

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по организации самостоятельной работы обучающихся
по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки /
специальности

13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
Направленность (профиль) Электроснабжение

Ставрополь 2026

Оглавление

Введение.....	3
Общая характеристика самостоятельной работы	5
План-график выполнения самостоятельной работы.....	8
Методические рекомендации по изучению теоретического материала	27
Методические указания по видам работ, предусмотренных рабочей программой дисциплины	34
Методические указания по подготовке к экзамену	36
Список рекомендуемой литературы.....	38

Введение

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования – «подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности».

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за

стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:

- изучение и систематизацию официальных государственных документов – законов, постановлений, указов, нормативно-инструкционных и справочных материалов с использованием информационно-поисковых систем «Консультант-плюс», «Гарант», глобальной сети «Интернет»;
- изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;
- подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ;
- участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.

Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.

Общая характеристика самостоятельной работы

Цели и основные задачи СРС

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой специалиста и бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных

занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

Виды самостоятельной работы

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации, содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.).

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателей являются:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание рефератов;
- подготовка к семинарам и лабораторным работам, их оформление;
- составление аннотированного списка статей из соответствующих журналов по отраслям знаний (педагогических, психологических, методических и др.);
- подготовка рецензий на статью, пособие;
- выполнение микроисследований;
- подготовка практических разработок;

- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;

- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов.

(В зависимости от особенностей факультета перечисленные виды работ могут быть расширены, заменены на специфические).

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

- текущие консультации;
- коллоквиум как форма контроля освоения теоретического содержания дисциплин: (в часы консультаций, предусмотренных учебным планом);

- прием и разбор домашних заданий (в часы практических занятий);
- прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р);
- выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин (руководство, консультирование и защита курсовых работ (в часы, предусмотренные учебным планом);

- выполнение учебно-исследовательской работы (руководство, консультирование и защита УИРС);

- прохождение и оформление результатов практик (руководство и оценка уровня сформированности профессиональных умений и навыков);

- выполнение выпускной квалификационной работы (руководство, консультирование и защита выпускных квалификационных работ) и др.

План-график выполнения самостоятельной работы
Технологическая карта самостоятельной работы обучающегося

Коды реализованных компетенций	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
1 семестр					
ОПК-3	Самостоятельное изучение литературы по основам линейной алгебры и аналитической геометрии	Собеседование	27		27
	Подготовка к практическим занятиям	Собеседование	27		27
	Подготовка к экзамену	Вопросы к экзамену	40,5		40,5
Итого за 1 семестр			94,5		94,5
2 семестр					
ОПК-3	Самостоятельное изучение литературы по основам интегрального исчисления функции одной переменной, интегрального исчисления функции многих переменных, дифференциальным уравнениям.	Собеседование	17,25		17,25
	Подготовка к практическим занятиям	Собеседование	18		18
	Подготовка к экзамену	Вопросы к экзамену	33,75		33,75
Итого за 2 семестр			69		69
Итого			163,5		163,5

Организация СРС

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов

на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Организацию самостоятельной работы студентов обеспечивают: факультет, кафедра, учебный и методический отделы, преподаватель, библиотека, ТСО, ИВТ, издательство и др.

Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя студент должен:

- освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем в соответствии с Государственными образовательными стандартами высшего образования (ФГОС ВО) по данной дисциплине.
- планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем.

- самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя.

- выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

студент может:

сверх предложенного преподавателем (при обосновании и согласовании с ним) и минимума обязательного содержания, определяемого ФГОС ВО по данной дисциплине:

- самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;

- предлагать дополнительные темы и вопросы для самостоятельной проработки;

- в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;

- предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;

- использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;

- использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего специалиста, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу

по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий.

Общие рекомендации по организации самостоятельной работы

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

- а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;
- б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение – это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое

эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним.

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков – важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность – способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;

- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;
- привычная последовательность и систематичность деятельности;
- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является *утреннее время* (с 8 до 14 часов), причем максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1 – 1,5 часа нужны перерывы по 10 – 15 мин, через 3 – 4 часа работы отдых должен быть продолжительным – около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Физически здоровый молодой человек, обладающий хорошей подготовкой и нормальными способностями, должен, будучи студентом, отдавать *учению 9 – 10 часов в день* (из них 6 часов в вузе и 3 – 4 часа дома). Любой предмет нельзя изучить за несколько дней перед экзаменом. Если студент в году работает систематически, то он быстро все вспомнит, восстановит забытое. Если же подготовка шла аврально, то у студента не будет даже общего представления о предмете, он забудет все сданное.

Следует взять за правило: *учиться ежедневно, начиная с первого дня семестра.*

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр.

Ритм в работе – это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы – это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее

содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут – работа, 5 – 10 минут – перерыв; после 3 часов работы перерыв – 20 – 25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической

культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

***Самостоятельная работа студента – необходимое звено становления
исследователя и специалиста***

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не только к моральным, нравственным свойствам человека, но и в особенности, постоянно возрастающие требования в области образования – обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной мыслью и языком науки является необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для реализации этой задачи. Ибо во время учебы в вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этом пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения

(лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контролирования за их деятельностью. Отметим, что нельзя ограничиваться только приобретением знаний предусмотренных программой изучаемой дисциплины, надо постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т.е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность методов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать

его, чтобы изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебы с будущей профессиональной деятельности.

№ п/п	Темы для самостоятельного изучения	Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
		Основная	Дополни- тельная	Методи- ческая	Интернет- ресурсы
	Раздел 1. Элементы линейной алгебры	1,2	1,3		
1.	Тема 1. Матрицы и определители. (с применением дистанционных образовательных технологий)	1,2	1,3		
2.	Тема 2. Системы линейных	1,2	1,3		

	алгебраических уравнений. (с применением дистанционных образовательных технологий)				
	Раздел 2. Элементы векторной алгебры	1,2	1,3		
3.	Тема 3. Векторы.	1,2	1,3		
	Раздел 3. Аналитическая геометрия	1,2	1,3		
4.	Тема 4. Аналитическая геометрия на плоскости. (с применением дистанционных образовательных технологий)	1,2	1,3		
5.	Тема 5. Аналитическая геометрия в пространстве. (с применением дистанционных образовательных технологий)	1,2	1,3		
	Раздел 4. Основы математического анализа	1,2	1,3		
6.	Тема 6. Введение в математический анализ.	1,2	1,3		
7.	Тема 7. Производная и дифференциал функции.	1,2	1,3		
8.	Тема 8. Применение производных к исследованию свойств функции	1,2	1,3		
9.	Тема 9. Геометрические приложения дифференциального исчисления	1,2	1,3		
	Раздел 6. Функция нескольких переменных.	1,2	1,3		
10.	Тема 10. Функция нескольких переменных. Предел функции. Непрерывные функции.	1,2	1,3		
11.	Тема 11. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных	1,2	1,3		
	Раздел 6. Неопределенный интеграл	1,2	1,3		
12.	Тема 12. Неопределенный интеграл и его свойства. Основные методы интегрирования. (с применением дистанционных образовательных технологий)	1,2	1,3		
13.	Тема 13. Интегрирование рациональных функций. (с применением дистанционных образовательных технологий)	1,2	1,3		
14.	Тема 14. Интегрирование тригонометрических функций. (с применением дистанционных образовательных технологий)	1,2	1,3		
15.	Тема 15. Интегрирование иррациональных функций. (с применением дистанционных образовательных технологий)	1,2	1,3		

	образовательных технологий)				
	Раздел 8. Определенный интеграл	1,2	1,3		
16.	Тема 16. Определенный интеграл и методы его вычисления	1,2	1,3		
17.	Тема 17. Несобственные интегралы	1,2	1,3		
18.	Тема 18. Приложения определенного интеграла	1,2	1,3		

Вопросы к экзамену (1 семестр)

Знать

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Определители, их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Различные способы вычисления определителей. Примеры.
2. Матрицы, основные определения, действия над матрицами.
3. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров.
4. Системы линейных алгебраических уравнений, теорема Кронекера - Капелли.
5. Решение систем линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера.
6. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
7. Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы.
8. Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений.

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

9. Векторы, основные определения, понятия, действия над ними.
10. Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме.
11. Коллинеарность и компланарность векторов.
12. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов, определения, свойства, геометрический смысл векторного и скалярного произведений.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

13. Уравнения прямой на плоскости: с угловым коэффициентом; через две точки; в отрезках, общее уравнение.
14. Уравнение плоскости в векторной и координатной формах.
15. Уравнение плоскости и прямой в пространстве.
16. Расстояние от точки до плоскости.
17. Условие параллельности и перпендикулярности векторов.
18. Канонические уравнения кривых второго порядка: формулы, определения, чертеж.
19. Канонические уравнения поверхностей второго порядка: формулы, чертеж.

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1. Предел числовой последовательности.
2. Предел функции в точке и на бесконечности, его геометрическая интерпретация, действия над пределами.
3. Односторонние пределы.
4. Основные теоремы о пределах. Признаки существования пределов.
5. Первый и второй замечательные пределы.
6. Бесконечно большие функции и их свойства.

7. Бесконечно малые величины, их свойства, эквивалентность.
8. Раскрытие неопределенностей.
9. Непрерывность функции в точке, на интервале и на отрезке. Свойства.
10. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Формулировка теоремы Коши и ее геометрический смысл.
11. Точки разрыва, их классификация.
12. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Формулировка теоремы Коши и ее геометрический смысл.
13. Производная функции, ее геометрический и механический смысл.
14. Правила дифференцирования.
15. Производные основных элементарных функций. Таблица производных.
16. Производные сложной и обратной функций
17. Дифференциал, определение, геометрический смысл.
18. Производные и дифференциалы второго порядка. Определения, вычисление.
19. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.
20. Применение производных к исследованию функций.
21. Основные теоремы дифференциального исчисления.
22. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Формула Тейлора.
23. Экстремум функции, необходимое и достаточные условия экстремума.
24. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
25. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.
26. Асимптоты графика функции.
27. Касательная и нормаль к плоской кривой.

Уметь

1. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ методом разложения по элементам какой-либо строки или столбца.

2. Найти обратную матрицу A^{-1} . $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти произведение $A \times B$.

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Найти произведение $A \times B$.

5. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

6. Решить систему линейных уравнений матричным способом

$$\begin{cases} 4x + y + z = 5 \\ 6x + 3y + 4z = 1 \\ 7x + 2y + 5z = 2 \end{cases}$$

7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, 5)$ параллельно

прямой $3x - 4y + 15 = 0$.

8. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат, параллельно прямой, пересекающей ось OX в точке $(2, 0)$ и ось OY в точке $(0, 6)$.

9. Составить уравнение прямой “в отрезках” и построить ее:
 $2x + 3y - 6 = 0$.

10. Составить уравнение прямой “в отрезках” и построить ее:
 $4x - 3y + 24 = 0$.

11. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x - 4y - 12 = 0$ от координатного угла.

12. Найти угол между прямыми $3x = 4y - 7 = 0$ и $4x - 3y + 8 = 0$.

13. Найти $A+B$, AB , $A \setminus B$, $B \setminus A$, если

$$A = \{x \in R / x^2 + x - 20 = 0\} \quad B = \{x \in R / x^2 - 7x + 12 = 0\}$$

14. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$.

15. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}$.

16. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$.

17. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 10}$.

18. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$.

19. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$.

20. Найти производную функции: $y = x^3 \cos x$.

21. Найти производную функции: $y = \ln(x^3 + 7x + 2)$.

22. Вычислить дифференциал функции: $y = \sqrt{1+x^2}$.

23. Вычислить дифференциал функции: $y = \sin^2 t$.

- Владеть
1. Методами математических операций с матрицами, вычисления их ранга, нахождения обратных матриц и вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.
 2. Основными методами решения систем линейных алгебраических уравнений.
 3. Принципами составления и описания уравнений линий на плоскости.
 4. Основными понятиями теории множеств и ее применением для анализа, обработки и представления научной и деловой информации.
 5. Способами вычисления пределов функций в точке и на бесконечности.
 6. Основными понятиями дифференциального исчисления.

Вопросы к экзамену (2 семестр)

Знать

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Функция нескольких переменных (ФНП). Область определения. Предел и непрерывность ФНП. Примеры.
2. Частные производные ФНП. Пример.
3. Полный дифференциал ФНП. Пример.
4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
5. Производные и дифференциалы высших порядков ФНП. Примеры.
6. Производная сложной функции (случай нескольких независимых переменных). Примеры.
7. Производная функции двух переменных, заданной в неявном виде. Пример.
8. Экстремум ФНП. Необходимое и достаточное условия экстремума ФНП. Пример.
9. Условный экстремум ФНП. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

10. Первообразная функции, неопределенный интеграл и его свойства.
11. Таблица интегралов.
12. Методы вычисления неопределенного интеграла (непосредственное интегрирование, подстановкой, по частям).
13. Интегрирование рациональных дробей.
14. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.
15. Универсальная тригонометрическая подстановка.
16. Интегрирование иррациональностей.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

17. Определенный интеграл как предел интегральных сумм.
18. Формула Ньютона-Лейбница. Свойства определенного интеграла
19. Методы вычислений определенного интеграла (непосредственное, подстановкой, по частям).
20. Приложения определенного интеграла: Вычисление площади плоской фигуры, объема тела вращения, длины кривой.
21. Несобственные интегралы.

Владеет:

1. Основными методами интегрального исчисления функции одной переменной.
2. Основными методами дифференциального исчисления функции многих переменных.

Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы.

С первых же сентябрьских дней на студента обрушивается громадный объем информации, которую необходимо усвоить. Нужный материал содержится не только в лекциях (запомнить его – это только малая часть задачи), но и в учебниках, книгах, статьях. Порой возникает необходимость привлекать информационные ресурсы Интернет.

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно – выучу!»), а когда приходит пора экзаменов, материала, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться в оставшийся промежуток времени.

Работа с книгой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой – это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на

бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Различают два вида чтения; первичное и вторичное. *Первичное* – это внимательное, неторопливое чтение, при котором можно остановиться на трудных местах. После него не должно остаться ни одного непонятого олова. Содержание не всегда может быть понятно после первичного чтения.

Задача *вторичного* чтения – полное усвоение смысла целого (по счету это чтение может быть и не вторым, а третьим или четвертым).

Правила самостоятельной работы с литературой

Как уже отмечалось, самостоятельная работа с учебниками и книгами (а также самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях) – это важнейшее условие

формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

- Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать» (Селье, 1987. С. 325).

- Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

- Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).

- Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.

- При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...

- Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

- Если книга – Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора (это очень

хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).

- Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать), и это может занять немалое время (у кого-то – до нескольких недель и даже месяцев); опыт показывает, что после этого студент каким-то «чудом» начинает буквально заглатывать книги и чуть ли не видеть «сквозь обложку», стоящая это работа или нет...

- «Либо читайте, либо перелистывайте материал, но не пытайтесь читать быстро... Если текст меня интересует, то чтение, размышление и даже фантазирование по этому поводу сливаются в единый процесс, в то время как вынужденное скорочтение не только не способствует качеству чтения, но и не приносит чувства удовлетворения, которое мы получаем, размышляя о прочитанном», – советует Г. Селье (Селье, 1987. – С. 325-326).

- Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент (или молодой ученый) будет как бы искать аргументы «за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Проблема лишь в том, как найти «свою» идею...

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того насколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать

материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют *четыре основные установки в чтении научного текста*:

1. информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)
2. усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)
3. аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)
4. творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких *видов чтения*:

1. библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
2. просмотрное – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
3. ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;

4. изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

5. аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;

3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;

4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;

5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие

виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта.
2. Выделите главное, составьте план.
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора.
4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.
5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

**Методические указания по видам работ, предусмотренных рабочей
программой дисциплины**

Практические занятия

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала – умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

Методические указания по подготовке к экзамену

Подготовка к экзаменам и зачетам

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается экзаменом. Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

Экзаменационная сессия – это серия экзаменов, установленных учебным планом. Между экзаменами интервал 3 – 4 дня. Не следует думать, что 3-4 дня достаточно для успешной подготовки к экзаменам. В эти 3 – 4 дня нужно систематизировать уже имеющиеся знания. На консультации перед экзаменом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к экзаменам те же, что и при занятиях в течение семестра, но соблюдаться они должны более строго. Во-первых, очень важно соблюдение режима дня; сон не менее 8 часов в сутки, занятия заканчиваются не позднее, чем за 2 – 3 часа до сна. Оптимальное время занятий, особенно по математике – утренние и дневные часы. В перерывах между занятиями рекомендуются прогулки на свежем воздухе, неусттомительные занятия спортом. Во-вторых, наличие хороших собственных конспектов лекций. Даже в том случае, если была пропущена какая-либо лекция, необходимо во время ее восстановить (переписать ее на кафедре), обдумать, снять возникшие вопросы для того, чтобы запоминание материала было осознанным. В-третьих, при подготовке к экзаменам у студента должен быть хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине,

отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Правила подготовки к зачетам и экзаменам:

- Лучше сразу сориентироваться во всем материале и обязательно расположить весь материал согласно экзаменационным вопросам (или вопросам, обсуждаемым на семинарах), эта работа может занять много времени, но все остальное – это уже технические детали (главное – это ориентировка в материале!).

- Сама подготовка связана не только с «запоминанием». Подготовка также предполагает и переосмысление материала, и даже рассмотрение альтернативных идей.

- Готовить «шпаргалки» полезно, но пользоваться ими рискованно. Главный смысл подготовки «шпаргалок» – это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету, что само по себе прекрасно – это очень сложная и важная для студента работа, более сложная и важная, чем простое поглощение массы учебной информации. Если студент самостоятельно подготовил такие «шпаргалки», то, скорее всего, он и экзамены сдавать будет более уверенно, так как у него уже сформирована общая ориентировка в сложном материале.

- Как это ни парадоксально, но использование «шпаргалок» часто позволяет отвечающему студенту лучше демонстрировать свои познания (точнее – ориентировку в знаниях, что намного важнее знания «запомненного» и «тут же забытого» после сдачи экзамена).

- Сначала студент должен продемонстрировать, что он «усвоил» все, что требуется по программе обучения (или по программе данного преподавателя), и лишь после этого он вправе высказать иные, желательно аргументированные точки зрения.

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы:

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 608 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: . 599-603. - ISBN 978-5-8112-6472-8
2. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-099894-4. - ISBN 978-5-94666-805-7

Перечень дополнительной литературы:

1. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами : 1 курс : [линейная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа, комплексные числа] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. - 9-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2013. - 576 с. : ил. - ISBN 978-5-8112-5166-7
2. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Федина. - 8-е изд. - Москва : АЙРИС ПРЕСС, 2013. - 591 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: с. 589-590. - ISBN 978-5-8112-5142-1
3. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО. - ISBN 978-5-9916-3467-0

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «МАТЕМАТИКА» для студентов направления подготовки /
специальности
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
Направленность (профиль) Электроэнергетические системы и сети

Ставрополь, 2025

ВВЕДЕНИЕ

Цель и задачи освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Математика» является формирование у студентов компетенций (ОПК-3) будущего бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Задачи освоения дисциплины:

- овладение студентами основ математического аппарата, необходимого для приобретения ими соответствующих профессиональных компетенций;
- обеспечение возможности их участия в проведении научных исследований по определению эффективности различных видов деятельности;
- формирование умений осуществлять научный анализ, обобщение и оформление результатов исследований;
- приобретение навыков обработки результатов исследований с использованием информационных технологий для планирования и коррекции процессов профессиональной деятельности и решения других практических задач.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Процесс изучения дисциплины студентами направлен на формирование следующих компетенций – ОПК – 3 Способен применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач

Знать: фундаментальные основы высшей математики, включая алгебру, геометрию, математический анализ.

Уметь: самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе, расширять свои математические познания, используя фундаментальные основы высшей математики, идентифицировать профильные задачи, представлять поставленные задачи в виде конкретных заданий, выбирать рациональные способы решения задачи профессиональной деятельности.

Владеть: первичными навыками и основными методами математического анализа и математического моделирования для решения задач в профессиональной деятельности.

Практическое занятие № 1

Тема занятия «Действия над матрицами. Вычисление определителей»

Цель занятия: Введение основных понятий линейной алгебры, формирование умений выполнять действия над матрицами и вычислять определители.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-3.

При формировании названных компетенций на занятии студент должен знать основные понятия линейной алгебры, уметь вычислять определители, выполнять действия над матрицами, применять решение этих задач при решении задач математического анализа и задач предметной области.

Теоретическая часть.

Матрицей называется прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов, составленная из чисел или каких-либо других объектов. Матрицы обозначаются

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

или коротко

$$A = (a_{ij})_{m,n}. \quad (1')$$

Отдельные члены матрицы называются её **элементами**, они обозначаются a_{ij} , где i - номер строки, j - номер столбца ($i=1,2,\dots, m$; $j=1,2,\dots, n$), в которых находится этот элемент. Каждая матрица имеет определенные размеры, т.е. количество строк и столбцов матрицы. Если $m = n$, то матрица называется **квадратной**, тогда говорят о её **порядке**. Матрица, у которой всего один столбец (строка), называется - **матрицей-столбцом (матрицей-строкой)**. Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется **нулевой** и обозначается Θ . Квадратная матрица, у которой равны нулю все элементы, кроме стоящих на главной диагонали, называется **диагональной**. Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, называется **единичной** и обозначается E . Если в матрице A поменять местами строки со столбцами, то получим матрицу A^T , которая называется **транспонированной**. Матрица, совпадающая со своей транспонированной, называется **симметрической**.

Две матрицы $A = (a_{ij})_{m,n}$ и $B = (b_{ij})_{m,n}$ одинакового размера **равны**, если равны их соответствующие элементы, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Рассмотрим операции над матрицами. Многие арифметические операции с матрицами логически вытекают из аналогичных операций со скалярными величинами.

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})_{m,n}$ и $B = (b_{ij})_{m,n}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{m,n}$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B , т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Замечание. Складывать можно лишь те матрицы, которые имеют одинаковые размеры.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m,n}$ **на число** k называется такая матрица $C = (c_{ij})_{m,n}$, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число k , т.е. $c_{ij} = ka_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m,n}$ **на матрицу** $B = (b_{ij})_{n,s}$ называется такая матрица $C = (c_{ij})_{m,s}$, у которой каждый элемент c_{ij} равен сумме парных произведений элементов i -той строки матрицы A на соответствующие элементы j -того столбца матрицы B , т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Замечание 1. Произведение матриц $A \cdot B$ существует только в том случае, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

Замечание 2. Произведение матриц не коммутативно.

Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определителем второго порядка, соответствующим матрице A , называется число, равное $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Определитель обозначают

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (2)$$

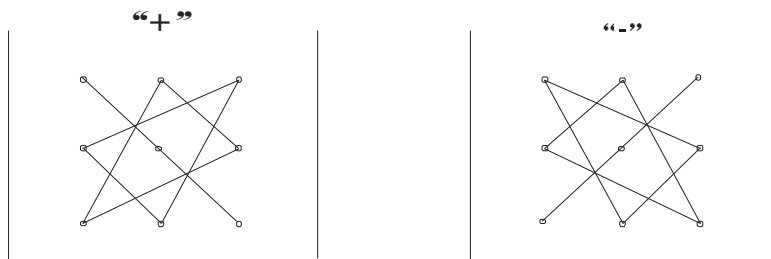
Элементы матрицы A называются **элементами определителя** $|A|$, элементы a_{11}, a_{22} образуют главную диагональ, а элементы a_{21}, a_{12} - побочную.

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка $A = (a_{ij})_{3,3}$. **Определителем третьего порядка**, соответствующим матрице A , называется число, равное

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ и обозначаемое символом $|\mathcal{A}|$, т.е.

$$|\mathcal{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (3)$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства (3) брать со знаком «+», какие - со знаком «минус», полезно правило, называемое **правилом треугольника** (рис. 11.2).



порядка.

Определителем третьего порядка называется число $|\mathcal{A}|$, равное алгебраической сумме всевозможных произведений вида $(-1)^{t(J)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$, где $J = (j_1, j_2, j_3)$ - всевозможные перестановки основной перестановки 1, 2, 3, т.е.

$$|\mathcal{A}| = \sum_J (-1)^{t(J)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

Данное определение можно распространить и на случай определителя n -го порядка.

Определителем n -го порядка называется число

$$|\mathcal{A}| = \sum_J (-1)^{t(J)} a_{1j_1} \dots a_{nj_n},$$

равное алгебраической сумме всевозможных произведений элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и столбца, причем знак каждого произведения определяется числом $t(J)$, равным числу транспозиций при переходе от основной перестановки 1, 2, ..., n к перестановке $J = (j_1, j_2, \dots, j_n)$. Произведение

$(-1)^{t(J)} a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$ называется **членом определителя**.

Укажем **основные свойства определителей**, которые могут быть доказаны исходя из определения определителя.

1⁰. При транспонировании определитель не меняет своего значения.

2⁰. Если все элементы какой-либо строки определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

3⁰. Если в определителе поменять местами две какие-либо строки, то абсолютная величина определителя не изменится, а знак изменится на противоположный.

4⁰. Определитель, содержащий две равные строки, равен нулю.

5⁰. Если все элементы какой-нибудь строки определителя умножить на число k , то значение определителя изменится в k раз.

6⁰. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

7⁰. Если одна из строк определителя есть линейная комбинация других строк, то определитель равен нулю.

8⁰. Определитель не меняет своего значения, если к элементам одной из его строк прибавить линейную комбинацию других строк.

Замечание. Исходя из свойства 1⁰ свойства 2⁰-8⁰ остаются справедливы и для столбцов.

Отмеченные свойства определителей используются при их вычислении.

Вопросы и задания.

1. Дайте определение матрицы, элементов матрицы; расскажите, как матрицы обозначаются, приведите примеры.
2. Введите понятия квадратной, диагональной, единичной, нулевой, ступенчатой, транспонированной, симметрической матриц, матрицы-строки и матрицы-столбца. Приведите примеры.
3. Когда говорят о размерах, а когда о размерности матрицы? Приведите примеры и введите соответствующие обозначения.
4. Дайте определение суммы двух матриц. Какие матрицы можно складывать? Приведите примеры.
5. Как умножить матрицу на число? Приведите пример.
6. Для каких двух матриц можно определить операцию произведения? Введите эту операцию, проиллюстрируйте ее на примере. Коммутативно ли умножение двух матриц?
7. Приведите пример использования матриц в области Вашей предметной деятельности.

8. Какие задачи приводят к понятиям определителей второго и третьего порядков. Как обозначаются определители?
9. Расскажите о правилах вычисления определителей второго и третьего порядков. Как называют правило вычисления определителей третьего порядков?
10. Введите понятия члена определителя, перестановки, транспозиции. Как определить четность перестановки?
11. Дайте определение определителя n -го порядка? Докажите, что правило «треугольника» является частным случаем этого определения.
12. Сформулируйте основные свойства определителей.
13. Введите понятия минора и алгебраического дополнения элемента определителя.
14. Сформулируйте теорему о вычислении определителя и следствие из нее.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Выполните действия над матрицами:

$$а) 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T ;$$

$$б) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Найдите произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют:

$$а) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \end{pmatrix};$$

$$б) A = (1 \ 2 \ 4 \ 5), \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите определители второго порядка:

$$а) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; б) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; в) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}; г) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}; д) \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}.$$

4. По правилу «треугольника» вычислите определители третьего порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 6 \end{vmatrix}; \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & -7 \end{vmatrix}; \text{в) } \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

5. Найдите сумму корней уравнения: $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 0 & 3 & x+1 \\ 4 & -2 & x \end{vmatrix} = 35.$

6. Найдите определители, используя их свойства:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & -3 \\ 1 & -12 & 15 \end{vmatrix}; \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}; \text{в) } \begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, разложив его

а) по элементам первой строки;

б) по элементам третьего столбца

8. Вычислите определитель, предварительно получив максимально возможное число нулей в каком-либо столбце или какой-либо строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная литература:

3. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 608 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: . 599-603. - ISBN 978-5-8112-6472-8

4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-099894-4. - ISBN 978-5-94666-805-7

Дополнительной литературы:

4. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами : 1 курс : [линейная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа,

комплексные числа] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федина, Ю. А. Шевченко. - 9-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2013. - 576 с. : ил. - ISBN 978-5-8112-5166-7

5. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Фебина. - 8-е изд. - Москва : АЙРИС ПРЕСС, 2013. - 591 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: с. 589-590. - ISBN 978-5-8112-5142-1

6. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО. - ISBN 978-5-9916-3467-0

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
2. Методические указания для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.math.ru> (Математика и образование)
- <http://mccme.ru> (Московский центр непрерывного математического образования)
- <http://www.allmath.ru> (Allmath.ru – вся математика в одном месте)
- <http://eqworld.ipmnet.ru> (EqWorld – Мир математических уравнений)
- <http://www.exponenta.ru> (Exponenta.ru – образовательный математический сайт)
- <http://www.neive.by.ru> (Геометрический портал)
- <http://graphfunk.narod.ru> (Графики функций)
- <http://tasks.ceemat.ru> (Задачник для подготовки к олимпиадам по математике)
- <http://www.mathem.h1.ru> (Математика on-line справочная информация в помощь студенту)
- <http://Math-Net.ru/> (Общероссийский математический портал)

Практическое занятие № 2

Тема занятия «Системы линейных уравнений. Методы решения»

Цель занятия: Сформировать умения и навыки решения систем линейных уравнений, овладение критериями исследования систем линейных уравнений.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-3.

Формирование на занятии у будущих специалистов этих компетенций предполагает обучение студентов

- сформулировать гипотезу и проверить ее в дальнейшем;
- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- применять основные понятия, идеи и методы фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач;
- планировать самостоятельную работу;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат.

Теоретическая часть

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называются соотношения вида

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $a_{ij} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ - коэффициенты системы, $b_i (i = \overline{1, m})$ - свободные члены, $x_j (j = \overline{1, n})$ - неизвестные системы.

Система (13.1) называется однородной, если все свободные члены $b_i = 0 (i = \overline{1, m})$.

Система (1) называется неоднородной, если хотя бы один из свободных членов $b_i \neq 0$.

Решением системы называется совокупность чисел $x_1 = \varphi_1, x_2 = \varphi_2, \dots, x_n = \varphi_n$, при подстановке которых в уравнения системы вместо соответствующих неизвестных каждое уравнение системы превращается в тождество. Система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*, или *противоречивой*. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение. Если совместная система имеет более одного решения, то она называется *неопределенной*. Однородная система всегда совместна, так как имеет, по крайней мере, нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Выражение для неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, из которого можно получить любое конкретное решение системы, называют ее *общим*

решением, а любое конкретное решение системы – ее **частным решением**. Две системы с одними и теми же неизвестными **эквивалентны (равносильны)**, если каждое решение одной из них является решением другой или обе системы несовместны.

Рассмотрим методы решения систем линейных уравнений.

Одним из основных методов решения систем линейных уравнений является **метод Гаусса**, или **метод последовательного** исключения неизвестных. Суть этого метода состоит в сведении системы линейных уравнений к ступенчатому виду. При этом над уравнениями приходится проводить следующие **элементарные преобразования**:

1. Перестановка уравнений системы.
2. Прибавление к одному уравнению другого уравнения.
3. Умножение обеих частей уравнения на число, отличное от нуля.
4. Прибавление к одному уравнению другого, умноженного на некоторое число, отличное от нуля.
5. Вычеркивание уравнений вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$, т.е. тождеств $0 = 0$.

В результате элементарных преобразований система преобразуется в эквивалентную ей систему.

Рассмотрим **алгоритм метода Гаусса**. Пусть дана система вида (13.1).

Предположим, что в этой системе коэффициент $a_{11} \neq 0$. Заметим, что этого всегда можно достигнуть перестановкой уравнений системы. Для исключения неизвестной x_1 во всех уравнениях, начиная со второго, умножим первое уравнение системы последовательно на

числа $\begin{pmatrix} -\frac{a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{a_{31}}{a_{11}} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -\frac{a_{m1}}{a_{11}} \end{pmatrix}$ и добавим соответственно ко 2-му, 3-му, ..., m -му

уравнению системы.

В результате система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Продолжая этот процесс дальше, исключим неизвестную x_2 из всех уравнений,

начиная с третьего. Для этого умножим второе уравнение на числа $\begin{pmatrix} -\frac{a'_{32}}{a'_{22}} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -\frac{a'_{m2}}{a'_{22}} \end{pmatrix}$ и

добавим к 3-му, ..., к m -му уравнению системы. Следующие шаги метода Гаусса

осуществляются аналогично. Если в результате преобразований получится тождественное уравнение, то вычеркнем его из системы. Если на некотором шаге метода Гаусса получается уравнение вида:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i, \quad b_i \neq 0, \quad (2)$$

тогда рассматриваемая система несовместна и дальнейшее ее решение прекращается. Если же уравнение вида (2) не встретится при выполнении элементарных преобразований, то не более чем через $(m-1)$ - шагов система (1) будет преобразована к ступенчатому виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2r}x_r + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{rr}x_r + \dots + a_{rn}x_n = b_r, \end{array} \right. \quad (3)$$

где $r \leq n$. Если $r = n$, то говорят, что система свелась к треугольному виду. В этом случае система имеет единственное решение, которое находим, решая систему снизу вверх.

Если $r < n$, то говорят, что система свелась к трапециидальному виду. В этом случае система является неопределенной. Для нахождения общего решения системы в этом случае выбирают r главных и $n-r$ свободных неизвестных. Например, неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$ принимают за главные, а неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ принимают за свободные. Переносим свободные неизвестные в правую часть уравнений и выражаем главные неизвестные через свободные. В результате получаем общее решение системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = f_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n), \\ x_2 = f_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n), \\ \dots \quad \dots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n). \end{array} \right. \quad (4)$$

Для получения частного решения системы необходимо будет в (4) придать свободным переменным конкретные значения.

Заметим, что так как в методе Гаусса все преобразования выполняются над коэффициентами при неизвестных уравнений и свободными членами, то на практике обычно этот метод применяют к матрице, составленной из коэффициентов при неизвестных и столбца свободных членов. Эту матрицу называют расширенной. С помощью элементарных преобразований эту матрицу сводят к ступенчатому виду. После чего по полученной матрице восстанавливают систему и применяют к ней все предыдущие рассуждения.

Замечание 1. При решении однородной системы линейных уравнений методом Гаусса на практике выписывают основную, а не расширенную матрицу системы. И сводят ее к ступенчатому виду.

Замечание 2. Метод Гаусса применим для любой системы линейных уравнений, в том числе и для системы, у которой число уравнений не равно числу неизвестных.

Выяснить вопрос о совместности системы и о числе ее решений помогает следующая теорема.

Теорема (Критерий совместности системы линейных уравнений). Система линейных уравнений (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы (матрицы A) равен рангу расширенной матрицы (матрицы B). В противном случае, т.е. если $\text{rang } A \neq \text{rang } B$, то система не совместна. Если $\text{rang } A = \text{rang } B = n$, где n - число неизвестных системы, то система определенная. Если $\text{rang } A = \text{rang } B < n$, то система неопределенная.

Применим эту теорему для рассмотренных в п.13.2 примеров.

Для примера 1. $\text{rang } A = \text{rang } B = 3$ и число неизвестных $n = 3$, т.е. система определенная.

Для примера 2. $\text{rang } A = 3, \text{rang } B = 4$, поэтому система несовместна.

Для примера 3. $\text{rang } A = \text{rang } B = 2$, число неизвестных $n = 3$, поэтому система является неопределенной.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим A - матрицу из коэффициентов при неизвестных, X - матрицу-столбец из неизвестных, B - матрицу-столбец свободных членов, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Несложно заметить, что тогда система (1) может быть записана в виде матричного уравнения

$$A \cdot X = B. \quad (2)$$

Умножим слева обе части уравнения (14.2) на матрицу, обратную матрице A , т.е. на A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B. \quad (3)$$

Учитывая, что $A^{-1} \cdot A = E$, $E \cdot X = X$, из (14.3) получаем формулу для решения системы в матричной форме:

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (4)$$

Замечание. Матричный метод решения систем линейных уравнений применим только тогда, когда число уравнений системы равно числу неизвестных и матрица A является невырожденной.

Рассмотрим еще один метод решения систем линейных уравнений – метод Крамера, основанный на следующей теореме.

Теорема (правило Крамера). Если в системе n линейных уравнений с n неизвестными (система вида (14.1)) определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных Δ отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где Δ_i – определитель, полученный из определителя Δ заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

Доказательство. Пусть в системе (14.1) определитель $\Delta \neq 0$. Обозначим $A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{ni}$ – алгебраические дополнения i -го столбца определителя Δ . Умножим 1-е уравнение системы на A_{1i} , 2-е – на A_{2i} , ..., n -е – на A_{ni} и сложим полученные уравнения. В результате получим

$$(a_{11}A_{1i} + a_{21}A_{2i} + \dots + a_{nn}A_{ni})x_1 + \dots + (a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \dots + a_{ni}A_{ni})x_i + \dots + (a_{1n}A_{1i} + a_{2n}A_{2i} + \dots + a_{nn}A_{ni})x_n = b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \dots + b_nA_{ni}. \quad (5)$$

Учитывая, что сумма произведений элементов строки (столбца) на их алгебраические дополнения есть определитель системы, а сумма произведений элементов строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю, получаем, что левая часть (14.6) равна $\Delta \cdot x_i$.

Несложно заметить, что правая часть (14.6) есть определитель Δ_i , раскрытый по элементам i -го столбца, т.е.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, (6) можно записать в виде:

$$\Delta \cdot x_i = \Delta_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Откуда при $\Delta \neq 0$ и получ

Вопросы и задания

1. Дайте определения системы линейных уравнений, однородной и неоднородной систем, решения системы.
2. Какая система называется совместной, а какая несовместной?
3. Дайте определение определенной и неопределенной систем.
4. Сформулируйте критерий совместности систем линейных уравнений.
5. Расскажите о методе Гаусса. Перечислите элементарные преобразования матрицы.
6. Когда, решая систему методом Гаусса, делаем вывод
 - о несовместности системы;
 - об определенности системы;
 - о неопределенности системы?
7. Как найти общее решение системы, приведенной к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса?
8. В чем особенность применения метода Гаусса при решении однородной системы?
9. Как записать систему линейных уравнений в матричной форме?
10. Вспомните условия существования обратной матрицы и методы ее нахождения.
11. Изложите матричный метод решения систем линейных уравнений. Какие системы можно решать этим методом.
12. Расскажите о методе Крамера решения систем линейных уравнений. Каковы границы его применения?
13. Какие выводы можно сделать о числе решений однородной системы линейных уравнений.
14. Сделайте сравнительный анализ рассмотренных методов решения систем линейных уравнений.

8. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Федина. - 8-е изд. - Москва : АЙРИС ПРЕСС, 2013. - 591 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: с. 589-590. - ISBN 978-5-8112-5142-1

9. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО. - ISBN 978-5-9916-3467-0

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
2. Методические указания для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.math.ru> (Математика и образование)
- <http://mccme.ru> (Московский центр непрерывного математического образования)
- <http://www.allmath.ru> (Allmath.ru – вся математика в одном месте)
- <http://eqworld.ipmnet.ru> (EqWorld – Мир математических уравнений)
- <http://www.exponenta.ru> (Exponenta.ru – образовательный математический сайт)
- <http://www.neive.by.ru> (Геометрический портал)
- <http://graphfunk.narod.ru> (Графики функций)
- <http://tasks.ceemat.ru> (Задачник для подготовки к олимпиадам по математике)
- <http://www.mathem.h1.ru> (Математика on-line справочная информация в помощь студенту)
- <http://Math-Net.ru/> (Общероссийский математический портал)

Практическое занятие № 3

Тема занятия «Скалярные и векторные величины»

Цель занятия: Введение основных понятий векторной алгебры, имеющих большое значение для механики, электротехники и других технических дисциплин.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-3

Формирование на занятии у будущих специалистов этих компетенций предполагает обучение студентов

- анализировать ситуации и делать выводы;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- применение основных понятий, идей и методов математики для решения базовых задач предметной области.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Линейные операции над векторами.
2. Скалярное произведение векторов.
3. Векторное произведение векторов.
4. Смешанное произведение векторов.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Решите предложенный вариант самостоятельной работы №1 по теме «Действия над матрицами. Вычисление определителей».

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие величины относятся к скалярным, а какие к векторным величинам? Приведите примеры.
2. Дайте определение вектора, модуля вектора. Как обозначают эти величины.
3. Введите понятие единичного вектора, нулевого вектора, коллинеарных, сонаправленных и противоположно направленных векторов, равных векторов, компланарных векторов.
4. Расскажите, какие операции над векторами относят к числу линейных операций.
5. Объясните правила построения суммы двух векторов (правило треугольника, правило параллелограмма), суммы конечного числа векторов (правило ломанной).
6. Дайте определение разности двух векторов и постройте разность двух векторов.
7. Как найти произведение вектора на действительное число?
8. Перечислите основные свойства линейных операций над векторами.
9. Введите понятие линейной комбинации системы векторов, линейно зависимой и линейно независимой системы векторов. Сколько векторов на плоскости и в пространстве могут быть линейно независимы?
10. Дайте определение базиса и ранга системы векторов, координат вектора.
11. Как определяются линейные операции над векторами в координатной форме?
12. Дайте определение скалярного произведения двух геометрических векторов и сформулируйте его основные свойства и геометрическую интерпретацию.
13. Как определить угол между векторами и длину вектора? Запишите формулы в координатной форме.
14. Расскажите о компланарных векторах и о направляющих косинусах.
15. Сформулируйте определение векторного произведения, расскажите о его геометрических приложениях. Перечислите основные свойства векторного произведения.
16. Дайте определение смешанного произведения векторов. Сформулируйте основные свойства смешанного произведения, расскажите о его геометрических приложениях

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Рекомендуется рассмотреть в [2] часть 1 разобранные задания 240, 241 на линейные действия над векторами, 257 - 259 на скалярное произведение и его приложения, 260 – 262 на векторное произведение и его приложения, 264 – 266 на смешанное произведение векторов и его приложения; в [3] часть 1, глава 1, §3 задание 7 на применение скалярного произведения в производственной сфере.

Задания практикума

1. Даны точки A и B . Найдите:
 - а) координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$;
 - б) длину вектора $\overrightarrow{AB}$;
 - в) направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{BA}$.
2. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями Oy и Oz углы β и $\gamma = 120^\circ$. Какой угол он составит с осью Ox ?
3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол β , причем $|\vec{a}| = 5$ и $|\vec{b}| = 8$. Определите $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.
4. В прямоугольнике $OACB$ M и N – середины сторон BC и AC . Разложите вектор $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{ON}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BM}$.
5. Определите угол между векторами $\vec{a} = (2; -4; 4)$ и $\overrightarrow{AC}$.
6. Даны векторы $\vec{a} = (4; -2; -4)$, $\vec{b} = (6; -3; 2)$.
Вычислите: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$; в) $(\vec{a} + \vec{b})^2$.
7. Дан вектор $\vec{a} = (-3; -4)$ и точка $A(1; 1)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если известно, что точка B принадлежит оси Oy и скалярное произведение $\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB} = -5$.
8. Даны векторы $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ и $\vec{b} = (1; 2; -1)$. Найдите:
 - а) $\vec{a} \times \vec{b}$; б) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$; в) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$
9. Постройте треугольник с вершинами A, B, C . Вычислите его площадь и высоту BD .
10. Найдите смешанное произведение векторов $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\vec{b}(1; 3; -1)$, $\vec{c}(1; 1; 4)$.
11. Найдите объем пирамиды с вершинами в точках $A, B, C, D(2; 3; 8)$ и вычислите ее высоту, опущенную на грань ABC .

Данные для заданий выберите из таблицы согласно своему варианту:

Вариант	$A(x_1; y_1; z_1)$	$B(x_2; y_2; z_2)$	$C(x_3; y_3; z_3)$	α
1	$(-1; 3; 2)$	$(1; 1; -5)$	$(-4; 2; 4)$	30°
2	$(-2; 3; 1)$	$(1; 2; 4)$	$(-4; 4; 5)$	45°
3	$(-3; 3; -5)$	$(1; 4; -2)$	$(-5; 1; 4)$	60°
4	$(-4; 3; 2)$	$(2; 1; 2)$	$(-5; 2; -3)$	120°

5	$(-5; 3; 1)$	$(2; 2; -5)$	$(-5; 4; -4)$	135^0
6	$(-1; 1; 5)$	$(2; 4; -3)$	$(1; 3; 1)$	150^0
7	$(-1; 2; -3)$	$(3; 1; 4)$	$(2; 3; -5)$	30^0
8	$(-1; 4; 1)$	$(3; 2; -1)$	$(3; 3; 7)$	45^0
9	$(-2; 1; -1)$	$(3; 4; -2)$	$(4; 3; -2)$	60^0
10	$(-2; 2; 4)$	$(4; 1; -2)$	$(5; 3; -6)$	120^0
11	$(-2; 4; 1)$	$(4; 2; -5)$	$(1; 1; -7)$	135^0
12	$(-3; 1; 1)$	$(4; 4; 2)$	$(1; 2; -6)$	150^0
13	$(-3; 2; 3)$	$(5; 1; -2)$	$(3; -2; 6)$	30^0
14	$(-3; 4; -2)$	$(5; 2; -3)$	$(3; -4; -5)$	45^0
15	$(-4; 1; 2)$	$(5; 4; -2)$	$(4; -1; -6)$	60^0
16	$(-4; 2; 4)$	$(1; -1; 3)$	$(-4; -2; -5)$	120^0
17	$(-4; 4; 5)$	$(1; -2; 7)$	$(-4; -4; 1)$	135^0
18	$(-5; 1; 4)$	$(1; -4; 2)$	$(-5; -1; 6)$	150^0
19	$(-5; 2; -3)$	$(2; -1; -2)$	$(-5; -2; 2)$	30^0
20	$(-5; 4; -4)$	$(2; -2; 3)$	$(-5; -4; 2)$	45^0
21	$(1; 3; 1)$	$(2; -4; -3)$	$(1; 1; -5)$	60^0
22	$(2; 3; -5)$	$(3; -1; 2)$	$(1; 2; 4)$	120^0
23	$(3; 3; 7)$	$(3; -2; 6)$	$(1; 4; -2)$	135^0
24	$(4; 3; -2)$	$(3; -4; -5)$	$(2; 1; 2)$	150^0
25	$(5; 3; -6)$	$(4; -1; -6)$	$(2; 2; -5)$	30^0
26	$(1; 1; -7)$	$(-4; -2; -5)$	$(2; 4; -3)$	45^0
27	$(1; 2; -6)$	$(-4; -4; 1)$	$(3; 1; 4)$	60^0
28	$(1; 4; 2)$	$(-5; -1; 6)$	$(-3; 4; -2)$	120^0
29	$(2; 1; -5)$	$(-5; -2; 2)$	$(-4; 1; 2)$	135^0
30	$(2; 2; -6)$	$(-5; -4; 2)$	$(-4; 2; 4)$	150^0

Задания для самостоятельной работы дома

1. Даны точки $A(3; -1; 2)$ и $B(-1; 2; 1)$. Найдите:

- а) координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$;
- б) длину вектора $\overrightarrow{AB}$;
- в) направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{BA}$.

2. Вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$.
Вычислите его координаты при условии, что $|\vec{a}| = 2$.
3. Даны: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Вычислите $|\vec{a} + \vec{b}|$.
4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 120^\circ$, причем $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определите $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.
5. На плоскости Oxy постройте векторы $\vec{OA} = \vec{a} = 2\vec{i}$, $\vec{OB} = \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ и $\vec{OC} = \vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$. Разложите вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
6. Определите, при каких значениях α и β векторы $\vec{a}(3; \alpha; -1)$ и $\vec{b}(4; -1; \beta)$ компланарны.
7. Определите угол между векторами $\vec{a} = (1; 2; 3)$ и $\vec{b} = (6; 4; -2)$.
8. Вычислите: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; в) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$.
9. Даны вектор $\vec{a}(2; -9; 1)$ и точка $A(3; 0; -1)$. Найдите длину вектора $\vec{AB}$, перпендикулярного вектору $\vec{a}$, если известно, что точка B принадлежит оси OZ .
10. Даны точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(3; 2; 1)$. Найдите:
а) $\vec{AB} \times \vec{BC}$; б) $(\vec{DC} - 2\vec{CA}) \times \vec{CB}$; в) $(\vec{BC} + 2\vec{CA}) \times (\vec{CB} - 2\vec{CA})$.
11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$.
12. Найдите смешанное произведение векторов $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, если $A(2; 2; 2)$, $B(4; 3; 3)$, $C(4; 5; 4)$, $D(5; 5; 6)$.
13. Найдите объем пирамиды с вершинами в точках $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$ и вычислите площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.
14. Проверьте компланарность векторов $\vec{a}(2; 3; -1)$, $\vec{b}(1; -1; 3)$, $\vec{c}(1; 9; -11)$.
15. Объем тетраэдра равен 5 ед^3 , три его вершины находятся в точках $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Найдите координаты четвертой вершины D , если известно, что она лежит на оси Oy .

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

Основная литература:

7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 608 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: . 599-603. - ISBN 978-5-8112-6472-8

8. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-099894-4. - ISBN 978-5-94666-805-7

Дополнительной литературы:

10. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами : 1 курс : [линейная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа, комплексные числа] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. - 9-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2013. - 576 с. : ил. - ISBN 978-5-8112-5166-7

11. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Фебина. - 8-е изд. - Москва : АЙРИС ПРЕСС, 2013. - 591 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: с. 589-590. - ISBN 978-5-8112-5142-1

12. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО. - ISBN 978-5-9916-3467-0

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
2. Методические указания для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.math.ru> (Математика и образование)
- <http://mccme.ru> (Московский центр непрерывного математического образования)
- <http://www.allmath.ru> (Allmath.ru – вся математика в одном месте)
- <http://eqworld.ipmnet.ru> (EqWorld – Мир математических уравнений)
- <http://www.exponenta.ru> (Exponenta.ru – образовательный математический сайт)
- <http://www.neive.by.ru> (Геометрический портал)
- <http://graphfunk.narod.ru> (Графики функций)
- <http://tasks.ceemat.ru> (Задачник для подготовки к олимпиадам по математике)

- <http://www.mathem.h1.ru> (Математика on-line справочная информация в помощь студенту)
- <http://Math-Net.ru/> (Общероссийский математический портал)

Практическое занятие № 4

Тема занятия «Линии на плоскости»

Цель занятия: Формирование умений составлять различные уравнения прямой и исследовать их взаимное расположение

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-3

Формирование на занятии у будущих специалистов этих компетенций предполагает обучение студентов

- анализировать ситуации и делать выводы;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- применение основных понятий, идей и методов математики для решения базовых задач предметной области.

Теоретическая часть

Линией на плоскости будем называть множество точек плоскости. Задать линию – значит указать, из каких точек плоскости она состоит. Это можно сделать при помощи уравнения с двумя неизвестными. Выберем на плоскости прямоугольную систему координат.

Уравнением линии на плоскости в прямоугольной системе координат называется уравнение вида $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты точек, которые не лежат на этой линии.

Или можно сказать, что уравнение $F(x, y) = 0$ является уравнением некоторой линии при выполнении условий:

1. Если точка $M(a, b)$ принадлежит линии, то координаты (a, b) являются решением уравнения $F(x, y) = 0$, то есть $F(a, b) = 0$ - верное числовое равенство.

2. Если пара чисел (c, d) является решением уравнения, то точка $N(c, d)$ принадлежит данной линии.

Простейшей линией на плоскости является прямая. Существуют различные способы задания прямой, это приводит к различным по форме уравнениям.

Пусть прямая l не параллельна оси Oy . Обозначим точку пересечения l с осью Oy $B(0; b)$, угол между положительным направлением оси Ox и прямой l обозначим через φ (рис. 8.1).

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка прямой l . Из прямоугольного $\triangle BMN$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|MN|}{|BN|} = \frac{y-b}{x}.$$

Обозначим через k : $k = \operatorname{tg} \varphi$ и назовем эту величину угловым коэффициентом прямой. Тогда

$$k = \frac{y-b}{x}, \quad (1)$$

откуда

$$y = kx + b. \quad (2)$$

Уравнение (8.2) называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом**.

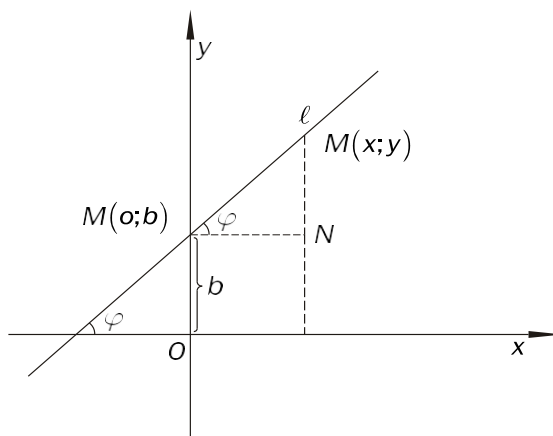


Рис 1. Угловой коэффициент прямой.

Замечание. Прямая, параллельная оси Oy , не может быть задана уравнением с угловым коэффициентом.

Зададим уравнение

$$Ax + By + C = 0, \quad (3)$$

где A, B, C - заданные числа, причем $A^2 + B^2 \neq 0$.

Если $B \neq 0$, то уравнение (8.3) можно записать в виде $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, или, полагая

$k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$, получаем уравнение (8.2), то есть уравнение прямой, не параллельной оси

Oy . Если $B = 0$, то уравнение (8.3) принимает вид $Ax + C = 0$, где $A \neq 0$, или $x = a (a = -C/A)$.

Это уравнение на плоскости тоже задает прямую, но только параллельную оси Oy . Таким образом, доказана теорема.

Теорема. Каждое уравнение первой степени на плоскости задает прямую, и, наоборот, каждая прямая на плоскости с прямоугольной системой координат определяется уравнением первой степени.

Уравнение вида (8.3) носит название **общего уравнения прямой**.

Заметим, что если в уравнении (8.3)

$A = 0, B \neq 0, C \neq 0$, то прямая параллельна оси Ox ;

$A \neq 0, B = 0, C \neq 0$, то прямая параллельна оси Oy ;

$A \neq 0, B \neq 0, C = 0$, то прямая проходит через $O(0;0)$;

$A = 0, B \neq 0, C = 0$, то прямая совпадает с осью Ox ;

$A \neq 0, B = 0, C = 0$, то прямая совпадает с осью Oy .

Пусть в уравнении (8.3) $A \neq 0$, $B \neq 0$ и $C \neq 0$. Преобразуем его: $Ax + By = -C$, разделим на $(-C)$: $\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$.

Обозначим $-\frac{C}{A} = a$, $-\frac{C}{B} = b$, получим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (4)$$

Уравнение (8.4) носит название **уравнения прямой в отрезках**, которое определяется тем, что a и b есть отрезки, отсекаемые прямой на осях координат (рис. 8.2).

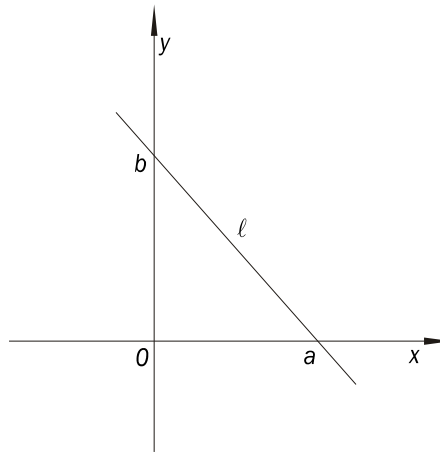


Рис 2 Уравнение прямой в отрезках.

Замечание. Прямые, параллельные координатным осям, и прямые, проходящие через начало координат, не могут быть записаны уравнением прямой в отрезках.

Если обе части общего уравнения прямой (3) умножить на число $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, которое называется нормирующим множителем, причем знак перед радикалом выбрать так, чтобы $\mu C < 0$ (при $C = 0$ знак берем любой), то получится уравнение

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0, \quad (8.5)$$

где $\mu C = -p$, $\mu A = \cos \varphi$, $\mu B = \sin \varphi$.

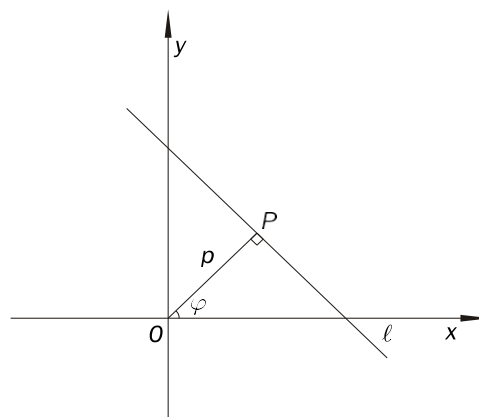


Рис 3. Нормальное уравнение прямой.

Уравнение вида (8.5) носит название **нормального уравнения прямой**. С геометрической точки зрения p - длина перпендикуляра OP , опущенного из начала

координат на прямую, φ - угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox (рис. 3).

Углом между двумя прямыми l_1 и l_2 будем называть наименьший угол φ , на который надо повернуть прямую l_1 вокруг точки пересечения M против часовой стрелки до ее совпадения с прямой l_2 ($0 \leq \varphi < \pi$).

Пусть на плоскости заданы две прямые уравнениями с угловым коэффициентом:

$$\begin{aligned} l_1 : y &= k_1 x + b_1, \\ l_2 : y &= k_2 x + b_2. \end{aligned}$$

Из рисунка (8.4) $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1}$$

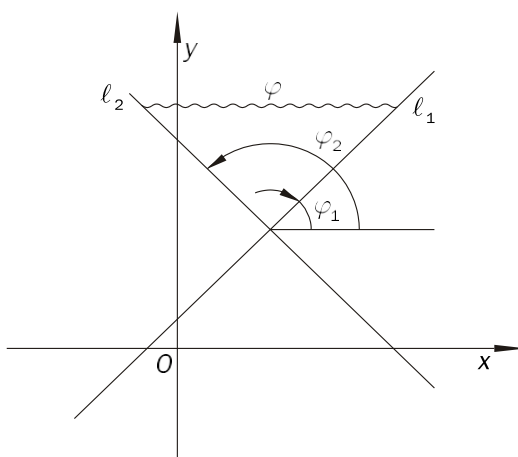


Рис. 4. Угол между прямыми.

Учитывая смысл угловых коэффициентов прямой, получаем формулу для определения угла между прямыми:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (6)$$

Если **прямые** l_1 и l_2 **параллельны**, то $\varphi_1 = \varphi_2$, следовательно, $k_1 = k_2$, то есть параллельные прямые имеют равные угловые коэффициенты.

Если **прямые** l_1 и l_2 **перпендикулярны**, то $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$, откуда

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg}\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1}, \text{ то есть } k_2 = -\frac{1}{k_1}, \text{ то есть угловые коэффициенты взаимно}$$

перпендикулярных прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Рассмотрим некоторые задачи на прямую.

Задача 1. Написать уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Решение.

Воспользуемся уравнением прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$. Так как M_0 должна находиться на данной прямой, то ее координаты должны удовлетворять уравнению, то есть $y_0 = kx_0 + b$, откуда $b = y_0 - kx_0$. Тогда $y = kx + y_0 - kx_0$, или

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (7)$$

искомое уравнение прямой.

Задача 2. Написать уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Решение.

Пусть $x_1 \neq x_2$, тогда искомая прямая не параллельна оси Oy , поэтому может быть записана в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1), \quad (8)$$

где k - некоторое число, $M_1(x_1, y_1)$ - точка на данной прямой. Для того чтобы эта прямая проходила через точку $M_2(x_2, y_2)$, должно выполняться равенство

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1). \quad (9)$$

Разделим (8) на (9), получим уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (10)$$

Замечание. Если $y_2 - y_1 = 0$, то формально получили бы равенство $\frac{y - y_1}{0} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Несмотря на его бессмысленность, такая запись удобна. Если освободиться от

знаменателей, то получим верное равенство: $y - y_1 = 0 \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 0$, или $y = y_1$. Аналогично

случай $x_1 = x_2 = c$ приводит к уравнению $x = c$.

Задача 3. Найти расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до данной прямой.

Решение.

Пусть прямая l задана нормальным уравнением

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0.$$

Проведем через точку M_0 прямую l_1 , параллельную l . Тогда l_1 имеет уравнение $x \cos \varphi + y \sin \varphi - (p + d) = 0$, если M_0 и $O(0;0)$ лежат по разные стороны от прямой l (рис. 5), или $x \cos \varphi + y \sin \varphi - (p - d) = 0$, если M_0 и $O(0;0)$ лежат по одну сторону от прямой l (рис.6).

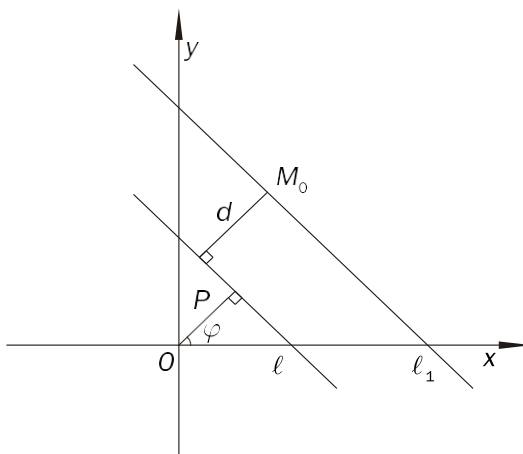


Рис. 5. Расстояние от точки до прямой.

Прямая l_1 проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, поэтому $x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - (p \pm d) = 0$.
Отсюда $d = \pm(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - p)$.

Учитывая, что расстояние всегда неотрицательная величина, получаем искомую формулу:

$$d = |x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - p| . \quad (11)$$

Если прямая l задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то, учитывая связь общего уравнения с нормальным, получаем формулу для вычисления расстояния от точки до прямой:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} . \quad (12)$$

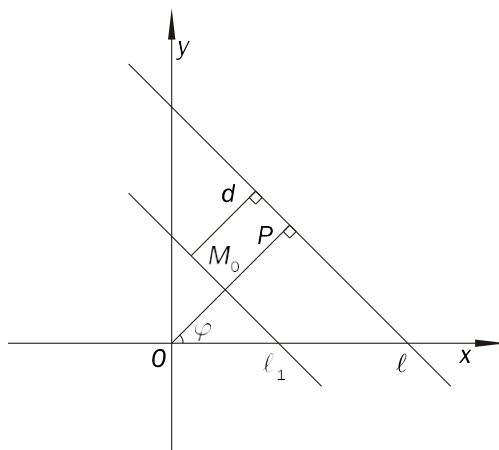


Рис 6. Расстояние от точки до прямой.

Вопросы и задания

1. Дайте определение уравнения линии. К линиям какого порядка относят прямую?

2. Выведите уравнение прямой с угловыми коэффициентами. Назовите геометрический смысл углового коэффициента. Любая ли прямая может быть задана уравнением с угловым коэффициентом?
3. Расскажите об общем уравнении прямой и о её расположении относительно координатных осей в зависимости от коэффициентов уравнения.
4. Выведите уравнение прямой в отрезках; назовите геометрический смысл его коэффициентов.
5. Расскажите о нормальном уравнении прямой.
6. Определите угол между прямыми. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
7. Выведите формулу расстояния между точкой и прямой.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Составьте уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b = 3$ и образующий с осью Ox угол:
а) 45° , б) 90° , в) 120° .
2. Уравнение прямой $2x - 3y = 6$ приведите к виду «в отрезках» на осях.
3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и составляющей с осью Ox угол 60° и построить её.
4. Найдите точку пересечения двух прямых $3x - 4y - 29 = 0$, $2x + 5y + 19 = 0$.
5. Напишите уравнения двух прямых, проходящих через точку $A(3; 4)$, так, чтобы одна была параллельна оси Ox , другая параллельна оси Oy .
6. Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1; 1)$ под углом 45° к прямой $2x + 3y = 6$.
7. Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(6; 2)$ на прямую $x - 4y - 7 = 0$.
8. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(5; -4)$ и составляющей с осью Ox тот же угол, что и прямая $5x + 2y - 3 = 0$.
9. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$ перпендикулярной к прямой $y = 2x$.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная литература:

9. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 608 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: . 599-603. - ISBN 978-5-8112-6472-8

10. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-099894-4. - ISBN 978-5-94666-805-7

Дополнительной литературы:

13. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами : 1 курс : [линейная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа, комплексные числа] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. - 9-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2013. - 576 с. : ил. - ISBN 978-5-8112-5166-7

14. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Фебина. - 8-е изд. - Москва : АЙРИС ПРЕСС, 2013. - 591 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: с. 589-590. - ISBN 978-5-8112-5142-1

15. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО. - ISBN 978-5-9916-3467-0

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
2. Методические указания для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.math.ru> (Математика и образование)
- <http://mccme.ru> (Московский центр непрерывного математического образования)
- <http://www.allmath.ru> (Allmath.ru – вся математика в одном месте)
- <http://eqworld.ipmnet.ru> (EqWorld – Мир математических уравнений)

- <http://www.exponenta.ru> (Exponenta.ru – образовательный математический сайт)
- <http://www.neive.by.ru> (Геометрический портал)
- <http://graphfunk.narod.ru> (Графики функций)
- <http://tasks.ceemat.ru> (Задачник для подготовки к олимпиадам по математике)
- <http://www.mathem.h1.ru> (Математика on-line справочная информация в помощь студенту)
- <http://Math-Net.ru/> (Общероссийский математический портал)

Практическое занятие № 5

Тема занятия «Анализ уравнений кривых 2-го порядка»

Цель занятия: Формирование умений составлять канонические уравнения кривых второго порядка.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-3.

При формировании названных компетенций на занятии специалист должен уметь

- сформулировать гипотезу и проверить ее в дальнейшем;
- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- ставить новые вопросы и видеть проблемы в традиционных ситуациях;
- владеть основными методиками решения учебно-исследовательских задач;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- применять основные понятия, идеи и методы фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач.

Теоретическая часть.

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра окружности) на расстояние, равное радиусу окружности.

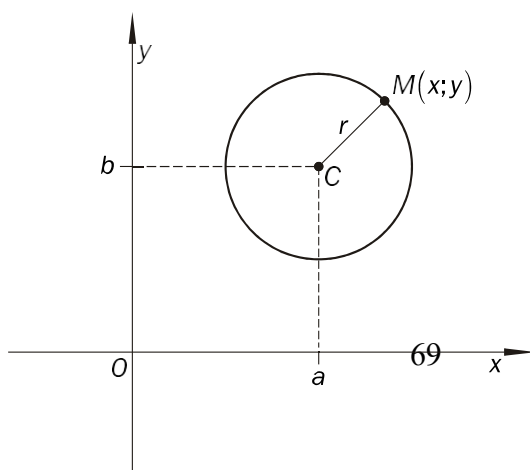


Рис.1. Окружность.

Пусть $C(a, b)$ – центр окружности, r – радиус окружности, $M(x, y)$ – произвольная точка окружности (рис 9.1). По определению окружности $|CM| = r$. Выразим это равенство в координатах: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$. Возведем обе части в квадрат:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \quad (1)$$

Таким образом, координаты любой точки, лежащей на окружности, удовлетворяют уравнению (1). Покажем, что координаты точки, не лежащей на окружности, не удовлетворяют уравнению (1).

Действительно, если точка M – внутри окружности, то расстояние $|CM| < r$, т.е. $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$, а если точка M – вне окружности, то $|CM| > r$, т.е. $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$. Следовательно, уравнению (9.1) удовлетворяют координаты всех точек, лежащих на окружности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на окружности. Поэтому уравнение (9.1) и есть уравнение окружности.

Если в уравнении (9.1) раскрыть скобки, то получим уравнение:

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0, \quad (2)$$

где $l = -2a$, $m = -2b$, $n = a^2 + b^2 - r^2$.

Если $l^2 + m^2 - 4n > 0$, то уравнение (9.2) определяет окружность.

Если $l^2 + m^2 - 4n = 0$, то уравнение (9.2) определяет точку $\left(-\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}\right)$.

Если $l^2 + m^2 - 4n < 0$, то уравнение (9.2) не имеет геометрического смысла. В этом случае говорят о мнимой окружности.

Уравнение (9.1) можно упростить, если поместить начало новой системы координат в центр окружности (рис 9.2). Тогда ее уравнение будет иметь вид:

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (2)$$

Это уравнение называется **каноническим уравнением окружности**, т.е. уравнением самого простого вида.

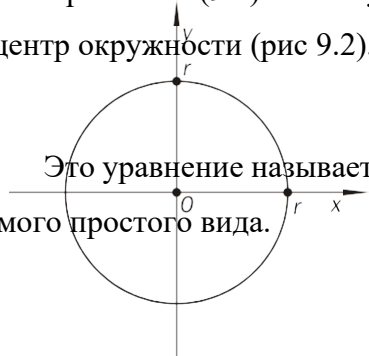


Рис. 9.2. Окружность, имеющая каноническое уравнение

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная (ее обозначают $2a$) и большая, чем расстояние между фокусами.

Середина расстояния между фокусами называется **центром эллипса**, т.к. относительно этой точки эллипс симметричен.

Длина $|F_1F_2|$ называется **фокусным расстоянием**, обозначим ее $2c$, а половина этого расстояния называется **полуфокусным расстоянием**, оно равно c .

Примем центр эллипса за начало координат, за ось абсцисс примем прямую, проходящую через фокусы (рис. 9.3).

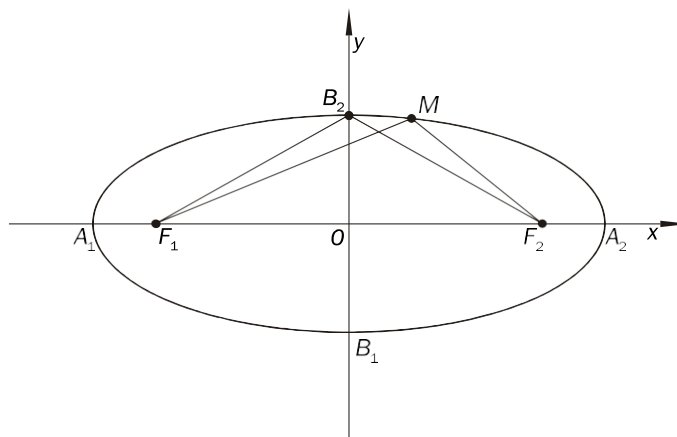


Рис.3. Эллипс

Тогда координаты фокусов будут $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Всякий отрезок, соединяющий две точки эллипса, если он проходит через центр, называется **диаметром эллипса**.

Наибольший диаметр проходит через фокусы, этот диаметр A_1A_2 называется **большой осью эллипса**. Длина большой оси эллипса $|A_1A_2|=2a$. Действительно, по определению эллипса $|F_1A_2|+|F_2A_2|=2a$, но $|F_1A_2|=|OA_2|+c$, $|F_2A_2|=|OA_2|-c$. Тогда получаем $2|OA_2|=2a$, или $|OA_2|=a$. Аналогично $|A_1O|=a$, следовательно, $|A_1A_2|=2a$. Число a называется **большой полуосью**. Наименьший диаметр эллипса перпендикулярен наибольшему, его называют **малой осью эллипса** и обозначают через $2b$, так что $|B_1B_2|=2b$. Число b называется **малой полуосью**. Концы осей, т.е. точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются вершинами эллипса. Основное свойство эллипса применимо и для вершин B_1 и B_2 . Например, для вершины B_2 получим $|F_1B_2|+|F_2B_2|=2a$, а т.к. $|F_1B_2|=|F_2B_2|$, то $2|F_2B_2|=2a$, или $|F_2B_2|=a$. Тогда из прямоугольного $\triangle OF_2B_2$ получаем важное соотношение:

$$b^2 + c^2 = a^2. \quad (4)$$

Форма эллипса при заданном a зависит только от расстояния между фокусами, т.е. от c . При сближении фокусов и при совпадении их с началом координат эллипс постепенно обратится в окружность. Наоборот, если фокусы отодвигаются от начала координат, эллипс постепенно сплющивается и вырождается в прямолинейный отрезок A_1A_2 . Степень сжатия эллипса определяется его **эксцентриситетом**, который определяется дробью:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \quad (5)$$

Для эллипса эксцентриситет может изменяться от 0 до 1, причем для окружности $\varepsilon = 0$, для эллипса, выродившегося в прямолинейный отрезок, $\varepsilon = 1$.

Для получения канонического уравнения эллипса возьмем произвольную точку эллипса $M(x, y)$. Тогда по определению $|MF_1| + |MF_2| = 2a$. Выразим это равенство в координатах:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (6)$$

Для упрощения уравнения (6) придется дважды его возводить в квадрат и приводить подобные члены. В результате будет получено уравнение

$$\frac{x^2(a^2 - c^2)}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2,$$

или после деления на $a^2 - c^2$ —

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Далее учитывая, что $b^2 = a^2 - c^2$, получаем **каноническое уравнение эллипса**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$

Построение эллипса, согласно его определению, можно осуществить посредством нити длиной $2a$, закрепленной концами в фокусах. Зацепив нить острием карандаша, и двигая его так, чтобы нить всё время была в натянутом состоянии, мы заставим острие вычертить эллипс.

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная (её обозначают $2a$) и меньшая расстояния между фокусами ($2c$).

Середина расстояния между фокусами называется **центром гиперболы**, так как относительно этой точки гипербола симметрична. Длина $|F_1F_2| = 2c$ - называется **фокусным расстоянием**, а половина этого расстояния **полуфокусным расстоянием**. Удобно центр гиперболы принять за начало координат, а за ось абсцисс принять прямую, проходящую через фокусы (рис 9.4).

Всякий отрезок, соединяющий две точки гиперболы и проходящий через центр, называется **диаметром гиперболы**. Наименьший диаметр лежит на оси абсцисс; этот диаметр A_1A_2 называется **действительной осью** гиперболы, причем $|A_1A_2| = 2a$.

Действительно по определению гиперболы $|F_1A_2| - |F_2A_1| = 2a$, но $|F_1A_2| = c + |OA_2|$, $|F_2A_1| = c - |OA_1|$, тогда $2|OA_2| = 2a$, или $|OA_2| = a$. Аналогично $|OA_1| = a$, следовательно, $|A_1A_2| = 2a$.

Число a называется **действительной полуосью**, точки A_1 и A_2 называются **вершинами гиперболы**. Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом гиперболы**, причем для гиперболы $\varepsilon > 1$.

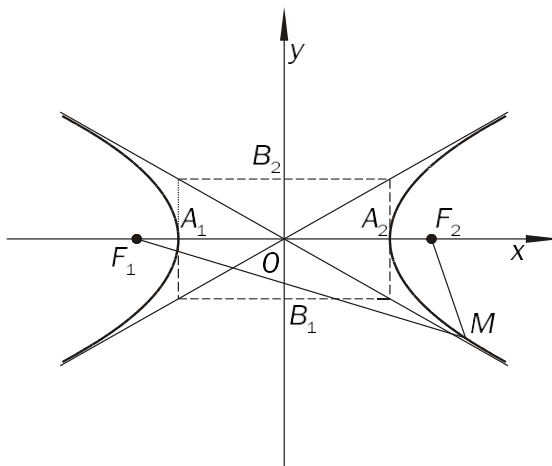


Рис. 4. Гипербола

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка гиперболы. Тогда по определению

$||MF_1| - |MF_2|| = 2a$, или в координатной форме

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a. \quad (8)$$

Уравнение (9.8) в результате преобразований, аналогичных проводимым при выводе уравнения эллипса, может быть сведено к виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Обозначая $c^2 - a^2 = b^2$, получаем **каноническое уравнение гиперболы**:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (9)$$

Прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$ являются **асимптотами гиперболы**. Это прямые, к которым гипербола приближается в бесконечности, но не пересекает их. С геометрической точки зрения b - ордината асимптоты, восстановленной из вершины гиперболы. Для построения асимптот гиперболы целесообразно предварительно построить прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, параллельными координатным осям и с центром в начале координат (такой прямоугольник называется основным прямоугольником гиперболы). Точки $B_1(a, -b)$ и $B_2(a, b)$ определяют **мнимую ось** гиперболы $|B_1B_2|$.

Если в уравнении (9.9) $a = b$, то гипербола называется **равнобочной**. Ее асимптоты $y = \pm x$ образуют прямой угол. Если за оси принять асимптоты, то уравнение примет вид $xy = k$. Таким образом, равнобочная гипербола является графиком обратной пропорциональности.

Заметим, что уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (10)$$

тоже определяет гиперболу, у которой действительная ось расположена на оси Oy , а мнимая ось – на оси Ox .

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки F (называемой **фокусом** параболы) и от данной прямой (называемой **директрисой** параболы).

Для вывода канонического уравнения параболы проведем ось Ox прямоугольной системы координат через фокус F перпендикулярно директрисе, начало координат O поместим на равных расстояниях от фокуса и директрисы (рис. 9.5). Расстояние от фокуса

до директрисы обозначим через ρ (оно называется параметром параболы). Тогда $F\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$,

а директриса задается уравнением $x = -\frac{\rho}{2}$. Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка параболы.

Опустим перпендикуляр MA на директрису l . Тогда по определению $|MA| = |MF|$. Выразим это условие в координатах:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

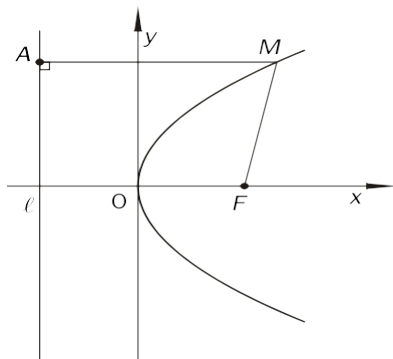


Рис. 5. Парабола.

Возводя в квадрат и приводя подобные, получаем **каноническое уравнение параболы**:

$$y^2 = 2px. \quad (11)$$

Вершиной параболы называется точка пересечения параболы с ее осью симметрии. Ось симметрии параболы называется осью параболы. Парабола, определяемая уравнением (9.11), имеет ось, совпадающую с осью Ox .

Заметим, что уравнение $x^2 = 2py$ определяет параболу, симметричную относительно оси Oy .

Вопросы и задания

1. Дайте определение окружности. Выведите уравнение окружности с центром в заданной точке. Запишите каноническое уравнение окружности.
2. В каком случае уравнение вида $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ на плоскости задает окружность?
3. Сформулируйте определение эллипса. Определите следующие понятия: центр эллипса, фокусное расстояние, полуфокусное расстояние, диаметр эллипса, большая и малая оси (полуоси) эллипса, эксцентриситет эллипса.
4. Укажите способы построения эллипса. Нарисуйте эллипс и покажите на нем все понятия, определенные выше.
5. Выведите каноническое уравнение эллипса.

6. Дайте определение гиперболы. Нарисуйте эту линию. Введите понятия центра гиперболы, фокусного и полуфокусного расстояний, диаметра гиперболы, действительной оси (полуоси), мнимой оси гиперболы, вершин и асимптот гиперболы. Покажите введенные понятия на рисунке. Определите эксцентриситет гиперболы.
7. Выведите каноническое уравнение гиперболы.
8. Расскажите о равнобочной гиперболе.
9. Сформулируйте определение параболы и постройте ее. Покажите фокус и директрису параболы, вершину параболы.
10. Выведите каноническое уравнение параболы.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Постройте эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найдите: 1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет.
2. Напишите каноническое уравнение эллипса, если известно, что:
1) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b = 3$; 2) расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет $\varepsilon = 3/5$; 3) расстояние между фокусами равно $2\sqrt{13}$, а $a - b = 1$.
3. Напишите каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1 = (2; 3)$ и $M_2 = (1; 3\sqrt{5}/2)$.
4. Постройте гиперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$.
Найдите: 1) действительную и мнимую полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.
5. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:
1) расстояние между фокусами $2c = 10$, а между вершинами $2a = 8$;
2) расстояние между фокусами $2c = 6$, а эксцентриситет $\varepsilon = 3/2$.
6. Напишите уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.
7. Постройте параболу $y^2 = 6x$. Найдите: 1) координаты фокуса; 2) уравнение директрисы.
8. Напишите уравнение параболы, проходящей через точки $(0; 0)$ и $(1; -3)$ и симметричной относительно оси Ox .

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная литература:

11. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 608 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: . 599-603. - ISBN 978-5-8112-6472-8

12. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-099894-4. - ISBN 978-5-94666-805-7

Дополнительной литературы:

16. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами : 1 курс : [линейная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа, комплексные числа] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. - 9-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2013. - 576 с. : ил. - ISBN 978-5-8112-5166-7

17. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Фебина. - 8-е изд. - Москва : АЙРИС ПРЕСС, 2013. - 591 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: с. 589-590. - ISBN 978-5-8112-5142-1

18. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО. - ISBN 978-5-9916-3467-0

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
2. Методические указания для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.math.ru> (Математика и образование)
- <http://mccme.ru> (Московский центр непрерывного математического образования)
- <http://www.allmath.ru> (Allmath.ru – вся математика в одном месте)
- <http://eqworld.ipmnet.ru> (EqWorld – Мир математических уравнений)

- <http://www.exponenta.ru> (Exponenta.ru – образовательный математический сайт)
- <http://www.neive.by.ru> (Геометрический портал)
- <http://graphfunk.narod.ru> (Графики функций)
- <http://tasks.ceemat.ru> (Задачник для подготовки к олимпиадам по математике)
- <http://www.mathem.h1.ru> (Математика on-line справочная информация в помощь студенту)
- <http://Math-Net.ru/> (Общероссийский математический портал)

Практическое занятие № 6

Тема занятия «Предел и непрерывность функций»

Цель занятия: Введение понятия предел функции, формирование навыков вычисления пределов.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-3.

При формировании на занятии названных компетенций специалист должен знать основополагающее понятие математического анализа предела функции; уметь использовать это понятие в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания; владеть техникой вычисления пределов.

Теоретическая часть.

Число a называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, зависящий от ε , что для всех номеров членов последовательности $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Обозначается $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon, n \in N.$$

Заметим, что характер стремления последовательности к своему пределу различен.

Свойства пределов последовательностей.

1. Последовательность, имеющая предел, ограничена.
2. Последовательность может иметь только один предел.
3. Любая неубывающая (невозрастающая) и ограниченная сверху (снизу) числовая последовательность имеет предел.

Рассмотрим числовую последовательность

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}. \quad (1)$$

Эта последовательность возрастающая. Действительно, по формуле Бинома-Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{k!}x^k + \dots + x^n,$$

Тогда имеем:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1)}{n!} \frac{1}{n^n},$$

или

$$a_n = 2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \quad (2)$$

С увеличением n каждое слагаемое, кроме первого, увеличивается и возрастает число слагаемых. Следовательно, $\forall n \in N \ a_n < a_{n+1}$, т.е. последовательность возрастающая.

Покажем, что последовательность (1) ограничена сверху. Заменим во всех членах разложения (2) выражения в скобках на 1; тогда

$$a_n < 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1^2}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = S_n.$$

Последняя сумма S_n , начиная со второго члена, представляет собой геометрическую прогрессию. Тогда

$$S_n = 2 + \frac{1/2 - 1/2 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}}{1 - 1/2} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Таким образом, показали, что последовательность (1) сверху ограничена числом 3, следовательно она имеет предел. Этот предел принято обозначать буквой e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e является иррациональным, его приближённое значение $e \approx 2,71828$. Число e принято за основание натуральных логарифмов. Для отыскания приближенных значений натуральных логарифмов по таблицам десятичных логарифмов пользуются формулой, полученной из формулы перехода к новому основанию:

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e}, \text{ где } \frac{1}{\lg e} \approx 2,30258$$

Число A называется **пределом функции** $f(x)$ при стремлении $x \rightarrow x_0$, или в точке x_0 , если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $\forall x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Таким образом, число A есть предел функции $f(x)$ в точке x_0 , когда для всех x достаточно близких к x_0 и отличных от него, соответствующие им значения функции $f(x)$ оказываются сколь угодно близкими к числу A .

Геометрически это означает, что для всех точек x , отстоящих от точки x_0 , не далее чем на δ , точки M графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε , ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon, y = A + \varepsilon$.

Отметим, что x_0 - необязательно входит в область определения функции.

Например: для функции $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x_0 = 1 \notin D(f)$, но предел функции в этой точке существует.

Характер стремления $x \rightarrow x_0$ может быть различным. Если $x \rightarrow x_0$, оставаясь меньше его, то говорят о **левостороннем пределе функции**, обозначают $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$.

Если $x \rightarrow x_0$, оставаясь больше его, то говорят о **правостороннем пределе функции**,

обозначают $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$.

Число A - называется **пределом функции при стремлении** $x \rightarrow \infty$, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такое положительное число $N > 0$, что для всех x удовлетворяющих условию $|x| > N : |f(x) - A| < \varepsilon$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall x : |x| > N \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

При вычислении пределов пользуются следующими теоремами:

Теорема 1. Предел постоянной равен самой постоянной: $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$.

Теорема 2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют пределы в точке x_0 , то в этой точке имеют пределы функции $f_1(x) \pm f_2(x), f_1(x), f_2(x)$, а если $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \neq 0$, то имеет

предел функция $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \neq 0.$$

Следствие 1. Если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))^n$.

Следствие 2. $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Замечание. Все сформулированные теоремы и следствия справедливы и при $x \rightarrow \infty$.

При нахождении пределов вида $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены

n -ой и m -ой степени, делим на старшую степень знаменателя. В результате выводим следующие правила:

- Если степень числителя больше степени знаменателя ($n > m$), то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \infty.$$

- Если степень числителя меньше степени знаменателя ($n < m$), то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0.$$

- Если степень числителя равна степени знаменателя ($n = m$), то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

равен отношению коэффициентов при старших степенях.

В некоторых случаях для раскрытия неопределённостей используют «**замечательные пределы**». Для их доказательства используются довольно тонкие рассуждения. Мы воспользуемся лишь готовыми результатами.

Предел вида $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ носит название **первого замечательного предела**.

Первый замечательный предел используется для раскрытия неопределённости вида

$\left[\frac{0}{0} \right]$ при вычислении пределов от тригонометрических функций.

Получим **следствия из первого замечательного предела**.

- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Действительно,
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin mx} = \frac{k}{m}.$$

Действительно,
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx \cdot (\sin kx)k}{kx \cdot (\sin mx)m} = \frac{k}{m} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{\sin mx} = \frac{k}{m}.$$

- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgkx}{tgmx} = \frac{k}{m}.$$

Действительно,
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgkx}{tgmx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx \cdot \sin kx}{\cos kx \cdot \sin mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin mx} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx}{\cos kx} = \frac{k}{m} \cdot \frac{\cos 0}{\cos 0} = \frac{k}{m}.$$

- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{tgmx} = \frac{k}{m}.$$

Действительно,
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{tgmx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx \cdot \sin kx}{\sin mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin mx} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos mx = \frac{k}{m} \cdot \cos 0 = \frac{k}{m}.$$

- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ctgkx}{ctgm x} = \frac{m}{k}.$$

Действительно,
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ctgkx}{ctgm x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgmx}{tgkx} = \frac{m}{k}.$$

- $$\lim_{x \rightarrow 0} \sin kx \cdot ctgm x = \frac{k}{m}.$$

Действительно,
$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin kx \cdot ctgm x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{tgmx} = \frac{k}{m}.$$

- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Действительно,
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left| \begin{matrix} \arcsin x = t, \sin t = x \\ x \rightarrow 0, \text{ то } t \rightarrow 0 \end{matrix} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

Предел, определяющий число e , т.е. предел вида $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, носит название **второго замечательного предела**. Другая форма второго замечательного предела может

быть получена с помощью замены $\frac{1}{n} = x$. Тогда получаем $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Заметим, что второй замечательный предел служит для раскрытия неопределенности вида 1^∞ .

Следствия из второго замечательного предела.

- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{mx}\right)^{nx} = e^{\frac{kn}{m}}.$$

Действительно, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{mx}\right)^{nx} = \left[\begin{array}{l} \frac{k}{mx} = t, x = \frac{k}{mt} \\ \text{при } x \rightarrow \infty, t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + t\right)^{\frac{kn}{mt}} = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + t\right)^{\frac{1}{t}} \right)^{\frac{kn}{m}} = e^{\frac{kn}{m}}.$

- $$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{\frac{n}{mx}} = e^{\frac{kn}{m}}.$$

Действительно, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{\frac{n}{mx}} = \left[\begin{array}{l} kx = t, x = \frac{t}{k} \\ \text{при } x \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{nk}{mt}} = \left(\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} \right)^{\frac{nk}{m}} = e^{\frac{kn}{m}}.$

- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Данный предел содержит неопределённость вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. По свойствам логарифма данный

предел можно переписать в виде $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \ln e = 1$

- $$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+kx)^{\frac{n}{mx}} = \frac{kn}{m}.$$

Действительно, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+kx)^{\frac{n}{mx}} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+kx)^{\frac{n}{mx}} \right) = \ln e^{\frac{kn}{m}} = \frac{kn}{m}.$

Вопросы и задания.

1. Что называется пределом функции в точке?
2. Определите предел функции на бесконечности.
3. Дайте определение предела функции слева (справа).
4. Может ли функция $f(x)$ иметь два различных предела при $x \rightarrow a$?
5. Чему равен предел постоянной величины?
6. Чему равен предел: а) суммы; б) разности; в) произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$?

7. Чему равен предел частного функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ($x \rightarrow a$)?
8. Как можно избавиться от неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, если числитель и знаменатель дроби содержат многочлены?
9. Как разложить квадратный трехчлен на линейные множители?
10. Сформулируйте теорему Виета.
11. Как можно избавиться от неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$, если числитель и (или) знаменатель содержат иррациональные выражения?
12. Запишите формулы сокращенного умножения, помогающие определить сопряженные выражения для данных.
13. Сформулируйте правила вычисления пределов дроби при $x \rightarrow \infty$, если числитель и знаменатель содержат многочлены.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Найдите пределы

- а) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 3)$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 8x + 20}{x^3 + 3x^2 + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^3 + 2x^2}$;
- г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$; д) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$;
- ж) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$; з) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt[3]{2+x} + x}$; и) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2)^3}{(x-5)^3}$;
- к) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2}}{x^2 - 3x + 2}$.

2. Найдите пределы функций при $x \rightarrow \infty$:

- а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+7}{x+2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-10^7}{3x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{3x^2 + x - 4}}$;
- г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 1}{x^3 + 5x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$.

3. Вычислите пределы функции при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$, если

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3}, & (x > 1) \\ \frac{2x}{4x-15}, & (x \leq 1) \end{cases}.$$

4. Найдите односторонние пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{3}{4-2x};$

б) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3}{4-2x};$

в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{4-2x}.$

г) $\lim_{x \rightarrow -0} 2^x;$

д) $\lim_{x \rightarrow +0} 2^x.$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная литература:

13. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 608 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: . 599-603. - ISBN 978-5-8112-6472-8

14. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-099894-4. - ISBN 978-5-94666-805-7

Дополнительной литературы:

19. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами : 1 курс : [линейная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа, комплексные числа] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федина, Ю. А. Шевченко. - 9-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2013. - 576 с. : ил. - ISBN 978-5-8112-5166-7

20. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Фебина. - 8-е изд. - Москва : АЙРИС ПРЕСС, 2013. - 591 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: с. 589-590. - ISBN 978-5-8112-5142-1

21. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО. - ISBN 978-5-9916-3467-0

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
2. Методические указания для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.math.ru> (Математика и образование)
- <http://mccme.ru> (Московский центр непрерывного математического образования)
- <http://www.allmath.ru> (Allmath.ru – вся математика в одном месте)
- <http://eqworld.ipmnet.ru> (EqWorld – Мир математических уравнений)
- <http://www.exponenta.ru> (Exponenta.ru – образовательный математический сайт)
- <http://www.neive.by.ru> (Геометрический портал)
- <http://graphfunk.narod.ru> (Графики функций)
- <http://tasks.ceemat.ru> (Задачник для подготовки к олимпиадам по математике)
- <http://www.mathem.h1.ru> (Математика on-line справочная информация в помощь студенту)
- <http://Math-Net.ru/> (Общероссийский математический портал)

Практическое занятие № 7

Тема занятия «Производная и дифференциал функции»

Цель занятия: Введение понятия производной функции с помощью операции предельного перехода, отработка навыков в вычислении производных.

Организационная форма занятия: практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-3.

При формировании названных компетенций в результате изучения дисциплины «Математика» специалист должен знать основные правила дифференцирования; уметь

дифференцировать с помощью формул и простейших приемов; владеть методами нахождения производных функций. Формирование у будущих специалистов этой компетенций на занятии предполагает обучение студентов

- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат.

Теоретическая часть.

Задача 1. О скорости движущейся точки. Будем рассматривать прямолинейное движение некоторого твердого тела, которое будем считать материальной точкой. И пусть $S = S(t)$ - закон движения тела, выражающий зависимость пройденного пути от времени, прошедшего с начала отсчета.

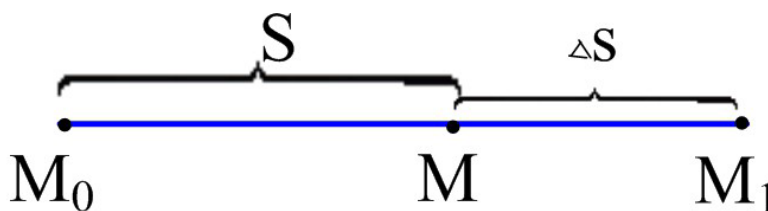


Рисунок 7.1. Определение скорости движущейся точки

Пусть в некоторый элемент времени t_0 движущаяся точка M находилась на расстоянии S от начального положения M_0 , а в некоторый следующий момент времени $t_0 + \Delta t$ оказалась в положении M_1 на расстоянии $S + \Delta S$ от начального положения. Таким образом, за промежуток времени Δt расстояние S изменилась на величину ΔS . В этом случае говорят, что за промежуток времени Δt величина S получила приращение ΔS . Тогда средняя скорость движения за время Δt равна

$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Средняя скорость не может точно охарактеризовать быстроту перемещения точки M в момент t . Однако, чем меньше Δt , тем лучше средняя скорость характеризует движение точки. Наиболее точно характеризует скорость движения тела в любой момент – мгновенная скорость:

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}.$$

Задача 2. О нахождении наклона кривой в данной точке. Криволинейные связи, описываемые нелинейными функциями, отличаются от линейных постоянным изменением наклонам графиков нелинейных функций.

Возникает вопрос, как определить наклон в данной точке.

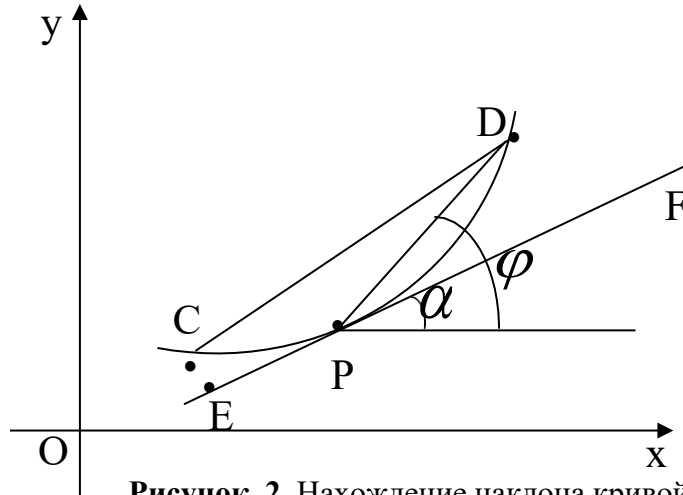


Рисунок 2. Нахождение наклона кривой в данной точке

Пусть задана некоторая кривая. Прямая CD - это хорда, соединяющая две точки на кривой.

С помощью очень коротких хорд подобных CD можно аппроксимировать кривую, и тогда наклон кривой в данной точке можно считать приблизительно равным наклону очень короткой хорды, проходящей через эту точку.

Пусть $P(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$ - две точки кривой, PD - хорда, EF - касательная к кривой в точке P.

Наклон линии, соединяющей точки P и D определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Предположив, что значения x и y вдоль прямой между точками C и D меняются очень мало, обозначим Δy - очень малое приращение y , Δx - очень малое приращение x . Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Это отношение в действительности определяет наклон хорды PD, однако по мере приближения точки D к P величина наклона хорды PD приближается к наклону

касательной. Хорда PD будет поворачиваться вокруг P и угол φ будет меняться с изменением Δx .

Если при $\Delta x \rightarrow 0$, угол φ стремится к некоторому предельному положению угла α , то прямая, проходящая через точку P и составляющая с положительным направлением OX угол α будет касательной, т.е. наклон графика в точке равен наклону касательной в этой точке. Можем записать

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

В задачах 1 и 2 мы получили пределы одного вида, что позволяет ввести определение новой операции.

Если существует предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, то этот предел называется **производной функции** $y = f(x)$ в данной точке x_0 и обозначается

$$y'(x) = y'_x = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Задача 1 позволяет сформулировать **механический смысл производной** – скорость прямолинейного движения есть производная пути по времени: $v = \frac{dS}{dt}$.

Задача 2 позволяет сформулировать **геометрический смысл производной**. Угловый коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в данной точке равен значению производной в точке касания.

Операция нахождения производной называется **дифференцированием**. Функция, имеющая производную в точке x , называется дифференцируемой в этой точке. Функция, дифференцируемая в каждой точке отрезка $[a; b]$, называется дифференцируемой на этом отрезке.

Рассмотрим **порядок вычисления производной функции по определению**:

1. Выбираем произвольную точку x_0 .
2. Придаем приращение аргументу Δx : $x_0 + \Delta x$.
3. Определяем приращение функции $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$.
4. Находим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$.
5. Вычисляем $y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$.

6. Так как точка x_0 произвольная, то заменяя x_0 на x в формуле для $y'(x_0)$, получаем искомую производную функции в любой точке $y'(x)$.

Вспомним **основные правила дифференцирования**:

1. Если $f(x) = C = const$, то $(C)' = 0$.
2. Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, то

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x).$$

3. Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, то

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x).$$

Следствие. Если $f(x) = C \cdot u(x)$, то $f'(x) = C \cdot (u(x))'$.

4. Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции и $v(x) \neq 0$, то

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Следствие. Если $f(x) = \frac{C}{v(x)}$, то $f'(x) = \left(\frac{C}{v(x)} \right)' = -\frac{C \cdot v'(x)}{v^2(x)}$.

5. Если $G(x) = F(f(x))$, то $G'(x) = F'(f(x)) \cdot f'(x)$.

6. Если $g(y)$ – есть функция обратная к $f(x)$, то $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, где

$f'(x) \neq 0$ и $x = g(y)$.

Для удобства нахождения производных составим **таблицу основных производных**.

Пусть $u = u(x)$ – дифференцируемая функция, тогда

1. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$;

2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;

3. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$;

5. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;

6. $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$;

7. $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$;

8. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;

9. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

$$10. (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$11. (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$12. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2};$$

$$13. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ представляет собой некоторую функцию. Возможно, что эта новая функция сама имеет производную. Тогда производная функции $f'(x)$ называется **второй производной** или **производной 2-го порядка**: $f''(x) = (f'(x))'$.

И вообще, производная от производной $(n-1)$ -го порядка называется **производной n -го порядка**: $(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x)$.

Вопросы и задания

1. Какие задачи, приводящие к понятию производной, Вам известны?
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Как найти производную функции $y=f(x)$ по определению?
4. В чем состоит механический смысл производной?
5. Дайте определение непрерывной функции в точке и на отрезке. Сформулируйте свойства непрерывных функций.
6. Как связаны между собой дифференцируемость функции в некоторой точке с непрерывностью функции в этой точке?
7. Приведите пример непрерывной функции, не имеющей производной в некоторой точке.
8. Чему равна производная:
 - а) постоянной; б) алгебраической суммы дифференцируемых функций;
 - в) произведения двух дифференцируемых функций; г) дроби; д) сложной функции; е) обратной функции?
10. Запишите формулы для нахождения производных основных элементарных функций.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Пользуясь определением производной, найдите производные от следующих функций:
 - а) $y = 3x^2 - 4x$; б) $y = \frac{1}{x^2}$; в) $y = \sqrt{4x+1}$; г) $y = \sin(3x+1)$.

2. Дана функция: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$. Найдите производную этой функции в точке

$x = 0$.

3. Найдите производные следующих функций:

а) $y = x^4 + 3x^2 - 6$; б) $y = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 5$; в) $y = (x^2 + 2x + 1)(4x^2 + 1)$;

г) $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$; д) $y = \sqrt[3]{(1+2x)^2}$; е) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$; ж) $y = x^2 - \frac{3}{x^4}$;

з) $y = 2x \sin 3x - \cos 4x$.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная литература:

15. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 608 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: . 599-603. - ISBN 978-5-8112-6472-8

16. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-099894-4. - ISBN 978-5-94666-805-7

Дополнительной литературы:

22. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами : 1 курс : [линейная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа, комплексные числа] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. - 9-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2013. - 576 с. : ил. - ISBN 978-5-8112-5166-7

23. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Фебина. - 8-е изд. - Москва : АЙРИС ПРЕСС, 2013. - 591 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: с. 589-590. - ISBN 978-5-8112-5142-1

24. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО. - ISBN 978-5-9916-3467-0

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
2. Методические указания для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.math.ru> (Математика и образование)
- <http://mccme.ru> (Московский центр непрерывного математического образования)
- <http://www.allmath.ru> (Allmath.ru – вся математика в одном месте)
- <http://eqworld.ipmnet.ru> (EqWorld – Мир математических уравнений)
- <http://www.exponenta.ru> (Exponenta.ru – образовательный математический сайт)
- <http://www.neive.by.ru> (Геометрический портал)
- <http://graphfunk.narod.ru> (Графики функций)
- <http://tasks.ceemat.ru> (Задачник для подготовки к олимпиадам по математике)
- <http://www.mathem.h1.ru> (Математика on-line справочная информация в помощь студенту)
- <http://Math-Net.ru/> (Общероссийский математический портал)

Практическое занятие № 8

Тема занятия «Применение производных к исследованию функций»

Цель занятия: Показать возможность применения аппарата дифференциального исчисления к исследованию функций и построения их графиков.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-3.

При формировании этих компетенций в результате изучения дисциплины

«Математический анализ» специалист должен уметь решать задачи математического анализа: исследовать функции, опираясь на аппарат дифференциального исчисления, и строить их графики. Формирование у будущих специалистов этих компетенций на занятии предполагает обучение студентов

- сформулировать основные цели выполняемой работы;

- анализировать ситуации и делать выводы;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат.

Теоретическая часть

Функция $f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей)* в интервале $(a;b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$, из неравенства $x_2 > x_1$ следует выполнение неравенства $f(x_2) \geq f(x_1)$ ($f(x_2) \leq f(x_1)$). Такие функции называются монотонными.

Теорема 9. Если функция $y = f(x)$, дифференцируемая в интервале $(a;b)$, неубывающая (невозрастающая) на нем, то ее производная в этом интервале не отрицательна (не положительна), т.е. $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Доказательство. Пусть x – произвольное значение из интервала $(a;b)$. Придадим этому значению x приращение Δx такое, чтобы $x + \Delta x \in (a;b)$.

Если $f(x)$ - неубывающая функция, то $\Delta y \geq 0$ при $\Delta x > 0$ и $\Delta y \leq 0$ при $\Delta x < 0$,

то есть $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$.

Если $f(x)$ - невозрастающая, то $\Delta y \leq 0$ при $\Delta x > 0$ и $\Delta y \geq 0$ при $\Delta x < 0$, то есть

$\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0 \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$.

Теорема 10. Если функция $f(x)$, дифференцируемая в интервале $(a;b)$, удовлетворяет в нем условию $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то эта функция возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$.

Доказательство. По формуле Лагранжа для произвольных x_1 и x_2 из $(a;b)$ ($x_1 < x_2$) имеем:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где $x_1 < c < x_2$. Следовательно, если $f'(x) > 0$ в $(a;b)$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$, то есть $f(x_2) > f(x_1)$, отсюда следует, что функция возрастает. Если $f'(x) < 0$ в $(a;b)$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$, то есть $f(x_2) < f(x_1)$, отсюда следует, что функция убывает.

Замечание. Теоремы 9 и 10 составляют признак возрастания и убывания функции.

Из сформулированных теорем следует

Порядок исследования функции на возрастание и убывание.

1. Находим область определения функции.
2. Вычисляем производную функции.
3. Определяем критические точки.
4. Область определения функции разбиваем критическими точками на промежутки и определяем знак производной на каждом полученном промежутке (с помощью метода интервалов).
5. Делаем выводы о возрастании и убывании функции.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 **максимум (минимум)**, если существует такая окрестность этой точки $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что для всех x из этой окрестности, отличных от x_0 , выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точки максимума и минимума функции называется точками экстремума. Значения функции в точках экстремума называются **экстремумами функции**. По определению максимумы и минимумы функций могут достигаться лишь внутри области определения. Максимумы и минимумы в отличие от наибольшего и наименьшего значений – это локальные понятия.

Теорема (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая в интервале $(a; b)$ функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$, $a < x_0 < b$ экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Предположим для определенности, что в точке $x = x_0$ функция имеет максимум. Тогда при достаточно малых по абсолютной величине приращениях Δx ($\Delta x \neq 0$): $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$, то есть $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$. Тогда при $\Delta x < 0$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0; \text{ при } \Delta x > 0 \quad \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0.$$

По определению производной $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Если $f(x)$

имеет производную при $x = x_0$, то предел не зависит от того, как Δx стремится к нулю.

Но если $\Delta x \rightarrow 0$, оставаясь отрицательным, то $f(x_0) \geq 0$. Если $\Delta x \rightarrow 0$, оставаясь

положительным, то $f(x_0) \leq 0$. Два последних неравенства совместимы, если $f'(x_0) = 0$.

Аналогично доказывается для минимума.

Замечание 1. Это лишь необходимое условие.

Например, для функции $y = x^3$ $y'(0) = 0$, но в точке $x = 0$ экстремума нет.

Необходимое условие экстремума позволяет выделить точки «подозрительные» на экстремум, т.е. круг точек, которые следует исследовать на экстремум с помощью достаточных условий. Точки, для которых необходимое условие не выполнено не могут быть точками экстремума.

Выделяют два достаточных условия экстремума функции, одно из них использует производную первого порядка, а второе – производную второго порядка.

Теорема (первое достаточное условие существования экстремума). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0 , и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0). Если при переходе через эту точку производная меняет знак с «+» на «-» (с «-» на «+») в направлении возрастания аргумента, то функция имеет в этой точке максимум (минимум).

Доказательство. Предположим, что производная меняет знак с «+» на «-», то есть для всех x , достаточно близких к x_0 выполнены условия:

$$f'(x) > 0 \text{ при } x < x_0 \text{ и } f'(x) < 0 \text{ при } x > x_0.$$

Тогда по теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где $x < c < x_0$ или $x_0 < c < x$.

1. Пусть $x < x_0$, тогда $c < x_0$, $f'(c) > 0$, $f'(c)(x - x_0) < 0$.

Следовательно, $f(x) - f(x_0) < 0$, то есть $f(x) < f(x_0)$.

2. Пусть $x > x_0$, тогда $c > x_0$, $f'(c) < 0$, $f'(c)(x - x_0) < 0$.

Следовательно, $f(x) - f(x_0) < 0$, то есть $f(x) < f(x_0)$.

Таким образом, в обоих случаях $f(x) < f(x_0)$, т.е. x_0 - точка максимума.

Доказательство для минимума аналогично.

Сформулированная и доказанная теорема позволяет указать

Порядок исследования функции на экстремум.

1. Находим область определения функции.
2. Вычисляем производную функции.
3. Определяем критические точки.

4. Область определения функции разбиваем критическими точками на промежутки и определяем знак производной на каждом полученном промежутке (с помощью метода интервалов).
5. Делаем выводы о наличии точек экстремума.
6. Вычисляем сами экстремумы функции, т.е. значения функции в точках экстремума.

Замечание. Отметим, что пункты 1-4 совпадают с порядком исследования функции на возрастание и убывание. Поэтому, исследование функции на возрастание-убывание и экстремумы рекомендуется выполнять для функции одновременно.

Теорема (второе достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и её окрестности непрерывные первую и вторую производные, причём $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум (максимум), если $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$).

Доказательство. Пусть $f''(x_0) > 0$. Так как $f''(x)$ непрерывна в точке x_0 , то $f''(x) > 0$ и в некоторой окрестности точки x_0 . В этой окрестности точки x_0 функция $z = f'(x)$ возрастает, так как $z' = f''(x) > 0$. Но $f'(x_0) = 0$. Следовательно, при переходе через точку x_0 в направлении возрастания x $f'(x)$ меняет знак с «-» на «+», поэтому $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум.

Доказательство в случае $f''(x_0) < 0$ аналогично.

Замечание. Второе достаточное условие имеет более узкую область применения, так как часто при $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$.

Для сформулированного достаточного условия экстремума выделим

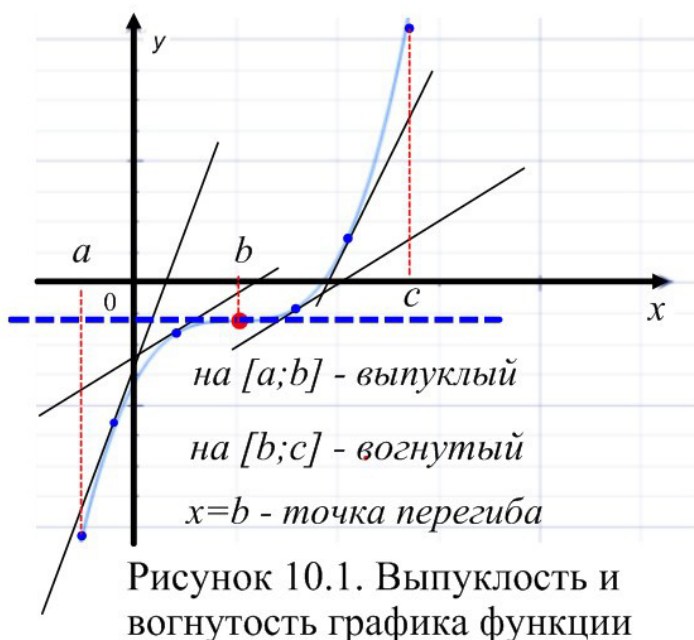
Порядок исследования функции на экстремум.

1. Находим область определения функции.
2. Вычисляем первую и вторую производные функции.
3. Определяем критические точки.
4. Вычисляем значения второй производной в критических точках
5. Делаем выводы о наличии точек экстремума.
6. Вычисляем сами экстремумы функции, т.е. значения функции в точках экстремума.

График функции $y = f(x)$ называется **выпуклым (вогнутым)** на интервале $(a;b)$, если соответствующий участок кривой $y = f(x)$ расположен ниже (выше) касательной, проведённой в любой точке $M(x; f(x))$ этого графика (Рисунок 10.1).

Точка графика дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется **точкой перегиба**, если при переходе через эту точку график меняет выпуклость на вогнутость или наоборот.

Очевидно, что в точке перегиба касательная, если она существует, пересекает кривую, так как с одной стороны от этой точки кривая лежит под касательной, а с другой – над нею.



Теорема (достаточное условие выпуклости и вогнутости функции). Если во всех точках интервала $(a;b)$ вторая производная функции $y = f(x)$ отрицательна, то есть $f''(x) < 0$, то кривая на этом интервале выпуклая; если $f''(x) > 0$, то кривая на этом интервале вогнутая.

Доказательство. Возьмем в интервале $(a;b)$ произвольную точку $x = x_0$ и проведем в этой точке касательную. Пусть уравнение кривой

$$y = f(x), \quad (3)$$

уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует $y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Применяя теорему Лагранжа к разности $f(x) - f(x_0)$, получим $y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, где c лежит между x_0 и x , или

$$y - \bar{y} = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0).$$

Применяя теорему Лагранжа к разности $f'(c) - f'(x_0)$, получаем

$$y - \bar{y} = f'(c_1)(c - x_0)(x - x_0), \quad (5)$$

где c_1 лежит между x_0 и c .

Если $x > x_0$, тогда $x_0 < c_1 < c < x$. Так как $x - x_0 > 0$, $c - x_0 > 0$ и по условию $f'(c_1) < 0$, то $y - \bar{y} < 0$.

Если $x < x_0$, тогда $x < c < c_1 < x_0$. Так как $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$ и по условию $f'(c_1) < 0$, тогда из (10.5) следует $y - \bar{y} < 0$.

Таким образом, доказали, что любая точка кривой лежит ниже касательной для любых x_0 и x из $(a; b)$, то есть кривая выпукла.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если $f'(a) = 0$ или $f'(a)$ не существует и при переходе через значение $x = a$ производная $f'(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ есть точка перегиба.

Замечание. Внутренние точки области определения функции, в которых $f'(a) = 0$ или $f'(a)$ не существует называют **критическими точками второго рода**.

Доказательство. Пусть $f'(x) < 0$ при $x < a$ и $f'(x) > 0$ при $x > a$. Тогда при $x < a$ кривая выпукла, а при $x > a$ - вогнута. Следовательно, точка кривой с абсциссой $x = a$ есть точка перегиба.

Пусть $f'(x) > 0$ при $x < a$ и $f'(x) < 0$ при $x > a$, то при $x < a$ кривая вогнута, при $x > a$ кривая выпукла, то есть точка кривой с абсциссой $x = a$ - точка перегиба.

Рассмотренные теоремы в этом пункте позволяют сформулировать

Порядок исследования функции на выпуклость и вогнутость, точки перегиба графика функции.

1. Находим область определения функции.
2. Вычисляем первую и вторую производные функции.
3. Определяем критические точки второго рода.
4. Область определения функции разбиваем критическими точками второго рода на промежутки и определяем знак второй производной на каждом промежутке.
5. Делаем выводы о выпуклости или вогнутости графика функции и существовании точек перегиба.

Очень часто приходится исследовать формулу кривой $y = f(x)$, а значит, и характер изменения соответствующей функции при неограниченном возрастании абсциссы или ординаты переменной точки кривой. При этом важным частным случаем является тот, когда исследуемая кривая при удалении её переменной точки в бесконечность неограниченно приближается к некоторой прямой.

Прямая A называется **асимптотой** кривой, если расстояние δ от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю.

Различают асимптоты вертикальные (параллельные оси Ox) и наклонные (не параллельные оси Ox).

Прямая $x = a$ называется **вертикальной** асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ является бесконечным.

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$, если эта функция представима в виде

$$f(x) = kx + b + \lambda(x), \text{ где } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \lambda(x) = 0.$$

Наклонную асимптоту ищем в виде $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

Отметим, **примерный план исследования функции.**

1. Находим область определения функции.

2. Исследуем функцию на четность-нечетность, периодичность.
3. Находим точки пересечения графика функции с осями координат и промежутки знакопостоянства функции.
4. Определяем точки разрыва функции и поведение функции вблизи точек разрыва. Находим вертикальные асимптоты к графику функции.
5. Выясняем поведение функции на бесконечности.
6. Находим наклонные асимптоты к графику функции.
7. Исследуем функцию на возрастание-убывание и экстремумы.
8. Выясняем вопрос о выпуклости и вогнутости графика функции, находим точки перегиба.
9. В случае необходимости находим дополнительные точки и согласно с проведённым исследованием строим график функции.

Вопросы и задания

1. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на некотором промежутке.
2. Как найти интервалы монотонности функции?
3. Дайте определения экстремумов функции.
4. Определите наибольшее и наименьшее значения функции.
5. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
6. Какие точки называются критическими?
7. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.
8. Как ведется исследование функции на экстремум с помощью второй производной?
9. Укажите порядок исследования функции на возрастание и убывание и экстремумы.
10. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции? Укажите порядок решения этой задачи.
11. Определите понятия выпуклость и вогнутость графика функции.
12. Какую точку называют точкой перегиба?
13. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции?
14. Как определить точки перегиба?
15. Что называется асимптотой кривой $y = f(x)$?
16. Как найти асимптоту $y = ax + b$ кривой $y = f(x)$, т.е. как найти a и b ?
17. По какой схеме следует проводить исследование функции и построение ее графика?
18. Для решения каких вопросов исследования функции и построения ее графика:

- а) не нужны теория пределов и дифференциальное исчисление?
- б) необходимо уметь вычислять пределы?
- в) нужна первая производная?
- г) нужна вторая производная?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Найдите интервалы возрастания и убывания следующих функций:

а) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$; б) $y = \frac{2x}{1+x^2}$; в) $y = \cos x - x$.

2. Исследуйте на экстремум следующие функции:

а) $y = x^2(x-6)$; б) $y = e^x \sin x$; в) $y = \frac{x}{\ln x}$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения следующих функций:

а) $y = x^2 - 4x + 6$ на отрезке $[-3; 10]$;

б) $y = \sqrt{5-4x}$ на отрезке $[-1; 1]$.

в) Реакции организма на два лекарства как функции t (время выражается в часах)

составляют $r_1(t) = te^{-t}$ и $r_2(t) = t^2 e^{-t}$. У какого из лекарств выше максимальная реакция?

4. Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости следующих кривых:

а) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$; б) $y = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$; в) $y = 1 - \ln(x^2 - 4)$.

5. Найдите асимптоты следующих функций:

а) $y = \frac{2x}{x-1}$; б) $y = \frac{1}{2x^2 + x - 1}$.

6. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$; б) $y = (x-3)\sqrt{x}$.

7. Закон перехода некоторого вещества в раствор в зависимости от времени t задается формулой: $x(t) = 2(1 - e^{-5t})$. Исследуйте эту функцию и постройте график этой зависимости.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная литература:

Основная литература:

17. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 608 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: . 599-603. - ISBN 978-5-8112-6472-8

18. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-099894-4. - ISBN 978-5-94666-805-7

Дополнительной литературы:

25. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами : 1 курс : [линейная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа, комплексные числа] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. - 9-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2013. - 576 с. : ил. - ISBN 978-5-8112-5166-7

26. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Фебина. - 8-е изд. - Москва : АЙРИС ПРЕСС, 2013. - 591 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: с. 589-590. - ISBN 978-5-8112-5142-1

27. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО. - ISBN 978-5-9916-3467-0

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
2. Методические указания для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.math.ru> (Математика и образование)
- <http://mccme.ru> (Московский центр непрерывного математического образования)
- <http://www.allmath.ru> (Allmath.ru – вся математика в одном месте)
- <http://eqworld.ipmnet.ru> (EqWorld – Мир математических уравнений)
- <http://www.exponenta.ru> (Exponenta.ru – образовательный математический сайт)

- <http://www.neive.by.ru> (Геометрический портал)
- <http://graphfunk.narod.ru> (Графики функций)
- <http://tasks.ceemat.ru> (Задачник для подготовки к олимпиадам по математике)
- <http://www.mathem.h1.ru> (Математика on-line справочная информация в помощь студенту)
- <http://Math-Net.ru/> (Общероссийский математический портал)

Практическое занятие № 9-11

Тема занятия «Приложения производной: уравнение касательной и нормали к плоской кривой»

Цель занятия: изучение приложений производной функции.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-3

Формирование у будущих специалистов этой компетенций на занятии предполагает обучение студентов

- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- планировать самостоятельную работу;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Составление уравнений касательной и нормали к плоской кривой.
2. Применение правил Лопиталя при вычислении пределов функции.
3. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Обсудите вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.

2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Составьте уравнения касательной и нормали к параболе $y = x^2$ в точке $A(2;4)$.

Решение. Так как надо составить уравнения касательной и нормали в точке $A(2;4)$, то $x_0 = 2, y_0 = 4$.

Тогда уравнение касательной в точке $A(2,4)$ будет иметь вид: $y = 4 + 4(x - 2)$, или $y = 4x - 4$.

А уравнение нормали: $y = \frac{1}{4}(x - 2)$ или $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$.

2. С помощью правила Лопиталя найдите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \operatorname{tg} 5x$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x) x^{\frac{1}{2}}$.

Решение. а) В данном пределе имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. По правилу Лопиталя заменим отношение этих величин отношением их производных:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x^4 + 2x^2 - 3)'}{(x^2 - 3x + 2)'} = \frac{4x^3 + 4x}{2x - 3} = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 3} = -\frac{8}{1} = -8.$$

Замечание. Аналогично можно раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

б) В данном пределе имеем неопределенность $0 \cdot \infty$. Сведем эту неопределенность к виду $\frac{0}{0}$, а затем применим правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \operatorname{tg} 5x &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{1}{\operatorname{tg} 5x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)'}{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} 5x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \operatorname{tg}^2 5x \cdot \cos^2 5x}{5} = \\ &= \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^2 5x = \frac{1}{5} \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin^2 \frac{5\pi}{2} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

в) В данном пределе имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Преобразуем функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, затем применим правило Лопиталья:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(ctgx - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{tgx} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - tgx}{xtgx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - tgx)'}{(xtgx)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{tgx + \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1 - 1}{0 + 1} = 0.\end{aligned}$$

г) В данном пределе имеем неопределенность вида 1^∞ . Заметим сразу, что таким образом можно раскрыть неопределенности вида ∞^0 и 0^0 . Эти случаи нахождения предела

функции сводятся к случаю $0 \cdot \infty$ (а затем к случаю $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$) следующим путем: функция логарифмируется и сначала находится предел ее логарифма, а затем по найденному пределу логарифма находится и предел самой функции. Таким образом, пусть

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)x^{\frac{1}{2}} = a.$$

Логарифмируем функцию и находим предел ее логарифма:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)x^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x)x^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}.$$

Здесь нахождение предела свелось к случаю $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталья,

получим: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x \cos x}$. Неопределенность $\frac{0}{0}$ осталась. Применим правило Лопиталья 2-й раз:

$$\ln a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\sin x)'}{(2x \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2x \sin x + 2 \cos x} = -\frac{1}{2}.$$

Теперь по найденному пределу логарифма функции находим искомый предел самой функции: $a = e^{\ln a} = e^{-\frac{1}{2}}$.

$$\text{Таким образом: } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)x^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

3. Разложите многочлен $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ по степеням $x + 2$ по формуле Тейлора.

Решение. Найдем значение многочлена и его производных при $x = 2$:

$$P(-2) = (-2)^3 - 6(-2)^2 + 11(-2) - 6 = -60,$$

$$P'(x) = 3x^2 - 12x + 11, P'(-2) = 12 + 24 + 11 = 47,$$

$$P''(x) = 6x - 12, P''(-2) = -12 - 12 = -24,$$

$P'''(x) = 6, P'''(-2) = 6; P^{IV}(x) = 0$ и все последующие производные равны 0. Тогда для разложения многочлена по степеням $(x+2)$ по формуле Тейлора имеем:

$$P(x) = P(-2) + \frac{P'(-2)}{1!}(x+2) + \frac{P''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{P'''(-2)}{3!}(x+2)^3, \text{ т.е.}$$

$$P(x) = -60 + 47(x+2) + \frac{-24}{2!}(x+2)^2 + \frac{6}{3!}(x+2)^3 = -60 + 47(x+2) - 12(x+2)^2 + (x+2)^3.$$

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Сформулируйте геометрический смысл производной функции.
2. Выведите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
3. Какая прямая называется нормалью к кривой? Какой вид имеет уравнение нормали?
4. Сформулируйте правило Лопиталья для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов функции.
5. Сформулируйте правило Лопиталья для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов функции.
6. Сколько раз подряд можно применять правило Лопиталья и когда это правило неприменимо?
7. Как можно раскрыть неопределенность вида $0 \cdot \infty$ при вычислении предела функции?
8. Что нужно сделать при вычислении предела функции, если он содержит неопределенность вида $\infty - \infty$. ?
9. Какой прием применяют для применения правил Лопиталья, если предел функции содержит неопределенность вида 0^0 , или ∞^0 , или 1^∞ ?
10. Расскажите о формуле Тейлора и формуле Маклорена. Для чего эти формулы могут использоваться?
11. Разложите по формуле Тейлора (Маклорена) функции $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Составьте уравнение касательной и нормали

а) к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке с абсциссой $x = 1$;

б) к кривой $y = \ln x$ в точке с абсциссой $x = 1$.

2. Используя правило Лопиталя, найдите следующие пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$; в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 \ln x$;

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$; ж) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 5x}$; з) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$; и) $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} \ln x$;

к) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{x^2 - 1} - \frac{7}{x^3 - 1} \right)$; л) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$; м) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$.

3. По формуле Тейлора разложите многочлен $P(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$ по степеням $x + 1$.

4. Закон зависимости массы вещества, вступившего в химическую реакцию, в

зависимости от времени, выражается формулой: $m = e^{2t-2}(t^2 + 1)$, где t - время в минутах, m - масса в граммах. Сколько вещества вступит в реакцию через 66 секунд?

Задания для самостоятельной работы дома

1. Составьте уравнение касательной и нормали

а) к окружности $x^2 + y^2 = 25$ в точке $A(3; -4)$;

б) к гиперболу $y = \frac{1}{x}$ в точке $A(1; 1)$.

2. Используя правило Лопиталя, найдите следующие пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 11x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 5x}{\tan 3x}$; г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+x)}$;

д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{\ln(e^x - e^2)}{\ln(x-2)}$; ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 5x}$; з) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x$;

и) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln(x + e^x)$; к) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right)$; л) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + e^x \right)^{\frac{1}{x}}$; м) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{6}{1+2 \ln x}}$.

3. По формуле Тейлора разложите многочлен:

а) $P(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$ по степеням $x - 2$;

б) $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ по степеням $x - 1$.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная литература:

19. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 608 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: . 599-603. - ISBN 978-5-8112-6472-8

20. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-099894-4. - ISBN 978-5-94666-805-7

Дополнительной литературы:

28. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами : 1 курс : [линейная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа, комплексные числа] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. - 9-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2013. - 576 с. : ил. - ISBN 978-5-8112-5166-7

29. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Фебина. - 8-е изд. - Москва : АЙРИС ПРЕСС, 2013. - 591 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: с. 589-590. - ISBN 978-5-8112-5142-1

30. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО. - ISBN 978-5-9916-3467-0

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
2. Методические указания для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.math.ru> (Математика и образование)
- <http://mccme.ru> (Московский центр непрерывного математического образования)
- <http://www.allmath.ru> (Allmath.ru – вся математика в одном месте)
- <http://eqworld.ipmnet.ru> (EqWorld – Мир математических уравнений)

- <http://www.exponenta.ru> (Exponenta.ru – образовательный математический сайт)
- <http://www.neive.by.ru> (Геометрический портал)
- <http://graphfunk.narod.ru> (Графики функций)
- <http://tasks.ceemat.ru> (Задачник для подготовки к олимпиадам по математике)
- <http://www.mathem.h1.ru> (Математика on-line справочная информация в помощь студенту)
- <http://Math-Net.ru/> (Общероссийский математический портал)

Практическое занятие № 12-15

Тема занятия « Интегральное исчисление функций»

Цель занятия: Установление связи между понятиями первообразной функции и неопределенный интеграл. Формирование навыков вычисления неопределенных интегралов с помощью непосредственного интегрирования.

Компетенции, формируемые на занятии:ОПК-3

Формирование у будущих специалистов этой компетенций на занятии предполагает обучение студентов

- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- планировать самостоятельную работу;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат.

Теоретическая часть

Для дифференцирования существует обратное действие – интегрирование, т.е. отыскание функции по заданной её производной. К этому приводят задачи из различных областей науки.

Приведём примеры.

1. Найти закон движения тела $S = S(t)$, если известна скорость прямолинейного движения $v = v(t)$. Учитывая механический смысл производной, ясно, что искомой функцией $S = S(t)$ будет такая, что $S'(t) = v(t)$.

2. Если известна скорость $v = v(t)$ протекания химической реакции, показывающая количество вещества реагирующего в единицу времени, то законом реакции будет функция $m = m(t)$, такая, что $m'(t) = v(t)$.

Эти примеры позволяют ввести следующее ниже определение.

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для данной функции $f(x)$ на данном промежутке, если $(F(x))' = f(x)$ на этом промежутке.

Например, $F(x) = x^4$ является первообразной для $f(x) = 4x^3$, так как $(x^4)' = 4x^3$. Более того, любая функция вида $F(x) = x^4 + C$, где $C = const$ также является первообразной для $f(x) = 4x^3$.

Теорема 1. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$ в некотором промежутке, то разность между ними в этом промежутке равна постоянному числу, т.е. $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Из теоремы 1 следует, что если известна какая-нибудь первообразная $F(x)$ для $f(x)$, то любая функция $\Phi(x) = F(x) + C$ тоже первообразная для $f(x)$. Таким образом, нахождение первообразной для функции возможно, лишь с точностью до постоянного слагаемого.

Выражение $F(x) + C$, где $F(x)$ – есть первообразная для функции $f(x)$, а C – произвольная постоянная называется **неопределённым интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Введённая операция называется **операцией интегрирования** и в отличие от дифференцирования эта операция многозначна. Этим и определяются термин неопределённый интеграл.

Отметим **основные свойства неопределённого интеграла**.

$$1^0 \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

$$2^0 \int af(x)dx = a \int f(x)dx.$$

$$3^0 \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Учитывая, что операция интегрирования обратная для операции дифференцирования, и используя таблицу производных, получим таблицу основных интегралов.

$$1^0 \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$3^0 \int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k \ln a} + C$$

$$5^0 \int \cos kx = \frac{1}{k} \sin kx + C$$

$$7^0 \int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k} \operatorname{tg} kx + C$$

$$9^0 \int \frac{dx}{x^2 + k^2} = \begin{cases} \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{x}{k} + C \\ -\frac{1}{k} \operatorname{arcctg} \frac{x}{k} + C \end{cases}$$

$$11^0 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C$$

$$13^0 \int \frac{dx}{x^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{x-k}{x+k} \right| + C$$

$$2^0 \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$4^0 \int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$$

$$6^0 \int \sin kx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$$

$$8^0 \int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k} \operatorname{ctg} kx + C$$

$$10^0 \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{k} + C \\ -\arccos \frac{x}{k} + C \end{cases}$$

$$12^0 \int \frac{x dx}{x^2 + k} = \frac{1}{2} \ln |x^2 + k| + C$$

Если для сведения интеграла к табличным требуется только провести алгебраические преобразования подынтегральной функции и применить свойства неопределённого интеграла, то говорят о **методе непосредственного интегрирования**.

В некоторых случаях, когда интеграл $\int f(x) dx$ не может быть непосредственно преобразован к табличному, полезно применять метод замены переменной.

Пусть требуется вычислить $\int f(x) dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $f(x) = f(\varphi(t))$, $dx = \varphi'(t) dt$. Следовательно, получаем формулу

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

Формула (1) носит название формулы замены переменной в неопределённом интеграле.

Замечание 1. Посчитав интеграл этим методом, необходимо возвратиться к старой переменной.

Замечание 2. Иногда формулу замены переменной удобно применять слева направо, то есть

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt, \quad (2)$$

где $t = \varphi(x)$, тогда $dt = \varphi'(x)dx$. В этом случае в самом интеграле содержится подсказка о необходимости применять замену переменной (подсказкой является дифференциал или его часть от некоторой функции, которую принимают за новую переменную).

Замечание 3. Формула (11.2) может быть переписана в виде

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)). \quad (3)$$

В этом случае говорят о вычислении интеграла с помощью преобразования дифференциала. Справедливо следующее утверждение.

Если $\int f(t)dx = F(t) + C$ и $t = \varphi(x)$, то $\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C$.

С учётом сделанного замечания можем предложить другое решение выше рассмотренного примера.

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Известно, что $(uv)' = u'v + uv'$. Отсюда следует, что uv – является первообразной для суммы

функции $u'v + v'u$, то есть $\int (u'v + v'u)dx = uv + C$, или $\int u'v dx + \int v'udx = uv + C$.

Учитывая, что $u'(x)dx = du, v'(x)dx = dv$, имеем $\int vdu + \int u dv = uv + C$, или

$\int u dv = uv - \int vdu + C$. Так как в интеграле $\int vdu$ содержится $const$, то последнюю формулу можно переписать в виде

$$\int u dv = uv - \int vdu. \quad (4)$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям. Она используется, когда интеграл, стоящий справа, вычисляется проще стоящего слева. Существуют целые классы интегралов берущихся по частям. Выделим некоторые из них.

К *первому классу* отнесём интегралы $\int P(x) \sin kx dx$, $\int P(x) \cos kx dx$,
 $\int P(x) e^{kx} dx$, $\int P(x) a^{kx} dx$, где $P(x)$ – многочлен. Интегралы этого класса берутся по частям столько раз, какова степень многочлена, причём $u = P(x)$.

Ко *второму классу* отнесём интегралы $\int P(x) \ln(kx + b) dx$, $\int P(x) \arcsin kx dx$,
 $\int P(x) \arccos kx dx$, $\int P(x) \operatorname{arctg} kx dx$, $\int P(x) \operatorname{arcctg} kx dx$, где $P(x)$ – многочлен. Эти интегралы берутся по частям, причём за u берут трансцендентную функцию.

К интегралам *третьего класса* отнесём интегралы вида $\int e^{kx} \cos bxdx$,
 $\int e^{kx} \sin bxdx$, $\int a^{kx} \cos bxdx$, $\int a^{kx} \sin bxdx$. Эти интегралы берутся по частям последовательно два раза, причём оба раза за u выбирается либо показательная, либо тригонометрическая функция. После двукратного интегрирования получается линейное уравнение относительно искомого интеграла.

Вопросы и задания

1. Запишите формулу замены переменной в неопределённом интеграле. Когда целесообразно применять замену переменной интегрирования?
2. Расскажите, как применяется формула замены переменной в неопределённом интеграле. Что необходимо сделать после сведения интеграла к табличному?
3. Запишите формулу интегрирования по частям.
4. Когда целесообразно применение способа интегрирования по частям?
5. Интегралы какого вида можно вычислять с помощью формулы интегрирования по частям?
6. Что принимается за u для интегралов вида $\int P(x) e^{ax} dx$, $\int P(x) \sin ax dx$, $\int P(x) \cos ax dx$ ($P(x)$ – многочлен)?
7. Что принимается за u для интегралов вида $\int P(x) \ln x dx$, $\int P(x) \operatorname{arctg} x dx$, $\int P(x) \operatorname{arcctg} x dx$, $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \arccos x dx$ ($P(x)$ – многочлен)?
8. Как вычисляются интегралы $\int a^{kx} \sin nxdx$ и $\int a^{kx} \cos nxdx$?

Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями

Методом замены переменной вычислите интегралы:

а) $\int \cos^5 4x \cdot \sin 4x dx$; б) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - 1}}$.

1. Вычислите интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int (1 - 3x)e^{2x} dx$; б) $\int (x^2 - 1)\sin 3x dx$; в) $\int x \arctg 3x dx$;

г) $\int e^x \cos x dx$; д) $\int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} dx$.

2. Вычислите интегралы:

а) $\int e^{x+x^2} (1 + 2x) dx$; б) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$; в) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная литература:

21. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 608 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: . 599-603. - ISBN 978-5-8112-6472-8

22. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-099894-4. - ISBN 978-5-94666-805-7

Дополнительной литературы:

31. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами : 1 курс : [линейная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа, комплексные числа] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. - 9-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2013. - 576 с. : ил. - ISBN 978-5-8112-5166-7

32. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Фебина. - 8-е изд. - Москва : АЙРИС ПРЕСС, 2013. - 591 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: с. 589-590. - ISBN 978-5-8112-5142-1

33. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. -

М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО. - ISBN 978-5-9916-3467-0

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
2. Методические указания для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.math.ru> (Математика и образование)
- <http://mccme.ru> (Московский центр непрерывного математического образования)
- <http://www.allmath.ru> (Allmath.ru – вся математика в одном месте)
- <http://eqworld.ipmnet.ru> (EqWorld – Мир математических уравнений)
- <http://www.exponenta.ru> (Exponenta.ru – образовательный математический сайт)
- <http://www.neive.by.ru> (Геометрический портал)
- <http://graphfunk.narod.ru> (Графики функций)
- <http://tasks.ceemat.ru> (Задачник для подготовки к олимпиадам по математике)
- <http://www.mathem.hl.ru> (Математика on-line справочная информация в помощь студенту)
- <http://Math-Net.ru/> (Общероссийский математический портал)

Практическое занятие № 16

Тема занятия «Понятие определенного интеграла. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле»

Цель занятия: Установление связи между понятиями неопределенного и определенного интегралов. Формирование навыков нахождения определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница, применения формулы замены переменной и метода интегрирования по частям в определенном интеграле.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-3

Формирование у будущих специалистов этой компетенций на занятии предполагает обучение студентов

- сформулировать основные цели выполняемой работы;

- анализировать ситуации и делать выводы;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- планировать самостоятельную работу;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Определение определенного интеграла и его свойства.
2. Вычисление определенного интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница.
3. Формула замены переменной в определенном интеграле.
4. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Пройдите компьютерное тестирование по данной теме.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислите определенный интеграл:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2 \sin x + \frac{1}{4 \sin^2 x} \right) dx.$$

Решение. Для того, чтобы вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница надо:

- 1) найти первообразную функции;
- 2) в полученную первообразную подставить вместо аргумента сначала верхний предел интегрирования, затем нижний предел интегрирования и из первого результата вычесть второй.

Исходя из этого, имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2 \sin x + \frac{1}{4 \sin^2 x} \right) dx &= \left(-2 \cos x - \frac{1}{4} \operatorname{ctg} x \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= \left(-2 \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} \right) - \left(-2 \cos \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \left(-2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \left(-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \right) = \frac{7\sqrt{3}}{6} - 1. \end{aligned}$$

2. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^3 \frac{2x dx}{\sqrt{16+x^2}};$

б) $\int_0^{0.5} \operatorname{arctg} 2x dx.$

Решение. а) Этот интеграл вычисляется с помощью замены переменной. При замене пересчитываем пределы интегрирования:

$$\int_0^3 \frac{2x dx}{\sqrt{16+x^2}} = \left| \begin{array}{l} 16+x^2=t, \quad dt=2x dx \\ \alpha=16+0^2=16, \quad \beta=16+3^2=25 \end{array} \right| = \int_{16}^{25} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{t} \Big|_{16}^{25} = 2\sqrt{t} \Big|_{16}^{25} = 2 \cdot (\sqrt{25} - \sqrt{16}) = 2 \cdot (5 - 4) = 2.$$

б) Для вычисления этого интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5} \operatorname{arctg} 2x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} 2x, \quad du = \frac{2}{1+4x^2} dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} 2x \Big|_0^{0.5} - \int_0^{0.5} \frac{2x}{1+4x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} 1 - 0 \cdot \operatorname{arctg} 0 - \int_0^{0.5} \frac{2x}{1+4x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \int_0^{0.5} \frac{2x}{1+4x^2} dx. \end{aligned}$$

Интеграл $\int_0^{0.5} \frac{2x}{1+4x^2} dx$ вычисляем заменой переменной:

$$\int_0^{0.5} \frac{2x}{1+4x^2} dx = \left| \begin{array}{l} 1+4x^2=t, \quad dt=8x dx \\ 2x dx = \frac{dt}{4} \\ \alpha=1+4 \cdot 0^2=1, \quad \beta=1+4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2=2 \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \ln \left| t \right|_1^2 = \frac{1}{4} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{4} \ln 2. \quad \text{Отсюда}$$

$$\int_0^{0.5} \operatorname{arctg} 2x dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2.$$

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Что называется определенным интегралом от a до b от функции $f(x)$?
2. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
3. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.

4. Запишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.
5. Запишите формулу замены переменной в определенном интеграле.
6. На что следует обращать внимание при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной по сравнению с неопределенным интегралом?
7. Расскажите о приближенных способах вычисления определенного интеграла (формула прямоугольников, формула трапеций, метод Симпсона).
8. Разберите примеры решения типовых задач в тетради.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислите определенные интегралы: а)

$$\int_0^1 x^4 dx; \text{ б) } \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}; \text{ в) } \int_1^e \frac{dx}{x}; \text{ г) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx; \text{ д) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

2. Методом замены переменной вычислите определенные интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_1^2 \frac{dx}{2x-1}; \text{ б) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5x dx}{(1-x^2)^3}; \text{ в) } \int_{2\sqrt{2}}^4 x \sqrt{x^2-7} dx; \text{ г) } \int_1^e \frac{\ln x dx}{x}; \text{ д) } \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}} x^2 \sin 3x^3 dx; \\ \text{е) } \int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{9+x^2}}; \text{ ж) } \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

3. Вычислите определенные интегралы методом интегрирования по частям:

$$\text{а) } \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx; \text{ б) } \int_0^{\pi} x \sin x dx; \text{ в) } \int_1^e \ln^2 x dx; \text{ г) } \int_0^1 \arcsin x dx; \text{ д) } \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx.$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислите определенные интегралы: а)

$$\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx; \text{ б) } \int_0^1 e^x dx; \text{ в) } \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \text{ г) } \int_0^{\pi} \sin x dx.$$

2. Методом замены переменной вычислите определенные интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}; \text{ б) } \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^4}; \text{ в) } \int_0^1 \frac{3e^x dx}{e^x+2}; \text{ г) } \int_1^2 \frac{3x^2+2}{x^3+2x} dx; \text{ д) } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{5 \sin x dx}{(1-\cos x)^3}; \\ \text{е) } \int_0^2 3x e^{-x^2} dx; \text{ ж) } \int_0^1 \frac{x+1}{1+4x^2} dx. \end{aligned}$$

3. Вычислите определенные интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+3) \sin 2x dx$; в) $\int_1^e x^2 \ln x dx$; г) $\int_0^1 \arccos x dx$.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная литература:

23. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 608 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: . 599-603. - ISBN 978-5-8112-6472-8

24. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-099894-4. - ISBN 978-5-94666-805-7

Дополнительной литературы:

34. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами : 1 курс : [линейная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа, комплексные числа] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федина, Ю. А. Шевченко. - 9-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2013. - 576 с. : ил. - ISBN 978-5-8112-5166-7

35. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Фебина. - 8-е изд. - Москва : АЙРИС ПРЕСС, 2013. - 591 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: с. 589-590. - ISBN 978-5-8112-5142-1

36. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО. - ISBN 978-5-9916-3467-0

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
2. Методические указания для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

**Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»,
необходимых для освоения дисциплины**

- <http://www.math.ru> (Математика и образование)
- <http://mccme.ru> (Московский центр непрерывного математического образования)
- <http://www.allmath.ru> (Allmath.ru – вся математика в одном месте)
- <http://eqworld.ipmnet.ru> (EqWorld – Мир математических уравнений)
- <http://www.exponenta.ru> (Exponenta.ru – образовательный математический сайт)
- <http://www.neive.by.ru> (Геометрический портал)
- <http://graphfunk.narod.ru> (Графики функций)
- <http://tasks.ceemat.ru> (Задачник для подготовки к олимпиадам по математике)
- <http://www.mathem.h1.ru> (Математика on-line справочная информация в помощь студенту)
- <http://Math-Net.ru/> (Общероссийский математический портал)

Практическое занятие № 17

Тема занятия «Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования, интегралы от неограниченных функций»

Цель занятия: формирование умений вычислять несобственные интегралы.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-3

Формирование у будущих специалистов этой компетенций на занятии предполагает обучение студентов

- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- планировать самостоятельную работу;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Несобственные интегралы с бесконечным верхним пределом интегрирования.
2. Несобственные интегралы с бесконечным нижним пределом интегрирования.
3. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
4. Несобственные интегралы от разрывных функций.
5. Теоремы сравнения и их роль в вычислении несобственных интегралов.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Повторите определение предела функции, его свойства и приемы при их нахождении.
2. Прочитайте материал лекции по теме занятия и найдите ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями. При необходимости воспользуйтесь рекомендуемой литературой.
3. Выучите определения несобственных интегралов первого и второго рода и теоремы сравнения.
4. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.

2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.

1. Решите предложенный вариант самостоятельной работы и сдайте его на проверку преподавателю.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость.

$$1) \int_0^{+\infty} (x^2 + 1) dx.$$

Решение. Имеем несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом интегрирования. По определению имеем

$$\int_0^{+\infty} (x^2 + 1) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A (x^2 + 1) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{A^3}{3} + A \right) = \infty.$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Решение. Имеем несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования.

Разобьем данный интеграл на сумму двух несобственных интегралов и найдем каждый из них:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^a \frac{dx}{1+x^2} + \int_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} (\arctg x) \Big|_A^a + \lim_{B \rightarrow +\infty} (\arctg x) \Big|_a^B = \lim_{A \rightarrow -\infty} (\arctg a - \arctg A) + \\ &+ \lim_{B \rightarrow +\infty} (\arctg B - \arctg a) = \arctg a - \lim_{A \rightarrow -\infty} \arctg A + \lim_{B \rightarrow +\infty} \arctg B - \arctg a = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Решение. Здесь при $x = 1$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв, поэтому

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-\frac{1}{x-1} \right) \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) = \infty. \text{ т.е.}$$

данный интеграл расходится.

$$4) \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$$

Решение. При $x = 4$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв, поэтому по определению

$$\begin{aligned} \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_2^{4-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{4+\varepsilon_2}^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \left(-3(4-x)^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_2^{4-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \left(-3(4-x)^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_{4+\varepsilon_2}^6 = \\ &= -3 \left(\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \left(\varepsilon_1^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \right) + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \left((-2)^{\frac{1}{3}} + \varepsilon_2^{\frac{1}{3}} \right) = 3 \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} \right) = 6\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

2. С помощью теорем сравнения установите сходимость или расходимость интегралов.

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}}.$$

Решение. Данный интеграл сходится, так как при $x \geq 1$ $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}} < \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}$ сходится (докажите самостоятельно по определению).

$$2) \int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x\sqrt{x}} dx.$$

Решение. Данный интеграл расходится, так как при $x \geq 1$ $\frac{x+2}{x\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}}$, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ расходится (докажите самостоятельно).

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Определите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования.
2. Когда несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся (расходящимся)?
3. Для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
4. Определите несобственный интеграл от разрывной функции.

5. Когда несобственный интеграл от разрывной функции называется сходящимся (расходящимся)?

6. Для несобственного интеграла от разрывной функции запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.

7. Сформулируйте теорему сравнения для несобственных интегралов.

8. Дайте определение абсолютно сходящегося интеграла.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость

а) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$; б) $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$; в) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; г) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$; д) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; е) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

2. Укажите верные утверждения:

Если $\forall x \in [a; +\infty)$ $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам $0 \leq g(x) \leq f(x)$, то ...

- из сходимости $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} g(x) dx$;
- из расходимости $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} f(x) dx$;
- из сходимости $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x) dx$;
- из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x) dx$;
- из сходимости $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x) dx$;
- из расходимости $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость

а) $\int_{-\infty}^1 e^x dx$; б) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$; в) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$; г) $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$; д) $\int_1^{+\infty} \frac{x+5}{x^3 \sqrt{x}} dx$;

е) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$; ж) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^3}$; з) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$; и) $\int_{-2}^2 \frac{x dx}{x^2 - 1}$.

2. Укажите верные утверждения:

- из сходимости $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x) dx$;
- из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$;
- из сходимости $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$;
- из расходимости $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная литература:

25. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 608 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: . 599-603. - ISBN 978-5-8112-6472-8

26. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-099894-4. - ISBN 978-5-94666-805-7

Дополнительной литературы:

37. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами : 1 курс : [линейная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа, комплексные числа] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. - 9-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2013. - 576 с. : ил. - ISBN 978-5-8112-5166-7

38. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Фебина. - 8-е изд. - Москва : АЙРИС ПРЕСС, 2013. - 591 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: с. 589-590. - ISBN 978-5-8112-5142-1

39. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО. - ISBN 978-5-9916-3467-0

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и

электротехника

2. Методические указания для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.math.ru> (Математика и образование)
- <http://mccme.ru> (Московский центр непрерывного математического образования)
- <http://www.allmath.ru> (Allmath.ru – вся математика в одном месте)
- <http://eqworld.ipmnet.ru> (EqWorld – Мир математических уравнений)
- <http://www.exponenta.ru> (Exponenta.ru – образовательный математический сайт)
- <http://www.neive.by.ru> (Геометрический портал)
- <http://graphfunk.narod.ru> (Графики функций)
- <http://tasks.ceemat.ru> (Задачник для подготовки к олимпиадам по математике)
- <http://www.mathem.h1.ru> (Математика on-line справочная информация в помощь студенту)
- <http://Math-Net.ru/> (Общероссийский математический портал)

Практическое занятие № 18

Тема занятия «Приложения определенного интеграла»

Цель занятия: Показать возможность применения интегрального исчисления к решению задач различных областей естествознания.

Компетенции, формируемые на занятии:ОПК-3

Формирование у будущих специалистов этой компетенций на занятии предполагает обучение студентов

- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- планировать самостоятельную работу;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Применение определенного интеграла для вычисления площадей.
2. Вычисление длины дуги.
3. Вычисление объемов.
4. Вычисление площади поверхности вращения.
5. Приложения определенного интеграла к решению задач естествознания.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Разберите с преподавателем вопросы, которые остались Вами не понятыми по теме этого занятия.
4. На занятии 36 решите предложенный вариант самостоятельной работы №12 по теме «Определенный интеграл» и сдайте на проверку преподавателю.

Дома

1. Закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома. К занятию 36 закончите выполнение ИДЗ №7 по теме «Основные методы интегрирования. Приложения определенного интеграла» и сдайте на проверку преподавателю.
2. Подготовьтесь к итоговому компьютерному тестированию по разделу «Интегральное исчисление функции одной переменной».

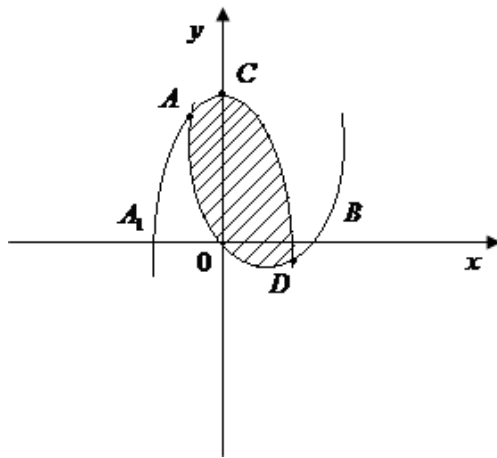
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Вычислите площадь, ограниченную параболой $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$.

Решение. Определим точки пересечения парабол и построим эти параболы:

$4 - x^2 = x^2 - 2x$, $2x^2 - 2x - 4 = 0$, $x^2 - x - 2 = 0$, отсюда, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ - абсциссы точек пересечения.

Ординаты точек пересечения находим, подставляя найденные абсциссы в уравнение одной из парабол: $y_1 = 4 - 1 = 3$, $y_2 = 4 - 4 = 0$. $A(-1; 3)$ и $B(2; 0)$ - точки пересечения парабол.



Из рисунка видим, что площадь искомой фигуры $S = S_{A_1ACB} + S_{OBD} - S_{A_1AO}$

$$S_{A_1ACB} = \int_{-1}^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = 8 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} = 9$$

$$S_{OBD} = - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx = - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3},$$

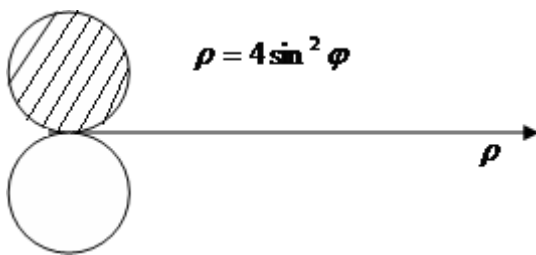
Площадь OBD расположена под осью Ox , поэтому перед знаком интеграла берем знак «минус».

$$S_{A_1AO} = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Отсюда } S = 9 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 9.$$

2. Найдите площадь одного лепестка кривой $\rho = 4 \sin^2 \varphi$.

Решение. Один лепесток кривой получаем при изменении φ от 0 до π . По формуле вычисления площади в полярных координатах имеем



$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 16 \sin^4 \varphi d\varphi = 8 \int_0^{\pi} \sin^4 \varphi d\varphi.$$

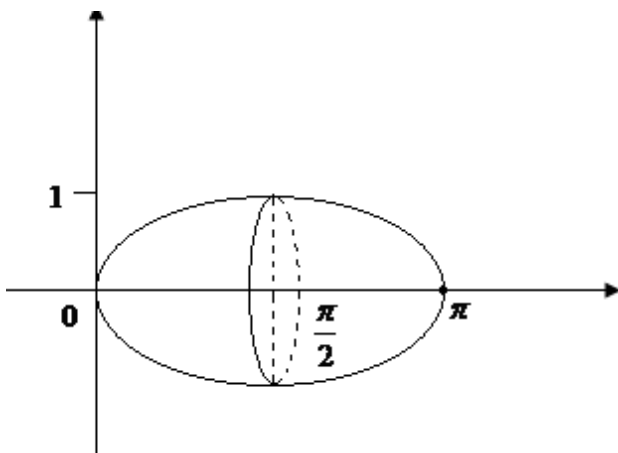
Применяя формулы тригонометрии, имеем:

$$\begin{aligned} \sin^4 \varphi &= (\sin^2 \varphi)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{8} = \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} S &= 8 \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi \right) d\varphi = 3 \int_0^{\pi} d\varphi - 4 \int_0^{\pi} \cos 2\varphi d\varphi + \int_0^{\pi} \cos 4\varphi d\varphi = \\ &= 3\varphi \Big|_0^{\pi} - 4 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \Big|_0^{\pi} = 3\pi. \end{aligned}$$

3. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$, прямой $y = 0$ вокруг оси Ox .



Решение. Объем тела вращения, образованного вращением кривой вокруг оси Ox , определяется формулой:

$$v = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos 2x dx \right) = \frac{\pi}{2} \left(x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

4. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

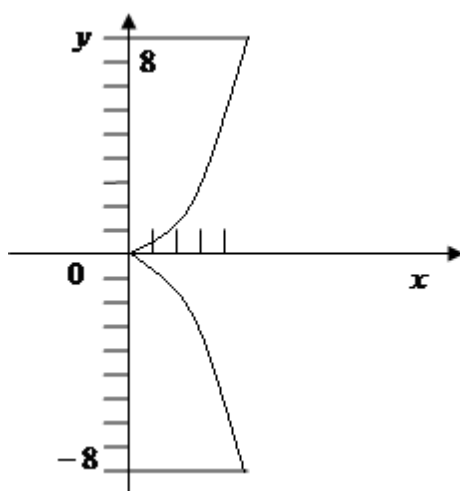
Решение. Объем тела вращения, образованного вращением кривой вокруг оси Ox :

$$v = \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx.$$

Пользуясь данными параметрическими уравнениями циклоиды, преобразуем интеграл к переменной t : $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, тогда $dx = a(1 - \cos t)dt$, при $x = 0, t = 0$; при $x = 2\pi a, t = 2\pi$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } v &= \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \\ &= \pi a^3 \left(t - 3 \sin t + \frac{3}{4} \sin 2t + \frac{3}{2} t - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = 5a^3 \pi^2. \end{aligned}$$

5. Найдите длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки $A(4; 8)$.



Решение. Для вычисления длины дуги в прямоугольной декартовой системе координат

воспользуемся формулой: $l_{OA} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx$.

Разрешим данное уравнение кривой относительно y и находим y' :

$$y = \pm x^{\frac{3}{2}}; y' = \pm \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}.$$

(Знаки $\pm$ в выражении y указывают, что кривая симметрична относительно оси Ox).

Тогда

$$\begin{aligned} l_{OA} &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{4 + 9x} dx = \left| \begin{array}{l} 4 + 9x = t, \quad \alpha = 4 \\ dt = 9dx, \quad \beta = 4 + 9 \cdot 4 = 40 \\ dx = \frac{dt}{9} \end{array} \right| = \frac{1}{18} \int_4^{40} t^{\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{2}{18} \cdot t^{\frac{3}{2}} \Big|_4^{40} = \frac{1}{27} t^{\frac{3}{2}} \Big|_4^{40} = \frac{1}{27} (\sqrt{40^3} - \sqrt{4^3}) = \frac{1}{27} (80\sqrt{10} - 8) = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

6. Найдите длину астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение. Длина дуги кривой, заданной параметрически, вычисляется по формуле:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \text{ где } \alpha \leq t \leq \beta.$$

Найдем $x'(t)$ и $y'(t)$: $x'(t) = -3a \cos^2 t \cdot \sin t$; $y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t$.

Учитывая симметричность астроида, найдем длину ее дуги при изменении t от 0

до $\frac{\pi}{2}$ (длина дуги, расположенной в 1 четверти). Тогда длина всей дуги

$$\begin{aligned} l &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \\ &= 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t d(2t) = -3a \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3a(\cos \pi - \cos 0) = 6a. \end{aligned}$$

7. Скорость роста некоторой популяции микроорганизмов подчинена закону

$v(t) = (t+1)e^2 t$, где t время в секундах. Найдите численность этой популяции в момент времени $t = 180c$, если численность этой популяции в момент времени 30с была 100000 единиц.

Решение. Так как скорость роста популяции $v(t)$ является производной от численности популяции $N(t)$, следовательно, численность популяции $N(t)$ является первообразной для $v(t)$. Поэтому

$$N(T) - N(t_0) = \int_{t_0}^T v(t) dt \quad \text{или} \quad N(T) = N(t_0) + \int_{t_0}^T v(t) dt.$$

Тогда $N(180) = 100000 + \int_{30}^{180} (t+1)e^{2t} dt = \left| \begin{array}{l} u = t+1, \quad du = dt \\ dv = e^{2t} dt, \quad v = \frac{1}{2} e^{2t} \end{array} \right| = 100000 + \frac{1}{2} e^{2t} (t+1) \Big|_{30}^{180} - \frac{1}{2} \int_{30}^{180} e^{2t} dt =$

$$= 100000 + \frac{1}{2} e^{2t} (t+1) \Big|_{30}^{180} - \frac{1}{4} e^{2t} \Big|_{30}^{180} = 100000 + \frac{1}{2} e^{2t} \left(t + \frac{1}{2} \right) \Big|_{30}^{180} = 100000 + 90,25 e^{360} - 15,25 e^{60}.$$

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Подготовьтесь к самостоятельной работе №12 по теме «Определенный интеграл».
- Примерный вариант можете найти в программе дисциплины.
2. Что называется площадью плоской фигуры?
3. Как найти площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла?
4. Дайте определение полярной системы координат. Установите формулы, связывающие полярные и прямоугольные координаты точки.
5. Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры в полярных координатах.
5. Что называется объемом тела? Как найти объем тела вращения?
7. Что называется длиной дуги?
8. Как найти длину дуги: если функция задана:
 - а) в декартовых координатах?
 - б) в полярных координатах?
 - в) параметрически?
9. Какие еще приложения определенных интегралов Вы знаете?
10. Разберите примеры решения типовых задач в тетради.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Вычислите площадь, ограниченную линиями:
 - а) параболой $y = 2x - x^2$ и осью Ox ;
 - б) параболой $y = x^2 + 4x$ и прямой $x - y + 4 = 0$;

в) кубической параболой $y = x^3$ и прямыми $y = x$, $y = 2x$;

г) эллипсом $x = a \cos t$, $y = a \sin t$; д) кардиодой $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

2. Вычислите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

а) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ вокруг оси Oy ; б) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ вокруг оси Ox .

3. Вычислите длину дуги кривой:

а) одной арки циклоиды и $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;

б) кривой $\rho = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$.

4. Найдите количество вещества m , вступившего в реакцию за первые 5 секунд, если скорость химической реакции $v = 2t^3 - t^2 + 2$.

5. Скорость роста некоторой популяции микроорганизмов задается формулой $v(t) = 5e^{2t}$. Найдите прирост численности популяции за промежуток времени с 10 по 25 секунду.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Вычислите площадь, ограниченную линиями:

а) полукубической параболой $y^2 = x^3$ и прямыми $x = 0$, $y = 4$;

б) первым завитком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ и полярной осью.

2. Вычислите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x$, $x = 4$ вокруг оси Ox .

3. Вычислите длину дуги полукубической параболы $y^2 = (x - 1)^3$ между точками $A(2; -1)$ и $B(5; -8)$.

4. Численность особей популяции возраста τ (усл.ед.) задается формулой $N(\tau) = -\tau^2 + 1000\tau$, а средняя масса особи возраста $\tau P(\tau) = 2\tau^2 - \tau$. Найдите биомассу этой популяции, если максимальный возраст особи в данной популяции 10^3 .

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная литература:

27. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 608 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: . 599-603. - ISBN 978-5-8112-6472-8

28. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-099894-4. - ISBN 978-5-94666-805-7

Дополнительной литературы:

40. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами : 1 курс : [линейная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа, комплексные числа] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. - 9-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2013. - 576 с. : ил. - ISBN 978-5-8112-5166-7

41. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Фебина. - 8-е изд. - Москва : АЙРИС ПРЕСС, 2013. - 591 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: с. 589-590. - ISBN 978-5-8112-5142-1

42. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО. - ISBN 978-5-9916-3467-0

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
2. Методические указания для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.math.ru> (Математика и образование)
- <http://mccme.ru> (Московский центр непрерывного математического образования)
- <http://www.allmath.ru> (Allmath.ru – вся математика в одном месте)
- <http://eqworld.ipmnet.ru> (EqWorld – Мир математических уравнений)
- <http://www.exponenta.ru> (Exponenta.ru – образовательный математический сайт)
- <http://www.neive.by.ru> (Геометрический портал)
- <http://graphfunk.narod.ru> (Графики функций)
- <http://tasks.ceemat.ru> (Задачник для подготовки к олимпиадам по математике)
- <http://www.mathem.h1.ru> (Математика on-line справочная информация в помощь студенту)
- <http://Math-Net.ru/> (Общероссийский математический портал)

