

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ
по дисциплине «Методы математических доказательств»
для студентов направления подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Ставрополь
2026

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

ТЕМА 1. Математические понятия и основные виды математических суждений.

Практическое занятие № 1. Различные способы определения понятий.

Правила для определения понятий.

Практическое занятие № 2. Прямая и обратная теоремы. Необходимые и достаточные условия

Практическое занятие № 3. Итоговое занятие по теме «Математические понятия и основные виды математических суждений».

ТЕМА 2. Методы математических доказательств.

Практическое занятие № 4-5. Аналитический и синтетический метод доказательства.

Практическое занятие № 6. Метод математической индукции

Практическое занятие № 7. Метод доказательства от противного

Практическое занятие № 8. Итоговое занятие по теме «Методы математических доказательств».

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Методы математических доказательств» является формирование универсальной компетенции УК-1 будущего бакалавра по направлению подготовки 01.03.02- Прикладная математика и информатика.

Задачей освоения дисциплины «Методы математических доказательств» является формирование математической культуры студентов: умения логически верно строить математические суждения, верно выбирать и применять методы математических доказательств.

В результате освоения дисциплины студент должен:

Знать: основные способы определения понятий, виды математических суждений, методы математических доказательств

Уметь: определять понятия, строить математические суждения, применять методы математических доказательств

Владеть: навыками строгого определения понятий, логически верного построения математических суждений разных видов, навыками выбора и применения методов математических доказательств

В методических указаниях по выполнению практических работ по дисциплине «Методы математических доказательств» описана

последовательность и основное содержание практических занятий по дисциплине. Для каждого практического занятия даны теоретические задания, практические задания, решаемые в аудитории, и практические задания для самостоятельной работы дома.

Тема 1.

Математические понятия и основные виды математических суждений.

Практическое занятие 1.

Различные способы определения понятий. Правила для определения понятий.

Цель занятия: Научиться определять содержание и объём понятия, классифицировать понятие, использовать правила для определения понятий.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенция УК-1, знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

Вопросы, выносимые на обсуждение.

1. Понятия.
2. Содержание и объём понятия.
3. Определение понятий.
4. Различные способы определения понятий.
5. Правила для определения понятий.

Теоретические задания.

1. Что мы понимаем под индивидуальными и общими свойствами объекта? Приведите примеры индивидуальных и общих свойств объекта.
2. Какие свойства объекта называют существенными? Приведите примеры существенных свойств объекта.
3. Какую форму мышления мы называем понятием?
4. Виды обобщений.
5. Схемы построения абстрактных и конкретных понятий.
6. Содержание понятия. Укажите содержание какого-либо понятия.
7. Объём понятия. Опишите объём какого-либо понятия.
8. Как связаны между собой содержание и объём понятия?
9. Когда одно понятие называется родовым по отношению к другому понятию?
10. Когда одно понятие называется видовым по отношению к другому понятию?

11. Что понимают под классификацией понятия?
12. Какие условия должны соблюдаться при правильной классификации?
13. Что понимают под определением понятия?
14. Какие Вы знаете способы определения понятий?
15. Определяемые и определяющие понятия.
16. Укажите важнейшие правила определения понятий.
17. Соразмерность определения. К каким ошибкам ведёт нарушение этого правила?
18. Отсутствие « порочного круга » в определении. К каким ошибкам ведёт нарушение этого правила?
19. « Отрицательные» определения в математике.

Практические задания.

Задания, решаемые в аудитории.

1. Укажите содержание и объём понятий
 - а) куб и параллелепипед;
 - б) тождественное преобразование и сокращение дроби;
 - в) функция синус и тригонометрическая функция.
2. Какое из указанных в задании 1 понятий является родовым, а какое видовым по отношению к другому?
3. Составьте различные классификации понятия четырёхугольник, используя разные его свойства.
4. Удовлетворяют ли следующие определения правилам определения понятий:
 - 1) Коэффициентом называется число, показывающее, сколько раз буквенное выражение берётся слагаемым.
 - 2) Угол, образованный двумя хордами, называется вписанным.
 - 3) Прямоугольником называется параллелограмм, в котором все углы прямые.
 - 4) Отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон трапеции равный полусумме параллельных сторон её, называется средней линией трапеции.
 - 5) Квадратным уравнением с одним неизвестным называется уравнение с одним неизвестным, содержащее неизвестное во второй степени.
 - 6) Правильным многоугольником называется многоугольник, в котором все стороны равны между собой.
 - 7) Углом наклонной с плоскостью называется угол, образованный наклонной с прямой на плоскости.
 - 8) Арифметической прогрессией называется такой ряд чисел, в котором каждый из последующих членов получается из предыдущего прибавлением некоторого числа.
 - 9) Усеченной пирамидой называется многогранник, в котором две грани – параллельные одноимённые многоугольники, а остальные грани – трапеции.
5. Для определений из задания 4, не удовлетворяющих правилам определения понятий, составьте верные определения понятий.

Задания для самостоятельной работы дома.

1. Укажите содержание и объём понятий

- а) четырёхугольник и параллелограмм;
- б) наименьшее общее кратное и общее кратное.

2. Какое из указанных в задании 1 понятий является родовым, а какое видовым по отношению к другому?

3. Составьте различные классификации понятия треугольник, используя разные его свойства.

4. Удовлетворяют ли следующие определения правилам определения понятий:

- 1) Прямая, делящая сторону треугольника пополам, называется медианой.
- 2) Прямые, не имеющие общих точек, называются параллельными.
- 3) Экцентрическими окружностями называются окружности с различными центрами.
- 4) Неполным квадратным уравнением называется такое уравнение, которое содержит только два члена.
- 5) Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный двумя перпендикулярами, исходящими из одной точки к вершине двугранного угла.
- 6) Геометрической прогрессией называется такой ряд чисел, в котором последующее число получается умножением предыдущего на какое-либо число.
- 7) Правильной пирамидой называется такая пирамида, в которой основание – правильный многоугольник, боковые грани – равные треугольники и вершина проектируется в центр основания.
- 8) Правильной призмой называется такая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник

5. Для определений из задания 4, не удовлетворяющих правилам определения понятий, составьте верные определения понятий.

Практическое занятие 2.

Прямая и обратная теоремы. Необходимые и достаточные условия.

Цель занятия: Изучение логической структуры прямых и обратных теорем и её связи с необходимыми и достаточными условиями.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенция УК-1, знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

Вопросы, выносимые на обсуждение.

- 1. Теоремы. Логическая структура теорем.
- 2. Необходимые условия, достаточные условия.
- 3. Обратная теорема.
- 4. Необходимые и достаточные условия. Признак. Критерий.

5. Понятие характеристического свойства.

Теоретические задания.

1. Какое математическое утверждение называется теоремой ?
2. Что Вы знаете о логической структуре теорем?
3. В чём состоит доказательство теоремы?
4. Какими формулировками можно выразить теорему $A \Rightarrow B$?
5. Какое суждение, называется достаточным условием для A ?
6. Какое суждение, называется необходимым условием для A ?
7. Какими словами в формулировке теоремы можно заменить слова «необходимое условие»?
8. Укажите две теоремы, которые называются обратными друг другу.
9. Как из теоремы $A \Rightarrow B$ получить обратную теорему ?
10. Укажите, как логически связаны между собой прямая и обратная теоремы.
11. Запишите сокращённо тот факт, что справедливы обе теоремы $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.
12. В каком случае говорят, что каждое из суждений A, B является необходимым и достаточным условием для другого?
13. Какими формулировками можно выразить теорему $A \Leftrightarrow B$?
14. Назовите термин, который является синонимом для словосочетания «необходимо и достаточно».
15. Что понимают в математике под характеристическим свойством объекта?
16. Как связаны между собой характеристическое свойство данного математического объекта с определением этого объекта?

Практические задания.

Задания, решаемые в аудитории.

1. Выделите условие и заключение и запишите в виде $A \Rightarrow B$ следующие теоремы:
 - а) определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю;
 - б) произведение любых невырожденных матриц само будет невырожденной матрицей;
 - в) сумма и произведение сопряжённых комплексных чисел являются действительными числами.
2. Дайте разные формулировки теорем из задания 1.
3. Укажите какое из двух утверждений вытекает из другого и разными способами сформулируйте соответствующую теорему, используя термины «необходимое условие», «достаточное условие»:
 - а) A – число x равно нулю,
 B – произведение xu равно нулю;
 - б) A – стороны треугольников пропорциональны,
 B – треугольники подобны;
 - в) A – стороны многоугольников пропорциональны,
 B – многоугольники подобны.
4. Замените слова «необходимое условие» в формулировках теорем из задания 3 другими словами.

5. Сформулируйте теоремы обратные к теоремам из задания 1 и выясните какие из них являются верными.
6. В заданиях 1 и 3 выберите те теоремы, которые являются необходимыми и достаточными условиями, и сформулируйте их, используя слова «необходимо и достаточно», или «тогда и только тогда, когда», или «в том и только в том случае».
7. В следующих утверждениях многоточия замените словами «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо»:
- а) для того, чтобы четырёхугольник был прямоугольником ..., чтобы его диагонали были равны;
 - б) для того, чтобы окончить университет ... поступить в него;
 - в) для того, чтобы четырёхугольник был параллелограммом ..., чтобы его диагонали были равны;
 - г) для того, чтобы четырёхугольник был прямоугольником ..., чтобы все его углы были равны;
 - д) для того, чтобы четырёхугольник был параллелограммом ..., чтобы все его стороны были равны.

Задания для самостоятельной работы дома.

1. 1. Выделите условие и заключение и запишите в виде $A \Rightarrow B$ следующие теоремы:
- а) диагонали параллелограмма делятся в точке пересечения пополам;
 - б) всякое целое число, оканчивающееся двумя нулями, делится на 4;
 - в) диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
2. Дайте разные формулировки теорем из задания 1.
3. Укажите какое из двух утверждений вытекает из другого и разными способами сформулируйте соответствующую теорему, используя термины «необходимое условие», «достаточное условие»:
- а) $A - a^2 \neq 0$,
 $B - a > 0$;
 - б) $A -$ целое число делится на 6,
 $B -$ последняя цифра числа чётная;
 - в) $A -$ каждое из двух целых чисел делится на 11,
 $B -$ сумма двух целых чисел делится на 11.
4. Замените слова «необходимое условие» в формулировках теорем из задания 3 другими словами.
5. Сформулируйте теоремы обратные к теоремам из задания 1 и выясните какие из них являются верными.
6. В заданиях 1 и 3 выберите те теоремы, которые являются необходимыми и достаточными условиями, и сформулируйте их, используя слова «необходимо и достаточно», или «тогда и только тогда, когда», или «в том и только в том случае».

II. Подготовьтесь к итоговому занятию по теме « Математические понятия и основные виды математических суждений», обратив внимание на следующие вопросы:

1. Что мы понимаем под индивидуальными и общими свойствами объекта? Приведите примеры индивидуальных и общих свойств объекта.
2. Какие свойства объекта называют существенными? Приведите примеры существенных свойств объекта.
3. Какую форму мышления мы называем понятием?
4. Виды обобщений. Схемы построения абстрактных и конкретных понятий.
5. Содержание понятия. Укажите содержание какого-либо понятия.
6. Объём понятия. Опишите объём какого-либо понятия.
7. Как связаны между собой содержание и объём понятия ?
8. Когда одно понятие называется родовым по отношению к другому понятию?
9. Когда одно понятие называется видовым по отношению к другому понятию?
10. Что понимают под классификацией понятия? Какие условия должны соблюдаться при правильной классификации?
11. Что понимают под определением понятия? Какие Вы знаете способы определения понятий?
12. Определяемые и определяющие понятия.
13. Укажите важнейшие правила определения понятий.
14. Соразмерность определения. К каким ошибкам ведёт нарушение этого правила?
15. Отсутствие « порочного круга » в определении. К каким ошибкам ведёт нарушение этого правила?
16. « Отрицательные» определения в математике.
17. Что называют суждением?
18. Что называют умозаключением? Назовите важнейшие виды умозаключений.
19. Дайте определение аксиомы.
20. Что понимают под аксиоматическим методом в математике? Опишите основные шаги построения аксиоматической теории.
21. Когда и где зародился аксиоматический метод? Кем была построена геометрическая система, которая была образцом применения аксиоматического метода вплоть до 19 века?
22. Расскажите о структуре « Начал » Евклида. Какие первоначальные понятия были выбраны в « Началах » Евклида?
23. Какой постулат из « Начал » Евклида пытались вывести из остальных постулатов и аксиом?
24. Суть работ Н.И. Лобачевского и Я. Больяй.
25. К какому веку относят аксиоматическое построение арифметики? С именами каких математиков связано аксиоматическое построение арифметики?
26. Какие основные понятия использовал Дж. Пеано в своих аксиомах?

- Какими пятью аксиомами связаны между собой эти понятия?
27. Какая из аксиом Дж. Пеано является теоретической основой для применения метода математической индукции ?
28. Какие требования предъявляют в настоящее время к любой системе аксиом, характеризующих некоторую научную теорию?
29. Определите, что понимают под независимостью системы аксиом. Расскажите о влиянии на развитие математики вопроса о независимости постулата Евклида в системе аксиом геометрии.
30. Определите, что понимают под непротиворечивостью системы аксиом. Когда имеет место непротиворечивость системы аксиом для широкого класса аксиоматических теорий?
31. Определите, что понимают под полнотой системы аксиом.
32. Когда система аксиом считается полной с интуитивной точки зрения? К каким математическим теориям относится такое представление о полноте?
33. Когда система аксиом считается полной относительно данной интерпретации?
34. Какая система аксиом называется дедуктивно полной?
35. Какое математическое утверждение называется теоремой ? Что Вы знаете о логической структуре теорем?
36. В чём состоит доказательство теоремы?
37. Какими формулировками можно выразить теорему $A \Rightarrow B$?
38. Какое суждение, называется достаточным условием для A ?
39. Какое суждение, называется необходимым условием для A ? Какими словами в формулировке теоремы можно заменить слова «необходимое условие»?
40. Укажите две теоремы, которые называются обратными друг другу. Как из теоремы $A \Rightarrow B$ получить обратную теорему ?
41. Укажите, как логически связаны между собой прямая и обратная теоремы.
42. Запишите сокращённо тот факт, что справедливы обе теоремы $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.
43. В каком случае говорят, что каждое из суждений A, B является необходимым и достаточным условием для другого?
44. Какими формулировками можно выразить теорему $A \Leftrightarrow B$?
45. Назовите термин, который является синонимом для словосочетания «необходимо и достаточно».
46. Что понимают в математике под характеристическим свойством объекта? Как связаны между собой характеристическое свойство данного математического объекта с определением этого объекта?

Практическое занятие 3.

Итоговое занятие по теме «Математические понятия и основные виды математических суждений».

Цель занятия: Проверка теоретических знаний и практических умений по теме « Математические понятия и основные виды математических суждений».

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов проверяется уровень формирования компетенции УК-1, знаний, умений и навыков по теме « Математические понятия и основные виды математических суждений», которые станут основой их профессиональной деятельности.

На занятии студенты выполняют задания следующего вида

I. Даны три понятия.

- а) Указать родовое понятие по отношению к другому понятию.
- б) Указать видовое понятие по отношению к другому понятию.
- в) Заполнить таблицу для каждого из данных понятий так, чтобы была видна зависимость между объёмами и содержанием понятий.

Понятие	Объём понятия	Содержание понятия

г) Составить классификацию для каждого из родовых понятий по рассмотренному признаку.

II.

Дано некоторое определение. Выяснить, удовлетворяет ли указанное определение правилам определения понятий. Дать пояснения к ответу.

III.

- а) Укажите какое из двух утверждений А или В вытекает из другого и разными способами сформулируйте соответствующую теорему, используя термины «необходимое условие», «достаточное условие».
- б) Сформулируйте теорему обратную к теореме из задания а) и выясните является ли она верной.
- в) Свяжите утверждения А и В оборотами «необходимо и достаточно», « достаточно, но не необходимо » или «необходимо, но не достаточно».

Тема 2.

Методы математических доказательств..

Практическое занятие 4-5.

Аналитический и синтетический метод доказательства .

Цель занятия: Научиться доказывать математические утверждения синтетическим методом, проведя предварительный анализ.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенция УК-1, знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

Вопросы, выносимые на обсуждение.

1. Анализ и синтез. Их характеристика.
2. Взаимосвязь анализа и синтеза
3. Аналитический и синтетический методы доказательства.
4. Метод восходящего анализа.
5. Взаимосвязь обобщения и анализа.
6. Абстракция и её формы.

Теоретические задания.

1. Какие методы научного исследования Вы знаете?
2. Расскажите о первоначальном понимании анализа и синтеза.
3. Какой приём мышления называют анализом?
4. Какой приём мышления называют синтезом?
5. Какие формы анализа Вы знаете?
6. Расскажите об анализе типа «фильтр».
7. Расскажите об анализе через синтез.
8. Определите сравнение.
9. Опишите сущность аналитического метода доказательства утверждений.
10. Опишите сущность синтетического метода доказательства утверждений.
11. Расскажите о методе восходящего анализа и его преимуществах.
12. Сравните обобщение и специализацию.
13. Какую специфическую форму анализа называют абстракцией ?
14. В каких двух формах выступает абстракция ?
15. Сравните абстрагирование и конкретизацию.

Практические задания.

Суть синтетического метода доказательства неравенств заключается в том, что с помощью ряда преобразований доказываемое неравенство выводят из некоторых известных (опорных) неравенств. В качестве опорных часто используют неравенства:

- а) $a^2 \geq 0$;

- б) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, где $a \geq 0, b \geq 0$;
- в) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, где $ab > 0$;
- г) $ax^2 + bx + c > 0$, где $a > 0$ и $b^2 - 4ac < 0$.

Задания, решаемые в аудитории.

Доказать неравенства синтетическим методом, проведя предварительно анализ:

1. Если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, то $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$.
2. Если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$, то $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.
3. Если $n \in \mathbb{N}, n > 1$, то $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$.
4. Если $a > 0, b > 0, c > 0$, то $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$.
5. Если $n \in \mathbb{N}, n > 1$, то $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$.

Задания для самостоятельной работы дома.

Доказать неравенства синтетическим методом, проведя предварительно анализ:

1. Если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$, то $\sqrt{(a+b)(c+d)} \leq \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(b+d)$.
2. $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$.
3. $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$.
4. $\frac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geq 2$.
5. Если $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$, то $\frac{4}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \leq \sqrt[4]{abcd}$.

Практическое занятие 6.

Метод математической индукции.

Цель занятия: Научиться доказывать математические утверждения методом математической индукции.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенция УК-1, знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

Вопросы, выносимые на обсуждение.

1. Дедукция.
2. Индукция и различные формы её проявления.
3. Неполная индукция.
4. Полная индукция
5. Исследовательская (экспериментальная) индукция
6. Метод математической индукции

Теоретические задания.

1. Назовите два основных вида умозаключений.
2. Какая форма умозаключения называется дедукцией ?
3. Какие виды дедуктивных умозаключений Вы знаете ?
4. Чем характеризуется дедукция как метод исследования ?
5. Чем характеризуется дедукция как особая форма изложения материала ?
6. Расскажите о трёх основных значениях термина индукция.
7. Какая форма умозаключения называется индукцией ?
8. Чем характеризуется индукция как метод исследования ?
9. Чем характеризуется индукция как особая форма изложения материала ?
10. Назовите два основных вида индуктивных умозаключений.
11. Определите умозаключение, которое называется неполной индукцией ?
12. Употребляется ли неполная индукция как метод строгого научного доказательства?
13. Какое умозаключение называется полной индукцией ?
14. Употребляется ли полная индукция как метод строгого научного доказательства?
15. Опишите метод исследовательской (экспериментальной) индукции.
16. Расскажите об основных видах исследовательской индукции.
16. Как называется дедуктивный метод доказательства, основанный на аксиоме, называемой аксиомой индукции?
17. Сформулируйте аксиому индукции.
18. Опишите этапы доказательства методом математической индукции.

Практические задания.

Задания, решаемые в аудитории.

1. Доказать, что при любом целом неотрицательном n :
 - а) $7^n + 3n - 1$ делится на 9;
 - б) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ делится на 11.
2. Доказать:
 - а) Сумма квадратов n первых натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
 - б) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$, где n - любое натуральное число.
3. Найти сумму $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \dots$,

построив гипотезу для любого натурального n и доказав её методом математической индукции.

4. Доказать:

а) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}$, где n - любое натуральное число;

б) Если $n \geq 10$, то $2^n > n^3$.

Задания для самостоятельной работы дома.

1. Доказать, что при любом целом неотрицательном n :

а) $3^{2n+2} - 8n - 9$ делится на 64;

б) $2^{n+2}3^n + 5n - 4$ делится на 25.

2. Доказать:

а) Сумма кубов n первых натуральных чисел равна $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

б) $-1 + 3 - 5 + \dots + (-1)^n(2n-1) = (-1)^n n$, где n - любое натуральное число.

3. Найти сумму $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n+1) = \dots$,

построив гипотезу для любого натурального n и доказав её методом математической индукции.

4. Доказать:

а) Если $n=2, 3, 4, \dots$, то $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$;

б) Если $n \geq 5$, то $2^n > n^2$.

Практическое занятие 7.

Метод доказательства от противного.

Цель занятия: Научиться доказывать математические утверждения методом доказательства от противного.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенция УК-1, знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

Вопросы, выносимые на обсуждение.

1. Противоположные высказывания
2. Противоположные теоремы
3. Логическая взаимосвязь основных типов теорем.
4. Метод доказательства от противного.

Теоретические задания.

1. Как из высказывания A получить его отрицание $\bar{A}$?
2. Что можно сказать об истинности высказываний A и $\bar{A}$?
3. Определите двойное отрицание высказывания A .
4. Сформулируйте закон отрицания отрицания.

5. Для теоремы $A \Rightarrow B$ постройте противоположную теорему.
6. Какие теоремы называются взаимно противоположными?
7. Для теоремы $A \Rightarrow B$ постройте теорему противоположную обратной.
8. Как связаны между собой теоремы $A \Rightarrow B$ и $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$?
9. Как связаны между собой теоремы $B \Rightarrow A$ и $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$?
10. Какой факт служит основой метода доказательства от противного?

Практические задания.

Задания, решаемые в аудитории.

Доказать методом от противного:

1. Если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, то $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$.
2. Если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$, то $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.
3. Если $n \in \mathbb{N}, n > 1$, то $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$.
4. Если $a > 0, b > 0, c > 0$, то $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$.
5. Если $n \in \mathbb{N}, n > 1$, то $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$.

Задания для самостоятельной работы дома.

I. Доказать методом от противного:

6. Если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$, то $\sqrt{(a+b)(c+d)} \leq \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(b+d)$.
7. $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$.
8. $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$.
9. $\frac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geq 2$.
10. Если $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$, то $\frac{4}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \leq \sqrt[4]{abcd}$.

II. Подготовьтесь к итоговому занятию по теме «Методы математических доказательств», обратив внимание на следующие вопросы:

1. Какие методы научного исследования Вы знаете?
2. Расскажите о первоначальном понимании анализа и синтеза.
3. Какой приём мышления называют анализом?
4. Какой приём мышления называют синтезом?
5. Какие формы анализа Вы знаете? Расскажите об анализе типа «фильтр» и об анализе через синтез.
6. Определите сравнение.
7. Опишите сущность аналитического метода доказательства утверждений.
8. Опишите сущность синтетического метода доказательства утверждений.

9. Расскажите о методе восходящего анализа и его преимуществах.
10. Сравните обобщение и специализацию.
11. Какую специфическую форму анализа называют абстракцией? В каких двух формах выступает абстракция?
12. Сравните абстрагирование и конкретизацию.
13. Назовите два основных вида умозаключений.
14. Какая форма умозаключения называется дедукцией?
15. Чем характеризуется дедукция как метод исследования?
16. Чем характеризуется дедукция как особая форма изложения материала?
17. Какая форма умозаключения называется индукцией?
18. Чем характеризуется индукция как метод исследования?
19. Чем характеризуется индукция как особая форма изложения материала?
20. Назовите два основных вида индуктивных умозаключений.
21. Определите умозаключение, которое называется неполной индукцией. Употребляется ли неполная индукция как метод строгого научного доказательства?
22. Какое умозаключение называется полной индукцией? Употребляется ли полная индукция как метод строгого научного доказательства?
23. Опишите метод исследовательской (экспериментальной) индукции. Расскажите об основных видах исследовательской индукции.
24. Как называется дедуктивный метод доказательства, основанный на аксиоме, называемой аксиомой индукции?
25. Сформулируйте аксиому индукции.
26. Опишите этапы доказательства методом математической индукции.
27. Как из высказывания A получить его отрицание $\bar{A}$? Что можно сказать об истинности высказываний A и $\bar{A}$?
28. Определите двойное отрицание высказывания A . Сформулируйте закон отрицания отрицания.
29. Для теоремы $A \Rightarrow B$ постройте противоположную теорему.
30. Какие теоремы называются взаимно противоположными?
31. Для теоремы $A \Rightarrow B$ постройте теорему противоположную обратной.
32. Как связаны между собой теоремы $A \Rightarrow B$ и $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$?
33. Как связаны между собой теоремы $B \Rightarrow A$ и $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$?
34. Какой факт служит основой метода доказательства от противного?

Практическое занятие 8.

Итоговое занятие по теме «Методы математических доказательств».

Цель занятия: Проверка теоретических знаний и практических умений по теме «Методы математических доказательств».

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у

студентов проверяется уровень формирования компетенции УК-1, знаний, умений и навыков по теме « Методы математических доказательств», которые станут основой их профессиональной деятельности.

На занятии студенты выполняют задания следующего вида:

1. Доказать неравенство синтетическим методом, проведя предварительно анализ.
2. Доказать, что при любом целом неотрицательном n справедливо утверждение о делимости целых чисел.
3. Доказать неравенство от противного.
4. Найти сумму n слагаемых, построив гипотезу и доказав её методом математической индукции.