

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

## **АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

**Методические указания по выполнению практических работ**

Направление подготовки 03.03.02 Физика  
Направленность (профиль)  
«Медицинская физика»

**Ставрополь  
2026**

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| ВВЕДЕНИЕ.....                                                                  | 3  |
| Тема 1. Векторы и действия над ними .....                                      | 5  |
| Тема 2. Линейное векторное пространство .....                                  | 8  |
| Тема 3. Метод координат. Системы координат на плоскости и в пространстве ..... | 12 |
| Тема 4 Евклидово пространство .....                                            | 18 |
| Тема 5. Прямая на плоскости .....                                              | 22 |
| Тема 6. Кривые второго порядка .....                                           | 25 |
| Тема 7. Фокально-директориальное свойство эллипса, гиперболы, параболы. ....   | 29 |
| Тема 8. Векторное и смешанное произведение векторов.....                       | 32 |
| Тема 9. Плоскость .....                                                        | 35 |
| Тема 10. Прямая в пространстве.....                                            | 38 |
| Тема 11. Поверхности второго порядка. ....                                     | 42 |
| УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ                    | 51 |

## ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Аналитическая геометрия» является формирование соответствующего набора общепрофессиональных компетенций будущего академического бакалавра по направлению подготовки 03.03.02 Физика, путем освоения возможностей использования средств и методов аналитической геометрии для решения прикладных задач в области физики.

Основными задачами освоения дисциплины являются:

- формирование научного мировоззрения и устойчивого познавательного интереса к изучению геометрии, а также прикладной и практической направленности обучения геометрии;
- воспитание математической культуры, которая предполагает четкое осознание необходимости и важности математической подготовки для специалиста в области физики;
- ознакомление с основными объектами аналитической геометрии, а также их приложениями для решения различных задач;
- создание условий для развития профессионального творчества и опыта самостоятельной деятельности по усвоению содержания геометрического образования.

### Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

| Код, формулировка компетенции                                                                                                                   | Код, формулировка индикатора                                                                                                                                                                                                                                         | Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности (ОПК-1) | ИД-2 <sub>ОПК-1</sub><br>использует математический аппарат и методы математического и численного моделирования для описания, анализа, теоретического и экспериментального исследования физических систем, явлений и процессов в своей профессиональной деятельности. | Готовность использовать основные понятия аналитической геометрии, знать определения и свойства математических объектов в этой области, знать формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений. Готовность решать задачи вычислительного и теоретического характера в области аналитической геометрии; применять алгебраические и геометрические методы для решения прикладных задач, а так же производить оценку качества полученных решений. |

Методические рекомендации подготовлены с учетом требований ФГОС ВО и имеющейся программы по данной дисциплине.

Предлагаемые методические рекомендации содержат систематизированный минимум теоретических сведений, необходимых для подготовки к практическим занятиям, закрепления материала, изученного на занятиях, содержит материалы для организации СКР и проведения текущего контроля знаний и умений студентов. Приведены примеры решения типовых задач, демонстрирующие основные приемы и методы решения.

Рассмотренный в пособии материал охватывает весь программный материал по соответствующей дисциплине для указанных специальностей и содержит дополнительный материал, способствующий целостному пониманию материала.

Все темы разработаны по единому плану:

1. Теоретический материал, сопровождающийся примерами решения задач.
2. Упражнения.
3. Варианты контрольных работ.

Целью контрольных заданий является выявление уровня усвоения ведущих понятий и фактов геометрии, а так же выявление уровня сформированности соответствующих компетенций.

Подобранные задачи для самостоятельного решения призваны способствовать закреплению теоретических знаний по дисциплине, овладению аналитическим аппаратом в геометрии и применению его к доказательству теорем, исследованию различных геометрических вопросов.

## Тема 1. Векторы и действия над ними

**Вектором** называется направленный отрезок  $\overline{AB}$  с началом в точке  $A$  и концом в точке  $B$  (рис. 1). Вектор обозначается двумя прописными буквами с чертой или стрелкой над ними, причем первая буква – начало вектора, а вторая – его конец, или строчными буквами латинского алфавита с чертой или стрелкой.

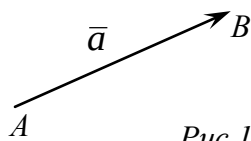


Рис. 1

Два вектора называются **равными** (рис. 2), если они имеют одинаковую длину и направление. Равенство векторов обозначается

$$\overline{AB} = \overline{a}.$$

Отложить вектор  $\overline{a}$  от точки  $A$  значит построить такой вектор  $\overline{AB}$ , что  $\overline{AB} = \overline{a}$ .

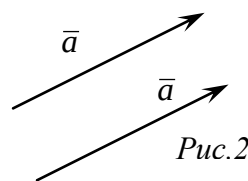


Рис. 2

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются **коллинеарными**; лежащие в одной плоскости или на параллельных плоскостях – **компланарными**.

Если начало и конец вектора совпадают, то он называется **нулевым** и обозначается  $\vec{0} = \overline{AA}$ . Направление нулевого вектора произвольное, поэтому считают, что он коллинеарен любому вектору и компланарен любым двум векторам.

**Длиной** или **модулем**  $|\overline{AB}|$  вектора  $\overline{AB}$  называется число, равное длине отрезка, изображающего вектор. Длина нулевого вектора равна нулю.

Над векторами можно производить следующие действия:

1. **Произведением** вектора  $\overline{a}$  на число  $a$  называется коллинеарный ему вектор  $\overline{b} = a\overline{a}$ , длина которого  $|\overline{b}| = |a| \cdot |\overline{a}|$ , а направление совпадает с вектором  $\overline{a}$ , если  $a > 0$ , и противоположным ему, если  $a < 0$  (рис. 3).

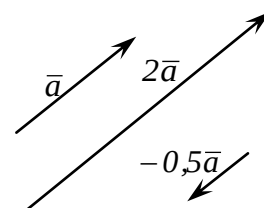


Рис. 3

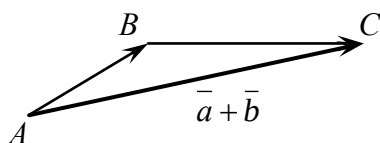
Вектор  $-\overline{a} = (-1)\overline{a}$  называется **противоположным** вектору  $\overline{a}$ .

2. **Суммой** векторов  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$  называется вектор  $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ , начало которого совпадает с началом вектора  $\overline{a}$ , а конец – с концом вектора  $\overline{b}$  при условии, что вектор  $\overline{b}$  отложен от конца вектора  $\overline{a}$ .

**Задача 1.** Даны векторы  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$ . Построить их сумму.

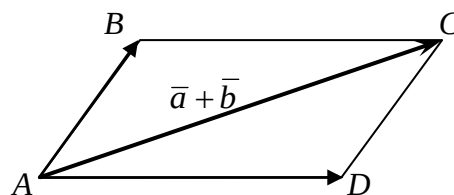
Решение. Построение можно выполнить двумя способами:

**правило треугольника**



Если  $\overline{AB} = \overline{a}$ ,  $\overline{BC} = \overline{b}$ , то  $\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$  по определению суммы.

**правило параллелограмма**



Если  $\overline{AB} = \overline{a}$ ,  $\overline{AD} = \overline{b}$ , то  $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{b}$  (по свойству противоположных сторон параллелограмма), поэтому  $\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$  по определению суммы.

**Правило многоугольника.** Если надо сложить несколько векторов, то каждый последующий вектор откладывают от конца предыдущего, тогда вектор, начинающийся в начале первого вектора и заканчивающийся в конце последнего, будет искомым суммой (рис. 4).

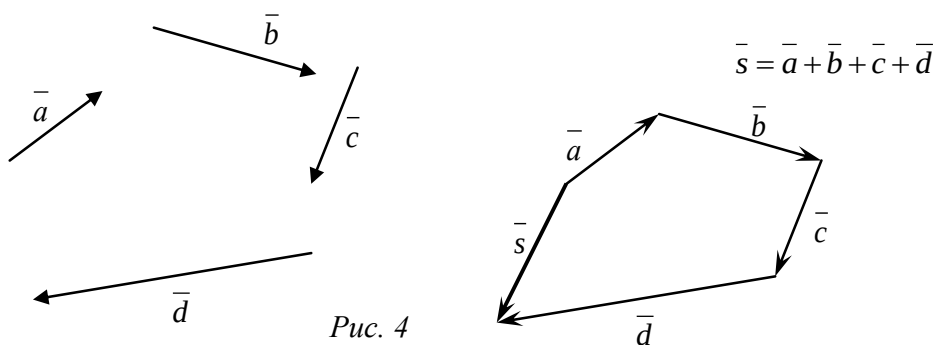


Рис. 4

3. Разностью двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется сумма векторов  $\vec{a}$  и  $-\vec{b}$  (рис. 5).

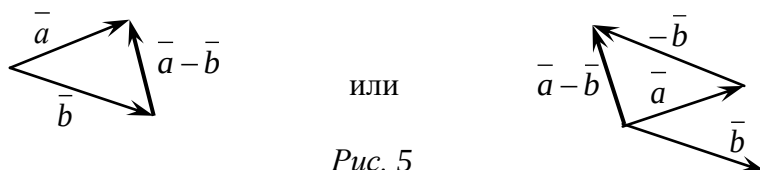


Рис. 5

**Задача 2.** В треугольнике  $ABC$   $M$  – середина стороны  $AB$ . Выразить вектор  $\vec{CM}$  через векторы  $\vec{CA}$  и  $\vec{CB}$ .

Решение. Построим треугольник  $ABC$  до параллелограмма  $ADBC$  таким образом, чтобы отрезок  $CM$  лежал на его диагонали (рис. 6). По свойству параллелограмма  $CM=MD$ , по правилу параллелограмма  $\vec{CD} = \vec{CA} + \vec{CB}$ ,  $\vec{CM} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$ .

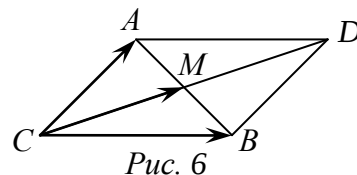


Рис. 6

Ответ:  $\vec{CM} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$ .

**Задача 3.** В тетраэдре  $DABC$ :  $CM=MB$ ,  $\vec{AD} = \vec{m}$ ,  $\vec{DC} = \vec{n}$ ,  $\vec{DM} = \vec{p}$  (рис. 7). Разложить вектор  $\vec{AB}$  по векторам  $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ . Выяснить компланарны ли векторы  $\vec{AC} + \vec{AM}$ ,  $\vec{DA} - \vec{DB}$ ,  $\vec{BC}$ .

Решение. По правилу многоугольника

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CB} = \vec{AD} + \vec{DC} + 2\vec{CM} = \\ &= \vec{AD} + \vec{DC} + 2(\vec{DM} - \vec{DC}) = \vec{m} + \vec{n} + 2\vec{p} - 2\vec{n} = \vec{m} + 2\vec{p} - \vec{n}. \end{aligned}$$

Вектор  $\vec{AC} + \vec{AM}$  лежит в плоскости  $(ABC)$ , так как все точки  $A, C, M$  лежат в ней;  $\vec{DA} - \vec{DB} = -\vec{AD} - \vec{DB} = -(\vec{AD} + \vec{DB}) = -\vec{AB} = \vec{BA}$  лежит в плоскости  $(ABC)$ ,  $\vec{BC}$  лежит в плоскости  $(ABC)$ . По определению эти векторы компланарны.

Ответ:  $\vec{AB} = \vec{m} + 2\vec{p} - \vec{n}$ , векторы  $\vec{AC} + \vec{AM}, \vec{DA} - \vec{DB}, \vec{BC}$  компланарны.

4. Скалярным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$ .

**Задача 4.** В тетраэдре  $DABC$ :  $AB = AC = a$ ,  $\angle DAB = \angle DAC = \varphi$ . Доказать, что  $\vec{AD} \perp \vec{BC}$ .

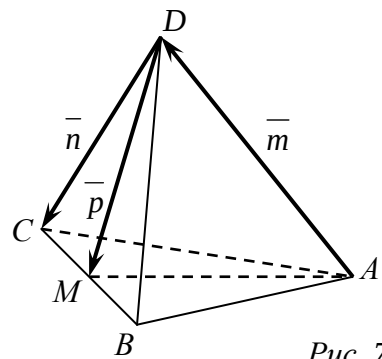


Рис. 7

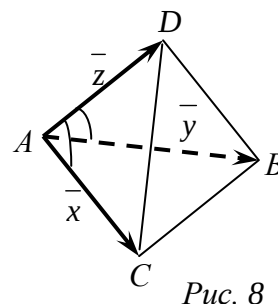


Рис. 8

Доказательство. Пусть  $\overline{AC} = \bar{x}, \overline{AB} = \bar{y}, \overline{AD} = \bar{z}$  (рис. 8), тогда  $|\bar{x}| = AC = a, |\bar{y}| = AB = a$ .  
Выразим вектор  $\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC} = -\overline{AB} + \overline{AC} = \bar{x} - \bar{y}$ .

Пусть  $\gamma$  - угол между векторами  $\overline{AD}$  и  $\overline{BC}$ , тогда

$$\cos \gamma = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AD}| \cdot |\overline{BC}|}.$$

$$\begin{aligned} \overline{AD} \cdot \overline{BC} &= \bar{z} \cdot (\bar{x} - \bar{y}) = \bar{z} \cdot \bar{x} - \bar{z} \cdot \bar{y} = |\bar{z}| \cdot |\bar{x}| \cdot \cos \varphi - |\bar{z}| \cdot |\bar{y}| \cos \varphi = \\ &= |\bar{z}|(a \cdot \cos \varphi - a \cdot \cos \varphi) = 0, \end{aligned}$$

следовательно,  $\cos \gamma = 0$  и  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ .

### Упражнения

1. В треугольнике  $ABC$   $M$  – точка пересечения медиан. Доказать, что  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}$ .
2. В треугольнике  $ABC$   $M$  – точка пересечения медиан. Показать, что  $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$ , где  $O$  – произвольная точка пространства.
3. В треугольнике  $ABC$ :  $\overline{CA} = \bar{a}, \overline{CB} = \bar{b}$ . Выразить через  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  векторы:
  - а)  $\overline{CB_1}$ , где  $B_1$  – середина  $AC$ ;
  - б)  $\overline{CC_1}$ , где  $C_1$  – середина  $AB$ ;
  - в)  $\overline{CK}$ , где  $K \in AB$ ,  $AK : KB = 3 : 10$ .
4. В правильном шестиугольнике  $ABCDEF$ :  $\overline{BC} = \bar{m}, \overline{BD} = \bar{n}$ . Выразить все его стороны и все диагонали через  $\bar{m}$  и  $\bar{n}$ .
5. Точка  $C$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $AC : CB = m : n$ . Показать, что:
  - 1)  $\overline{AC} = \frac{m}{n} \overline{CB}$ ;
  - 2)  $\overline{OC} = \frac{n}{m+n} \overline{OA} + \frac{m}{m+n} \overline{OB}$ , где  $O$  – произвольная точка.
6. Доказать условие принадлежности трех точек одной прямой: для того чтобы точки  $A, B, C$  принадлежали одной прямой необходимо и достаточно, чтобы  $\overline{OC} = k \overline{OA} + (1-k) \overline{OB}$ , где  $O$  – произвольная точка,  $\overline{BC} = k \overline{BA}$ .
7. Доказать условие принадлежности четырех точек одной плоскости: для того чтобы точка  $M$  принадлежала плоскости, определяемой точками  $A, B, C$ , не лежащими на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы  $\overline{OM} = k \overline{OA} + l \overline{OB} + (1-k-l) \overline{OC}$ , где  $O$  – произвольная точка.
8. Точки  $M_1$  и  $M_2$  – середины отрезков  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  соответственно. Доказать, что  $\overline{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2})$ .
9. Доказать необходимый и достаточный признак параллелограмма: для того чтобы четырехугольник  $ABCD$  был параллелограммом необходимо и достаточно, чтобы для произвольной точки  $O$  выполнялось равенство  $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$ .
10. В треугольнике  $ABC$ :  $\overline{AB} = \bar{m}, \overline{AC} = \bar{n}$ . Построить вектор  $\frac{\bar{m} + \bar{n}}{2}$ .
11. Какому условию должны удовлетворять векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , чтобы вектор  $\bar{a} + \bar{b}$  делил пополам угол между векторами  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ ?
12. В трапеции  $ABCD$ :  $BC \parallel DA, \overline{BC} = \frac{1}{3} \overline{AD}$ . Разложить вектор  $\overline{DA}$  по векторам  $\overline{DC}$  и  $\overline{DB}$ .

13. В параллелограмме  $ABCD$   $O$  – точка пересечения медиан,  $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$ . Выразить через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  следующие векторы  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ .
14. Отрезок  $AB$  разделен на  $n$  равных частей точками  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ . Зная, что  $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$ , где  $O$  – произвольная точка, выразить через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  следующие векторы  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC_1}, \overrightarrow{OC_2}, \dots, \overrightarrow{OC_{n-1}}$ .
15. В треугольнике  $ABC$   $M$  – точка пересечения медиан,  $O$  – произвольная точка внутри треугольника. Выразить  $\overrightarrow{OM}$  через  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ .
16. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{DD_1} = \vec{d}$ , точка  $E$  делит отрезок  $DC_1$  в отношении  $1:3$ . Выразить через  $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$  следующие векторы  $\overrightarrow{A_1 B}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{B_1 F}$ .
17. Точки  $M$  и  $M_1$  – точки пересечения медиан треугольников  $ABC$  и  $A_1 B_1 C_1$  соответственно. Доказать, что  $\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1})$ .
18. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $BM = MC$ ,  $D_1 N = NC_1$ ,  $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{q} = \overrightarrow{AD}$ ,  $\vec{r} = \overrightarrow{AA_1}$ . Разложить векторы  $\overrightarrow{MN}$  и  $\overrightarrow{PA}$  по векторам  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ , если  $P$  – середина  $DC$ .
19. Через вершину  $A$  треугольника  $ABC$  проведен перпендикуляр  $AD$  к плоскости треугольника.  $\angle ABD = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$ . Выразить косинус угла между векторами  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{BD}$  через углы  $\alpha$  и  $\beta$ .
20. Известно, что единичные векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют попарно углы по  $60^\circ$ . Найти угол:
- 1) между  $\vec{a}$  и  $\vec{b} + \vec{c}$ ;
  - 2) между  $\vec{a}$  и  $\vec{b} - \vec{c}$ .
21. В правильном шестиугольнике  $ABCDEF$  со стороной  $a$  найти:
- 1)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}^2, \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE}$ ;
  - 2)  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$ , где  $O$  – центр шестиугольника.
22. Доказать, что  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ .
23. Какому условию должны удовлетворять векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , чтобы имело место соотношение  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ?
24. В прямоугольнике  $ABCD$   $M$  и  $N$  – середины сторон  $CB$  и  $AB$  соответственно,  $CB = 3$ ,  $AB = 4$ . Разложить вектор  $\overrightarrow{DB}$  по векторам  $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{ON} = \vec{c}$ .
25. Даны три вектора  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , удовлетворяющие условию  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ , причем,  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $|\vec{c}| = 4$ . Вычислить  $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$ .
26. Показать, что угол  $\varphi$  между диагоналями прямоугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ( $\vec{a} \perp \vec{b}$ ), определяется формулой  $\cos \varphi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ .
27. Доказать, что вектор  $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$  перпендикулярен вектору  $\vec{a}$ .
28. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  взаимно перпендикулярны и имеют равные длины. Доказать, что  $\vec{p} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$  и  $\vec{q} = 10\vec{a} - 6\vec{b}$  взаимно перпендикулярны.
29. Известно, что  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $\angle \varphi = \left( \vec{a}, \vec{b} \right) = \frac{2}{3}\pi$ . Найти:  $\vec{a}\vec{b}$ ,  $\vec{a}^2, \vec{b}^2, (\vec{a} + \vec{b})^2$ .

## Тема 2. Линейное векторное пространство

Множество векторов  $V$ , в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее следующим свойствам:

1.  $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ .
2.  $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ .
3.  $a(\beta\bar{x}) = (a\beta)\bar{x}$ .
4.  $a(\bar{x} + \bar{y}) = a\bar{x} + a\bar{y}$ .
5.  $(a + \beta)\bar{x} = a\bar{x} + \beta\bar{x}$ .
6. существует единственный нулевой вектор  $\bar{0}$  такой, что  $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$ .
7. для любого вектора  $\bar{x}$  существует единственный противоположный ему вектор  $-\bar{x}$  такой, что  $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$ .
8.  $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$ , где  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  - произвольные векторы из  $V$ ,  $a, \beta \in R$ ,

называется *линейным векторным пространством*.

Свойства 1-8 в определении называются *аксиомами* линейного пространства. Если в качестве векторов  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  в аксиомах рассматриваются объекты произвольной природы, то множество таких элементов называется *линейным пространством*.

Векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  линейного векторного пространства  $V$  называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , не равные нулю одновременно, что

$$a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_2 + \dots + a_m\bar{a}_m = \bar{0}. \quad (1)$$

Если для рассматриваемых векторов равенство (1) выполняется лишь в случае, когда все  $a_i = 0$  ( $i = \overline{1, m}$ ), то векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  называются *линейно независимыми*.

*Свойства линейно зависимых векторов*

1. Если векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  линейно зависимы, то, по крайней мере, один из них может быть представлен в виде линейной комбинации остальных, т.е.

$$\bar{a}_k = \beta_1\bar{a}_1 + \beta_2\bar{a}_2 + \dots + \beta_{k-1}\bar{a}_{k-1} + \beta_{k+1}\bar{a}_{k+1} + \dots + \beta_m\bar{a}_m.$$

2. Если среди векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  есть нулевой вектор, то они линейно зависимы.
3. Если часть из векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  линейно зависима, то и все векторы линейно зависимы.

**Задача 1.** Показать, что *коллинеарные векторы линейно зависимы*.

Решение. По определению умножения вектора на число для любых двух коллинеарных векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2$  найдется такое число  $a$ , что  $\bar{a}_1 = a\bar{a}_2$ , т.е.  $\bar{a}_1 - a\bar{a}_2 = \bar{0}$  и коэффициент при  $\bar{a}_1$  равен  $1 \neq 0$ , по определению  $\bar{a}_1$  и  $\bar{a}_2$  линейно зависимы.

**Задача 2.** Доказать, что *три компланарных вектора линейно зависимы*.

Доказательство. Пусть векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  компланарны, тогда, если отложить их от одной точки  $O$ , то все три вектора будут лежать в одной плоскости. Построим на векторах параллелограмм  $OA_1BC_1$  следующим образом:  $OB$  – диагональ,  $\overline{OB} = \bar{b}$ , а стороны параллелограмма параллельны векторам  $\bar{a}$  и  $\bar{c}$  (рис.9). Тогда по определению умножения вектора на число  $\overline{OA_1} = a\bar{a}$ ,  $\overline{OC_1} = \gamma\bar{c}$ , по правилу параллелограмма  $\overline{OB} = \overline{OA_1} + \overline{OC_1}$  или  $\bar{b} = a\bar{a} + \gamma\bar{c}$ , т.е.  $\bar{b} - a\bar{a} - \gamma\bar{c} = \bar{0}$ , следовательно, векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  линейно зависимы.

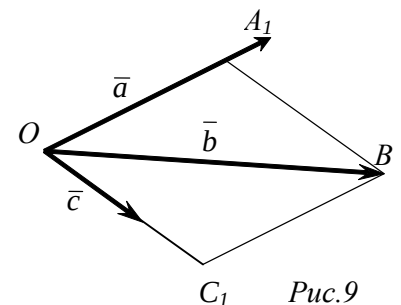


Рис.9

Линейное пространство называется *n-мерным*, если в нем существует  $n$  линейно независимых векторов, а любая система из  $(n+1)$  векторов линейно зависима. Совокупность  $n$  линейно независимых векторов линейного  $n$ -мерного пространства называется *базисом* этого пространства.

Каждый вектор  $\bar{x}$  линейного векторного пространства  $V$  может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов базиса  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ , т.е.

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n. \quad (2)$$

Равенство (2) называется разложением вектора по векторам базиса, а числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называются координатами вектора  $\bar{x}$  в базисе  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ .

*Размерностью* пространства называется число векторов его базиса.

Исходя из сказанного, можно дать следующее определение, эквивалентное определению §1.

*n-мерным вектором* называется упорядоченная совокупность  $n$  действительных чисел, записанная в виде  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Суммой вектора  $\bar{x}$  и вектора  $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  называется вектор  $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ . Разностью вектора  $\bar{x}$  и вектора  $\bar{y}$  называется вектор  $\bar{x} - \bar{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$ . Произведением вектора  $\bar{x}$  на действительное число  $a$  называется вектор  $a\bar{x} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$ .

Для определенных таким образом действий над векторами свойства 1-8 линейного векторного пространства выполняются.

Векторы называются *равными*, если равны их координаты. Определенные выше действия над векторами называются *покоординатными*.

**Задача 3.** Доказать, что для того, чтобы векторы были коллинеарными необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональными.

Доказательство. Пусть векторы  $\bar{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $\bar{b}(b_1, b_2, \dots, b_n)$  коллинеарные, тогда  $\bar{b} = a\bar{a} = (aa_1, aa_2, \dots, aa_n)$ , последнее, при условии, что все координаты вектора  $\bar{b}$  отличны от нуля, равносильны равенствам

$$b_1 = aa_1, b_2 = aa_2, \dots, b_n = aa_n, \text{ т.е. } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{a}.$$

**Задача 4.** Показать, что на плоскости векторы  $\bar{e}_1(1,2)$  и  $\bar{e}_2(3,4)$  образуют базис. Найти координаты вектора  $\bar{x}(7,10)$  в этом базисе.

Решение. Пусть векторы  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$  линейно зависимы, тогда существует единственное число  $c \in R$  такое, что  $\bar{e}_2 = c \cdot \bar{e}_1$ , т.е.  $(3,4) = (1c, 2c)$ . Запишем это равенство в координатах

$$\begin{cases} 3 = c, \\ 4 = 2c; \end{cases} \begin{cases} c = 3, \\ c = 2, \end{cases} \text{ что невозможно, следовательно, векторы } \bar{e}_1 \text{ и } \bar{e}_2 \text{ линейно независимы. Пока-}$$

жем, что произвольный вектор  $\bar{a}(a_1, a_2)$  можно разложить по векторам  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$ , т.е. найдутся

$$a, \beta \in R \text{ такие, что } \bar{a} = a\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2. \text{ Запишем это равенство в координатах } \begin{cases} \bar{e}_1 a + 3\beta = a_1, \\ 2a + 4\beta = a_2. \end{cases} \text{ Найдем}$$

$a$  и  $\beta$ , для этого решим систему уравнений методом Гаусса.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0, \text{ следовательно, система имеет единственное решение, т.е.}$$

разложение произвольного вектора  $\bar{a}$  по векторам  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$  единственно. Это значит, что векторы  $\bar{a}, \bar{e}_1, \bar{e}_2$  линейно зависимы, как и любые три вектора, поэтому  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  образуют базис.

Найдем координаты вектора  $\bar{x}$  относительно этого базиса. Для этого подставим в систему вместо  $a_1, a_2$  координаты вектора  $\bar{x}$ :

$$\begin{cases} a + 3\beta = 7, \\ 2a + 4\beta = 10, \end{cases} \begin{cases} a + 3\beta = 7, \\ a + 2\beta = 5, \end{cases} \begin{cases} \beta = 2, \\ a = 5 - 2\beta, \end{cases} \begin{cases} \beta = 2, \\ a = 1, \end{cases} \text{ т.е. } \bar{x} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2.$$

Ответ:  $\bar{x} = (1,2)$  в базисе  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ .

Пусть  $O$  – некоторая точка линейного векторного пространства, от которой отложены базисные векторы. Тогда  $O$  называется *началом координат*, а прямые, проходящие через точку  $O$  параллельно векторам базиса, называются *осями координат*. Вектор  $\overrightarrow{OM}$ , начало которого

находится в начале координат, а конец в точке  $M$ , называется *радиус-вектором* точки  $M$ , координаты радиус-вектора точки называются *координатами* этой точки.

Если вектор задан двумя точками  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$  - начало вектора и  $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$  - конец вектора, то  $\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$ .

**Задача 5.** Построить точку  $M$  и вектор  $\bar{a}$  в заданном базисе, если: а)  $M(2, -1)$ ,  $\bar{a} \left( -3, \frac{1}{2} \right)$ .

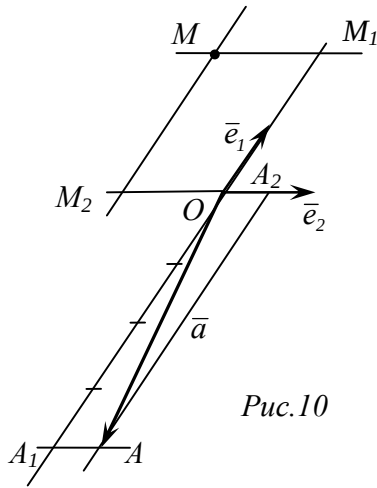


Рис.10

б)  $M(1, -2, 3)$ ,  $\bar{a}(2, 0, -1)$ .

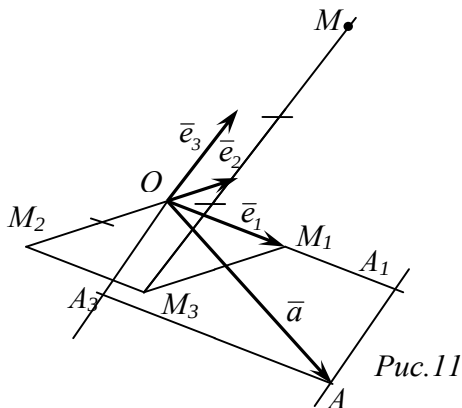


Рис.11

**Решение.** В данном базисе построим векторы  $\overline{OM}_1 = 2\bar{e}_1$ ,  $\overline{OM}_2 = -\bar{e}_2$  (рис. 10), тогда по правилу параллелограмма

$$\overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 = 2\bar{e}_1 + (-\bar{e}_2) = (2, -1).$$

Вектор  $\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2$  является радиус-вектором точки  $M$ , поэтому его конечная точка является искомой точкой  $M$ .

Построим вектор  $\overline{OA}_1 = -3\bar{e}_1$  и  $\overline{OA}_2 = \frac{1}{2}\bar{e}_2$ , по правилу параллелограмма

$$\overline{OA} = \overline{OA}_1 + \overline{OA}_2 = -3\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\bar{e}_2 = \left( -3, \frac{1}{2} \right) = \bar{a},$$

т.е.  $\overline{OA}$  совпадает с искомым вектором  $\bar{a}$  (рис.10).

**Решение.** Построим векторы  $\overline{OM}_1 = \bar{e}_1$  и  $\overline{OM}_2 = -2\bar{e}_2$  (рис. 11). По правилу параллелограмма  $\overline{OM}_3 = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2$ . Из точки  $M_3$  построим вектор  $\overline{M_3M} = 3\bar{e}_3$ , по правилу параллелограмма  $\overline{OM} = \overline{M_3M} + \overline{OM}_3 = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3 = \bar{e}_1 + (-2)\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3(1, -2, 3)$ , поэтому конечная точка вектора  $\overline{OM}$  является искомой точкой  $M$ .

Построим векторы  $\overline{OA}_1 = 2\bar{e}_1$  и  $\overline{OA}_3 = -\bar{e}_3$  (рис.11). По правилу параллелограмма

$$\overline{OA} = \overline{OA}_1 + \overline{OA}_3 = 2\bar{e}_1 + (-1)\bar{e}_3 = 2\bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + (-1)\bar{e}_3 =$$

$$= (2, 0, -1) = \bar{a}, \text{ т.е. вектор } \overline{OA} - \text{искомый вектор } \bar{a}.$$

**Задача 6.** Точка  $C(2, 3)$  служит серединой отрезка  $AB$ . Определить координаты точки  $A$ , если  $B(7, 5)$ .

**Решение.** Пусть  $A(x, y)$ , тогда  $\overline{AC} = (2 - x, 3 - y)$ ,  $\overline{CB} = (7 - 2, 5 - 3) = (5, 2)$  и так как  $\overline{AC} = \overline{CB}$ , то  $\begin{cases} 2 - x = 5, \\ 3 - y = 2, \end{cases} \begin{cases} x = -3, \\ y = 1. \end{cases}$

Ответ.  $A(-3, 1)$ .

### Упражнения

1. Являются ли в пространстве многочленов степени не выше двух линейно зависимыми векторы  $p_1 = 1 + 2t + 3t^2$ ,  $p_2 = 2 + 3t + 4t^2$ ,  $p_3 = 3 + 5t + 7t^2$ ?
2. Даны коллинеарные и сонаправленные векторы  $\bar{a}(n, 1)$ ,  $\bar{b}(4, n)$ . Определите  $n$ .
3. Известно, что  $A(3, 4, 1)$ ,  $B(1, 0, -1)$ ,  $C(-2, -6, -4)$ ,  $D(2, 3, 4)$ . Лежат ли на одной прямой точки:
  - 1)  $A, B, C$ ;
  - 2)  $A, B, D$ ?

4. Векторы  $\vec{a}(1,2,3)$  и  $\vec{AB}$ , где  $A(1,1,1), B \in XOY$ , коллинеарны. Найти координаты точки  $B$ .
5. Прямая задана двумя точками  $A(-12,-13), B(-2,-5)$ . Найти на ней точку  $M$  с абсциссой, равной 3.
6. В треугольнике  $ABC$  проведены медиана  $BK$ , средняя линия  $MN \parallel AC$ ,  $O = BK \cap MN$ .  $\vec{KC} = \vec{e}_1, \vec{KM} = \vec{e}_2$ . Определить в этом базисе координаты следующих векторов:
  - а)  $\vec{CM}, \vec{KN}, \vec{NC}$ ,
  - б)  $\vec{OB}, \vec{CB}, \vec{AM}$ .
7. В параллелограмме  $ABCD$   $A(-4,4), B(2,8), M(2,2)$  – точка пересечения диагоналей. Найти  $C, D$ .
8. Определить координаты концов  $A$  и  $B$  отрезка, который точками  $P(2,2)$  и  $Q(1,5)$  разделен на 3 равные части.
9. Точка  $M$  делит направленный отрезок  $\vec{M_1M_2}$  в отношении  $\lambda (\lambda \neq 1)$ , если  $\vec{M_1M} = \lambda \vec{MM_2}$ . Доказать, что если  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ , то координаты точки  $M$  вычисляются по формулам  $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$ .
10. Получить формулы для вычисления координат середины отрезка  $AB$ , если  $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ .
11. Известны точки  $A(-2,5), B(4,17)$ . На отрезке  $AB$  находится точка  $C$ , расстояние до которой от точки  $A$  в два раза больше расстояния от точки  $B$ . Найти координаты точки  $C$ .
12. Образуется ли линейное пространство множество элементов вида  $(x_1, x_2, 0, 0), (y_1, y_2, 0, 0), (z_1, z_2, 0, 0)$ ?
13. Является ли линейным пространством множество систем четырех действительных чисел  $(x_1, x_2, 1, 1), (y_1, y_2, 1, 1), (z_1, z_2, 1, 1)$ , где  $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$  – всевозможные действительные числа, если действия над такими векторами определяются покомпонентно?
14. Является ли линейным пространством множество многочленов второй степени?
15. Может ли линейное пространство состоять: 1) из одного вектора; 2) из двух различных векторов?
16. Образуется ли линейное пространство совокупность троек целых чисел  $(x, y, z)$ ?
17. Образуют ли линейное пространство все геометрические векторы, имеющие общее начало в начале координат и расположенные в первом октанте?
18. Доказать, что в трехмерном пространстве три некопланарных вектора линейно независимы.
19. Доказать, что в трехмерном пространстве любые четыре вектора линейно зависимы.
20. Показать, что элементы  $\vec{e}_1 = (1, 1, 0), \vec{e}_2 = (1, 0, 1)$  на плоскости могут быть выбраны в качестве базиса. Найти координаты вектора  $\vec{x}(2, 3)$  в этом базисе.
21. Показать, что множество всех матриц второго порядка является линейным пространством. Показать, что матрицы  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  образуют его базис.

### Тема 3. Метод координат. Системы координат на плоскости и в пространстве

Метод координат в геометрии состоит в том, что посредством координат точек геометрические объекты задаются в алгебраическом виде с помощью чисел, уравнений, неравенств, их систем или совокупностей. Это позволяет при доказательстве теорем и решении геометрических задач использовать алгебраические методы.

Рассмотрим некоторые способы задания системы координат.

#### 1. Аффинная система координат на плоскости и в пространстве

Аффинной системой координат или репером

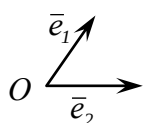
на плоскости

в пространстве

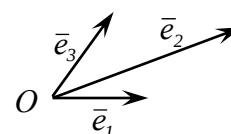
|                                                                                                                                   |  |                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| называется тройка $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ ,<br>состоящая из точки $O$ – начала координат и базиса<br>$\bar{e}_1, \bar{e}_2$ . |  | называется четверка $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ ,<br>состоящая из точки $O$ – начала координат и базиса<br>$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ . |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Обозначается

$$R = (O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$$



$$R = (O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$



Пусть  $M$  – произвольная точка. Вектор  $\overline{OM}$  – *радиус-вектор* этой точки, который разлагается единственным образом по векторам базиса:

$$\overline{OM} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2$$

$$\overline{OM}(x_1, x_2)$$

$$\overline{OM} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2 + x_3 \cdot \bar{e}_3$$

$$\overline{OM}(x_1, x_2, x_3).$$

Коэффициенты разложения (координаты вектора  $\overline{OM}$ ) вполне определяют положение точки  $M$  и являются ее координатами. *Координатами точки* называются координаты ее радиус-вектора и обозначаются

$$M(x_1, x_2) \text{ или } M(x, y)$$

$$M(x_1, x_2, x_3) \text{ или } M(x, y, z).$$

Пусть в репере  $R$  заданы две точки, имеющие координаты

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$$

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$$

В аффинной системе координат базисные векторы могут быть произвольной отличной от нуля длины и образовывать угол  $\alpha : 0^\circ < \alpha < 180^\circ$ . В этой системе сложно решать метрические задачи (определение расстояний, величину угла, вычисление площадей и объемов).

## 2. Прямоугольная декартова система координат.

*Прямоугольной декартовой системой координат*

на плоскости

называется упорядоченная пара двух взаимно перпендикулярных координатных осей  $Ox$  и  $Oy$ .

в пространстве

называется упорядоченная тройка взаимно перпендикулярных координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

Причем началом координат каждой из осей служит их общая точка  $O$  – начало прямоугольной декартовой системы координат. Масштабные отрезки координатных осей выбираются равными. Ось  $Ox$  называется *осью абсцисс*, ось  $Oy$  – *осью ординат*,

ось  $Oz$  называют *осью аппликат*.

Единичные векторы, лежащие на осях координат и выходящие из начала координат называются *ортами* и обозначаются:  $\bar{i}$  для оси  $Ox$ ,  $\bar{j}$  для оси  $Oy$ .

$\bar{k}$  для оси  $Oz$ .

Упорядочить оси координат можно двумя способами, с которыми связана ориентация плоскости.

Координатные оси  $Ox$  и  $Oy$  разбивают плоскость на четыре четверти – *квадранта*. Плоскость с построенной системой координат, называется *координатной плоскостью*.

Если для того, чтобы положительное направление оси  $Oy$  совпадало с положительным направлением оси  $Ox$ , последнюю нужно повернуть вокруг начала координат на угол  $\frac{\pi}{2}$  против движения часовой стрелки, то такая система координат называется *правой*, а плоскость – *положительно ориентированной*; если поворот на угол  $\frac{\pi}{2}$  должен осуществляться по движению часовой стрелки, то система координат называется *левой* или *отрицательно ориентированной*.

На рис. 12 на правой и левой системах координат указаны номера четвертей.

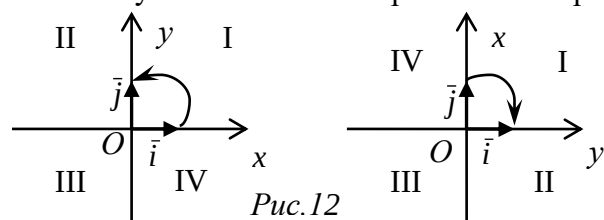


Рис. 12

«Расположим наблюдателя» в точке, являющейся концом вектора  $\bar{k}$ . Если при его взгляде на плоскость  $Oxy$  окажется, что она ориентирована положительно, то и вся система координат называется *положительно ориентированной* или *правой*; если плоскость  $Oxy$  окажется отрицательно ориентированной, то и вся система координат называется *отрицательно ориентированной* или *левой* (рис. 13).

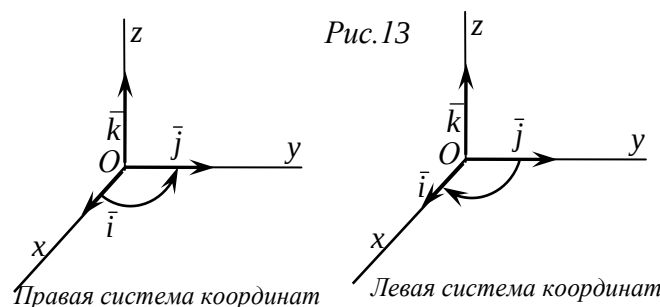


Рис. 13

Декартовыми координатами точки  $M$  в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости

называется упорядоченная пара чисел  $(x, y)$ , которые являются коэффициентами разложения вектора  $\overline{OM}$  по базису  $\bar{i}, \bar{j}$ :

$$\overline{OM} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j}.$$

$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$

Расстояние между точками

вычисляется по формуле

$$M_1 M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

в пространстве

называется упорядоченная тройка чисел  $(x, y, z)$ , которые являются коэффициентами разложения вектора  $\overline{OM}$  по базису  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ :

$$\overline{OM} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}.$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$M_1 M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Так как прямоугольная декартова система координат является частным случаем аффинной системы координат, то она наследует все свойства и утверждения, справедливые для аффинной системы координат.

### 3. Полярная система координат на плоскости.

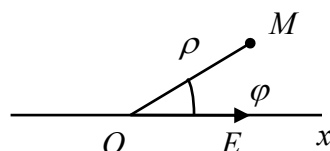


Рис. 14

*Полярная система координат* на плоскости задается выбором точки  $O$ , называемой *полюсом*, и направленным лучом  $Ox$  (*полярной осью*) с выбранным на нем единичным отрезком  $OE$  (рис. 14).

Каждой точке  $M$  в полярной системе координат соответствует упорядоченная пара чисел  $(\rho, \varphi)$ , называемая *полярными координатами* точки  $M$ .

Число  $\rho$  называется *полярным радиусом* точки  $M$ :  $\rho = OM$ . Число  $\varphi$  называется *полярным углом* – это радианная величина угла  $xOM$ , т.е. это угол поворота луча  $Ox$  до совмещения с лучом  $OM$ . Если поворот осуществляется против часовой стрелки, то  $\varphi > 0$ ; если по часовой стрелке, то  $\varphi < 0$ . Для точки  $O$  величина полярного

угла не определена.

Каждой точке плоскости соответствует бесконечное число пар действительных чисел – ее координат, но каждой паре соответствует единственная точка плоскости. Будем считать, что  $\varphi \in [0; 2\pi)$ .

Пусть на плоскости заданы две системы координат: прямоугольная декартова и полярная, причем начало координат прямоугольной декартовой системы совпадает с полюсом полярной системы координат, а положительное направление оси  $Ox$  – с полярной осью.

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат точка  $M$  имеет координаты  $(x, y)$ , а в полярной ее координаты  $(\rho, \varphi)$ , тогда

$$x = \rho \cdot \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi \quad (1)$$

- формулы перехода от полярной системы координат к прямоугольной;

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2)$$

- формулы перехода от прямоугольной системы координат к полярной.

#### 4. Сферическая система координат в пространстве.

Положение произвольной точки  $M$  в пространстве определяется тремя координатами:

$$\rho = |OM|, \quad 0 \leq \rho < +\infty,$$

$$\varphi = \angle XOM', \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\theta = \angle M'OM, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

где  $M'$  – проекция точки  $M$  на плоскость  $xOy$ ,  $MM' \perp xOy$ ,  $MM' \cap xOy = M'$  (рис. 15).

Связь согласованных сферической и прямоугольной декартовой систем координат выражается формулами

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta,$$

$$y = \rho \sin \varphi \cos \theta,$$

$$z = \rho \cos \theta.$$

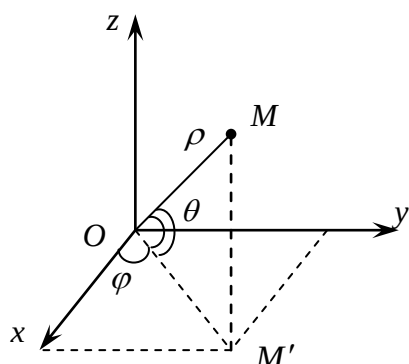


Рис. 15

#### 5. Цилиндрическая система координат в пространстве.

Цилиндрические координаты – это числа  $\rho, \varphi, z$ . Если  $M'$  – проекция точки  $M$  на плоскость  $xOy$ , то

$$\rho = |OM'|, \quad 0 \leq \rho < +\infty,$$

$$\varphi = \angle XOM', \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$z = |MM'|, \quad 0 < z < +\infty \quad (\text{рис. 16}).$$

Связь цилиндрических координат с прямоугольной декартовой выражается формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

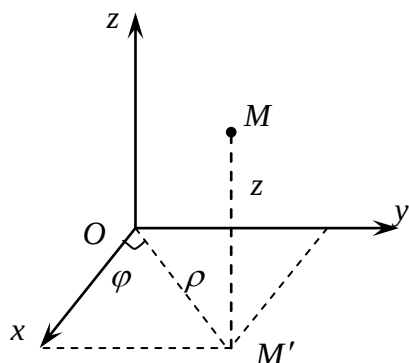


Рис. 16

**Задача 1.** Найти прямоугольные координаты и построить точку  $A\left(2\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$ , если полюс

совпадает с началом направлена по оси абсцисс.

Решение. По формулам

$$y = 2\sqrt{2} \sin \frac{3}{4}\pi = 2; \quad A(-2, 2).$$

Ответ:  $A(-2, 2)$ .

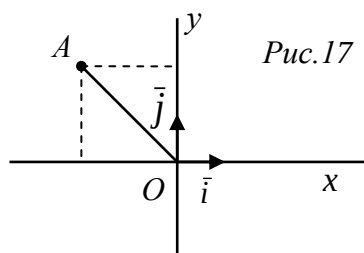


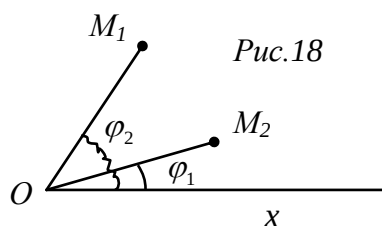
Рис. 17

координат, полярная ось

$$(1) \quad x = 2\sqrt{2} \cos \frac{3}{4}\pi = -2;$$

Построение см. на рис. 17.

**Задача 2.** Найти полярные координаты точки  $M(1, -\sqrt{3})$ , если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось - с положительным направлением оси абсцисс (т.е. системы координат согласованы).



Решение. По формулам (2)  $\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ ,  
 $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\varphi = \frac{5}{3}\pi$  (так как точка  $M$  лежит в IV четверти).

Итак,  $M\left(2, \frac{5}{3}\pi\right)$ .

Ответ:  $M\left(2, \frac{5}{3}\pi\right)$ .

**Задача 3.** Определить расстояние между точками  $M_1(\rho_1, \varphi_1)$  и  $M_2(\rho_2, \varphi_2)$  (рис. 18).

Решение. В треугольнике  $OM_1M_2$ :

$$OM_1 = \rho_1, OM_2 = \rho_2, \angle M_1OM_2 = \varphi_2 - \varphi_1.$$

По теореме косинусов

$$M_1M_2^2 = OM_1^2 + OM_2^2 - 2 \cdot OM_1 \cdot OM_2 \cdot \cos \angle M_1OM_2,$$

$$M_1M_2 = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (3)$$

Если  $\varphi_1 > \varphi_2$ , то  $\angle M_1OM_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ , но так как косинус угла – четная функция, то формула (3) остается справедливой и в этом случае.

Ответ:  $M_1M_2 = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ .

*Фигурой* называется любое множество точек пространства. Пусть задана некоторая система координат. Условием, определяющим фигуру  $F$  в данной системе координат, называется уравнение, неравенство, их система или совокупность, которым удовлетворяют координаты любой точки фигуры  $F$  и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих фигуре  $F$ .

**Задача 4.** Составить уравнение окружности радиуса  $r$ , если в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости ее центр  $C$  имеет координаты  $(a, b)$ .

Решение. Пусть  $M(x, y)$  - текущая точка окружности (т.е. произвольная ее точка), тогда по определению окружности  $CM = r$ . Запишем это равенство в координатах  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$ . Возведя обе части уравнения в квадрат, получим  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ .

Ответ:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ .

**Задача 5.** Составить уравнение круга радиуса  $r$ , если он лежит в плоскости  $xOy$ , а его центр  $C$  в прямоугольной декартовой системе координат в пространстве имеет координаты  $(a, b, 0)$ .

Решение. Пусть  $M(x, y, z)$  - текущая точка круга, тогда по определению круга  $CM \leq r$ . Запишем последнее равенство в координатах  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-0)^2} \leq r$  или  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 \leq r^2$ . Так как круг лежит в плоскости  $xOy$  и у всех точек этой плоскости аппликата равна нулю, то имеем систему:  $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 \leq r^2, \\ z = 0. \end{cases}$  или

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

Ответ:  $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2, \\ z = 0. \end{cases}$

**Задача 6.** Установить вид фигуры, которая в полярной системе координат задана системой: 
$$\begin{cases} \rho = 2, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение. Множество точек, у которых  $\rho = 2$ , - это точки, отстоящие от полюса на расстояние 2, т.е. это окружность с центром в полюсе радиуса 2.

Неравенство  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  задает множество лучей ( $\rho$  - произ-

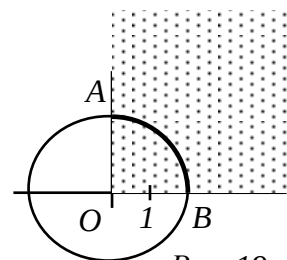


Рис. 19

вольно) с началом в полюсе и углом наклона от 0 до  $\frac{\pi}{2}$  к полярной оси, т.е. это угол  $AOB$ . В пересечении этих множеств получим искомую фигуру - часть окружности, лежащую в I четверти (рис. 19).

Ответ: данная система задает часть окружности, лежащую в I четверти.

Любую фигуру можно выразить алгебраически, хотя на практике это не всегда легко сделать. Однако даже не всякое уравнение определяет некоторую фигуру. Например, уравнение  $x^2 + y^2 = 0$  задает на плоскости точку  $O(0,0)$ , а в пространстве - ось  $Oz$ ; уравнение  $x^2 + y^2 = -1$  не задает никакого множества точек.

**Задача 7.** В прямоугольной декартовой системе координат множество точек задано уравнением  $x - 3y = 0$ . Найти уравнение этого множества в согласованной полярной системе координат.

Решение. По формулам перехода от полярной системы координат к согласованной прямоугольной декартовой  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . Подставляя выражения для  $x$  и  $y$  в исходное уравнение, получим  $\rho \cos \varphi - 3\rho \sin \varphi = 0$ ,  $\rho(\cos \varphi - 3 \sin \varphi) = 0$ , откуда

$$\rho = 0 \quad \text{или} \quad \cos \varphi - 3 \sin \varphi = 0, \text{ т.е.}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: 
$$\begin{cases} \rho = 0, \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

### Упражнения

1. Построить точки, заданные полярными координатами:  $A\left(4, \frac{\pi}{4}\right), B\left(3, -\frac{\pi}{6}\right), C\left(1, -\frac{11}{4}\pi\right)$ .
2. Найти полярные координаты точек, если системы координат согласованы:  $A(2\sqrt{3}, 2), B(-4, 4), C(-7, 0), D(-\sqrt{2}, -\sqrt{6})$ .
3. Найти прямоугольные координаты точек, если системы координат согласованы:  $A\left(10, \frac{\pi}{2}\right), B\left(0, -\frac{3}{2}\pi\right), C\left(1, -\frac{\pi}{3}\right), D\left(2, -\frac{3}{6}\pi\right)$ .
4. Найти полярные координаты точки, симметричной точке  $M(\rho, \varphi)$ :  
а) относительно полюса; б) относительно полярной оси.
5. Определить множество точек, координаты которых в полярной системе координат удовлетворяют уравнению:  
а)  $\rho = 3$ ; б)  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ .
6. Изобразить на чертеже множества точек, заданных следующими системами неравенств в прямоугольной системе координат:

$$\text{а) } \begin{cases} x > 0, \\ y \leq 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ y > 0; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} |x| \leq 2, \\ |y| \geq 3; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x^2 + y^2 < 16, \\ x > 2; \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 > 25, \\ |x| < 2. \end{cases}$$

7. Изобразить на чертеже множества точек, заданных в полярной системе координат следующими соотношениями (если  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ):

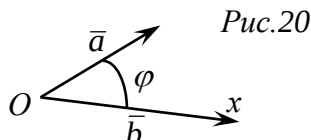
$$\text{а) } \rho \leq 2; \quad \text{б) } \varphi > \frac{\pi}{2}; \quad \text{в) } 1 < \rho \leq 3; \quad \text{г) } \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{5}{3}\pi; \quad \text{д) } \begin{cases} \rho > 2, \\ \frac{\pi}{6} < \varphi \leq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

8. В прямоугольной декартовой системе координат множество точек задано уравнением  $x^2 + y^2 = 16$ . Найти уравнение этого множества в согласованной полярной системе координат.

9. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точек  $A(2,0)$  и  $B(1,1)$ .

#### Тема 4 Евклидово пространство

Пусть векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ненулевые. Отложим их от общей точки  $O$ :  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  (рис.20). Угол между лучами  $OA$  и  $OB$  называется *углом между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$* . Если лучи  $OA$  и  $OB$  совпадают, т.е. векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены, то угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен нулю.



*Скалярным произведением* двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ . Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение равно нулю.

##### Геометрические свойства скалярного произведения

1. Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

2. Если  $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ; если  $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ .

$$3. |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

$$4. \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

##### Алгебраические свойства скалярного произведения

1.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  - коммутативность.

2.  $(\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{b})$  - ассоциативность.

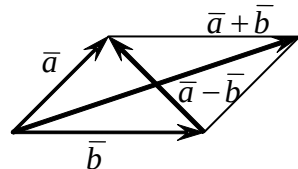
3.  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$  - дистрибутивность относительно сложения векторов.

**Задача 1.** Доказать, что если вектор  $\vec{a} + \vec{b}$  перпендикулярен вектору  $\vec{a} - \vec{b}$ , то  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ .

Дать геометрическую интерпретацию.

Доказательство. Так как  $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$ , то  $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$  или  $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$ , или  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ .

Отложим векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  от одной точки и построим векторы  $\vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{a} - \vec{b}$ . Геометрически доказанное свойство означает, что если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то его стороны равны, т.е. это признак ромба.



**Задача 2.** Известно, что векторы  $\vec{s} + 2\vec{t}$  и  $5\vec{s} - 4\vec{t}$  взаимно перпендикулярны. Какой угол образуют единичные векторы  $\vec{s}$  и  $\vec{t}$ ?

Решение. Так как данные векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю:  $(\vec{s} + 2\vec{t})(5\vec{s} - 4\vec{t}) = 0$ . Используя свойства скалярного произведения векторов,

имеем:

$$(\bar{s} + 2\bar{t})(5\bar{s} - 4\bar{t}) = 5\bar{s}^2 + 10\bar{s}\bar{t} - 4\bar{s}\bar{t} - 8\bar{t}^2 = 5\bar{s}^2 + 6\bar{s}\bar{t} - 8\bar{t}^2,$$

т.е.  $6\bar{s}\bar{t} = 8\bar{t}^2 - 5\bar{s}^2$ . Так как векторы  $\bar{s}$  и  $\bar{t}$  единичные, то  $\bar{s}^2 = |\bar{s}|^2 = 1, \bar{t}^2 = |\bar{t}|^2 = 1$ , поэтому

$6\bar{s}\bar{t} = 8 \cdot 1 - 5 \cdot 1, \bar{s} \cdot \bar{t} = \frac{1}{2}$ . Используя геометрические свойства скалярного произведения,

имеем  $\cos(\widehat{\bar{s}, \bar{t}}) = \frac{\bar{s} \cdot \bar{t}}{|\bar{s}| \cdot |\bar{t}|} = \frac{1/2}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2}$ , т.е. угол между векторами  $\bar{s}$  и  $\bar{t}$  равен  $\frac{\pi}{3}$  или  $60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ$ .

Векторное пространство, в котором каждой паре векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  ставится в соответствие действительное число, называемое скалярным произведением этих векторов, называется *евклидовым пространством*.

Два вектора называются *ортгональными*, если они лежат на перпендикулярных прямых. Базис векторного пространства, составленный из попарно ортгональных векторов, называется *ортгональным*. Если в ортгональном базисе длина каждого базисного вектора равна единице, то он называется *ортонормированным*.

В двумерном пространстве координаты вектора ортонормированного базиса обозначаются  $\bar{i}, \bar{j}$ , в трехмерном пространстве  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ . Таким образом,  $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$ ,

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{i} \cdot \bar{k} = 0.$$

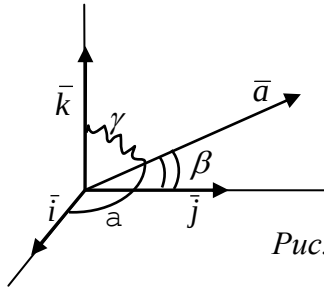


Рис.21

Координаты вектора в ортонормированном базисе называют *прямоугольными координатами* вектора относительно этого базиса. А соответствующая система координат – *прямоугольной декартовой системой координат*.

Координаты точки  $A(a_1, a_2, a_3)$  в ортонормированном базисе (в прямоугольной системе координат) называются:  $a_1$  – *абсцисса*,  $a_2$  – *ордината*,  $a_3$  – *аппликата*.

Косинусы углов  $\alpha, \beta, \gamma$  (рис.21) между вектором  $\bar{a}$  и базисными векторами прямоугольной декартовой системы координат называются *направляющими косинусами вектора  $\bar{a}$* .

Пусть векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  в ортонормированном базисе заданы своими координатами:

$$\bar{a}(a_1, a_2), \bar{b}(b_1, b_2).$$

$$\bar{a}(a_1, a_2, a_3), \bar{b}(b_1, b_2, b_3).$$

Тогда скалярное произведение векторов вычисляется по формуле

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2;$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

Длина вектора вычисляется по формуле

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2};$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Направляющие косинусы вектора  $\bar{a}$  вычисляются по формулам

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|}, \cos \beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|};$$

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|}, \cos \beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_3}{|\bar{a}|}.$$

**Задача 3.** Показать, что треугольник  $ABC$  прямоугольный, если в ортонормированном базисе его вершины имеют координаты  $A(-3; -3), B(-1; 3), C(11; -1)$ .

Решение.

I способ

$$\overline{AB} = (-1 - (-3); 3 + 3) = (2; 6), |\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40},$$

$$\overline{AC} = (11 + 3; -1 + 3) = (14; 2), |\overline{AC}| = \sqrt{14^2 + 2^2} = \sqrt{200},$$

$$\overline{BC} = (11 - (-1); -1 - 3) = (12; -4), \quad |\overline{BC}| = \sqrt{12^2 + (-4)^2} = \sqrt{160}.$$

Так как  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ , то для треугольника  $ABC$  справедлива теорема Пифагора, следовательно, треугольник  $ABC$  прямоугольный с прямым углом  $B$ .

II способ

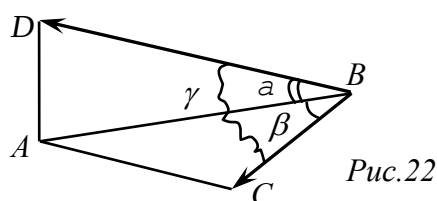
$$\overline{AB} = (2; 6), \quad \overline{AC} = (14; 2), \quad \overline{BC} = (12; -4).$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2 \cdot 14 + 6 \cdot 2 = 28 + 12 = 40, \quad \overline{AC} \cdot \overline{BC} = 14 \cdot 12 + 2 \cdot (-4) = 168 - 8 = 160,$$

$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 2 \cdot 12 + 6 \cdot (-4) = 24 - 24 = 0$ , т.е.  $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ , поэтому треугольник  $ABC$  прямоугольный.

**Задача 4.** Отрезок  $AD$  перпендикулярен плоскости треугольника  $ABC$ . Найти угол  $\gamma$  между векторами  $\overline{BC}$  и  $\overline{BD}$ , если  $\angle ABD = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$  (рис.22).

Решение. Имеем  $\cos \alpha = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BD}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BD}|}$ ,  $\cos \beta = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BA}|}$ ,  $\cos \gamma = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BD}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BD}|}$ . Так как  $\overline{AB}^2 = |\overline{AB}|^2$ ,



то

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BD}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BD}|} \cdot \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BA}|} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BD}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BD}|} \cdot \frac{\overline{BA}^2}{|\overline{BA}|^2} = \cos \gamma$$

Ответ:  $\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta$ .

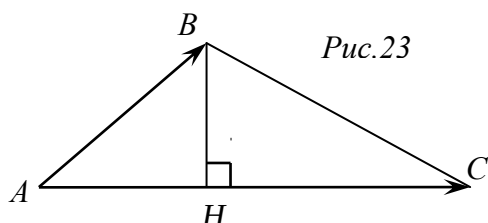
*Замечание.* Теорема о трех перпендикулярах является следствием задачи 4.

Действительно, если  $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ , то  $\angle \beta = 90^\circ$  и  $\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos 90^\circ = 0$ , т.е. если проекция наклонной перпендикулярна некоторой прямой в плоскости проекции, то и наклонная перпендикулярна этой прямой. Верно и обратное.

Действительно, если  $DB \perp BC$ , то  $\angle \gamma = 90^\circ$ ,  $\cos \alpha \cdot \cos \beta = 0$ , но  $\angle \alpha < 90^\circ$ , так как  $DB$  наклонена к плоскости  $ABC$ , поэтому  $\cos \alpha \neq 0$ . Остается принять, что  $\cos \beta = 0$ , т.е.  $\angle \beta = 90^\circ$ .

**Задача 5.** Определить координаты и длину высоты  $\overline{BH}$  треугольника  $ABC$  (рис. 23), если  $\overline{AB}(4, 2, -1)$ ,  $\overline{AC}(2, -2, 0)$ .

Решение.  $\overline{BH} = \overline{BA} + \overline{AH}$ , векторы  $\overline{AH}$  и  $\overline{AC}$  коллинеарны, поэтому существует число  $a \neq 0$  такое, что  $\overline{AH} = a \cdot \overline{AC} = (2a, -2a, 0)$ . Так как  $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ , то  $\overline{BH} \cdot \overline{AC} = 0$ . Запишем последнее равенство в координатах:



$$\overline{BH} = (-4, -2, 1) + (2a, -2a, 0) = (-4 + 2a, -2 - 2a, 1),$$

$$\overline{BH} \cdot \overline{AC} = (4 + 2a, -2 - 2a, 1) \cdot (2, -2, 0) = -8 + 4a + 4 + 4a,$$

$$\text{откуда } 8a - 4 = 0, \text{ т.е. } a = \frac{1}{2}.$$

$$\overline{BH} = \left( -4 + 2 \cdot \frac{1}{2}, -2 - 2 \cdot \frac{1}{2}, 1 \right) = (-3, -3, 1);$$

$$|\overline{BH}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{19}.$$

Ответ:  $\overline{BH} = (-3, -3, 1)$ ,  $|\overline{BH}| = \sqrt{19}$ .

### Упражнения

1. Даны единичные векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , удовлетворяющие условию  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ . Вычислить

- $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ .
- Дано, что  $|\vec{a}| = a, |\vec{b}| = b \neq 0$ . Определить, при каком значении  $\lambda$  векторы  $\vec{a} + \lambda \vec{b}$  и  $\vec{a} - \lambda \vec{b}$  будут перпендикулярны.
  - Определить, при каком значении  $\lambda$  векторы  $\vec{a} = \lambda \vec{i} - 3 \vec{j} + 2 \vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + 2 \vec{j} - \lambda \vec{k}$  взаимно перпендикулярны.
  - Какому условию должны удовлетворять векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , чтобы вектор  $\vec{a} + \vec{b}$  делил пополам угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ?
  - Какому условию должны удовлетворять векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , чтобы выполнялись следующие соотношения: 1)  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ; 2)  $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$ ; 3)  $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$ ?
  - Даны три вектора  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , удовлетворяющие условию  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ . Зная, что  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, \vec{c} = 4$ , вычислить  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ .
  - Доказать, что угол между диагоналями прямоугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , вычисляется по формуле  $|\cos \varphi| = \frac{\vec{a}^2 - \vec{b}^2}{\vec{a}^2 + \vec{b}^2}$ .
  - Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  взаимно перпендикулярны и имеют равные длины. Доказать, что векторы  $\vec{p} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$  и  $\vec{q} = 10\vec{a} - 6\vec{b}$  перпендикулярны.
  - Известно, что угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $30^\circ, |\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1$ . Вычислить величину угла  $\varphi$  между векторами  $\vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{a} - \vec{b}$ . Дать геометрическую интерпретацию задачи.
  - Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны. Найти  $n$ , если в прямоугольной декартовой системе координат векторы равны: а)  $\vec{a}(2, -1, 3), \vec{b}(1, 3, n)$ ; б)  $\vec{a}(n, -2, 1), \vec{b}(n, -n, 1)$ .
  - В тетраэдре  $DABC$ :  $AB = AC = a, \angle DAB = \angle DAC = \varphi$ . Найти угол между векторами  $\vec{AD}$  и  $\vec{BC}$ .
  - В пирамиде  $SABC$  углы при вершине  $S$  прямые, а основанием служит равносторонний треугольник  $ABC$ . Точки  $D$  и  $E$  являются серединами ребер  $AD$  и  $SB$  соответственно. Найти угол между векторами  $\vec{SD}$  и  $\vec{EC}$ .
  - Определить вектор, коллинеарный биссектрисе угла  $A$  треугольника  $ABC$ , если  $\vec{AB} = (2, 2, 1), \vec{AC} = (3, 4, 0)$ .
  - Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .
  - Найти скалярное произведение векторов  $2\vec{AB} - \vec{AC}$  и  $\vec{AB} + \vec{AC}$ , если  $A(1, -3, 0), B(2, 2, 2), C(-4, 0, 1)$ .
  - Найти вектор  $\vec{a}$ , коллинеарный вектору  $\vec{b}(2, 1, -1)$  и удовлетворяющий условию  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ .
  - Определите стороны и углы треугольника  $ABC$ , если  $A(-1, -2, 4), B(-4, -2, 0), C(3, -2, 1)$ .
  - Найдите длину биссектрисы, проведенной из вершины  $A$  треугольника  $ABC$ , если  $A(3, -5), B(-3, 3), C(-1, -2)$ .
  - Даны вершины треугольника:  $A(7, 2), B(1, 9), C(-8, -1)$ . Найти расстояния от точки пересечения медиан  $M$  до вершин треугольника.
  - Точки  $L(0, 0), M(3, 0), N(0, 4)$  являются серединами сторон треугольника. Найти площадь треугольника.

### Контрольная работа №1

- Треугольник  $ABC$  задан координатами своих вершин. Построить его в прямоугольной декартовой системе координат. Построить векторы  $\vec{AB} + \vec{CB}$  и  $\vec{AC} - \vec{BC}$ . Вычислить длины

сторон и углы треугольника. Найти координаты вектора  $\overline{AO}$ , где  $O$  – точка пересечения медиан треугольника.

- |                                 |                                  |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1) $A(2,2), B(-1,1), C(1,-3);$  | 16) $A(3,1), B(-2,1), C(-1,-3);$ |
| 2) $A(3,1), B(-1,2), C(1,-2);$  | 17) $A(4,1), B(-1,1), C(-1,-4);$ |
| 3) $A(1,2), B(-2,1), C(-1,-3);$ | 18) $A(1,4), B(-2,-1), C(1,-2);$ |
| 4) $A(3,2), B(-1,3), C(0,-4);$  | 19) $A(1,3), B(-3,1), C(1,-3);$  |
| 5) $A(2,2), B(-1,2), C(1,-2);$  | 20) $A(4,1), B(-2,-1), C(1,-2);$ |
| 6) $A(2,2), B(-2,1), C(-1,3);$  | 21) $A(4,1), B(-3,1), C(1,-3);$  |
| 7) $A(2,2), B(-1,3), C(0,-4);$  | 22) $A(1,3), B(-1,1), C(1,-2);$  |
| 8) $A(3,1), B(-1,1), C(1,-3);$  | 23) $A(1,3), B(-3,1), C(1,-3);$  |
| 9) $A(3,1), B(-2,1), C(-1,-3);$ | 24) $A(1,4), B(-1,1), C(-1,-4);$ |
| 10) $A(3,1), B(-1,3), C(0,-4);$ | 25) $A(1,4), B(-3,1), C(1,-3);$  |
| 11) $A(1,2), B(-1,1), C(1,-3);$ | 26) $A(4,1), B(-1,1), C(1,-3);$  |
| 12) $A(1,2), B(-1,2), C(1,-2);$ | 27) $A(1,3), B(-1,2), C(1,-2);$  |
| 13) $A(1,2), B(-1,3), C(0,-4);$ | 28) $A(1,4), B(-2,1), C(-1,-3);$ |
| 14) $A(3,2), B(-1,1), C(1,-3);$ | 29) $A(2,2), B(-2,-1), C(1,-2);$ |
| 15) $A(3,2), B(-1,2), C(1,-2);$ | 30) $A(3,1), B(-3,1), C(1,-3).$  |

2. Найти координаты вектора  $\overline{BH}$ , если  $BH \perp AC$ , вычислить длину  $BH$ .

## Тема 5. Прямая на плоскости

### 1. Общее уравнение прямой

Вектор  $\vec{a} \neq \vec{0}$  называется *направляющим* вектором прямой  $l$ , если  $\vec{a}$  параллелен  $l$ . Вектор  $\vec{n} \neq \vec{0}$  называется *нормальным* к прямой  $l$  или *вектором нормали*, если  $\vec{n} \perp l$ , т.е.  $\vec{n} \perp \vec{a}$ .

Любая прямая в аффинной системе координат может быть задана уравнением первой степени (линейным уравнением):

$$Ax + By + C = 0, \quad (1)$$

где  $(x, y)$  – координаты точек прямой,  $A, B, C$  – коэффициенты, причем  $A$  и  $B$  не равны нулю одновременно.

Любое уравнение первой степени в аффинной системе координат определяет прямую.

Уравнение (1) называется *общим уравнением* прямой. Для прямой, заданной общим уравнением (1) в прямоугольной декартовой системе координат, вектор  $\vec{a} = (-B, A)$  является направляющим, а  $\vec{n} = (A, B)$  – вектором нормали.

Прямая  $l$ , заданная уравнением (1), разбивает плоскость на две полуплоскости. Координаты точек, лежащих по одну сторону от прямой  $l$  удовлетворяют неравенству  $Ax + By + C > 0$ , а координаты точек, лежащих по другую сторону от прямой  $l$ , – неравенству  $Ax + By + C < 0$ .

**Задача 1.** Задайте ту полуплоскость, в которую попадает точка  $M(1,2)$  относительно прямой  $l: 5x - 3y + 7 = 0$ .

**Решение.** Подставим координаты точки  $M$  в левую часть уравнения прямой  $l$ , получим неравенство  $5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 7 = 5 - 6 + 7 = 6 > 0$ . Этому же неравенству будут удовлетворять все точки рассматриваемой полуплоскости.

Ответ:  $5x - 3y + 7 > 0$ .

**2. Каноническое уравнение прямой.** Прямая  $l$  задана точкой  $M_0(x_0, y_0)$  и направляющим вектором  $\vec{a}(a, \beta)$ . Если  $a \neq 0, \beta \neq 0$ , то каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{\beta}.$$

**3. Параметрическое уравнение прямой.** Если прямая  $l$  задана точкой  $M_0(x_0, y_0)$  и направляющим вектором  $\vec{a}(a, \beta)$ , то ее параметрическое уравнение имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, t \in R \end{cases}, \text{здесь } t - \text{параметр.}$$

4. **Уравнение прямой, проходящей через две точки.** Пусть  $M_1(x_1, y_1) \in l$ ,  $M_2(x_2, y_2) \in l$ . Если  $x_2 - x_1 \neq 0, y_2 - y_1 \neq 0$ , то уравнение прямой  $l$  имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

5. **Уравнение прямой в отрезках.** Пусть прямая  $l$  пересекает ось  $Ox$  в точке  $A(a, 0)$ , а ось  $Oy$  в точке  $B(0, b)$ , где  $a \neq 0, b \neq 0$ . Говорят, что прямая  $l$  отсекает от осей  $Ox$ ,  $Oy$  отрезки  $|a|, |b|$  соответственно (знак чисел  $a$  и  $b$  показывает с какой стороны от начала координат на оси  $Ox$  и  $Oy$  отсекается отрезок). Уравнение прямой в этом случае имеет вид  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .

*Замечание.* Все сказанное выше справедливо для плоскости, как с аффинной, так и с прямоугольной декартовой системой координат.

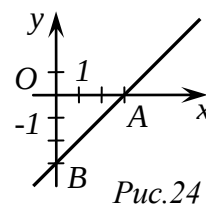
6. **Уравнение прямой с угловым коэффициентом.** Пусть на плоскости  $Oxy$  задана прямоугольная декартова систем координат, прямая  $l$  проходит через точку  $M_0(x_0, y_0)$  и образует угол  $\varphi$  с положительным направлением оси  $Ox$ . Число  $k = \operatorname{tg} \varphi$  называется *угловым коэффициентом прямой*. Тогда уравнение прямой  $l$  имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \text{или} \quad y = kx + b, \text{ где } b = y_0 - kx_0.$$

**Задача 2.** Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок  $b = -3$  и образующий с положительным направлением оси абсцисс угол  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Построить прямую.

Решение. Угловой коэффициент прямой  $k = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ .

Так как прямая отсекает от оси ординат отрезок  $b = -3$ , то она проходит через точку  $B(0, b)$ , т.е.  $B(0, -3)$ . Уравнение прямой имеет вид  $y - (-3) = 1(x - 0)$ , т.е.  $y = x - 3$  или  $x - y - 3 = 0$  - общее уравнение прямой. Для построения достаточно двух точек. Одна точка известна - это точка  $B$ . Пусть ордината другой точки равна нулю, подставляя  $y = 0$  в общее уравнение прямой, получим  $x = 3$ , т.е. прямая проходит через точку  $A(3, 0)$  (рис.24).



Ответ:  $x - y - 3 = 0$  - общее уравнение прямой.

**Задача 3.** Дан треугольник  $ABC$ :  $A(0, 1)$ ,  $B(6, 5)$   $C(12, -1)$ .

1) Составить уравнение медианы  $AM$ .

Решение.  $M$  - середина  $BC$ , поэтому координаты точки  $M$   $x_M = \frac{6+12}{2} = 9$ ;

$y_M = \frac{5+(-1)}{2} = 2$ . Запишем уравнение прямой  $AM$  как уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x - 9}{0 - 9} = \frac{y - 2}{1 - 2}, \quad \frac{x - 9}{-9} = \frac{y - 2}{-1},$$

$x - 9 = 9y - 18$ ,  $x - 9y + 9 = 0$  - общее уравнение  $AM$ .

Ответ:  $x - 9y + 9 = 0$ .

2) Составить уравнение высоты  $CH$ .

Решение.  $CH \perp AB$ , поэтому направляющий вектор  $\overrightarrow{AB}(6, 4)$  прямой  $AB$  является нормальным для прямой  $CH$ . Пусть прямая  $CH$  задана общим уравнением  $ax + by + c = 0$ , тогда  $\vec{n}(a, b) \perp CH$ , поэтому  $a = 6, b = 4$ , т.е.  $6x + 4y + c = 0$ . Так как  $C \in CH$ , то координаты точки  $C$  удовлетворяют уравнению прямой, подставляя координаты точки  $C$  в уравнение прямой  $CH$ ,

найдем коэффициент  $c$ :  $6 \cdot 12 + 4 \cdot (-1) + c = 0$ ,  $c = -68$ , т.е.  $6x + 4y - 68 = 0$  или  $3x + 2y - 34 = 0$  - уравнение прямой  $CH$ .

Ответ:  $3x + 2y - 34 = 0$ .

7. **Взаимное расположение прямых.** Пусть в аффинной системе координат заданы две прямые:

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (2)$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0. \quad (3)$$

Прямые  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются тогда и только тогда, когда коэффициенты при переменных не пропорциональны;

совпадают тогда и только тогда, когда коэффициенты при переменных пропорциональны между собой и пропорциональны свободным членам;

$$\text{параллельны тогда и только тогда, когда } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы уравнениями с угловым коэффициентом:

$$l_1: y = k_1x + b_1, \quad (4)$$

$$l_2: y = k_2x + b_2. \quad (5)$$

Прямые  $l_1$  и  $l_2$  параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при переменных равны, т.е.  $k_1 = k_2$ ;

перпендикулярны, если произведение коэффициентов при переменных равно  $-1$ , т.е.  $k_1 \cdot k_2 = -1$ .

Величина того из углов при пересечении прямых  $l_1$  и  $l_2$ , который не больше других, называется *углом между прямыми*  $a$ . По определению  $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ .

Если прямые  $l_1$  и  $l_2$  не перпендикулярны и заданы уравнениями (2), (3), то

$$\operatorname{tg} a = \frac{\left| \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \right|}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Если прямые  $l_1$  и  $l_2$  не перпендикулярны и заданы уравнениями (4), (5), то

$$\operatorname{tg} a = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

**Задача 4.** Составить уравнение катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы  $3x - y + 5 = 0$  и вершину прямого угла  $C(4, -1)$ .

Решение. Углы при основании равнобедренного треугольника  $45^\circ$ , поэтому для угла  $a$  между прямыми  $AB$  и  $AC$ , где  $AC$  задана уравнением  $ax + by + c = 0$ , имеем  $\operatorname{tg} a = \frac{3b + a}{3a - b} = 1$ .

Так как точка  $C \in AC$ , то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т.е.  $4a - b + c = 0$ .

Имеем систему:  $\begin{cases} 3b + a = 3a - b, \\ 4a - b + c = 0, \end{cases} \begin{cases} 2b = a, \\ c = -7b, \end{cases}$  т.е.  $2bx + by - 7b = 0$  или  $2x + y - 7 = 0$  - уравнение прямой  $AC$ .

Так как  $BC \perp AC$ , то  $\vec{n}(2, 1) \perp AC$ ,  $\vec{n}$  параллелен  $BC$ . Запишем каноническое уравнение прямой  $BC$ :  $\frac{x - 4}{2} = \frac{y + 1}{1}$ ;  $x - 4 = 2y + 2$ ;  $x - 2y - 6 = 0$ .

Ответ:  $2x + y - 7 = 0$ ,  $x - 2y - 6 = 0$ .

8. **Расстояние от точки  $M_0(x_0, y_0)$  до прямой  $l: Ax + By + C = 0$** , заданных в прямоугольной декартовой системе координат, вычисляется по формуле

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

**Задача 5.** Даны стороны  $AB: x + 3y - 7 = 0$ ,  $BC: 4x - y - 2 = 0$ ,  $AC: 6x + 8y - 10 = 0$  треугольника  $ABC$ . Найти высоту, опущенную из вершины  $B$ .

Решение.  $B = AB \cap BC$ , поэтому ее координаты удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x+3y-7=0, \\ 4x-y-2=0, \end{cases} \begin{cases} x=7-3y, \\ 28-12y-y-2=0, \end{cases} \begin{cases} y=2, \\ x=1, \end{cases} \text{ т.е. } B(1,2), \rho(B,AC)=\frac{|6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Ответ:  $\rho(B,AC)=0,6$ .

### Упражнения

- Дано общее уравнение прямой  $3x-4y-5=0$ . Написать: а) уравнение с угловым коэффициентом; б) уравнение в отрезках. Построить прямую: а) в аффинной системе координат; б) в прямоугольной системе координат.
- Прямая проходит через точки  $M_1(3,-1)$ ,  $M_2(2,-3)$ . Написать ее каноническое, параметрическое уравнения, уравнения в отрезках и с угловым коэффициентом, общее уравнение.
- Определить какие из точек  $A(2,-1)$ ,  $B(3,0)$ ,  $C(0,-5)$ ,  $D(-7,1)$ ,  $E(3,1)$ ,  $F(-12,-8)$  лежат относительно прямой  $l: x+y-4=0$  в той же полуплоскости, что и начало координат.
- Найти угол, который образует с положительным направлением оси абсцисс прямая  $2x+2y-5=0$ .
- Найти угол, который образует с положительным направлением оси ординат прямая  $2x-y+3=0$ .
- Можно ли уравнение прямой  $20x+y=0$  записать в отрезках?
- Прямая отсекает на осях координат равные отрицательные отрезки. Составить ее уравнение, если площадь треугольника, образованного прямой с осями координат, равна 8 кв. ед.
- Определить угол между прямыми:
  - $y=-3x+7$  и  $y=2x+1$ ;
  - $6y-4x+1=0$  и  $20x-30y+4=0$ ;
  - $3x-5y+7=0$  и  $10x+6y=0$ .
- Определить расстояние между параллельными прямыми  $3x+y-7=0$  и  $6x+2y-5=0$ .
- Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых  $3x-4y=7=0$  и  $5x+2y+3=0$  и а) параллельную оси ординат; б) перпендикулярную прямой  $x+y=0$ .
- Даны вершины треугольника  $A(1,-2)$ ,  $B(0,3)$ ,  $C(1,1)$ . Написать уравнения прямых, проходящих через вершины параллельно противоположным сторонам.
- В треугольнике  $ABC$   $H$  – точка пересечения высот. Составить уравнения сторон треугольника, если  $A(-1,5)$ ,  $B(3,2)$ ,  $H(5,-3)$ .
- В треугольнике  $ABC$ :  $A(-4,-5)$ ,  $B(4,1)$ ,  $C(-1/2,7)$ . Написать уравнение: а) биссектрисы угла  $A$ ; б) медианы  $AM$ ; в) высоты  $CH$ .
- Даны смежные вершины  $A(1,-2)$ ,  $B(3,2)$  параллелограмма  $ABCD$  и точка  $P(1,1)$  пересечения его диагоналей. Написать уравнения сторон.
- Написать уравнение окружности с центром в точке  $Q(6,-3)$ , касающейся прямой  $3x-4y-15=0$ .
- В треугольнике  $ABC$ :  $AN \perp BC$ ,  $BK \perp AC$ ,  $AB: 2x-3y+6=0$ ,  $AN: 2x+y-2=0$ ,  $BK: x+3y-12=0$ . Написать уравнения сторон  $AC$  и  $BC$ .
- Найти угол между прямыми  $\sqrt{3}x-3y+6=0$  и  $\sqrt{3}x-y-5=0$ .
- Даны координаты вершин трапеции  $A(5,-1)$ ,  $B(6,3)$ ,  $C(9,3)$ ,  $D(10,-1)$ . Написать уравнения всех сторон трапеции. Вычислить длину стороны  $AB$ . Найти уравнение средней линии трапеции  $MN$ .

### Тема 6. Кривые второго порядка

*Кривой второго порядка* на плоскости называется линия, описываемая уравнением второй степени с двумя неизвестными

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0,$$

где коэффициенты  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  не равны нулю одновременно. Это уравнение называется *общим уравнением* линии второго порядка.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова систем координат.

**1. Окружностью** называется множество точек плоскости, удаленных от данной точки  $O(a,b)$  (*центра* окружности) на расстояние  $r$ , называемое *радиусом* окружности. Ее каноническое уравнение имеет вид:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ .

Общее уравнение задает окружность, если выполняются следующие условия:

$$1) a_{11} = a_{22} \neq 0; \quad 2) a_{12} = 0; \quad 3) a_{10}^2 + a_{20}^2 - a_{11} \cdot a_{00} > 0.$$

**Задача 1.** Найти координаты центра и радиус окружности  $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$ .

Решение. Выделим в общем уравнении окружности полные квадраты:

$$2(x^2 - 4x + 4) - 8 + 2\left(y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{8} - 4 = 0, \quad 2(x-2)^2 + 2\left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{121}{8}$$

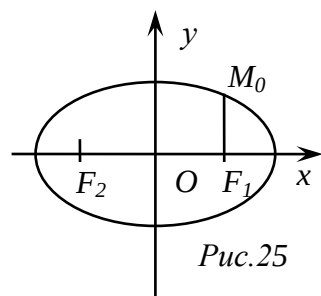
и разделим обе части уравнения на 2:

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{121}{16}.$$

Тогда  $Q\left(2, -\frac{5}{4}\right)$  - центр окружности, а  $r = \frac{11}{4}$  - ее радиус.

$$\text{Ответ: } Q\left(2, -\frac{5}{4}\right), r = \frac{11}{4}.$$

**2. Эллипсом** называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.



Обозначим расстояние между фокусами  $F_1$  и  $F_2$  через  $2c$ , сумму расстояний от них до точки эллипса через  $2a$ ,  $a > c$  и введем в рассмотрение число  $b$ :  $b^2 = a^2 - c^2$ .

Если фокусы эллипса находятся на оси абсцисс на равных расстояниях от начала координат в точках  $F_1(c,0)$ ,  $F_2(-c,0)$  (рис.25), то каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

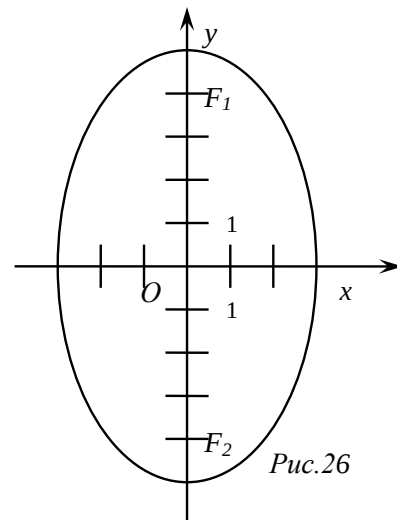
Здесь  $a$  – большая полуось,  $b$  – малая полуось эллипса.

Если фокусы эллипса находятся на оси ординат на равных расстояниях от начала координат, то уравнение эллипса то же, его фокусы имеют координаты  $F_1(0,c)$ ,  $F_2(0,-c)$ ,  $b$  – большая полуось,  $a$  – малая полуось эллипса,  $a^2 = b^2 - c^2$ .

Эксцентриситетом называется число  $e = \frac{c}{d}$ , где  $c$  – половина расстояния между фокусами,  $d$  – большая полуось эллипса.

**Задача 2.** Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, зная, что его большая ось 10, а расстояние между фокусами 8. Построить эллипс, найти координаты фокусов и эксцентриситет.

Решение. По условию  $2b=10$ ,  $2c=8$ , поэтому  $b=5$ ,  $c=4$ ,  $a^2=b^2-c^2=9$  (рис.26). Тогда каноническое уравнение эллипса  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ , его фокусы  $F_1(0,4)$ ,  $F_2(0,-4)$ , эксцентриситет  $e = \frac{4}{5}$ .



Ответ:  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ,  $F_1(0,4)$ ,  $F_2(0,-4)$ ,  $e = \frac{4}{5}$ .

**Задача 3.** Составить каноническое уравнение эллипса, если он проходит через точки  $M_1(1,3)$ ,  $M_2(4,1)$ .

Решение. Каноническое уравнение эллипса имеет вид  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Так как точки  $M_1$ ,  $M_2$  принадлежат эллипсу, то их координаты удовлетворяют его уравнению. Имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{1^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1, \\ \frac{4^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{a^2} = 1 - \frac{9}{b^2}, \\ 16\left(1 - \frac{9}{b^2}\right) + \frac{1}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{b^2} = \frac{15}{143}, \\ \frac{1}{a^2} = \frac{8}{143}. \end{cases}$$

Ответ:  $\frac{8}{143}x^2 + \frac{15}{143}y^2 = 1$ .

**3. Гиперболой** называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная  $2a$ , меньшая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим расстояние между фокусами через  $2c$ ,  $b^2=c^2-a^2$ . Если фокусы гиперболы лежат на оси  $Ox$  и равноудалены от начала координат, то каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Здесь  $a$  – действительная полуось,  $b$  – мнимая полуось,  $F_1(c,0)$ ,  $F_2(-c,0)$  – фокусы гиперболы.

Если фокусы гиперболы лежат на оси  $Oy$  и равноудалены от начала координат, то ее каноническое уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2)$$

Здесь  $b$  – действительная полуось,  $a$  – мнимая полуось,  $F_1(0,c)$ ,  $F_2(0,-c)$  – фокусы.

Гиперболы, заданные уравнениями (1), (2) называются сопряженными. Число  $e = \frac{c}{d}$ , где  $d$  – действительная полуось, называется **эксцентриситетом** гиперболы.

**Задача 4.** Дан эллипс  $9x^2 + 25y^2 = 1$ . Написать уравнение софокусной равнобочной гиперболы.

Решение. Исходя из уравнения эллипса  $a_9^2 = \frac{1}{9}, b_9^2 = \frac{1}{25}, c_9^2 = a_9^2 - b_9^2 = \frac{2}{75}$ . Для гиперболы  $c_2^2 = \frac{2}{75}$ , так как она равнобочная, то  $a_2 = b_2$ ,

поэтому  $c_2^2 = a_2^2 + b_2^2 = 2a_2^2; 2a_2^2 = \frac{2}{75}, a_2^2 = \frac{1}{75}$ .

Так как  $a_9 > b_9$ , то фокусы лежат на оси абсцисс, поэтому каноническое уравнение гиперболы имеет вид  $75x^2 - 75y^2 = 1$ .

Ответ:  $75x^2 - 75y^2 = 1$ .

**Задача 5.** Привести к каноническому виду уравнение кривой  $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$ . Определить тип кривой, вычислить основные параметры. Построить кривую.

Решение. В данном уравнении выделим полные квадраты, содержащие переменные,

$$4(x^2 - 4x + 4) - 16 - 9(y^2 + 2y + 1) + 9 - 29 = 0, \quad 4(x - 2)^2 - 9(y + 1)^2 = 36,$$

и разделим обе части уравнения на 36:

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1, \quad \frac{(x-2)^2}{3^2} - \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1,$$

следовательно, это гипербола. Ее действительная полуось  $a=3$ , мнимая полуось  $b=2$ ,  $c^2 = a^2 + b^2 = 25$ ,  $c=5$ . Расстояние между фокусами  $2c=10$ , центр симметрии  $C(2, -1)$ , координаты фокусов  $F_1(-3, -1)$ ,  $F_2(7, -1)$ .

Для построения сместим параллельным переносом оси координат так, чтобы начало координат оказалось в точке  $(2, -1)$  и в новой системе построим гиперболу  $\frac{x_n^2}{3^2} - \frac{y_n^2}{2^2} = 1$  (рис.27).

Ответ:  $\frac{x_n^2}{3^2} - \frac{y_n^2}{2^2} = 1$ .

**4. Параболой** называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, данной прямой, называемой *директрисой*.

Если расстояние от директрисы  $d$  до фокуса  $F$  равно  $p$  - *фокальный параметр*, то поместим начало координат в середину перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису, ось  $Oy$  проведем параллельно директрисе, пусть фокус лежит на положительной части оси абсцисс, тогда каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px, \quad (3)$$

$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  - фокус,  $d: x = -\frac{p}{2}$  - директриса параболы. Эта парабола расположена симметрично относительно оси абсцисс.

Если парабола расположена симметрично относительно оси ординат, то ее уравнение

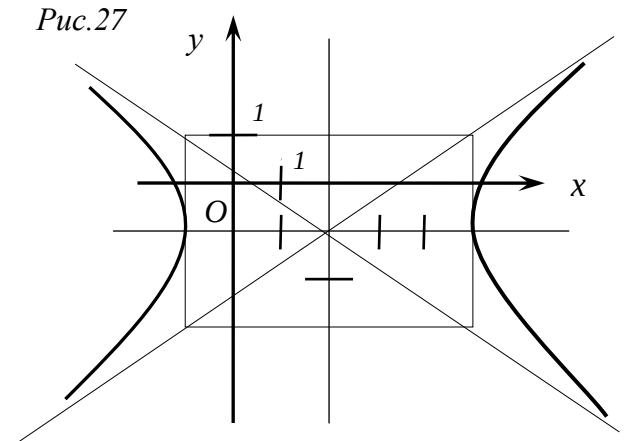
$$x^2 = 2py. \quad (4)$$

Если ветви параболы направлены в отрицательную сторону соответствующей оси, то в уравнениях (3) и (4)  $p < 0$ .

**Задача 6.** Составить каноническое уравнение параболы, если ее фокус находится в точке пересечения прямой  $4x - 3y - 4 = 0$  с осью  $Ox$ .

Решение. Найдем координаты фокуса, для этого решим систему уравнений  $\begin{cases} 4x - 3y - 4 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$  Здесь  $y=0$  - уравнение оси  $Ox$ .  $F(1, 0)$  - фокус,  $F \in Ox, \frac{p}{2} = 1$ , поэтому каноническое уравнение параболы  $y^2 = 4x$ .

Ответ:  $y^2 = 4x$ .



**Задача 7.** Составить уравнение параболы, если даны ее фокус  $F(2,-1)$  и директриса  $d: x - y - 1 = 0$ .

Решение. Пусть  $M(x,y)$  – текущая точка параболы. По определению  $FM = \rho(M,d)$ . Запишем это равенство в координатах  $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \frac{|x-y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$ . Возведем обе части равенства

в квадрат:  $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + 2y - 1 - 2xy + 2x)$  или

$$x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x + 2y + 11 = 0.$$

Ответ:  $x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x + 2y + 11 = 0$ .

## Тема 7. Фокально-директориальное свойство эллипса, гиперболы, параболы.

**Теорема.** Эллипс и гипербола – это множество всех точек плоскости таких, что отношение расстояния от каждой точки до фокуса к расстоянию от нее до соответствующей директрисы равно эксцентриситету

$$\frac{\rho(M, F_i)}{\rho(M, d_i)} = e.$$

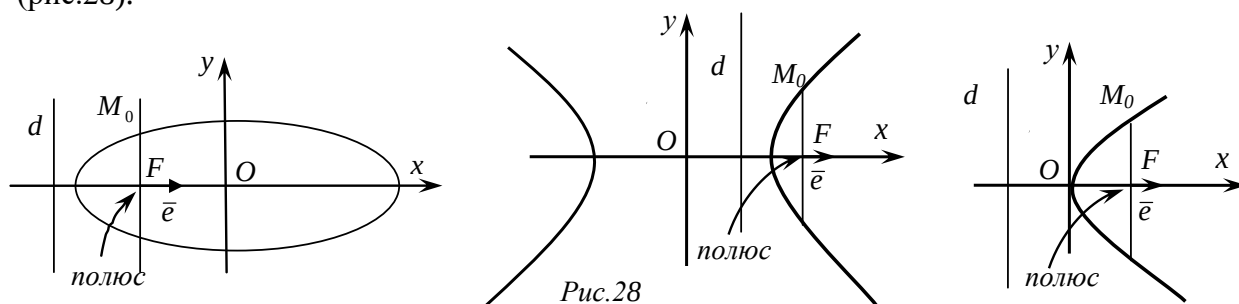
Так как для параболы  $\rho(M, F) = \rho(M, d)$  по определению, то число  $1 = \frac{\rho(M, F)}{\rho(M, d)}$  принято считать эксцентриситетом параболы, поэтому сформулированная теорема справедлива и для параболы.

Поместим полюс полярной системы координат в

- а) фокус параболы,
- б) левый фокус эллипса,
- в) правый фокус гиперболы,

а полярную ось совместим с фокальной осью для эллипса и гиперболы и с осью симметрии для параболы и направим полярную ось от соответствующей директрисы.

Через выбранный фокус  $F$  проведем прямую, перпендикулярную фокальной оси до пересечения с линией в точке  $M_0$ . Число  $\rho(M_0, F) = p$  называется фокальным параметром линии (рис.28).



Тогда в выбранной полярной системе координат уравнение эллипса, гиперболы, параболы имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi},$$

где  $\rho, \varphi$  – полярные координаты текущей точки линии второго порядка,  $p$  – фокальный параметр,  $e$  – эксцентриситет.

**Задача 1.** Дана парабола  $y^2 = 6x$ . Составить ее уравнение в согласованной полярной системе координат.

Решение. Так как в общем виде  $y^2 = 2px$ , то  $2p = 6$ ,  $p = 3$ . Кроме того, эксцентриситет

параболы  $e = 1$ , поэтому  $\rho = \frac{3}{1 - \cos \varphi}$ .

Ответ: уравнение параболы в полярной системе координат  $\rho = \frac{3}{1 - \cos \varphi}$ .

**Задача 2.** Определить вид линии, заданной в полярной системе координат уравнением

$$\rho = \frac{5}{1 - \frac{1}{2} \cos \varphi}.$$

Решение. Вид линии – эллипс, так как  $e = \frac{1}{2} < 1$ .

### Упражнения

1. Определить координаты центра и радиус окружности:  $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 54 = 0$ .
2. Составить уравнение касательных к окружности  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ , проведенных в точках ее пересечения с осью абсцисс.
3. Составить уравнение общей хорды окружностей  $x^2 + y^2 = 16$  и  $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ .
4. Найти уравнение окружности, симметричной окружности  $x^2 + y^2 = 4$  относительно прямой  $x - y - 3 = 0$ .
5. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, зная, что а) его полуоси равны 5 и 3; б) его малая ось равна 10, а расстояние между фокусами 4; в) его большая ось 20, эксцентриситет  $3/5$ . Построить эллипс.
6. Найти длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситеты следующих эллипсов:  
а)  $x^2 + 25y^2 = 25$ ; б)  $9x^2 + y^2 = 1$ ; в)  $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ . Построить эллипсы.
7. Составить каноническое уравнение гиперболы, построить ее, найти эксцентриситет, если:  
а)  $a = 3$  и гипербола проходит через точку  $A(6, 2\sqrt{3})$ ; б) действительная ось 8, а расстояние между фокусами 10.
8. Дана гипербола  $x^2 - y^2 = 8$ . Найти софокусный эллипс, проходящий через точку  $M(4, 6)$ .
9. Найти полюсы и эксцентриситет гиперболы, построить ее: а)  $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$ ;  
б)  $x^2 - 4y^2 = 16$ ; в)  $25x^2 - 16y^2 = 1$ ; г)  $2x^2 - 3y^2 + 4x + 12y - 16 = 0$ .
10. Составить уравнение гиперболы, сопряженной данной  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ . Построить ее график.  
Найти эксцентриситет.
11. Найти фокальный параметр и фокус параболы. Построить ее: а)  $y^2 = 6x$ ; б)  $x^2 = 10y$ ;  
в)  $y^2 = -4x$ ; г)  $x^2 = -2y$ .
12. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в точке  $(0, 0)$ , зная, что а) она симметрична относительно оси  $Ox$  и проходит через точку  $B(1, -3)$ ; б) она симметрична относительно оси  $Oy$  и проходит через точку  $C(1, 1)$ .
13. Записать уравнения линий второго порядка в согласованной полярной системе координат:  
а)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ; б)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ; в)  $x^2 + y^2 = 121$ ; г)  $y^2 = 6x$ .
14. Найти фокальный радиус точки  $M$  параболы  $y^2 = 20x$ , если  $M(7, y)$ .

### Контрольная работа №2

1. Дан треугольник  $ABC$ . Написать:

- 1) уравнение прямой  $AB$  (каноническое, через две точки, параметрическое, общее, в отрезках);
- 2) уравнение медианы  $AM$  и высоты  $BH$ ;
- 3) уравнение прямой, проходящей через точку  $A$  параллельно  $BC$ .

Определить угол, который образует прямая  $BC$  с осью  $Ox$ .

| <b>№ n/n</b> | <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> |
|--------------|----------|----------|----------|
| 1            | (1,1)    | (-6,0)   | (-1,2)   |
| 2            | (-1,1)   | (1,4)    | (0,2)    |
| 3            | (1,-1)   | (-5,-2)  | (0,3)    |
| 4            | (1,0)    | (-1,-5)  | (-2,1)   |
| 5            | (0,1)    | (4,3)    | (-1,4)   |
| 6            | (-1,0)   | (-2,-4)  | (0,3)    |
| 7            | (0,-1)   | (-3,-5)  | (6,-2)   |
| 8            | (2,0)    | (0,-6)   | (1,5)    |
| 9            | (1,2)    | (-4,-3)  | (2,-6)   |
| 10           | (2,3)    | (-6,-1)  | (0,-3)   |
| 11           | (-2,1)   | (2,-1)   | (4,6)    |
| 12           | (4,2)    | (6,0)    | (3,5)    |
| 13           | (1,3)    | (3,4)    | (-5,-3)  |
| 14           | (-3,2)   | (4,-1)   | (-2,-4)  |
| 15           | (-4,-3)  | (-3,0)   | (0,3)    |
| 16           | (1,4)    | (-3,-5)  | (2,1)    |
| 17           | (4,6)    | (-4,-1)  | (2,-3)   |
| 18           | (2,-3)   | (4,0)    | (0,5)    |
| 19           | (-4,0)   | (-3,-5)  | (-2,1)   |
| 20           | (4,-2)   | (-1,4)   | (1,0)    |
| 21           | (-3,-2)  | (2,1)    | (4,-5)   |
| 22           | (-6,2)   | (0,4)    | (-5,4)   |
| 23           | (-6,-2)  | (1,4)    | (5,4)    |
| 24           | (-1,3)   | (-1,6)   | (0,-5)   |
| 25           | (-4,-2)  | (-2,4)   | (-1,-2)  |
| 26           | (-2,-2)  | (0,5)    | (-4,0)   |
| 27           | (-3,-1)  | (5,0)    | (6,-4)   |
| 28           | (2,-6)   | (0,-5)   | (-3,0)   |
| 29           | (4,-5)   | (-3,-6)  | (2,-4)   |
| 30           | (-3,-1)  | (4,-2)   | (-6,3)   |

2. Дано уравнение линии второго порядка. Определить тип кривой и построить ее график.

| <b>№ n/n</b> | <b>Уравнение второго порядка</b>    |
|--------------|-------------------------------------|
| 1            | $5x^2 + 3y^2 - 10x - 12y + 2 = 0$ , |
| 2            | $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0$ ,   |
| 3            | $-x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 4 = 0$ ,   |
| 4            | $4x^2 + 2y^2 - 16x - 4y = 0$ ,      |
| 5            | $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ ,     |
| 6            | $2x^2 + 2y^2 - 8x - 8y + 14 = 0$ ,  |
| 7            | $x^2 - y^2 - 4y = 0$ ,              |
| 8            | $9x^2 + 5y^2 + 18x - 30y + 9 = 0$ , |

|    |                                      |
|----|--------------------------------------|
| 9  | $3x^2 + 3y^2 - 18x - 18y + 51 = 0,$  |
| 10 | $4x^2 + 4y^2 - 32x - 32y + 124 = 0,$ |
| 11 | $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0,$           |
| 12 | $4x^2 + 4y^2 - 12x + 4y + 3 = 0,$    |
| 13 | $x^2 + 4y^2 - 2x + 56y + 181 = 0,$   |
| 14 | $9x^2 - 4y^2 + 24y - 72 = 0,$        |
| 15 | $5x^2 + 3y^2 - 50x - 30y + 199 = 0,$ |
| 16 | $2x^2 + 3y^2 - 12x - 6y + 16 = 0,$   |
| 17 | $4x^2 + 2y^2 - 8x - 4y + 10 = 0,$    |
| 18 | $x^2 + 4y^2 - 3x + 4y + 3 = 0,$      |
| 19 | $9x^2 + 5y^2 + 18x - 30y + 9 = 0,$   |
| 20 | $3x^2 + 2y^2 - 24x - 4y + 49 = 0,$   |
| 21 | $2x^2 + y^2 - 8x - 8y + 22 = 0,$     |
| 22 | $7x^2 + 3y^2 - 14x - 6y - 2 = 0,$    |
| 23 | $5x^2 + y^2 - 10x - 2y + 2 = 0,$     |
| 24 | $4x^2 + 3y^2 - 8x - 6y - 3 = 0,$     |
| 25 | $2x^2 + 3y^2 - 8x - 12y + 8 = 0,$    |
| 26 | $8y^2 - 2x^2 - 8x + 16y - 8 = 0,$    |
| 27 | $3x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 9 = 0,$     |
| 28 | $2x^2 + 4y^2 - 8x - 8y + 2 = 0,$     |
| 29 | $3x^2 + y^2 - 18x - 2y + 16 = 0,$    |
| 30 | $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y - 3 = 0.$     |

## Тема 8. Векторное и смешанное произведение векторов

Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат.

*Векторным произведением* двух неколлинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется такой вектор  $\vec{c}$ , который удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ , где  $\varphi$  - угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;
- 2)  $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$ ;
- 3) векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  после приведения к общему началу ориентированы по отношению друг к другу соответственно как орты  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

Обозначается  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$  или  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ .

Векторное произведение коллинеарных векторов считается равным нулю.

*Геометрические свойства векторного произведения*

1.  $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$  тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны.

2. Модуль векторного произведения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 29), или двум площадям треугольника, построенного на них:

$$S_{ABCD} = |\vec{a}, \vec{b}| = |\vec{c}|, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{a}, \vec{b}|.$$

*Алгебраические свойства векторного произведения*

1.  $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$  - антикоммутативность.
2.  $[a\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, a\vec{b}] = a[\vec{a}, \vec{b}]$  - ассоциативность.
3.  $[\vec{a} + \vec{a}', \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}', \vec{b}]$  - дистрибутивность.
4. Если в прямоугольной декартовой системе координат  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ , то координаты вектора  $\vec{c}$ , являющегося векторным произведением

$$\text{векторов } \vec{a} \text{ и } \vec{b}, \text{ находятся по формуле } \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \text{ или } \vec{c} = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

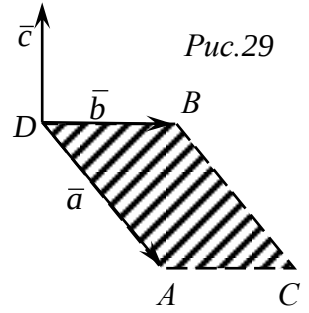


Рис.29

**Задача 1.** Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} + 3\vec{b}$  и  $3\vec{a} + \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$ .

Решение. По свойству векторного произведения  $S = |[(\vec{a} + 3\vec{b}), (3\vec{a} + \vec{b})]|$ . Упростим выражение  $[(\vec{a} + 3\vec{b}), (3\vec{a} + \vec{b})] = [\vec{a}, 3\vec{a} + \vec{b}] + 3[\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{b}] + 9[\vec{b}, \vec{a}] + 3[\vec{b}, \vec{b}] = -8[\vec{a}, \vec{b}]$ , (так как  $\vec{a}$  параллелен  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  параллелен  $\vec{b}$ , то  $[\vec{a}, \vec{a}] = [\vec{b}, \vec{b}] = 0$ ).

$$\text{Таки образом, } S = |-8 \cdot [\vec{a}, \vec{b}]| = 8 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\angle(\vec{a}, \vec{b})\right) = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 4 \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ:  $S=4$  кв.ед.

**Задача 2.** Вычислить площадь треугольника  $ABC$ , если  $\vec{AB}(1, 2, 3), \vec{BC}(2, 0, 2)$ .

Решение. По свойству векторного произведения  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{BC}]|$ .

$$[\vec{AB}, \vec{BC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k},$$

$$|[\vec{AB}, \vec{BC}]| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{3}, \quad S = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ:  $S = 2\sqrt{3}$  кв.ед.

*Смешанным произведением* трех векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , расположенных в ориентированном трехмерном пространстве, называется число, равное скалярному произведению вектора  $\vec{a}$  на векторное произведение  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ :  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}]$ .

*Свойства смешанного произведения*

1.  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$  тогда и только тогда, когда  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  компланарны.
2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} > 0$ , если  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  ориентированы одинаково, и  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} < 0$  в противном случае.
3. При перестановке любых двух сомножителей меняется знак смешанного произведения, а его модуль остается прежним.
4. Если один из векторов-сомножителей умножить на число, то на это число надо умножить и результат произведения.

5.  $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2)\bar{b}\bar{c} = \bar{a}_1\bar{b}\bar{c} + \bar{a}_2\bar{b}\bar{c}$ ,  $\bar{a}(\bar{b}_1 + \bar{b}_2)\bar{c} = \bar{a}\bar{b}_1\bar{c} + \bar{a}\bar{b}_2\bar{c}$ ,  $\bar{a}\bar{b}(\bar{c}_1 + \bar{c}_2) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}_1 + \bar{a}\bar{b}\bar{c}_2$  - дистрибутивность относительно любого сомножителя.
6. Модуль смешанного произведения векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  равен объему параллелепипеда (рис.30 слева), построенного на этих векторах.

7. Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  (рис.30 справа) равен  $\frac{1}{6}$  модуля их смешанного произведения.

8. Смешанное произведение векторов  $\bar{a}(a_1, a_2, a_3), \bar{b}(b_1, b_2, b_3), \bar{c}(c_1, c_2, c_3)$  в прямоугольной декартовой системе координат вычисляется по формуле

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

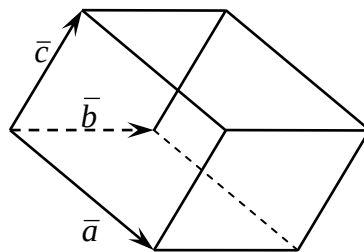
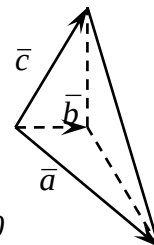


Рис.30



**Задача 3.** Вычислить  $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a})$ .

Решение. Так как  $(\bar{a} - \bar{b}) + (\bar{b} - \bar{c}) + (\bar{c} - \bar{a}) = \bar{0}$ , то векторы  $\bar{a} - \bar{b}, \bar{b} - \bar{c}, \bar{c} - \bar{a}$  компланарны, поэтому  $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a}) = 0$ .

Ответ:  $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a}) = 0$ .

**Задача 4.** В треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  векторы  $\overline{AB}(0,1,-1), \overline{AC}(2,-1,4)$  определяют основание,  $\overline{AA_1} = (-3,2,2)$ . Найти высоту призмы.

Решение.  $V = \frac{1}{2} S_{\text{осн}} \cdot h, S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} |\overline{AB}, \overline{AC}|$ , так как объем призмы в два раза меньше объема параллелепипеда, построенного на тех же векторах, то  $V = \frac{1}{2} |\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AA_1}|$ . Тогда

$$h = \frac{2 \cdot |\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AA_1}|}{|\overline{AB}, \overline{AC}|}, \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AA_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -16 - 1 = -17,$$

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \left( \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (3, -2, -2), \quad h = \frac{2 \cdot |-17|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{34}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17} \text{ (ед.)}.$$

Ответ:  $h = 2\sqrt{17}$  ед.

### Упражнения

- Преобразовать векторное произведение  $[(\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}), (\bar{a} - 2\bar{b})]; [(\bar{a} - 3\bar{b}), (2\bar{a} + 3\bar{b})]$ .
- Вычислить площадь треугольника  $ABC$ , если  $A(4,2,3), B(5,7,0), C(2,8,-1)$ .
- Найти векторное и скалярное произведения векторов  $\bar{a} = 6\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}, \bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 6\bar{k}$ .
- Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам  $\bar{a}(1,1,2), \bar{b}(2,1,1)$ .
- Показать, что векторы  $\bar{a}(7,-3,2), \bar{b}(3,-7,8), \bar{c}(1,-1,1)$  компланарны.
- Найти смешанное произведение векторов  $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}, \bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}, \bar{c} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ .
- Найти расстояние от точки  $C(3,2,-2)$  до прямой, проходящей через точки  $A(1,2,-3)$  и  $B(5,2,0)$ .
- Дана пирамида  $SABC: A(1,-1,2), B(5,-6,2), C(1,3,-1), S(-1,-2,-3)$ . а) Найти высоту  $BK$  основания  $ABC$ . б) Найти объем пирамиды и ее высоту  $SH$ .

9. Вычислить  $(\bar{a} + \bar{b})(\bar{b} + \bar{c})(\bar{c} + \bar{a})$ , если  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 3$ .
10. Вычислить  $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c})(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$ , если  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$ .
11. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами  $A(0,0,1), B(2,5,3), C(6,2,3), D(3,7,2)$ . Найти высоты пирамиды, опущенную на грань  $BCD$ .

## Тема 9. Плоскость

**1. Общее уравнение плоскости.** Плоскость в аффинной системе координат задается уравнением первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (1)$$

Здесь  $A, B, C, D$  - коэффициенты, причем  $A, B, C$  не равны нулю одновременно. Уравнение (1) называется *общим уравнением плоскости*.

Любое уравнение первой степени (1) в аффинной системе координат задает некоторую плоскость.

Если плоскость  $\Pi$  задана общим уравнением (1), то

- 1) вектор  $\vec{n}(A, B, C)$  перпендикулярен плоскости  $\Pi$ ;
- 2) расстояние от точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  до плоскости  $\Pi$  в прямоугольной декартовой системе координат вычисляется по формуле

$$\rho(M_0, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

- 3) для координат точек, лежащих по одну сторону относительно плоскости  $\Pi$ , выполняется неравенство  $Ax + By + Cz + D > 0$ , а для координат точек, лежащих по другую сторону, - неравенство  $Ax + By + Cz + D < 0$ ;
- 4) необходимым и достаточным условием параллельности вектора  $\vec{p}(a, \beta, \gamma)$  и плоскости  $\Pi$  является выполнение равенства  $Aa + B\beta + C\gamma = 0$ .

**Задача 1.** Даны параллельные плоскости  $\alpha: x - y + z + 1 = 0$  и  $\beta: 2x - 2y + 2z - 5 = 0$ . Описать алгебраически область между ними.

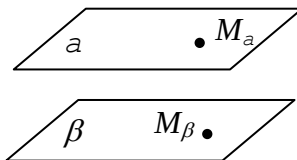


Рис. 31

Решение. Область между плоскостями есть пересечение двух полупространств, образованных этими плоскостями. Относительно плоскости  $\alpha$  выберем то полупространство, которое содержит плоскость  $\beta$ , а значит и любую ее точку. Возьмем некоторую точку  $M_\beta(0, 0, 2.5) \in \beta$  (рис. 31) (координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости  $\beta$ ) и для вычисления знака неравенства подставим ее координаты в уравнение плоскости  $\alpha$ :  $0 - 0 + 2.5 + 1 > 0$ ,

поэтому  $x - y + z + 1 > 0$  - первое неравенство системы.

Возьмем некоторую точку  $M_\alpha(0, 0, -1) \in \alpha$  (рис. 31) и определим знак второго неравенства  $2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) - 5 < 0$ , поэтому  $2x - 2y + 2z - 5 < 0$  - второе неравенство системы.

Таким образом, область между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  характеризуется системой неравенств

$$\begin{cases} x - y + z + 1 > 0, \\ 2x - 2y + 2z - 5 < 0. \end{cases}$$

Ответ: 
$$\begin{cases} x - y + z + 1 > 0, \\ 2x - 2y + 2z - 5 < 0. \end{cases}$$

**2. Каноническое уравнение плоскости.** Если плоскость  $\Pi$  задана точкой  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и двумя ненулевыми неколлинеарными векторами  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ , параллельными ей, то

ее каноническое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**3. Параметрическое уравнение плоскости**, заданной точкой  $M_0$  и векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имеет

вид: 
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t_1 + b_1 t_2, \\ y = y_0 + a_2 t_1 + b_2 t_2, \\ z = z_0 + a_3 t_1 + b_3 t_2, \end{cases} \quad t_1, t_2 \in R. \text{ Здесь } t_1, t_2 - \text{параметры.}$$

**Задача 2.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(2, -1, 4)$ ,  $B(3, 2, -1)$  перпендикулярно плоскости  $\alpha: x + y + 2z - 3 = 0$ .

Решение. Так как точки  $A, B$  принадлежат плоскости, то вектор  $\overline{AB}(1, 3, -5)$  параллелен ей. Вектор  $\vec{n}(1, 1, 2) \perp \alpha$ , поэтому  $\vec{n}$  параллелен искомой плоскости. Запишем каноническое уравнение плоскости, проходящей через точку  $A$  параллельно векторам  $\overline{AB}$  и  $\vec{n}$ :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad (x-2) \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-4) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 11x - 7y - 2z - 21 = 0 - \text{общее уравнение плоскости.}$$

Ответ:  $11x - 7y - 2z - 21 = 0$ .

**4. Уравнение плоскости, проходящей через три точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3, z_3)$**

имеет вид 
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

**5.** Если плоскость  $\Pi$  отсекает отрезки  $a, b, c$  на осях  $Ox, Oy, Oz$  соответственно, то ее **уравнение в отрезках** имеет вид  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ .

**Задача 3.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(5, 4, 3)$  и отсекающей равные отрезки на осях координат.

Решение. Так как плоскость отсекает равные отрезки от осей координат, то ее уравнение имеет вид  $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$ . Так как она проходит через точку  $A$ , то координаты точки  $A$  удовлетворяют уравнению плоскости, т.е.  $\frac{5}{a} + \frac{4}{a} + \frac{3}{a} = 1, a = 12$ . Тогда  $x + y + z = 12$  - общее уравнение плоскости.

Ответ:  $x + y + z - 12 = 0$ .

**6. Взаимное расположение плоскостей.**

Пусть заданы две плоскости  $\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ .

- 1) плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны тогда и только тогда, когда  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ ;
- 2) плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  совпадают тогда и только тогда, когда  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ ;
- 3) плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда  $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ ;
- 4) плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются тогда и только тогда, когда коэффициенты при переменных в уравнениях плоскостей не пропорциональны. Угол  $\varphi$  между плоскостями вычисляется в этом случае по формуле  $\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$ .

**Задача 4.** Найти уравнение плоскости, проходящей через точки  $P(0,2,0)$  и  $Q(2,0,0)$  и образующей угол  $60^\circ$  с плоскостью  $x = 0$ .

Решение. Пусть  $Ax + By + Cz + D = 0$  уравнение искомой плоскости. Так как точки  $P$  и  $Q$  принадлежат ей, то их координаты удовлетворяют этому уравнению:  $2B + D = 0, 2A + D = 0$ . Так как плоскость образует угол в  $60^\circ$  с плоскостью  $x = 0$ , то

$$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \text{ Имеем систему уравнений}$$

$$\begin{cases} B = -\frac{1}{2}D, \\ A = -\frac{1}{2}D, \\ 2A = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} B = A = -\frac{1}{2}D, \\ -D = \sqrt{\frac{1}{4}D^2 + \frac{1}{4}D^2 + C^2}, \end{cases} \quad D^2 = \frac{1}{2}D^2 + C^2,$$

$$\frac{1}{2}D^2 = C^2.$$

Пусть  $C = 1$ , тогда  $D = -\sqrt{2}, A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (так как  $D < 0$  из последнего уравнения системы).

Таким образом, уравнение искомой плоскости имеет вид:  $\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + z - \sqrt{2} = 0$  или  $x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$ .

Ответ:  $x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$ .

### Упражнения

- Составить уравнения плоскости, если она
  - задана точкой  $A(1,2,3)$  и параллельными ей векторами  $\vec{a}(0,1,-1), \vec{b}(1,2,-4)$ ;
  - проходит через ось  $Ox$  параллельно вектору  $\vec{p}(1,2,3)$ ;
  - проходит через ось  $Oy$  и точку  $A(1,1,1)$ ;
  - проходит через точку  $A(1,1,1)$  параллельно плоскости  $Oxy$ ;
  - проходит через начало координат перпендикулярно вектору  $\vec{q}(0,-3,4)$ ;
  - проходит через точку  $B(1,1,-2)$  перпендикулярно плоскостям  $\alpha: 2x + 3z = 0$ ,  $\beta: x - y + z - 1 = 0$ ;
  - проходит через точки  $C(1,-1,3), D(1,2,4)$  перпендикулярно плоскости  $\gamma: 2x - 3y + z + 1 = 0$ .
- Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n}(A, B, C)$ .
- Найти уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  параллельно плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ .
- Дана пирамида  $SABC: A(1,-1,2), B(5,-6,2), C(1,3,-1), S(-1,-2,-3)$ . Написать уравнение плоскости  $ABC$ ; плоскости, проходящей через вершину  $C$  параллельно плоскости  $ABS$ ; вычислить угол между этими плоскостями.
- Составить уравнение касательной плоскости к сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 45$  в точке  $M(2,-3,6)$ .
- Записать неравенство, характеризующее то полупространство с границей  $\Pi: x - y + z - 4 = 0$ , в котором находится точка  $A(1,1,1)$ .
- Установить расположение плоскости  $\Pi: 2x - 2y - z + 9 = 0$  относительно сферы:  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$ .
- Вычислить расстояние между параллельными плоскостями  $\alpha: x - 3y + 2z + 1 = 0$  и

$$\beta: 2x - 6y + 4z + 3 = 0.$$

9. Найти уравнение плоскости, касающейся сферы  $x^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 9$  и параллельной плоскости  $\alpha: 6x + 3y + 2z = 0$ .
10. Какой угол образует с плоскостью  $x + y + 2z - 4 = 0$  вектор  $\vec{a}(1, 2, 1)$ ?

## Тема 10. Прямая в пространстве

**1. Параметрическое уравнение прямой**, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  с направляющим вектором  $\vec{a}(\alpha, \beta, \gamma)$  имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t, \end{cases} t \in \mathbb{R}, \text{ здесь } t - \text{параметр.}$$

**2.** Если  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$ , то каноническое уравнение прямой, заданной точкой  $M_0$  и вектором  $\vec{a}$  имеет вид  $\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$ .

Если одна из координат вектора  $\vec{a}$  равна нулю, например,  $\gamma = 0$ , то каноническое уравнение прямой примет вид

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}, \\ z - z_0 = 0. \end{cases}$$

Если две координаты вектора  $\vec{a}$  равны нулю ( $\beta = \gamma = 0$ ), то каноническое уравнение прямой

примет вид  $\begin{cases} y - y_0 = 0, \\ z - z_0 = 0. \end{cases}$

**3.** Уравнение прямой, проходящей через две точки  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$  имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

**4.** Прямая может быть задана как линия пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

В этом случае координаты ее направляющего вектора  $\vec{p}$  вычисляются по формуле

$$\vec{p} = \left( \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

**Задача 1.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $K(1, -3, 4)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 3y - z - 1 = 0. \end{cases}$

**Решение.** Так как прямые параллельны, то направляющий вектор  $\vec{p} = \left( \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-2, 3, 7)$  прямой  $l$  является направляющим вектором искомой прямой, каноническое уравнение которой имеет вид:  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{7}$ .

Ответ:  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{7}$ .

**Задача 2.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(1, 1, 1)$  перпендикулярно плоскости  $\alpha: 2x + 3y + z - 1 = 0$ .

Решение. Так как прямая и плоскость перпендикулярны, то вектор нормали  $\vec{n}(2,3,1)$  к плоскости  $a$  является направляющим для искомой прямой, каноническое уравнение которой имеет вид:  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z-1$ .

Ответ:  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z-1$ .

**Задача 3.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $B(1,5,-1)$  перпендикулярно прямым  $l_1: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}$  и  $l_2: \begin{cases} x = 2-3t, \\ y = -1+t, \\ z = -2t. \end{cases}$

Решение. Искомую прямую  $m$  рассмотрим как прямую, проходящую через точку  $B$  перпендикулярно плоскости  $a$  такой, что прямая  $l_1$  параллельна  $a$ , прямая  $l_2$  параллельна  $a$ ,  $B \in a$ . Векторы  $\vec{a}(-1,3,-1)$  и  $\vec{b}(-3,1,-2)$  являются направляющими для прямых  $l_1$  и  $l_2$  соответственно, поэтому они параллельны плоскости  $a$ . Каноническое уравнение плоскости  $a$  имеет

$$\text{вид } \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad (x-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (y-5) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-5x + y + 8z + 18 = 0.$$

Вектор нормали  $\vec{n}(-5,1,8)$  к плоскости  $a$  является направляющим для искомой прямой  $m$ , поэтому ее каноническое уравнение имеет вид  $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{8}$ .

Ответ:  $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{8}$ .

**5.** Угол  $\varphi$  между прямой  $l$  с направляющим вектором  $\vec{a}(a,b,\gamma)$  и плоскостью  $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$  вычисляется по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|Aa + Bb + C\gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a^2 + b^2 + \gamma^2}}.$$

Расстояние от точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  до прямой  $l$ , заданной направляющим вектором  $\vec{a}(a,b,\gamma)$  и точкой  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , вычисляется по формуле

$$\rho(M_1, l) = \frac{|[\vec{M_0M_1}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|}.$$

Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$ , заданные точкой и направляющим вектором, скрещиваются  
 $l_1: M_1(x_1, y_1, z_1), \vec{a}_1(a_1, \beta_1, \gamma_1); \quad l_2: M_2(x_2, y_2, z_2), \vec{a}_2(a_2, \beta_2, \gamma_2).$   
 Тогда длина их общего перпендикуляра вычисляется по формуле

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\vec{M_1M_2} \cdot \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|}.$$

**Задача 4.** Найти угол между прямой  $l: \frac{x}{2} = \frac{y+12}{3} = \frac{z-4}{6}$  и плоскостью  $a: 6x + 15y - 10z = 0$ .

Решение. Направляющим вектором прямой  $l$  является вектор  $\vec{a}(2,3,6)$ , поэтому

$$\sin \varphi = \frac{|6 \cdot 2 + 15 \cdot 3 - 10 \cdot 6|}{\sqrt{6^2 + 15^2 + (-10)^2} \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{3}{133}; \quad \varphi = \arcsin \frac{3}{133}.$$

Ответ:  $\varphi = \arcsin \frac{3}{133}$ .

**Задача 5.** Найти точку, симметричную началу координат относительно плоскости

$$a: x-2y+4z-21=0.$$

Решение. Пусть  $O'$  - искомая точка, тогда по определению центральной симметрии  $OO' \perp a$ ,  $OO' \cap a = A$ ,  $OA = AO'$  (рис. 32). Напишем уравнение прямой  $OO'$  в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = 0 + 1t, \\ y = 0 - 2t, \\ z = 0 + 4t, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = t, \\ y = -2t, \\ z = 4t. \end{cases}$$

Найдем координаты точки  $A$ , для этого решим систему из уравнений, задающих прямую  $OO'$  и плоскость  $a$ :

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -2t, \\ z = 4t, \\ x - 2y + 4z - 21 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1, \\ x = 1, \\ y = -2, \\ z = 4. \end{cases} \quad A(1, -2, 4).$$

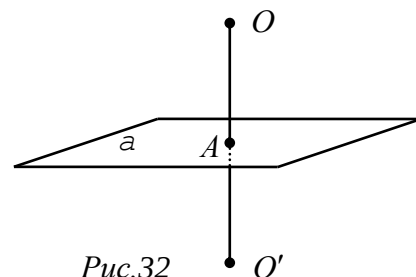


Рис.32

Пусть  $O'(x, y, z)$ . По определению симметрии  $\overline{OA} = \overline{AO'}$ , где  $\overline{OA} = (1, -2, 4)$ ,  $\overline{AO'} = (x-1, y+2, z-4)$ . Запишем последнее равенство в координатах

$$\begin{cases} x-1 = 1, \\ y+2 = -2, \\ z-4 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -4, \\ z = 8. \end{cases} \quad O'(2, -4, 8).$$

Ответ:  $O'(2, -4, 8)$ .

**Задача 6.** Из начала координат опустить перпендикуляр на прямую  $l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}$ .

Решение. Искомый перпендикуляр  $m$  лежит в плоскости  $a$ , проходящей через  $O(0,0,0)$  перпендикулярно прямой  $l$  с направляющим вектором  $\vec{a}(2,3,1)$ . Тогда  $\vec{a} \perp a$ , поэтому общее уравнение плоскости  $a$  имеет вид  $2x+3y+z+D=0$ , так как  $O \in a$ , то ее координаты удовлетворяют полученному уравнению:  $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 + D = 0$ , т.е.  $D=0$ ,  $a: 2x+3y+z=0$ .

Найдем точку пресечения прямой  $l$  и плоскости  $a$ , для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}, \\ 2x+3y+z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2z-4, \\ y = 3z-8, \\ 2x+3y+z=0. \end{cases} \quad A = l \cap a, \quad A\left(\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{16}{7}\right).$$

Запишем уравнение прямой  $m$ , проходящей через точки  $O$  и  $A$ :  $\frac{x-0}{\frac{4}{7}-0} = \frac{y-0}{-\frac{8}{7}-0} = \frac{z-0}{\frac{16}{7}-0}$  или

$$4x = -2y = z.$$

Ответ:  $4x = -2y = z$ .

### Упражнения

1. Составить уравнение прямой, проходящей

1) через точки  $M_1\left(2, -3, \frac{1}{2}\right), M_2\left(3, 5, \frac{3}{2}\right)$ ;

2) через точку  $M(2, 1, -3)$  параллельно вектору  $\vec{p}(1, -3, 1)$ ;

3) через точку  $M(1, -3, 4)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 3y - z - 1 = 0. \end{cases}$

2. Установить взаимное расположение прямых  $l_1: \begin{cases} 2x+3y=0, \\ z-4=0. \end{cases}$  и  $l_2: \begin{cases} x+z-8=0, \\ 2y+3z-7=0. \end{cases}$
3. Показать, что прямая  $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{1}$  параллельна плоскости  $\alpha: x-2y+5z-6=0$ , а прямая  $l_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}$  лежит в этой плоскости.
4. Найти точку, симметричную началу координат относительно прямой  $l: \frac{x-10}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4}$ .
5. Через линию пересечения плоскостей  $\alpha: x+y-z+5=0$  и  $\beta: x-y+z+1=0$  провести плоскость, перпендикулярную плоскости  $\gamma: 2x-z+6=0$ .
6. Через линию пересечения плоскостей  $\alpha: 4x-y+3z-1=0$  и  $\beta: x+5y-z+2=0$  провести плоскость 1) проходящую через начало координат; 2) параллельную оси  $Oy$ .
7. Написать параметрическое уравнение прямой, образованной пересечением плоскости  $\alpha: x-3y-z+1=0$  с плоскостью  $Oxy$ .
8. На оси  $Ox$  найти точку, равноудаленную от точки  $A(1,0,1)$  и плоскости  $\alpha: x-y+5=0$ .
9. Доказать, что прямые  $l_1: \begin{cases} x=1+2t, \\ y=-t, \\ z=1+t. \end{cases}$  и  $l_2: \begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0. \end{cases}$  параллельны, и написать уравнение плоскости, проходящей через них.
10. Вычислить углы, которые образует с осями координат прямая  $\begin{cases} x-2y-5=0, \\ x-2z+8=0. \end{cases}$
11. Через точку пересечения прямых  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+4}{2}$  и  $\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-1}{3}$  провести плоскость, параллельную плоскости  $xOy$ .
12. Треугольник  $ABC$  образован пересечением плоскости  $x+2y+4z-8=0$  с осями координат. Построить треугольник. Найти уравнения средних линий.

### Контрольная работа №3

Дана треугольная пирамида  $SABC$ . Написать уравнения:

- 1) плоскости  $ABC$ ;
- 2) прямой  $SC$ ;
- 3) плоскости, проходящей через точку  $S$ , параллельно плоскости  $ABC$ ;
- 4) плоскости, проходящей через точку  $A$ , перпендикулярно плоскости  $ABC$ .

Найти высоту пирамиды, опущенную из вершины  $S$  и объем пирамиды.

| № n/n | A        | B        | C        | S        |
|-------|----------|----------|----------|----------|
| 1     | (4,0,2)  | (0,5,1)  | (4,-1,3) | (3,-1,5) |
| 2     | (0,5,1)  | (4,-1,3) | (4,0,2)  | (3,-1,5) |
| 3     | (4,-1,3) | (4,0,2)  | (0,5,1)  | (3,-1,5) |
| 4     | (4,0,2)  | (0,5,1)  | (3,-1,5) | (4,-1,3) |
| 5     | (0,5,1)  | (4,0,2)  | (3,-1,5) | (4,-1,3) |
| 6     | (0,5,1)  | (3,-1,5) | (4,-1,3) | (4,0,2)  |
| 7     | (4,0,2)  | (3,-1,5) | (4,-1,3) | (0,5,1)  |
| 8     | (1,1,1)  | (1,2,0)  | (1,0,5)  | (-2,3,3) |
| 9     | (-2,3,3) | (1,2,0)  | (1,0,5)  | (1,1,1)  |
| 10    | (-2,3,3) | (1,0,5)  | (1,2,0)  | (1,1,1)  |
| 11    | (1,2,0)  | (1,0,5)  | (-2,3,3) | (1,1,1)  |

|    |          |          |          |          |
|----|----------|----------|----------|----------|
| 12 | (-2,3,3) | (1,1,1)  | (1,0,5)  | (1,2,0)  |
| 13 | (-2,3,3) | (1,0,5)  | (1,1,1)  | (1,2,0)  |
| 14 | (1,0,5)  | (1,1,1)  | (-2,3,3) | (1,2,0)  |
| 15 | (1,2,0)  | (1,1,1)  | (-2,3,3) | (1,0,5)  |
| 16 | (1,2,0)  | (-2,3,3) | (1,1,1)  | (1,0,5)  |
| 17 | (1,1,1)  | (-2,3,3) | (1,2,0)  | (1,0,5)  |
| 18 | (0,1,2)  | (2,1,2)  | (3,5,2)  | (3,5,4)  |
| 19 | (0,1,2)  | (3,5,2)  | (2,1,2)  | (3,5,4)  |
| 20 | (3,5,2)  | (2,1,2)  | (0,1,2)  | (3,5,4)  |
| 21 | (3,5,4)  | (3,5,2)  | (2,1,2)  | (0,1,2)  |
| 22 | (3,5,4)  | (2,1,2)  | (3,5,2)  | (0,1,2)  |
| 23 | (2,1,2)  | (3,5,2)  | (3,5,4)  | (0,1,2)  |
| 24 | (2,1,2)  | (0,1,2)  | (3,5,4)  | (3,5,2)  |
| 25 | (0,1,2)  | (3,5,4)  | (2,1,2)  | (3,5,6)  |
| 26 | (3,5,4)  | (2,1,2)  | (0,1,2)  | (3,5,2)  |
| 27 | (2,1,-1) | (3,0,2)  | (5,1,1)  | (0,-1,3) |
| 28 | (5,1,1)  | (2,1,-1) | (3,0,2)  | (0,-1,3) |
| 29 | (3,0,2)  | (5,1,1)  | (2,1,-1) | (0,-1,3) |
| 30 | (0,-1,3) | (2,1,1)  | (3,0,2)  | (5,1,1)  |

## Тема 11. Поверхности второго порядка.

Алгебраическое уравнение второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0 \quad (1)$$

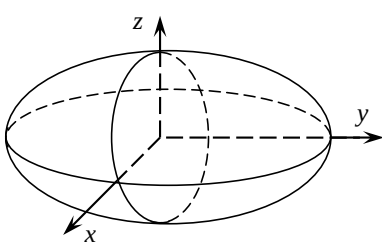
задает в пространстве поверхность второго порядка. В том случае, когда оно не определяет действительный геометрический образ, то для сохранения общности говорят, что оно задает мнимую поверхность второго порядка. Существует прямоугольная декартова система координат, в которой уравнение (1) в зависимости от коэффициентов приводится к одному из следующих канонических видов, каждому из которых соответствует определенный класс поверхностей второго порядка.

*Классификация поверхностей второго порядка*

### I. Нераспадающиеся поверхности.

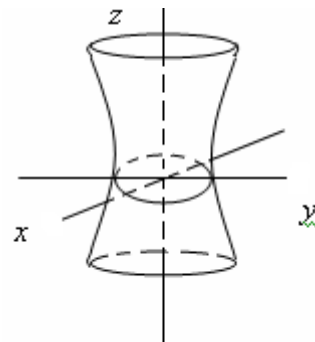
**Невырождающиеся:**

*эллиптические*

| каноническое уравнение                                     | название поверхности | вид поверхности                                                                      |
|------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  | ЭЛЛИпсоид            |  |
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ | МНИМЫЙ ЭЛЛИпсоид     | _____                                                                                |
| <i>Гиперболические</i>                                     |                      |                                                                                      |

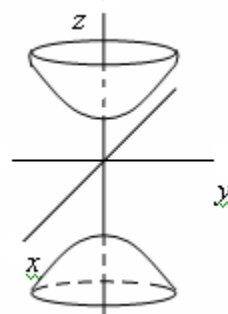
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

однополостный  
гиперboloид



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

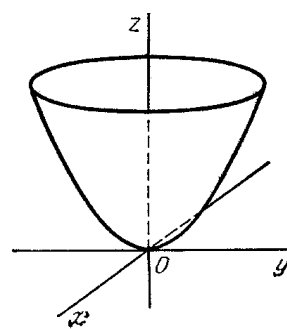
двуполостный  
гиперboloид



*Параболические*

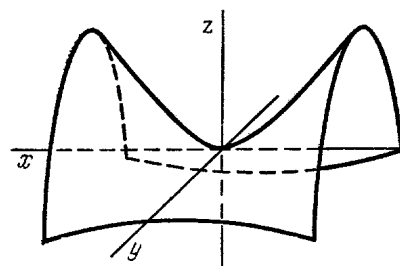
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

эллиптический  
параболоид



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

гиперболический  
параболоид

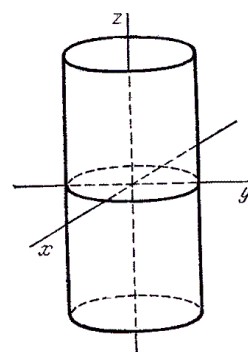


**Вырождающиеся:**

*Цилиндрические*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

эллиптический  
цилиндр



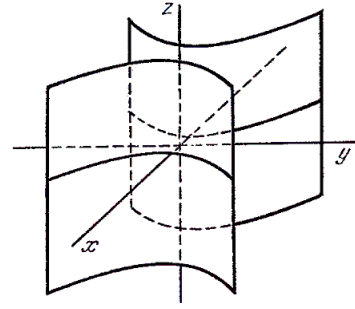
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

мнимый  
эллиптический ци-  
линдр



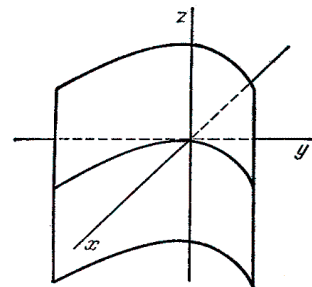
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

гиперболический  
цилиндр



$$y^2 = 2px$$

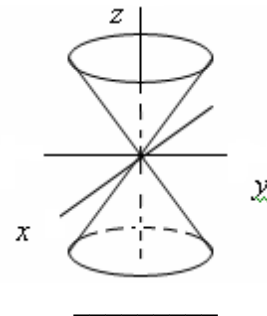
параболический  
цилиндр



*Конические*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

конус



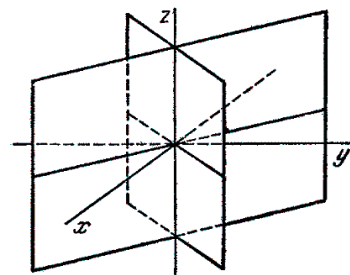
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

мнимый конус

## II. Распадающиеся вырождающиеся поверхности:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

пара пересекающихся  
плоскостей

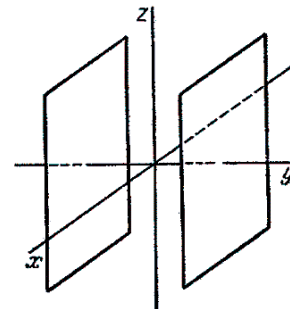


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

пара мнимых пересе-  
кающихся плоскостей

$$x^2 = a^2$$

пара параллельных  
плоскостей

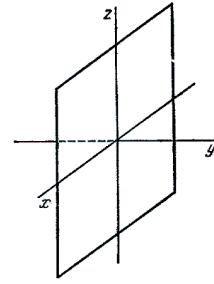


$$x^2 = -a^2$$

пара мнимых парал-  
лельных плоскостей

$$x^2 = 0$$

пара совпадающих  
плоскостей



Имеется 17 классов поверхностей второго порядка.

Поверхность второго порядка, имеющая единственный центр симметрии (центр поверхности второго порядка) называется *центральной поверхностью*. Поверхность без центра симметрии или с неопределенным центром - *нецентральной поверхностью*.

**Задача 1.** Написать уравнение сферической поверхности, проходящей через точку

$M(1,5,1)$  и окружность  $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 23 = 0$ , расположенную на плоскости  $xOy$ .

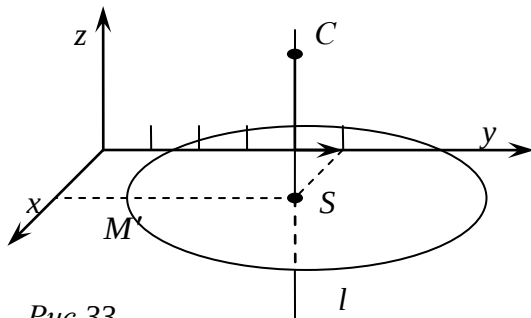


Рис.33

Решение. Пусть  $C(x_c, y_c, z_c)$  - центр сферической поверхности, тогда  $CM = CM' = r$ , где  $M'$  - произвольная точка, лежащая на заданной окружности, а  $r$  - радиус сферы. Найдем какую-нибудь точку, принадлежащую окружности: если  $x = 1$ , то  $y^2 - 10y + 22 = 0$  и  $y = 5 \pm \sqrt{3}$ , например,  $M'(1, 5 + \sqrt{3}, 0)$ . Очевидно, центр сферы лежит на

прямой, перпендикулярной плоскости окружности и проходящей через центр последней (рис. 33). Выделим в уравнении окружности полные квадраты:  $(x-1)^2 + (y-5)^2 - 3 = 0$ , тогда  $S(1,5,0)$  - центр окружности. Так как  $\vec{k}(0,0,1)$  является направляющим вектором прямой  $l$ , то ее уравнение имеет вид  $\begin{cases} x-1=0, \\ z-5=0, \end{cases}$  поэтому точка  $C$  имеет координаты  $(1,5,z_c)$ . Запишем ра-

венство  $CM = CM'$  в координатах

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-1)^2 + (5-5)^2 + (1-z_c)^2} &= \sqrt{(1-1)^2 + (5-5-\sqrt{3})^2 + z_c(0-z_c)^2}, \\ \sqrt{(1-z_c)^2} &= \sqrt{3+z_c^2}, \\ 1-2z_c-z_c^2 &= 3+z_c^2, \\ z_c &= -1. \end{aligned}$$

Таким образом,  $C(1,5,-1)$ ,  $r = \sqrt{(1-1)^2 + (5-5)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{2}$ , поэтому  $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 2$  - уравнение сферы.

Ответ:  $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 2$ .

**Задача 2.** Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой  $l: x = y = z$ , а направляющей служит окружность  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

Решение. *Цилиндрической* называется поверхность, которая вместе с каждой своей точкой содержит всю прямую, проходящую через эту точку, параллельно некоторой заданной прямой.

Пусть  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  некоторая точка, лежащая на окружности, тогда

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1, \\ x_0 + y_0 + z_0 = 1. \end{cases} \quad (2)$$

По определению каждая точка  $M(x, y, z)$ , лежащая на прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  параллельно прямой  $l$ , принадлежит цилиндрической поверхности. Запишем уравнение этой прямой в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x_0 + t, \\ y = y_0 + t, \\ z = z_0 + t, t \in R \end{cases}$$

Выразим  $x_0, y_0, z_0$  и подставим в систему (2):

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2 = 9, \\ x + y + z - 3t = 1. \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения системы  $t$  и подставляя в первое, получим уравнение цилиндрической поверхности

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{3}(x + y + z - 1), \\ x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2 - 2t(x + y + z) &= 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{3}(x + y + z - 1)^2 - \frac{2}{3}(x + y + z - 1)(x + y + z) &= 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz &= 4. \end{aligned}$$

Ответ: уравнение цилиндрической поверхности имеет вид  $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = 4$ .

**Задача 3.** Составить уравнение конической поверхности с вершиной в точке  $A(0,0,1)$ , если кривая  $\gamma: \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9, \\ z = 5 \end{cases}$  целиком принадлежит поверхности.

Решение. *Конической* называется поверхность, которая вместе с каждой своей точкой содержит прямую, проходящую через эту точку и некоторую заданную точку, называемую *вершиной конуса*. Прямые, целиком принадлежащие конической поверхности, называются ее *образующими*.

Пусть  $M(x', y', 5)$  – текущая точка кривой  $\gamma$  (эта кривая называется *направляющей* конуса). Тогда прямая  $AM$  принадлежит конусу, при этом

$$AM : \begin{cases} x = 0 + t(x' - 0), \\ y = 0 + t(y' - 0), \\ z = 1 + t(5 - 1), \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{t}x, \\ y' = \frac{1}{t}y, \\ t = \frac{1}{4}(z - 1). \end{cases}$$

Так как  $M \in \gamma$ , то ее координаты удовлетворяют уравнению кривой, поэтому

$$\left(\frac{1}{t}x\right)^2 + 4\left(\frac{1}{t}y\right)^2 = 9, \quad x^2 + 4y^2 = 9t^2, \quad t^2 = \frac{x^2 + 4y^2}{9}.$$

Возведя обе части последнего уравнения системы в квадрат и подставляя выражение для  $t^2$ , получим уравнение конической поверхности:  $\frac{x^2 + 4y^2}{9} = \frac{1}{4}(z - 1)^2$ ,  $4x^2 + 16y^2 - 9z^2 + 18z - 9 = 0$ .

Ответ:  $4x^2 + 16y^2 - 9z^2 + 18z - 9 = 0$ .

Для исследования поверхности второго порядка рассмотрим *метод сечений*. Сущность метода заключается в следующем: данную поверхность будем пресекать координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям. По виду линий, получающихся в сечении, будем судить о форме поверхности.

**Теорема.** Пусть в прямоугольной системе координат  $Oxyz$  в пространстве поверхность

$S$  задана уравнением  $F(x, y, z) = 0$ . Пересечем эту поверхность плоскостью  $\sigma$ , параллельной плоскости  $Oxy$  ( $\sigma: z = h$ ). Тогда уравнение проекции  $\gamma$  на плоскости  $Oxy$  имеет вид  $\gamma': F(x, y, h) = 0$ .

**Следствие.** Если плоскость  $\sigma: z = h$  пересекает поверхность  $S$  по линии  $\gamma$ , то эта линия равна ее проекции  $\gamma'$  на плоскость  $Oxy$ .

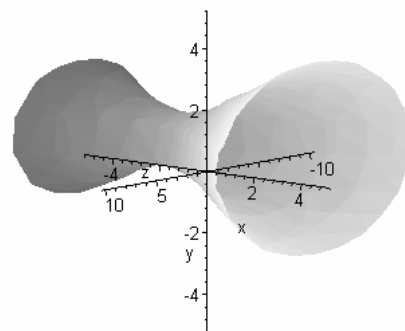
Аналогично исследуется вопрос о сечениях поверхности плоскостями, параллельными  $yOz$ ,  $xOz$ . Уравнения проекции при этом будут иметь вид:

проекция на плоскость  $yOz$ :  $F(h, y, z) = 0$ ;

проекция на плоскость  $xOz$ :  $F(x, h, z) = 0$ .

**Задача 4.** Определить тип поверхности  $4x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z - 5 = 0$  и построить ее изображение.

Решение. I-й способ. Выделим полные квадраты, содержащие переменные,



$$\begin{aligned} 4(x^2 - 2x + 1) - 4 - 9(y^2 + 2y + 1) + 9 + 36(z^2 - 2z + 1) - 36 &= 5, \\ 4(x - 1)^2 - 9(y + 1)^2 + 36(z - 1)^2 &= 36, \\ \frac{(x - 1)^2}{9} - \frac{(y + 1)^2}{4} + (z - 1)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Из полученного уравнения следует, что рассматриваемая поверхность является однополостным гиперболоидом с центром симметрии в точке  $C(1; -1; 1)$ , эта поверхность не пересекает прямую  $y = -1$ . Таким образом, можно с помощью метода сечений построить поверхность  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$  и перенести начало координат в точку  $C'(-1; 1 - 1)$ .

Ответ: данная поверхность  $4x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z - 5 = 0$  является однополостным гиперболоидом.

Исследование вида поверхности второго порядка можно проводить с помощью так называемых *инвариантов* поверхностей второго порядка, составленных из коэффициентов уравнения (1).

Введем основные инварианты формулами  $S = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ ,

$$T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{30} \\ a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{00} \end{vmatrix}.$$

Значения инвариантов не меняются при параллельном переносе и повороте осей координат.

*Классификация поверхностей второго порядка по инвариантам*

|                                          |                                             | невывождающиеся           |                          | вывождающиеся                              |
|------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------|--------------------------|--------------------------------------------|
|                                          |                                             | $\Delta > 0$              | $\Delta < 0$             | $\Delta = 0$                               |
| центральные поверхности, $\delta \neq 0$ | $\delta S > 0, T > 0$                       | мнимый эллипсоид          | эллипсоид                | мнимый конус                               |
|                                          | $\delta S \leq 0, \text{ и (или)} T \leq 0$ | однополостный гиперболоид | двуполостный гиперболоид | действительный конус                       |
| нецентральные поверхности, $\delta = 0$  |                                             | гиперболоид               | эллиптический параболоид | цилиндрические и распадающиеся поверхности |

Для классификации цилиндрических и распадающихся поверхностей ( $\Delta = 0, \delta = 0$ ) используют *семиинвариант*  $\Delta' = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}$ , где  $\Delta_{ii}$  - алгебраическое дополнение элемента  $a_{ii}$  в  $\Delta$ .

|         | цилиндрические поверхности, $\Delta' \neq 0$                                                                               | распадающиеся поверхности, $\Delta' = 0$                                                                       |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $T > 0$ | эллиптический цилиндр (мнимый и действительный)                                                                            | пара мнимых пересекающихся плоскостей                                                                          |
|         | <div> <div>мнимый<br/><math>\Delta'S &gt; 0</math></div> <div>действительный<br/><math>\Delta'S &lt; 0</math></div> </div> |                                                                                                                |
| $T < 0$ | параболический цилиндр                                                                                                     | 1) пара мнимых параллельных плоскостей;<br>2) пара параллельных плоскостей;<br>3) пара совпадающих плоскостей. |

**Задача 5.** Рассмотрим II-й способ решения задачи 4.

Определим тип поверхности с помощью инвариантов и семиинвариантов: имеем  $a_{11} = 4$ ,  $a_{22} = -9$ ,  $a_{33} = 36$ ,  $a_{11} = 4$ ,  $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ ,  $a_{10} = -4$ ,  $a_{20} = -9$ ,  $a_{30} = -36$ ,  $a_{00} = -5$ , поэтому  $S = 4 - 9 + 36 = 31$ ,

$$T = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 36 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 36 \end{vmatrix} = -36 + 4 \cdot 36 - 9 \cdot 36 = 36(4 - 10) = -216,$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{vmatrix} = -1296,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 36 & -36 \\ -4 & -9 & -36 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -9 & 0 & -9 \\ 0 & 36 & -36 \\ -9 & -36 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-9) \left( \begin{vmatrix} 36 & -36 \\ -36 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 36 \\ -9 & -36 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -36(35(-5 - 36) + 9 \cdot 36) = 41472.$$

Так как  $\delta \neq 0, \delta \cdot S < 0$  и  $\Delta > 0$ , то поверхность является однополостным гиперболоидом. Для его построения используем метод сечений.

Пусть  $y = h = \text{const}$ , тогда уравнение примет вид  $4x^2 + 36z^2 - 8x - 72z = 9h^2 + 18h + 5$  в

плоскости  $y = h$ . Выделим полные квадраты, содержащие переменные,

$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 36(z^2 - 2z + 1) - 36 = 9(h^2 + 2h + 1) - 9 + 5,$$

$$4(x-1)^2 + 36(z-1)^2 = 9(h+1)^2 + 36.$$

$9(h+1)^2 + 36 > 0$  при любом  $h$ , последнее уравнение задает в плоскости  $y = h$  эллипс

$$\frac{(x-1)^2}{(9(h+1)^2 + 36)/4} + \frac{(z-1)^2}{(9(h+1)^2 + 36)/36} = 1$$

с центром симметрии  $C(1; -1; 1)$  и полуосями

$$a = \frac{\sqrt{(h+1)^2 + 4}}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{(h+1)^2 + 4}}{2}.$$

Очевидно, поверхность симметрична относительно плоскости  $y = h = -1$ , поэтому достаточно построить часть поверхности при  $h \geq -1$ , а потом отобразить ее симметрично (рис. 34).

При  $h = -1$  имеем  $\frac{(x-1)^2}{9} + (z-1)^2 = 1$ ,

при  $h = 0$   $\frac{4(x-1)^2}{45} + \frac{36(z-1)^2}{45} = 1$ ,

при  $h = 1$   $\frac{(x-1)^2}{18} + \frac{(z-1)^2}{2} = 1$ .

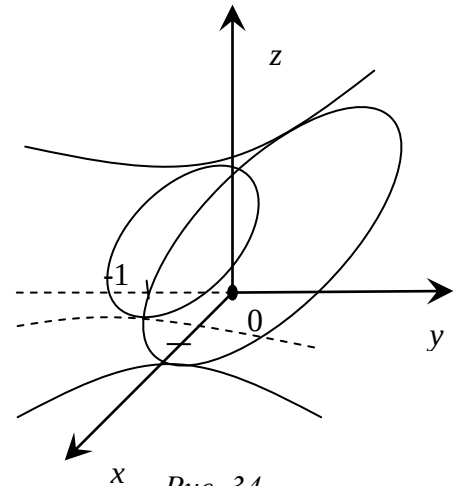


Рис. 34

### Упражнения

1. Составить уравнение цилиндрической поверхности, если:

1) ее ось совпадает с осью  $Oz$ , а направляющей служит линия  $\gamma : \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ ;

2) ее ось совпадает с осью  $Oy$ , а направляющей служит линия  $\gamma : \begin{cases} 2x^2 + z^2 - 8x - 2z + 1 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

2. Написать уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат и направляющей

1)  $\gamma : \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1, \\ z = 5 \end{cases}$

2)  $\gamma : \begin{cases} x^2 + (y-6)^2 + z = 25, \\ y = 3 \end{cases}$

3. Исследовать методом сечений следующие поверхности:

1)  $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y + 4z - 3 = 0$ ;

2)  $x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ ;

3)  $x^2 = 4z$ .

5. Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, если поверхность:

1) проходит через точку  $(\sqrt{5}; 3; 2)$  и пересекает плоскость  $XOY$  по гиперболе  $\frac{x^2}{5} - \frac{z^2}{4} = 1$ ;

2) пересекает плоскость  $OXZ$  по окружности  $x^2 + y^2 = 9$ , а плоскость  $Oxy$  по гиперболе  $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{10} = 1$ .

6. Написать уравнение двуполостного гиперболоида в канонической системе координат, если точки  $M_1(3; 1; 2)$ ,  $M_2(6; 2; \sqrt{15})$  и  $M_3(2; \sqrt{\pi}; 3)$  лежат на данной поверхности (рассмотреть 3

возможных случая).

7. Написать уравнение сферы, проходящей через точку  $M(1;5;1)$  и окружность  $x^2+y^2-2x-10y+23=0$ , расположенную на плоскости  $Oxy$ .

8. Определить вид поверхности и изобразить ее:

1.  $x^2-2y^2+3z^2=0$ ;

2.  $x^2+2y^2+3z^2-24=0$ ;

3.  $x^2-3y^2-z^2=0$ ;

4.  $x^2=6z$ ;

5.  $2x^2-3y^2+6z^2-12=0$ ;

6.  $3x^2+4y^2-24z=0$ .

7.  $x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ ;

8.  $-9x^2+y^2+36z^2=0$ ;

9.  $x^2 = 4z$ ;

10.  $-36x^2 - 9y^2 + 4z - 36 = 0$ ;

11.  $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ ;

12.  $3x^2 - 6y^2 + 4z^2 = 0$ ;

13.  $x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ ;

14.  $-x^2 - 4y^2 + 12z^2 = 0$

15.  $y^2 - z^2 = 0$ ;

16.  $4x^2 - 9y^2 - 36z^2 - 36 = 0$ ;

17.  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10 = 0$ ;

18.  $36x^2+36y^2+36z^2+24y-36x-72z=95$ ;

19.  $4x^2+2y^2+12z^2-4xy+8yz+12zx+14x-10y+7=0$ ;

20.  $5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy - 6zx + 12x - 36z = 0$ ;

21.  $x^2 - 2y^2 + z^2 + 6yz - 4zx - 8x + 10y = 0$ ;

22.  $x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y - 9 = 0$ .

9. Написать уравнение сферы:

а) проходящей через точку  $A(1,4,-7)$  и касающейся плоскости  $6x+6y-7z+42=0$ ;

б) проходящей через точку  $B(6,-8,3)$  и касающейся оси  $Oz$ ;

с) описанной около тетраэдра, одна из вершин которого совпадает с началом координат, а другие находятся в точках  $A(2,0,0)$ ,  $B(0,5,0)$ ,  $C(0,0,3)$ .

10. Какому соотношению должны удовлетворять коэффициенты плоскости  $Ax+By+Cz+D=0$  для того, чтобы она касалась сферы  $x^2+y^2+z^2=R^2$ ?

11. Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая задана системой уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 9, \\ z = 4. \end{cases}$$

12. Направляющая конуса задана уравнениями 
$$\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 - z = 0, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$
 Составить уравнение конуса, если его вершина находится в точке  $(-3,0,0)$ .

13. Даны три параллельные прямые:  $x=y=z$ ,  $x+1=y=z-1$ ,  $x-1=y+1=z-2$ . Найти проходящий через них круговой цилиндр.

14. Прямая  $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$  вращается около оси  $Oz$ . Найти уравнение описанной ею поверхности.

15. Найти угол между образующей и осью (вращения) конуса:  $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{3} = 0$ .

16. При каком значении параметра  $a$  поверхность, заданная уравнением  $x^2 + 3y^2 + 2ayz + 2zx - 2x - 8y - 2z - 3 = 0$ , является конусом?

**Рекомендованная литература**

**Основная литература:**

- Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник. – М.: Проспект, 2012.
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: Учебник для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
- Канатников А. Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия: учеб. пособие. - М.: Академия, 2009.

**Дополнительная литература:**

- Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
- Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.
- Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – СПб.: Изд-во «Лань», 2011.

**Методическая литература:**

- Электронный конспект лекций (автор – Бондарь В.В.).

**Интернет-ресурсы:**

- <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
- <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
- <http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России. Основные разделы: журналы, персоналии, организации, конференции, семинары, видеотека, библиотека.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

## **АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

**Методические указания для обучающихся по организации и проведению  
самостоятельной работы**

Направление подготовки 03.03.02 Физика  
Направленность (профиль)  
«Медицинская физика»

**Ставрополь  
2026**

**СОДЕРЖАНИЕ**

|                                                                                                   |   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| Введение                                                                                          | 2 |
| План-график выполнения самостоятельной работы                                                     | 4 |
| Методические рекомендации по изучению теоретического материала, подготовке к лабораторным работам | 5 |
| Методические указания по подготовке к экзамену                                                    | 8 |

## ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Аналитическая геометрия» является формирование соответствующего набора общепрофессиональных компетенций будущего академического бакалавра по направлению подготовки 03.03.02 Физика, путем освоения возможностей использования средств и методов аналитической геометрии для решения прикладных задач в области физики.

Основными задачами освоения дисциплины являются:

- формирование научного мировоззрения и устойчивого познавательного интереса к изучению геометрии, а также прикладной и практической направленности обучения геометрии;
- воспитание математической культуры, которая предполагает четкое осознание необходимости и важности математической подготовки для специалиста в области математики и компьютерных наук;
- ознакомление с основными объектами аналитической геометрии, а также их приложениями для решения различных задач;
- создание условий для развития профессионального творчества и опыта самостоятельной деятельности по усвоению содержания геометрического образования.

### Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

| Код, формулировка компетенции                                                                                                                   | Код, формулировка индикатора                                                                                                                                                                                                                                         | Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности (ОПК-1) | ИД-2 <sub>ОПК-1</sub><br>использует математический аппарат и методы математического и численного моделирования для описания, анализа, теоретического и экспериментального исследования физических систем, явлений и процессов в своей профессиональной деятельности. | Готовность использовать основные понятия аналитической геометрии, знать определения и свойства математических объектов в этой области, знать формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений. Готовность решать задачи вычислительного и теоретического характера в области аналитической геометрии; применять алгебраические и геометрические методы для решения прикладных задач, а так же производить оценку качества полученных решений. |

Методические рекомендации подготовлены с учетом требований ФГОС ВО и имеющейся программы по данной дисциплине.

Предлагаемые методические рекомендации содержат материалы для организации СКР и проведения текущего контроля знаний и умений студентов. Приведены примеры решения типовых задач, демонстрирующие основные приемы и методы решения.

Рассмотренный материал охватывает весь программный материал по соответствующей дисциплине для указанного направления и содержит дополнительный материал, способствующий целостному пониманию материала.

Целью контрольных заданий является выявление уровня усвоения ведущих понятий и фактов геометрии, а так же выявление уровня сформированности соответствующих компетенций.

Подобранные задачи для самостоятельного решения призваны способствовать закреплению теоретических знаний по дисциплине, овладению аналитическим аппаратом в геометрии и применению его к доказательству теорем, исследованию различных геометрических вопросов.

## ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

### *Самостоятельная работа как важнейшая форма учебного процесса.*

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования - "подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности".

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:

- изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;
- подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ;
- участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.

Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.

### *Цели и основные задачи СРС*

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой специалиста и бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

### ***3. Виды самостоятельной работы***

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации, содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.):

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателей являются:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание рефератов;
- подготовка к семинарам и лабораторным работам, их оформление;
- составление аннотированного списка статей из соответствующих журналов по отраслям знаний (педагогических, психологических, методических и др.);
- подготовка рецензий на статью, пособие;
- выполнение микроисследований;

- подготовка практических разработок;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов.

(В зависимости от особенностей факультета перечисленные виды работ могут быть расширены, заменены на специфические).

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

- текущие консультации;
- коллоквиум как форма контроля освоения теоретического содержания дисциплин: (в часы консультаций, предусмотренных учебным планом);
- прием и разбор домашних заданий (в часы практических занятий);
- прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р);
- выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин (руководство, консультирование и защита курсовых работ (в часы, предусмотренные учебным планом);
- выполнение учебно-исследовательской работы (руководство, консультирование и защита УИРС);
- прохождение и оформление результатов практик (руководство и оценка уровня сформированности профессиональных умений и навыков);
- выполнение выпускной квалификационной работы (руководство, консультирование и защита выпускных квалификационных работ) и др.

### *Организация СРС*

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Организацию самостоятельной работы студентов обеспечивают: факультет, кафедра, учебный и методический отделы, преподаватель, библиотека, ТСО, ИВТ, издательство и др.

### **Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы**

процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

*Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя студент должен:*

- освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем в соответствии с Государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования (ГОС ВПО/ГОС СПО) по данной дисциплине.
- планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем.
- самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя.
- выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

*студент может:*

сверх предложенного преподавателем (при обосновании и согласовании с ним) и минимума обязательного содержания, определяемого ФГОС ВО по данной дисциплине:

- самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;
- предлагать дополнительные темы и вопросы для самостоятельной проработки;
- в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;
- предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;
- использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;
- использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего специалиста, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий.

### **Общие рекомендации по организации самостоятельной работы**

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;

б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы - это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и

приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

### ***Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления исследователя и специалиста***

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не только к моральным, нравственным свойствам человека, но и в особенности, постоянно возрастающие требования в области образования – обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной мыслью и языком науки является необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для реализации этой задачи. Ибо во время учебы в вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этого пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения (лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контролировании за их деятельностью. Отметим, что нельзя ограничиваться только приобретением знаний предусмотренных программой изучаемой дисциплины, надо постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т.е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность методов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать его, чтобы изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебы с будущей профессиональной деятельности

### ***Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы.***

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно – выучу!»), а когда приходит пора экзаменов, материала, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться в оставшийся промежуток времени.

#### **Работа с книгой.**

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги. Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода). При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

***Основные виды систематизированной записи прочитанного:***

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;
2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;
3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;
4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;
5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

***Методические рекомендации по составлению конспекта:***

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;
2. Выделите главное, составьте план;
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;
4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.
5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

***Практические занятия.***

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач

или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

### **Самопроверка.**

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

### **Консультации**

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

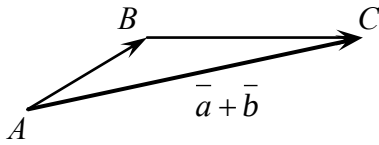
# ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

## §1. Векторы и действия над ними

**Задача 1.** Даны векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Построить их сумму.

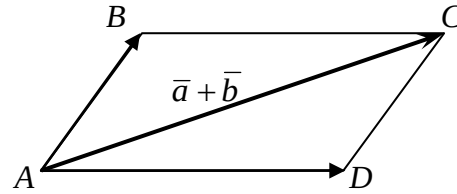
Решение. Построение можно выполнить двумя способами:

**правило треугольника**



Если  $\overline{AB} = \vec{a}$ ,  $\overline{BC} = \vec{b}$ , то  $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$  по определению суммы.

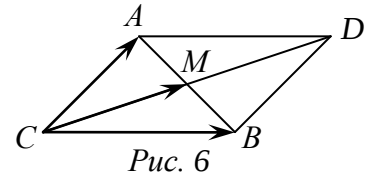
**правило параллелограмма**



Если  $\overline{AB} = \vec{a}$ ,  $\overline{AD} = \vec{b}$ , то  $\overline{BC} = \overline{AD} = \vec{b}$  (по свойству противоположащих сторон параллелограмма), поэтому  $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$  по определению суммы.

**Задача 2.** В треугольнике  $ABC$   $M$  – середина стороны  $AB$ . Выразить вектор  $\overline{CM}$  через векторы  $\overline{CA}$  и  $\overline{CB}$ .

Решение. Достроим треугольник  $ABC$  до параллелограмма  $ADBC$  таким образом, чтобы отрезок  $CM$  лежал на его диагонали (рис. 6). По свойству параллелограмма  $CM = MD$ , по правилу параллелограмма  $\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{CB}$ ,  $\overline{CM} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$ .



Ответ:  $\overline{CM} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$ .

**Задача 3.** В тетраэдре  $DABC$ :  $CM = MB$ ,  $\overline{AD} = \vec{m}$ ,  $\overline{DC} = \vec{n}$ ,  $\overline{DM} = \vec{p}$  (рис. 7). Разложить вектор  $\overline{AB}$  по векторам  $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ . Выяснить компланарны ли векторы  $\overline{AC} + \overline{AM}$ ,  $\overline{DA} - \overline{DB}$ ,  $\overline{BC}$ .

Решение. По правилу многоугольника

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CB} = \overline{AD} + \overline{DC} + 2\overline{CM} = \\ &= \overline{AD} + \overline{DC} + 2(\overline{DM} - \overline{DC}) = \vec{m} + \vec{n} + 2\vec{p} - 2\vec{n} = \vec{m} + 2\vec{p} - \vec{n}. \end{aligned}$$

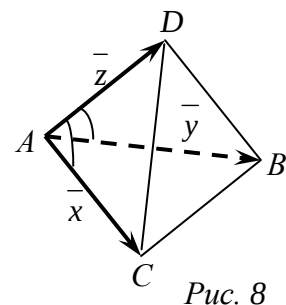
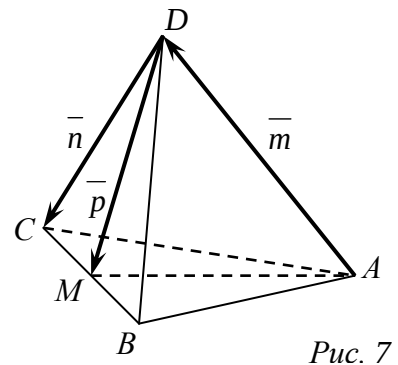
Вектор  $\overline{AC} + \overline{AM}$  лежит в плоскости  $(ABC)$ , так как все точки  $A, C, M$  лежат в ней;  $\overline{DA} - \overline{DB} = -\overline{AD} - \overline{DB} = -(\overline{AD} + \overline{DB}) = -\overline{AB} = \overline{BA}$  лежит в плоскости  $(ABC)$ ,  $\overline{BC}$  лежит в плоскости  $(ABC)$ . По определению эти векторы компланарны.

Ответ:  $\overline{AB} = \vec{m} + 2\vec{p} - \vec{n}$ , векторы  $\overline{AC} + \overline{AM}$ ,  $\overline{DA} - \overline{DB}$ ,  $\overline{BC}$  компланарны.

**Задача 4.** В тетраэдре  $DABC$ :  $AB = AC = a$ ,  $\angle DAB = \angle DAC = \varphi$ . Доказать, что  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ .

Доказательство. Пусть  $\overline{AC} = \vec{x}$ ,  $\overline{AB} = \vec{y}$ ,  $\overline{AD} = \vec{z}$  (рис. 8), тогда  $|\vec{x}| = AC = a$ ,  $|\vec{y}| = AB = a$ . Выразим вектор  $\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC} = -\overline{AB} + \overline{AC} = \vec{x} - \vec{y}$ .

Пусть  $\gamma$  – угол между векторами  $\overline{AD}$  и  $\overline{BC}$ , тогда



$$\cos \gamma = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AD}| \cdot |\overline{BC}|}.$$

$$\begin{aligned}\overline{AD} \cdot \overline{BC} &= \bar{z} \cdot (\bar{x} - \bar{y}) = \bar{z} \cdot \bar{x} - \bar{z} \cdot \bar{y} = |\bar{z}| \cdot |\bar{x}| \cdot \cos \varphi - |\bar{z}| \cdot |\bar{y}| \cos \varphi = \\ &= |\bar{z}| (a \cdot \cos \varphi - a \cdot \cos \varphi) = 0,\end{aligned}$$

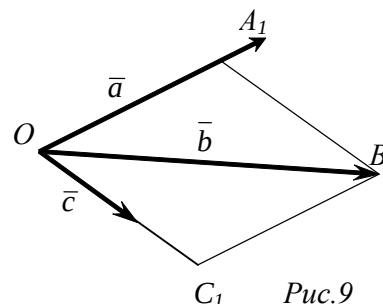
следовательно,  $\cos \gamma = 0$  и  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ .

**Задача 5.** Показать, что коллинеарные векторы линейно зависимы.

Решение. По определению умножения вектора на число для любых двух коллинеарных векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2$  найдется такое число  $a$ , что  $\bar{a}_1 = a\bar{a}_2$ , т.е.  $\bar{a}_1 - a\bar{a}_2 = \bar{0}$  и коэффициент при  $\bar{a}_1$  равен  $1 \neq 0$ , по определению  $\bar{a}_1$  и  $\bar{a}_2$  линейно зависимы.

**Задача 6.** Доказать, что три компланарных вектора линейно зависимы.

Доказательство. Пусть векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  компланарны, тогда, если отложить их от одной точки  $O$ , то все три вектора будут лежать в одной плоскости. Построим на векторах параллелограмм  $OA_1BC_1$  следующим образом:  $OB$  – диагональ,  $\overline{OB} = \bar{b}$ , а стороны параллелограмма параллельны векторам  $\bar{a}$  и  $\bar{c}$  (рис.9). Тогда по определению умножения вектора на число  $\overline{OA_1} = a\bar{a}$ ,  $\overline{OC_1} = \gamma\bar{c}$ , по правилу параллелограмма  $\overline{OB} = \overline{OA_1} + \overline{OC_1}$  или  $\bar{b} = a\bar{a} + \gamma\bar{c}$ , т.е.  $\bar{b} - a\bar{a} - \gamma\bar{c} = \bar{0}$ , следовательно, векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  линейно зависимы.



**Задача 7.** Доказать, что для того, чтобы векторы были коллинеарными необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональными.

Доказательство. Пусть векторы  $\bar{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $\bar{b}(b_1, b_2, \dots, b_n)$  коллинеарные, тогда  $\bar{b} = a\bar{a} = (aa_1, aa_2, \dots, aa_n)$ , последнее, при условии, что все координаты вектора  $\bar{b}$  отличны от нуля, равносильны равенствам

$$b_1 = aa_1, b_2 = aa_2, \dots, b_n = aa_n, \text{ т.е. } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{a}.$$

**Задача 8.** Показать, что на плоскости векторы  $\bar{e}_1(1,2)$  и  $\bar{e}_2(3,4)$  образуют базис. Найти координаты вектора  $\bar{x}(7,10)$  в этом базисе.

Решение. Пусть векторы  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$  линейно зависимы, тогда существует единственное число  $c \in R$  такое, что  $\bar{e}_2 = c \cdot \bar{e}_1$ , т.е.  $(3,4) = (1c, 2c)$ . Запишем это равенство в координатах  $\begin{cases} 3 = c, \\ 4 = 2c; \end{cases} \begin{cases} c = 3, \\ c = 2, \end{cases}$  что невозможно, следовательно, векторы  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$  линейно независимы. Покажем, что произвольный вектор  $\bar{a}(a_1, a_2)$  можно разложить по векторам  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$ , т.е. найдутся  $a, \beta \in R$  такие, что  $\bar{a} = a\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2$ . Запишем это равенство в координатах  $\begin{cases} \bar{e}_1 a + 3\beta = a_1, \\ 2a + 4\beta = a_2. \end{cases}$  Найдем  $a$  и  $\beta$ , для этого решим систему уравнений методом Гаусса.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0, \text{ следовательно, система имеет единственное решение, т.е.}$$

разложение произвольного вектора  $\bar{a}$  по векторам  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$  единственно. Это значит, что векторы  $\bar{a}, \bar{e}_1, \bar{e}_2$  линейно зависимы, как и любые три вектора, поэтому  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  образуют базис.

Найдем координаты вектора  $\bar{x}$  относительно этого базиса. Для этого подставим в систему вместо  $a_1, a_2$  координаты вектора  $\bar{x}$ :

$$\begin{cases} a+3\beta=7, \\ 2a+4\beta=10, \end{cases} \quad \begin{cases} a+3\beta=7, \\ a+2\beta=5, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta=2, \\ a=5-2\beta, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta=2, \\ a=1, \end{cases} \quad \text{т.е. } \bar{x} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2.$$

Ответ:  $\bar{x} = (1, 2)$  в базисе  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ .

Пусть  $O$  – некоторая точка линейного векторного пространства, от которой отложены базисные векторы. Тогда  $O$  называется *началом координат*, а прямые, проходящие через точку  $O$  параллельно векторам базиса, называются *осями координат*. Вектор  $\overline{OM}$ , начало которого находится в начале координат, а конец в точке  $M$ , называется *радиус-вектором* точки  $M$ , координаты радиус-вектора точки называются *координатами* этой точки.

Если вектор задан двумя точками  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$  – начало вектора и  $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$  – конец вектора, то  $\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$ .

**Задача 9.** Построить точку  $M$  и вектор  $\bar{a}$  в заданном базисе, если: а)  $M(2, -1)$ ,  $\bar{a}\left(-3, \frac{1}{2}\right)$ .

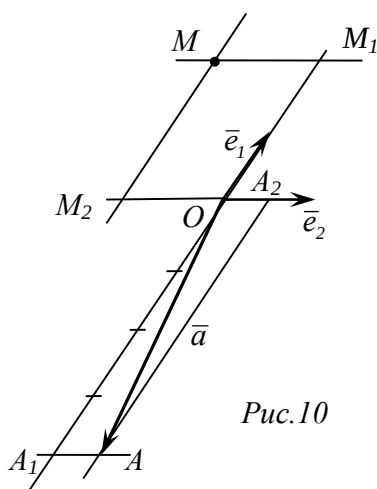


Рис.10

б)  $M(1, -2, 3)$ ,  $\bar{a}(2, 0, -1)$ .

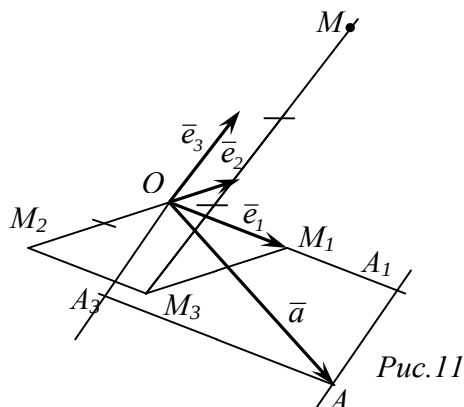


Рис.11

**Решение.** В данном базисе построим векторы  $\overline{OM}_1 = 2\bar{e}_1, \overline{OM}_2 = -\bar{e}_2$  (рис. 10), тогда по правилу параллелограмма

$$\overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 = 2\bar{e}_1 + (-\bar{e}_2) = (2, -1).$$

Вектор  $\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2$  является радиус-вектором точки  $M$ , поэтому его конечная точка является искомой точкой  $M$ .

Построим вектор  $\overline{OA}_1 = -3\bar{e}_1$  и  $\overline{OA}_2 = \frac{1}{2}\bar{e}_2$ , по правилу параллелограмма

$$\overline{OA} = \overline{OA}_1 + \overline{OA}_2 = -3\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\bar{e}_2 = \left(-3, \frac{1}{2}\right) = \bar{a},$$

т.е.  $\overline{OA}$  совпадает с искомым вектором  $\bar{a}$  (рис.10).

**Решение.** Построим векторы  $\overline{OM}_1 = \bar{e}_1$  и  $\overline{OM}_2 = -2\bar{e}_2$  (рис. 11). По правилу параллелограмма  $\overline{OM}_3 = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2$ . Из точки  $M_3$  построим вектор  $\overline{M}_3M = 3\bar{e}_3$ , по правилу параллелограмма

$$\overline{OM} = \overline{M}_3M + \overline{OM}_3 = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3 =$$

$$= \bar{e}_1 + (-2)\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3(1, -2, 3), \text{ поэтому конечная точка вектора } \overline{OM} \text{ является искомой точкой } M.$$

Построим векторы  $\overline{OA}_1 = 2\bar{e}_1$  и  $\overline{OA}_3 = -\bar{e}_3$  (рис.11). По правилу параллелограмма

$$\overline{OA} = \overline{OA}_1 + \overline{OA}_3 = 2\bar{e}_1 + (-1)\bar{e}_3 = 2\bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + (-1)\bar{e}_3 =$$

$$= (2, 0, -1) = \bar{a}, \text{ т.е. вектор } \overline{OA} \text{ - искомый вектор } \bar{a}.$$

**Задача 10.** Точка  $C(2, 3)$  служит серединой отрезка  $AB$ . Определить координаты точки  $A$ , если  $B(7, 5)$ .

**Решение.** Пусть  $A(x, y)$ , тогда  $\overline{AC} = (2 - x, 3 - y)$ ,  $\overline{CB} = (7 - 2, 5 - 3) = (5, 2)$  и так как  $\overline{AC} = \overline{CB}$ , то

$$\begin{cases} 2 - x = 5, \\ 3 - y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ.  $A(-3, 1)$ .

## Упражнения

1. В треугольнике  $ABC$   $M$  – точка пересечения медиан. Доказать, что  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .
2. В треугольнике  $ABC$   $M$  – точка пересечения медиан. Показать, что  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ , где  $O$  – произвольная точка пространства.
3. В треугольнике  $ABC$ :  $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ . Выразить через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  векторы:
  4.  $\overrightarrow{CB_1}$ , где  $B_1$  – середина  $AC$ ;
  5.  $\overrightarrow{CC_1}$ , где  $C_1$  – середина  $AB$ ;
  6.  $\overrightarrow{CK}$ , где  $K \in AB$ ,  $AK : KB = 3 : 10$ .
7. В правильном шестиугольнике  $ABCDEF$ :  $\overrightarrow{BC} = \vec{m}$ ,  $\overrightarrow{BD} = \vec{n}$ . Выразить все его стороны и все диагонали через  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ .
8. Точка  $C$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $AC : CB = m : n$ . Показать, что:
  9. 1)  $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$ ;
  10. 2)  $\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$ , где  $O$  – произвольная точка.
11. Доказать условие принадлежности трех точек одной прямой: для того чтобы точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  принадлежали одной прямой необходимо и достаточно, чтобы  $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$ , где  $O$  – произвольная точка,  $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BA}$ .
12. Доказать условие принадлежности четырех точек одной плоскости: для того чтобы точка  $M$  принадлежала плоскости, определяемой точками  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , не лежащими на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы  $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + (1-k-l)\overrightarrow{OC}$ , где  $O$  – произвольная точка.
13. Точки  $M_1$  и  $M_2$  – середины отрезков  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  соответственно. Доказать, что  $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2})$ .
14. Доказать необходимый и достаточный признак параллелограмма: для того чтобы четырехугольник  $ABCD$  был параллелограммом необходимо и достаточно, чтобы для произвольной точки  $O$  выполнялось равенство  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ .
15. В треугольнике  $ABC$ :  $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$ . Построить вектор  $\frac{\vec{m} + \vec{n}}{2}$ .
16. Какому условию должны удовлетворять векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , чтобы вектор  $\vec{a} + \vec{b}$  делил пополам угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ?
17. В трапеции  $ABCD$ :  $BC \parallel DA$ ,  $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ . Разложить вектор  $\overrightarrow{DA}$  по векторам  $\overrightarrow{DC}$  и  $\overrightarrow{DB}$ .
18. В параллелограмме  $ABCD$   $O$  – точка пересечения медиан,  $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$ . Выразить через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  следующие векторы  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ .
19. Отрезок  $AB$  разделен на  $n$  равных частей точками  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ . Зная, что  $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$ , где  $O$  – произвольная точка, выразить через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  следующие векторы  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{OC_1}$ ,  $\overrightarrow{OC_2}, \dots, \overrightarrow{OC_{n-1}}$ .
20. В треугольнике  $ABC$   $M$  – точка пересечения медиан,  $O$  – произвольная точка внутри треугольника. Выразить  $\overrightarrow{OM}$  через  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$ .

21. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{DA} = \vec{a}, \overline{DC} = \vec{c}, \overline{DD_1} = \vec{d}$ , точка  $E$  делит отрезок  $DC_1$  в отношении 1:3. Выразить через  $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$  следующие векторы  $\overline{A_1 B}, \overline{BE}, \overline{B_1 F}$ .
22. Точки  $M$  и  $M_1$  – точки пересечения медиан треугольников  $ABC$  и  $A_1 B_1 C_1$  соответственно. Доказать, что  $\overline{MM_1} = \frac{1}{3}(\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1})$ .
23. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $BM=MC$ ,  $D_1 N=NC_1$ ,  $\vec{p} = \overline{AB}, \vec{q} = \overline{AD}, \vec{r} = \overline{AA_1}$ . Разложить векторы  $\overline{MN}$  и  $\overline{PA}$  по векторам  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ , если  $P$  – середина  $DC$ .
24. Через вершину  $A$  треугольника  $ABC$  проведен перпендикуляр  $AD$  к плоскости треугольника.  $\angle ABD = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$ . Выразить косинус угла между векторами  $\overline{BC}$  и  $\overline{BD}$  через углы  $\alpha$  и  $\beta$ .
25. Известно, что единичные векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют попарно углы по  $60^\circ$ . Найти угол:
- 1) между  $\vec{a}$  и  $\vec{b} + \vec{c}$ ;
  - 2) между  $\vec{a}$  и  $\vec{b} - \vec{c}$ .
26. В правильном шестиугольнике  $ABCDEF$  со стороной  $a$  найти:
27. 1)  $\overline{AB} \cdot \overline{ED}, \overline{AD} \cdot \overline{CB}, \overline{AB} \cdot \overline{AC}, \overline{AB}^2, \overline{AD} \cdot \overline{BE}$ ;
28. 2)  $\overline{OA} \cdot \overline{OB}, \overline{OA} \cdot \overline{OC}, \overline{OA} \cdot \overline{OD}$ , где  $O$  – центр шестиугольника.
29. Доказать, что  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ .
30. Какому условию должны удовлетворять векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , чтобы имело место соотношение  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ?
31. В прямоугольнике  $ABCD$   $M$  и  $N$  – середины сторон  $CB$  и  $AB$  соответственно,  $CB=3$ ,  $AB=4$ . Разложить вектор  $\overline{DB}$  по векторам  $\overline{OM} = \vec{a}$ ,  $\overline{ON} = \vec{c}$ .
32. Даны три вектора  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , удовлетворяющие условию  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ , причем,  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $|\vec{c}| = 4$ . Вычислить  $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$ .
33. Показать, что угол  $\varphi$  между диагоналями прямоугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ( $\vec{a} \perp \vec{b}$ ), определяется формулой  $\cos \varphi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ .
34. Доказать, что вектор  $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$  перпендикулярен вектору  $\vec{a}$ .
35. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  взаимно перпендикулярны и имеют равные длины. Доказать, что  $\vec{p} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$  и  $\vec{q} = 10\vec{a} - 6\vec{b}$  взаимно перпендикулярны.
36. Известно, что  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $\angle \varphi = \left( \vec{a}, \vec{b} \right) = \frac{2}{3}\pi$ . Найти:  $\vec{a}\vec{b}$ ,  $\vec{a}^2, \vec{b}^2, (\vec{a} + \vec{b})^2$ .
37. Являются ли в пространстве многочленов степени не выше двух линейно зависимыми векторы  $p_1 = 1 + 2t + 3t^2$ ,  $p_2 = 2 + 3t + 4t^2$ ,  $p_3 = 3 + 5t + 7t^2$ ?
38. Даны коллинеарные и сонаправленные векторы  $\vec{a}(n, 1), \vec{b}(4, n)$ . Определите  $n$ .
39. Известно, что  $A(3, 4, 1), B(1, 0, -1), C(-2, -6, -4), D(2, 3, 4)$ . Лежат ли на одной прямой точки:
40. 1)  $A, B, C$ ; 2)  $A, B, D$ ?
41. Векторы  $\vec{a}(1, 2, 3)$  и  $\overline{AB}$ , где  $A(1, 1, 1), B \in XOY$ , коллинеарны. Найти координаты точки  $B$ .
42. Прямая задана двумя точками  $A(-12, -13), B(-2, -5)$ . Найти на ней точку  $M$  с абсциссой, равной 3.
43. В треугольнике  $ABC$  проведены медиана  $BK$ , средняя линия  $MN \parallel AC$ ,  $O = BK \cap MN$ .

$\overline{KC} = \bar{e}_1, \overline{KM} = \bar{e}_2$ . Определить в этом базисе координаты следующих векторов:

44. а)  $\overline{CM}, \overline{KN}, \overline{NC}$ ,

45. б)  $\overline{OB}, \overline{CB}, \overline{AM}$ .

46. В параллелограмме  $ABCD$   $A(-4,4), B(2,8), M(2,2)$  – точка пересечения диагоналей. Найти  $C, D$ .

47. Определить координаты концов  $A$  и  $B$  отрезка, который точками  $P(2,2)$  и  $Q(1,5)$  разделен на 3 равные части.

48. Точка  $M$  делит направленный отрезок  $\overline{M_1M_2}$  в отношении  $\lambda (\lambda \neq 1)$ , если  $\overline{M_1M} = \lambda \overline{MM_2}$ . Доказать, что если  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ , то координаты точки  $M$  вычисляются по формулам  $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$ .

49. Получить формулы для вычисления координат середины отрезка  $AB$ , если  $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ .

50. Известны точки  $A(-2,5), B(4,17)$ . На отрезке  $AB$  находится точка  $C$ , расстояние до которой от точки  $A$  в два раза больше расстояния от точки  $B$ . Найти координаты точки  $C$ .

51. Образуется ли линейное пространство множество элементов вида  $(x_1, x_2, 0, 0), (y_1, y_2, 0, 0), (z_1, z_2, 0, 0)$ ?

52. Является ли линейным пространством множество систем четырех действительных чисел  $(x_1, x_2, 1, 1), (y_1, y_2, 1, 1), (z_1, z_2, 1, 1)$ , где  $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$  – всевозможные действительные числа, если действия над такими векторами определяются покомпонентно?

53. Является ли линейным пространством множество многочленов второй степени?

54. Может ли линейное пространство состоять: 1) из одного вектора; 2) из двух различных векторов?

55. Образуется ли линейное пространство совокупность троек целых чисел  $(x, y, z)$ ?

56. Образуют ли линейное пространство все геометрические векторы, имеющие общее начало в начале координат и расположенные в первом октанте?

57. Доказать, что в трехмерном пространстве три некопланарных вектора линейно независимы.

58. Доказать, что в трехмерном пространстве любые четыре вектора линейно зависимы.

59. Показать, что элементы  $\bar{e}_1 = (1, 10), \bar{e}_2 = (10, 1)$  на плоскости могут быть выбраны в качестве базиса. Найти координаты вектора  $\bar{x}(2, 3)$  в этом базисе.

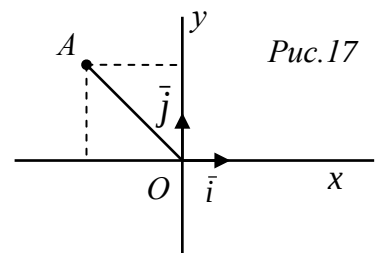
60. Показать, что множество всех матриц второго порядка является линейным пространством. Показать, что матрицы  $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  образуют его базис.

## §2 Системы координат

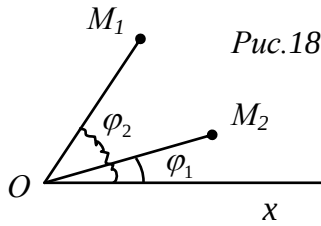
**Задача 1.** Найти прямоугольные координаты и построить точку  $A\left(2\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$ , если полюс совпадает с началом координат, полярная ось направлена по оси абсцисс.

Решение. По формулам (1)  $x = 2\sqrt{2} \cos \frac{3}{4}\pi = -2$ ;  
 $y = 2\sqrt{2} \sin \frac{3}{4}\pi = 2$ ;  $A(-2, 2)$ . Построение см. на рис. 17.

Ответ:  $A(-2, 2)$ .



**Задача 2.** Найти полярные координаты точки  $M(1, -\sqrt{3})$ , если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось - с положительным направлением оси абсцисс (т.е. системы координат согласованы).



Решение. По формулам (2)  $\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ ,  
 $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\varphi = \frac{5}{3}\pi$  (так как точка  $M$  лежит в IV четверти).

Итак,  $M\left(2, \frac{5}{3}\pi\right)$ .

Ответ:  $M\left(2, \frac{5}{3}\pi\right)$ .

**Задача 3.** Определить расстояние между точками  $M_1(\rho_1, \varphi_1)$  и  $M_2(\rho_2, \varphi_2)$  (рис. 18).

Решение. В треугольнике  $OM_1M_2$ :

$$OM_1 = \rho_1, OM_2 = \rho_2, \angle M_1OM_2 = \varphi_2 - \varphi_1.$$

По теореме косинусов

$$M_1M_2^2 = OM_1^2 + OM_2^2 - 2 \cdot OM_1 \cdot OM_2 \cdot \cos \angle M_1OM_2,$$

$$M_1M_2 = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (3)$$

Если  $\varphi_1 > \varphi_2$ , то  $\angle M_1OM_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ , но так как косинус угла – четная функция, то формула (3) остается справедливой и в этом случае.

Ответ:  $M_1M_2 = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ .

**Фигурой** называется любое множество точек пространства. Пусть задана некоторая система координат. Условием, определяющим фигуру  $F$  в данной системе координат, называется уравнение, неравенство, их система или совокупность, которым удовлетворяют координаты любой точки фигуры  $F$  и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих фигуре  $F$ .

**Задача 4.** Составить уравнение окружности радиуса  $r$ , если в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости ее центр  $C$  имеет координаты  $(a, b)$ .

Решение. Пусть  $M(x, y)$  - текущая точка окружности (т.е. произвольная ее точка), тогда по определению окружности  $CM = r$ . Запишем это равенство в координатах  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$ . Возведя обе части уравнения в квадрат, получим  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ .

Ответ:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ .

**Задача 5.** Составить уравнение круга радиуса  $r$ , если он лежит в плоскости  $xOy$ , а его центр  $C$  в прямоугольной декартовой системе координат в пространстве имеет координаты  $(a, b, 0)$ .

Решение. Пусть  $M(x, y, z)$  - текущая точка круга, тогда по определению круга  $CM \leq r$ . Запишем последнее равенство в координатах  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-0)^2} \leq r$  или  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 \leq r^2$ . Так как круг лежит в плоскости  $xOy$  и у всех точек этой плоскости аппликата равна нулю, то имеем систему:  $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 \leq r^2, \\ z = 0. \end{cases}$  или

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

Ответ:  $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2, \\ z = 0. \end{cases}$

**Задача 6.** Установить вид фигуры, которая в полярной системе координат задана системой: 
$$\begin{cases} \rho = 2, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение. Множество точек, у которых  $\rho = 2$ , - это точки, отстоящие от полюса на расстояние 2, т.е. это окружность с центром в полюсе радиуса 2.

Неравенство  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  задает множество лучей ( $\rho$  - произ-

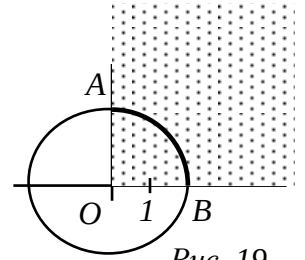


Рис. 19

вольно) с началом в полюсе и углом наклона от 0 до  $\frac{\pi}{2}$  к полярной оси, т.е. это угол  $AOB$ . В пересечении этих множеств получим искомую фигуру - часть окружности, лежащую в I четверти (рис. 19).

Ответ: данная система задает часть окружности, лежащую в I четверти.

Любую фигуру можно выразить алгебраически, хотя на практике это не всегда легко сделать. Однако даже не всякое уравнение определяет некоторую фигуру. Например, уравнение  $x^2 + y^2 = 0$  задает на плоскости точку  $O(0,0)$ , а в пространстве - ось  $Oz$ ; уравнение  $x^2 + y^2 = -1$  не задает никакого множества точек.

**Задача 7.** В прямоугольной декартовой системе координат множество точек задано уравнением  $x - 3y = 0$ . Найти уравнение этого множества в согласованной полярной системе координат.

Решение. По формулам перехода от полярной системы координат к согласованной прямоугольной декартовой  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . Подставляя выражения для  $x$  и  $y$  в исходное уравнение, получим  $\rho \cos \varphi - 3\rho \sin \varphi = 0$ ,  $\rho(\cos \varphi - 3 \sin \varphi) = 0$ , откуда

$$\rho = 0 \quad \text{или} \quad \cos \varphi - 3 \sin \varphi = 0, \text{ т.е.}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} \rho = 0, \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

### Упражнения

10. Построить точки, заданные полярными координатами:  $A\left(4, \frac{\pi}{4}\right), B\left(3, -\frac{\pi}{6}\right), C\left(1, -\frac{11}{4}\pi\right)$ .
11. Найти полярные координаты точек, если системы координат согласованы:  $A(2\sqrt{3}, 2), B(-4, 4), C(-7, 0), D(-\sqrt{2}, -\sqrt{6})$ .
12. Найти прямоугольные координаты точек, если системы координат согласованы:  $A\left(10, \frac{\pi}{2}\right), B\left(0, -\frac{3}{2}\pi\right), C\left(1, -\frac{\pi}{3}\right), D\left(2, -\frac{3}{6}\pi\right)$ .
13. Найти полярные координаты точки, симметричной точке  $M(\rho, \varphi)$ :  
а) относительно полюса; б) относительно полярной оси.
14. Определить множество точек, координаты которых в полярной системе координат удовлетворяют уравнению:  
а)  $\rho = 3$ ; б)  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ .
15. Изобразить на чертеже множества точек, заданных следующими системами неравенств в

прямоугольной системе координат:

$$\text{а) } \begin{cases} x > 0, \\ y \leq 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ y > 0; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} |x| \leq 2, \\ |y| \geq 3; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x^2 + y^2 < 16, \\ x > 2; \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 > 25, \\ |x| < 2. \end{cases}$$

16. Изобразить на чертеже множества точек, заданных в полярной системе координат следующими соотношениями (если  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ):

$$\text{а) } \rho \leq 2; \quad \text{б) } \varphi > \frac{\pi}{2}; \quad \text{в) } 1 < \rho \leq 3; \quad \text{г) } \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{5}{3}\pi; \quad \text{д) } \begin{cases} \rho > 2, \\ \frac{\pi}{6} < \varphi \leq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

17. В прямоугольной декартовой системе координат множество точек задано уравнением  $x^2 + y^2 = 16$ . Найти уравнение этого множества в согласованной полярной системе координат.

18. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точек  $A(2,0)$  и  $B(1,1)$ .

### §3. Нелинейные операции над векторами.

**Задача 1.** Известно, что векторы  $\vec{s} + 2\vec{t}$  и  $5\vec{s} - 4\vec{t}$  взаимно перпендикулярны. Какой угол образуют единичные векторы  $\vec{s}$  и  $\vec{t}$ ?

Решение. Так как данные векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю:  $(\vec{s} + 2\vec{t})(5\vec{s} - 4\vec{t}) = 0$ . Используя свойства скалярного произведения векторов, имеем:

$$(\vec{s} + 2\vec{t})(5\vec{s} - 4\vec{t}) = 5\vec{s}^2 + 10\vec{s}\vec{t} - 4\vec{s}\vec{t} - 8\vec{t}^2 = 5\vec{s}^2 + 6\vec{s}\vec{t} - 8\vec{t}^2,$$

т.е.  $6\vec{s}\vec{t} = 8\vec{t}^2 - 5\vec{s}^2$ . Так как векторы  $\vec{s}$  и  $\vec{t}$  единичные, то  $\vec{s}^2 = |\vec{s}|^2 = 1$ ,  $\vec{t}^2 = |\vec{t}|^2 = 1$ , поэтому

$6\vec{s}\vec{t} = 8 \cdot 1 - 5 \cdot 1$ ,  $\vec{s} \cdot \vec{t} = \frac{1}{2}$ . Используя геометрические свойства скалярного произведения,

имеем  $\cos(\vec{s}, \vec{t}) = \frac{\vec{s} \cdot \vec{t}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{t}|} = \frac{1/2}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2}$ , т.е. угол между векторами  $\vec{s}$  и  $\vec{t}$  равен  $\frac{\pi}{3}$  или  $60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ$ .

**Задача 2.** Показать, что треугольник  $ABC$  прямоугольный, если в ортонормированном базисе его вершины имеют координаты  $A(-3;-3)$ ,  $B(-1;3)$ ,  $C(11;-1)$ .

Решение.

I способ

$$\overline{AB} = (-1 - (-3); 3 + 3) = (2; 6), \quad |\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40},$$

$$\overline{AC} = (11 + 3; -1 + 3) = (14; 2), \quad |\overline{AC}| = \sqrt{14^2 + 2^2} = \sqrt{200},$$

$$\overline{BC} = (11 - (-1); -1 - 3) = (12; -4), \quad |\overline{BC}| = \sqrt{12^2 + (-4)^2} = \sqrt{160}.$$

Так как  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ , то для треугольника  $ABC$  справедлива теорема Пифагора, следовательно, треугольник  $ABC$  прямоугольный с прямым углом  $B$ .

II способ

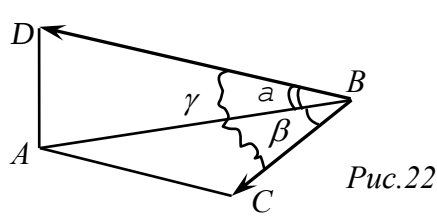
$$\overline{AB} = (2; 6), \quad \overline{AC} = (14; 2), \quad \overline{BC} = (12; -4).$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2 \cdot 14 + 6 \cdot 2 = 28 + 12 = 40, \quad \overline{AC} \cdot \overline{BC} = 14 \cdot 12 + 2 \cdot (-4) = 168 - 8 = 160,$$

$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 2 \cdot 12 + 6 \cdot (-4) = 24 - 24 = 0$ , т.е.  $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ , поэтому треугольник  $ABC$  прямоугольный.

**Задача 3.** Отрезок  $AD$  перпендикулярен плоскости треугольника  $ABC$ . Найти угол  $\gamma$  между векторами  $\overline{BC}$  и  $\overline{BD}$ , если  $\angle ABD = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$  (рис.22).

Решение. Имеем  $\cos \alpha = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BD}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BD}|}$ ,  $\cos \beta = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BA}|}$ ,  $\cos \gamma = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BD}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BD}|}$ . Так как



$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{AB}|^2, \text{ то}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BD}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BD}|} \cdot \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BA}|} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BD}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BD}|} \cdot \frac{\overline{BA}^2}{|\overline{BA}|^2} = \cos \gamma$$

Ответ:  $\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta$ .

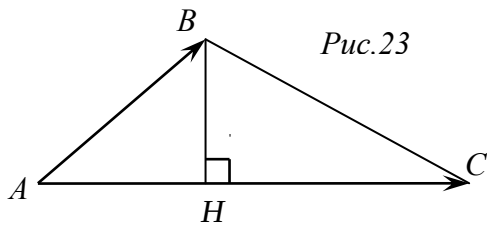
**Замечание.** Теорема о трех перпендикулярах является следствием задачи 4.

Действительно, если  $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ , то  $\angle \beta = 90^\circ$  и  $\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos 90^\circ = 0$ , т.е. если проекция наклонной перпендикулярна некоторой прямой в плоскости проекции, то и наклонная перпендикулярна этой прямой. Верно и обратное.

Действительно, если  $\overline{DB} \perp \overline{BC}$ , то  $\angle \gamma = 90^\circ$ ,  $\cos \alpha \cdot \cos \beta = 0$ , но  $\angle \alpha < 90^\circ$ , так как  $\overline{DB}$  наклонена к плоскости  $ABC$ , поэтому  $\cos \alpha \neq 0$ . Остается принять, что  $\cos \beta = 0$ , т.е.  $\angle \beta = 90^\circ$ .

**Задача 4.** Определить координаты и длину высоты  $\overline{BH}$  треугольника  $ABC$  (рис. 23), если  $\overline{AB}(4, 2, -1)$ ,  $\overline{AC}(2, -2, 0)$ .

Решение.  $\overline{BH} = \overline{BA} + \overline{AH}$ , векторы  $\overline{AH}$  и  $\overline{AC}$  коллинеарны, поэтому существует число  $a \neq 0$  такое, что  $\overline{AH} = a \cdot \overline{AC} = (2a, -2a, 0)$ . Так как  $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ , то  $\overline{BH} \cdot \overline{AC} = 0$ . Запишем последнее равенство в координатах:



$$\overline{BH} = (-4, -2, 1) + (2a, -2a, 0) = (-4 + 2a, -2 - 2a, 1),$$

$$\overline{BH} \cdot \overline{AC} = (4 + 2a, -2 - 2a, 1) \cdot (2, -2, 0) = -8 + 4a + 4 + 4a,$$

$$\text{откуда } 8a - 4 = 0, \text{ т.е. } a = \frac{1}{2}.$$

$$\overline{BH} = \left(-4 + 2 \cdot \frac{1}{2}, -2 - 2 \cdot \frac{1}{2}, 1\right) = (-3, -3, 1);$$

$$|\overline{BH}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{19}.$$

Ответ:  $\overline{BH} = (-3, -3, 1)$ ,  $|\overline{BH}| = \sqrt{19}$ .

**Задача 5.** Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\overline{a} + 3\overline{b}$  и  $3\overline{a} + \overline{b}$ , если  $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 1$ ,  $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \frac{\pi}{6}$ .

Решение. По свойству векторного произведения  $S = |[(\overline{a} + 3\overline{b}), (3\overline{a} + \overline{b})]|$ . Упростим выражение  $[(\overline{a} + 3\overline{b}), (3\overline{a} + \overline{b})] = [\overline{a}, 3\overline{a} + \overline{b}] + 3[\overline{b}, 3\overline{a} + \overline{b}] = 3[\overline{a}, \overline{a}] + [\overline{a}, \overline{b}] + 9[\overline{b}, \overline{a}] + 3[\overline{b}, \overline{b}] = -8[\overline{a}, \overline{b}]$ , (так как  $\overline{a}$  параллелен  $\overline{a}$ ,  $\overline{b}$  параллелен  $\overline{b}$ , то  $[\overline{a}, \overline{a}] = [\overline{b}, \overline{b}] = 0$ ).

$$\text{Таким образом, } S = |-8 \cdot [\overline{a}, \overline{b}]| = 8 \cdot |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 4 \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ:  $S = 4$  кв.ед.

**Задача 6.** Вычислить площадь треугольника  $ABC$ , если  $\overline{AB}(1, 2, 3)$ ,  $\overline{BC}(2, 0, 2)$ .

Решение. По свойству векторного произведения  $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{BC}]|$ .

$$[\overline{AB}, \overline{BC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 4\bar{j} - 4\bar{k},$$

$$|[\overline{AB}, \overline{BC}]| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{3}, \quad S = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ:  $S = 2\sqrt{3}$  кв.ед.

**Задача 7.** Вычислить  $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a})$ .

Решение. Так как  $(\bar{a} - \bar{b}) + (\bar{b} - \bar{c}) + (\bar{c} - \bar{a}) = \bar{0}$ , то векторы  $\bar{a} - \bar{b}$ ,  $\bar{b} - \bar{c}$ ,  $\bar{c} - \bar{a}$  компланарны, поэтому  $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a}) = 0$ .

Ответ:  $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a}) = 0$ .

**Задача 8.** В треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  векторы  $\overline{AB}(0,1,-1)$ ,  $\overline{AC}(2,-1,4)$  определяют основание,  $\overline{AA_1} = (-3,2,2)$ . Найти высоту призмы.

Решение.  $V = \frac{1}{2} S_{\text{осн}} \cdot h$ ,  $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]|$ , так как объем призмы в два раза меньше объема параллелепипеда, построенного на тех же векторах, то  $V = \frac{1}{2} |\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AA_1}|$ . Тогда

$$h = \frac{2 \cdot |\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AA_1}|}{|[\overline{AB}, \overline{AC}]|}, \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AA_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -16 - 1 = -17,$$

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \left( \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (3, -2, -2), \quad h = \frac{2 \cdot |-17|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{34}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17} \text{ (ед.)}.$$

Ответ:  $h = 2\sqrt{17}$  ед.

### Упражнения

- Даны единичные векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ , удовлетворяющие условию  $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$ . Вычислить  $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a}$ .
- Дано, что  $|\bar{a}| = a, |\bar{b}| = b \neq 0$ . Определить, при каком значении  $\lambda$  векторы  $\bar{a} + \lambda\bar{b}$  и  $\bar{a} - \lambda\bar{b}$  будут перпендикулярны.
- Определить, при каком значении  $\lambda$  векторы  $\bar{a} = \lambda\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$  и  $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - \lambda\bar{k}$  взаимно перпендикулярны.
- Какому условию должны удовлетворять векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , чтобы вектор  $\bar{a} + \bar{b}$  делил пополам угол между векторами  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ ?
- Какому условию должны удовлетворять векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , чтобы выполнялись следующие соотношения: 1)  $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$ ; 2)  $|\bar{a} + \bar{b}| > |\bar{a} - \bar{b}|$ ; 3)  $|\bar{a} + \bar{b}| < |\bar{a} - \bar{b}|$ ?
- Даны три вектора  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ , удовлетворяющие условию  $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$ . Зная, что  $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 1, \bar{c} = 4$ , вычислить  $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a}$ .
- Доказать, что угол между диагоналями прямоугольника, построенного на векторах  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , вычисляется по формуле  $|\cos \varphi| = \frac{\bar{a}^2 - \bar{b}^2}{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}$ .
- Векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  взаимно перпендикулярны и имеют равные длины. Доказать, что векторы  $\bar{p} = 3\bar{a} + 5\bar{b}$  и  $\bar{q} = 10\bar{a} - 6\bar{b}$  перпендикулярны.

9. Известно, что угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $30^\circ$ ,  $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 1$ . Вычислить величину угла  $\varphi$  между векторами  $\vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{a} - \vec{b}$ . Дать геометрическую интерпретацию задачи.
10. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны. Найти  $n$ , если в прямоугольной декартовой системе координат векторы равны: а)  $\vec{a}(2, -1, 3)$ ,  $\vec{b}(1, 3, n)$ ; б)  $\vec{a}(n, -2, 1)$ ,  $\vec{b}(n, -n, 1)$ .
11. В тетраэдре  $DABC$ :  $AB=AC=a$ ,  $\angle DAB = \angle DAC = \varphi$ . Найти угол между векторами  $\vec{AD}$  и  $\vec{BC}$ .
12. В пирамиде  $SABC$  углы при вершине  $S$  прямые, а основанием служит равносторонний треугольник  $ABC$ . Точки  $D$  и  $E$  являются серединами ребер  $AD$  и  $SB$  соответственно. Найти угол между векторами  $\vec{SD}$  и  $\vec{EC}$ .
13. Определить вектор, коллинеарный биссектрисе угла  $A$  треугольника  $ABC$ , если  $\vec{AB} = (2, 2, 1)$ ,  $\vec{AC} = (3, 4, 0)$ .
14. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .
15. Найти скалярное произведение векторов  $2\vec{AB} - \vec{AC}$  и  $\vec{AB} + \vec{AC}$ , если  $A(1, -3, 0)$ ,  $B(2, 2, 2)$ ,  $C(-4, 0, 1)$ .
16. Найти вектор  $\vec{a}$ , коллинеарный вектору  $\vec{b}(2, 1, -1)$  и удовлетворяющий условию  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ .
17. Определите стороны и углы треугольника  $ABC$ , если  $A(-1, -2, 4)$ ,  $B(-4, -2, 0)$ ,  $C(3, -2, 1)$ .
18. Найдите длину биссектрисы, проведенной из вершины  $A$  треугольника  $ABC$ , если  $A(3, -5)$ ,  $B(-3, 3)$ ,  $C(-1, -2)$ .
19. Даны вершины треугольника:  $A(7, 2)$ ,  $B(1, 9)$ ,  $C(-8, -1)$ . Найти расстояния от точки пересечения медиан  $M$  до вершин треугольника.
20. Точки  $L(0, 0)$ ,  $M(3, 0)$ ,  $N(0, 4)$  являются серединами сторон треугольника. Найти площадь треугольника.
21. Преобразовать векторное произведение  $[(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}), (\vec{a} - 2\vec{b})]; [(\vec{a} - 3\vec{b}), (2\vec{a} + 3\vec{b})]$ .
22. Вычислить площадь треугольника  $ABC$ , если  $A(4, 2, 3)$ ,  $B(5, 7, 0)$ ,  $C(2, 8, -1)$ .
23. Найти векторное и скалярное произведения векторов  $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ .
24. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам  $\vec{a}(1, 1, 2)$ ,  $\vec{b}(2, 1, 1)$ .
25. Показать, что векторы  $\vec{a}(7, -3, 2)$ ,  $\vec{b}(3, -7, 8)$ ,  $\vec{c}(1, -1, 1)$  компланарны.
26. Найти смешанное произведение векторов  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ .
27. Найти расстояние от точки  $C(3, 2, -2)$  до прямой, проходящей через точки  $A(1, 2, -3)$  и  $B(5, 2, 0)$ .
28. Дана пирамида  $SABC$ :  $A(1, -1, 2)$ ,  $B(5, -6, 2)$ ,  $C(1, 3, -1)$ ,  $S(-1, -2, -3)$ . а) Найти высоту  $BK$  основания  $ABC$ . б) Найти объем пирамиды и ее высоту  $SH$ .
29. Вычислить  $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a})$ , если  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 3$ .
30. Вычислить  $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ , если  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ .
31. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(2, 5, 3)$ ,  $C(6, 2, 3)$ ,  $D(3, 7, 2)$ . Найти высоты пирамиды, опущенную на грань  $BCD$ .

### Контрольная работа №1

3. Треугольник  $ABC$  задан координатами своих вершин. Построить его в прямоугольной декартовой системе координат. Построить векторы  $\vec{AB} + \vec{CB}$  и  $\vec{AC} - \vec{BC}$ . Вычислить длины

сторон и углы треугольника. Найти координаты вектора  $\overline{AO}$ , где  $O$  – точка пересечения медиан треугольника.

- |                                 |                                  |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1) $A(2,2), B(-1,1), C(1,-3);$  | 16) $A(3,1), B(-2,1), C(-1,-3);$ |
| 2) $A(3,1), B(-1,2), C(1,-2);$  | 17) $A(4,1), B(-1,1), C(-1,-4);$ |
| 3) $A(1,2), B(-2,1), C(-1,-3);$ | 18) $A(1,4), B(-2,-1), C(1,-2);$ |
| 4) $A(3,2), B(-1,3), C(0,-4);$  | 19) $A(1,3), B(-3,1), C(1,-3);$  |
| 5) $A(2,2), B(-1,2), C(1,-2);$  | 20) $A(4,1), B(-2,-1), C(1,-2);$ |
| 6) $A(2,2), B(-2,1), C(-1,3);$  | 21) $A(4,1), B(-3,1), C(1,-3);$  |
| 7) $A(2,2), B(-1,3), C(0,-4);$  | 22) $A(1,3), B(-1,1), C(1,-2);$  |
| 8) $A(3,1), B(-1,1), C(1,-3);$  | 23) $A(1,3), B(-3,1), C(1,-3);$  |
| 9) $A(3,1), B(-2,1), C(-1,-3);$ | 24) $A(1,4), B(-1,1), C(-1,-4);$ |
| 10) $A(3,1), B(-1,3), C(0,-4);$ | 25) $A(1,4), B(-3,1), C(1,-3);$  |
| 11) $A(1,2), B(-1,1), C(1,-3);$ | 26) $A(4,1), B(-1,1), C(1,-3);$  |
| 12) $A(1,2), B(-1,2), C(1,-2);$ | 27) $A(1,3), B(-1,2), C(1,-2);$  |
| 13) $A(1,2), B(-1,3), C(0,-4);$ | 28) $A(1,4), B(-2,1), C(-1,-3);$ |
| 14) $A(3,2), B(-1,1), C(1,-3);$ | 29) $A(2,2), B(-2,-1), C(1,-2);$ |
| 15) $A(3,2), B(-1,2), C(1,-2);$ | 30) $A(3,1), B(-3,1), C(1,-3);$  |

4. Найти координаты вектора  $\overline{BH}$ , если  $BH \perp AC$ , вычислить длину  $BH$ .

#### § 4. Прямая на плоскости

**Задача 1.** Задайте ту полуплоскость, в которую попадает точка  $M(1,2)$  относительно прямой  $l: 5x-3y+7=0$ .

Решение. Подставим координаты точки  $M$  в левую часть уравнения прямой  $l$ , получим неравенство  $5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 7 = 5 - 6 + 7 = 6 > 0$ . Этому же неравенству будут удовлетворять все точки рассматриваемой полуплоскости.

Ответ:  $5x-3y+7>0$ .

**Задача 2.** Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок  $b=-3$  и образующий с положительным направлением оси абсцисс угол  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Построить прямую.

Решение. Угловой коэффициент прямой  $k = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ .

Так как прямая отсекает от оси ординат отрезок  $b=-3$ , то она проходит через точку  $B(0,b)$ , т.е.  $B(0,-3)$ . Уравнение прямой имеет вид  $y-(-3)=1(x-0)$ , т.е.  $y=x-3$  или  $x-y-3=0$  – общее уравнение прямой. Для построения достаточно двух точек. Одна точка известна – это точка  $B$ . Пусть ордината другой точки равна нулю, подставляя  $y=0$  в общее уравнение прямой, получим  $x=3$ , т.е. прямая проходит через точку  $A(3,0)$  (рис.24).

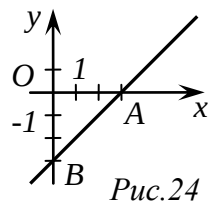


Рис.24

Ответ:  $x-y-3=0$  – общее уравнение прямой.

**Задача 3.** Дан треугольник  $ABC$ :  $A(0,1), B(6,5), C(12,-1)$ .

1) Составить уравнение медианы  $AM$ .

Решение.  $M$  – середина  $BC$ , поэтому координаты точки  $M$   $x_M = \frac{6+12}{2} = 9$ ;  
 $y_M = \frac{5+(-1)}{2} = 2$ . Запишем уравнение прямой  $AM$  как уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x-9}{0-9} = \frac{y-2}{1-2}, \quad \frac{x-9}{-9} = \frac{y-2}{-1},$$

$x-9=9y-18$ ,  $x-9y+9=0$  - общее уравнение  $AM$ .

Ответ:  $x-9y+9=0$ .

2) Составить уравнение высоты  $CH$ .

Решение.  $CH \perp AB$ , поэтому направляющий вектор  $\overline{AB}(6,4)$  прямой  $AB$  является нормальным для прямой  $CH$ . Пусть прямая  $CH$  задана общим уравнением  $ax+by+c=0$ , тогда  $\vec{n}(a,b) \perp CH$ , поэтому  $a=6$ ,  $b=4$ , т.е.  $6x+4y+c=0$ . Так как  $C \in CH$ , то координаты точки  $C$  удовлетворяют уравнению прямой, подставляя координаты точки  $C$  в уравнение прямой  $CH$ , найдем коэффициент  $c$ :  $6 \cdot 12 + 4 \cdot (-1) + c = 0$ ,  $c = -68$ , т.е.  $6x+4y-68=0$  или  $3x+2y-34=0$  - уравнение прямой  $CH$ .

Ответ:  $3x+2y-34=0$ .

**Задача 4.** Составить уравнение катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы  $3x-y+5=0$  и вершину прямого угла  $C(4,-1)$ .

Решение. Углы при основании равнобедренного треугольника  $45^\circ$ , поэтому для угла  $\alpha$  между прямыми  $AB$  и  $AC$ , где  $AC$  задана уравнением  $ax+by+c=0$ , имеем  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3b+a}{3a-b} = 1$ .

Так как точка  $C \in AC$ , то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т.е.  $4a-b+c=0$ .

Имеем систему:  $\begin{cases} 3b+a=3a-b, \\ 4a-b+c=0, \end{cases} \begin{cases} 2b=a, \\ c=-7b, \end{cases}$  т.е.  $2bx+by-7b=0$  или  $2x+y-7=0$  - уравнение прямой  $AC$ .

Так как  $BC \perp AC$ , то  $\vec{n}(2,1) \perp AC$ ,  $\vec{n}$  параллелен  $BC$ . Запишем каноническое уравнение прямой  $BC$ :  $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{1}$ ;  $x-4=2y+2$ ;  $x-2y-6=0$ .

Ответ:  $2x+y-7=0$ ,  $x-2y-6=0$ .

**Задача 5.** Даны стороны  $AB: x+3y-7=0$ ,  $BC: 4x-y-2=0$ ,  $AC: 6x+8y-10=0$  треугольника  $ABC$ . Найти высоту, опущенную из вершины  $B$ .

Решение.  $B = AB \cap BC$ , поэтому ее координаты удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x+3y-7=0, \\ 4x-y-2=0, \end{cases} \begin{cases} x=7-3y, \\ 28-12y-y-2=0, \end{cases} \begin{cases} y=2, \\ x=1, \end{cases} \text{ т.е. } B(1,2), \rho(B,AC) = \frac{|6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Ответ:  $\rho(B,AC)=0,6$ .

### Упражнения

19. Дано общее уравнение прямой  $3x-4y-5=0$ . Написать: а) уравнение с угловым коэффициентом; б) уравнение в отрезках. Построить прямую: а) в аффинной системе координат; б) в прямоугольной системе координат.
20. Прямая проходит через точки  $M_1(3,-1)$ ,  $M_2(2,-3)$ . Написать ее каноническое, параметрическое уравнения, уравнения в отрезках и с угловым коэффициентом, общее уравнение.
21. Определить какие из точек  $A(2,-1)$ ,  $B(3,0)$ ,  $C(0,-5)$ ,  $D(-7,1)$ ,  $E(3,1)$ ,  $F(-12,-8)$  лежат относительно прямой  $l: x+y-4=0$  в той же полуплоскости, что и начало координат.
22. Найти угол, который образует с положительным направлением оси абсцисс прямая  $2x+2y-5=0$ .
23. Найти угол, который образует с положительным направлением оси ординат прямая  $2x-y+3=0$ .
24. Можно ли уравнение прямой  $20x+y=0$  записать в отрезках?
25. Прямая отсекает на осях координат равные отрицательные отрезки. Составить ее уравнение, если площадь треугольника, образованного прямой с осями координат, равна 8 кв. ед.
26. Определить угол между прямыми:
  - а)  $y=-3x+7$  и  $y=2x+1$ ;

- б)  $6y-4x+1=0$  и  $20x-30y+4=0$ ;  
 в)  $3x-5y+7=0$  и  $10x+6y=0$ .
27. Определить расстояние между параллельными прямыми  $3x+y-7=0$  и  $6x+2y-5=0$ .
28. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых  $3x-4y=7=0$  и  $5x+2y+3=0$  и а) параллельную оси ординат; б) перпендикулярную прямой  $x+y=0$ .
29. Даны вершины треугольника  $A(1,-2)$ ,  $B(0,3)$ ,  $C(1,1)$ . Написать уравнения прямых, проходящих через вершины параллельно противоположным сторонам.
30. В треугольнике  $ABC$   $H$  – точка пересечения высот. Составить уравнения сторон треугольника, если  $A(-1,5)$ ,  $B(3,2)$ ,  $H(5,-3)$ .
31. В треугольнике  $ABC$ :  $A(-4,-5)$ ,  $B(4,1)$ ,  $C(-1/2,7)$ . Написать уравнение: а) биссектрисы угла  $A$ ; б) медианы  $AM$ ; в) высоты  $CH$ .
32. Даны смежные вершины  $A(1,-2)$ ,  $B(3,2)$  параллелограмма  $ABCD$  и точка  $P(1,1)$  пересечения его диагоналей. Написать уравнения сторон.
33. Написать уравнение окружности с центром в точке  $Q(6,-3)$ , касающейся прямой  $3x-4y-15=0$ .
34. В треугольнике  $ABC$ :  $AH \perp BC$ ,  $BK \perp AC$ ,  $AB: 2x-3y+6=0$ ,  $AH: 2x+y-2=0$ ,  $BK: x+3y-12=0$ . Написать уравнения сторон  $AC$  и  $BC$ .
35. Найти угол между прямыми  $\sqrt{3}x-3y+6=0$  и  $\sqrt{3}x-y-5=0$ .
36. Даны координаты вершин трапеции  $A(5,-1)$ ,  $B(6,3)$ ,  $C(9,3)$ ,  $D(10,-1)$ . Написать уравнения всех сторон трапеции. Вычислить длину стороны  $AB$ . Найти уравнение средней линии трапеции  $MN$ .

## §5. Плоскость

**Задача 1.** Даны параллельные плоскости  $\alpha: x-y+z+1=0$  и  $\beta: 2x-2y+2z-5=0$ . Описать алгебраически область между ними.

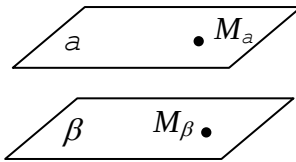


Рис. 31

Решение. Область между плоскостями есть пересечение двух полупространств, образованных этими плоскостями. Относительно плоскости  $\alpha$  выберем то полупространство, которое содержит плоскость  $\beta$ , а значит и любую ее точку. Возьмем некоторую точку  $M_\beta(0,0,2.5) \in \beta$  (рис. 31) (координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости  $\beta$ ) и для вычисления знака неравенства подставим ее координаты в уравнение плоскости  $\alpha$ :  $0-0+2.5+1>0$ ,

поэтому  $x-y+z+1>0$  – первое неравенство системы.

Возьмем некоторую точку  $M_\alpha(0,0,-1) \in \alpha$  (рис. 31) и определим знак второго неравенства  $2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) - 5 < 0$ , поэтому  $2x-2y+2z-5 < 0$  – второе неравенство системы.

Таким образом, область между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  характеризуется системой неравенств

$$\begin{cases} x-y+z+1>0, \\ 2x-2y+2z-5<0. \end{cases}$$

Ответ:  $\begin{cases} x-y+z+1>0, \\ 2x-2y+2z-5<0. \end{cases}$

**Задача 2.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(2,-1,4)$ ,  $B(3,2,-1)$  перпендикулярно плоскости  $\alpha: x+y+2z-3=0$ .

Решение. Так как точки  $A$ ,  $B$  принадлежат плоскости, то вектор  $\overline{AB}(1,3,-5)$  параллелен ей. Вектор  $\vec{n}(1,1,2) \perp \alpha$ , поэтому  $\vec{n}$  параллелен искомой плоскости. Запишем каноническое уравнение плоскости, проходящей через точку  $A$  параллельно векторам  $\overline{AB}$  и  $\vec{n}$ :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2) \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-4) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$11x - 7y - 2z - 21 = 0$  - общее уравнение плоскости.

Ответ:  $11x - 7y - 2z - 21 = 0$ .

**Задача 3.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(5, 4, 3)$  и отсекающей равные отрезки на осях координат.

Решение. Так как плоскость отсекает равные отрезки от осей координат, то ее уравнение имеет вид  $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$ . Так как она проходит через точку  $A$ , то координаты точки  $A$  удовле-

творяют уравнению плоскости, т.е.  $\frac{5}{a} + \frac{4}{a} + \frac{3}{a} = 1$ ,  $a = 12$ . Тогда  $x + y + z = 12$  - общее уравнение плоскости.

Ответ:  $x + y + z - 12 = 0$ .

**Задача 4.** Найти уравнение плоскости, проходящей через точки  $P(0, 2, 0)$  и  $Q(2, 0, 0)$  и образующей угол  $60^\circ$  с плоскостью  $x = 0$ .

Решение. Пусть  $Ax + By + Cz + D = 0$  уравнение искомой плоскости. Так как точки  $P$  и  $Q$  принадлежат ей, то их координаты удовлетворяют этому уравнению:  $2B + D = 0$ ,  $2A + D = 0$ . Так как плоскость образует угол в  $60^\circ$  с плоскостью  $x = 0$ , то

$$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \text{ Имеем систему уравнений}$$

$$\begin{cases} B = -\frac{1}{2}D, \\ A = -\frac{1}{2}D, \\ 2A = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} B = A = -\frac{1}{2}D, \\ -D = \sqrt{\frac{1}{4}D^2 + \frac{1}{4}D^2 + C^2}, \end{cases} \quad D^2 = \frac{1}{2}D^2 + C^2,$$

$$\frac{1}{2}D^2 = C^2.$$

Пусть  $C = 1$ , тогда  $D = -\sqrt{2}$ ,  $A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (так как  $D < 0$  из последнего уравнения системы).

Таким образом, уравнение искомой плоскости имеет вид:  $\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + z - \sqrt{2} = 0$  или

$$x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0.$$

Ответ:  $x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$ .

### Упражнения

11. Составить уравнения плоскости, если она

- 8) задана точкой  $A(1, 2, 3)$  и параллельными ей векторами  $\vec{a}(0, 1, -1)$ ,  $\vec{b}(1, 2, -4)$ ;
- 9) проходит через ось  $Ox$  параллельно вектору  $\vec{p}(1, 2, 3)$ ;
- 10) проходит через ось  $Oy$  и точку  $A(1, 1, 1)$ ;
- 11) проходит через точку  $A(1, 1, 1)$  параллельно плоскости  $Oxy$ ;
- 12) проходит через начало координат перпендикулярно вектору  $\vec{q}(0, -3, 4)$ ;
- 13) проходит через точку  $B(1, 1, -2)$  перпендикулярно плоскостям  $\alpha: 2x + 3z = 0$ ,  $\beta: x - y + z - 1 = 0$ ;
- 14) проходит через точки  $C(1, -1, 3)$ ,  $D(1, 2, 4)$  перпендикулярно плоскости

$$\gamma: 2x - 3y + z + 1 = 0.$$

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n}(A, B, C)$ .
13. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  параллельно плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ .
14. Дана пирамида  $SABC: A(1, -1, 2), B(5, -6, 2), C(1, 3, -1), S(-1, -2, -3)$ . Написать уравнение плоскости  $ABC$ ; плоскости, проходящей через вершину  $C$  параллельно плоскости  $ABS$ ; вычислить угол между этими плоскостями.
15. Составить уравнение касательной плоскости к сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 45$  в точке  $M(2, -3, 6)$ .
16. Записать неравенство, характеризующее то полупространство с границей  $\Pi: x - y + z - 4 = 0$ , в котором находится точка  $A(1, 1, 1)$ .
17. Установить расположение плоскости  $\Pi: 2x - 2y - z + 9 = 0$  относительно сферы:  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$ .
18. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями  $\alpha: x - 3y + 2z + 1 = 0$  и  $\beta: 2x - 6y + 4z + 3 = 0$ .
19. Найти уравнение плоскости, касающейся сферы  $x^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 9$  и параллельной плоскости  $\alpha: 6x + 3y + 2z = 0$ .
20. Какой угол образует с плоскостью  $x + y + 2z - 4 = 0$  вектор  $\vec{a}(1, 2, 1)$ ?

## §6. Прямая в пространстве

**Задача 1.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $K(1, -3, 4)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 3y - z - 1 = 0. \end{cases}$

Решение. Так как прямые параллельны, то направляющий вектор  $\vec{p} = \left( \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-2, 3, 7)$  прямой  $l$  является направляющим вектором искомой прямой, каноническое уравнение которой имеет вид:  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{7}$ .

Ответ:  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{7}$ .

**Задача 2.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(1, 1, 1)$  перпендикулярно плоскости  $\alpha: 2x + 3y + z - 1 = 0$ .

Решение. Так как прямая и плоскость перпендикулярны, то вектор нормали  $\vec{n}(2, 3, 1)$  к плоскости  $\alpha$  является направляющим для искомой прямой, каноническое уравнение которой имеет вид:  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$ .

Ответ:  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$ .

**Задача 3.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $B(1, 5, -1)$  перпендикулярно прямой  $l_1: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}$  и  $l_2: \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -2t. \end{cases}$

Решение. Искомую прямую  $m$  рассмотрим как прямую, проходящую через точку  $B$  перпендикулярно плоскости  $\alpha$  такой, что прямая  $l_1$  параллельна  $\alpha$ , прямая  $l_2$  параллельна  $\alpha$ ,  $B \in \alpha$

. Векторы  $\vec{a}(-1, 3, -1)$  и  $\vec{b}(-3, 1, -2)$  являются направляющими для прямых  $l_1$  и  $l_2$  соответственно, поэтому они параллельны плоскости  $a$ . Каноническое уравнение плоскости  $a$

$$\text{имеет вид } \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad (x-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (y-5) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-5x + y + 8z + 18 = 0.$$

Вектор нормали  $\vec{n}(-5, 1, 8)$  к плоскости  $a$  является направляющим для искомой прямой  $m$ , поэтому ее каноническое уравнение имеет вид  $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{8}$ .

Ответ:  $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{8}$ .

**Задача 4.** Найти угол между прямой  $l: \frac{x}{2} = \frac{y+12}{3} = \frac{z-4}{6}$  и плоскостью  $a: 6x+15y-10z=0$ .

Решение. Направляющим вектором прямой  $l$  является вектор  $\vec{a}(2, 3, 6)$ , поэтому

$$\sin \varphi = \frac{|6 \cdot 2 + 15 \cdot 3 - 10 \cdot 6|}{\sqrt{6^2 + 15^2 + (-10)^2} \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{3}{133}; \quad \varphi = \arcsin \frac{3}{133}.$$

Ответ:  $\varphi = \arcsin \frac{3}{133}$ .

**Задача 5.** Найти точку, симметричную началу координат относительно плоскости  $a: x-2y+4z-21=0$ .

Решение. Пусть  $O'$  - искомая точка, тогда по определению центральной симметрии  $OO' \perp a$ ,  $OO' \cap a = A$ ,  $OA = AO'$  (рис. 32). Напишем уравнение прямой  $OO'$  в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = 0 + 1t, \\ y = 0 - 2t, \\ z = 0 + 4t, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = t, \\ y = -2t, \\ z = 4t. \end{cases}$$

Найдем координаты точки  $A$ , для этого решим систему из уравнений, задающих прямую  $OO'$  и плоскость  $a$ :

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -2t, \\ z = 4t, \\ x - 2y + 4z - 21 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1, \\ x = 1, \\ y = -2, \\ z = 4. \end{cases} \quad A(1, -2, 4).$$

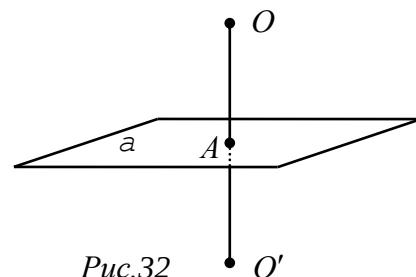


Рис.32

Пусть  $O'(x, y, z)$ . По определению симметрии  $\overline{OA} = \overline{AO'}$ , где  $\overline{OA} = (1, -2, 4)$ ,  $\overline{AO'} = (x-1, y+2, z-4)$ . Запишем последнее равенство в координатах

$$\begin{cases} x-1 = 1, \\ y+2 = -2, \\ z-4 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -4, \\ z = 8. \end{cases} \quad O'(2, -4, 8).$$

Ответ:  $O'(2, -4, 8)$ .

**Задача 6.** Из начала координат опустить перпендикуляр на прямую  $l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}$ .

Решение. Искомый перпендикуляр  $m$  лежит в плоскости  $a$ , проходящей через  $O(0, 0, 0)$  перпендикулярно прямой  $l$  с направляющим вектором  $\vec{a}(2, 3, 1)$ . Тогда  $\vec{a} \perp a$ , поэтому общее

уравнение плоскости  $a$  имеет вид  $2x+3y+z+D=0$ , так как  $O \in a$ , то ее координаты удовлетворяют полученному уравнению:  $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 + D = 0$ , т.е.  $D=0$ , а:  $2x+3y+z=0$ .

Найдем точку пересечения прямой  $l$  и плоскости  $a$ , для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}, \\ 2x+3y+z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=2z-4, \\ y=3z-8, \\ 2x+3y+z=0. \end{cases} \quad A=l \cap a, \quad A\left(\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{16}{7}\right).$$

Запишем уравнение прямой  $m$ , проходящей через точки  $O$  и  $A$ :  $\frac{x-0}{\frac{4}{7}-0} = \frac{y-0}{-\frac{8}{7}-0} = \frac{z-0}{\frac{16}{7}-0}$  или

$$4x = -2y = z.$$

Ответ:  $4x = -2y = z$ .

### Упражнения

13. Составить уравнение прямой, проходящей

4) через точки  $M_1\left(2, -3, \frac{1}{2}\right), M_2\left(3, 5, \frac{3}{2}\right)$ ;

5) через точку  $M(2, 1, -3)$  параллельно вектору  $\vec{p}(1, -3, 1)$ ;

6) через точку  $M(1, -3, 4)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 3y - z - 1 = 0. \end{cases}$

14. Установить взаимное расположение прямых  $l_1: \begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ z - 4 = 0. \end{cases}$  и  $l_2: \begin{cases} x + z - 8 = 0, \\ 2y + 3z - 7 = 0. \end{cases}$

15. Показать, что прямая  $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{1}$  параллельна плоскости  $a: x-2y+5z-6=0$ , а прямая

$$l_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1} \text{ лежит в этой плоскости.}$$

16. Найти точку, симметричную началу координат относительно прямой  $l: \frac{x-10}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4}$ .

17. Через линию пересечения плоскостей  $a: x+y-z+5=0$  и  $\beta: x-y+z+1=0$  провести плоскость, перпендикулярную плоскости  $\gamma: 2x-z+6=0$ .

18. Через линию пересечения плоскостей  $a: 4x-y+3z-1=0$  и  $\beta: x+5y-z+2=0$  провести плоскость 1) проходящую через начало координат; 2) параллельную оси  $Oy$ .

19. Написать параметрическое уравнение прямой, образованной пересечением плоскости  $a: x-3y-z+1=0$  с плоскостью  $Oxy$ .

20. На оси  $Ox$  найти точку, равноудаленную от точки  $A(1, 0, 1)$  и плоскости  $a: x-y+5=0$ .

21. Доказать, что прямые  $l_1: \begin{cases} x=1+2t, \\ y=-t, \\ z=1+t. \end{cases}$  и  $l_2: \begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0. \end{cases}$  параллельны, и написать уравнение плоскости, проходящей через них.

22. Вычислить углы, которые образует с осями координат прямая  $\begin{cases} x-2y-5=0, \\ x-2z+8=0. \end{cases}$

23. Через точку пересечения прямых  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+4}{2}$  и  $\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-1}{3}$  провести плоскость, параллельную плоскости  $xOy$ .

24. Треугольник  $ABC$  образован пересечением плоскости  $x+2y+4z-8=0$  с осями координат. Построить треугольник. Найти уравнения средних линий.

### Контрольная работа №2

Дана треугольная пирамида  $SABC$ . Написать уравнения:

- 1) плоскости  $ABC$ ;
- 2) прямой  $SC$ ;
- 3) плоскости, проходящей через точку  $S$ , параллельно плоскости  $ABC$ ;
- 4) плоскости, проходящей через точку  $A$ , перпендикулярно плоскости  $ABC$ .

Найти высоту пирамиды, опущенную из вершины  $S$  и объем пирамиды.

| № n/n | A        | B        | C        | S        |
|-------|----------|----------|----------|----------|
| 1     | (4,0,2)  | (0,5,1)  | (4,-1,3) | (3,-1,5) |
| 2     | (0,5,1)  | (4,-1,3) | (4,0,2)  | (3,-1,5) |
| 3     | (4,-1,3) | (4,0,2)  | (0,5,1)  | (3,-1,5) |
| 4     | (4,0,2)  | (0,5,1)  | (3,-1,5) | (4,-1,3) |
| 5     | (0,5,1)  | (4,0,2)  | (3,-1,5) | (4,-1,3) |
| 6     | (0,5,1)  | (3,-1,5) | (4,-1,3) | (4,0,2)  |
| 7     | (4,0,2)  | (3,-1,5) | (4,-1,3) | (0,5,1)  |
| 8     | (1,1,1)  | (1,2,0)  | (1,0,5)  | (-2,3,3) |
| 9     | (-2,3,3) | (1,2,0)  | (1,0,5)  | (1,1,1)  |
| 10    | (-2,3,3) | (1,0,5)  | (1,2,0)  | (1,1,1)  |
| 11    | (1,2,0)  | (1,0,5)  | (-2,3,3) | (1,1,1)  |
| 12    | (-2,3,3) | (1,1,1)  | (1,0,5)  | (1,2,0)  |
| 13    | (-2,3,3) | (1,0,5)  | (1,1,1)  | (1,2,0)  |
| 14    | (1,0,5)  | (1,1,1)  | (-2,3,3) | (1,2,0)  |
| 15    | (1,2,0)  | (1,1,1)  | (-2,3,3) | (1,0,5)  |
| 16    | (1,2,0)  | (-2,3,3) | (1,1,1)  | (1,0,5)  |
| 17    | (1,1,1)  | (-2,3,3) | (1,2,0)  | (1,0,5)  |
| 18    | (0,1,2)  | (2,1,2)  | (3,5,2)  | (3,5,4)  |
| 19    | (0,1,2)  | (3,5,2)  | (2,1,2)  | (3,5,4)  |
| 20    | (3,5,2)  | (2,1,2)  | (0,1,2)  | (3,5,4)  |
| 21    | (3,5,4)  | (3,5,2)  | (2,1,2)  | (0,1,2)  |
| 22    | (3,5,4)  | (2,1,2)  | (3,5,2)  | (0,1,2)  |
| 23    | (2,1,2)  | (3,5,2)  | (3,5,4)  | (0,1,2)  |
| 24    | (2,1,2)  | (0,1,2)  | (3,5,4)  | (3,5,2)  |
| 25    | (0,1,2)  | (3,5,4)  | (2,1,2)  | (3,5,6)  |
| 26    | (3,5,4)  | (2,1,2)  | (0,1,2)  | (3,5,2)  |
| 27    | (2,1,-1) | (3,0,2)  | (5,1,1)  | (0,-1,3) |
| 28    | (5,1,1)  | (2,1,-1) | (3,0,2)  | (0,-1,3) |
| 29    | (3,0,2)  | (5,1,1)  | (2,1,-1) | (0,-1,3) |
| 30    | (0,-1,3) | (2,1,1)  | (3,0,2)  | (5,1,1)  |

### §7. Кривые второго порядка

**Задача 1.** Найти координаты центра и радиус окружности  $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$ .

Решение. Выделим в общем уравнении окружности полные квадраты:

$$2(x^2 - 4x + 4) - 8 + 2\left(y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{8} - 4 = 0, \quad 2(x-2)^2 + 2\left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{121}{8}$$

и разделим обе части уравнения на 2:

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{121}{16}.$$

Тогда  $Q\left(2, -\frac{5}{4}\right)$  - центр окружности, а  $r = \frac{11}{4}$  - ее радиус.

Ответ:  $Q\left(2, -\frac{5}{4}\right), r = \frac{11}{4}$ .

**Задача 2.** Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, зная, что его большая ось 10, а расстояние между фокусами 8. Построить эллипс, найти координаты фокусов и эксцентриситет.

Решение. По условию  $2b=10$ ,  $2c=8$ , поэтому  $b=5$ ,  $c=4$ ,  $a^2=b^2-c^2=9$  (рис.26). Тогда каноническое уравнение эллипса  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ , его фокусы  $F_1(0,4)$ ,  $F_2(0,-4)$ , эксцентриситет  $e = \frac{4}{5}$ .

Ответ:  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ,  $F_1(0,4)$ ,  $F_2(0,-4)$ ,  $e = \frac{4}{5}$ .

**Задача 3.** Составить каноническое уравнение эллипса, если он проходит через точки  $M_1(1,3)$ ,  $M_2(4,1)$ .

Решение. Каноническое уравнение эллипса имеет вид  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Так как точки  $M_1$ ,  $M_2$  принадлежат эллипсу, то их координаты удовлетворяют его уравнению. Имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{1^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1, \\ \frac{4^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{a^2} = 1 - \frac{9}{b^2}, \\ 16\left(1 - \frac{9}{b^2}\right) + \frac{1}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{b^2} = \frac{15}{143}, \\ \frac{1}{a^2} = \frac{8}{143}. \end{cases}$$

Ответ:  $\frac{8}{143}x^2 + \frac{15}{143}y^2 = 1$ .

**Задача 4.** Дан эллипс  $9x^2 + 25y^2 = 1$ . Написать уравнение софокусной равнобочной гиперболы.

Решение. Исходя из уравнения эллипса  $a_y^2 = \frac{1}{9}$ ,  $b_y^2 = \frac{1}{25}$ ,  $c_y^2 = a_y^2 - b_y^2 = \frac{2}{75}$ . Для гиперболы  $c_z^2 = \frac{2}{75}$ , так как она равнобочная, то  $a_z = b_z$ ,

поэтому  $c_z^2 = a_z^2 + b_z^2 = 2a_z^2$ ;  $2a_z^2 = \frac{2}{75}$ ,  $a_z^2 = \frac{1}{75}$ .

Так как  $a_y > b_y$ , то фокусы лежат на оси абсцисс, поэтому каноническое уравнение гиперболы имеет вид  $75x^2 - 75y^2 = 1$ .

Ответ:  $75x^2 - 75y^2 = 1$ .

**Задача 5.** Привести к каноническому виду уравнение кривой  $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$ . Определить тип кривой, вычислить основные параметры. Построить кривую.

Решение. В данном уравнении выделим полные квадраты, содержащие переменные,

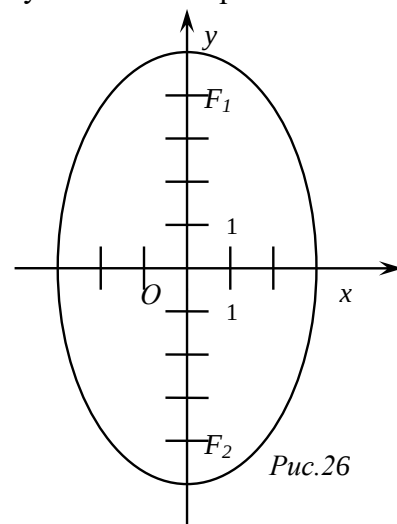


Рис.26

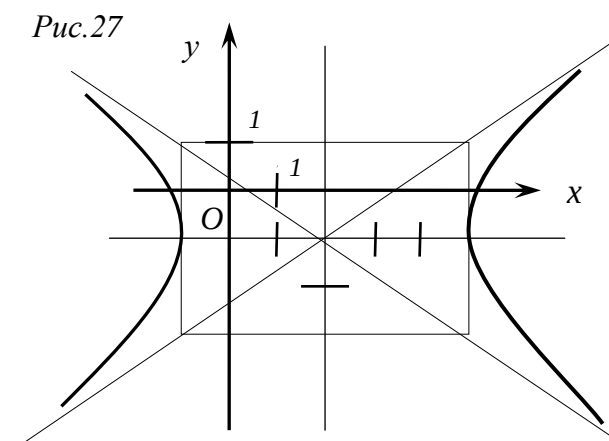


Рис.27

$$4(x^2 - 4x + 4) - 16 - 9(y^2 + 2y + 1) + 9 - 29 = 0,$$

$$4(x-2)^2 - 9(y+1)^2 = 36,$$

и разделим обе части уравнения на 36:

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1, \quad \frac{(x-2)^2}{3^2} - \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1,$$

следовательно, это гипербола. Ее действительная полуось  $a=3$ , мнимая полуось  $b=2$ ,  $c^2=a^2+b^2=25$ ,  $c=5$ . Расстояние между фокусами  $2c=10$ , центр симметрии  $C(2,-1)$ , координаты фокусов  $F_1(-3,-1)$ ,  $F_2(7,-1)$ .

Для построения сместим параллельным переносом оси координат так, чтобы начало координат оказалось в точке  $(2,-1)$  и в новой системе построим гиперболу  $\frac{x_n^2}{3^2} - \frac{y_n^2}{2^2} = 1$  (рис.27).

Ответ:  $\frac{x_n^2}{3^2} - \frac{y_n^2}{2^2} = 1$ .

**Задача 6.** Составить каноническое уравнение параболы, если ее фокус находится в точке пересечения прямой  $4x-3y-4=0$  с осью  $Ox$ .

Решение. Найдем координаты фокуса, для этого решим систему уравнений  $\begin{cases} 4x-3y-4=0, \\ y=0. \end{cases}$  Здесь  $y=0$  - уравнение оси  $Ox$ .  $F(1,0)$  - фокус,  $F \in Ox$ ,  $\frac{p}{2} = 1$ , поэтому каноническое уравнение параболы  $y^2=4x$ .

Ответ:  $y^2=4x$ .

**Задача 7.** Составить уравнение параболы, если даны ее фокус  $F(2,-1)$  и директриса  $d: x-y-1=0$ .

Решение. Пусть  $M(x,y)$  – текущая точка параболы. По определению  $FM = \rho(M,d)$ . Запишем это равенство в координатах  $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \frac{|x-y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$ . Возведем обе части равенства

в квадрат:  $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + 2y - 1 - 2xy + 2x)$  или  $x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x + 2y + 11 = 0$ .

Ответ:  $x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x + 2y + 11 = 0$ .

## § 8. Фокально-директориальное свойство эллипса, гиперболы, параболы.

**Задача 1.** Дана парабола  $y^2 = 6x$ . Составить ее уравнение в согласованной полярной системе координат.

Решение. Так как в общем виде  $y^2 = 2px$ , то  $2p = 6$ ,  $p = 3$ . Кроме того, эксцентриситет параболы  $e = 1$ , поэтому  $\rho = \frac{3}{1 - \cos \varphi}$ .

Ответ: уравнение параболы в полярной системе координат  $\rho = \frac{3}{1 - \cos \varphi}$ .

**Задача 2.** Определить вид линии, заданной в полярной системе координат уравнением  $\rho = \frac{5}{1 - \frac{1}{2} \cos \varphi}$ .

Решение. Вид линии – эллипс, так как  $e = \frac{1}{2} < 1$ .

## Упражнения

15. Определить координаты центра и радиус окружности:  $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 54 = 0$ .
16. Составить уравнение касательных к окружности  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$ , проведенных в точках ее пересечения с осью абсцисс.
17. Составить уравнение общей хорды окружностей  $x^2 + y^2 = 16$  и  $(x-5)^2 + y^2 = 9$ .
18. Найти уравнение окружности, симметричной окружности  $x^2 + y^2 = 4$  относительно прямой  $x - y - 3 = 0$ .
19. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, зная, что а) его полуоси равны 5 и 3; б) его малая ось равна 10, а расстояние между фокусами 4; в) его большая ось 20, эксцентриситет  $3/5$ . Построить эллипс.
20. Найти длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситеты следующих эллипсов:  
а)  $x^2 + 25y^2 = 25$ ; б)  $9x^2 + y^2 = 1$ ; в)  $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ . Построить эллипсы.
21. Составить каноническое уравнение гиперболы, построить ее, найти эксцентриситет, если:  
а)  $a=3$  и гипербола проходит через точку  $A(6, 2\sqrt{3})$ ; б) действительная ось 8, а расстояние между фокусами 10.
22. Дана гипербола  $x^2 - y^2 = 8$ . Найти софокусный эллипс, проходящий через точку  $M(4, 6)$ .
23. Найти полюсы и эксцентриситет гиперболы, построить ее: а)  $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$ ;  
б)  $x^2 - 4y^2 = 16$ ; в)  $25x^2 - 16y^2 = 1$ ; г)  $2x^2 - 3y^2 + 4x + 12y - 16 = 0$ .
24. Составить уравнение гиперболы, сопряженной данной  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ . Построить ее график.  
Найти эксцентриситет.
25. Найти фокальный параметр и фокус параболы. Построить ее: а)  $y^2 = 6x$ ; б)  $x^2 = 10y$ ;  
в)  $y^2 = -4x$ ; г)  $x^2 = -2y$ .
26. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в точке  $(0, 0)$ , зная, что а) она симметрична относительно оси  $Ox$  и проходит через точку  $B(1, -3)$ ; б) она симметрична относительно оси  $Oy$  и проходит через точку  $C(1, 1)$ .
27. Записать уравнения линий второго порядка в согласованной полярной системе координат:  
а)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ; б)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ; в)  $x^2 + y^2 = 121$ ; г)  $y^2 = 6x$ .
28. Найти фокальный радиус точки  $M$  параболы  $y^2 = 20x$ , если  $M(7, y)$ .

## Контрольная работа №3

1. Дан треугольник  $ABC$ . Написать:
  - 4) уравнение прямой  $AB$  (каноническое, через две точки, параметрическое, общее, в отрезках);
  - 5) уравнение медианы  $AM$  и высоты  $BH$ ;
  - 6) уравнение прямой, проходящей через точку  $A$  параллельно  $BC$ .
 Определить угол, который образует прямая  $BC$  с осью  $Ox$ .

| № п/п | A      | B       | C      |
|-------|--------|---------|--------|
| 1     | (1,1)  | (-6,0)  | (-1,2) |
| 2     | (-1,1) | (1,4)   | (0,2)  |
| 3     | (1,-1) | (-5,-2) | (0,3)  |
| 4     | (1,0)  | (-1,-5) | (-2,1) |

|    |         |         |         |
|----|---------|---------|---------|
| 5  | (0,1)   | (4,3)   | (-1,4)  |
| 6  | (-1,0)  | (-2,-4) | (0,3)   |
| 7  | (0,-1)  | (-3,-5) | (6,-2)  |
| 8  | (2,0)   | (0,-6)  | (1,5)   |
| 9  | (1,2)   | (-4,-3) | (2,-6)  |
| 10 | (2,3)   | (-6,-1) | (0,-3)  |
| 11 | (-2,1)  | (2,-1)  | (4,6)   |
| 12 | (4,2)   | (6,0)   | (3,5)   |
| 13 | (1,3)   | (3,4)   | (-5,-3) |
| 14 | (-3,2)  | (4,-1)  | (-2,-4) |
| 15 | (-4,-3) | (-3,0)  | (0,3)   |
| 16 | (1,4)   | (-3,-5) | (2,1)   |
| 17 | (4,6)   | (-4,-1) | (2,-3)  |
| 18 | (2,-3)  | (4,0)   | (0,5)   |
| 19 | (-4,0)  | (-3,-5) | (-2,1)  |
| 20 | (4,-2)  | (-1,4)  | (1,0)   |
| 21 | (-3,-2) | (2,1)   | (4,-5)  |
| 22 | (-6,2)  | (0,4)   | (-5,4)  |
| 23 | (-6,-2) | (1,4)   | (5,4)   |
| 24 | (-1,3)  | (-1,6)  | (0,-5)  |
| 25 | (-4,-2) | (-2,4)  | (-1,-2) |
| 26 | (-2,-2) | (0,5)   | (-4,0)  |
| 27 | (-3,-1) | (5,0)   | (6,-4)  |
| 28 | (2,-6)  | (0,-5)  | (-3,0)  |
| 29 | (4,-5)  | (-3,-6) | (2,-4)  |
| 30 | (-3,-1) | (4,-2)  | (-6,3)  |

2. Дано уравнение линии второго порядка. Определить тип кривой и построить ее график.

| <i>№ п/п</i> | <i>Уравнение второго порядка</i>      |
|--------------|---------------------------------------|
| 1            | $5x^2 + 3y^2 - 10x - 12y + 2 = 0$ ,   |
| 2            | $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0$ ,     |
| 3            | $-x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 4 = 0$ ,     |
| 4            | $4x^2 + 2y^2 - 16x - 4y = 0$ ,        |
| 5            | $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ ,       |
| 6            | $2x^2 + 2y^2 - 8x - 8y + 14 = 0$ ,    |
| 7            | $x^2 - y^2 - 4y = 0$ ,                |
| 8            | $9x^2 + 5y^2 + 18x - 30y + 9 = 0$ ,   |
| 9            | $3x^2 + 3y^2 - 18x - 18y + 51 = 0$ ,  |
| 10           | $4x^2 + 4y^2 - 32x - 32y + 124 = 0$ , |
| 11           | $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ ,           |
| 12           | $4x^2 + 4y^2 - 12x + 4y + 3 = 0$ ,    |
| 13           | $x^2 + 4y^2 - 2x + 56y + 181 = 0$ ,   |
| 14           | $9x^2 - 4y^2 + 24y - 72 = 0$ ,        |
| 15           | $5x^2 + 3y^2 - 50x - 30y + 199 = 0$ , |
| 16           | $2x^2 + 3y^2 - 12x - 6y + 16 = 0$ ,   |
| 17           | $4x^2 + 2y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$ ,    |

|    |                                    |
|----|------------------------------------|
| 18 | $x^2 + 4y^2 - 3x + 4y + 3 = 0,$    |
| 19 | $9x^2 + 5y^2 + 18x - 30y + 9 = 0,$ |
| 20 | $3x^2 + 2y^2 - 24x - 4y + 49 = 0,$ |
| 21 | $2x^2 + y^2 - 8x - 8y + 22 = 0,$   |
| 22 | $7x^2 + 3y^2 - 14x - 6y - 2 = 0,$  |
| 23 | $5x^2 + y^2 - 10x - 2y + 2 = 0,$   |
| 24 | $4x^2 + 3y^2 - 8x - 6y - 3 = 0,$   |
| 25 | $2x^2 + 3y^2 - 8x - 12y + 8 = 0,$  |
| 26 | $8y^2 - 2x^2 - 8x + 16y - 8 = 0,$  |
| 27 | $3x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 9 = 0,$   |
| 28 | $2x^2 + 4y^2 - 8x - 8y + 2 = 0,$   |
| 29 | $3x^2 + y^2 - 18x - 2y + 16 = 0,$  |
| 30 | $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y - 3 = 0.$   |

### §9. Поверхности второго порядка.

**Задача 1.** Написать уравнение сферической поверхности, проходящей через точку  $M(1,5,1)$  и окружность  $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 23 = 0$ , расположенную на плоскости  $xOy$ .

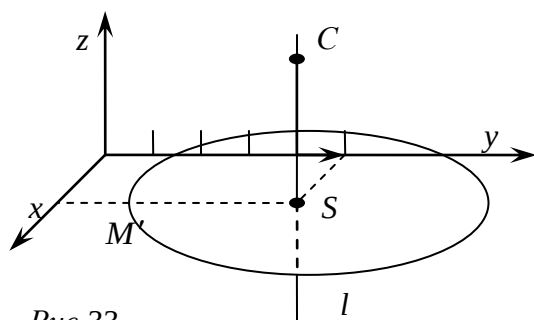


Рис.33

Решение. Пусть  $C(x_c, y_c, z_c)$  - центр сферической поверхности, тогда  $CM = CM' = r$ , где  $M'$  - произвольная точка, лежащая на заданной окружности, а  $r$  - радиус сферы. Найдем какую-нибудь точку, принадлежащую окружности: если  $x = 1$ , то  $y^2 - 10y + 22 = 0$  и  $y = 5 \pm \sqrt{3}$ , например,  $M'(1, 5 + \sqrt{3}, 0)$ . Очевидно, центр сферы лежит на

прямой, перпендикулярной плоскости окружности и проходящей через центр последней (рис. 33). Выделим в уравнении окружности полные квадраты:  $(x-1)^2 + (y-5)^2 - 3 = 0$ , тогда  $S(1,5,0)$  - центр окружности. Так как  $\vec{k}(0,0,1)$  является направляющим вектором прямой  $l$ , то ее уравнение имеет вид  $\begin{cases} x-1=0, \\ z-5=0, \end{cases}$  поэтому точка  $C$  имеет координаты  $(1,5,z_c)$ . Запишем равенство  $CM = CM'$  в координатах

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-1)^2 + (5-5)^2 + (1-z_c)^2} &= \sqrt{(1-1)^2 + (5-5-\sqrt{3})^2 + z_c^2}, \\ \sqrt{(1-z_c)^2} &= \sqrt{3+z_c^2}, \\ 1-2z_c-z_c^2 &= 3+z_c^2, \\ z_c &= -1. \end{aligned}$$

Таким образом,  $C(1,5,-1)$ ,  $r = \sqrt{(1-1)^2 + (5-5)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{2}$ , поэтому  $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 2$  - уравнение сферы.

Ответ:  $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 2$ .

**Задача 2.** Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой  $l: x = y = z$ , а направляющей служит окружность

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

**Решение.** *Цилиндрической* называется поверхность, которая вместе с каждой своей точкой содержит всю прямую, проходящую через эту точку, параллельно некоторой заданной прямой.

Пусть  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  некоторая точка, лежащая на окружности, тогда

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1, \\ x_0 + y_0 + z_0 = 1. \end{cases} \quad (2)$$

По определению каждая точка  $M(x, y, z)$ , лежащая на прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  параллельно прямой  $l$ , принадлежит цилиндрической поверхности. Запишем уравнение этой прямой в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x_0 + t, \\ y = y_0 + t, \\ z = z_0 + t, t \in R \end{cases}$$

Выразим  $x_0, y_0, z_0$  и подставим в систему (2):

$$\begin{cases} (x - t)^2 + (y - t)^2 + (z - t)^2 = 9, \\ x + y + z - 3t = 1. \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения системы  $t$  и подставляя в первое, получим уравнение цилиндрической поверхности

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{3}(x + y + z - 1), \\ x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2 - 2t(x + y + z) &= 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{3}(x + y + z - 1)^2 - \frac{2}{3}(x + y + z - 1)(x + y + z) &= 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz &= 4. \end{aligned}$$

Ответ: уравнение цилиндрической поверхности имеет вид  $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = 4$ .

**Задача 3.** Составить уравнение конической поверхности с вершиной в точке  $A(0, 0, 1)$ , если кривая  $\gamma: \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9, \\ z = 5 \end{cases}$  целиком принадлежит поверхности.

**Решение.** *Конической* называется поверхность, которая вместе с каждой своей точкой содержит прямую, проходящую через эту точку и некоторую заданную точку, называемую *вершиной конуса*. Прямые, целиком принадлежащие конической поверхности, называются ее *образующими*.

Пусть  $M(x', y', 5)$  – текущая точка кривой  $\gamma$  (эта кривая называется *направляющей* конуса). Тогда прямая  $AM$  принадлежит конусу, при этом

$$AM: \begin{cases} x = 0 + t(x' - 0), \\ y = 0 + t(y' - 0), \\ z = 1 + t(5 - 1), \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{t}x, \\ y' = \frac{1}{t}y, \\ t = \frac{1}{4}(z - 1). \end{cases}$$

Так как  $M \in \gamma$ , то ее координаты удовлетворяют уравнению кривой, поэтому

$$\left(\frac{1}{t}x\right)^2 + 4\left(\frac{1}{t}y\right)^2 = 9, \quad x^2 + 4y^2 = 9t^2, \quad t^2 = \frac{x^2 + 4y^2}{9}.$$

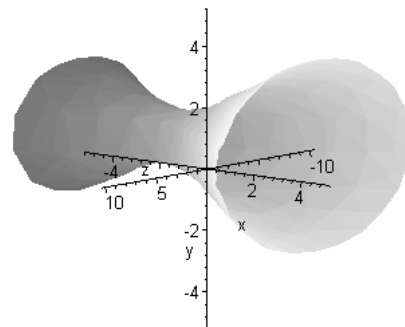
Возведя обе части последнего уравнения системы в квадрат и подставляя выражение для  $t^2$ , получим уравнение конической поверхности:  $\frac{x^2 + 4y^2}{9} = \frac{1}{4}(z-1)^2$ ,  $4x^2 + 16y^2 - 9z^2 + 18z - 9 = 0$ .

Ответ:  $4x^2 + 16y^2 - 9z^2 + 18z - 9 = 0$ .

Для исследования поверхности второго порядка рассмотрим *метод сечений*. Сущность метода заключается в следующем: данную поверхность будем пресекать координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям. По виду линий, получающихся в сечении, будем судить о форме поверхности.

**Задача 4.** Определить тип поверхности  $4x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z - 5 = 0$  и построить ее изображение.

Решение. I-й способ. Выделим полные квадраты, содержащие переменные,



$$\begin{aligned} 4(x^2 - 2x + 1) - 4 - 9(y^2 + 2y + 1) + 9 + 36(z^2 - 2z + 1) - 36 &= 5, \\ 4(x-1)^2 - 9(y+1)^2 + 36(z-1)^2 &= 36, \\ \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} + (z-1)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Из полученного уравнения следует, что рассматриваемая поверхность является однополостным гиперболоидом с центром симметрии в точке  $C(1; -1; 1)$ , эта поверхность не пересекает прямую  $y = -1$ . Таким образом, можно с помощью метода сечений построить поверхность  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$  и перенести начало координат в точку  $C'(-1; 1; 1)$ .

Ответ: данная поверхность  $4x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z - 5 = 0$  является однополостным гиперболоидом.

**Задача 5.** Рассмотрим II-й способ решения задачи 4.

Определим тип поверхности с помощью инвариантов и семиинвариантов: имеем  $a_{11} = 4$

,  $a_{22} = -9$ ,  $a_{33} = 36$ ,  $a_{11} = 4$ ,  $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ ,  $a_{10} = -4$ ,  $a_{20} = -9$ ,  $a_{30} = -36$ ,  $a_{00} = -5$ ,  
поэтому  $S = 4 - 9 + 36 = 31$ ,

$$T = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 36 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 36 \end{vmatrix} = -36 + 4 \cdot 36 - 9 \cdot 36 = 36(4 - 10) = -216,$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{vmatrix} = -1296,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 36 & -36 \\ -4 & -9 & -36 & -5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -9 & 0 & -9 \\ 0 & 36 & -36 \\ -9 & -36 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-9) \left( \begin{vmatrix} 36 & -36 \\ -36 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 36 \\ -9 & -36 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -36(35(-5 - 36) + 9 \cdot 36) = 41472.$$

Так как  $\delta \neq 0$ ,  $\delta \cdot S < 0$  и  $\Delta > 0$ , то поверхность является однополостным гиперболоидом. Для его построения используем метод сечений.

Пусть  $y = h = \text{const}$ , тогда уравнение примет вид  $4x^2 + 36z^2 - 8x - 72z = 9h^2 + 18h + 5$  в плоскости  $y = h$ . Выделим полные квадраты, содержащие переменные,

$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 36(z^2 - 2z + 1) - 36 = 9(h^2 + 2h + 1) - 9 + 5,$$

$$4(x - 1)^2 + 36(z - 1)^2 = 9(h + 1)^2 + 36.$$

$9(h + 1)^2 + 36 > 0$  при любом  $h$ , последнее уравнение задает в плоскости  $y = h$  эллипс

$$\frac{(x - 1)^2}{(9(h + 1)^2 + 36)/4} + \frac{(z - 1)^2}{(9(h + 1)^2 + 36)/36} = 1$$

с центром симметрии  $C(1; -1; 1)$  и полуосями

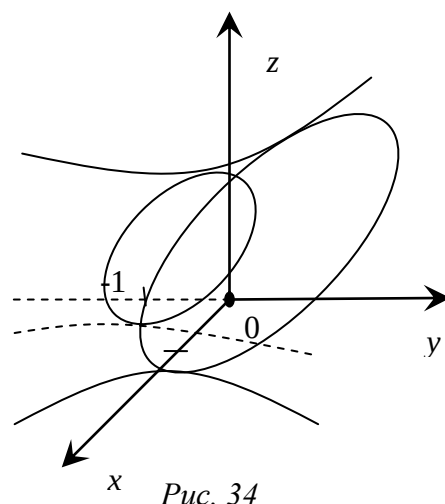
$$a = \frac{\sqrt{(h + 1)^2 + 4}}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{(h + 1)^2 + 4}}{2}.$$

Очевидно, поверхность симметрична относительно плоскости  $y = h = -1$ , поэтому достаточно построить часть поверхности при  $h \geq -1$ , а потом отобразить ее симметрично (рис. 34).

При  $h = -1$  имеем  $\frac{(x - 1)^2}{9} + (z - 1)^2 = 1,$

при  $h = 0$   $\frac{4(x - 1)^2}{45} + \frac{36(z - 1)^2}{45} = 1,$

при  $h = 1$   $\frac{(x - 1)^2}{18} + \frac{(z - 1)^2}{2} = 1.$



### Упражнения

1. Составить уравнение цилиндрической поверхности, если:

- 1) ее ось совпадает с осью  $Oz$ , а направляющей служит линия  $\gamma : \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \\ z = 0 \end{cases};$
- 2) ее ось совпадает с осью  $Oy$ , а направляющей служит линия  $\gamma : \begin{cases} 2x^2 + z^2 - 8x - 2z + 1 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

2. Написать уравнение конической и направляющей

поверхности с вершиной в начале координат

$$1) \gamma: \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1, \\ z = 5 \end{cases}$$

$$2) \gamma: \begin{cases} x^2 + (y-6)^2 + z = 25, \\ y = 3 \end{cases}$$

3. Исследовать методом сечений следующие поверхности:

$$1) 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y + 4z - 3 = 0;$$

$$2) x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1;$$

$$3) x^2 = 4z.$$

5. Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, если поверхность:

$$1) \text{ проходит через точку } (\sqrt{5}; 3; 2) \text{ и пересекает плоскость } XOY \text{ по гиперболе } \frac{x^2}{5} - \frac{z^2}{4} = 1;$$

$$2) \text{ пересекает плоскость } OXZ \text{ по окружности } x^2 + y^2 = 9, \text{ а плоскость } Oxy \text{ по гиперболе } \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{10} = 1.$$

6. Написать уравнение двуполостного гиперболоида в канонической системе координат, если точки  $M_1(3; 1; 2)$ ,  $M_2(6; 2; \sqrt{15})$  и  $M_3(2; \sqrt{\pi}; 3)$  лежат на данной поверхности (рассмотреть 3 возможных случая).

7. Написать уравнение сферы, проходящей через точку  $M(1; 5; 1)$  и окружность  $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 23 = 0$ , расположенную на плоскости  $Oxy$ .

8. Определить вид поверхности и изобразить ее:

$$23. x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 0;$$

$$24. x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 24 = 0;$$

$$25. x^2 - 3y^2 - z^2 = 0;$$

$$26. x^2 = 6z;$$

$$27. 2x^2 - 3y^2 + 6z^2 - 12 = 0;$$

$$28. 3x^2 + 4y^2 - 24z = 0.$$

$$29. x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1;$$

$$30. -9x^2 + y^2 + z^2 + 36z^2 = 0;$$

$$31. x^2 = 4z;$$

$$32. -36x^2 - 9y^2 + 4z - 36 = 0;$$

$$33. 9x^2 - 4y^2 - 36 = 0;$$

$$34. 3x^2 - 6y^2 + 4z^2 = 0;$$

$$35. x^2 - 9y^2 - 36 = 0;$$

$$36. -x^2 - 4y^2 + 12z^2 = 0$$

$$37. y^2 - z^2 = 0;$$

$$38. 4x^2 - 9y^2 - 36z^2 - 36 = 0;$$

$$39. x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10 = 0;$$

$$40. 36x^2 + 36y^2 + 36z^2 + 24y - 36x - 72z = 95;$$

$$41. 4x^2 + 2y^2 + 12z^2 - 4xy + 8yz + 12zx + 14x - 10y + 7 = 0;$$

$$42. 5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy - 6zx + 12x - 36z = 0;$$

$$43. x^2 - 2y^2 + z^2 + 6yz - 4zx - 8x + 10y = 0;$$

$$44. x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y - 9 = 0.$$

17. Написать уравнение сферы:

$$a) \text{ проходящей через точку } A(1, 4, -7) \text{ и касающейся плоскости } 6x + 6y - 7z + 42 = 0;$$

$$b) \text{ проходящей через точку } B(6, -8, 3) \text{ и касающейся оси } Oz;$$

$$c) \text{ описанной около тетраэдра, одна из вершин которого совпадает с началом координат, а другие находятся в точках } A(2, 0, 0), B(0, 5, 0), C(0, 0, 3).$$

18. Какому соотношению должны удовлетворять коэффициенты плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  для того, чтобы она касалась сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ?

19. Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая задана системой уравнений  $\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 9, \\ z = 4. \end{cases}$

20. Направляющая конуса задана уравнениями  $\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 - z = 0, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$  Составить уравнение конуса, если его вершина находится в точке  $(-3, 0, 0)$ .

21. Даны три параллельные прямые:  $x = y = z$ ,  $x + 1 = y = z - 1$ ,  $x - 1 = y + 1 = z - 2$ . Найти проходящий через них круговой цилиндр.

22. Прямая  $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$  вращается около оси  $Oz$ . Найти уравнение описанной ею поверхности.

23. Найти угол между образующей и осью (вращения) конуса:  $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{3} = 0$ .

24. При каком значении параметра  $a$  поверхность, заданная уравнением  $x^2 + 3y^2 + 2ayz + 2zx - 2x - 8y - 2z - 3 = 0$ , является конусом?

[illegible]

1 Гусак, А. А.  
Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи  
Электронный ресурс : Учебное пособие / А. А. Гусак. - Минск : ТетраСистемс, 2011. - 265 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-985-536-229-7, экземпляров неограничено

Шерсто  
гебра. М  
пособие  
и систем  
с. - Кни

- 1 Методические указания для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Аналитическая геометрия» (электронный вариант)
- 2 Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Аналитическая геометрия» (электронный вариант)