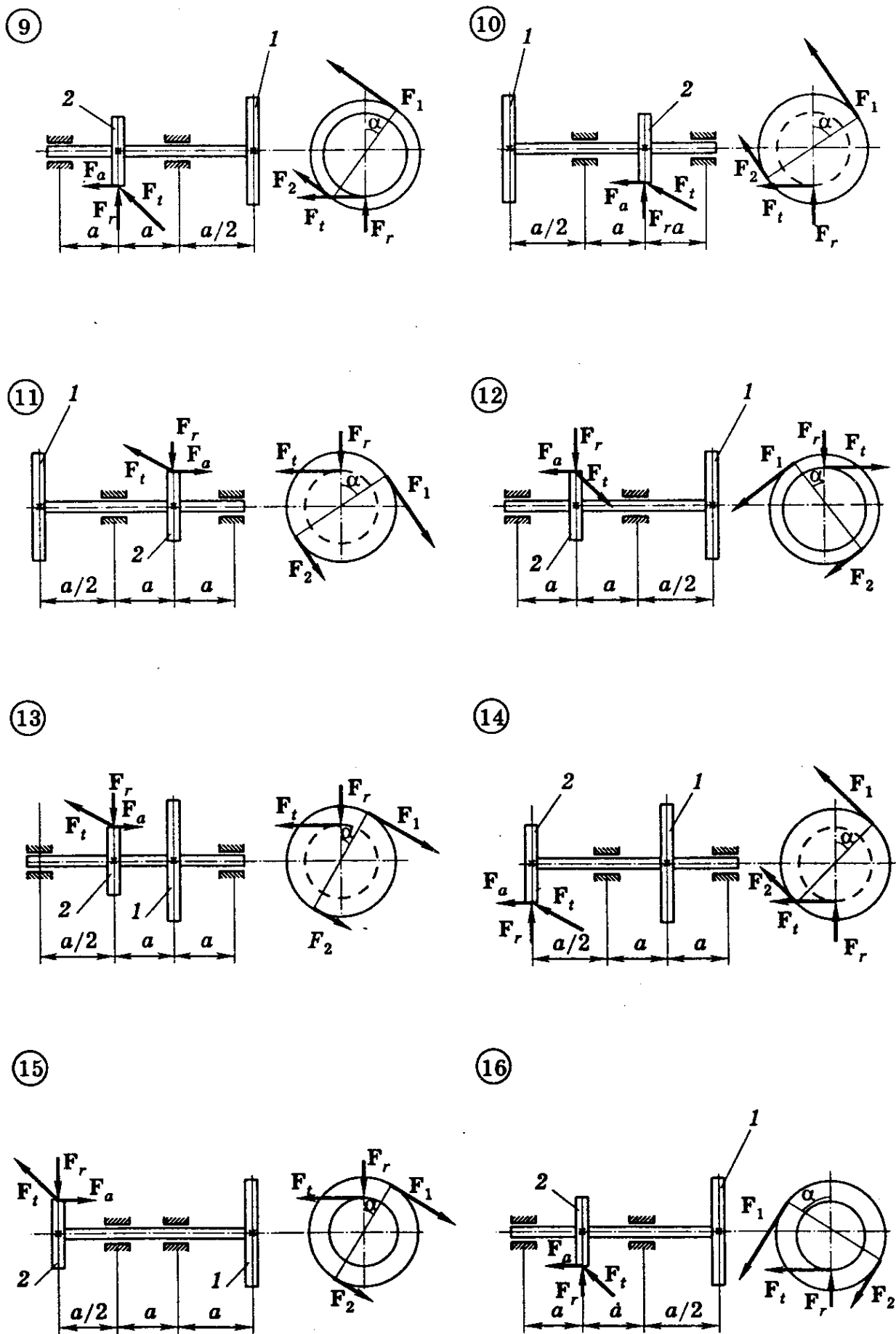
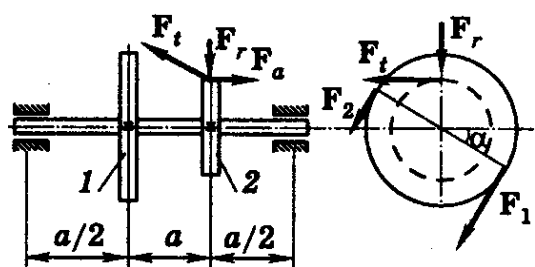
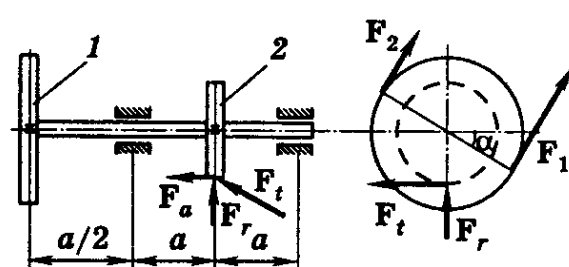


Рисунок 2.

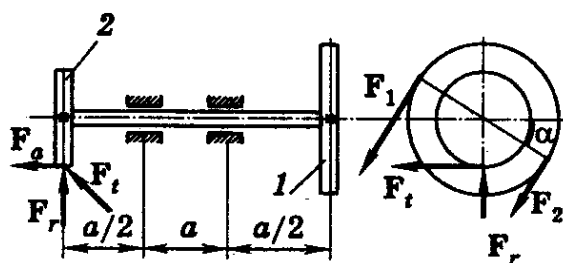
17



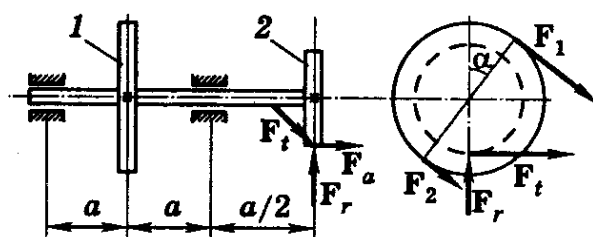
18



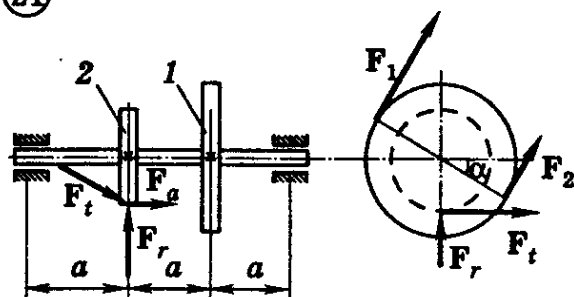
19



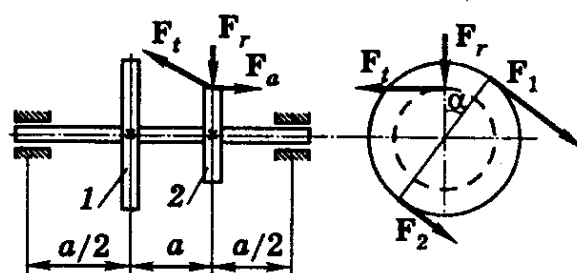
20



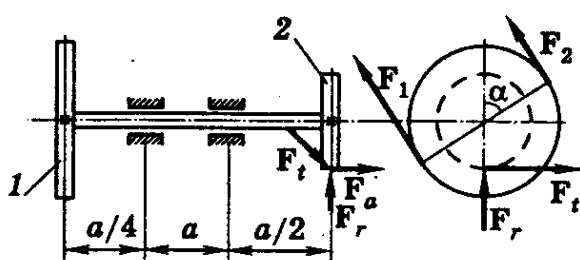
21



22



23



24

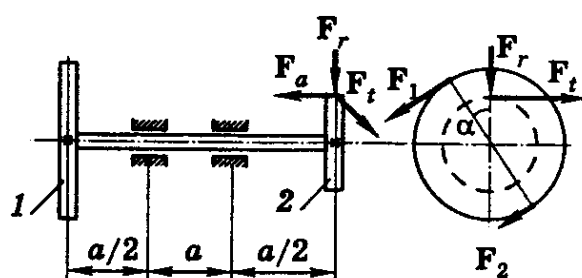


Рисунок 3.

2. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К НАПИСАНИЮ РАБОТЫ

Не следует приступать к выполнению заданий, не изучив по учебнику соответствующих разделов дисциплины и не решив самостоятельно рекомендованных задач.

Работы, выполненные не по своему варианту, не рецензируются.

Выполняя расчетно-графические работы, необходимо соблюдать следующие требования:

- каждая работа выполняется на листах формата А4 в соответствии с требованиями ГОСТ 2.105-2019 и ГОСТ 2.106-2019;
- титульный лист является первым листом расчетно-графической работы и выполняется по форме, приведенной в Приложении А;
- лист задания содержит расчетную схему и исходные данные;
- решение задачи должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными, без сокращений слов, пояснениями и выполненными в соответствии с требованиями ЕСКД схемами, на которых все входящие в расчет величины указываются в числах;
- записывать результаты вычисления нужно с точностью до трех значащих цифр;
- расчеты производятся в системе СИ и поясняются текстом, в котором указывается, какая величина определяется и по какой формуле, какие величины подставляются в формулы и откуда они взяты, при этом обязательно указываются единицы измерения всех величин;
- в конце работы приводится список используемой литературы, ставится дата выполнения работы, после чего оставляется свободная страница для замечаний рецензента;
- после получения проверенной работы студент должен исправить все ошибки и устранить сделанные ему замечания на отдельных листах, которые вшиваются в соответствующие места ошибочно выполненных заданий; отдельно от основной работы исправления не принимаются.

3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ, ПРИМЕРНЫЙ КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ЕЕ ВЫПОЛНЕНИЯ

Изучение дисциплины «механика в машиностроении» имеет целью овладение методами и приемами расчета отдельных элементов конструкций, а иногда и самих конструкций, на прочность, жесткость и устойчивость. В отличие от теоретической механики, где тела считаются абсолютно твердыми, в сопротивлении материалов изучаются деформируемые тела – обладающие свойствами изменяемости размеров и форм. Из всего многообразия элементов инженерных конструкций отбираются наиболее часто встречающиеся, или типовые, производится их схематизация, разрабатываются методы и приемы расчета элементов. Изучение дисциплины «механика в машиностроении» производится в соответствии с Государственным образовательным стандартом и Профессиональными образовательными программами для соответствующих направлений. Рекомендуются следующая последовательность изучения дисциплины:

- освоение теоретического материала на лекции;
- последующее углубленное изучение материала по учебникам и учебным пособиям, в том числе электронным курсам лекций; при этом следует обращать особое внимание на понимание физической сущности явления, на используемые ограничения и допущения;
- по материалам предварительно изученного теоретического курса решаются рекомендованные задачи;
- проводится углубленное изучение раздела с обязательным конспектированием материала, необходимость в котором определяется индивидуально самим студентом; для лучшего усвоения материала следует ответить на приведенные в рекомендуемых учебниках, учебных пособиях и электронном учебном курсе вопросы для самопроверки;

- после углубленного изучения темы решаются относящиеся к ней задачи расчетно-графической работы.

Примерный календарный план выполнения расчетно-графической работы

Выдача задания	1 неделя семестра
Выполнение работы	2 – 13 недели семестра
Проверка работы преподавателем	14 неделя семестра
Возврат на доработку (в случае необходимости)	14 неделя семестра
Защита работы	15 неделя семестра

4. ПОРЯДОК ЗАЩИТЫ И ОТВЕТСТВЕННОСТЬ СТУДЕНТА ЗА ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Соответствие выполненной работы номеру варианта, оформление и правильность решения задач проверяется преподавателем, который дает допуск к защите или возвращает работу на доработку (замечания по доработке указываются преподавателем на полях или в тексте работы). При выявлении несоответствия выполненной работы исходным данным студент производит выполнение работы заново в соответствии со своим вариантом (шифром). В процессе защиты студент объясняет решение каждой задачи, приводит обоснование полученных результатов и решает в присутствии преподавателя типовые задачи, подобные выполненным в расчетно-графической работе.

Приложение А – Титульный лист расчетно-графической работы

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Инженерный институт
Кафедра технической эксплуатации автомобилей

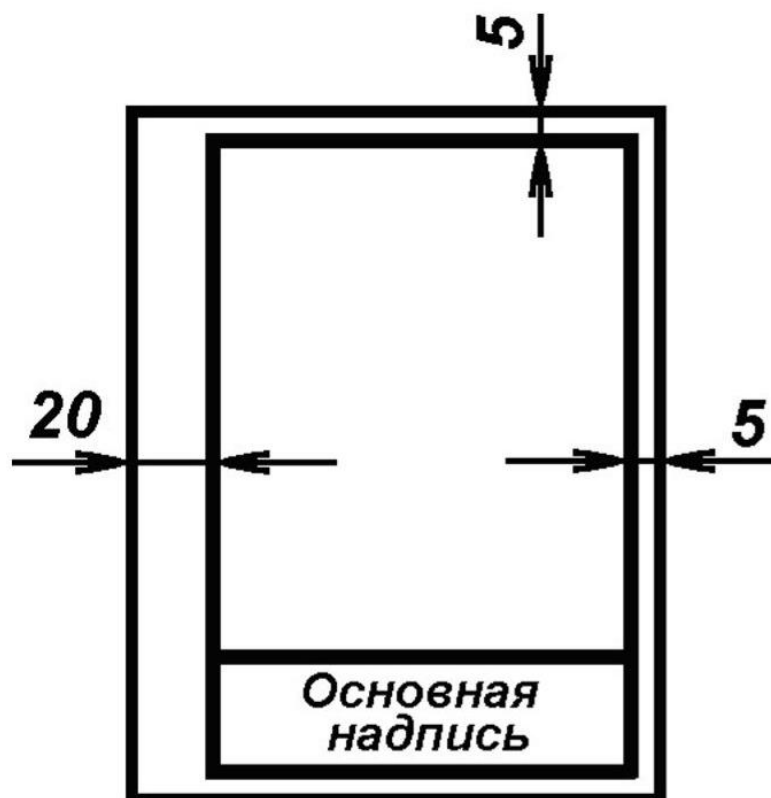
Расчётно-графическая работа
по дисциплине «Механика в машиностроении»

Вариант

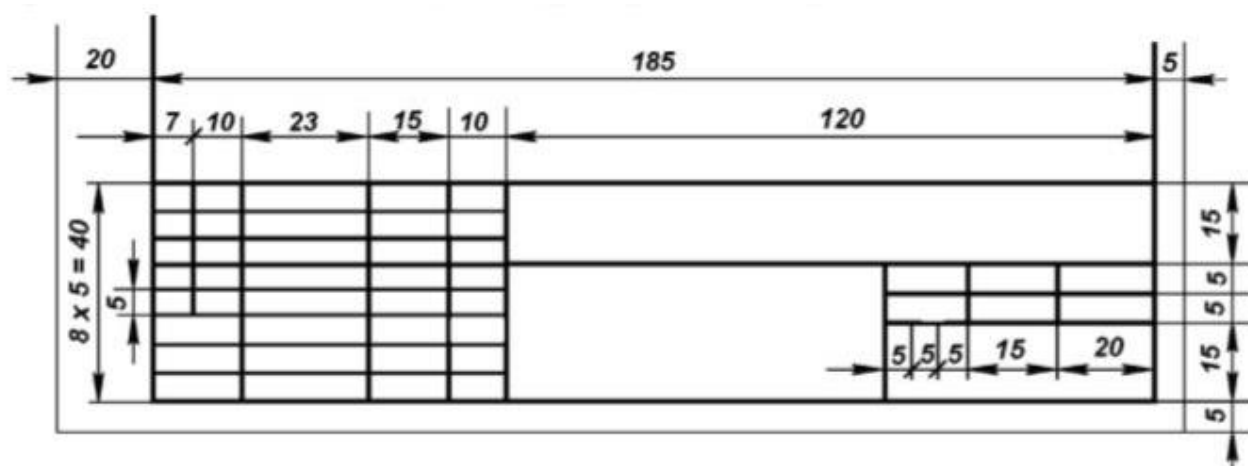
Выполнил: Иванов И.И.
группа: КТМ-б-о-24-1
Проверил: к.т.н., доцент
Терещенко В.Г.

Ставрополь, 2026 г.

Приложение Б – Расположение рамки и основной надписи на листах текстовой части расчетно-графической работы по ГОСТ 2.104-2006. Формат А4 (297×210 мм) <https://meganorm.ru/Data2/1/4293850/4293850184.pdf> Форма 2а



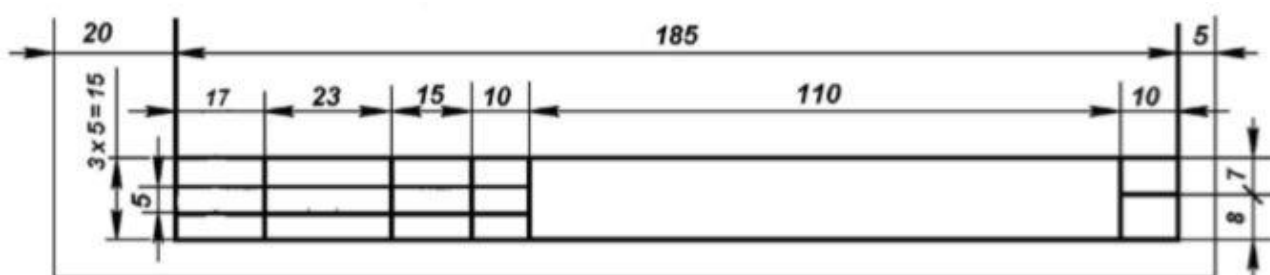
Приложение В – Основная надпись для первого листа расчетно-графической работы <https://meganorm.ru/Data2/1/4293850/4293850184.pdf>
Форма 2



Приложение Г – Пример заполнения основной надписи для первого листа расчетно-графической работы

					РГР в 17			
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Расчётно-графическая работа по механике в машиностроении	Лист	Лист	Листов
Разраб.	Петров И.И.					У	1	11
Проб.	Терещенко В.Г.							
Н.контр.								
Утв.								
						СКФУ, КТМ-8-0-24-1		

Приложение Д – Основная надпись для второго и последующих листов расчетно-графической работы



Приложение Е – Пример заполнения основной надписи для второго и последующих

					<i>РГР в 17</i>			Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата				2

Контрольные вопросы:

1. Какое напряжённое состояние называют упрощённым плоским?
2. Как определяется эквивалентное напряжение при упрощённом плоском напряжённом состоянии по гипотезе наибольших касательных напряжений (третьей теории прочности)?
3. Как определяется эквивалентное напряжение при упрощённом плоском напряжённом состоянии по гипотезе удельной потенциальной энергии изменения формы (V теории прочности)?
4. Какое сечение является опасным в условиях совместного действия изгиба и кручения?

5. Какие точки круглого сечения вала являются опасными?
6. Что называют эквивалентным моментом?
7. Какие эпюры необходимо построить для расчёта вала на совместное действие изгиба и кручения?
8. Запишите для пластичного материала условие прочности при изгибе с кручением.

Список литературы

1. Степин, П. А. Сопротивление материалов : учебник для вузов / П.А. Степин. – 12-е изд., стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2012. – 319, [1] с. : ил., портр. ; 22. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – Библиогр.: с. 309-310. – ISBN 978-5-8114-1038-5
2. Ицкович, Г. М. Сопротивление материалов : учебник для студентов машиностроит. техникумов / Г. М. Ицкович. – Изд. 9-е, стер. – М. : Высшая школа, 2001. – 368 с. : ил. – Гриф: Доп. МО. – Библиогр.: с. 363