

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению практических занятий
по дисциплине «Теоретическая механика»
для студентов направления подготовки 21.03.01 Нефтегазовое дело
направленность (профиль) «Бурение нефтяных и газовых скважин»

План практических занятий

Раздел 1. Статика.

1. Тема: Виды связей и их реакции.	5
2. Тема: Момент силы относительно неподвижной точки на плоскости.	
Пара сил. Момент пары сил. Эквивалентные преобразования пар сил.	7
3. Тема: Теорема Вариньона о моменте равнодействующей произвольной плоской системы сил.	12
4. Тема: Определение реакций опор твёрдого тела. Плоская произвольная система сил.	15
5. Тема: Определение реакций опор твёрдого тела. Пространственная произвольная система сил.	37
6. Тема : Координатный способ задания движения точки. Основные кинематические характеристики – траектория, скорость, ускорение, радиус кривизны траектории.	57
7. Тема : Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела при поступательном движении.	65
8. Тема: Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела при вращательном движении.	67
9. Рекомендуемая литература.	68

Предисловие

Цель дисциплины: дать представление о предмете классической механики, включая как физические ее основы, так и дифференциально–геометрические аспекты с использованием традиционных моделей движущихся объектов и среды.

Задачи дисциплины: изучение классической механики, т.е. механики, основанной на законах Ньютона, с формулировками задач с техническим содержанием и приемами решения таких задач средствами математического анализа.

Цели и задачи дисциплины соотнесены с общими целями основной образовательной программы и квалификационными характеристиками специалиста и ориентированы на формирование и развитие общекультурных и профессиональных компетенций будущего специалиста.

Теоретическая механика относится к математическому и естественнонаучному циклу базовой части. Ее освоение происходит во 2 семестре в контексте формирования и развития общекультурных и профессиональных компетенций специалиста по специальности 21.03.01 – «Нефтегазовое дело» (специализация – Бурение нефтяных и газовых скважин).

Учебное пособие (практикум) составлено в соответствии с требованиями ФГОС ВО к подготовке выпускника для получения квалификации специалиста, предназначено для студентов очной и заочной формы обучения специальности 21.03.01 – «Нефтегазовое дело» (специализация – Бурение нефтяных и газовых скважин).

Практикум содержит краткий теоретический обзор по теме практического занятия, задачи, практические задания, примеры решения заданий и методические рекомендации, задачи на самостоятельную проработку, вопросы в контексте формирования и развития общекультурных и профессиональных компетенций специалиста.

План практических занятий.

Раздел 1. Статика.

1. Тема: Виды связей и их реакции.

Цель занятия: свободное и несвободное абсолютно твердое тело, принцип освобожденности от связей, виды связей и их реакции. Реализация учебной цели практического занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОПК–1.

Организационная форма: решение задач.

Методические рекомендации к практическому занятию:

Краткий теоретический обзор: Тело, некоторым перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним тела, называется *несвободным*. Всякое тело, ограничивающее свободу перемещения данного твердого тела, является по отношению к нему *связью*.

В статике абсолютно твердого тела связи, налагаемые на рассматриваемое тело, чаще всего встречаются в виде *неподвижных поверхностей, линий и точек, а также в виде гибких нитей*.

Таким образом, твердое тело является несвободным, если на это тело наложены связи. Например, висящее на гибкой нити тело будет несвободным (рис. 1), так как на него наложена связь в виде нити и оно не может перемещаться вертикально вниз по направлению вытянутой нити, не разорвав ее.



Если на твердое тело не наложены никакие связи, то такое тело очевидно является *свободным*.

Сила, характеризующая действие связи на тело, называется *силой реакции связи*. Аксиома VI. *Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив их действие соответствующими силами реакций связей*.

Эта аксиома называется *аксиомой связей, или принципом освобожденности от связей*.

Пример решения задачи: Связь осуществляется посредством гибкого тела (нить, канат, и т. п.). Такая связь называется *гибкой*. Если на тело наложена гибкая связь, то сила реакции приложена к телу в точке прикрепления гибкой связи. Сила реакции гибкой связи

Рисунок 1

направлена, вообще говоря, по касательной к связи в точке ее прикрепления к телу. В частности, сила реакции гибкой связи $\vec{T}_A$ (рис. 1) может иметь линию действия – ось этой связи.

Вопросы для обсуждения:

1. Свободное абсолютно твердое тело?
2. Несвободное абсолютно твердое тело?
3. Что такое связь? Реакция связи (опоры)?
4. Свободная опора–реакция связи?
5. Жесткая заделка плоская – реакция связи?
6. Неподвижная шарнирная опора плоская– реакция связи?
7. Гибкие связи – реакция связи?
8. Подвижная шарнирная опора плоская – реакция связи?
9. Скользящая заделка плоская вертикальная – реакция связи?
10. Абсолютно твёрдый невесомый стержень– реакция связи?
11. Скользящая заделка плоская горизонтальная – реакция связи?
12. Втулки – реакция связи?
13. Неподвижная шарнирная опора пространственная (сферический шарнир) – реакция связи?
14. Жесткая заделка пространственная – реакция связи?
15. Скользящая заделка плоская вертикальная – реакция связи?
16. Скользящая заделка пространственная – цилиндрический подшипник – реакция связи?
17. Пространственный подпятник – реакция связи?

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб.пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.
4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: www.mashin.ru

2. Тема: Момент силы относительно неподвижной точки на плоскости. Пара сил. Момент пары сил. Эквивалентные преобразования пар сил.

Цель занятия: Момент силы относительно неподвижной точки на плоскости, пара сил, момент пары сил. Эквивалентные преобразования пар сил. Плоская произвольная система сил, условия равновесия плоской произвольной системы сил, аналитический способ уравнивания конструкции. Реализация учебной цели практического занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОПК–1.

Организационная форма: решение задач.

Методические рекомендации к практическому занятию:

Краткий теоретический обзор:

Понятие момента силы возникло в связи с определением вращательного действия силы, приложенной к телу, имеющему неподвижную точку или неподвижную ось. Алгебраическим моментом силы относительно некоторой точки O на плоскости называется скалярная величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо относительно этой точки.

$$m_o \vec{F} = Fd \quad (1)$$

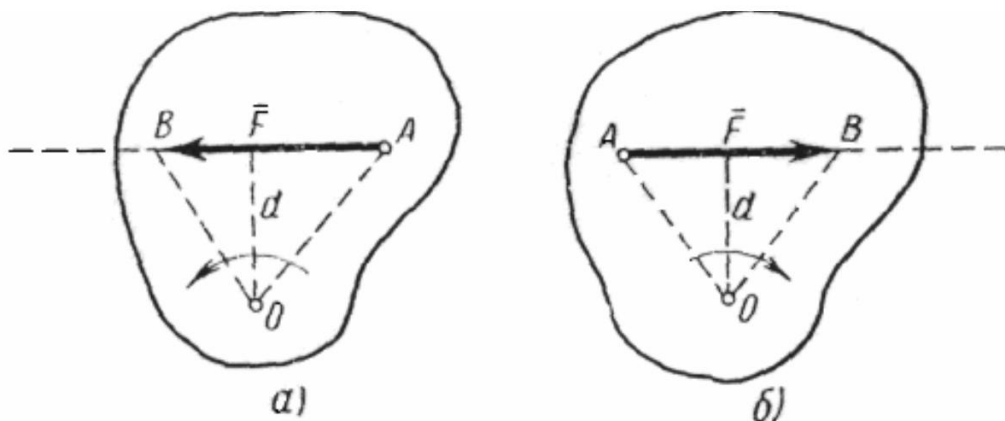


Рисунок 2

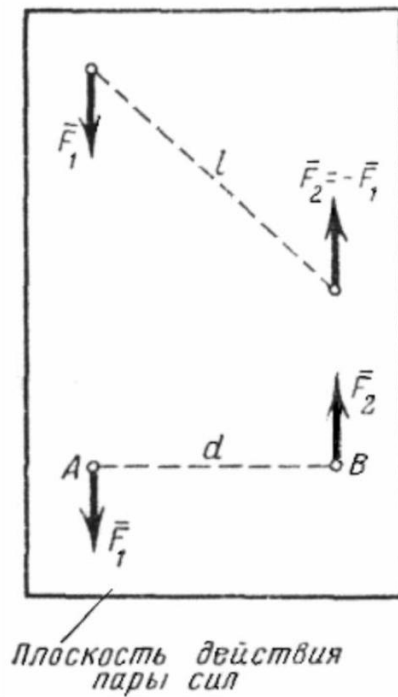


Рисунок 3

Мы уже знаем, что система двух сил, как угодно расположенных в одной плоскости, приводятся к одной равнодействующей силе; исключением является система двух взаимно уравнивающих сил. В этом параграфе мы установим, что другим исключением является *система двух равных по модулю параллельных друг другу и направленных в разные стороны сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, линии действия которых не совпадают* (рисунок 46). Такая система двух сил образует так называемую *пару сил*, или просто *пару*, для обозначения которой будем пользоваться символом $[\vec{F}, \vec{F}]$.

Плоскость в которой расположена пара сил, называется *плоскостью действия пары*.

Кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары $[\vec{F}, \vec{F}]$ т. е. длина перпендикуляра, опущенного из точки приложения A одной из сил пары на линию действия второй силы, называется *плечом пары d* . Пара сил, приложенная к твердому телу, способна привести его во вращательное движение. Вращательное действие пары на тело будет тем больше, чем больше плечо пары и модули сил, образующих эту пару, и измеряется так называемым *моментом пары*. При этом *численное значение момента пары определяется как произведение модуля одной из сил пары на плечо этой пары. моментом пары называется скалярная величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на ее плечо*. Будет обозначать момент пары символом $m[\vec{F}_1, \vec{F}_2]$. Тогда

$$m[\vec{F}_1, \vec{F}_2] = F_1 d = F_2 d. \quad (2)$$

Будем считать *положительным* момент такой пары которая стремится повернуть тело против направления вращения часовой стрелки, и *отрицательным* — момент такой пары, которая стремится повернуть тело по направлению вращения часовой стрелки.

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы моментов всех сил относительно каждой из трех любых точек A , B и C , взятых в плоскости действия этой системы сил и не лежащих на одной прямой, были равны нулю:

$$\sum_{i=1}^n m_A(F_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_B(F_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_C(F_i) = 0. \quad (4)$$

Задача:

Между опорами двухконсольной горизонтальной балки CD (рисунок 16, a) приложена пара $[P, P']$ к левой консоли – равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q , а в точке D правой консоли – вертикальная нагрузка $Q = 4,6$ Н. Определить реакции опор, если $P = 4$ Н, $q = 4$ Н/м, $a = 2,5$ м.

Решение. Двухконсольная балка CD является тем телом, равновесие которого мы должны рассмотреть. К ней приложена пара сил $[P, P']$ моментом $m = Pa$ и две активные силы: в точке D сила $\bar{Q}$ и на середине левой консоли сила $\bar{R} = q \cdot \frac{a}{2}$, являющаяся равнодействующей равномерно распределенной нагрузки.

Следовательно, все приложенные к балке CD активные силы являются вертикальными,

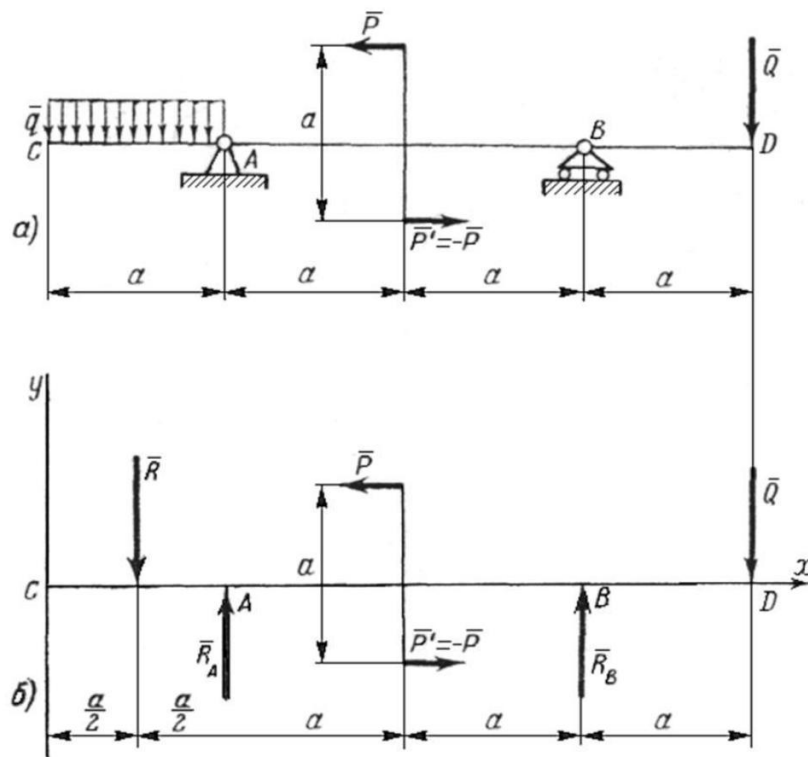


Рисунок 4

так как пару сил $[P, \bar{P}]$ не изменяя ее действия на балку, можно повернуть в плоскости рисунка так, чтобы составляющие пару $[P, \bar{P}]$ силы $\bar{P}$ и P были вертикальны.

Связями, наложенными на балку CD , являются подвижная шарнирная опора B и неподвижная шарнирная опора A . Отбросим эти связи и заменим их действие на балку CD силами реакций. Реакция $\bar{R}_B$ подвижной шарнирной опоры B нормальна к плоскости опоры (рисунок 4, б). Так как все действующие на балку CD активные силы вертикальны, то реакция $\bar{R}_A$ неподвижной шарнирной опоры A также вертикальна. Рассмотрим теперь равновесие двухконсольной балки CD как свободного твердого тела, на которое действует указанная плоская система параллельных сил (рисунок 4, б). Для составления уравнений равновесия этой системы сил в форме

$$\sum m_A \bar{F} = 0; \quad \sum m_B \bar{F} = 0 \quad (5)$$

Последовательно примем за центр моментов точки A и B . При этом уравнения моментов будут содержать только одно неизвестное.

Итак, в данном случае будем иметь

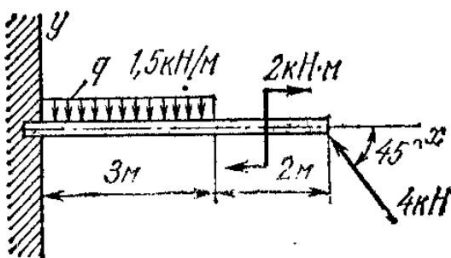
$$\sum m_A \bar{F} = qa \cdot \frac{a}{2} - \sum m_B \bar{R}_B = 2a - Q \cdot 3a = 0; \quad (6)$$

$$\sum m_B \bar{F} = qa \cdot \frac{a}{2} - 2a - \sum m_A \bar{R}_A = 2a - Qa = 0. \quad (7)$$

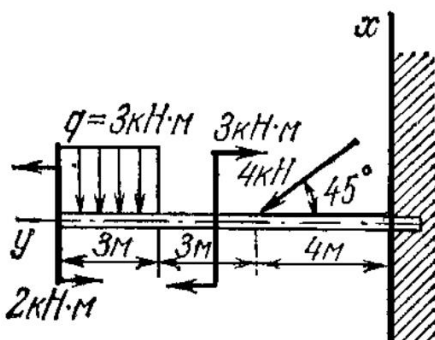
Решая порознь уравнения (6) и (7), найдем

$$R_A = 1,5 \text{ Н}; \quad R_B = 2,5 \text{ Н}.$$

Решить самостоятельно:



1. Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенной силы и пары сил.

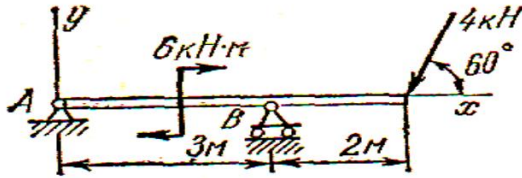


2. Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, одной сосредоточенной силы и двух пар сил.

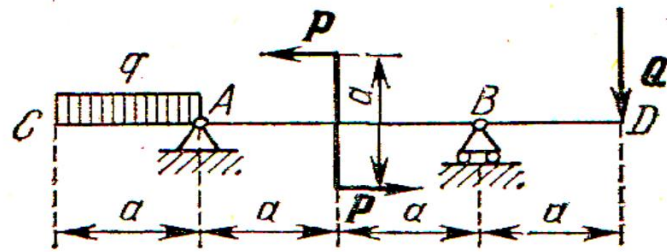
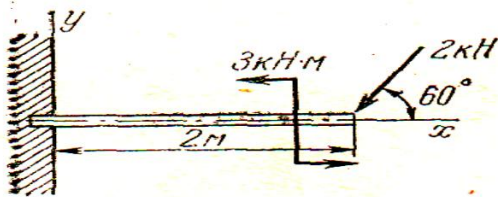
3. На двухконсольную горизонтальную балку действует пара сил $(P, \bar{P})$, на левую консоль — равномерно распределенная нагрузка интенсивности q , а в точке D правой

консоли — вертикальная нагрузка

Q. Определить реакции опор, если $P = 1$ кН, $Q = 2$ кН, $q = 2$ кН/м, $a = 0,8$ м.



размеры указаны на рисунке.



4. Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы и пары сил. Нагрузка и

5. Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием сосредоточенной силы и пары сил.

Вопросы для обсуждения:

1. Плоская произвольная система сил?
2. Равномерно – распределённая нагрузка, равнодействующая?
3. Разложение силы на две составляющие по осям?
4. Пара сил. Момент пары сил?
5. Опоры (связи) и силы реакций опор?
6. Алгебраический момент силы относительно неподвижной точки на плоскости и его свойства?
7. Аналитические условия равновесия плоской произвольной системы сил?

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.
4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: www.mashin.ru

3. Тема: Теорема Вариньона о моменте равнодействующей произвольной плоской системы сил.

Цель занятия: плоская произвольная система сил, алгебраический момент силы относительно неподвижной точки на плоскости, теорема Вариньона, условия равновесия плоской произвольной системы сил, аналитический способ уравнивания конструкции. Реализация учебной цели практического занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОПК-1.

Организационная форма: решение задач.

Методические рекомендации к практическому занятию:

Краткий теоретический обзор:

Теорема Вариньона: Момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно некоторой точки, лежащей в плоскости сил, равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки.

$$m_o(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n m_o(\vec{F}_i) \quad (8)$$

Условие равновесия рычага согласно теории Вариньона

$$\sum_{i=1}^n m_o(\vec{F}_i) = 0, \quad (9)$$

Для равновесия рычага необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов всех приложенных к рычагу сил относительно точки его опоры равнялась нулю.

Задача:

На концы прямолинейного рычага AB длиной l , закрепленного на шарнире O , действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, образующие с рычагом углы α_1 и α_2 . Найти расстояние OA при равновесии рычага (рисунок 6).

Решение. Так как рычаг AB находится в равновесии под действием сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, то алгебраическая сумма моментов этих сил относительно опоры O равна нулю, т. е. $m_o(\vec{F}_1) + m_o(\vec{F}_2) = 0$.

$$\text{Но } m_o(\vec{F}_1) = F_1 \cdot OA_1, \quad m_o(\vec{F}_2) = F_2 \cdot OB_1,$$

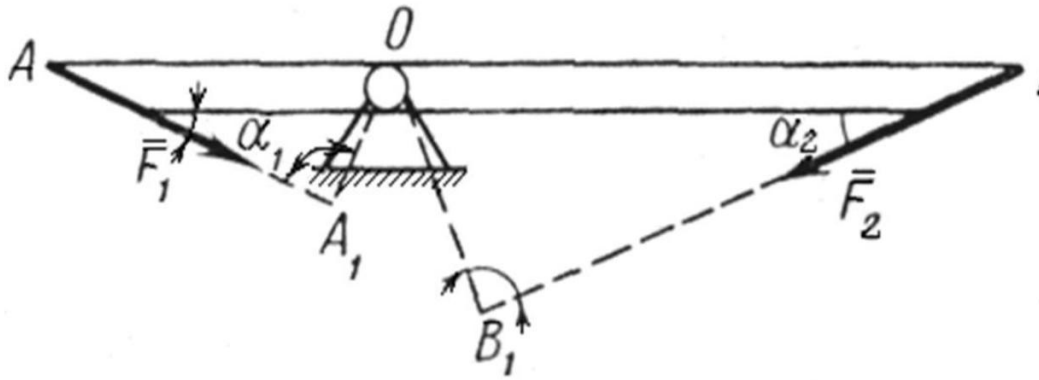


Рисунок 6

где OA_1 – плечо силы $\overline{F_1}$ относительно точки O , а OB_1 – плечо силы $\overline{F_2}$ относительно той же точки O . Из треугольников OBV_1 и OAA_1 находим

$$OA_1 = OA \sin \alpha_1$$

и

$$OB_1 = OB \sin \alpha_2 = AB \sin \alpha_2 = l \sin \alpha_2.$$

Следовательно,

$$m_o \overline{F_1} = F_1 OA \sin \alpha_1; m_o \overline{F_2} = F_2 l \sin \alpha_2.$$

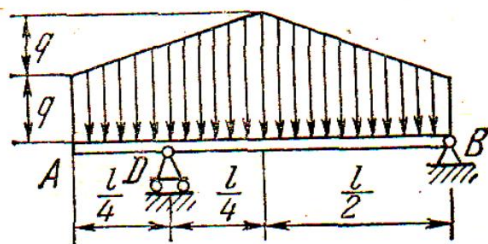
Уравнение равновесия рычага примет вид

$$F_1 OA \sin \alpha_1 = F_2 l \sin \alpha_2 = 0,$$

отсюда

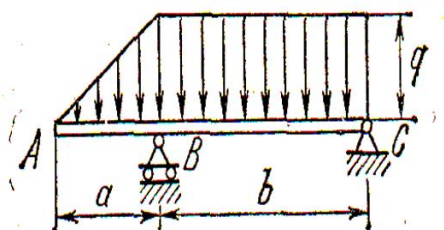
$$OA = \frac{F_2 l \sin \alpha_2}{F_1 \sin \alpha_1}.$$

Решить самостоятельно:

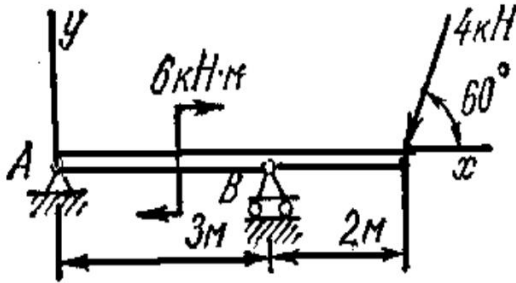


1. Балка AB длины l м несет распределенную нагрузку, показанную на рисунке. Интенсивность нагрузки равна q Н/м на концах A и B балки и $2q$ Н/м в середине балки. Пренебрегая весом балки, найти реакции опор D и B .

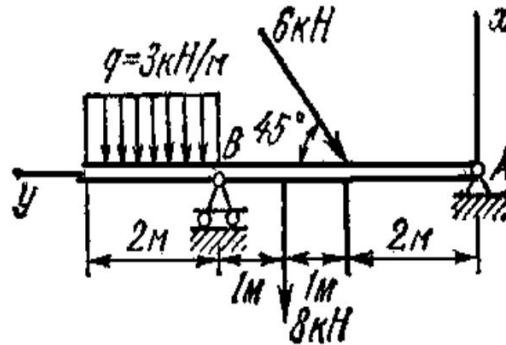
2. Горизонтальная балка AC , опертая в точках B и C , несет между опорами B и C равномерно распределенную нагрузку интенсивности q Н/м; на участке AB интенсивность нагрузки уменьшается по линейному закону до нуля. Найти реакции опор B и C , пренебрегая весом балки.



3. Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы и пары сил. Нагрузка и размеры указаны на рисунке.

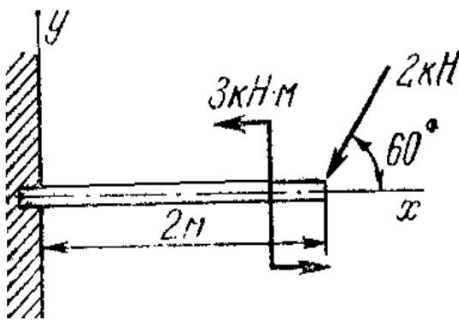


4. Определить реакции находящейся под действием двух сил и равномерно распределенной нагрузки. Интенсивность распределенной нагрузки и размеры указаны на

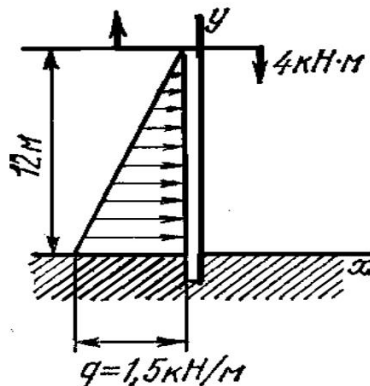


опор A и B балки, сосредоточенных нагрузок, величины, вели-
рисунке.

5. Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием сосредоточенной силы и пары сил.



6. Определить балки, изображенной на действии пары сил и изменяющейся по закону



реакции заделки консольной рисунке и находящейся под распределенной нагрузки, треугольника.

Вопросы для обсуждения:

1. Плоская произвольная система сил?
2. Равномерно – распределённая нагрузка, равнодействующая?
3. Разложение силы на две составляющие по осям?
4. Пара сил. Момент пары сил?
5. Опоры (связи) и силы реакций опор?
6. Алгебраический момент силы относительно неподвижной точки на плоскости и его свойства?
7. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей произвольной плоской системы сил?

8. Условие равновесия рычага?

9. Главный вектор и главный момент плоской произвольной системы сил – аналитические условия равновесия плоской произвольной системы сил?

10. Аналитические условия равновесия плоской произвольной системы сил?

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.

2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.

3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.

4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: www.mashin.ru

4. Тема: Определение реакций опор твердого тела. Плоская произвольная система сил.

Цель занятия: аналитическое исследование – выбор рационального способа закрепления бруса с минимальными реактивными силами (реакциями опор), плоская произвольная система сил, алгебраический момент силы относительно неподвижной точки на плоскости, условия равновесия плоской произвольной системы сил, аналитический способ уравнивания конструкции. Реализация учебной цели практического занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОПК-1.

Организационная форма: решение задач.

Методические рекомендации к практическому занятию:

Краткий теоретический обзор:

Понятие момента силы возникло в связи с определением вращательного действия силы, приложенной к телу, имеющему неподвижную точку или неподвижную ось. Алгебраическим моментом силы относительно некоторой точки O на плоскости называется скалярная величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо относительно этой точки.

$$m_o[F] = Fd \quad (11)$$

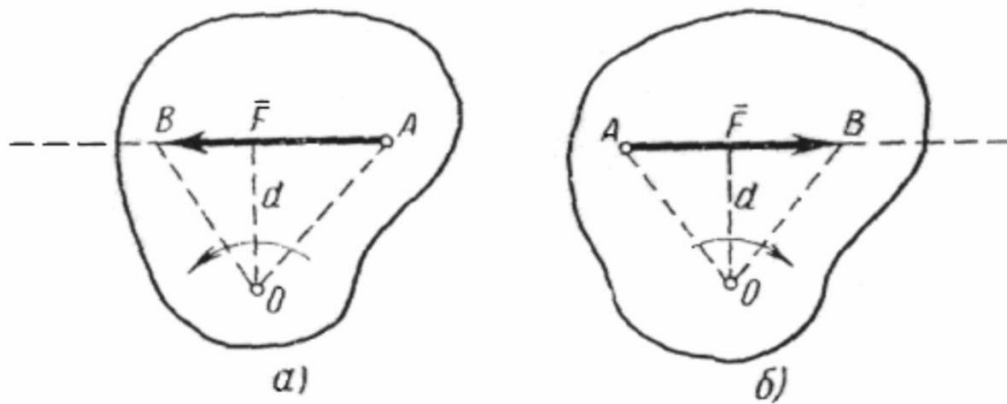


Рисунок 7

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно и главный вектор, и главный момент этой системы относительно произвольно выбранного центра приведения равнялись нулю.

$$\vec{R} = 0; M_O = 0, \quad (12)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \sum_{i=1}^n m_O(\vec{F}_i) = 0,$$

(13)

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из двух любым образом выбранных в плоскости действия этой системы сил координатных осей и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки той же плоскости были равны нулю.

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \sum_{i=1}^n m_O(\vec{F}_i) = 0. \quad (14)$$

Задача:

Дано: схемы закрепления бруса (рис. 8 – а, б, в); $P = 2 \text{ кН}$; $M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $q = 2 \text{ кН / м}$.

Определить реакции опор для того способа закрепления бруса, при котором реакция $\bar{Y}_B$ опоры B имеет наименьшее числовое значение.

Решение:

1. Рассмотрим равновесие бруса. На него действуют: активные силы, заданные по условию задачи – сосредоточенная сила $\bar{P}$ под углом 30° к горизонтальной оси системы отчёта XY; пара сил с моментом M ; равномерно-распределённая нагрузка интенсивностью q и реактивные силы – реакции опор. На рис. 8а: реакцию неподвижной шарнирной опоры A

изображаем двумя её составляющими $\overline{X_A}$ и $\overline{Y_A}$, реакцию подвижной шарнирной опоры B изображаем $\overline{Y_B}$ (линия действия шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости). На рис. 8б реакцию шарнирной опоры A (невесомого стержня) (стержень прикреплен к брусу и к неподвижной опоре шарнирами) изображаем вдоль самого стержня произвольного направления $\overline{X_A}$, реакцию неподвижной шарнирной опоры B изображаем двумя её составляющими $\overline{X_B}$ и $\overline{Y_B}$. На рис. 8в реакцию опоры A (невесомого стержня, стержень прикреплён к брусу и к неподвижной опоре шарнирами) изображаем вдоль самого стержня, произвольного направления $\overline{Y_A}$, реакцию неподвижной шарнирной опоры B изображаем двумя составляющими $\overline{X_B}$ и $\overline{Y_B}$.

Сосредоточенную силу $\overline{P}$ по «правилу параллелограмма сил» разлагаем на две составляющие по осям X и Y – $\overline{P_x}$ и $\overline{P_y}$. При графическом построении $\overline{P_x}$ и $\overline{P_y}$ на рис. 8 а, б, в точка приложения силы должна остаться на конструкции.

Численно $\overline{P_x}$ и $\overline{P_y}$ будут равны (используем соотношения прямоугольного треугольника).

$$P_x = P \cdot \cos 30 = 2 \cdot (\sqrt{3} / 2) = \sqrt{3} \text{ кН};$$

$$P_y = P \cdot \sin 30 = 2 \cdot (1 / 2) = 1 \text{ кН}.$$

Равномерно-распределённую нагрузку интенсивностью q заменяем равнодействующей $\overline{Q}$, численно равной площади прямоугольника (закон изменения распределённой нагрузки) и приложенной в центре тяжести прямоугольника (на пересечении диагоналей).

$$|\overline{Q}| = S_{\square} = 6 \cdot q = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кН}.$$

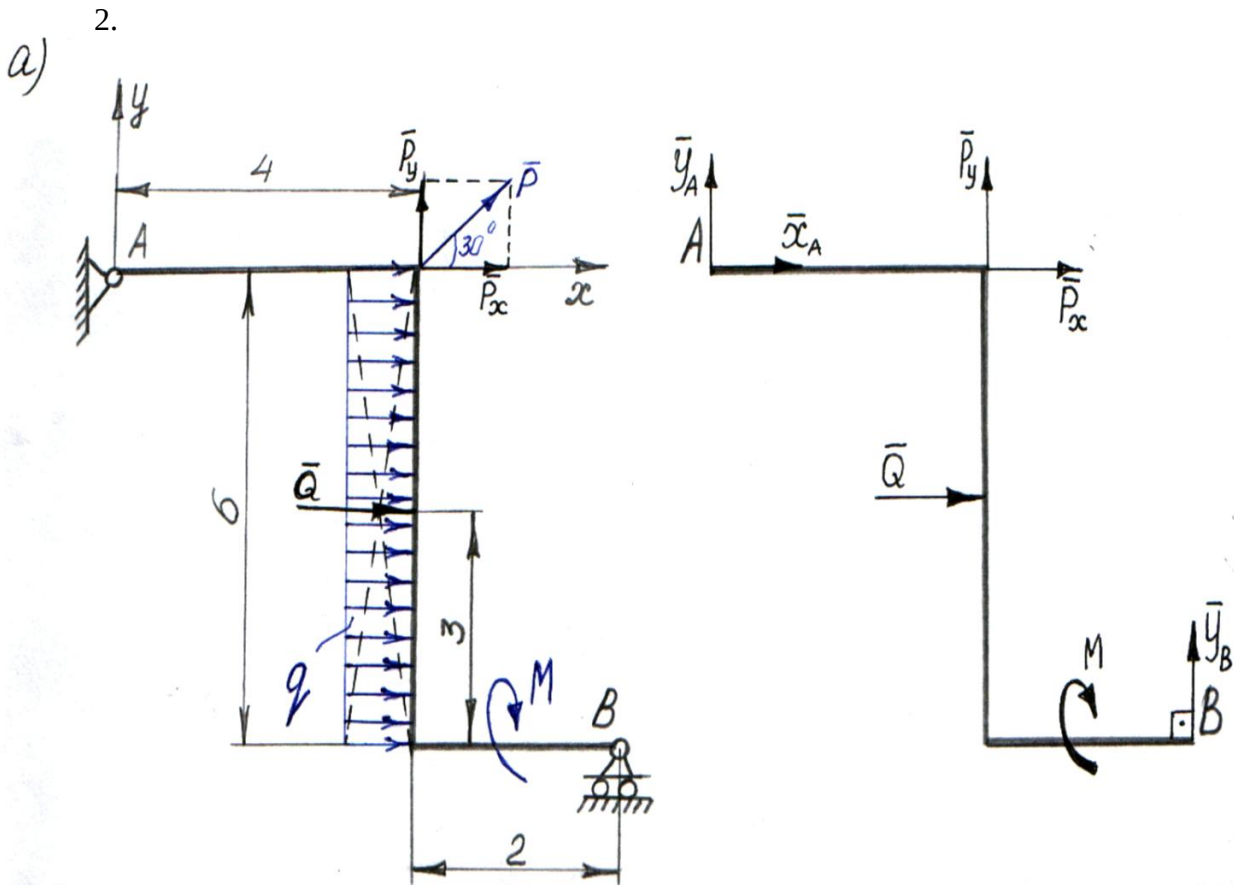


Рисунок 8а

Для полученной плоской произвольной системы сил можно составить три уравнения равновесия:

$$1) \quad \Sigma F_{Kx} = 0; 2) \quad \Sigma F_{Ky} = 0; 3) \quad \Sigma M_A(\bar{F}_K) = 0 \text{ или} \quad (15)$$

$$1) \quad \Sigma M_A(\bar{F}_K) = 0; 2) \quad \Sigma M_B(\bar{F}_K) = 0; 3) \quad \Sigma M_C(\bar{F}_K) = 0. \quad (16)$$

Для определения реакции $\bar{Y}_B$ составим уравнение моментов относительно точки A – точки пересечения двух реакций опор $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$ (уравнение будет содержать меньше неизвестных):

$$\Sigma M_A(\bar{F}_K) = 0; 4Py + 3Q - M + 6Y_B = 0 \Rightarrow$$

$$Y_B = (M - 3Q - Py) / 6 = (8 - 3 \cdot 12 - 41) / 6 = -5,33 \text{ кН.}$$

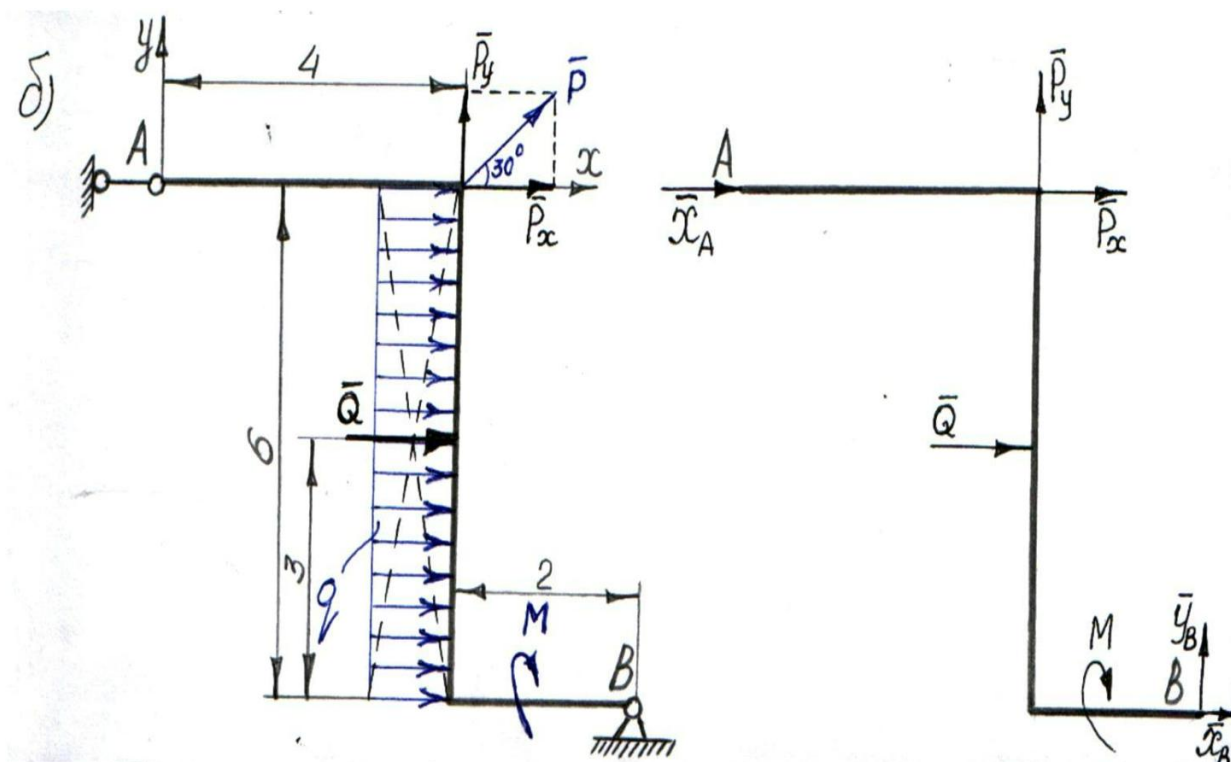


Рисунок 8б

Для определения исследуемой реакции $\bar{Y}_B$ из трёх возможных уравнений равновесия полученной произвольной системы сил рациональным является уравнение:

$$\sum F_{ky} = 0; P_y + Y_B = 0; \Rightarrow Y_B = -P_y = -1 \text{ кН.}$$

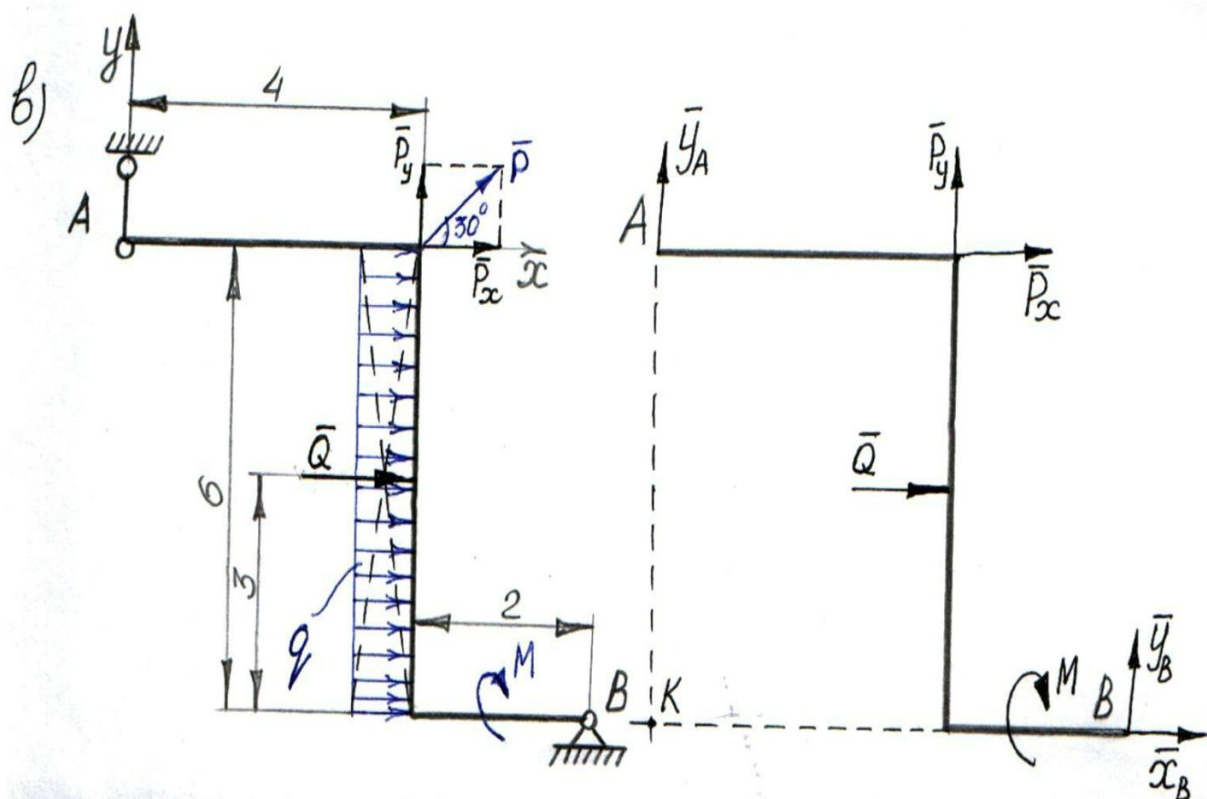


Рисунок 8в

Для определения исследуемой реакции $\overline{Y_B}$ из трёх возможных уравнений равновесия полученной произвольной системы сил рациональным (в уравнении наименьшее число неизвестных) является уравнение: алгебраическая сумма моментов всех сил относительно точки K – точки пересечения линий действия реакций $\overline{X_A}$ и $\overline{Y_A}$:

$$\begin{aligned}\Sigma M_K(\overline{F_K}) &= 0; 4Py - 6Px - 3Q - M + 6Y_B = 0; \Rightarrow \\ \Rightarrow Y_B &= (6Px + 3Q + M - 4Py) / 6 = (6 \cdot (\sqrt{3}) + 3 \cdot 12 + 8 - 4 \cdot 1) / 6 = \\ &= 8,397 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Знак «-» в значении реакции $\overline{Y_B}$ (рис. 8а и 8б) указывает на то, что истинное направление $\overline{Y_B}$, обеспечивающее равновесие полученных систем сил, соответствует противоположно указанному на рис. 8а, 8б.

Так как $\overline{Y_B} = |-1|$ кН – минимум по рис. 8б, следовательно, для этой схемы находим все остальные реакции опор – $\overline{X_A}$ и $\overline{X_B}$ и делаем проверку:

$$\begin{aligned}\Sigma M_B(\overline{F_K}) &= 0; -M - 3Q - 6Px - 2Py - 6X_A = 0; \Rightarrow \\ \Rightarrow X_A &= (-M - 3Q - 6Px - 2Py) / 6 = (-8 - 3 \cdot 12 - 6 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot 1) / 6 = -9,397 \text{ кН}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{Kx} &= 0; X_A + Px + Q + X_B = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow X_B &= -X_A - Px - Q = -(-9,397) - \sqrt{3} - 12 = -4,33 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Уравновешенность конструкции бруса (правильность вычисления реакций опор A и B) проверим, выполнив проверку:

$$\begin{aligned}\Sigma M_n(\overline{F_K}) &= 0; -4,5X_A - 4,5Px - 1,5Q - M + Y_B + 1,5X_B = 0; \\ &-4,5 \cdot (-9,397) - 4,5 \cdot (\sqrt{3}) - 1,5 \cdot 12 - 8 + 2 \cdot (-1) + 1,5 \cdot (-4,33) = 0; \\ &42,28 - 7,78 - 18 - 8 - 2 - 6,495 = 0 \\ &42,28 - 42,28 = 0; \\ &0 \equiv 0.\end{aligned}$$

Знак «-» в значениях реакции $\overline{X_A}$ и $\overline{X_B}$ указывает на то, что истинное направление этих реактивных сил, обеспечивающее равновесие полученной системы сил, соответствует противоположно указанному на рис. 8б.

Результаты расчётов сводим в таблицу 1.

Таблица 1.

№ рисунка	Исследуемая реакция $\overline{Y}_B$ (кН)	Реакции опор	
		$\overline{X}_A$ (кН)	$\overline{X}_B$ (кН)
Рис. 19а	– 5,33	–	–
Рис. 19б	– 1	– 9,397	– 4,33
Рис. 19в	8,397	–	–

Решить самостоятельно:

На рисунках 9 – 22 показаны три способа (а, б, в) закрепления бруса, ось которого ломаная линия. Заданная нагрузка (табл. 2) и размеры бруса (геометрическая конфигурация) во всех случаях одинаковы.

Определить реакцию опор для того способа закрепления бруса, при котором исследуемая реакция, указанная в табл. 2, имеет наименьший модуль.

Таблица 2.

Номер варианта (рис. 9–22)	P , кН	M , кН · м	q , кН / м	Исследуемая реакция
1	2	3	4	5
1	12	8	1,5	M_A
2	4	6	2	Y_A
3	3	2	2,5	X_A
4	2	3	2	Y_B
5	10	2	2	X_B
6	4	6	1	M_A
7	2	2	18	X_A
8	3	4	2	R_B
9	4	8	2	M_A
10	2	4	0,5	X_A
11	4	8	2	Y_A
12	8	3	1	Y_B
13	6	5	2	X_A
14	4	3	1	Y_A
15	3	4	2	M_A
16	2	4	3	X_A
17	4	4	2	X_C
18	8	4	2	X_A
19	2	3	1	Y_C
20	3	8	2	Y_B
21	4	4	2	Y_A
22	6	4	2	Y_A
23	4	3	2	X_A
24	5	4	1	M_A
25	4	3	1,5	Y_A
26	3	4	1	X_A
27	2	3	2	X_B
28	4	3	2	Y_A
29	2	4	2	X_B

30	4	5	1	Y_B
31	10	6	2	Y_A
32	20	5	4	M_A
33	15	8	1	Y_B
34	5	2	1	Y_B
35	10	4	-	X_B
36	6	2	1	M_A
37	2	4	2	X_A
38	20	10	4	R_B
39	10	6	-	Y_A
40	2	4	2	X_A
41	4	10	1	R_B
42	10	5	2	Y_A
43	20	12	2	Y_A
44	15	4	3	Y_A
45	10	5	2	X_A
46	12	6	2	M_A
47	20	4	3	Y_A
48	14	4	2	X_A
49	16	6	1	R_B
50	10	-	4	Y_A
51	20	10	2	M_A
52	6	6	1	Y_A
53	10	4	2	M_A
54	4	3	1	Y_A
55	10	10	2	X_A
56	20	5	2	M_A
57	10	6	1	X_A
58	20	10	2	Y_A
59	25	-	1	M_A
60	20	10	2	R_B

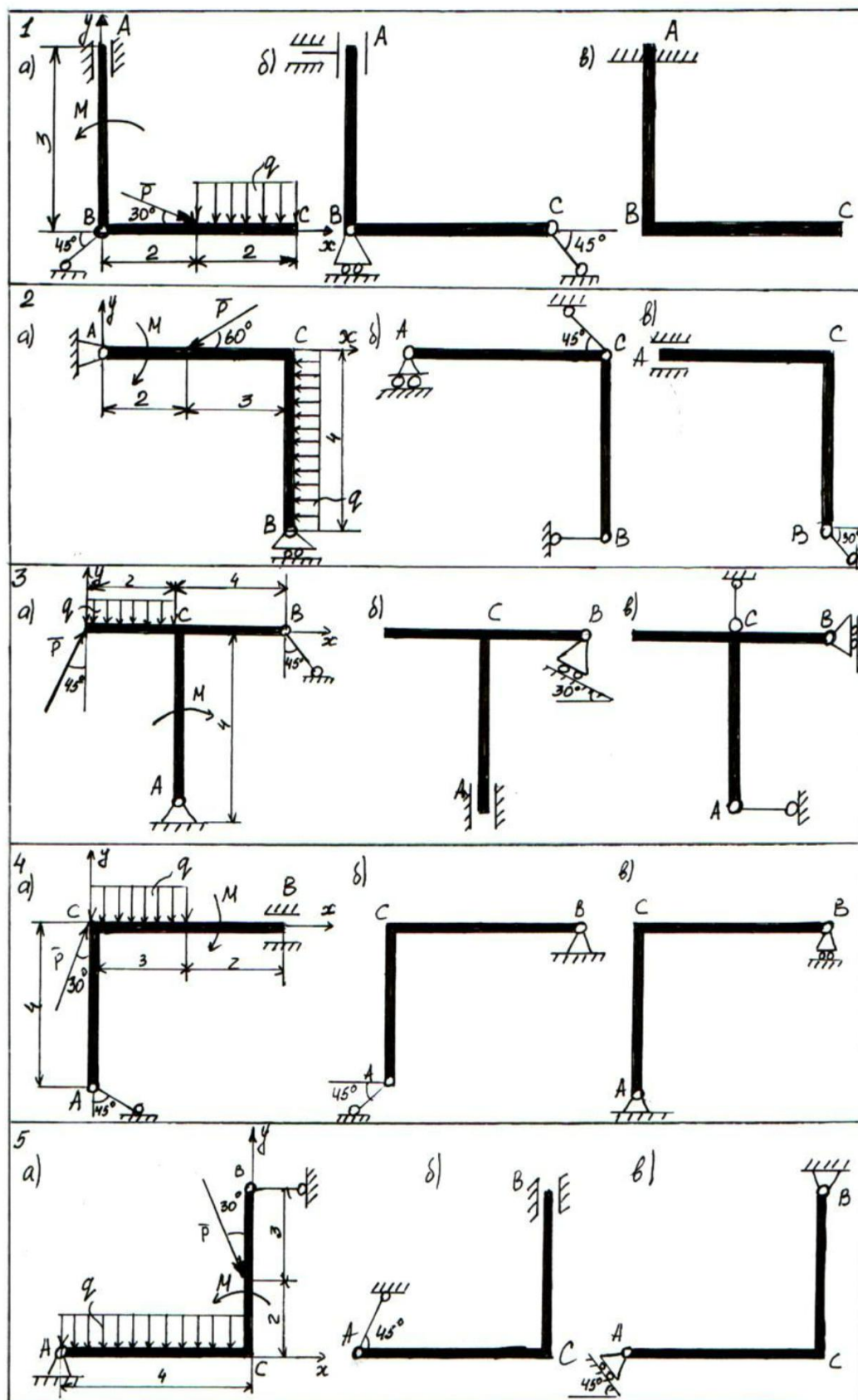


Рисунок 9

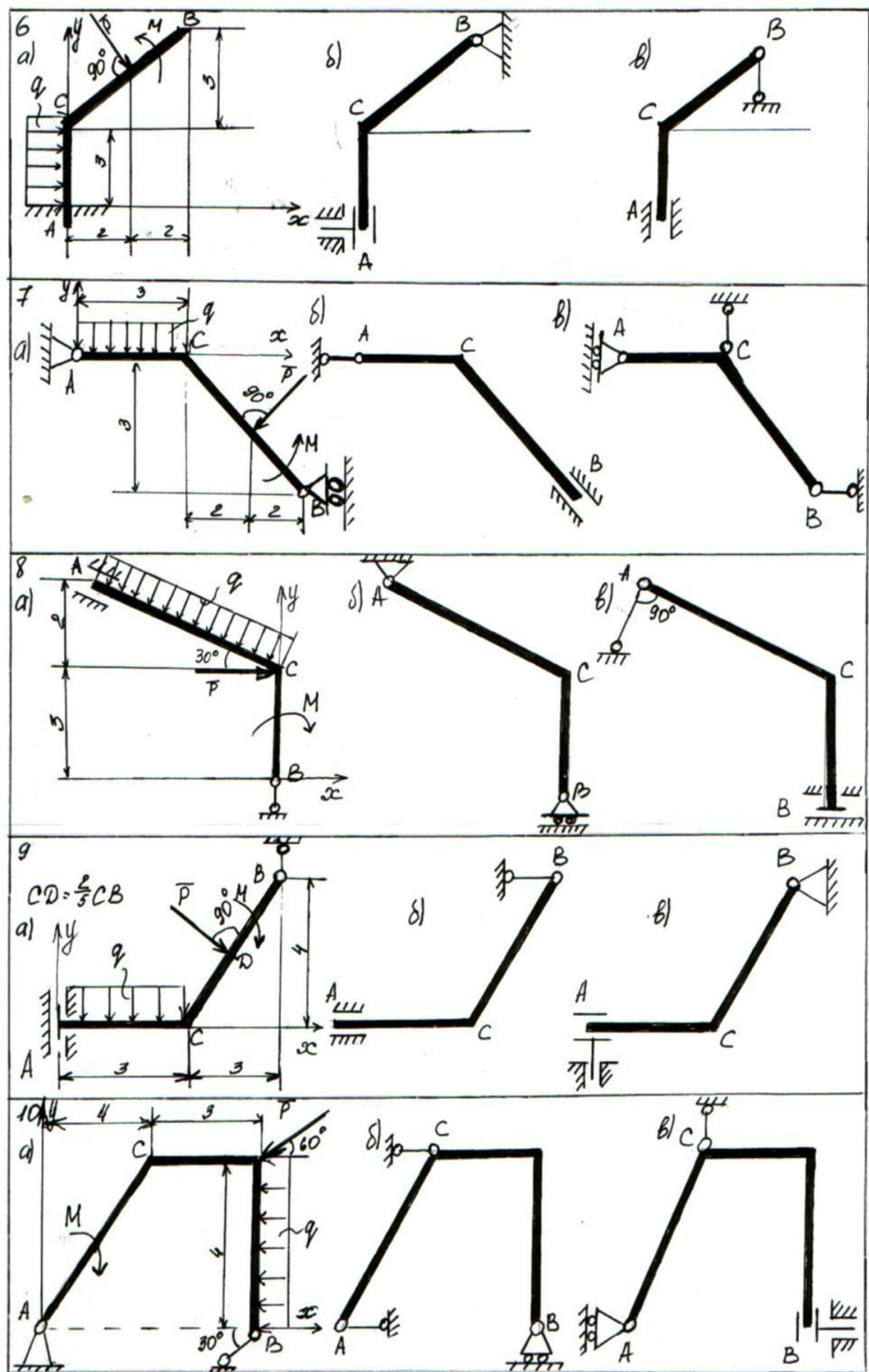


Рисунок 10

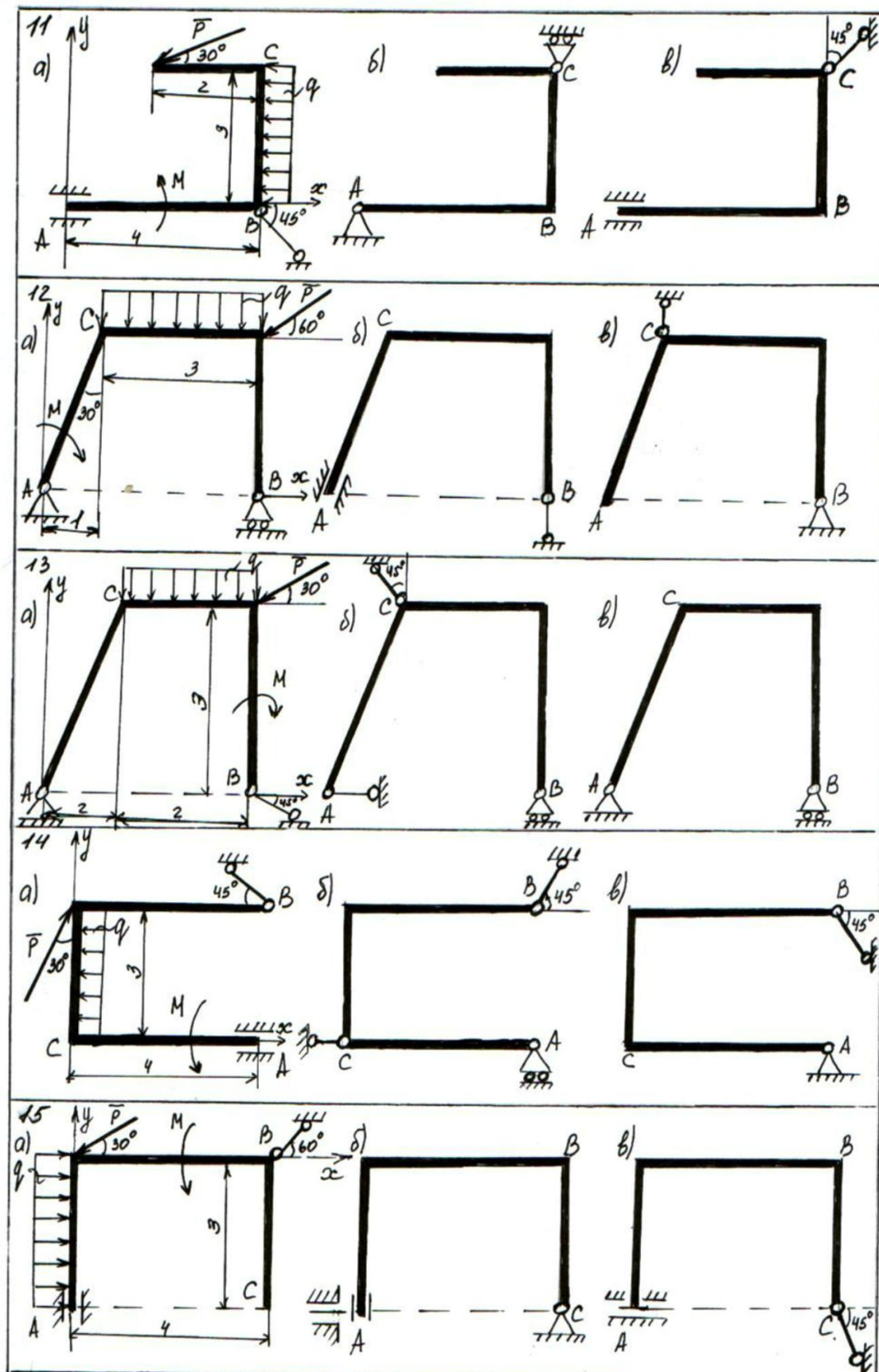


Рисунок 11

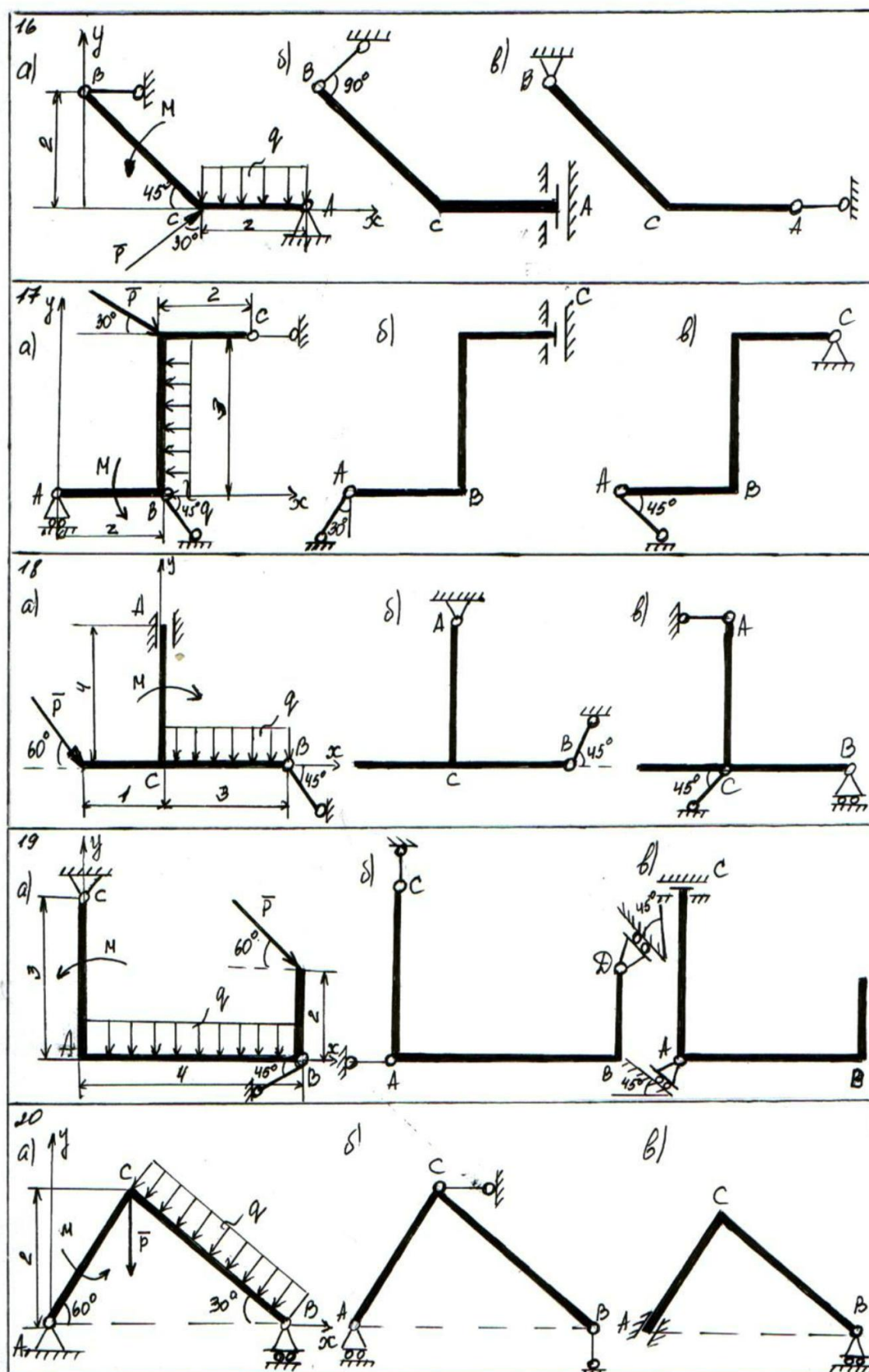


Рисунок 12

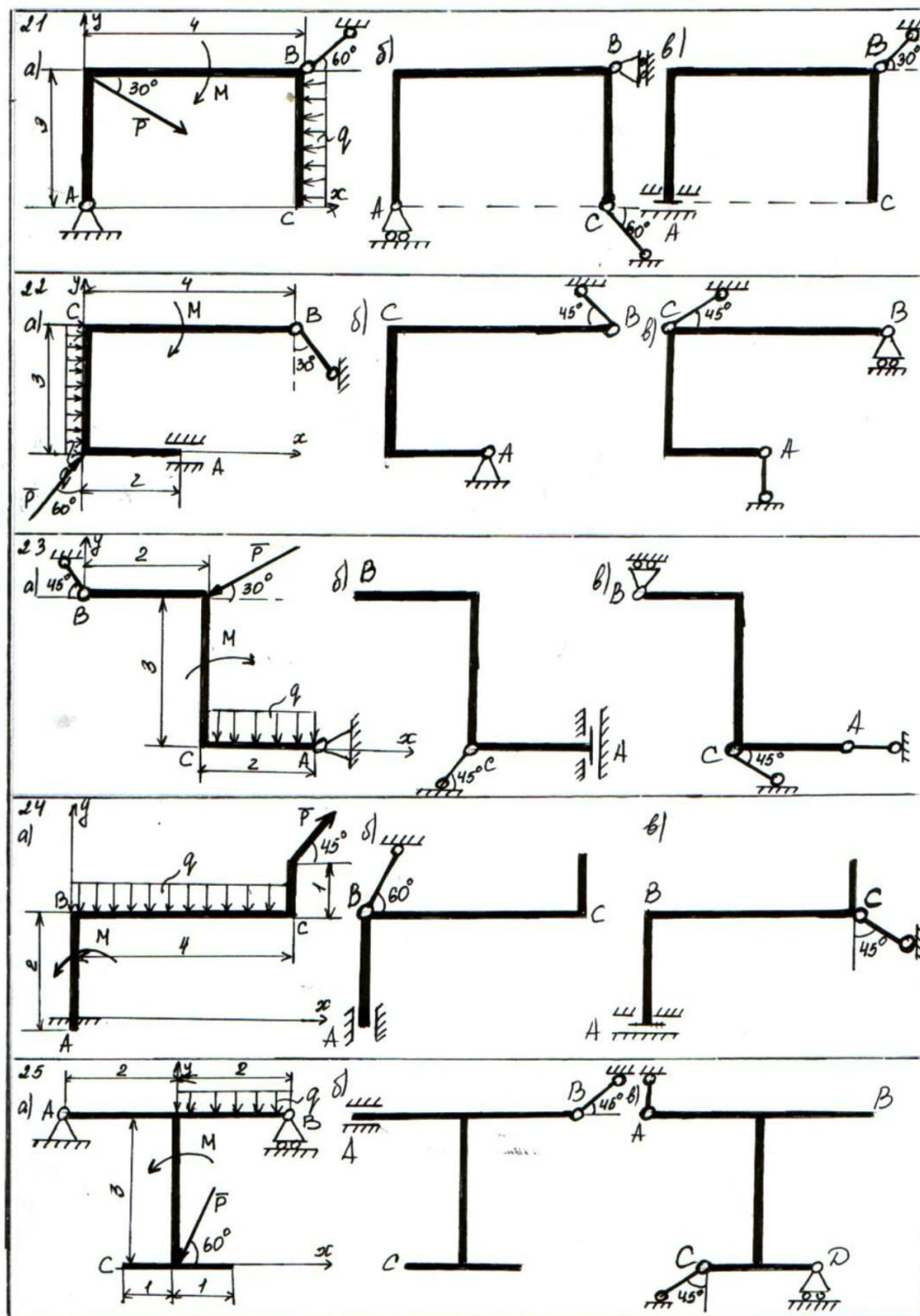


Рисунок 13

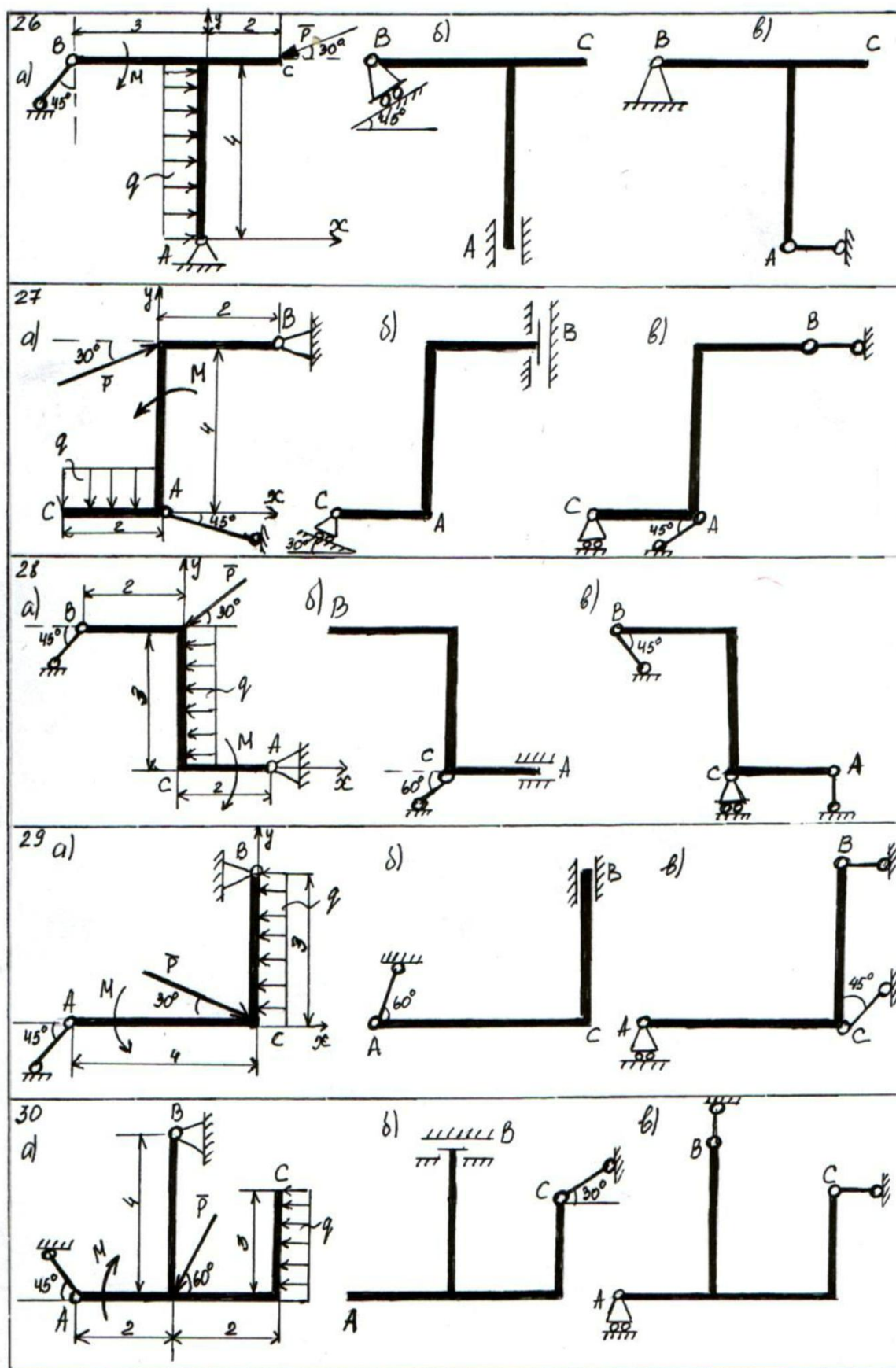


Рисунок 14

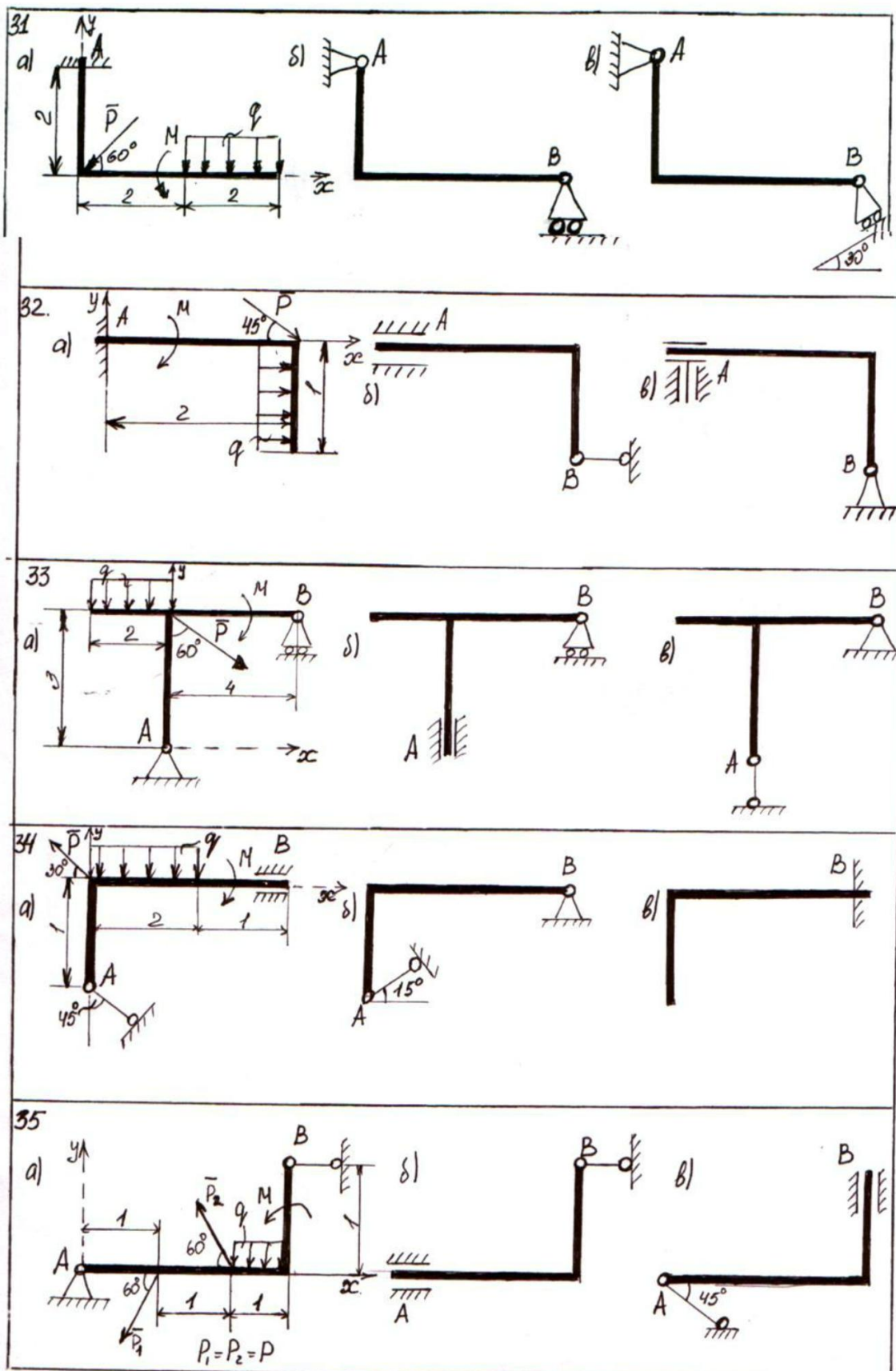


Рисунок 15

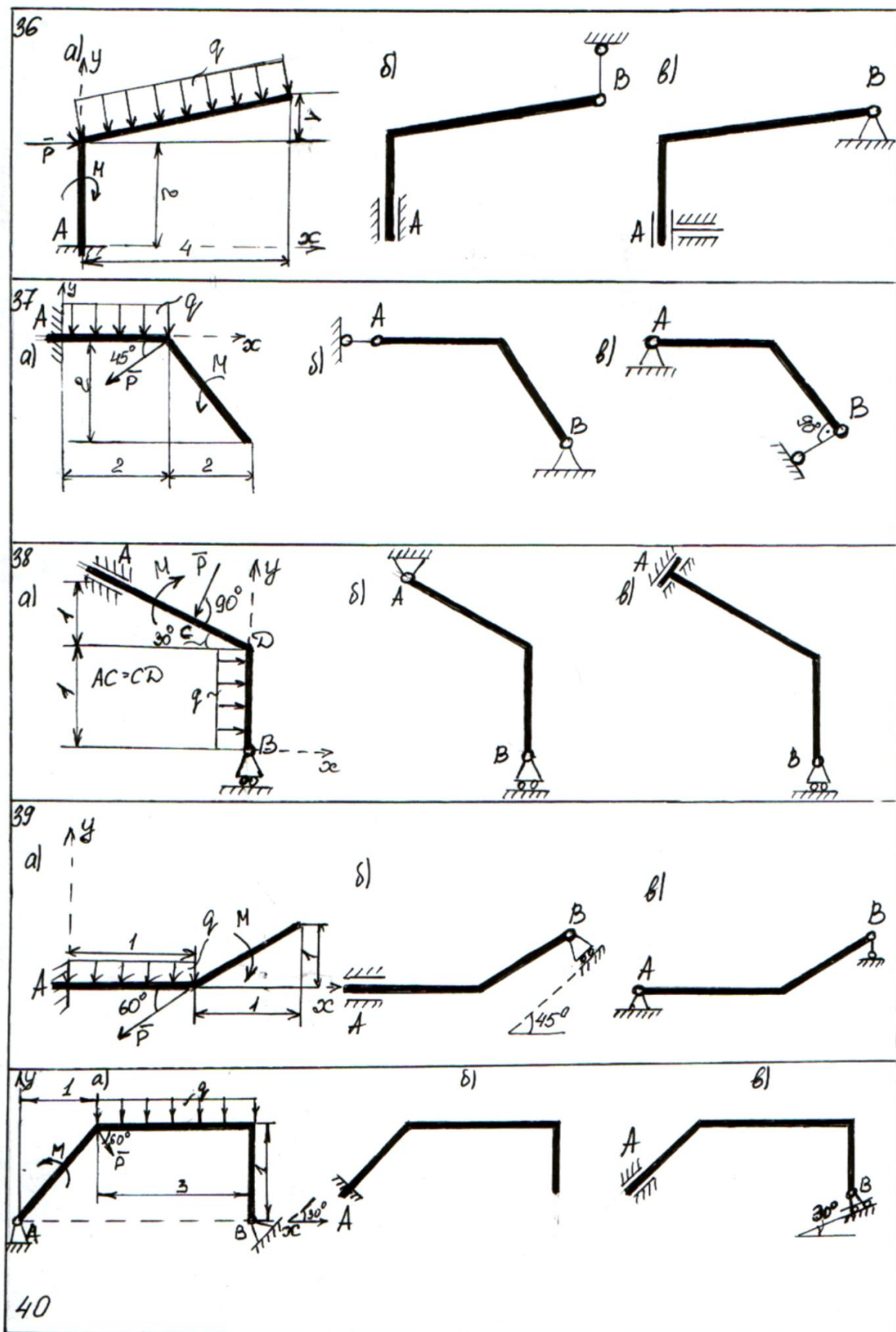


Рисунок 16

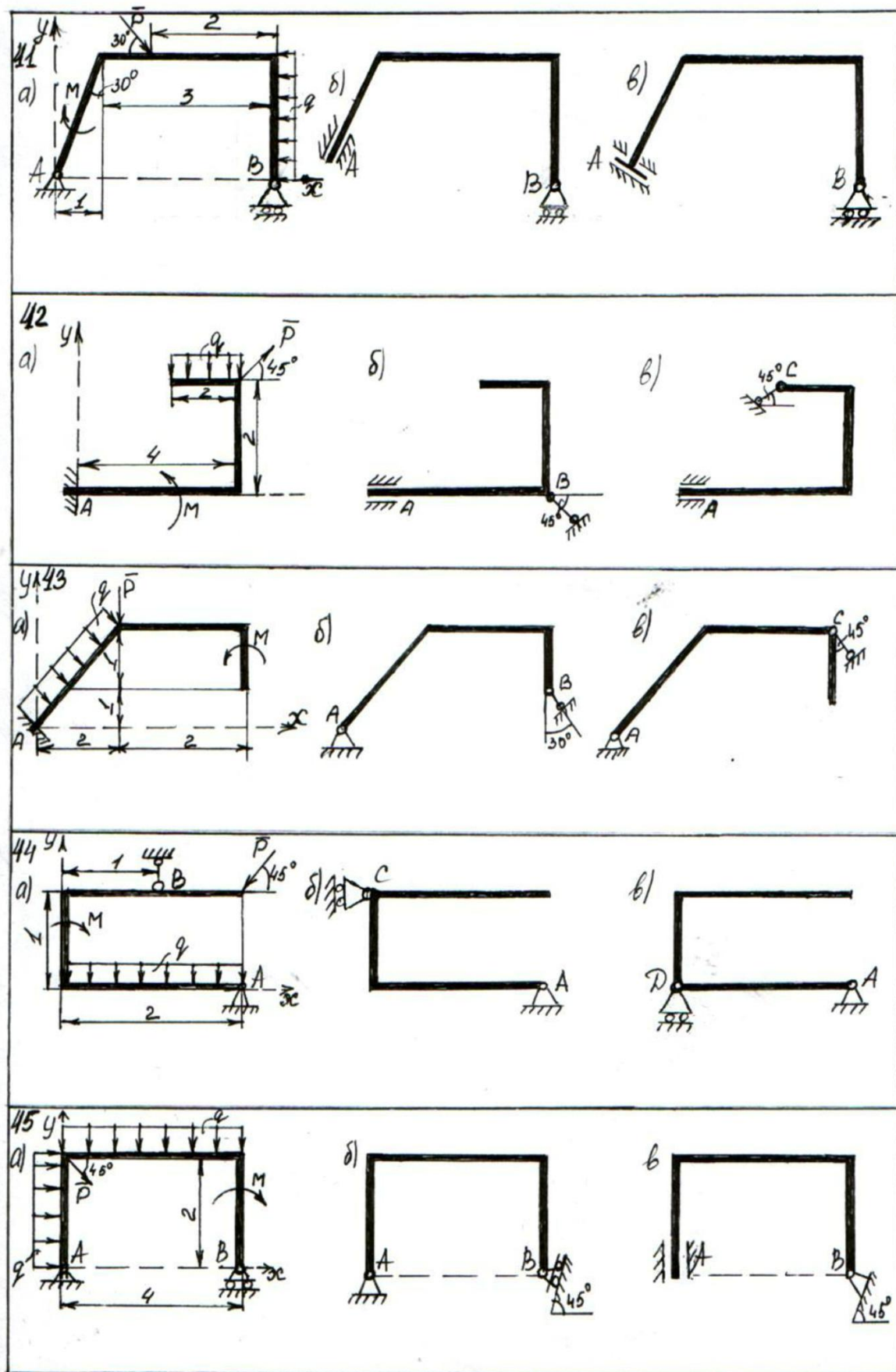


Рисунок 17

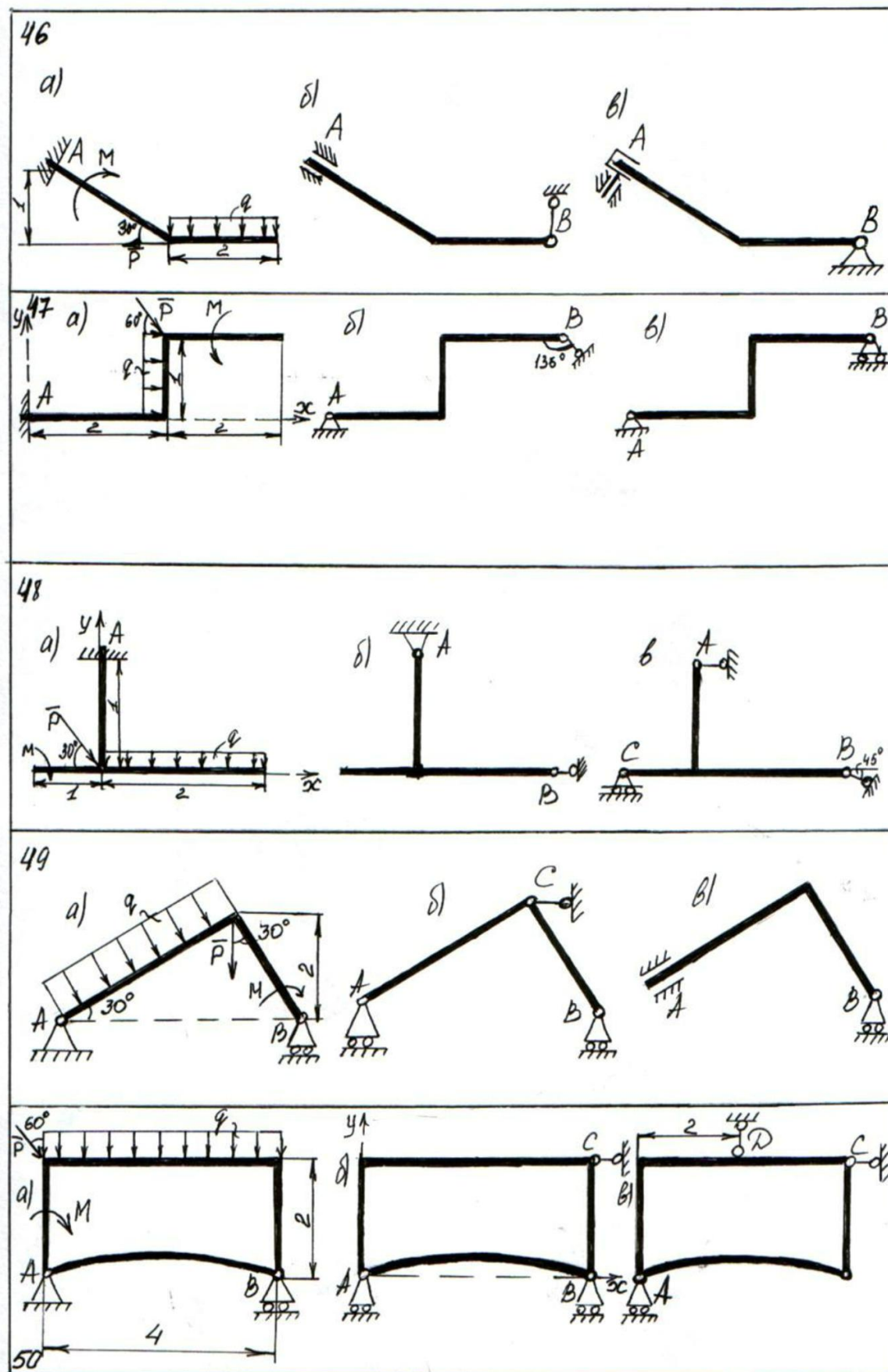


Рисунок 18

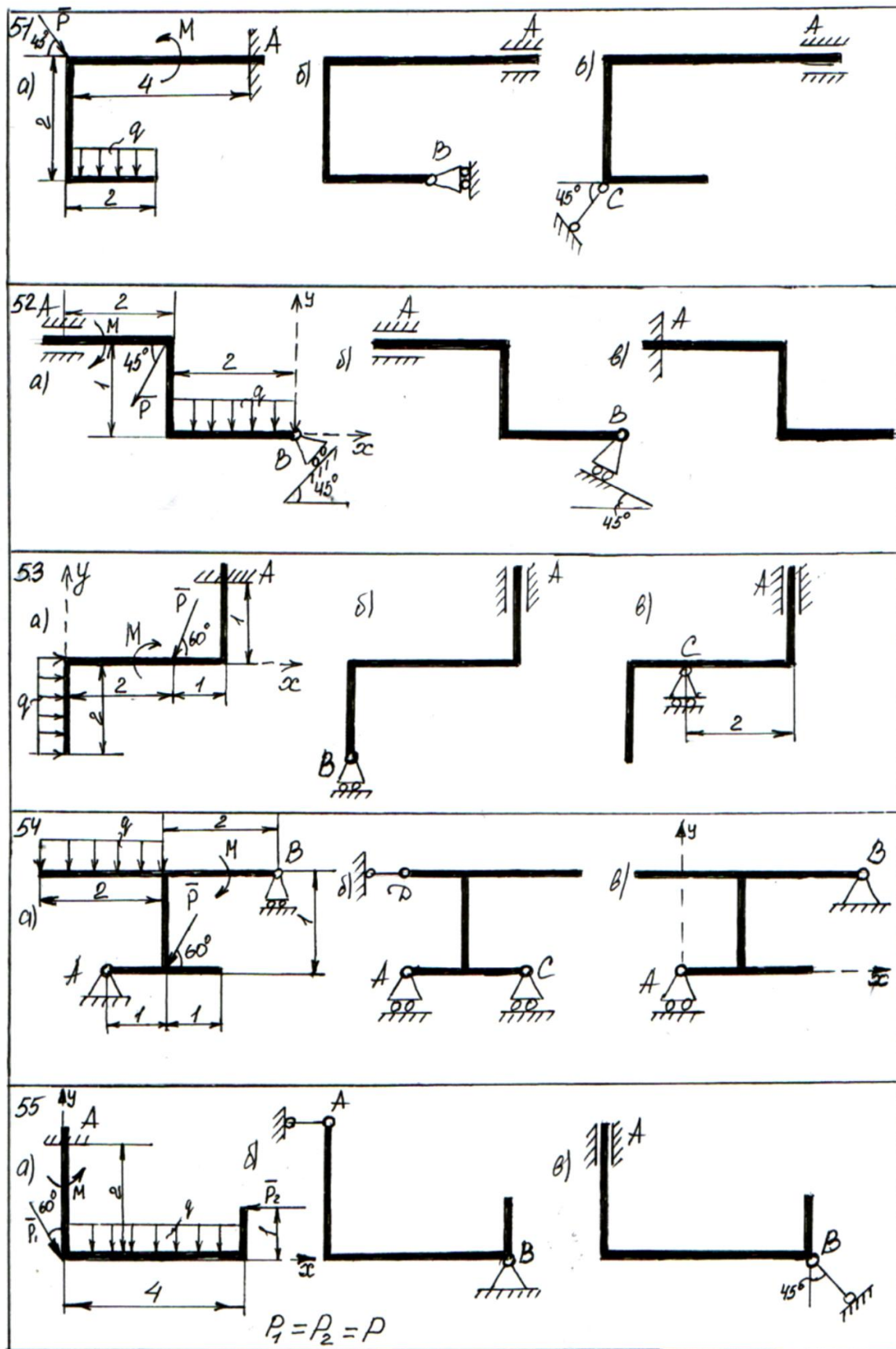


Рисунок 19

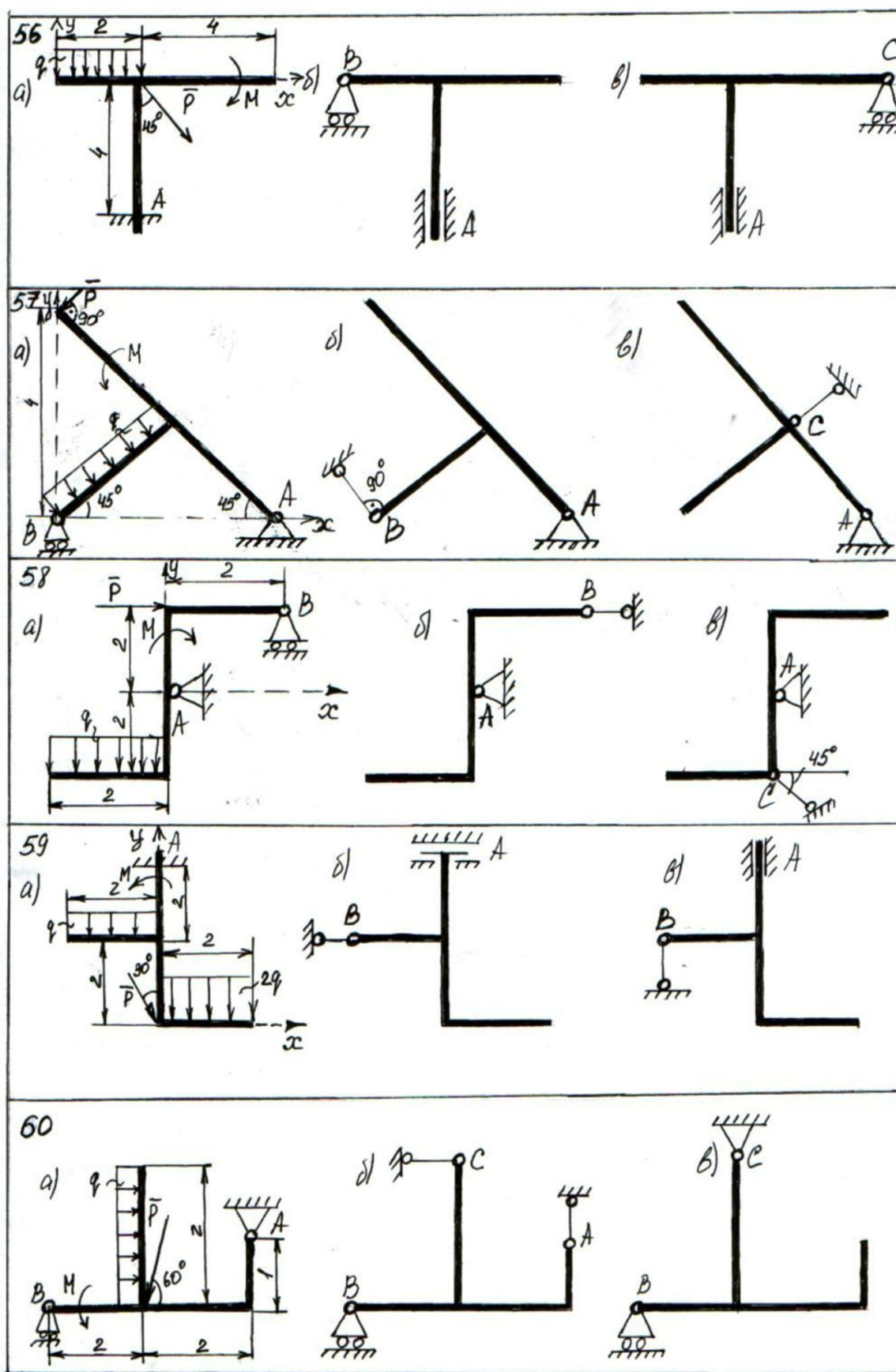


Рисунок 20

	Рис. а			Рис. б			Рис. в		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C
1					—			—	
2			—			—		—	
3			—						—
4				—					—
5						—	—		
6			—		—				—
7			—			—			
8	—								
9		—	—			—		—	
10					—				
11						—		—	
12				—					—
13		—							—
14									—
15		—				—			

Рисунок 21

	Рис. а			Рис. б			Рис. в		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C
16			—		—				
17			—	—					
18			—		—				
19		—		—					
20				—					—
21						—			
22			—		—				
23					—				—
24			—					—	
25		—							—
26					—				—
27						—	—		
28			—						—
29	—								—
30			—				—		

Рисунок 22

На рис. 21 – 22 указаны инварианты способов закрепления бруса (для вариантов №1 – 30) в соответствии с указанным номером варианта схемы.

Вопросы для обсуждения:

1. Что такое сила? Основные характеристики силы?
2. Что такое сосредоточенная сила?
3. Определение распределённой нагрузки?
4. Что такое равнодействующая? Правило параллелограмма сил?
5. Графическое и аналитическое определение проекции силы на ось?
6. Что такое: а) свободное тело? б) несвободное тело? Принцип освобождаемости от связей?
7. Виды связей и их реакции?
8. Определение системы сил? Что называется плоской системой: а) сходящихся сил? б) параллельных сил? в) произвольной системой сил?
9. Определение алгебраического момента силы относительно неподвижной точки на плоскости и его свойства?
10. Определение пары сил? Момент пары сил? Свойства пары сил?
11. Теорема о парах сил? Эквивалентные преобразования с парами сил?
12. Уравнения равновесия плоской системы: а) сходящихся сил? б) параллельных сил? в) произвольной системы сил?
13. План решения задач статики?

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.
4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: www.mashin.ru

5. Тема: Определение реакций опор твёрдого тела. Пространственная произвольная система сил.

Цель занятия: Определение реакций опор твёрдого тела. Пространственная произвольная система сил. Реализация учебной цели практического занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОПК-1.

Организационная форма: решение задач.

Методические рекомендации к практическому занятию:

Краткий теоретический обзор:

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех этих сил на каждую из трех любым образом выбранных координатных осей равнялась нулю и чтобы алгебраическая сумма их моментов относительно каждой из этих осей также равнялась нулю.

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n Z_i = 0; \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^n m_x F_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_y F_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_z F_i = 0.$$

Условия (17) называются условиями равновесия произвольной пространственной системы сил в аналитической форме.

Задача.

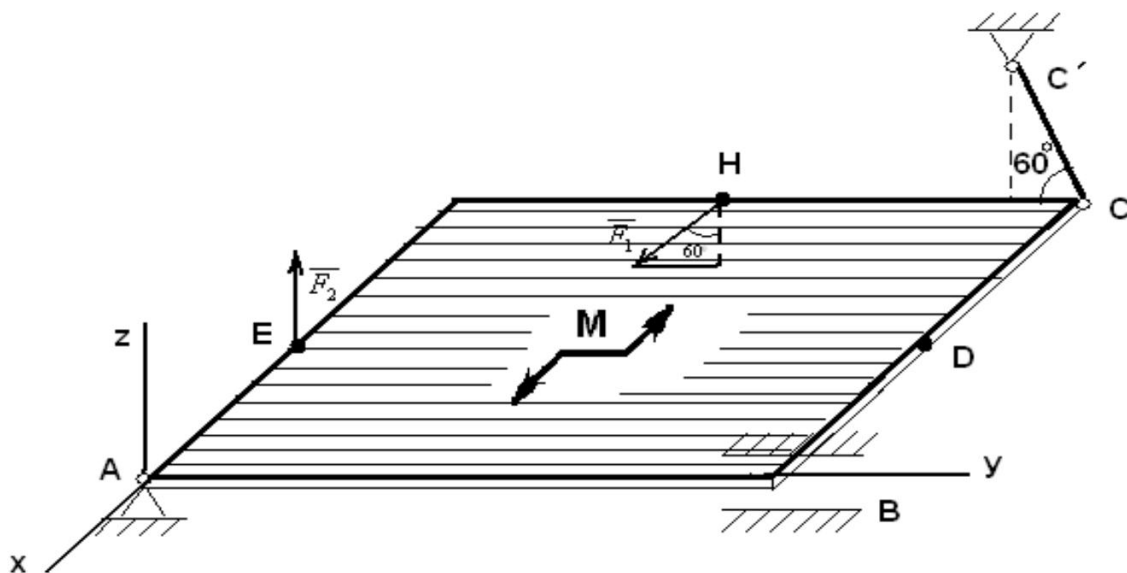


Рисунок 23

Однородная прямоугольная плита весом $\bar{P}$ со сторонами $AB = 3L$, $BC = 2L$ закреплена в точке B цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем CC' (рис. 23)

На плиту действуют: пара сил (лежащая в плоскости плиты) с моментом M ; сила $\bar{F}_1$ – в плоскости, параллельной YZ (точка приложения – H); сила $\bar{F}_2$ – в плоскости параллельной XZ (точка приложения E). Точки приложения сил (E , H) находятся в серединах сторон плиты.

Дано: $M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $F_1 = 2 \text{ кН}$; $F_2 = 4 \text{ кН}$; $L = 1 \text{ м}$; $P = 8 \text{ кН}$; $AB = 3L \text{ м}$; $BC = 2L \text{ м}$.

Определить реакции связей в точках A , B и стержня CC' .

Решение:

1. Рассмотрим равновесие плиты. На неё действуют: пара сил (лежащая в плоскости плиты) с моментом M ; сила $\overline{F}_1$ – в плоскости, параллельной YZ (точка приложения – H) и её составляющие:

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ кН};$$

$$F_{1z} = F_1 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ кН}.$$

Сила $\overline{F}_2$ – в плоскости, параллельной XZ (точка приложения E); $\overline{F}_2 \parallel AZ$; вес плиты $\overline{P}$ – на пересечении диагоналей (в центре тяжести прямоугольной плиты), а также реакции связей: реакцию сферического шарнира A разлагаем на три составляющие – $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Z}_A$;

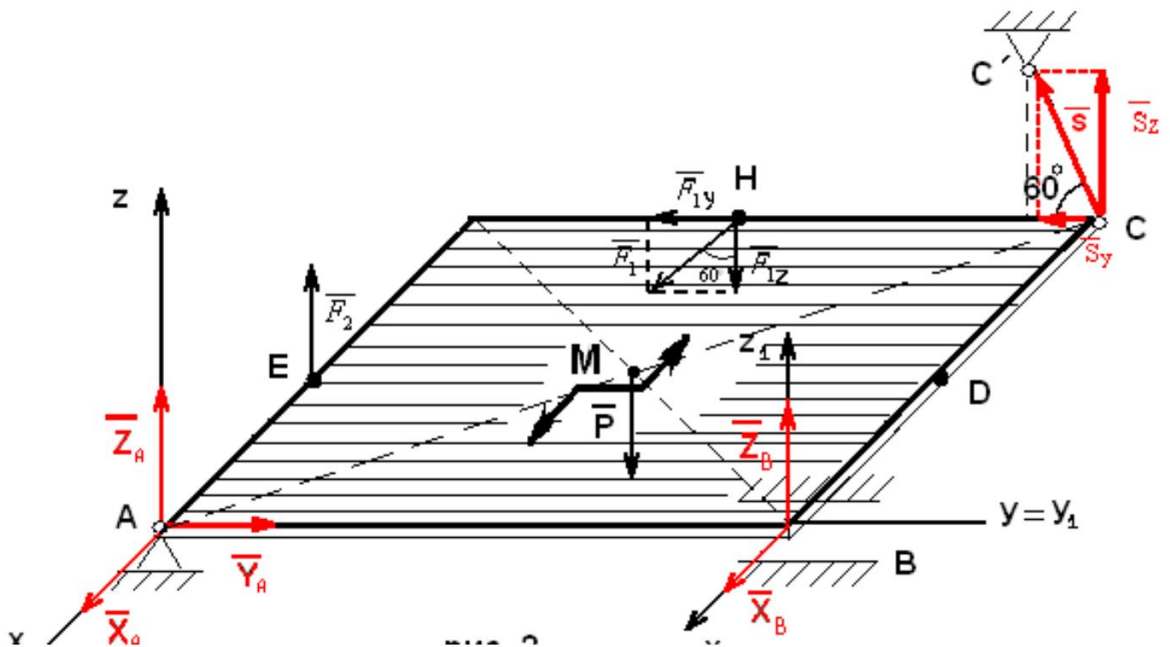


Рисунок 24

реакцию цилиндрического шарнира (подшипника) B – на две составляющие $\overline{X}_B, \overline{Z}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника), реакцию $\overline{S}$ стержня направляем вдоль стержня CC' , предполагая, что он растянут и разлагаем $\overline{S}$ на две составляющие: $S_z = S \cdot \sin 60^\circ$; $S_y = S \cdot \cos 60^\circ$ (так как стержень CC' в плоскости, параллельной yz) – рис. 24.

2. Вводим систему отсчета $BX_1Y_1Z_1$ (рис.24). Для полученной пространственной произвольной системы сил (рис.24) для определения шести неизвестных реакций опор – $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Z}_A, \overline{X}_B, \overline{Z}_B, \overline{S}$ – можно составить шесть уравнений равновесия:

$$1) \sum \bar{F}_{BXI} = 0; X_A + X_B = 0;$$

$$2) \sum \bar{F}_{BYI} = 0; Y_A - F_{1Y} - S \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$3) \sum \bar{F}_{BZI} = 0; Z_A + Z_B - P + F_2 - F_{1Z} + S \cdot \sin 60^\circ = 0;$$

$$4) \sum M_{BXI}(\bar{F}_K) = 0; -3L \cdot Z_A - 3L \cdot F_2 + 1,5L \cdot F_{1Z} + 1,5L \cdot P = 0;$$

$$5) \sum M_{BYI}(\bar{F}_K) = 0; -L \cdot P + L \cdot F_2 - 2L \cdot F_{1Z} + 2L \cdot S \cdot \sin 60^\circ = 0;$$

$$6) \sum M_{BZI}(\bar{F}_K) = 0; 3L \cdot X_A + M + 2L \cdot F_{1Y} + 2L \cdot S \cdot \cos 60^\circ = 0.$$

Из уравнения 4) вычисляем $\bar{Z}_A$:

$$\bar{Z}_A = \frac{3L \cdot F_2 - 1,5L \cdot F_{1Z} - 1,5L \cdot P}{3L} = \frac{3 \cdot 8 - 1,5 \cdot 11 - 1,5 \cdot 8}{3} = 0,5 \text{ кН.}$$

Из уравнения 5) определяем численное значение реакции $\bar{S}$ стержня CC' :

$$\bar{S} = \frac{L \cdot F_2 - L \cdot F_{1Z}}{2L \cdot \sin 60^\circ} = \frac{1 \cdot 8 - 1 \cdot 11}{2 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3}/2)} = 3,47 \text{ кН.}$$

Из уравнения 6), подставляя найденное значение $\bar{S}$, определяем величину реакции $\bar{X}_A$:

$$\begin{aligned} \bar{X}_A &= \frac{M - L \cdot F_{1Y} - 2L \cdot S \cdot \cos 60^\circ}{3L} = \frac{6 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot 1 \cdot 3,47 \cdot (1/2)}{3} = \\ &= -4,31 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Зная $\bar{S}$ и $\bar{Z}_A$, из уравнения 3) определяем величину реакции $\bar{Z}_B$:

$$\bar{Z}_B = -Z_A + P - F_2 + F_{1Z} - S \cdot \sin 60^\circ = -0,5 + 8 - 4 + 1 - 3,47 \cdot (\sqrt{3}/2) = 1,49 \text{ кН.}$$

Из уравнения 2), зная $\bar{S}$, вычисляем значение реакции $\bar{Y}_A$:

$$\bar{Y}_A = F_{1Y} + S \cdot \cos 60^\circ = \sqrt{3} + 3,47 \cdot \frac{1}{2} = 3,47 \text{ кН.}$$

Зная $\bar{X}_A$, из уравнения 1) $\bar{X}_B = -\bar{X}_A = -(-4,31) = 4,31 \text{ кН.}$

Проверка:

$$\sum F_{AX} = 0; X_A + X_B = 0;$$

$$4,31 - 4,31 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

$$\sum F_{AY} = 0; Y_A - F_{1Y} - S \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$3,47 - \sqrt{3} - 3,47 \cdot \frac{1}{2} = 0;$$

$$3,47 - 3,47 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

$$\sum F_{AZ} = 0; Z_A + Z_B - P + F_2 - F_{1Z} + S \cdot \sin 60^\circ = 0;$$

$$0,5 + 1,49 - 8 + 4 - 1 + 3,47 \cdot (\sqrt{3}/2) = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

Результаты расчётов сводим в таблицу 1.

Таблица 1.

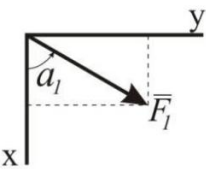
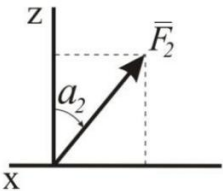
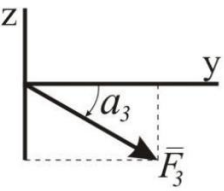
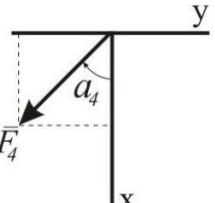
$\overline{X}_a$, кН	$\overline{Y}_a$, кН	$\overline{Z}_A$, кН	$\overline{Y}_B$, кН	$\overline{Z}_B$, кН	$\overline{S}$, кН
-4,31	3,47	0,5	4,53	1,49	3,47

Решить самостоятельно:

Задача 1 (к вариантам 1 – 10) – рис. 25 – 26.

Однородная прямоугольная плита весом $P = 5$ кН со сторонами $AB = 3\ell$, $BC = 2\ell$ закреплена в точке A сферическим шарниром, а в точке B – цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем CC' (вар. 1 – 10). На плиту действуют: пара сил с моментом $M = 6$ кН·м, лежащая в плоскости плиты, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. 2. При этом силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости XU , сила $\overline{F}_2$ – в плоскости, параллельной XZ , сила $\overline{F}_3$ – в плоскости, параллельной YZ . Точки приложения сил (D , E , H) находятся в серединах сторон плиты.

Таблица 2.

Силы								
Номер условия	F1= 4 кН		F2= 6 кН		F3= 8 кН		F4= 10 кН	
	Точка приложения	a_1 , град	Точка приложения	a_2 , град	Точка приложения	a_3 , град	Точка приложения	a_4 , град

0	D	60	-	-	E	0	-	-
1	H	90	D	30	-	-	-	-
2	-	-	E	60	-	-	D	90
3	-	-	-	-	E	30	H	0
4	E	0	-	-	H	60	-	-
5	-	-	D	60	H	0	-	-
6	-	-	H	30	-	-	D	90
7	E	30	H	90	-	-	-	-
8	-	-	-	-	D	0	E	60
9	-	-	E	90	D	30	-	-

Определить реакции связей в точках A , B и C . При подсчётах принять $\ell = 2$ м.

Указания: При решении задания следует учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси подшипника. При вычислении момента силы $\vec{F}$ удобно её разложить на две составляющие $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, параллельные координатным осям (или на три): тогда по теореме Вариньона $M_x(\vec{F}) = M_x(\vec{F}') + M_x(\vec{F}'')$ и т. д.

Задача 2 (к вариантам 11 – 20) – рис. 26 – 28.

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестки соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке A , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем 1 (вар. 11 – 18) или же двумя подшипниками в точках A и B и двумя невесомыми стержнями 1 и 2 (вар. 19 – 20); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

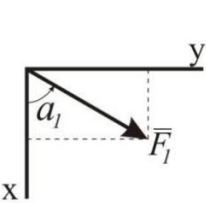
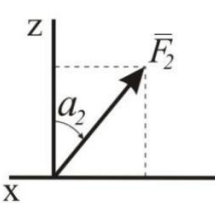
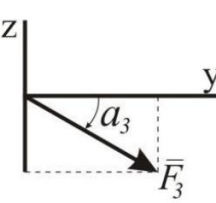
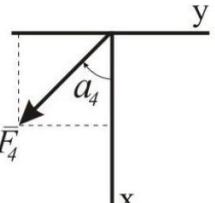
Размеры плит указаны на рисунках 26 – 28, вес большей плиты $P_1 = 5$ кН, вес меньшей плиты $P_2 = 3$ кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость xu – горизонтальная). На плиты действуют пара сил с моментом $M = 4$ кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. 3; при этом силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости XU , сила $\vec{F}_2$ – в плоскости, параллельной XZ , сила $\vec{F}_3$ – в плоскости, параллельной YZ . Точки приложения сил (D , E , H , K) находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках A и B и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять $a = 2$ м.

Указания: При решении задания следует учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем координатным осям), а реакция

цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси подшипника. Реакция невесомого стержня всегда направлена вдоль стержня. При вычислении момента силы $\vec{F}$ удобно её разложить на две составляющие $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, параллельные координатным осям (или на три): тогда по теореме Вариньона $M_x(\vec{F}) = M_x(\vec{F}') + M_x(\vec{F}'')$ и т. д.

Таблица 3.

Силы								
Номер условия	$F_1 = 6 \text{ кН}$		$F_2 = 8 \text{ кН}$		$F_3 = 10 \text{ кН}$		$F_4 = 12 \text{ кН}$	
	Точка приложения	α_1 , град	Точка приложения	α_2 , град	Точка приложения	α_3 , град	Точка приложения	α_4 , град
0	Е	60	Н	30	-	-	-	-
1	-	-	Д	60	Е	30	-	-
2	-	-	-	-	К	60	Е	30
3	К	30	-	-	Д	0	-	-
4	-	-	Е	30	-	-	Д	60
5	Н	0	К	60	-	-	-	-
6	-	-	Н	90	Д	30	-	-
7	-	-	-	-	Н	60	К	90
8	Д	30	-	-	К	0	-	-
9	-	-	Д	90	-	-	Н	30

Задача 3 (к вариантам 21 – 35) – рис. 28 – 30.

Шесть невесомых стержней соединены своими концами шарнирно друг с другом в двух узлах и прикреплены другими концами (тоже шарнирно) к неподвижным опорам A, B, C, D, E, K, F, L (вар. 21 – 35). Стержни и узлы (узлы расположены в вершинах A, B, C, D, E, K, F, L прямоугольного параллелепипеда) на рисунках 28 – 30 не показаны и должны быть изображены решающим задачу по данным таблицы 4. В узле, который в каждом столбце таблицы указан первым, приложена сила $P = 200 \text{ Н}$; во втором узле приложена сила $Q = 100 \text{ Н}$. Сила $\vec{P}$ образует с положительными направлениями координатных осей x, y, z углы, равные соответственно $\alpha_1 = 45^\circ, \beta_1 = 60^\circ, \gamma_1 = 60^\circ$, а сила $\vec{Q}$ – углы $\alpha_2 = 60^\circ, \beta_2 = 45^\circ, \gamma_2 = 60^\circ$; направления осей x, y, z соответствует правой декартовой системе отсчёта.

Грани параллелепипеда, параллельные плоскости xu , – квадраты. Диагонали других боковых граней образуют с плоскостью xu угол $\varphi = 60^\circ$, а диагональ параллелепипеда образует с этой плоскостью угол $\theta = 51^\circ$. Определить усилия в стержнях, указанных в табл. 4.

Таблица 4.

№ варианта	0	1	2	3	4
Узлы	A, B	L, E	D, F	B, E	D, B
Стержни	DL, DE, DF, CF, CK, BK	BK, CK, CF, DF, AK, DE	AD, AE, ED, EK, KB, KC	DA, DL, DC, FC, CK, AK	LE, LF, LD, CF, CK, AK
№ варианта	5	6	7	8	9
Узлы	B, L	C, L	D, E	B, L	B, E
Стержни	AE, AC, AD, DF, CF, KF	BA, BF, BK, AE, DE, DA	LF, FC, LD, KB, KC, AB	EA, ED, KF, KC, CF, FK	FC, CK, FK, LD, LA, DC

Указания: Система отсчёта вводится решающим самостоятельно. Изображать чертеж можно без соблюдения масштаба так, чтобы лучше были видны все шесть стержней. Стержни следует пронумеровать в том порядке, в каком они указаны в таблице; реакции стержней обозначать буквой с индексом, соответствующим номеру стержня. Реакция невесомого стержня всегда направлена вдоль стержня. При вычислении момента силы $\bar{F}$ удобно её разложить на две составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные координатным осям (или на три): тогда по теореме Вариньона $M_x(\bar{F}) = M_x(F') + M_x(F'')$ и т. д.

Задача 4 (к вариантам 36 – 40) – рис. 30 – 31.

Однородное тело весом G под действием наложенных на него связей и приложенных к нему систем сил находится в равновесии. Пренебрегая трением в местах сочленений, определить реакции опор A и B , а также усилия в стержнях. Вес стержней не учитывать. Необходимые для расчёта данные приводятся в таблице 5.

Таблица 5.

№ варианта	$G, \text{Н}$	$P_1, \text{Н}$	$P_2, \text{Н}$	$M_1, \text{Н} \cdot \text{м}$	$M_2, \text{Н} \cdot \text{м}$	$a, \text{м}$	$b, \text{м}$	$c, \text{м}$	$\alpha, \text{град}$	$\beta, \text{град}$
0	300	400	-	200	-	0,4	0,6	0,2	60	30
1	200	400	200	400	200	0,2	0,4	0,6	30	60
2	400	-	100	-	300	0,8	0,2	0,4	-	30
3	600	200	-	200	-	0,6	0,8	0,6	60	45
4	300	100	400	200	400	0,4	0,6	0,2	45	30
5	200	200	-	300	-	0,6	0,4	0,2	30	60
6	400	-	400	-	200	0,2	0,8	0,4	-	45
7	600	200	400	200	600	0,8	0,6	0,2	30	60
8	400	300	-	400	-	0,4	0,6	0,4	60	45

9	200	-	200	-	400	0,8	0,2	0,4	-	60
---	-----	---	-----	---	-----	-----	-----	-----	---	----

Задача 5 (к вариантам 41 – 60) – рис. 31 – 34.

Схемы конструкций представлены на рис. 31 – 34 (вар. 41 – 60). Найти реакции опор конструкции. Необходимые для расчёта данные приведены в таблице 6.

Таблица 6.

№ варианта	Q , Н	T , Н	G , Н	a см	b см	c см	R см	r см
41	2	-	20	20	30	10	15	5
42	3	-	2	30	20	40	15	10
43	1	4	2	40	30	20	20	10
44	-	3	1	30	10	5	18	6
45	4	6	3	20	40	15	20	10
46	1	4	2	30	40	20	20	10
47	-	2	1	20	30	15	15	10
48	4	-	1	25	20	8	15	10
49	10	-	5	40	30	20	25	15
50	-	2	1	30	90	20	30	10
51	3	-	2	60	20	40	20	5
52	4	-	2	50	30	-	-	-
53	2	-	1	15	10	20	20	5
54	6	-	2	60	40	60	-	-
55	4	-	-	60	40	20	-	-
56	2	-	-	40	60	30	-	-
57	-	-	4	40	30	50	-	-
58	10	-	-	50	30	50	-	-
59	-	4	3	15	20	15	15	10
60	5	-	-	40	40	10	-	-

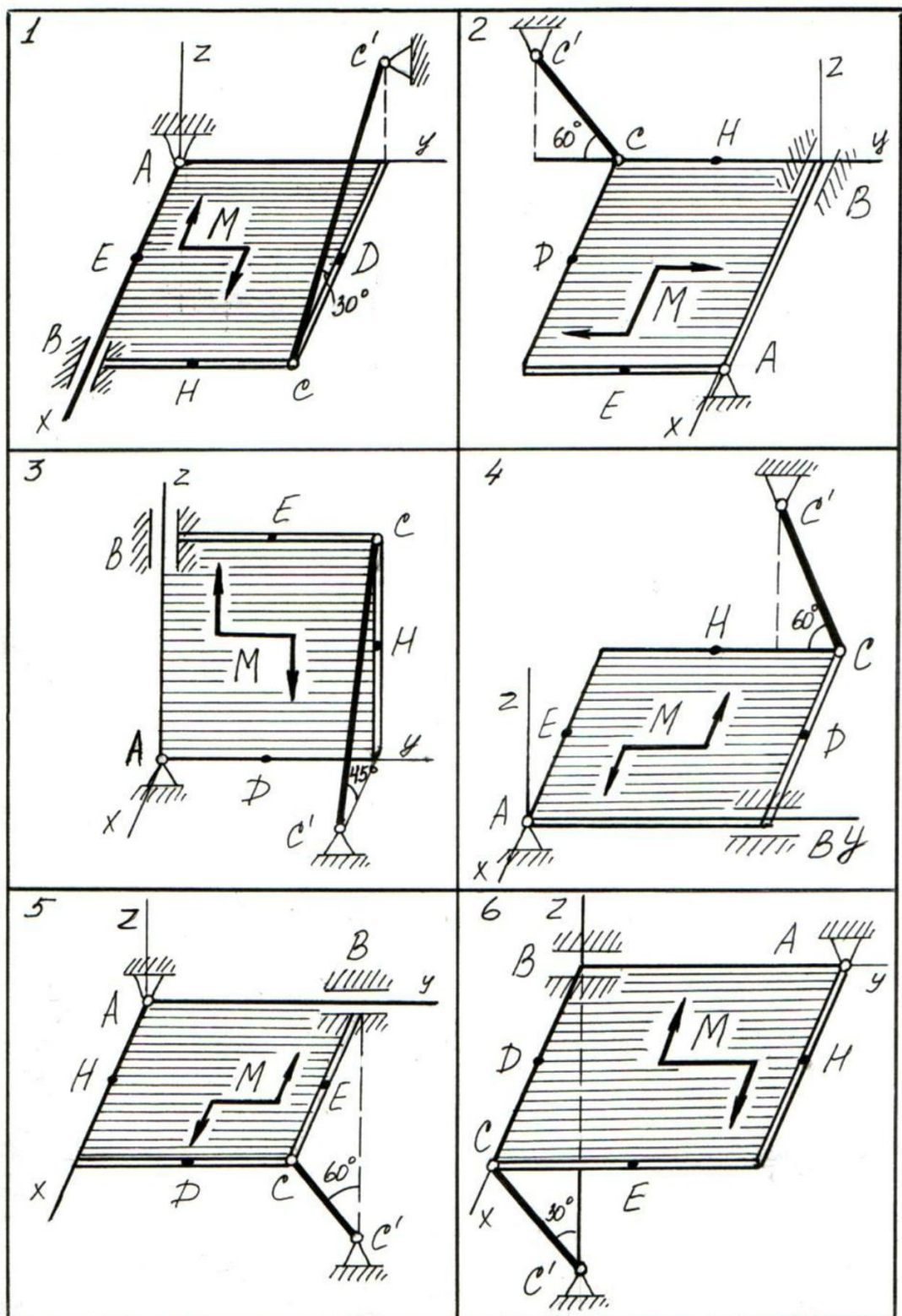


Рисунок 25

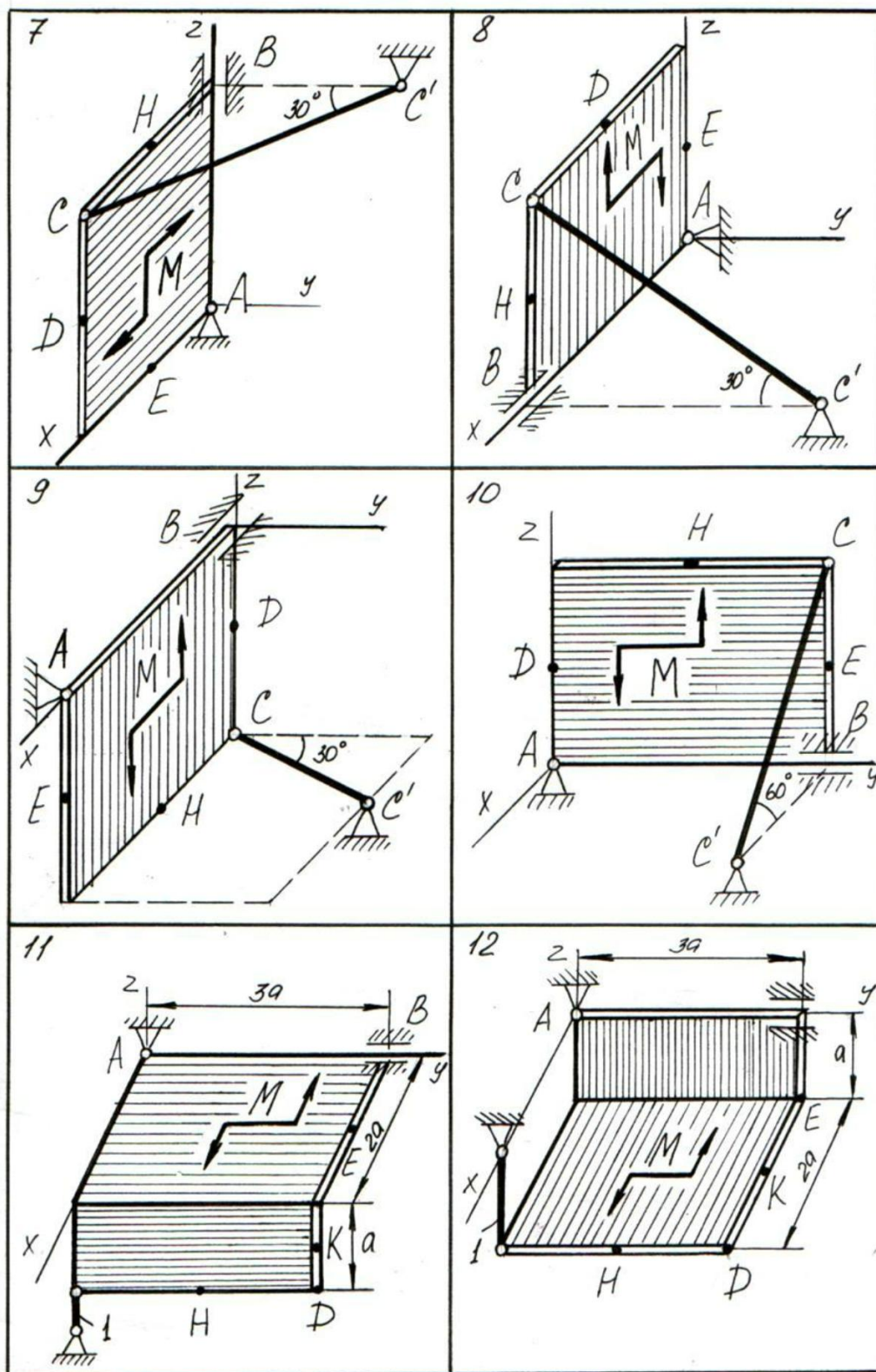


Рисунок 26

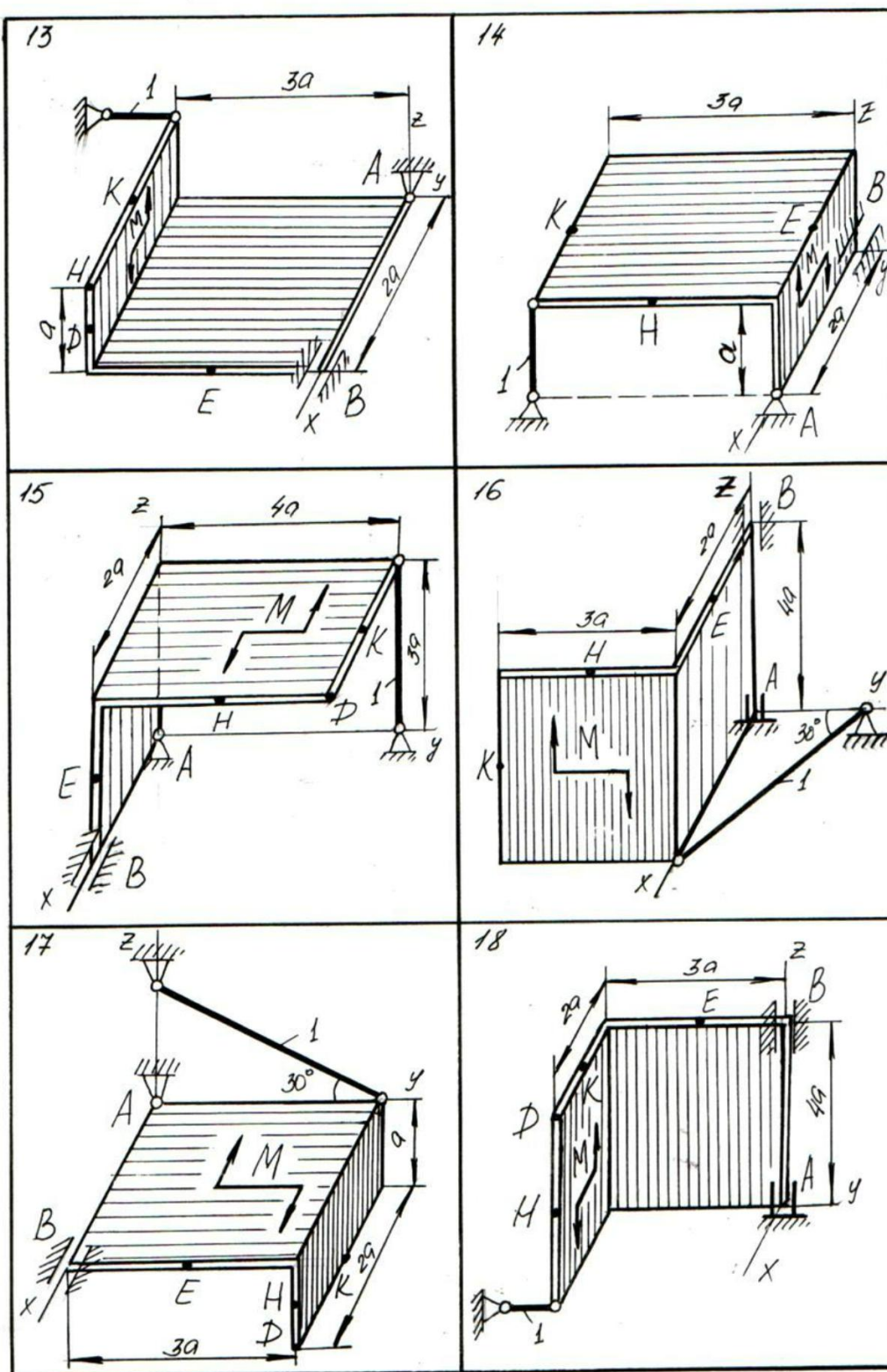


Рисунок 27

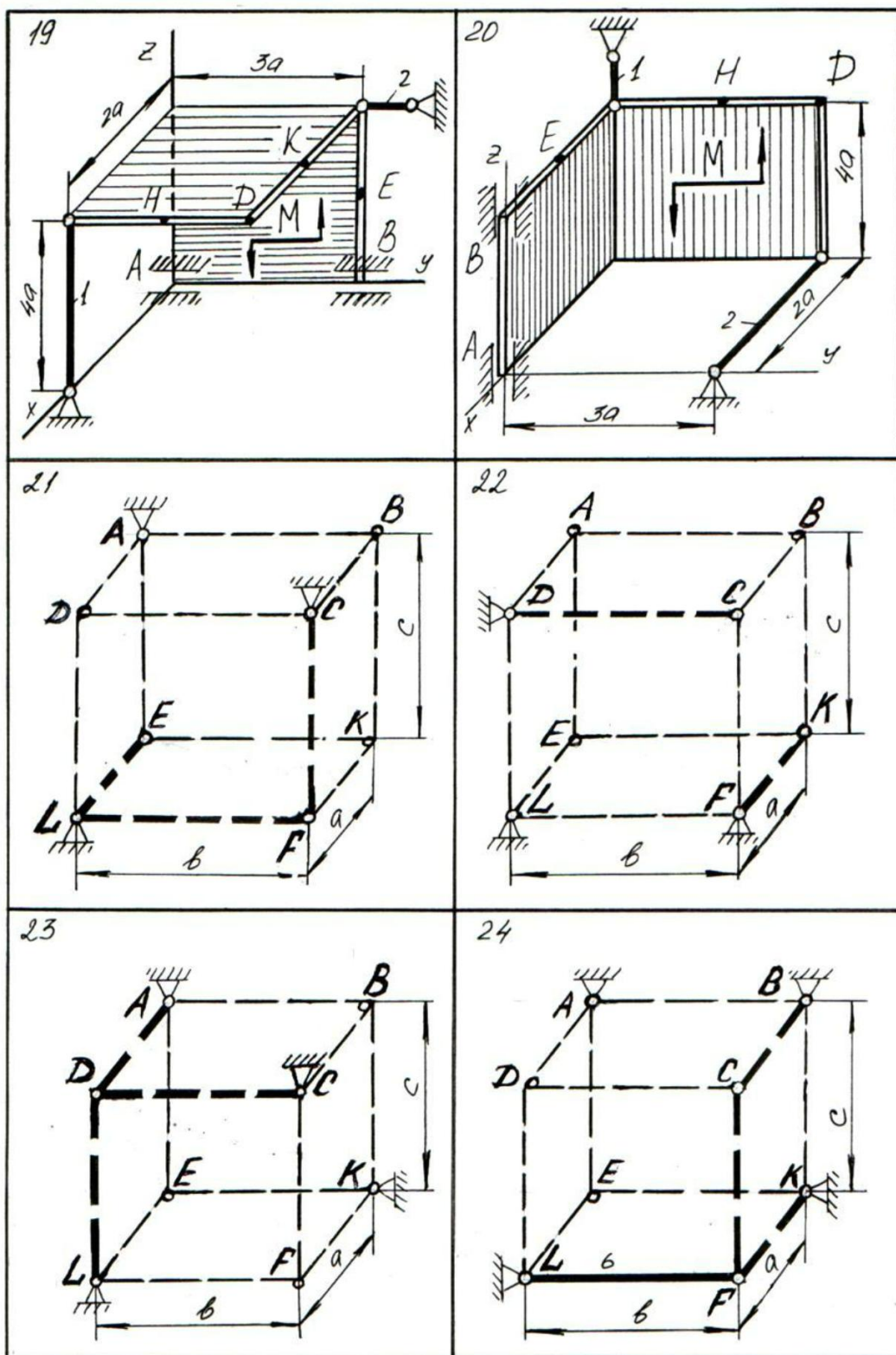


Рисунок 28

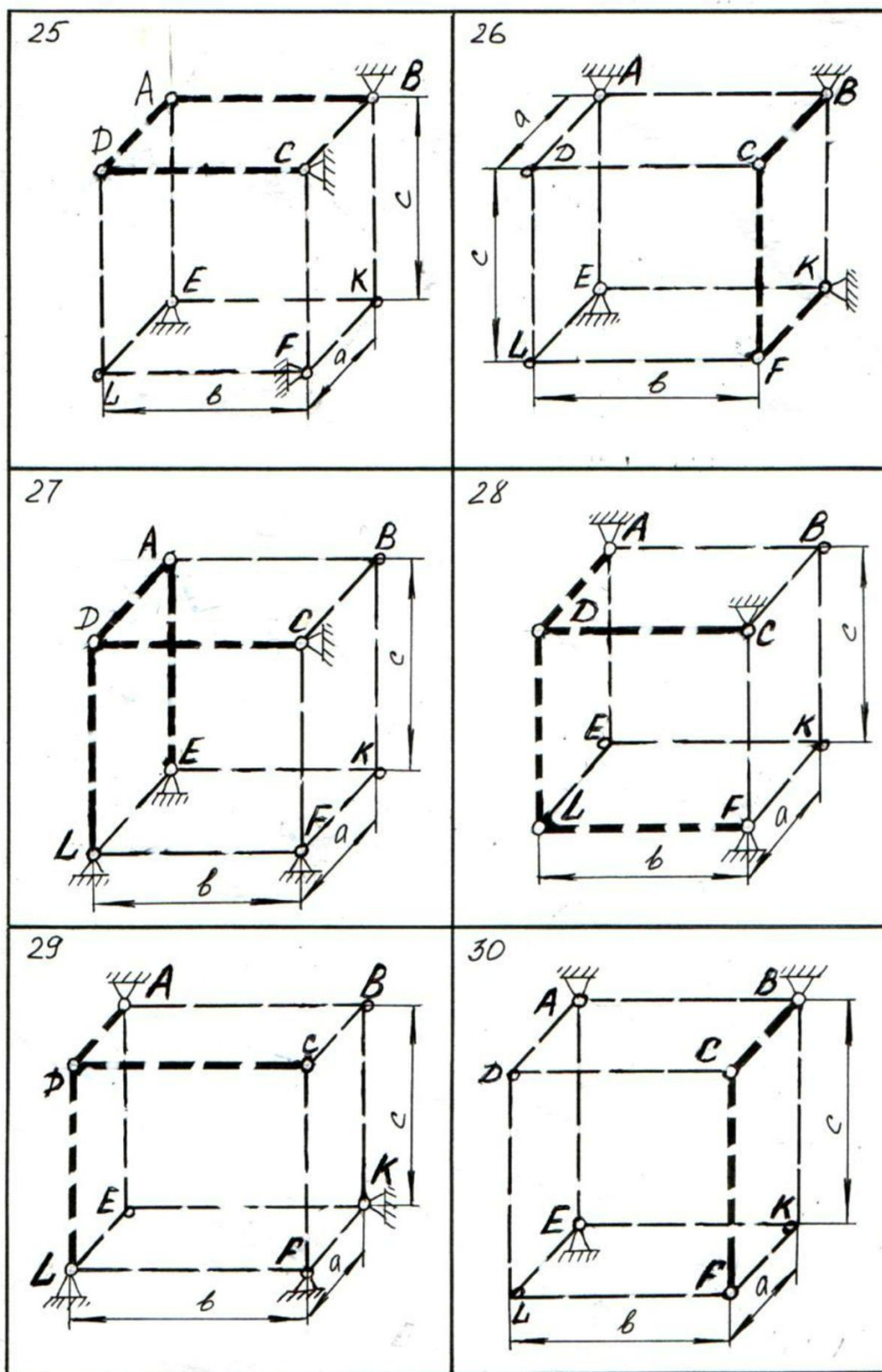


Рисунок 29

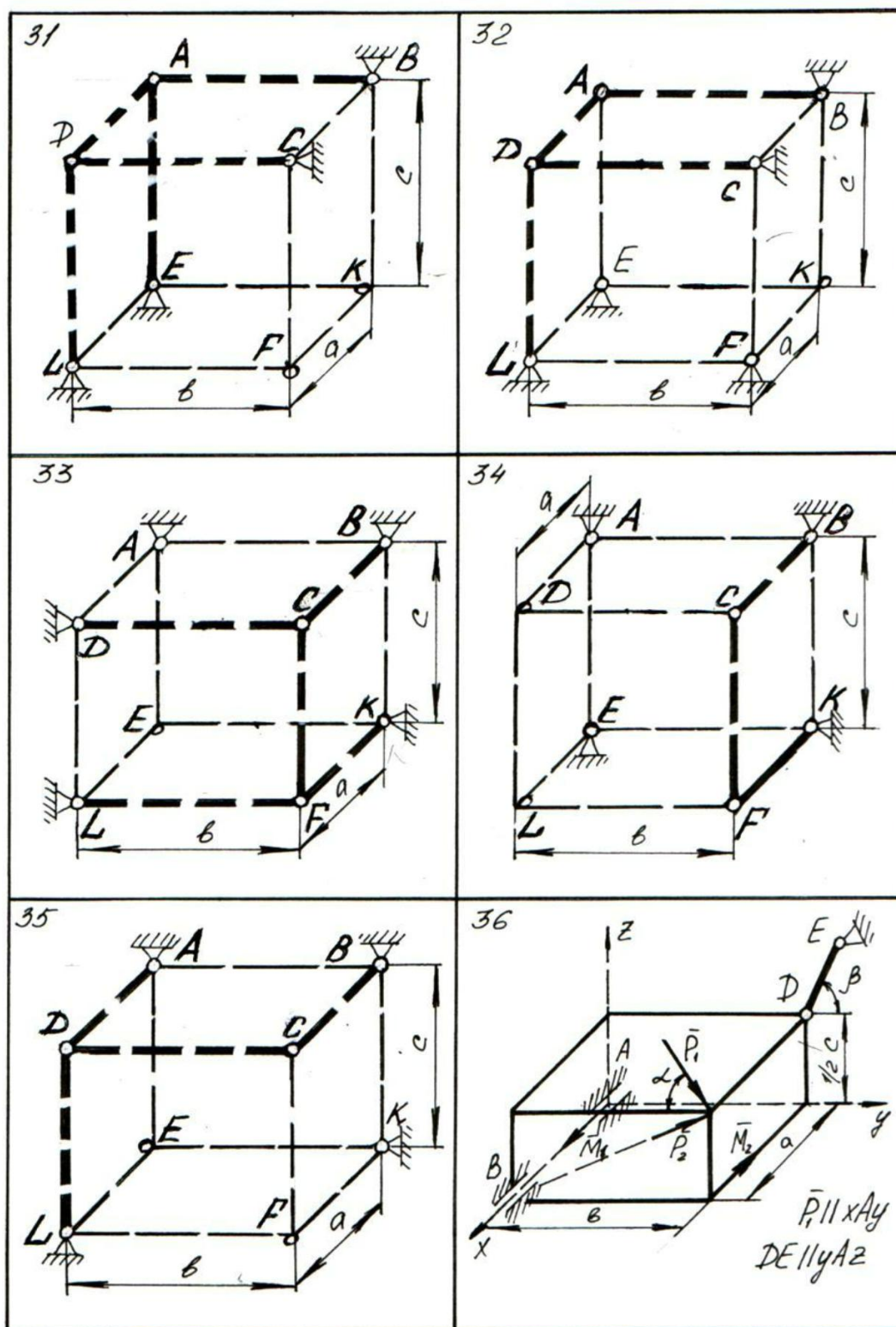


Рисунок 30

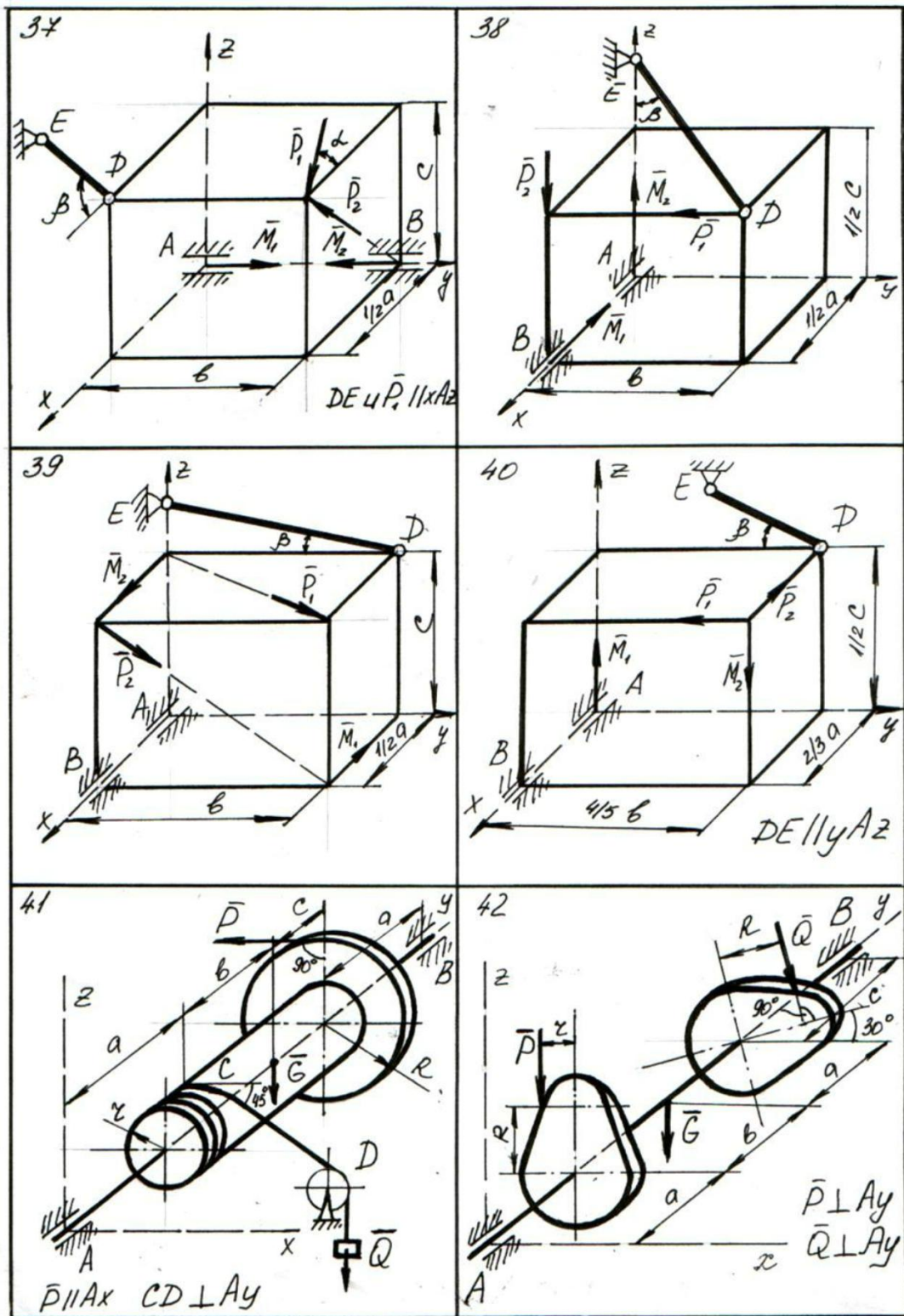


Рисунок 31

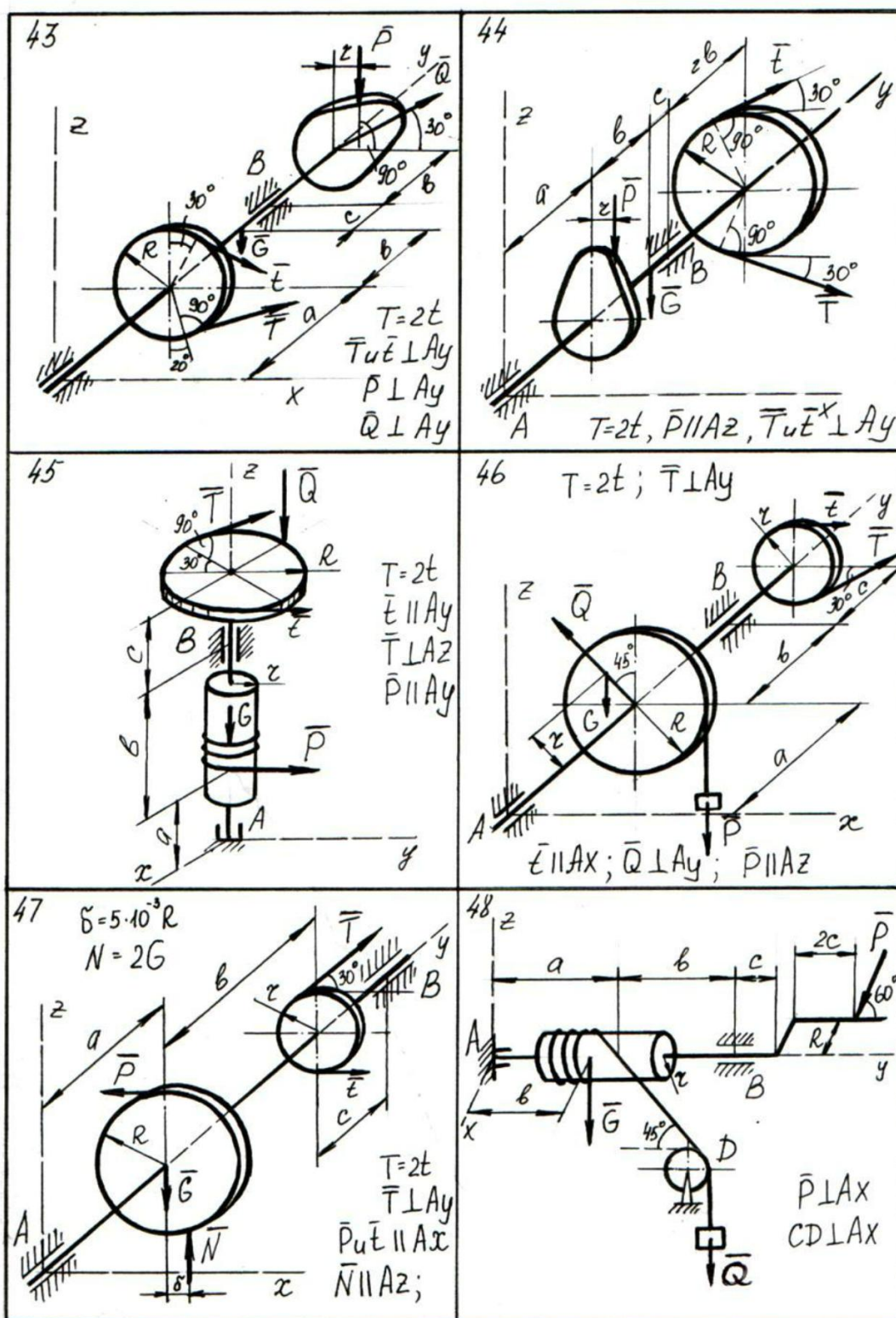


Рисунок 32

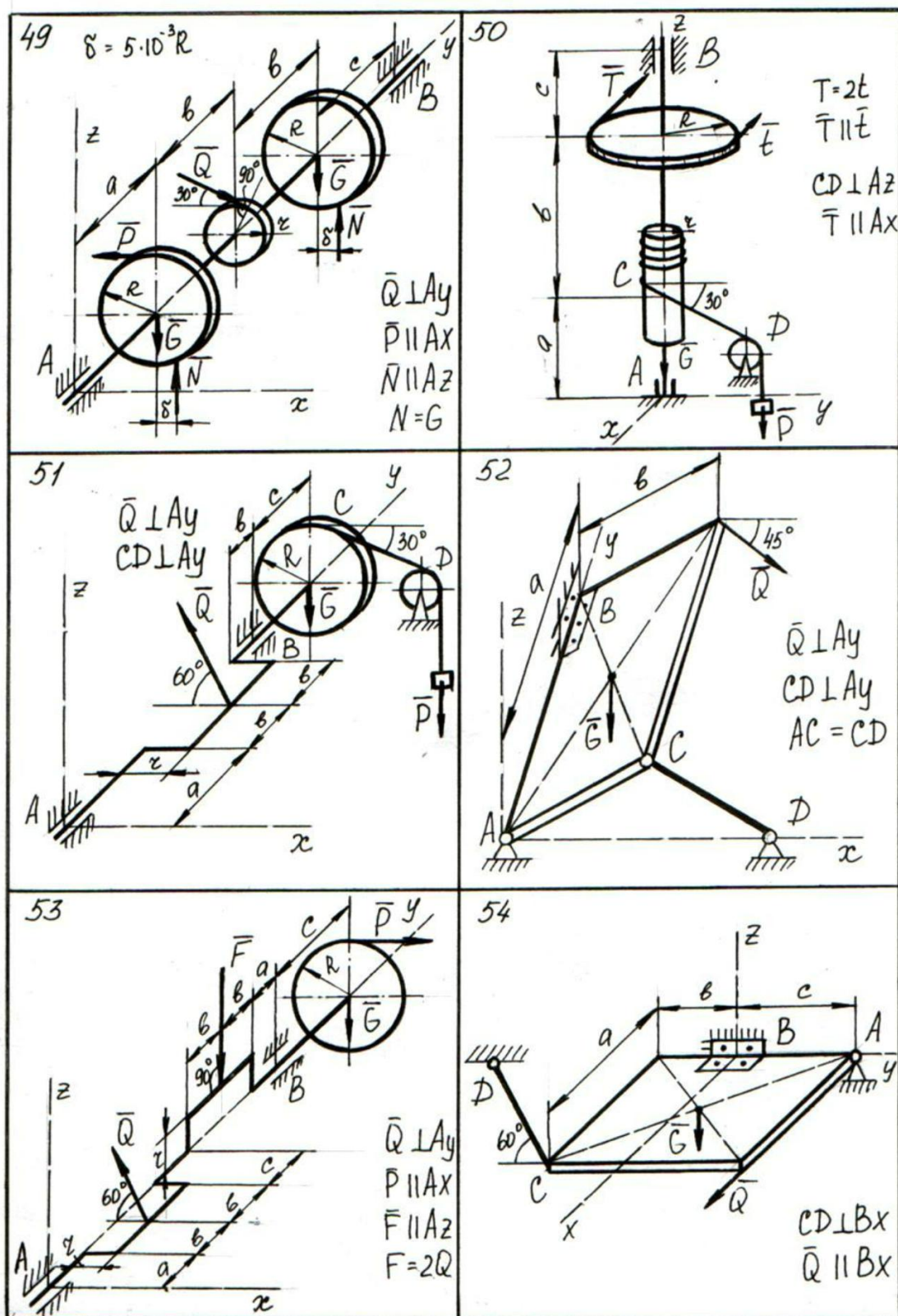


Рисунок 33

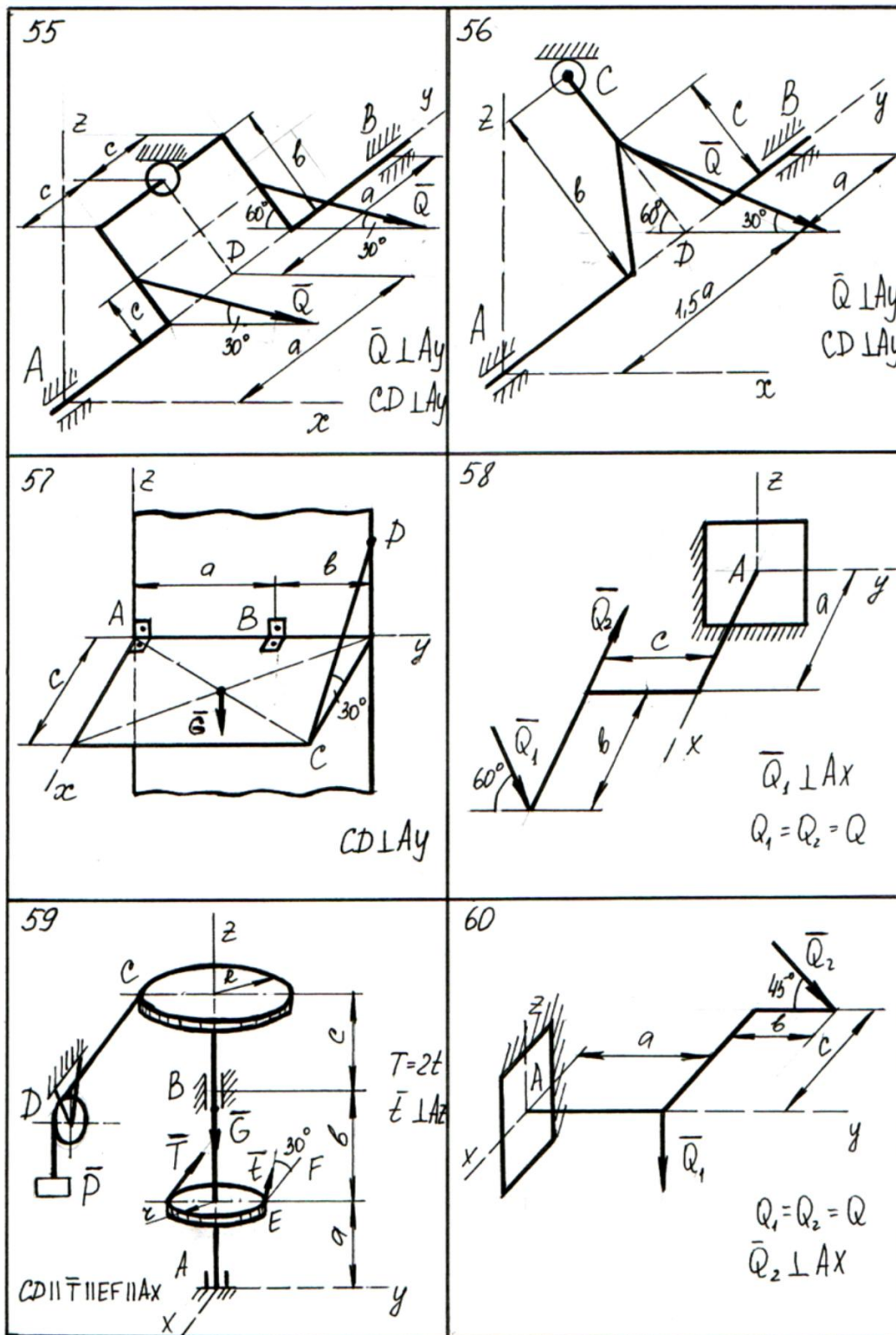


Рисунок 34

Вопросы для обсуждения:

1. Виды связей и их реакции (пространственные опоры)?

2. Аналитическая форма условий равновесия пространственной системы: а) сходящихся сил; б) параллельных сил; в) произвольной системы сил.

3. Алгебраический момент силы относительно оси. Основные свойства момента?

4. Момент пары сил?

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.

2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.

3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.

4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: www.mashin.ru

Раздел 2. Кинематика.

6. Тема: Координатный способ задания движения точки. Основные кинематические характеристики – траектория, скорость, ускорение, радиус кривизны траектории.

Цель занятия: Способы задания движения точки, определение траектории, положение точки на траектории, скорости точки, ускорения точки, нормального и касательного ускорения точки, радиуса кривизны траектории. Реализация учебной цели практического занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОПК-1.

Организационная форма: решение задач.

Методические рекомендации к практическому занятию:

Краткий теоретический обзор:

Для задания движения точки можно применять один из следующих трех способов:

1) векторный, 2) координатный, 3) естественный (или траекторный). *2. Координатный способ задания движения точки.*

Чтобы знать закон движения точки, т.е. её положение в пространстве в любой момент времени, надо знать значения координат точки для каждого момента времени, т.е. знать зависимости

$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t).$	(19)
---------------------------------------	------

Эти уравнения и есть уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Они определяют закон движения точки при координатном способе задания движения.

Если движение происходит в одной и той же плоскости, то, приняв эту плоскость за плоскость Oxy , получим

$x = f_1(t), y = f_2(t)$	(20)
--------------------------	------

При прямолинейном движении точки, если вдоль ее траектории направить координатную ось Ox , движение будет определяться одним уравнением

$x = f(t)$	(21)
------------	------

Это и есть закон прямолинейного движения.

Вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от соответствующего перемещения по времени.

Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от соответствующего перемещения точки по времени.

Проекция ускорения точки на касательную равна первой производной от числового значения скорости или второй производной от расстояния по времени, а проекция ускорения на главную нормаль равна квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке кривой.

Задача. Точка В движется в плоскости XOY . Закон движения точки задан уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

По заданным уравнениям движения точки В найти уравнение траектории точки; для момента времени t (указанного в таблице) найти положение точки на траектории, определить её скорость, ускорение, касательное и нормальное ускорения, радиус кривизны в соответствующей точке траектории. Необходимые для решения данные приведены в таблице 1.

Таблица 1.

1	$x = 6 \cos\left(\frac{t}{6}\right) \text{ см}$	$y = 12 \sin\left(\frac{t}{6}\right)$	$t = 1 \text{ с}$
2	$x = 4 \cos\left(\frac{t}{6}\right)$	$y = 6 \cos\left(\frac{t}{3}\right)$	$t = 1 \text{ с}$

3	$x \square 2 \square 3 \cos(\frac{\square}{6})$	$y \square \square 3 \sin^2(\frac{\square}{6})$	$t \square 1c$
4	$x \square 2 \sin(\frac{\square}{3})$	$y \square 4 \square 3 \cos(\frac{\square}{3})$	$t \square 1c$
5	$x \square 2 \square 3 \cos(\frac{\square}{3})$	$y \square 6 \cos(\frac{\square}{6})$	$t \square 1c$
6	$x \square 3 \square 3 \sin(\frac{\square}{3})$	$y \square 6 \cos(\frac{\square}{3})$	$t \square 1c$
7	$x \square 3 \cos(\frac{\square}{3})$	$y \square 2 \square 3 \sin^2(\frac{\square}{3})$	$t \square 1c$
8	$x \square 6 \cos^2(\frac{\square}{3}) \square 2$	$y \square 2 \sin(\frac{\square}{3})$	$t \square 1c$
9	$x \square 1 \square 3 \sin^2(\frac{\square}{6})$	$y \square 2 \square 3 \cos(\frac{\square}{3})$	$t \square 1c$
10	$x \square 6 \cos^2(\frac{\square}{6}) \square 1$	$y \square 3 \sin(\frac{\square}{6})$	$t \square 1c$
11	$x \square 2 \square 4 \sin(\frac{\square}{4})$	$y \square 8 \cos(\frac{\square}{4}) \square 3$	$t \square 1c$
12	$x \square 4 \cos(\frac{\square}{6}) \square 3$	$y \square 1 \square 6 \sin(\frac{\square}{4})$	$t \square 1c$
13	$x \square 3 \square 3 \sin^2(\frac{\square}{4})$	$y \square 4 \cos(\frac{\square}{4}) \square 2$	$t \square 1c$
14	$x \square 8 \cos^2(\frac{\square}{4}) \square 1$	$y \square 2 \square 4 \sin(\frac{\square}{4})$	$t \square 1c$
15	$x \square 2 \square 6 \sin^2(\frac{\square}{6})$	$y \square 1 \square 3 \cos(\frac{\square}{6})$	$t \square 1c$
16	$x \square 6 \cos(\frac{2\square}{3}) \square 2$	$y \square 4 \square 6 \sin(\frac{2\square}{3})$	$t \square 1c$
17	$x \square 3 \square 3 \sin(\frac{2\square}{3})$	$y \square 9 \cos(\frac{2\square}{3}) \square 2$	$t \square 1c$
18	$x \square 6 \cos^2(\frac{2\square}{3}) \square 4$	$y \square 1 \square 3 \sin(\frac{2\square}{3})$	$t \square 1c$
19	$x \square 4 \square 6 \sin^2(\frac{2\square}{3})$	$y \square 3 \cos(\frac{2\square}{3}) \square 2$	$t \square 1c$
20	$x \square 3 \cos(\frac{2\square}{3}) \square 2$	$y \square 1 \square 3 \sin(\frac{2\square}{3})$	$t \square 1c$
21	$x \square 2 \sin(\frac{\square}{6}) \square 2$	$y \square 2 \square 3 \cos^2(\frac{\square}{6})$	$t \square 1c$
22	$x \square 6 \sin(\frac{\square}{6}) \square 2$	$y \square 12 \cos(\frac{\square}{6}) \square 3$	$t \square 1c$
23	$x \square 3 \square 3 \sin^2(\frac{2\square}{3})$	$y \square 1 \square 6 \cos^2(\frac{2\square}{3})$	$t \square 1c$
24	$x \square 4 \square 3 \cos(\frac{2\square}{3})$	$y \square 3 \sin^2(\frac{2\square}{3}) - 3$	$t \square 1c$

25	$x = 4 \cos\left(\frac{t}{3}\right)$	$y = 8 \sin^2\left(\frac{t}{4}\right) - 3$	$t = 1c$
26	$x = 2 \cos\left(\frac{t}{4}\right)$	$y = 16 \sin\left(\frac{t}{8}\right) - 2$	$t = 1c$
27	$x = 1 \cos\left(\frac{3t}{2}\right)$	$y = 2 \sin\left(\frac{3t}{2}\right)$	$t = 1c$
28	$x = 3 \sin\left(\frac{5t}{8}\right)$	$y = 12 \cos\left(\frac{5t}{8}\right) - 2$	$t = 1c$
29	$x = 2 \sin\left(\frac{3t}{8}\right)$	$y = 3 \cos\left(\frac{3t}{8}\right)$	$t = 1c$
30	$x = 3 \cos\left(\frac{t}{8}\right)$	$y = 2 \sin\left(\frac{t}{8}\right)$	$t = 1c$
31	$x = 4 \sin\left(\frac{t}{8}\right)$	$y = 4 \sin\left(\frac{t}{8}\right)$	$t = 1c$
32	$x = 8 \cos\left(\frac{t}{8}\right)$	$y = 8 \sin\left(\frac{t}{16}\right)$	$t = 1c$
33	$x = 2 \sin\left(\frac{t}{3}\right)$	$y = 4 \cos\left(\frac{t}{8}\right)$	$t = 1c$
34	$x = 2t^2 + 3$	$y = 5t$	$t = \frac{1}{2}c$
35	$x = 4 \cos^2\left(\frac{t}{3}\right) - 2$	$y = 4 \sin^2\left(\frac{t}{3}\right)$	$t = 1c$
36	$x = \cos\left(\frac{t^2}{3}\right) - 3$	$y = \sin\left(\frac{t^2}{3}\right) - 1$	$t = 1c$
37	$x = 4t - 4$	$y = \frac{4}{(t - 1)}$	$t = 2c$
38	$x = 2 \sin\left(\frac{t}{3}\right)$	$y = 3 \cos\left(\frac{t}{3}\right) - 4$	$t = 1c$
39	$x = 3t^2 - 2$	$y = 4t$	$t = \frac{1}{2}c$
40	$x = 3t^2 - t - 1$	$y = 5t^2 - \frac{5}{3}t - 2$	$t = 1c$
41	$x = 7 \sin\left(\frac{t^2}{6}\right) - 3$	$y = 2 \cos\left(\frac{t^2}{6}\right)$	$t = 1c$
42	$x = \frac{3}{(t - 2)}$	$y = 3t - 6$	$t = 2c$
43	$x = 4 \cos\left(\frac{t}{3}\right)$	$y = 2 \sin\left(\frac{t}{3}\right) - 3$	$t = 1c$
44	$x = 4t^2 - 1$	$y = 3t$	$t = \frac{1}{2}c$
45	$x = 5 \sin^2\left(\frac{t}{6}\right)$	$y = 5 \cos^2\left(\frac{t}{6}\right) - 3$	$t = 1c$
46	$x = 5 \cos\left(\frac{t^2}{3}\right)$	$y = 3 \sin\left(\frac{t^2}{3}\right)$	$t = 1c$

47	$x = 2t^2$	$y = \frac{1}{(t+1)}$	$t = 2c$
48	$x = 4 \cos\left(\frac{t}{3}\right)$	$y = 3 \sin\left(\frac{t}{3}\right)$	$t = 1c$
49	$x = 3t$	$y = 4t^2 + 1$	$t = \frac{1}{2}c$
50	$x = 7 \sin^2\left(\frac{t}{6}\right) + 5$	$y = 7 \cos^2\left(\frac{t}{6}\right)$	$t = 1c$
51	$x = 1 + 3 \cos\left(\frac{t^2}{3}\right)$	$y = 3 \sin\left(\frac{t^2}{3}\right) + 3$	$t = 1c$
52	$x = 3t^2 + 4$	$y = 3t$	$t = 1c$
53	$x = 2 + 3t + 6t^2$	$y = 3 + \frac{3}{2}t + 3t^2$	$t = 0c$
54	$x = 6 \sin\left(\frac{t^2}{6}\right) + 2$	$y = 6 \cos\left(\frac{t^2}{6}\right) + 2$	$t = 1c$
55	$x = 7t^2 + 3$	$y = 5t$	$t = \frac{1}{2}c$
56	$x = 3 + 3t^2 + t$	$y = 4 + 5t^2 + \frac{5t}{3}$	$t = 1c$
57	$x = 4 \cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1$	$y = 4 \sin\left(\frac{t}{3}\right)$	$t = 1c$
58	$x = 6t$	$y = 2t^2 + 4$	$t = 1c$
59	$x = 8 \cos^2\left(\frac{t}{6}\right) + 2$	$y = 8 \sin^2\left(\frac{t}{6}\right) + 7$	$t = 1c$
60	$x = 3 + 9 \sin\left(\frac{t^2}{6}\right)$	$y = 9 \cos\left(\frac{t^2}{6}\right) + 5$	$t = 1c$
61	$x = 4t^2 + 1$	$y = 3t$	$t = 1c$
62	$x = 5t^2 + \frac{5t}{3} + 3$	$y = 3t^2 + t + 3$	$t = 1c$
63	$x = 2 \cos\left(\frac{t^2}{3}\right) + 2$	$y = 2 \sin\left(\frac{t^2}{3}\right) + 3$	$t = 1c$

Указания: Задача относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул касательного и нормального ускорения точки. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчётах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1; \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Задача: Исходные данные : $x = 4 \cos(\pi/3)$; $y = -3 \sin(\pi/3)$; $t_c = 1$ (х и у – в см, t – в с.)

Решение: 1. Уравнения движения точки $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнение траектории движения точки нужно исключить время t из заданных уравнений движения:

$$\begin{cases} x/4 = \cos(\pi t/3); & (x^2)/16 = \cos^2(\pi t/3); \\ y/3 = -\sin(\pi t/3); & y^2/9 = \sin^2(\pi t/3); \end{cases}$$

Сложив эти уравнения (почленно левые и правые части уравнений) получим:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ — уравнение эллипса.}$$

Координаты центра эллипса $x_c = 0$, $y_c = 0$. Радиус большой оси эллипса $R_x = 4$ см, радиус малой оси эллипса $r_y = 3$ см. В масштабе 1:1 на миллиметровке (рис. 35) строим эллипс.

Чтобы определить, весь эллипс или какая-то его часть является траекторией движения точки, удовлетворяющей заданным уравнениям движения точки, определим пограничные условия:

$$\cos(\pi t/3) = 1 \Rightarrow x_{\max} = 4; \cos(\pi t/3) = -1 \Rightarrow x_{\min} = -4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$\sin(\pi t/3) = 1 \Rightarrow y_{\min} = -3; \sin(\pi t/3) = -1 \Rightarrow y_{\max} = 3 \Rightarrow -3 \leq y \leq 3$$

Определяем положение точки В в момент времени t :

При $t = 1$ с.

$$x = 4 \cos(\pi/3) = 4 \cdot 1/2 = 2 \text{ см.}$$

$$y = -3 \sin(\pi/3) = 3 \cdot \sqrt{3}/2 = -2,60 \text{ см.}$$

$$\text{Момент начала движения } t_0 = 0$$

$$X_0 = 4 \cdot \cos 0 = 4 \cdot 1 = 4 \text{ см.}$$

$$Y_0 = -3 \sin 0 = -3 \cdot 0 = 0 \text{ см.}$$

Итак, эллипс, изображенный на рис. 35 является траекторией движения точки, удовлетворяющей заданным параметрическим уравнениям движения.

2. Скорость точки B_1 находим по её проекциям на координатные оси:

$$V_x = dx/dt = (4\cos(\pi t/3))' = 4 \cdot (-\sin(\pi t/3)) \cdot \pi/3 = -(4\pi)/3 \cdot \sin(\pi t/3);$$

$$V_x(t) = -((4 \cdot 3,14)/3) \cdot \sqrt{3}/2 = -3,63 \text{ см/с};$$

$$V_y = dy/dt = (-3\sin(\pi t/3))' = -(3 \cdot \cos(\pi t/3)) \cdot \pi/3 = -\pi \cos(\pi t/3);$$

$$V_y(t) = -3,14 \cdot (1/2) = -1,57 \text{ см/с}$$

По найденным проекциям определяем модуль скорости точки В:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{((-4\pi/3) \sin(\pi/3))^2 + (\pi \cos(\pi/3))^2}$$

$$V(t) = \sqrt{(3,63)^2 + (1,57)^2} = 3,96 \text{ см/с}$$

По найденным проекциям V_x и V_y строим вектор скорости точки B_1 - $\vec{V}_{(t)}$ на рис. 94. в масштабе 1:1.

3. Ускорение точки B_1 находим аналогично:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = (- (4\pi)/3 \cdot \sin(\pi t/3))' = - (4\pi)/3 \cdot \pi/3 \cdot \cos(\pi t/3) = - \frac{4\pi^2}{9} \cos(\frac{\pi t}{3});$$

$$a_x(t) = - \frac{4 \cdot 3,14^2}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,19 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = (- \pi \cos(\pi t/3))' = - \pi \cdot \frac{\pi}{3} \sin(\frac{\pi t}{3}) \cdot \frac{\pi}{3} \sin(\frac{\pi t}{3});$$

$$a_y(t) = \frac{3,14^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2,85 \text{ см/с}^2;$$

По найденным проекциям $a_x(t)$ и $a_y(t)$ определяем модуль ускорения точки B_1 :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(\frac{4\pi^2}{9} \cos(\frac{\pi t}{3}))^2 + (\frac{\pi^3}{3} \sin(\frac{\pi t}{3}))^2};$$

$$a(t) = \sqrt{a_{x(t)}^2 + a_{y(t)}^2} = \sqrt{(2,19)^2 + (2,85)^2} = 3,59 \text{ см/с}^2;$$

По найденным проекциям $a_x(t)$ и $a_y(t)$ на рис. 35 в масштабе 1:1 строим вектор ускорения точки B_1 - $\overline{a(t)}$.

4. Тангенциальное ускорение точки B_1 находим согласно основного определения:

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y}{V};$$

$$a_t(t) = \frac{3,63 \cdot (2,19) + (1,57) \cdot 2,85}{3,96} = 0,88 \text{ см/с}^2$$

$$a_t(t) = 0,88 \text{ см/с}^2 > 0 \Rightarrow \text{движение точки } B_1 \text{ криволинейное ускоренное} \Rightarrow \overline{V(t)} \uparrow \uparrow$$

$\overline{a(t)}$ (рис. 35)

5. Нормальное ускорение точки B_1 находим:

$$|a| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \Rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} \Rightarrow$$

$$a_n(t) = \sqrt{(3,59)^2 - (0,88)^2} = 3,48 \text{ см/с}^2$$

Вектор $\overline{a_n(t)} \perp \overline{a(t)}$ к центру кривизны (рис. 35)

6. Радиус кривизны траектории в точке B_1 , находим из условия:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^2}{a_n} \Rightarrow \rho = \frac{(3,96)^2}{3,48} = 4,51 \text{ см}$$

Результаты расчётов основных кинематических параметров движения точки B_1 для заданного момента времени $t = 1 \text{ с}$ приведены в таблице 2.

Таблица 2.

Координаты, см.		Скорость, см/с			Ускорение, см/с ²					Радиус кривизны
x	y	V_x	V_y	V	a_x	a_y	a	a_{τ}	a_n	ρ
2,0	-2,60	-3,63	-1,57	3,96	-2,19	2,85	3,59	0,88	3,48	4,51

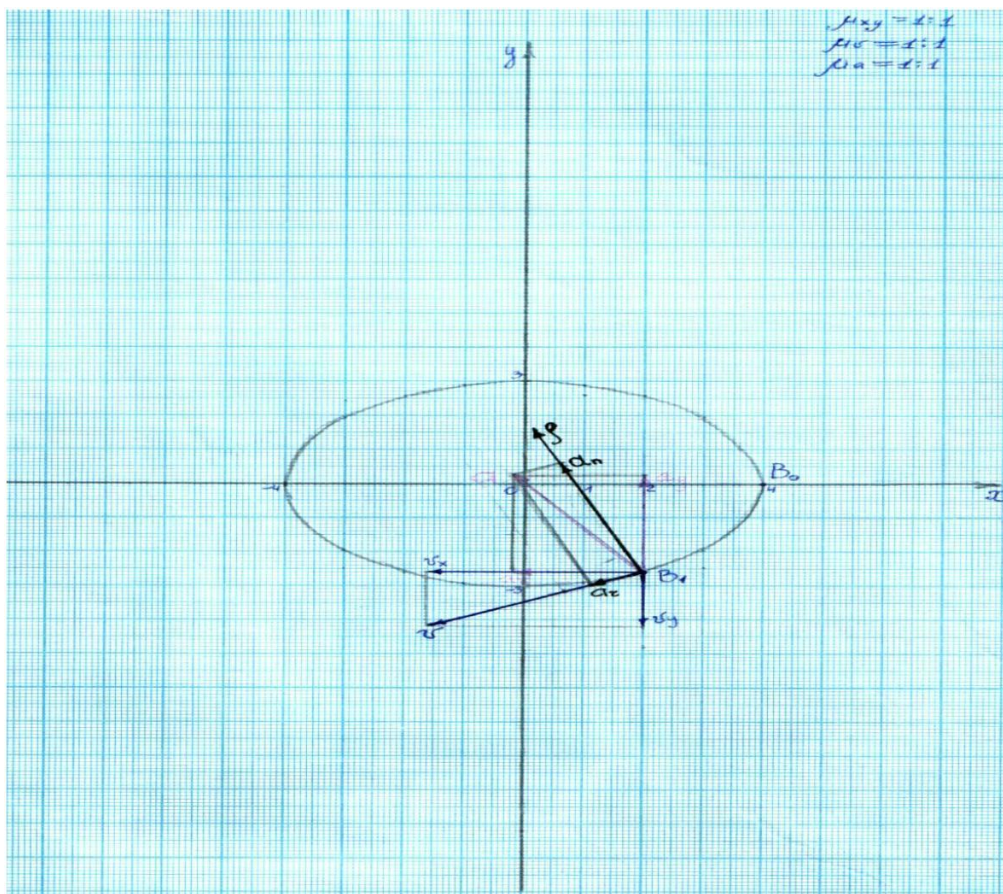


Рисунок 35

Вопросы для обсуждения:

1. Как задаётся движение точки координатным способом?
2. Как по уравнениям движения точки в координатной форме определить траекторию движения точки?
3. Что называется траекторией движения точки?
4. Классификация траекторий?
5. Какие оси называют естественными осями координат при описании движения точки?
6. Что называется скоростью точки?
7. Как связаны проекция вектора скорости на одну из координатных осей и соответствующая координата движущейся точки?
8. Как определяется модуль и направление скорости при координатном способе задания движения точки?

9. Что вы понимаете под алгебраической скоростью?
 10. В каком направлении происходит движение точки, если алгебраическая скорость: а) положительна? б) отрицательна?
 11. Дайте определение ускорения точки?
 12. Как определяется модуль и направление ускорения при координатном способе задания движения точки?
 13. Что такое естественная система координат? Нарисуйте эту систему координат и назовите оси естественной системы координат?
 14. Что такое кривизна и радиус кривизны траектории точки?
 15. Назовите проекции ускорения точки на естественные оси координат? По каким формулам они вычисляются?
 15. Что характеризует касательное ускорение, нормальное ускорение? При каком движении отсутствует: касательное ускорение? нормальное?
 16. Как определить, в каком случае движение точки будет ускоренным, замедленным?
 17. Вывести формулу для вычисления ускорения, если движение точки задано уравнениями движения в координатной форме?
 18. Как направлено нормальное ускорение по отношению к траектории? В каких точках траектории изменяется направление нормального ускорения?
 19. Сделайте классификацию движений точки по скоростям и ускорениям ее движения?
- Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.
4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: www.mashin.ru

7. Тема: Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном движении.

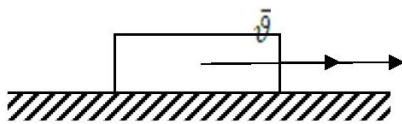
Цель занятия: поступательное движение твердого тела; траектория, скорость и ускорение точек твердого тела при поступательном движении; классификация поступательного движения твердого тела. Реализация учебной цели практического занятия

способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОПК-1.

Организационная форма: решение задач.

Методические рекомендации к практическому занятию:

Краткий теоретический обзор:

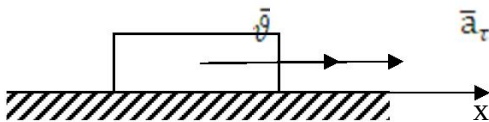


Поступательное движение твердого тела – любая прямая тела остается параллельной своему первоначальному положению. Траектория тела – прямая. Ускорение любой

точки тела при поступательном движении $\bar{a} = \bar{a}_\tau$; $a = a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt}$; $a_n = \frac{\vartheta^2}{\rho \rightarrow \infty} = 0$;

(21)

Задача. Тело движется поступательно согласно уравнению $x=0,4t^2$. Определить скорость и ускорение тела при $t=2c$.



$$\vartheta = (x)' = (0,4t^2)' = 0,8t$$

$$\vartheta(t = 2c) = 0,8 \cdot 2 = 1,6 \text{ м/с}$$

$$\bar{\vartheta} \parallel x; a_n = \frac{\vartheta^2}{\rho \rightarrow \infty} = 0;$$

$$a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt} = (x)'' = (0,8t)' = 0,8 \text{ м/с}^2 > 0 \Rightarrow$$

тело движется поступательно равноускоренно $\bar{\vartheta} \uparrow \uparrow \bar{a}_\tau = \bar{a}$.

$$a_\tau = a = 0,8 \text{ м/с}^2;$$

Ответ: $\vartheta = 1,6 \text{ м/с}$; $a = 0,8 \text{ м/с}^2$.

Решить самостоятельно:

Задача 1. Тело движется поступательно с ускорением $a=0,2t$. Определить момент времени t , когда скорость тела будет равна 2 м/с, если при $t_0 = 0$ скорость $\vartheta_0 = 0$. (4,47)

Задача 2. Тело движется поступательно по прямой ОХ с ускорением $a_x = 0,7t$.

Определить закон поступательного движения тела $x=x(t)$ и координату x точки тела в момент времени $t=5c$, если при $t_0 = 0$ скорость $\vartheta_0 = 0$ и координата $x_0 = 0$. (14,6)

Вопросы для обсуждения:

1. Поступательное движение твердого тела?
2. Основные кинематические характеристики поступательного движения твердого тела?
3. Классификация поступательных движений твердого тела?
4. Скорость точек тела при поступательном движении?

5. Ускорение точек тела при поступательном движении?

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416

с.

2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.

3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.

4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: www.mashin.ru**8. Тема: Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при вращательном движении.**

Цель занятия: вращательное движение твердого тела, скорость и ускорение точек твердого тела при вращательном движении, классификация вращательного движения твердого тела. Реализация учебной цели практического занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОПК-1.

Организационная форма: решение задач.

Методические рекомендации к практическому занятию:

Краткий теоретический обзор:

$$\varphi = \varphi(t) - \text{закон вращательного движения твердого тела.} \quad (22)$$

$$\omega = (\varphi)' \text{ [рад/с]; } \varepsilon = (\omega)' = \varphi'' \text{ (рад/с}^2\text{)} \quad (23)$$

$$\vartheta = \omega r; a_n = \omega^2 r; a_\tau = \varepsilon r; \bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau; \quad (24)$$

$$a = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (25)$$

Задача.

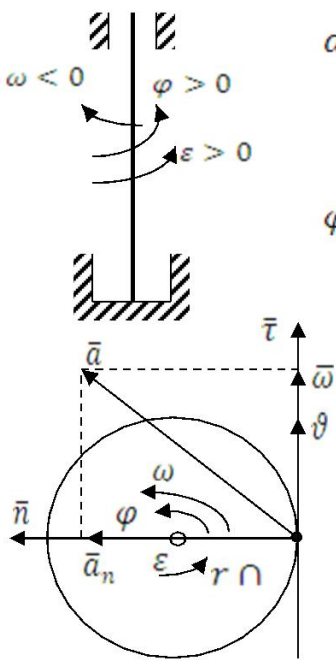
Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону

$\varphi = t^2$ (рад). Определить скорость и ускорение точки тела на расстоянии $r=0,5$ м от оси вращения в момент времени $t=1$ с.

Решение:

$$\vartheta = \omega r;$$

$$\omega = (\varphi)' = (t^2)' = 2t;$$



$$\vartheta(t = 1\text{с}) = 2tr = 2 \cdot 1 \cdot 0,5 = 1 \text{ м/с};$$

$$\vec{\vartheta} \perp r \text{ в сторону } \omega$$

$$a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt} = \varepsilon r; \quad \varepsilon = (\omega)' = (2t)' = 2 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} > 0(\text{const}) \Rightarrow \omega \uparrow \uparrow \varepsilon - \text{вращение}$$

тела равноускоренное

$$a_\tau = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м/с}^2; \quad \vec{a}_\tau \perp r \text{ в сторону } \varepsilon.$$

$$a_n = \omega^2 r = (2t)^2 r = 4 \cdot 1^2 \cdot 0,5 = 2 \text{ м/с}^2;$$

$\vec{a}_n$ вдоль r от точки к центру кривизны

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau; \quad a = \sqrt{(a_n)^2 + (a_\tau)^2} = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2,83 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$\text{Ответ: } \vartheta = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad a = 2,83 \text{ м/с}^2.$$

Решить самостоятельно:

Задача 1. Тело вращается согласно уравнению $\omega = 2 - 8t^2$. Определить время t остановки тела. (0,5)

Задача 2. Тело вращается по закону $\varphi = 5 + 3t^2$; определить скорость и ускорение точки тела в момент времени $t=1$ с, если радиус вращения $r = 10$ см. (60 см/с; 60 см/с²)

Вопросы для обсуждения:

1. Вращательное движение твердого тела?
2. Основные кинематические характеристики вращательного движения твердого тела?
3. Классификация вращательных движений твердого тела?
4. Скорость точек тела при вращательном движении?
5. Ускорение точек тела при вращательном движении?

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.
4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика,

кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: www.mashin.ru

Рекомендуемая литература.

Основная литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб.пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
3. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике/ Под ред. А.А.Яблонского. – М.: КноРус, 2010. – 392 с.
4. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.
5. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 2. Динамика : учеб. пособие. – 9-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 640 с.: ил.

Дополнительная литература.

1. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.
1. Тарг СМ. Краткий курс теоретической механики. - М.: Высш.шк., 2004.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие / Под ред. А.А. Яблонского. - М., 2004.
3. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. - М.: «Интеграл – Пресс», 2004.
4. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. - СПб.: «Лань», 2001.
5. Цывильский Б.Л. Теоретическая механика. - М: Высш.шк., 2001.
6. Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике. - М.: Высш.шк., 2000.
8. Сахарный Н.Ф. Курс теоретической механики. - М.: Высш.шк., 1964.
- 9.Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. - М.: Высш.шк., 1985.
10. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие / Под ред. А.А. Яблонского. - М., 1985.
11. Добронравов В.В. и др. Курс теоретической механики: Учебник. - М, 1965.

12. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики: Учебник. - М., 1985 - Т. 1,2.
13. Бать М.И. и др. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учебное пособие. Т. 1,2. – М., 1984.
14. Бражниченко Н. А. и др. Сборник задач по теоретической механике. - М., 1974.
15. Кепе О.Э. и др. Сборник коротких задач по теоретической механике. Учебное пособие. – М., 1989.
16. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: «Наука», 1961.
17. Четаев Н. Г. Теоретическая механика. М.: «Наука», 1987.