

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методические указания по выполнению практических работ

Направление подготовки 03.03.02 Физика
Направленность (профиль)
«Медицинская физика»

**Ставрополь
2026**

Практическое занятие 1.

Физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных.

Дифференциальные характеристики скалярных и векторных полей в криволинейных координатах.

Цель: Провести анализ постановки начально-краевых задач математической физики. Изучить основные криволинейные координатные системы и методы вычисления в них дифференциальных характеристик скалярных и векторных полей, включая использование с этой целью систем средства компьютерной алгебры.

Формы работы:

- Самостоятельное изучение теоретико-методического введения и рекомендуемой литературы.
- Выполнение коллективных и индивидуальных заданий.

Формируемые компетенции:

В результате освоения материала по теме семинара у студента должны быть сформированы следующие умения и знания:

1. Понятие скалярного и векторного поля.
2. Дифференциальные характеристики скалярных и векторных полей.
3. Понятие оператора набла, его свойства и область применения.
4. Понятие двойного действия дифференциальных операторов (или оператора набла) на скалярные и векторные поля.
5. Понятие криволинейных координат. Примеры.
6. Запись дифференциальных операций первого и второго порядка в криволинейных координатах. Решение примеров.

Приобретаемые знания направлены на формирование следующих компетенций:

- способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей (ОПК 2).

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

Скалярные и векторные поля

Скалярным полем называется область пространства, каждой точке которой соответствует определенное значение скалярной величины φ . Примерами скалярных полей являются поле температуры $T(x_1, x_2, x_3)$, электрического потенциала $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, распределения плотности $\rho(x_1, x_2, x_3)$ газа, поле давления $p(x_1, x_2, x_3)$ в жидкости и т.д. Здесь x_1 , x_2 и x_3 – координаты точки в пространстве (в общем случае криволинейные и неортогональные).

В фиксированной декартовой системе координат $Oxyz$ задание скалярного поля равносильно заданию скалярной функции

$$u = u(x, y, z). \quad (1.1)$$

Дифференциальные характеристики скалярного поля

Градиентом скалярного поля $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ в некоторой точке M называется вектор, направленный вдоль внешней нормали к поверхности уровня, проходящей через M и численно равный производной от функции φ по этому направлению. Направление градиента, как следует из (1.5), является направлением быстрого возрастания скалярной величины.

Для практических расчетов выражение (1.6) неудобно. Поэтому используют другое выражение, которое в декартовых координатах имеет вид:

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.8)$$

Итак, основной дифференциальной характеристикой скалярного поля является векторное поле градиента.

Градиент скалярного поля обладает следующими свойствами:

1) производная скалярного поля (1.1) по направлению n равна проекции его градиента на это направление:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \text{pr}_n \text{grad} u(M);$$

2) градиент скалярного поля (1.1) есть вектор, в направление которого скорость изменения поля наибольшая, причём длина его

$$|\text{grad} u| = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right)^{1/2}$$

равна величине этой наибольшей скорости;

3) в каждой точке M поля (1.1) градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку;

4) $\text{grad} c = 0$, где c – постоянная;

5) $\text{grad}(c_1 u + c_2 v) = c_1 \text{grad} u + c_2 \text{grad} v$, где c_1 и c_2 – постоянные;

6) $\text{grad}(uv) = v \text{grad} u + u \text{grad} v$;

7) $\text{grad}(u/v) = (v \text{grad} u - u \text{grad} v) / v^2$;

8) $\text{grad} f(u) = f'(u) \text{grad} u$, где $u(x, y, z)$ – скалярная функция.

Примеры

1. Найти область определения и описать поверхности уровня скалярного поля $u(M) = z/(x^2 + y^2)$. Выделить поверхность уровня, проходящую через точку $M_0(1;1;1)$.

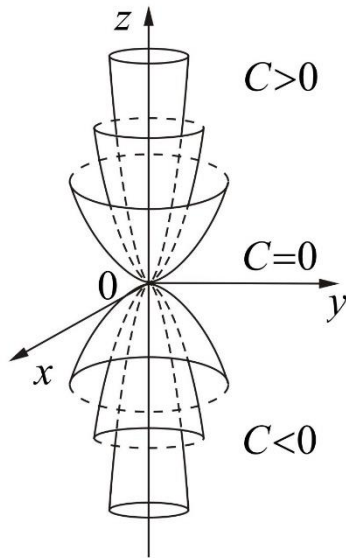


Рис. 1.3

◇ Данное поле определено во всём пространстве, кроме точек, лежащих на оси Oz . Семейство поверхностей уровня определяется уравнением $z/(x^2 + y^2) = C$ или $z = C(x^2 + y^2)$. А это семейство параболоидов вращения вокруг оси Oz с вершиной в начале координат. При $C > 0$ параболоиды направлены в положительную сторону оси Oz , при $C < 0$ – в отрицательную сторону этой оси, при $C = 0$ имеем плоскость $z = 0$ (рис. 1.3).

Поверхность уровня, проходящая через точку $M_0(1;1;1)$, задаётся уравнением $z = (x^2 + y^2)/2$.

Действительно, $z/(x^2 + y^2) = 1/(1+1) = 1/2$.

2. Найти производную скалярного поля $u(M) = xy^2 - 3x^2y + 2xy + 2$ в точке A по направлению вектора $\overline{AB}$, если $A(2;1)$, $B(4;7)$.

◇ Найдём координаты вектора $\overline{AB}$. Имеем $a_x = 2$, $a_y = 6$, тогда $\cos \alpha = 2/(4 + 36)^{1/2} = 1/\sqrt{10}$, $\cos \beta = 3/\sqrt{10}$.

Вычисляя частные производные функции $u(M)$ в точке A , получаем:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_A = (y^2 - 6xy + 2y)|_A = -9;$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_A = (2xy - 3x^2 + 2x)|_A = -4,$$

Следовательно, по формуле (1.7) имеем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_A = -9 \frac{1}{\sqrt{10}} - 4 \frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{21}{\sqrt{10}}.$$

3. Найти градиент скалярного поля $u(M) = x^3 + 3y^2 + 2z^2 - 4x + 3y - 4$ в произвольной точке $M(x; y; z)$.

◇ Найдём частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 4; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6y + 3; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 4z.$$

Тогда по формуле (1.8) будем иметь

$$\operatorname{grad} u(M) = (3x^2 - 4)\vec{i} + 3(2y + 1)\vec{j} + 4z\vec{k}.$$

4. По какому направлению в точке $M_0(-3; -1; 2)$ скалярное поле $u(M) = xy + xz + yz$ изменяется быстрее всего? Какова максимальная скорость этого изменения?

◇ Пользуясь формулой (1.8), вычисляем градиент скалярного поля в точке $M_0(-3; -1; 2)$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = (y + z)|_{M_0} = 1; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = (x + z)|_{M_0} = -1; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = (x + y)|_{M_0} = -4.$$

Таким образом, $\operatorname{grad} u(-3; -1; 2) = \vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$. Этим вектором определено направление максимального изменения поля в точке M_0 . Наибольшая же скорость изменения

$$\max \frac{\partial u}{\partial n} = |\operatorname{grad} u(M_0)| = (1 + 1 + 16)^{1/2} = 3\sqrt{2}.$$

5. Найти градиент скалярного поля $(\vec{c}, \vec{r})$, где $\vec{c}$ – постоянный вектор, а $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $M(x; y; z)$.

◇ Пусть $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$. Кроме того, нам известно, что $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Тогда $(\vec{c}, \vec{r}) = c_1x + c_2y + c_3z$, значит, согласно свойству 5, будем иметь

$$\operatorname{grad}(\vec{c}, \vec{r}) = c_1 \operatorname{grad} x + c_2 \operatorname{grad} y + c_3 \operatorname{grad} z = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k} = \vec{c}.$$

6. Найти $\operatorname{grad} f(r)$, где $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

◇ По свойству 8 имеем $\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \operatorname{grad} r$. Но

$$\operatorname{grad} r = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \vec{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \vec{j} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \vec{k} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Следовательно, $\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \vec{r}/r$.

7. Найти градиент потенциала электростатического поля $u = q/r$, где q – заряд, помещённый в начале координат; $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ – расстояние от заряда до точки, в которой рассматривается потенциал.

◇ Найдём частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{q}{r^2} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = -\frac{qx}{r^3}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{qy}{r^3}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{qz}{r^3}.$$

С помощью формулы (1.8) находим

$$\text{grad } u = -\frac{q}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = -\frac{q\vec{r}}{r^3}.$$

Следовательно, градиент потенциала электростатического поля равен напряжённости поля.

Задания для самостоятельного решения

1.1. Найти поверхности уровня скалярного поля:

а) $u(M) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y$;

б) $u(M) = (x^2 - y^2)/z$.

1.2. Найти поверхности уровня потенциала электростатического поля $u(M) = q/r$, где $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

1.3. Найти производную плоского скалярного поля $u(M) = x^2 - y^2 + 2x + 3y$ в точке $M(1;1)$ по направлению, идущему из начала координат в точку $N(2;-3)$.

1.4. Найти производную скалярного поля $u(M) = x^2y + 2yz - 3z^2$ в точке $M(1;1;-1)$ по направлению вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

1.5. Найти градиент скалярного поля:

а) $u(M) = 2x^2y - 3y^2 + z^2 - 2xyz$ в точке $M(1;1;-1)$;

б) $u(M) = 1/r^3$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, в произвольной точке, не лежащей в начале координат.

1.6. Температурное поле задано функцией $T(M) = xy^2 - 2xyz + yz - 1$. В каком направлении больше всего происходит возрастание температуры в точке $M_0(1;-1;2)$?

1.7. Найти градиент скалярного поля $u(M) = (\vec{c}, \vec{a}(r))$, где $\vec{c}$ – постоянный вектор; $\vec{a}(r) = A(r)\vec{i} + B(r)\vec{j} + C(r)\vec{k}$; r – модуль радиуса-вектора $M(x; y; z)$.

1.8. В каких точках плоскости Oxy градиент скалярного поля $u(M) = 2x^2 - 3y^2 - xy$:

а) перпендикулярен к оси Ox ;

б) параллелен оси Ox ?

Дифференциальные и интегральные характеристики векторного поля.

Дивергенция в декартовых координатах имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (1.14)$$

Она обладает следующими свойствами:

- 1) $\operatorname{div} \vec{c} = 0$, где c – постоянный вектор;
- 2) $\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}$;
- 3) $\operatorname{div}(u\vec{a}) = u\operatorname{div} \vec{a} + (\operatorname{grad} u, \vec{a})$, где $u = u(x, y, z)$ – скалярная функция.

Векторное поле

$$\vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}, \quad (1.15)$$

(1.15), для которого $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ в области V , называется *соленоидальным* в этой области.

Векторное поле (1.15) называется *потенциальным* в области V , если оно может служить градиентом некоторого скалярного поля u во всей этой области, т.е. если $\vec{a} = \operatorname{grad} u$. Само скалярное поле $u(M)$ называется при этом *потенциалом векторного поля* (1.15).

Теорема. Для того, чтобы векторное поле (1.15), заданное в односвязной области V , было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы во всей этой области выполнялись равенства:

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Потенциал векторного поля (1.15) вычисляется по формуле

$$u(x, y, z) = \int_{A_0 B} a_x dx + a_y dy + a_z dz, \quad (1.20)$$

где $A_0(x_0; y_0; z_0)$, $B(x; y; z)$ – соответственно фиксированная и произвольная точки области V .

Интегрируя (1.19) по поверхности S , легко получить следующее равенство

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{a} \, d\vec{s}, \quad (1.21)$$

называемого теоремой Стокса.

Соотношение (1.19) достаточно неудобно для непосредственного вычисления ротора векторного поля $\vec{a}$. Поэтому в практических расчетах используют другое выражение, имеющее в декартовых координатах вид

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right). \quad (1.22)$$

Ротор векторного поля обладает следующими свойствами:

- 1) $\operatorname{rot} \vec{c} = 0$, где $\vec{c}$ – постоянный вектор;
- 2) $\operatorname{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{b}$;
- 3) $\operatorname{rot}(u\vec{a}) = u \operatorname{rot} \vec{a} + [\operatorname{grad} u, \vec{a}]$, где $u = u(x, y, z)$ – скалярная функция.

Примеры

1. Вычислить дивергенцию радиуса-вектора $\vec{r}$ точки $M(x; y; z)$.

◇ Так как $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то по формуле (1.14) получаем

$$\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

2. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{a}(M) = r^4 \vec{c}$, где r – модуль радиуса-вектора точки $M(x; y; z)$; $\vec{c}$ – постоянный вектор.

◇ Применив свойство 3, получим $\operatorname{div} \vec{a}(M) = r^4 \operatorname{div} \vec{c} + (\operatorname{grad} r^4, \vec{c}) = (\operatorname{grad} r^4, \vec{c})$, так как $\operatorname{div} \vec{c} = 0$. По определению $r^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$, следовательно,

$$\operatorname{grad} r^4 = 4r^3 \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \vec{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \vec{j} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \vec{k} \right) = 4r^2 \vec{r}.$$

А это означает, что $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 4r^2 (\vec{r}, \vec{c})$.

3. Вычислить дивергенцию вектора напряжённости $\vec{E} = (q/r^2) \vec{r}_0$ электростатического поля, образованного зарядом q , помещённым в начале координат.

◇ Так как $\vec{r}_0$ – единичный вектор, то $\vec{r}_0 = \vec{r}/r = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})/r$, а тогда $\vec{E} = q(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})/r^3$. Вычислим частную производную:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{qx}{r^3} \right) = \frac{q}{r^6} \left(r^3 - 3xr^2 \frac{\partial r}{\partial x} \right).$$

Но $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, следовательно, $2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x$, откуда $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$. Значит,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{qx}{r^3} \right) = \frac{q}{r^5} (r^2 - 3x^2).$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{qy}{r^3} \right) = \frac{q}{r^5} (r^2 - 3y^2); \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{qz}{r^3} \right) = \frac{q}{r^5} (r^2 - 3z^2).$$

А тогда $\operatorname{div} E = \frac{q}{r^5} (3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)) = 0$. Поле соленоидально.

4. Найти ротор радиуса-вектора точки $M(x; y; z)$.

◇ Применив формулу (1.16), получим

$$\operatorname{rot} \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

Поле потенциально.

5. Найти ротор векторного поля

$$a(M) = xyz(\vec{x}\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).$$

◇ Применив свойство 3, получим $\operatorname{rot} \vec{a} = xyz \operatorname{rot} \vec{r} + [\operatorname{grad} xyz, \vec{r}] = [\operatorname{grad} xyz, \vec{r}]$, ибо $\operatorname{rot} \vec{r} = 0$. Но $\operatorname{grad} xyz = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$. Следовательно,

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ yz & xz & xy \\ x & y & z \end{vmatrix} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}.$$

6. Тело вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω в данный момент времени t . Найти ротор поля линейных скоростей v точек тела в этот момент.

◇ Если ось вращения принять за ось Oz и отложить вектор $\vec{\omega}$, численно равный угловой скорости ω , то, как известно из физики, скорость произвольной точки тела вычисляется по формуле:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}.$$

Следовательно, согласно формуле (1.16),

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

7. Доказать, что поле

$$a(M) = (x^2 - 2yz)\vec{i} + (y^2 - 2xz)\vec{j} + (z^2 - 2xy)\vec{k}$$

потенциально, и найти его потенциал.

◇ Вычисляя частные производные, будем иметь:

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = -2x; \quad \frac{\partial a_y}{\partial z} = -2x; \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = -2y;$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial x} = -2y; \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = -2z; \quad \frac{\partial a_x}{\partial y} = -2z.$$

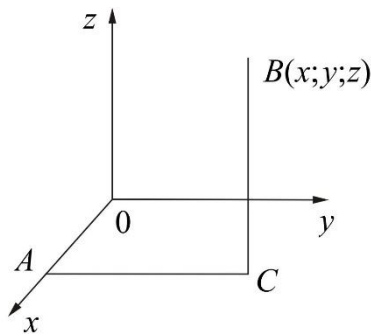


Рис. 1.6

Значит, поле потенциально во всём трёхмерном пространстве.

Для вычисления потенциала применим формулу (1.20). В качестве A_0 возьмём точку $O(0;0;0)$, а контуром интегрирования будем считать ломаную $OACB$, соединяющую точки O и B , звенья которой параллельны координатным осям (рис. 1.6). Тогда

$$u(x, y, z) = \int (x^2 - 2yz) dx$$

В общем случае, если считать A_0 произвольной точкой поля,

$$u(x, y, z) = (x^3 + y^3 + z^3)/3 - 2xyz + C.$$

Задания для самостоятельного решения.

1.9. Вычислить дивергенцию векторного поля:

а) $\vec{a}(M) = (3x^2y + xz^2)\vec{i} + (y^2z - x^2y)\vec{j} + (xz^2 + y^2z)\vec{k}$;

б) $\vec{a}(M) = \vec{b}(\vec{r}, \vec{c})$, где $\vec{b}$, $\vec{c}$ – постоянные векторы; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $M(x; y; z)$.

1.10. Вычислить дивергенцию поля $\vec{a}(M) = r^2\vec{c}$, где $\vec{c}$ – постоянный вектор; r – модуль радиуса-вектора $\vec{r}$.

1.11. Выяснить, является ли соленоидальным векторное поле:

а) $\vec{a}(M) = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 + z^2)\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}$;

б) $\vec{a}(M) = (2x^2y + z^2)\vec{i} - (x^2 + y^2z)\vec{j} + (x^2z^2 - 2xy + z)\vec{k}$.

1.12. Доказать соленоидальность напряжённости магнитного поля $H(x, y) = 2I \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$, где I – сила тока.

1.13. Найти ротор векторного поля

а) $\vec{a}(M) = (x^2 - y^2)\vec{i} + (y^2 - z^2)\vec{j} + (z^2 - x^2)\vec{k}$;

б) $\vec{a}(M) = (x^2y + yz)(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$

1.14. Найти ротор векторного поля $\vec{a}(M) = \cos(x - y + 2z)(3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$ в точке $A\left(\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$.

1.15. Найти ротор векторного поля $\vec{a}(M) = \frac{\vec{r}}{r^2}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $M(x; y; z)$.

1.16. Доказать потенциальность данного поля и вычислить его потенциал:

а) $\vec{a}(M) = yz(2x + y + z)\vec{i} + xz(x + 2y + z)\vec{j} + xy(x + y + 2z)\vec{k}$;

б) $\vec{a}(M) = yz \cos(xy)\vec{i} + xz \cos(xy)\vec{j} + \sin(xy)\vec{k}$

1.17. Доказать потенциальность напряжённости магнитного поля $H(x, y) = \left(\frac{2I}{r^2} \right) (-y\vec{i} + x\vec{j})$, где I – сила тока, и вычислить его потенциал.

Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа.

Пусть даны скалярное и векторное поля $u = u(M)$, $\vec{a} = \vec{a}(M)$.

Дифференциальными операциями второго порядка являются следующие попарные комбинации дифференциальных операций первого порядка:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} u &= (\nabla, \nabla u); & \operatorname{rot} \operatorname{grad} u &= [\nabla, \nabla u] \equiv 0; \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} &= \nabla(\nabla, \vec{a}); & \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} &= (\nabla, [\nabla, \vec{a}]) \equiv 0; \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} &= [\nabla, [\nabla, \vec{a}]]. \end{aligned}$$

Операцию перехода от скалярного поля u к $\operatorname{div} \operatorname{grad} u$ часто обозначают символом Δ и называют *оператором Лапласа*. Значит, $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$.

В декартовой системе координат

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Оператор Лапласа можно рассматривать как скалярный квадрат оператора Гамильтона: $\Delta = (\nabla, \nabla)$.

Если $\vec{a}(M) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, то под $\Delta \vec{a}$ понимают вектор $\Delta a_x \vec{i} + \Delta a_y \vec{j} + \Delta a_z \vec{k}$.

Справедливо равенство

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}, \quad (1.44)$$

которое широко используется в физике.

Скалярное поле $u(M)$ или векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *гармоническим*, если соответственно $\Delta u = 0$ или $\Delta \vec{a} = 0$.

Примеры

1. Доказать, что $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u \equiv 0$.
- ◇ Проведём доказательство путём непосредственных вычислений. Имеем

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k},$$

тогда

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \equiv 0.$$

Применим оператор Гамильтона

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla u].$$

Здесь мы имеем символическое векторное произведение двух векторов, различающихся только скалярным множителем u . По правилам векторной алгебры оно равно нулю при любом u . Значит, $[\nabla, \nabla u] \equiv 0$.

2. Вычислить $\operatorname{div} \operatorname{grad} f(r)$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

◇ Находим $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$. Вычисляем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \times \\ &\times \left((x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{1}{r}.$$

3. Вычислить $\Delta r^2 \vec{r}$.

◇ Используя формулу (1.44), получаем

$$\Delta r^2 \vec{r} = \operatorname{grad} \operatorname{div} r^2 \vec{r} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} r^2 \vec{r}.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} r^2 \vec{r} &= \operatorname{div} (x^2 + y^2 + z^2) (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 5r^2; \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} r^2 \vec{r} &= 10(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}); \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} r^2 \vec{r} = r^2 \operatorname{rot} \vec{r} + [\operatorname{grad} r^2, \vec{r}] = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} r^2 \vec{r} = 0$. Тогда

$$\Delta r^2 \vec{r} = 10(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 10\vec{r}.$$

4. Является ли гармоническим поле $u(M) = \frac{k}{r}$, где k – постоянная;

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}?$$

◇ Вычислив частные производные, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{kx}{r^3}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kx}{r^3} \right) = k \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \right).$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} \right); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} \right).$$

$$\text{Значит, } \Delta u = k \left(-\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right) = k \left(-\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} \right) = 0. \text{ Поле гармоническое.}$$

(Заметим, что это важный пример гармонического поля. Действительно, функция $u = \frac{k}{r}$ представляет собой потенциал поля тяготения, создаваемого точечной массой, помещённой в начале координат).

5. Из уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1.45)$$

где $\vec{E}$ – напряжённость электрического поля; c – постоянная; t – время; $\vec{H}$ – напряжённость магнитного поля, исключить вектор $\vec{E}$ электрического поля, учитывая соленоидальность магнитного поля.

◇ Применив ко второму уравнению Максвелла операцию rot , будем иметь

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Преобразуем левую часть полученного равенства с помощью формулы (1.44), а правую часть – с учётом перестановочности $\operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}$. Будем иметь

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \Delta \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Так как магнитное поле является соленоидальным, то $\operatorname{div} \vec{H} = 0$, а тогда $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} = 0$. Следовательно

$$-\Delta \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E}. \quad (1.46)$$

Подставив значение $\text{rot } \vec{E}$ из первого уравнения Максвелла в правую часть равенства (1.46), найдём:

$$-\Delta \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{H}.$$

Задания для самостоятельного решения

1.19. Доказать, что $\text{div rot } \vec{a} \equiv 0$.

1.20. Вычислить Δu , если $u = \frac{1}{r^2}$, где $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

1.21. Вычислить $\Delta \vec{a}$, если $\vec{a}(M) = 3z(x^2 + y^2)\vec{i} - 2y(x^2 + z^2)\vec{j} + 4x(y^2 + z^2)\vec{k}$.

1.22. Выяснить, является ли гармоническим поле:

а) $u(M) = x^2 + y^2 - 2z^2 - 2xyz$;

б) $\vec{a}(M) = \vec{r}/r^3$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $M(x; y; z)$.

1.23. Из уравнений Максвелла (1.45) исключить вектор $\vec{H}$ магнитного поля, учитывая соленоидальность электрического поля.

1.4 Криволинейные системы координат

В большинстве случаев симметрия физической системы такова, что использование декартовых координат при ее математическом описании существенно затрудняет анализ. В связи с этим возникает необходимость использования криволинейных координат.

Дифференциальные операции в криволинейных координатах

Рассмотрим скалярное поле $\varphi(x, y, z)$. Градиент скалярного поля в общем случае имеет вид

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial s_3} \vec{e}_3. \quad (1.57)$$

Здесь $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ – единичные векторы криволинейной системы координат (q_1, q_2, q_3) .

Выражение (1.57) доказывается на основе понятия производной по направлению также, как и аналогичное соотношение (1.8) в декартовой системе координат.

Окончательно выражение градиента скалярного поля в криволинейных координатах имеет вид

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \vec{e}_3. \quad (1.58)$$

Выражение (1.58) сразу позволяет записать вид оператора набла в криволинейных координатах:

$$\nabla = \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \vec{e}_3. \quad (1.59)$$

Рассмотрим теперь некоторое векторное поле $\vec{a}(x, y, z)$. Вычислим его дивергенцию в криволинейной системе координат.

Используя определение дивергенции (1.13) и соотношение (1.56) для объема dv , имеем

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (H_2 H_3 a_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (H_1 H_3 a_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (H_1 H_2 a_3)}{\partial q_3} \right]. \quad (1.61)$$

Соотношение (1.61) является выражением дивергенции в криволинейных ортогональных координатах.

Ротор векторного поля в криволинейной системе координат определяется из соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} = & \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_3} \right] \cdot \vec{e}_1 + \frac{1}{H_1 H_3} \left[\frac{\partial (a_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_1} \right] \cdot \vec{e}_2 + \\ & + \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (a_1 H_1)}{\partial q_2} \right] \cdot \vec{e}_3 = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \vec{e}_1 & H_2 \vec{e}_2 & H_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1 H_1 & a_2 H_2 & a_3 H_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.64)$$

Далее найдем лапласиан скалярного поля φ . Для этого воспользуемся тождеством (1.41), не зависящим от выбора системы координат. Пусть $\vec{a}$ – векторное поле градиента φ : $\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$. Компоненты вектора $\vec{a}$ равны

$$a_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \quad a_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}, \quad a_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial s_3} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}.$$

Подставляя полученные соотношения в выражение для дивергенции векторного поля $\vec{a}$ (1.61) и учитывая (1.44), получим

$$\Delta \varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (1.65)$$

Заметим, что с помощью (1.65) вычисляется **лапласиан** только **скалярного поля**. Для вычисления **лапласиана векторного поля** необходимо использовать выражение (1.43). Искключение составляют только прямоугольные декартовы координаты.

1.28 Проверить справедливость неравенства

$$\Delta \vec{a} \neq \Delta a_1 \cdot \vec{e}_1 + \Delta a_2 \cdot \vec{e}_2 + \Delta a_3 \cdot \vec{e}_3. \quad (1.66)$$

а) в прямоугольных декартовых координатах;

б) в цилиндрических координатах;

в) в сферических координатах.

1.29 Получить выражения градиента и лапласиана скалярного поля, дивергенции и ротора векторного поля в следующих координатных системах: а) цилиндрической; б) сферической; в) эллиптической; г) параболической; д) эллипсоидальной; е)

вырожденной эллипсоидальной для вытянутого эллипсоида вращения; ж)

вырожденной эллипсоидальной для сплюснутого эллипсоида вращения; з)

биполярной цилиндрической; и) бисферической; к) вытянутой сфероидальной; л)

сплюснутые сфероидальной; м) параболоидной. Коэффициенты Ляме указанных систем координат приведены в Приложении.

Примеры

1. Найти градиент скалярного поля $u(M) = r^2\varphi + z^2\varphi^3 - r\varphi z + 3$, заданного в цилиндрических координатах

$$\diamond \quad \text{Имеем: } \frac{\partial u}{\partial r} = 2r\varphi - \varphi z; \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = r^2 + 3\varphi^2 z^2 - rz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2\varphi^3 z - r\varphi. \text{ Значит,}$$

$$\text{grad } u = \varphi(2r - z)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}(r^2 + 3\varphi^2 z^2 - rz)\mathbf{e}_\varphi + \varphi(2\varphi^2 z - r)\mathbf{e}_z.$$

2. Показать, что векторное поле $\vec{a}(M) = (2\cos\theta/\rho^3)\vec{e}_\rho + (\sin\theta/\rho^3)\vec{e}_\theta$, заданное в сферической системе координат, соленоидально.

$$\diamond \quad \text{div } \vec{a} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{2\cos\theta}{\rho^3} \right) + \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\sin\theta}{\rho^3} \right) + 0 = 0 \text{ всюду, где}$$

$\rho \neq 0$. Это значит, что поле вектора соленоидально везде, кроме точки $\rho = 0$.

3. Показать, что векторное поле $\vec{a}(M) = z\cos\varphi\vec{e}_\rho - z\sin\varphi\vec{e}_\varphi + r\cos\varphi\vec{e}_z$, заданное в цилиндрической системе координат, потенциально.

$$\diamond \quad \text{rot } \vec{a} = \left(\frac{1}{r} r \sin\varphi - \sin\varphi \right) \vec{e}_r + (\cos\varphi - \cos\varphi) \vec{e}_\varphi + \left(-\frac{1}{r} z \sin\varphi + \frac{1}{r} z \sin\varphi \right) \vec{e}_z = 0.$$

Поле потенциально.

4. Является ли поле $u(M) = \rho \cos^2 \theta \cos 2\varphi$, заданное в сферической системе координат, гармоническим?

$\diamond$ Находим

$$\Delta u = \frac{2}{\rho} \cos^2 \theta \cos 2\varphi - \frac{2}{\rho} (2\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos 2\varphi - \frac{4\cos^2 \theta \cos 2\varphi}{\rho \sin^2 \theta} = \frac{2\cos 2\varphi (2\cos^4 \theta - 5\cos^2 \theta + 1)}{\rho \sin^2 \theta} \neq 0.$$

Значит, поле гармоническим не является.

Задания для самостоятельного решения

1.30. Найти градиент скалярного поля:

а) $u(M) = r^3 + r^2 \cos \varphi + z \sin \varphi$, заданного в цилиндрических координатах;

б) $u(M) = \rho^2 \cos^2 \varphi + 2\rho \sin \theta \cos \varphi$, заданного в сферических координатах.

1.31. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{a}(M) = r^2 z \vec{e}_r + z^2 \varphi \vec{e}_\varphi - (z^3/(3r)) \vec{e}_z$, заданного в цилиндрических координатах.

1.32. Доказать соленоидальность векторного поля $\vec{a}(M) = (2\rho \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \cos^2 \varphi) \vec{e}_\rho + \sin \theta \cos^2 \varphi \vec{e}_\theta + 6\rho \sin^2 \theta \cos \varphi \vec{e}_\varphi$, заданного в сферических координатах.

1.33. Найти ротор векторного поля $\vec{a}(M) = \rho^2 \cos \theta \vec{e}_\rho - 2\rho \sin^2 \theta \vec{e}_\theta + \cos^2 \varphi \vec{e}_\varphi$, заданного в сферических координатах.

1.34. Доказать потенциальность векторного поля $\vec{a}(M) = r^2 \vec{e}_r + (\varphi/r) \vec{e}_\varphi + z^2 \vec{e}_z$, заданного в цилиндрических координатах.

1.35. Является ли гармоническим скалярное поле:

а) $u(M) = \rho^2 \cos 2\varphi + \rho \sin \theta$, заданное в сферических координатах;

б) $u(M) = 3r^2 z^2 + 2 \cos 2\varphi - z^4$, заданное в цилиндрических координатах?

➤ Ответы на контрольные вопросы.

➤ Защита результатов выполнения коллективных и индивидуальных заданий.

Контрольные вопросы

1. Что называют скалярным полем? Приведите примеры.
2. Дайте определение и приведите примеры векторного поля.
3. Какие геометрические характеристики имеют скалярные и векторные поля?
4. Что называется градиентом скалярного поля? Как эта величина связана с производной по направлению?
5. Что называют дивергенцией векторного поля (определение, физический смысл, примеры)? Какая интегральная характеристика соответствует дивергенции?
6. Что называют ротором векторного поля (определение, физический смысл, примеры)? Какая интегральная характеристика соответствует ротору?
7. Что называют оператором набла, каковы его свойства и область применения?
8. Что называют векторным градиентом (определение, примеры)?
9. Запишите результат двойного действия дифференциальных операторов (или оператора набла) на скалярные и векторные поля.
10. Что называют криволинейными координатами? Приведите примеры.
11. Запишите условие ортогональности координатной системы.
12. Что называют коэффициентами Ляме? Какова их роль в задании криволинейных координат?
13. Запишите градиент скалярного поля в произвольной криволинейной системе координат.
14. Запишите дивергенцию векторного поля в произвольной криволинейной системе координат.
15. Запишите ротор векторного поля в произвольной криволинейной системе координат.
16. Запишите лапласиан скалярного поля в произвольной криволинейной системе координат.
17. Кратко охарактеризуйте использование системы Mathematica в векторной алгебре и анализе.
18. Кратко охарактеризуйте возможности системы Mathematica, связанные с заданием и преобразованием координатных систем.

Классификация уравнений в частных производных второго порядка

Цель: Развить навык построения краевых задач, описывающих физические процессы колебаний, теплопроводности и т.д., а также их упрощения путем приведения уравнений математической физики к каноническому виду.

Формы работы:

- Выполнение коллективных и индивидуальных заданий.

Формируемые компетенции:

В результате освоения материала по теме семинара у студента должны быть сформированы следующие умения и знания:

1. Освоить основные типы линейных дифференциальных уравнений математической физики второго порядка.
2. Уравнения гиперболического типа. Примеры.
3. Уравнения параболического типа. Примеры.
4. Уравнения эллиптического типа. Примеры.
5. Понятие краевой задачи. Основные типы краевых задач.
6. Задача Коши. Постановка задачи Коши.
7. Постановка краевой задачи для уравнения эллиптического типа. Постановка смешанной краевой задачей. Постановка граничных условий первого, второго и третьего рода.
8. Постановка задачи Дирихле.
9. Постановка задачи Неймана.
10. Канонический вид линейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных с двумя независимыми переменными.
11. Приведение к каноническому виду уравнения гиперболического типа.
12. Приведение к каноническому виду уравнения параболического типа.
13. Приведение к каноническому виду уравнения эллиптического типа.

Приобретаемые знания направлены на формирование следующих компетенций:

- способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей (ОПК 2).

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

2.1 Канонический вид уравнений математической физики второго порядка

Дифференциальное уравнение в частных производных называется *линейным*, если оно линейно относительно искомой функции и её частных производных.

Если искомая функция зависит только от двух независимых переменных x и y , то такое уравнение имеет вид

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y), \quad (2.1)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ – коэффициенты, являющиеся вещественными числами или функциями от x и y ; $f(x, y)$ – правая часть уравнения.

Если $f(x, y) \equiv 0$, то уравнение (2.1) называется *однородным*, если же $f(x, y) \not\equiv 0$, – то *неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных*.

Будем считать, что a_{11}, a_{12}, a_{22} – либо вещественные числа, либо функции от x и y , имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно в области задания уравнения.

Пусть в области P задано уравнение (2.1). Говорят, что оно в этой области является уравнением:

- гиперболического типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$;
- параболического типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$;
- эллиптического типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$.

Для того, чтобы привести уравнение (2.1) к каноническому виду, надо составить его характеристическое уравнение

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0,$$

которое распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a_{11}} \left(a_{12} + (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})^{1/2} \right), \quad (2.2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a_{11}} \left(a_{12} - (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})^{1/2} \right), \quad (2.3)$$

и найти общие интегралы последних.

Интегральные кривые уравнений (2.2) и (2.3), называются характеристиками уравнения (2.1).

Уравнения гиперболического типа. Общие интегралы $\varphi(x, y) = C_1, \psi(x, y) = C_2$ уравнений (2.2) и (2.3) вещественны и различны. Они определяют два различных семейства действительных характеристик для уравнения (2.1). Заменой переменных $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$ уравнение (2.1) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi_1 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

Уравнения параболического типа. Уравнения (2.2) и (2.3) совпадают. Общий интеграл $\varphi(x, y) = C$ уравнения (2.2) определяет семейство вещественных характеристик для уравнения (2.1). Заменой переменных $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$, где $\psi(x, y)$ – любая гладкая функция такая, что эта замена переменных взаимно однозначна в рассматриваемой области, уравнение (2.1) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi_2 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

Уравнения эллиптического типа. Общие интегралы уравнений (2.2) и (2.3) комплексно-сопряжённые:

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C_1, \quad \varphi(x, y) - i\psi(x, y) = C_2,$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – вещественные функции, определяющие два семейства мнимых характеристик уравнения (3.1). Тогда заменой переменных $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ уравнение (3.1) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi_3 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

Примеры

1. Привести к каноническому виду дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

◇ В нашем случае $a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{22} = -3$. Так как $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4 > 0$, то данное уравнение является уравнением гиперболического типа на всей плоскости Oxy .

Составим характеристическое уравнение: $dy^2 - 2dx dy - 3dx^2 = 0$. Оно распадается на

два: $\frac{dy}{dx} = 3$, $\frac{dy}{dx} = -1$. Интегрируя их, соответственно получаем: $y = 3x + C_1$,

$y = -x + C_2$. Введём новые переменные по формулам $\xi = y - 3x$, $\eta = x + y$. Вычислив производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -3 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -3 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} - 3 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставив в исходное уравнение найденные значения производных, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

2. Найти общее решение уравнения

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

◇ Так как $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2 - x^2y^2 = 0$, то данное уравнение является уравнением параболического типа на всей плоскости Oxy . Приведём его к каноническому виду. Запишем характеристическое уравнение: $x^2dy^2 + 2xydx dy + y^2dx^2 = 0$, откуда $x dy + y dx = 0$. Решив последнее уравнение, получим только одно семейство характеристик $\varphi(x, y) \equiv xy = C$. Примем $\psi(x, y) = y$. Произведя замену переменных по формулам $\xi = xy$, $\eta = y$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= y \frac{\partial u}{\partial \xi}; & \frac{\partial u}{\partial y} &= x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}; & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= xy \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi}; & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Подставив найденные значения производных в исходное уравнение, найдём $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$.

Проинтегрировав его, получим $u = \Phi(\xi)\eta + \Psi(\xi)$. Заменив ξ на xy , найдём общее решение исходного уравнения:

$$u(x, y) = \Phi(xy)y + \Psi(xy).$$

3. Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

◇ Так как $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1 < 0$, то данное уравнение является уравнением параболического типа на всей плоскости Oxy . Приведём его к каноническому виду.

Запишем характеристическое уравнение: $dy^2 + 4dx dy + 5dx^2 = 0$, откуда $\frac{dy}{dx} = -2 + i$,

$\frac{dy}{dx} = -2 - i$. Найдём общий интеграл первого уравнения: $(y + 2x) - ix = C_1$. Произведя

замену переменных по формулам $\xi = 2x + y$, $\eta = -x$, получим $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$.

Задания для самостоятельного решения

2.1 Привести к каноническому виду дифференциальное уравнение:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0;$

б) $(1 + x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

2.2 Найти общее решение уравнения:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1+y^2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y(1+y^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \\ \text{б) } & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} + 4 = 0. \end{aligned}$$

2.3 Привести к каноническому виду уравнения:

$$\begin{aligned} \text{а) } & u_{xx} + (1+y)^2 u_{yy} = 0, & \text{б) } & y u_{xx} - x u_{yy} + u_x + y u_y = 0, \\ \text{в) } & e^{2x} u_{xx} + 2e^{x+y} u_{xy} + e^{2y} u_{yy} = 0, & \text{г) } & u_{xx} + x y u_{yy} = 0, \\ \text{д) } & x u_{xx} + 2\sqrt{xy} u_{xy} + y u_{yy} - u_x = 0, & \text{е) } & (x-y) u_{xx} + (xy - y^2 - x + y) u_{xy} = 0, \\ \text{ж) } & u_{xx} + 2u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0, & \text{з) } & \sin^2 y \cdot u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + 3u_x - 5u = 0, \\ \text{и) } & y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + u_x = 0. \end{aligned}$$

2.4 Доказать, что уравнение с постоянными коэффициентами

$$u_{xy} + a u_x + b u_y + c u = 0$$

заменой $u(x, y) = v(x, y) \cdot e^{-bx-ay}$ приводится к виду

$$v_{xy} + (c - ab)v = 0.$$

2.5 Найти общее решение следующих уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \text{а) } & u_{xy} = 0, & \text{б) } & u_{xx} - a^2 u_{yy} = 0, \text{ в) } u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \\ & & \text{г) } & u_{xy} + a u_x = 0, \\ \text{д) } & 3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 0, & \text{е) } & u_{xy} + a u_x + b u_y + a b u = 0, \\ \text{ж) } & u_{xx} - 2u_x - 3u_y + 6 = 2e^{x+y}, & \text{з) } & u_{xx} + 2a u_{xy} + a^2 u_{yy} + u_x + a u_y = 0. \end{aligned}$$

2.2 Постановка краевых задач математической физики

2.6 Найти статический прогиб струны, закрепленной на концах, под действием непрерывно распределенной нагрузки (на единицу длины).

2.7 Вывести уравнение малых поперечных колебаний струны с насаженной на нее в некоторой внутренней точке x_0 бусиной массы m .

2.8 Вывести уравнение колебаний струны в упругой среде.

2.9 Труба, заполненная идеальным газом и открытая с одного конца, движется поступательно в направлении своей оси с постоянной скоростью v . В момент времени $t = 0$ труба мгновенно останавливается. Поставить краевую задачу об определении смещения газа внутри трубы на расстоянии x от закрытого конца.

2.10 Поставить задачу об определении магнитного поля внутри и вне цилиндрического проводника, по поверхности которого течет ток силой J .

2.11 Поставить задачу об определении температуры в бесконечном тонком теплоизолированном стержне, по которому с момента $t = 0$ в положительном направлении со скоростью v_0 начинает двигаться точечный тепловой источник, дающий q единиц тепла в единицу времени.

2.12 Дана тонкая прямоугольная пластина со сторонами l , m , для которой известно начальное распределение температуры. Поставить краевую задачу о распространении тепла в пластине, если боковые стороны поддерживаются при температуре

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= \varphi_1(x), & u|_{y=m} &= \varphi_2(x), \\ u|_{x=0} &= \psi_1(y), & u|_{x=l} &= \psi_2(y). \end{aligned}$$

Отчет:

- Ответы на контрольные вопросы.
- Защита результатов выполнения коллективных и индивидуальных заданий.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные типы линейных дифференциальных уравнений математической физики второго порядка.
2. Какие процессы описывают уравнения гиперболического типа? Примеры.
3. Какие процессы описывают уравнения параболического типа? Примеры.
4. Какие процессы описывают уравнения эллиптического типа? Примеры.
5. Что называется областью определения уравнения?
6. Что называется начальными условиями? Примеры.
7. Что называется граничными условиями? Примеры.
8. Чем обусловлена необходимость введения начальных и граничных условий?
9. Дайте определение понятия краевой задачи. Перечислите основные типы краевых задач.
10. Что называют задачей Коши? Как осуществляется ее постановка?
11. Что называют краевой задачей для уравнения эллиптического типа? Как осуществляется ее постановка?
12. Что называют смешанной краевой задачей? Как осуществляется ее постановка?
13. Запишите граничные условия первого, второго и третьего рода.
14. Кратко охарактеризуйте постановку задачи Дирихле.
15. Кратко охарактеризуйте постановку задачи Неймана.
16. Какая задача называется корректно поставленной (по Адамару)?
17. Что называется каноническим видом линейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных с двумя независимыми переменными.
18. Кратко охарактеризуйте последовательность приведения к каноническому виду уравнения гиперболического типа.
19. Кратко охарактеризуйте последовательность приведения к каноническому виду уравнения параболического типа.
20. Кратко охарактеризуйте последовательность приведения к каноническому виду уравнения эллиптического типа.
21. Что называют уравнениями смешанного типа? Приведите примеры.

22. Запишите канонический вид линейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных с несколькими (больше двух) независимыми переменными.

Литература

1. Конспект лекций.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебное пособие для вузов. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.
3. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: Учебник для ВУЗов. – М.: Физматлит, 2001. – 398 с.
4. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002. – 367 с.
5. Сборник задач по уравнениям математической физики. / Под.ред. В.С. Владимирова – М.: Физматлит, 2001. – 288 с.

Практическое занятие 3

Общая схема метода разделения переменных. Задача Штурма-Лиувилля.

Цель: Освоить использование метода разделения переменных при исследовании систем, обладающих различной геометрической симметрией.

Формы работы:

- Самостоятельное изучение теоретико-методического введения и рекомендуемой литературы.
- Выполнение коллективных и индивидуальных заданий.

Формируемые компетенции:

В результате освоения материала по теме семинара у студента должны быть сформированы следующие умения и знания:

1. Понятие задачи Штурма-Лиувилля. Основные свойства собственных значений и собственных функций.
2. Основная идея и расчетная схема метода разделения переменных.
3. Задача Штурма-Лиувилля для различных областей в прямоугольно-декартовой системе координат.
4. Задача Штурма-Лиувилля для различных областей в полярной системе координат.
5. Задача Штурма-Лиувилля для различных областей в цилиндрической системе координат.
6. Задача Штурма-Лиувилля для различных областей в сферической системе координат.

Приобретаемые знания направлены на формирование следующих компетенций:

- способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей (ОПК 2).

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

3.1 Общая постановка задачи Штурма-Лиувилля. Задача Штурма-Лиувилля для отрезка

В общем случае задача Штурма-Лиувилля имеет следующий вид. Найти собственные значения и собственные функции уравнения

$$Lu + \lambda u = 0 \quad (3.1)$$

в области D , удовлетворяющие граничным условиям

$$P[u]_S \equiv \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \Big|_S = 0, \quad u \neq 0. \quad (3.2)$$

Здесь L – линейный дифференциальный оператор, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности S , ограничивающую область D , $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ (всюду в дальнейшем предполагается, что α и β – постоянные).

Рассмотрим далее частный случай задачи Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа ($Lu = \Delta u$). Найти собственные значения и собственные функции уравнения

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad (3.3)$$

в области D , удовлетворяющие граничным условиям (4.2).

Решение краевой задачи (3.2) – (3.3) существенно зависит от геометрии исследуемой области D . Далее рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля в основных канонических двумерных и трехмерных областях.

Задача Штурма-Лиувилля для отрезка.

В одномерном случае рассмотрим общую схему нахождения собственных функций и собственных значений следующей задачи Штурма-Лиувилля

$$Ly + \lambda \rho y \equiv \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dy}{dx} \right] - qy + \lambda \rho y = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3.4)$$

$$P_1[u]_{x=0} \equiv \alpha_1 \frac{dy}{dx} - \beta_1 y \Big|_{x=0} = 0, \quad |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0, \quad (3.5)$$

$$P_2[u]_{x=l} \equiv \alpha_2 \frac{dy}{dx} + \beta_2 y \Big|_{x=l} = 0, \quad |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0. \quad (3.6)$$

Примеры решения задач.

Решим задачу Штурма-Лиувилля для отрезка.

Найдём собственные значения и собственные функции, являющиеся решениями уравнения:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \lambda y = 0, \quad (3.17)$$

удовлетворяющие однородным граничным условиям:

$$y|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=l} = 0. \quad (3.18)$$

Будем искать решение уравнения в виде:

$$y = e^{kx}. \quad (3.19)$$

Найдём первую и вторую производные:

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Подставим в уравнение:

$$k^2 e^{kx} + \lambda e^{kx} = 0.$$

Отсюда $k^2 + \lambda = 0$ – характеристическое уравнение;

$$k^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad k = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Тогда общее решение уравнения (4.17):

$$y = A_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + A_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x}. \quad (3.20)$$

Используем формулу Эйлера для приведения решения к тригонометрическому виду:

$$\begin{aligned} y &= A_1 (\cos \sqrt{\lambda}x + i \sin \sqrt{\lambda}x) + A_2 (\cos \sqrt{\lambda}x - i \sin \sqrt{\lambda}x) = \\ &= (A_1 + A_2) \cos \sqrt{\lambda}x + i(A_1 - A_2) \sin \sqrt{\lambda}x. \end{aligned}$$

Переобозначим константы: $A_1 + A_2 = C_1$, $i(A_1 - A_2) = C_2$.

Тогда общее решение уравнения (3.17) в тригонометрическом виде имеет вид:

$$C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x. \quad (3.21)$$

Для определения коэффициентов C_1 и C_2 подставим (3.21) в граничные условия (3.18):

$$y(0) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}0 + C_2 \sin \sqrt{\lambda}0 = C_1 = 0.$$

Так как задача Штурма-Лиувилля решается с точностью до постоянного коэффициента, положим $C_2 = 1$. Тогда вид функции $y(x) = \sin \sqrt{\lambda}x$. подставим во второе граничное условие:

$$\begin{aligned} y(l) &= \sin \sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \\ \sqrt{\lambda}l &= \pi n \Rightarrow, \\ \lambda_k &= \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \end{aligned}$$

где λ_k – собственные значения задачи Штурма-Лиувилля для граничных условий (3.18).

Тогда собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (3.17) – (3.18) имеют вид:

$$y(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Посчитаем норму:

$$N_n = \|y_n(x)\| = \left[\int_0^l y_n^2(x) dx \right]^{1/2},$$

$$\begin{aligned}
\|y_n\|^2 &= \int_0^l \sin^2 \frac{\pi n}{l} x dx = \int_0^l \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \frac{2\pi n}{l} x \right\} dx = \\
&= \int_0^l \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int_0^l \cos \frac{2\pi n}{l} x dx = \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi n} \left\{ \sin \frac{2\pi n}{l} x \right\} \Big|_0^l = \\
&= \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2\pi n} \left\{ \sin \frac{2\pi n}{l} l - \sin \frac{2\pi n}{l} 0 \right\} = \frac{l}{2}.
\end{aligned}$$

Задания для самостоятельного решения.

3.1 Решить задачу Штурма - Лиувилля для следующих граничных условий и проверить полученные решения.

Граничные условия	Собственные значения	Собственные функции	Норма
1. $y(0) = y(l) = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 = \beta_2 = 1$; ;	$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2$	$y_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x$	$\ y_n\ ^2 = \frac{l}{2}$
2. $y'(0) = y'(l) = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = \beta_2 = 0$; ;	$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2$	$y_n(x) = \cos \sqrt{\lambda_n} x$	$\ y_n\ ^2 = \frac{l}{2} (1 + \delta_{n_0})$
3. $y(0) = y'(l) = 0$, $\alpha_1 = \beta_2 = 0, \beta_1 = \alpha_2 = 1$; ;	$\lambda_n = \left[\frac{\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]^2$	$y_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x$	$\ y_n\ ^2 = \frac{l}{2}$
4. $y'(0) = y(l) = 0$, $\beta_1 = \alpha_2 = 0, \beta_2 = \alpha_1 = 1$; ;	$\lambda_n = \left[\frac{\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]^2$	$y_n(x) = \cos \sqrt{\lambda_n} x$	$\ y_n\ ^2 = \frac{l}{2}$
5. $y(0) = 0$, $y' + h_2 y _{x=l} = 0, \alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \alpha_2 = 1, \beta_2 = h_2$;	$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h_2}$	$y_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x$	$\ y_n\ ^2 = \frac{l}{2} + \frac{h_2}{2(\lambda_n + h_2^2)}$
6. $y'(0) = 0$, $y'(l) + h_2 y(l) = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = 0$, $\beta_2 = h_2$;	$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l = \frac{h_2}{\sqrt{\lambda}}$	$y_n(x) = \cos \sqrt{\lambda_n} x$	$\ y_n\ ^2 = \frac{l}{2} + \frac{h_2}{2(\lambda_n + h_2^2)}$
7. $y'(0) - h_1 y(0) = 0$, $y(l) = 0, \alpha_1 = 1$,	$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h_1}$	$y_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} (l - x)$	$\ y_n\ ^2 = \frac{l}{2} + \frac{h_1}{2(\lambda_n + h_1^2)}$

$\beta_1 = h_1, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 1$; ;			
8. $y'(0) - h_1 y(0) = 0,$ $y'(l) = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 1,$ $\beta_1 = h_1, \beta_2 = 0$	$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l = \frac{h_1}{\sqrt{\lambda}}$	$y_n(x) = \cos \sqrt{\lambda_n} (l - x)$	$\ y_n\ ^2 = \frac{l}{2} + \frac{h_1}{2(\lambda_n + h_1^2)}$
9. $y'(0) - h_1 y(0) = 0,$ $y'(l) - h_2 y(l) = 0,$ $\alpha_1 = 1, \beta_1 = h_1, \alpha_2 = 1,$ $\beta_2 = h_2.$	$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l = \sqrt{\lambda} \times$ $\times \frac{h_1 + h_2}{\lambda - h_1 h_2}$	$\frac{h_2 \sin \sqrt{\lambda_n} (l - x)}{\sqrt{\lambda_n + h_2^2}} +$ $+\frac{\sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} (l - x)}{\sqrt{\lambda_n + h_2^2}}$	$\frac{l}{2} + \frac{(h_1 + h_2)(\lambda_n + h_1 h_2)}{2(\lambda_n + h_1^2)(\lambda_n + h_2^2)}$ $n = 1, 2, \dots$

3.2 Найти собственные значения и собственные функции отрезка $-l \leq x \leq l$ при граничных условиях:

- а) $u|_{x=-l} = u|_{x=l} = 0$; б) $u_x|_{x=-l} = u_x|_{x=l} = 0$;
в) $u|_{x=-l} = u_x|_{x=l} = 0$; г) $u_x|_{x=-l} = u|_{x=l} = 0$.

Задача Штурма-Лиувилля для прямоугольника

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в прямоугольнике:

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (3.22)$$

$$P_1[u]|_{x=0} \equiv \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \beta_1 u \Big|_{x=0} = 0, \quad P_2[u]|_{x=a} \equiv \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u \Big|_{x=a} = 0, \quad (3.23a)$$

$$P_3[u]|_{y=0} \equiv \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial y} - \beta_3 u \Big|_{y=0} = 0, \quad P_4[u]|_{y=b} \equiv \alpha_4 \frac{\partial u}{\partial y} + \beta_4 u \Big|_{y=b} = 0, \quad (3.23b)$$

где α_i и β_i – постоянные, причем $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0$.

Для решения задачи (3.22)–(3.23) воспользуемся методом разделения переменных. Представим ненулевые решения уравнения (3.23) в виде

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0. \quad (3.24)$$

Подставляя (3.24) в (3.22) и разделяя переменные, получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} \equiv -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu.$$

Следовательно, для функции $X(x)$ и $Y(y)$ получаем одномерные задачи Штурма-Лиувилля для отрезка:

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0, & 0 < x < a, \\ P_1[X]|_{x=0} \equiv \alpha_1 X' - \beta_1 X|_{x=0} = 0, \\ P_2[X]|_{x=a} \equiv \alpha_2 X' + \beta_2 X|_{x=a} = 0, \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y = 0, & 0 < y < b, \\ P_3[Y]|_{y=0} \equiv \alpha_3 Y' - \beta_3 Y|_{y=0} = 0, \\ P_4[Y]|_{y=b} \equiv \alpha_4 Y' + \beta_4 Y|_{y=b} = 0. \end{cases}$$

Здесь $\nu = \lambda - \mu$. Собственные функции задачи (3.22)–(3.23) получаются в результате подстановки решений задач (3.25) в (3.24), а собственные значения λ есть сумма собственных значений задач (3.25): $\lambda = \mu + \nu$.

Таким образом, собственные функции оператора Лапласа для прямоугольника равны произведению собственных функций по каждой переменной с соответствующими граничными условиями $u_{nm}(x, y) = X_n(x)Y_m(y)$, а собственные значения равны сумме собственных значений одномерных задач $\lambda_{nm} = \mu_n + \nu_m$.

Задания для самостоятельного решения

3.3 Решить задачу Штурма-Лиувилля для прямоугольника $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ с граничными условиями:

а) $u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0$, $u_y|_{y=0} = u_y|_{y=b} = 0$;

б) $u|_{x=0} = u_x|_{x=a} = 0$, $u|_{y=0} = u_y|_{y=b} = 0$;

в) $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=a} = 0$, $u_y|_{y=0} = u_y|_{y=b} = 0$;

г) по переменной x – периодические граничные условия с периодом a ,

$$u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0;$$

д) периодические граничные условия по обоим переменным: по x – с периодом a , по y – с периодом b .

Задача Штурма-Лиувилля для прямоугольного параллелепипеда

Задача Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в прямоугольном параллелепипеде имеет вид

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c, \quad (3.26)$$

$$P_1[u]|_{x=0} \equiv \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \beta_1 u \Big|_{x=0} = 0, \quad P_2[u]|_{x=a} \equiv \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u \Big|_{x=a} = 0, \quad (3.27a)$$

$$P_3[u]|_{y=0} \equiv \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial y} - \beta_3 u \Big|_{y=0} = 0, \quad P_4[u]|_{y=b} \equiv \alpha_4 \frac{\partial u}{\partial y} + \beta_4 u \Big|_{y=b} = 0, \quad (3.27б)$$

$$P_5[u]|_{z=0} \equiv \alpha_5 \frac{\partial u}{\partial z} - \beta_5 u \Big|_{z=0} = 0, \quad P_6[u]|_{z=c} \equiv \alpha_6 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_6 u \Big|_{z=c} = 0, \quad (3.27в)$$

$$\alpha_i, \beta_i = \text{const}, \quad |\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Выполняя последовательное разделение переменных в (3.26)–(3.27), получим три задачи Штурма-Лиувилля для отрезка:

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0, & 0 < x < a, \\ P_1[X] \big|_{x=0} \equiv \alpha_1 X' - \beta_1 X \big|_{x=0} = 0, \\ P_2[X] \big|_{x=a} \equiv \alpha_2 X' + \beta_2 X \big|_{x=a} = 0, \end{cases} \quad (3.28a)$$

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y = 0, & 0 < y < b, \\ P_3[Y] \big|_{y=0} \equiv \alpha_3 Y' - \beta_3 Y \big|_{y=0} = 0, \\ P_4[Y] \big|_{y=b} \equiv \alpha_4 Y' + \beta_4 Y \big|_{y=b} = 0, \end{cases} \quad (3.28б)$$

$$\begin{cases} Z'' + \kappa Z = 0, & 0 < z < c, \\ P_5[Z] \big|_{z=0} \equiv \alpha_5 Z' - \beta_5 Z \big|_{z=0} = 0, \\ P_6[Z] \big|_{z=c} \equiv \alpha_6 Z' + \beta_6 Z \big|_{z=c} = 0. \end{cases} \quad (3.28в)$$

Используя вычисления, аналогичные проведенным в предыдущем пункте, получим выражения собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для прямоугольного параллелепипеда:

$$u_{nmk}(x, y, z) = X_n(x)Y_m(y)Z_k(z), \quad \lambda_{nmk} = \mu_n + \nu_m + \kappa_k. \quad (3.29)$$

Здесь $\{X_n(x), \mu_n\}$, $\{Y_m(y), \nu_m\}$, $\{Z_k(z), \kappa_k\}$ – собственные функции и собственные значения соответствующих одномерных задач Штурма-Лиувилля по каждой переменной.

Задания для самостоятельного решения

3.4 Решить задачу Штурма-Лиувилля для прямоугольного параллелепипеда $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$ с граничными условиями:

а) $u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0$, $u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0$, $u|_{z=0} = u|_{z=c} = 0$;

б) $u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0$, $u_y|_{y=0} = u_y|_{y=b} = 0$, $u|_{z=0} = u|_{z=c} = 0$;

в) $u_n|_S = 0$, S – полная поверхность параллелепипеда;

г) $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=a} = 0$, $u_y|_{y=0} = u_y|_{y=b} = 0$, $u|_{z=0} = u|_{z=c} = 0$;

д) $u_n + hu|_S = 0$, S – поверхность параллелепипеда, $\vec{n}$ – внешняя нормаль, $h = \text{const}$.

3.2 Задача Штурма-Лиувилля для круга и кругового сектора

Задача Штурма-Лиувилля для круга

Найдем собственные функции и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля для круга радиуса a :

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x^2 + y^2 \leq a^2, \quad (3.30)$$

$$\alpha u_n + \beta u|_C = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0, \quad u \neq 0. \quad (3.31)$$

Здесь C – граница круга.

Введем полярную систему координат (r, φ) с началом в центре круга. Тогда уравнение (3.30) принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \lambda u = 0. \quad (3.32)$$

Используя метод Фурье, будем искать собственную функцию в виде произведения

$$u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0. \quad (3.33)$$

Подставляя (3.33) в (3.32) и разделяя переменные, получим

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \lambda r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \nu. \quad (3.34)$$

Рассмотрим уравнение для $\Phi(\varphi)$, которое вместе с требованием периодичности приводит к следующей задаче Штурма-Лиувилля:

$$\Phi'' + \nu \Phi = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \Phi(\varphi) \equiv \Phi(\varphi + 2\pi). \quad (3.35)$$

Решение задачи (3.31) имеет вид

$$\Phi(\varphi) = \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad \nu = \nu_n = n^2, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.36)$$

Рассмотрим уравнение для $R(r)$, которое для каждого $\nu = n^2$ принимает вид:

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (3.37)$$

На его решение R накладывается граничное условие

$$\alpha R' + \beta R|_{r=a} = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0, \quad (3.38a)$$

вытекающее из (3.27), и естественное условие ограниченности при $r = 0$:

$$|R(0)| < \infty, \quad (3.38b)$$

поскольку $r = 0$ является особой точкой уравнения (3.37).

Уравнение (3.37) заменой $x = r\sqrt{\lambda}$ приводится к уравнению Бесселя n -го порядка:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0,$$

что позволяет представить его общее решение в виде

$$R(r) = R_n(r) = C_1 J_n(\sqrt{\lambda} r) + C_2 N_n(\sqrt{\lambda} r). \quad (3.39)$$

Учитывая неограниченность функции $N_n(\sqrt{\lambda} r)$ при $r \rightarrow 0$ и условие (3.38b), находим $C_2 = 0$. Поскольку собственная функция определяется с точностью до числового множителя, положим $C_1 = 1$. Тогда имеем

$$R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda} r). \quad (3.40^*)$$

Подставляя (3.40*) в граничное условие (3.38a), получим дисперсионное уравнение для определения собственных значений λ :

$$\alpha\sqrt{\lambda}J'_n(\sqrt{\lambda}a) + \beta J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0.$$

Здесь штрих обозначает производную функции Бесселя по полному аргументу. Обозначим k -й корень полученного трансцендентного уравнения при фиксированном n через λ_n^k . Тогда для собственных функций задачи (3.37)–(3.38) можно записать

$$R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda_n^k}r). \quad (3.40)$$

Итак, решение задачи Штурма-Лиувилля для круга имеет вид

$$u_{nk}(r, \varphi) = J_n(\sqrt{\lambda_n^k}r) \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad (3.41)$$

с собственными значениями λ_n^k .

Задача Штурма-Лиувилля для кругового сектора

Пусть D – круговой сектор: $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \gamma$; C – граница области D . Тогда задача Штурма-Лиувилля имеет вид

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ в } D, \quad (3.42)$$

$$P_0(u) = \alpha_0 u_n + \beta_0 u|_{r=a} = 0, \quad |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0, \quad (3.43a)$$

$$P_1(u) = \alpha_1 u_n - \beta_1 u|_{\varphi=0} = 0, \quad |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0, \quad (3.43b)$$

$$P_2(u) = \alpha_2 u_n + \beta_2 u|_{\varphi=\gamma} = 0, \quad |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0, \quad (3.43b)$$

где $\vec{n}$ – внешняя к C единичная нормаль.

Представляя искомую функцию в виде

$$u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0,$$

подставляя ее в (3.42)–(3.43) и разделяя переменные, получим отдельно задачи для $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$:

$$\begin{aligned} r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - \nu^2)R &= 0, \quad 0 \leq r \leq a, \\ P(R) &= \alpha_0 R' + \beta_0 R|_{r=a} = 0, \\ |R(0)| &< \infty, \quad R(r) \neq 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

и

$$\begin{aligned} \Phi'' + \nu\Phi &= 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \gamma, \\ P_1(\Phi) &= \alpha_1 \Phi' - \beta_1 \Phi|_{\varphi=0} = 0, \\ P_2(\Phi) &= \alpha_2 \Phi' + \beta_2 \Phi|_{\varphi=\gamma} = 0, \quad \Phi(\varphi) \neq 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Задача (3.45) есть задача Штурма-Лиувилля для отрезка, рассмотренная выше. Ее собственные функции $\Phi_n(\varphi)$ имеют вид

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos \sqrt{\nu_n} \varphi, \\ \sin \sqrt{\nu_n} \varphi, \end{cases} \quad (3.46)$$

а собственные значения V_n определяются из трансцендентного уравнения

$$\begin{vmatrix} -\beta_1 & \alpha_1 \sqrt{v} \\ \beta_2 \cos \sqrt{v} \gamma - \alpha_2 \sqrt{v} \sin \sqrt{v} \gamma & \alpha_2 \sqrt{v} \cos \sqrt{v} \gamma + \beta_2 \sin \sqrt{v} \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (3.47)$$

Задача для $R(r)$ также рассмотрена ранее. Ограниченное решение уравнения задачи (3.44) имеет вид

$$R(r) = R_n(r) = C J_{\nu_n}(\sqrt{\lambda} r). \quad (3.48)$$

Подставляя (3.48) в граничное условие задачи (3.44), получим трансцендентное уравнение относительно неизвестного λ :

$$\alpha_0 \sqrt{\lambda} J'_{\nu_n}(\sqrt{\lambda} a) + \beta_0 J_{\nu_n}(\sqrt{\lambda} a) = 0. \quad (3.49)$$

Здесь штрих обозначает производную функции Бесселя по полному аргументу. Таким образом, решение задачи (3.44) можно записать в виде

$$R_n(r) = J_{\nu_n}(\sqrt{\lambda_n^k} r),$$

где λ_n^k – k -й корень уравнения (4.47) при фиксированном n .

Итак, собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (3.42)–(3.43) для кругового сектора имеют вид

$$u_{nk}(r, \varphi) = J_{\nu_n}(\sqrt{\lambda_n^k} r) \begin{cases} \cos \sqrt{\nu_n} \varphi, \\ \sin \sqrt{\nu_n} \varphi. \end{cases} \quad (3.50)$$

а собственные значения λ_n^k – корни уравнения (3.47).

Задания для самостоятельного решения

3.5 Решить задачу Штурма-Лиувилля для кругового сектора $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \gamma$ с граничными условиями:

а) $u|_{r=a} = 0$, $u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\gamma} = 0$;

б) $u_r|_{r=a} = 0$, $u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\gamma} = 0$;

в) $u|_{r=a} = 0$, $u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\gamma} = 0$;

г) $u|_{r=a} = 0$, $u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\gamma} = 0$;

д) $u_r + hu|_{r=a} = 0$, $u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\gamma} = 0$, $h = \text{const}$.

3.3 Задача Штурма-Лиувилля для кругового кольца и кольцевого сектора

Задача Штурма-Лиувилля для кругового кольца

Перейдем к вычислению собственных функций кругового кольца. Пусть D – круговое кольцо: $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ в } D, \quad (3.51)$$

$$P_1(u) = \alpha_1 u_n - \beta_1 u|_{r=a} = 0, \quad (3.52a)$$

$$P_2(u) = \alpha_2 u_n + \beta_2 u|_{r=b} = 0, \quad u \neq 0. \quad (3.52b)$$

Представляя искомое решение в виде произведения $u(r, \varphi) = R(r) \times \Phi(\varphi)$, подставляя в уравнение (3.7) и разделяя переменные, получаем задачи для функций R и Φ :

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0, \quad a \leq r \leq b, \quad (3.53a)$$

$$P_1(R) = \alpha_1 R' - \beta_1 R|_{r=a} = 0, \quad (3.53b)$$

$$P_2(R) = \alpha_2 R' + \beta_2 R|_{r=b} = 0 \quad (3.53b)$$

и

$$\Phi'' + \nu \Phi = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \Phi(\varphi) \equiv \Phi(\varphi + 2\pi). \quad (3.54)$$

Решение задачи (3.54) получено ранее. Ее собственные значения ν и собственные функции Φ соответственно равны

$$\nu = \nu_n = n^2, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \Phi(\varphi) = \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi. \end{cases} \quad (3.55)$$

Общее решение уравнения (3.53a) при $\nu_n = n^2$ имеет вид

$$R(r) = R_n(r) = C_1 J_n(\sqrt{\lambda}r) + C_2 N_n(\sqrt{\lambda}r). \quad (3.56)$$

Подставляя (3.51) в граничные условия (3.53b)–(3.53b), получим

$$R(r) = R_n(r) = C_1 J_n(\sqrt{\lambda}r) + C_2 N_n(\sqrt{\lambda}r). \quad (3.56)$$

$$\begin{cases} C_1 [\alpha_1 \sqrt{\lambda} J'_n(\sqrt{\lambda}a) - \beta_1 J_n(\sqrt{\lambda}a)] + C_2 [\alpha_1 \sqrt{\lambda} N'_n(\sqrt{\lambda}a) - \beta_1 N_n(\sqrt{\lambda}a)] = 0, \\ C_1 [\alpha_2 \sqrt{\lambda} J'_n(\sqrt{\lambda}b) + \beta_2 J_n(\sqrt{\lambda}b)] + C_2 [\alpha_2 \sqrt{\lambda} N'_n(\sqrt{\lambda}b) + \beta_2 N_n(\sqrt{\lambda}b)] = 0, \end{cases} \quad (3.57)$$

или, более кратко,

$$\begin{cases} C_1 P_1[J_n(\sqrt{\lambda}a)] + C_2 P_1[N_n(\sqrt{\lambda}a)] = 0, \\ C_1 P_2[J_n(\sqrt{\lambda}b)] + C_2 P_2[N_n(\sqrt{\lambda}b)] = 0. \end{cases} \quad (3.57^*)$$

Система (3.57*), составленная относительно C_1 и C_2 , имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} P_1[J_n(\sqrt{\lambda}a)] & P_1[N_n(\sqrt{\lambda}a)] \\ P_2[J_n(\sqrt{\lambda}b)] & P_2[N_n(\sqrt{\lambda}b)] \end{vmatrix} = 0. \quad (3.58)$$

Выражение (3.58) представляет собой трансцендентное уравнение относительно λ , k -й корень которого при фиксированном n равен λ_n^k .

При выполнении условия (3.58) из системы (3.57*) находим

$$C_2 = -C_1 \frac{P_1 \left[J_n \left(\sqrt{\lambda_n^k} a \right) \right]}{P_1 \left[N_n \left(\sqrt{\lambda_n^k} a \right) \right]}.$$

Подставляя полученное выражение в (4.57), находим ненулевое решение задачи (4.53):

$$R(r) = R_n(r) = J_n \left(\sqrt{\lambda_n^k} r \right) - \frac{P_1 \left[J_n \left(\sqrt{\lambda_n^k} a \right) \right]}{P_1 \left[N_n \left(\sqrt{\lambda_n^k} a \right) \right]} N_n \left(\sqrt{\lambda_n^k} r \right). \quad (4.59)$$

Окончательно получаем следующее выражение собственных функций задачи Штурма-Лиувилля для кругового кольца

$$u_{nk}(r, \varphi) = \left\{ J_n \left(\sqrt{\lambda_n^k} r \right) - \frac{P_1 \left[J_n \left(\sqrt{\lambda_n^k} a \right) \right]}{P_1 \left[N_n \left(\sqrt{\lambda_n^k} a \right) \right]} N_n \left(\sqrt{\lambda_n^k} r \right) \right\} \cdot \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad (4.60)$$

собственные значения которой равны λ_n^k .

Задания для самостоятельного решения

3.6 Решить задачу Штурма-Лиувилля для кругового кольца $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ с граничными условиями:

- а) $u|_{r=a} = u_r|_{r=b} = 0$; б) $u_r|_{r=a} = u|_{r=b} = 0$;
- в) $u_r + hu|_{r=a} = 0$, $u|_{r=b} = 0$, $h = \text{const}$.

Задача Штурма-Лиувилля для кольцевого сектора

Пусть D – круговой кольцевой сектор: $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \gamma$. Соответствующая задача Штурма-Лиувилля имеет вид

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ в } D, \quad (3.61)$$

$$P_1(u) = \alpha_1 u_r - \beta_1 u|_{r=a} = 0, \quad (3.62a)$$

$$P_2(u) = \alpha_2 u_r + \beta_2 u|_{r=b} = 0, \quad (3.62б)$$

$$P_3(u) = \alpha_3 u_\varphi - \beta_3 u|_{\varphi=0} = 0, \quad (3.62в)$$

$$P_4(u) = \alpha_4 u_\varphi + \beta_4 u|_{\varphi=\gamma} = 0, \quad (3.62г)$$

где $u(r, \varphi) \not\equiv 0$, $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Представляя решение в виде

$$u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \not\equiv 0,$$

и разделяя переменные, получаем две краевые задачи для $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$. Первая задача является задачей Штурма-Лиувилля для отрезка $0 \leq \varphi \leq \gamma$:

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0, \quad P_3(\Phi) = \alpha_3\Phi' - \beta_3\Phi|_{\varphi=0} = 0, \quad P_4(\Phi) = \alpha_4\Phi' + \beta_4\Phi|_{\varphi=\gamma} = 0.$$

Ее собственные функции имеют вид (3.46), а собственные значения ν_n определяются из трансцендентного уравнения (3.47).

Краевая задача для $R(r)$ (задача Штурма-Лиувилля на отрезке для оператора Бесселя), имеет вид

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0, \quad a \leq r \leq b,$$

$$P_1(R) = \alpha_1 R' - \beta_1 R|_{r=a} = 0, \quad P_2(R) = \alpha_2 R' + \beta_2 R|_{r=b} = 0.$$

Решение этой краевой задачи также осуществлено выше. Собственные функции $R_{nk}(r)$ определяются выражением (3.59), а собственное значения λ_n^k является k -м корнем уравнения (3.58) при фиксированном n .

Итак, собственные функции кругового кольцевого сектора имеют вид

$$u_{nk}(r, \varphi) = \left\{ J_n(\sqrt{\lambda_n^k} r) - \frac{P_1[J_n(\sqrt{\lambda_n^k} a)]}{P_1[N_n(\sqrt{\lambda_n^k} a)]} N_n(\sqrt{\lambda_n^k} r) \right\} \cdot \begin{cases} \cos \sqrt{\nu_n} \varphi, \\ \sin \sqrt{\nu_n} \varphi, \end{cases} \quad (3.63)$$

а собственные значения равны λ_n^k .

Задания для самостоятельного решения

3.7 Решить задачу Штурма-Лиувилля для кольцевого сектора $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \gamma$ граничными условиями:

- а) $u|_{r=a} = u|_{r=b} = 0, \quad u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\gamma} = 0;$
- б) $u_r|_{r=a} = u_r|_{r=b} = 0, \quad u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\gamma} = 0;$
- в) $u|_{r=a} = u_r|_{r=b} = 0, \quad u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\gamma} = 0;$
- г) $u|_{r=a} = u_r|_{r=b} = 0, \quad u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\gamma} = 0;$
- д) $u|_{r=a} = u|_{r=b} = 0, \quad u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\gamma} = 0.$

3.4 Задача Штурма-Лиувилля для цилиндра, цилиндрического сектора, кругового тора и сектора кругового тора прямоугольного сечения

Задача Штурма-Лиувилля для цилиндра

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля для прямого кругового цилиндра. Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с началом в центре нижнего основания цилиндра и осью z , направленной вдоль оси цилиндра.

Задача Штурма-Лиувилля имеет вид

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq l, \quad (3.64)$$

$$\alpha_1 u_r + \beta_1 u|_{r=a} = 0, \quad (3.65a)$$

$$\alpha_2 u_z - \beta_2 u|_{z=0} = 0, \quad \alpha_3 u_z + \beta_3 u|_{z=l} = 0. \quad (3.65b)$$

Решение задачи (3.64)–(3.65) будем строить методом разделения переменных, отделяя переменную z :

$$u(r, \varphi, z) = v(r, \varphi) \cdot Z(z). \quad (3.66)$$

Подставляя (3.66) в уравнение (3.64), записанное в цилиндрической системе координат, и разделяя переменные, получим

$$\frac{1}{v(r, \varphi)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{v(r, \varphi)} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \nu.$$

С учетом граничных условий (3.65) для определения $v(r, \varphi)$ и $Z(z)$ имеем следующие задачи Штурма-Лиувилля:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z'' + \nu Z = 0 \\ 0 \leq z \leq l \\ \alpha_2 Z' - \beta_2 Z|_{z=0} = 0 \\ \alpha_3 Z' - \beta_3 Z|_{z=l} = 0 \\ Z(z) \neq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r(rv_r)_r + v_{\varphi\varphi} + r^2 \kappa \cdot v = 0 \\ 0 \leq r \leq a \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \kappa = \lambda - \nu \\ \alpha_1 v_r + \beta_1 v|_{r=a} = 0 \\ v(r, \varphi) \neq 0 \end{array} \right.$$

Первая задача является задачей Штурма-Лиувилля для отрезка, а вторая – задача определения собственных функций и собственных значений круга. Учитывая известные решения (3.7) и (3.41) этих задач, получим следующие выражения собственных функций задачи Штурма-Лиувилля для цилиндра

$$u_{nkm}(r, \varphi, z) = J_n(\sqrt{\kappa_n^k} r) \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{array} \right\} Z_m(z). \quad (3.67)$$

Собственные значения имеют вид

$$\lambda_{nkm} = \kappa_n^k + \nu_m. \quad (3.68)$$

Задания для самостоятельного решения

3.8 Решить задачу Штурма-Лиувилля для прямого кругового цилиндра $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq l$ с граничными условиями:

- а) $u|_{r=a} = 0$, $u_z|_{z=0} = u_z|_{z=l} = 0$;
- б) $u_n|_S = 0$, S – полная поверхность цилиндра;
- в) $u_r|_{r=a} = 0$, $u|_{z=0} = u|_{z=l} = 0$;
- г) $u_r|_{r=a} = 0$, $u|_{z=0} = u_z|_{z=l} = 0$;
- д) $u|_{r=a} = 0$, $u_z|_{z=0} = u|_{z=l} = 0$.

Задача Штурма-Лиувилля для цилиндрического сектора

Пусть D – сектор конечного кругового цилиндра: $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \gamma$, $0 \leq z \leq l$.
Найдем решение задачи Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ в } D, \quad (3.69)$$

$$P_1(u) = \alpha_1 u_r + \beta_1 u|_{r=a} = 0, \quad (3.70a)$$

$$P_2(u) = \alpha_2 u_\varphi - \beta_2 u|_{\varphi=0} = 0, \quad P_3(u) = \alpha_3 u_\varphi + \beta_3 u|_{\varphi=\gamma} = 0, \quad (3.70б)$$

$$P_4(u) = \alpha_4 u_z - \beta_4 u|_{z=0} = 0, \quad P_5(u) = \alpha_5 u_z + \beta_5 u|_{z=l} = 0, \quad (3.70в)$$

$$u(r, \varphi, z) \neq 0, \quad |\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5.$$

Как и в предыдущем пункте, решение ищем в виде

$$u(r, \varphi, z) = v(r, \varphi) \cdot Z(z). \quad (3.71)$$

Подставляя (3.71) в (3.69)–(3.70) и разделяя переменные, получаем для функции $Z(z)$ задачу Штурма-Лиувилля для отрезка:

$$\begin{cases} Z'' + \nu Z = 0, & 0 \leq z \leq l, \\ P_4(Z)|_{z=0} = 0, \quad P_5(Z)|_{z=l} = 0, \\ Z(z) \neq 0, \end{cases} \quad (3.72a)$$

а для функции $v(r, \varphi)$ – задачу Штурма-Лиувилля для кругового сектора:

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \kappa v = 0, & 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq \gamma, \\ P_1(v)|_{r=a} = 0, \\ P_2(v)|_{\varphi=0} = 0, \quad P_3(v)|_{\varphi=\gamma} = 0, \\ v(r, \varphi) \neq 0. \end{cases} \quad (3.72б)$$

Здесь $\lambda - \nu = \kappa$, Δ_2 – двумерный оператор Лапласа в полярной системе координат.

Учитывая известные решения (3.7) и (3.50) задач (3.72a) и (3.72б), а также (3.71), найдем собственные функции цилиндрического сектора

$$u_{nkm}(r, \varphi, z) = J_n\left(\sqrt{\kappa_n^k} r\right) \begin{Bmatrix} \cos \sqrt{\mu_n} \varphi \\ \sin \sqrt{\mu_n} \varphi \end{Bmatrix} Z_m(z). \quad (3.73)$$

Собственные значения, соответственно, равны

$$\lambda_{nkm} = \kappa_n^k + \nu_m, \quad (3.74)$$

где κ_n^k и ν_m – собственные значения кругового сектора и отрезка соответственно.

Задания для самостоятельного решения

3.9 Решить задачу Штурма-Лиувилля для сектора прямого кругового цилиндра: $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \gamma$, $0 \leq z \leq l$ граничными условиями:

а) $u|_S = 0$, S – полная поверхность;

б) $u_n|_S = 0$, S – полная поверхность;

$$\begin{aligned}
\text{в)} \quad & u|_{r=a} = 0, \quad u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\gamma} = 0, \quad u_z|_{z=0} = u_z|_{z=l} = 0; \\
\text{г)} \quad & u|_{r=a} = 0, \quad u_\varphi|_{\varphi=0} = u_\varphi|_{\varphi=\gamma} = 0, \quad u|_{z=0} = u|_{z=l} = 0; \\
\text{д)} \quad & u_r|_{r=a} = 0, \quad u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\gamma} = 0, \quad u|_{z=0} = u|_{z=l} = 0; \\
\text{е)} \quad & u|_{r=a} = 0, \quad u|_{\varphi=0} = u_\varphi|_{\varphi=\gamma} = 0, \quad u|_{z=0} = u|_{z=l} = 0
\end{aligned}$$

Задача Штурма-Лиувилля для кругового тора прямоугольного сечения

Пусть D – круговой тор прямоугольного сечения: $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq l$. Задача Штурма-Лиувилля имеет вид

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ в } D, \quad (3.75)$$

$$P_1(u) = \alpha_1 u_r + \beta_1 u|_{r=a} = 0, \quad P_2(u) = \alpha_2 u_r + \beta_2 u|_{r=b} = 0, \quad (3.76a)$$

$$P_3(u) = \alpha_3 u_z - \beta_3 u|_{z=0} = 0, \quad P_4(u) = \alpha_4 u_z + \beta_4 u|_{z=l} = 0, \quad (3.76б)$$

$$u(r, \varphi + 2\pi, z) = u(r, \varphi, z) \quad \forall \varphi. \quad (3.76в)$$

Решая задачу (3.75)–(3.76) так же, как соответствующую задачу для цилиндра, получим, что собственная функция представима в виде

$$u_{nm}(r, \varphi, z) = \left\{ J_n(\sqrt{\kappa_n^k} r) - \frac{P_1[J_n(\sqrt{\kappa_n^k} a)]}{P_1[N_n(\sqrt{\kappa_n^k} a)]} N_n(\sqrt{\kappa_n^k} r) \right\} \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix} Z_m(z) \quad (3.77)$$

Собственные значения, соответственно, равны

$$\lambda_{nm} = \kappa_n^k + \nu_m, \quad (3.78)$$

где κ_n^k и ν_m – собственные значения кругового кольца и отрезка соответственно.

Задания для самостоятельного решения

3.10 Решить задачу Штурма-Лиувилля для прямого кругового тора прямоугольного сечения: $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq l$ с граничными условиями:

$$\begin{aligned}
\text{а)} \quad & \text{условия Дирихле;} \\
\text{б)} \quad & \text{условия Неймана;} \\
\text{в)} \quad & u|_{r=a} = u|_{r=b} = 0, \quad u_z|_{z=0} = u_z|_{z=l} = 0; \\
\text{г)} \quad & u|_{r=a} = u|_{r=b} = 0, \quad u|_{z=0} = u|_{z=l} = 0; \\
\text{д)} \quad & u_r|_{r=a} = u_r|_{r=b} = 0, \quad u|_{z=0} = u|_{z=l} = 0; \\
\text{е)} \quad & u|_{r=a} = u_r|_{r=b} = 0, \quad u_z|_{z=0} = u|_{z=l} = 0.
\end{aligned}$$

Задача Штурма-Лиувилля для сектора кругового тора прямоугольного сечения

Пусть D – сектор кругового тора прямоугольного сечения: $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \gamma$, $0 \leq z \leq l$. Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ в } D, \quad (3.79)$$

$$P_1(u) = \alpha_1 u_r + \beta_1 u|_{r=a} = 0, \quad P_2(u) = \alpha_2 u_r + \beta_2 u|_{r=b} = 0, \quad (3.80a)$$

$$P_3(u) = \alpha_3 u_\varphi - \beta_3 u \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad P_4(u) = \alpha_4 u_\varphi + \beta_4 u \Big|_{\varphi=\gamma} = 0, \quad (3.80б)$$

$$P_5(u) = \alpha_5 u_z - \beta_5 u \Big|_{z=0} = 0, \quad P_6(u) = \alpha_6 u_z + \beta_6 u \Big|_{z=l} = 0. \quad (3.80в)$$

Решая эту задачу аналогично тому, как это сделано для случая цилиндрического сектора, получим, что собственные функции представимы в виде

$$u_{nkm}(r, \varphi, z) = \left\{ J_n(\sqrt{\kappa_n^k} r) - \frac{P_1 \left[J_n(\sqrt{\kappa_n^k} a) \right]}{P_1 \left[N_n(\sqrt{\kappa_n^k} a) \right]} N_n(\sqrt{\kappa_n^k} r) \right\} \begin{Bmatrix} \cos \sqrt{\mu_n} \varphi \\ \sin \sqrt{\mu_n} \varphi \end{Bmatrix} Z_m(z) \quad (3.81)$$

Собственные значения, соответственно, равны

$$\lambda_{nkm} = \kappa_n^k + \nu_m, \quad (3.82)$$

где κ_n^k и ν_m – собственные значения кольцевого сектора и отрезка соответственно.

3.5 Задача Штурма-Лиувилля для шара, шарового слоя

Задача Штурма-Лиувилля для шара

Перейдем к исследованию систем, обладающих сферической симметрией. Пусть D – шар радиуса a : $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ с началом в центре шара. Задача Штурма-Лиувилля для такой системы имеет вид:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ в } D, \quad (3.83)$$

$$P(u) = \alpha u_r + \beta u \Big|_{r=a} = 0, \quad u \neq 0. \quad (3.84)$$

Решение строим методом разделения переменных, отделяя радиальную переменную r :

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot v(\theta, \varphi). \quad (3.85)$$

Подставляя (4.85) в уравнение (4.84), записанное в сферической системе координат, и разделяя переменные, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \lambda r^2 = -\frac{1}{v} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \\ - \frac{1}{v} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \equiv -\frac{\Delta_{\theta\varphi} v}{v(\theta, \varphi)} = \mu. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Здесь введено обозначение

$$\Delta_{\theta\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (3.87)$$

Собственные функции должны быть ограничены в D и периодичны по φ с периодом 2π . Поэтому из (3.86) для функции $v(\theta, \varphi)$ получаем задачу Штурма-Лиувилля

$$\Delta_{\theta\varphi} v + \mu v = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$v(\theta, \varphi) \equiv v(\theta, \varphi + 2\pi),$$

$$|v(0, \varphi)| < \infty, \quad |v(\pi, \varphi)| < \infty, \quad v(\theta, \varphi) \neq 0,$$

собственными функциями которой являются сферические функции:

$$v(\theta, \varphi) = v_{nm}(\theta, \varphi) = Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_n^{(m)}(\cos \theta) \cdot \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi. \end{cases} \quad (3.88)$$

а собственные значения равны

$$\mu = \mu_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Для каждого $\mu = n(n+1)$ из (81) получаем уравнение для $R(r)$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R = 0, \quad (3.89)$$

решение которого должно удовлетворять согласно (4.84) граничному условию при $r = a$:

$$\alpha R' + \beta R \Big|_{r=a} = 0$$

и естественному условию ограниченности при $r = 0$:

$$|R(0)| < \infty.$$

С помощью замены

$$R = \frac{y(r)}{\sqrt{r}}$$

задача для R приводится к следующей задаче Штурма-Лиувилля:

$$r^2 y'' + ry' + \left[\lambda - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] y = 0, \quad (3.90)$$

$$\alpha y' + \left(\beta - \frac{\alpha}{2a} \right) y \Big|_{r=a} = 0, \quad |y(0)| < \infty. \quad (3.91)$$

Общее решение уравнения (3.90) имеет вид

$$y = C_1 J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} r) + C_2 N_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} r).$$

Учитывая поведение функций Неймана в нуле и условие ограниченности, находим $C_2 = 0$. Для определения λ из (3.91) получаем дисперсионное уравнение

$$\alpha \sqrt{\lambda} J'_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} a) + \left(\beta - \frac{\alpha}{2a} \right) J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} a) = 0,$$

k -й корень которого при фиксированном n обозначим через λ_n^k . Тогда функцию $R(r)$ можно записать в виде

$$R(r) = R_{nk}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda_n^k} r). \quad (3.92)$$

Таким образом, собственная функция шара имеет вид

$$u_{nmk}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda_n^k} r) \cdot P_n^{(m)}(\cos \theta) \cdot \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases} \quad (3.93)$$

а собственные значения равны λ_n^k .

Легко заметить, что каждому собственному значению λ_n^k соответствуют $2n+1$ линейно независимых собственных функций.

Задача Штурма-Лиувилля для шарового слоя

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля для шарового слоя D ($a \leq r \leq b$):

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ в } D, \quad (3.94)$$

$$P_1(u) = \alpha_1 u_r + \beta_1 u|_{r=a} = 0, \quad P_2(u) = \alpha_2 u_r + \beta_2 u|_{r=b} = 0, \quad (3.95)$$

$$u(r, \theta, \varphi) \neq 0, \quad |\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

Записывая решение в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot v(\theta, \varphi), \quad (3.96)$$

подставляя в уравнение (3.94) и разделяя переменные, получим задачу Штурма-Лиувилля для функции $v(\theta, \varphi)$ на сфере $r = a$:

$$\Delta_{\theta\varphi} v + \mu v = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$v(\theta, \varphi) \equiv v(\theta, \varphi + 2\pi), \quad (3.97)$$

$$|v(0, \varphi)| < \infty, \quad |v(\pi, \varphi)| < \infty, \quad v(\theta, \varphi) \neq 0$$

и задачу Штурма-Лиувилля для функции $R(r)$ на отрезке $a \leq r \leq b$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R = 0, \quad (3.98)$$

$$\alpha_1 R' + \beta_1 R|_{r=a} = 0, \quad \alpha_2 R' + \beta_2 R|_{r=b} = 0, \quad (3.99)$$

$$R(r) \neq 0, \quad |\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

Собственными функциями задачи (3.97) являются сферические функции

$$v(\theta, \varphi) = v_{nm}(\theta, \varphi) = Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_n^{(m)}(\cos \theta) \cdot \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases} \quad (3.100)$$

а собственные значения равны

$$\mu = \mu_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Общее решение уравнения (4.98) при $\mu = n(n+1)$ имеет вид

$$R(r) = C_1 \frac{J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}} + C_2 \frac{N_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}}. \quad (3.101)$$

Подставляя (3.101) в граничные условия (4.99), получим

$$\begin{cases} C_1 p_1(\lambda, a) + C_2 q_1(\lambda, a) = 0, \\ C_1 p_2(\lambda, b) + C_2 q_2(\lambda, b) = 0, \end{cases} \quad (3.102)$$

где

$$p_1(\lambda, a) = \alpha_1 \sqrt{\lambda} J'_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}a) - \left(\beta_1 + \frac{\alpha_1}{2a} \right) J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}a),$$

$$q_1(\lambda, a) = \alpha_1 \sqrt{\lambda} N'_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} a) - \left(\beta_1 + \frac{\alpha_1}{2a} \right) N_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} a),$$

$$p_2(\lambda, a) = \alpha_2 \sqrt{\lambda} J'_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} b) + \left(\beta_2 - \frac{\alpha_2}{2b} \right) J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} b),$$

$$q_2(\lambda, a) = \alpha_2 \sqrt{\lambda} N'_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} b) + \left(\beta_2 - \frac{\alpha_2}{2b} \right) N_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} b).$$

Приравнявая нулю определитель системы (3.102), получаем дисперсионное уравнение для определения λ

$$\frac{p_1(\lambda, a)}{p_2(\lambda, a)} = \frac{q_1(\lambda, a)}{q_2(\lambda, a)},$$

k -й корень которого равен λ_n^k . Из системы (3.102) имеем

$$C_2 = -C_1 \frac{p_1(\lambda, a)}{q_1(\lambda, a)}.$$

Поскольку решение задачи Штурма-Лиувилля определяется с точностью до постоянного множителя, имеется возможность произвольного выбора коэффициента C_1 . Полагая $C_1 = q_1(\lambda, a)$, запишем собственную функцию задачи (3.98)–(3.99) в виде

$$R_{nk}(r) = \frac{J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda_n^k} r)}{\sqrt{r}} q_1(\lambda_n^k, a) - \frac{N_{n+1/2}(\sqrt{\lambda_n^k} r)}{\sqrt{r}} p_1(\lambda_n^k, a). \quad (3.103)$$

Таким образом, собственные функции шарового слоя можно записать в виде

$$u_{nmk}(r, \theta, \varphi) = \left\{ \frac{J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda_n^k} r)}{\sqrt{r}} q_1(\lambda_n^k, a) - \frac{N_{n+1/2}(\sqrt{\lambda_n^k} r)}{\sqrt{r}} p_1(\lambda_n^k, a) \right\} \times P_n^{(m)}(\cos \theta) \cdot \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \quad (3.104)$$

а собственные значения равны λ_n^k .

Задания для самостоятельного решения

3.11 Решить задачу Штурма-Лиувилля для шаровой оболочки $a \leq r \leq b$ с граничными условиями:

а) $u|_{r=a} = u|_{r=b} = 0$; б) $u_r|_{r=a} = u_r|_{r=b} = 0$;

в) $u|_{r=a} = u_r|_{r=b} = 0$; г) $u_r|_{r=a} = u|_{r=b} = 0$.

Отчет:

- Ответы на контрольные вопросы.
- Защита результатов выполнения коллективных и индивидуальных заданий.

Контрольные вопросы

1. Понятие задачи Штурма-Лиувилля. Основные свойства собственных значений и собственных функций.
2. Основная идея и расчетная схема метода разделения переменных.
3. Задача Штурма-Лиувилля для отрезка (общий случай).
4. Задача Штурма-Лиувилля для отрезка (периодические граничные условия).
5. Задача Штурма-Лиувилля для прямоугольника.
6. Задача Штурма-Лиувилля для прямоугольного параллелепипеда.
7. Задача Штурма-Лиувилля для круга.
8. Задача Штурма-Лиувилля для кругового кольца.
9. Задача Штурма-Лиувилля для кругового сектора.
10. Задача Штурма-Лиувилля для кольцевого сектора.
11. Задача Штурма-Лиувилля для цилиндра.
12. Задача Штурма-Лиувилля для цилиндрического сектора.
13. Задача Штурма-Лиувилля для тора прямоугольного сечения.
14. Задача Штурма-Лиувилля для сектора кругового тора прямоугольного сечения.
15. Задача Штурма-Лиувилля для шара.
16. Задача Штурма-Лиувилля для шарового слоя.
17. Использование метода разделения переменных при решении краевых задач для неоднородных уравнений.
18. Решение краевых задач с неоднородными граничными условиями.

Литература

6. Конспект лекций.
7. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике. – М.: МГУ, 1998. – 350 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебное пособие для вузов. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.
9. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: Учебник для ВУЗов. – М.: Физматлит, 2001. – 398 с.
10. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002. – 367 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**Методические указания для обучающихся по организации и проведению
самостоятельной работы**

Направление подготовки 03.03.02 Физика
Направленность (профиль)
«Медицинская физика»

**Ставрополь
2026**

Содержание

Пояснительная записка

Виды и содержание самостоятельной работы студента; формы контроля

Контрольные точки и виды отчетности

Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Список рекомендуемой литературы

Пояснительная записка

Все виды самостоятельной работы студентов по дисциплине «Уравнения математической физики», предусмотренные учебным планом и рабочей программой, направлены на осуществление следующих основных целей:

- *овладение знаниями*: изучение источников литературы по темам дисциплины; учебно-исследовательская работа; использование компьютерной техники, Интернет;
- *закрепление и систематизация знаний*: работа с конспектом лекции (обработка текста); повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы, аудио- и видеозаписей); составление плана и тезисов ответа; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста (аннотирование, рецензирование, реферирование, конспект, анализ и др.); подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка рефератов, докладов; составление библиографии; тестирование и др.;
- *формирование умений*: решение задач и упражнений по образцу; решение нелинейных задач математической физики; математическое моделирование разного рода физических процессов; подготовка курсовых и дипломных работ (проектов); экспериментальная работа; рефлексивный анализ профессиональных умений с использованием аудио- и видеотехники и др.

Основными **формами работы и контроля** самостоятельной работы студентов являются:

Индивидуальное решение репродуктивных, реконструктивных и творческих **заданий**, позволяющих оценивать и диагностировать уровень обученности, уровень умений и навыков студентов по дисциплине.

Собеседование - форма учебной деятельности, специальная беседа преподавателя со студентом на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, рассчитанная на выяснение объема знаний студента по определенному разделу, теме, проблеме и т. п., позволяющая оценить их знания по теме, умение аргументировать собственную точку зрения, предполагающая всестороннее обсуждение какого-либо вопроса, проблемы или сопоставлении информации, идей, мнений, предложений.

Виды и содержание самостоятельной работы студента; формы контроля

Коды реализуемых копетенций	Вид деятельности студентов	Итоговый продукт самостоятельной работы	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
				СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
4 семестр						
ИД-З _{ОПК-1} ИД-З _{ОПК-3}	Самостоятельное решение задач	Решение практических заданий на тему «Физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных. Специальные функции математической физики»	Зачетное задание	11.00	1	12.00
ИД-З _{ОПК-1} ИД-З _{ОПК-3}	Самостоятельное решение задач	Решение практических заданий на тему «Краевые задачи для уравнения Лапласа»	Зачетное задание	11.00	1	12.00
ИД-З _{ОПК-1} ИД-З _{ОПК-3}	Самостоятельное решение задач	Решение практических заданий на тему «Общая схема метода разделения переменных. Задача Штурма- Лиувилля»	Зачетное задание	11.00	1	12.00
ИД-З _{ОПК-1} ИД-З _{ОПК-3}	Самостоятельное решение задач	Решение практических заданий на тему «Постановка краевых задач математической физики. Приведение дифференциальных уравнений к каноническому виду»	Зачетное задание	11.00	1	12.00

ИД-З _{ОПК-1} ИД-З _{ОПК-3}	Самостоятельное решение задач	Решение практических заданий на тему «Уравнения гиперболического типа»	Зачетное задание	11.00	1	12.00
ИД-З _{ОПК-1} ИД-З _{ОПК-3}	Самостоятельное решение задач	Решение практических заданий на тему «Уравнения параболического типа»	Зачетное задание	11.00	1	12.00
ИД-З _{ОПК-1} ИД-З _{ОПК-3}	Подготовка к экзамену	Экзамен	Вопросы к экзамену	8.00	1.00	9.00
Итого за семестр				74	7	81
Итого				74	7	81

Контрольные точки и виды отчетности

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения	Количество баллов
4 семестр			
1	Практическое занятие 5	5	15
2	Практическое занятие 11	11	20
3	Практическое занятие 17	17	20
	Итого за 4 семестр:		55
	Итого:		55

Методические рекомендации по изучению теоретического материала

При изучении теоретического материала по дисциплине «Уравнения математической физики», основополагающим для студента является курс лекций по данной дисциплине, составленный в соответствии с учебной программой. При использовании дополнительных источников литературы следует придерживаться плана и содержания изучаемой дисциплины, представленного в учебной программе.

Вопросы для изучения:

1. Физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных.
Специальные функции математической физики
2. Постановка краевых задач математической физики. Приведение дифференциальных уравнений к каноническому виду

3. Общая схема метода разделения переменных. Задача Штурма-Лиувилля
4. Краевые задачи для уравнения Лапласа
5. Уравнения гиперболического типа
6. Уравнения параболического типа

По результатам изучения теоретического материала преподавателем осуществляется контроль полученных студентом знаний, формами которого являются собеседование и доклад рефератов.

Собеседование - форма учебной деятельности, специальная беседа преподавателя со студентом на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, рассчитанная на выяснение объема знаний студента по определенному разделу, теме, проблеме и т.п., позволяющая оценить их умение аргументировать собственную точку зрения, предполагающая всестороннее обсуждение какого-либо вопроса, проблемы или сопоставлении информации, идей, мнений, предложений.

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя:

- отдельное собеседование по каждой из указанных тем;
- составленные аспирантом конспекты научной литературы;
- анализ аспирантом публицистического материала.

Принципиальные отличия заданий базового уровня от повышенного заключаются в большем объеме фактов и событий, в сравнительно-аналитическом характере изложения материала, его теоретической (методологической) составляющей.

Для подготовки к каждой теме следует изучить и законспектировать рекомендованные источники и научную литературу и на их основании подготовиться к указанным в методических материалах вопросам для обсуждения.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования указанными конспектами.

При проверке задания, оцениваются:

- активное участие в работе;
- уверенное владение материалом;
- умение четко и логично излагать свои мысли;
- умение творчески подходить к решению основных вопросов темы;
- самостоятельность мышления,
- полное соответствие конспекта установленным требованиям;

- самостоятельная устная речь, полностью раскрывающая суть проблематики собеседования.

Критерии оценки самостоятельной работы студентов

Критерии оценивания результатов самостоятельной работы студентов разработаны с учетом требований ФГОС ВО. Задания, выносимые на самостоятельную работу студентов, оцениваются по шкале «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно».

Оценка «**отлично**» выставляется при следующих условиях:

- даны исчерпывающие и обоснованные ответы на вопросы, поставленные в задании, выносимом на самостоятельную работу аспирантов;
- показано умение грамотно применять полученные теоретические знания при анализе событий действительности;
- показано глубокое и творческое овладение основной и дополнительной литературой;
- материал излагается аргументировано и логически стройно.

Оценка «**хорошо**» выставляется при следующих условиях:

- даны полные, достаточно глубокие и обоснованные ответы на вопросы, поставленные в задании, выносимом на самостоятельную работу аспирантов;
- показаны достаточно прочные практические навыки;
- даны полные, но недостаточно обоснованные ответы на дополнительные вопросы;
- показаны глубокие знания основной и недостаточное знакомство с дополнительной литературой;
- показано умение теоретически обосновывать высказываемые положения;
- ответы в основном были краткими, но в них не всегда выдерживалась логическая последовательность.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется при следующих условиях.

- даны в основном правильные ответы на все вопросы задания, выносимого на самостоятельную работу аспирантов, но без должной глубины и обоснования;
- показаны недостаточно прочные практические навыки;
- не даны положительные ответы на некоторые дополнительные вопросы;
- показаны недостаточные знания основной литературы;
- ответы были многословными, мысли излагались недостаточно четко и без должной логической последовательности.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется в случаях, когда не выполнены условия, позволяющие поставить оценку «удовлетворительно», когда аспирант не усвоил основного содержания предмета и слабо знает рекомендованную литературу.

