

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД**

Методические указания по выполнению практических работ

Направление подготовки 03.03.02 Физика
Направленность (профиль)
«Медицинская физика»

**Ставрополь
2026**

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теоретическая механика. Механика сплошных сред» входит в обязательную часть федерального перечня профессиональных дисциплин для студентов направления 03.03.02 Физика (направленность (профиль) Медицинская физика) . Ее освоение происходит в 3 и 4 семестрах.

Актуальность учебной дисциплины «Теоретическая механика. Механика сплошных сред» обусловлена необходимостью формирования у будущих специалистов компетенций, на которых базируется профессиональная деятельность в физике. В современных условиях важнейшим элементом подготовки бакалавров в области физики является формирование у них самостоятельности и культуры научного мышления, способности вести научную и профессиональную деятельность, навыков постановки целей, задач при решении проблемных ситуаций.

Целью освоения дисциплины «Теоретическая механика. Механика сплошных сред» является

- формирование профессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 03.03.02 – Физика (направленность (профиль) Медицинская физика.
- изучение основных методов теоретического описания, расчета, качественного и количественного анализа динамических систем, общих для любых физических систем,
- формирование фундаментальных знаний об основных способах описания динамических систем на основе канонических методов и вариационных принципов, используемых во всех разделах теоретической физики.

Основные задачи дисциплины

- развитие основных умений и навыков у студентов при изучении общих законов, которым подчиняются движение материальных тел;
- овладение методами и техникой получения результатов для дальнейшего развития теории с целью проникновения в еще не изученные сферы ее приложения.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате изучения дисциплины «Теоретическая механика. Механика сплошных сред»:

- УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач
- ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности
- ОПК-2. Способен проводить научные исследования физических объектов, систем и процессов, обрабатывать и представлять экспериментальные данные
- ПК-1 . Способен применять фундаментальные знания в области физики и математики для постановки и решения научно-исследовательских и прикладных задач в своей профессиональной деятельности

В результате освоения дисциплины студент должен:

Знать:

- границы применимости законов механики Ньютона; нерелятивистские и релятивистские уравнения движения частицы;
- законы сохранения и основные теоремы динамики, уметь применять их к интегрированию уравнений движения;

– знать средства и методы областей математики, общей и теоретической физики для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности,

Уметь:

- использовать методы аналитической механики при решении конкретных физических задач;
- использовать в профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук;
- выстраивать и реализовывать перспективные линии интеллектуального, культурного, нравственного, физического и профессионального саморазвития и самосовершенствования;
- использовать знания высшей математики и математической физики при решении практических задач.

Владеть:

- представлением о континуальных уравнениях сохранения, о замкнутой системе уравнений гидродинамики;
- пониманием сущности и значения информации в развитии современного информационного общества, сознанием опасности и угрозы, возникающей в этом процессе;
- базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач;
- основными навыками изучения различных явлений и процессов;
- основными методами защиты производственного персонала и населения от возможных последствий аварий, катастроф, стихийных бедствий; навыками поиска информации в глобальной информационной сети Интернет.

Цель практических занятий: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов кинематики материальной точки. основных понятий и законов динамики Ньютона, динамики материальной точки, законов сохранения и изменения механической энергии, импульса, исследованию вопросов движения систем со связями.. вопросов канонических уравнений и первых интегралов уравнения Лагранжа, динамики твёрдого тела, движение относительно неинерциальных систем отсчета, вопросов основы механики сплошной среды

Тема №1 Обзор элементарных методов и понятий

1. Кинематика материальной точки

Цели и задачи: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов кинематики материальной точки.

Знания, умения и владения, приобретаемые студентами в результате освоения темы, в рамках формируемых компетенций:

- знать средства и методы областей математики, общей и теоретической физики для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности, (ПК-1, ОПК-2);
- уметь использовать знания высшей математики и математической физики при решении практических задач, применять на практике базовые общепрофессиональные знания теории (ПК-1, УК-1);
- владеть базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач; основными навыками изучения различных явлений и процессов; пониманием сущности и значения информации в развитии современного информационного общества (ОПК-2, ПК-1).

Актуальность темы практического занятия

Тема дает возможность изучить методы пространственно-временного описания движения тел, расчет их траекторий, скоростей и ускорений в ортогональных и косоугольных координатах; уметь использовать основные соотношения кинематики при описании сложного движения твердого тела; научиться применять теорию к решению практических задач.

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

При рассмотрении данной темы необходимо дать определение траектории точки. Отметить, что траектория может быть плоской или пространственной кривой. Движение точки определяется заданием закона движения. Закон (уравнение) движения точки устанавливает зависимость положения точки в пространстве от времени.

Законы движения точки в декартовых, цилиндрических и в сферических координатах.

Связь между радиус-вектором $\vec{r}$ и декартовыми координатами точки выражается равенством:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1)$$

Такой способ задания движения материальной точки эквивалентен заданию трёх декартовых координат как функции времени:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (2)$$

Уравнения (2) можно рассматривать как параметрические.

Дифференцируя радиус-вектор по времени (1), находим скорость и ускорение точки в виде:

$$\vec{V} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \quad \vec{W} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

Проекции скорости и ускорения точки на оси декартовой системы координат равны:

$$\begin{aligned} V_x = \dot{x}, \quad V_y = \dot{y}, \quad V_z = \dot{z} \quad (3) \\ W_x = \ddot{x}, \quad W_y = \ddot{y}, \quad W_z = \ddot{z} \end{aligned}$$

Модули скорости и ускорения определяются выражениями:

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (4)$$

Цилиндрические координаты ρ, φ, z точки связаны с ее декартовыми координатами формулами:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (5)$$

В сферических координатах закон движения материальной точки определяется уравнениями:

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

Скорость и ускорение точки.

Скорость точки характеризует изменение её положения во времени. Ускорение точки есть производная от скорости по времени или вторая производная от радиус-вектора $\vec{r}$ по времени. Ускорение точки характеризует быстроту изменения скорости.

Скорость и ускорение точки в декартовой системе координат определяется уравнениями (4). Если уравнение движения задано в естественной форме, то проекция скорости на касательную равна:

$$V = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

Дифференцируя радиус вектор (5) точки, получим выражение скорости в цилиндрических координатах:

$$\vec{V} = \dot{\rho} \vec{e}_r + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{k}, \quad V^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \quad (6)$$

Величины:

$$V_r = \dot{\rho}, \quad V_\varphi = \rho \dot{\varphi}, \quad V_z = \dot{z} \quad (7)$$

называют радиальной, поперечной и аксиальной проекциями вектора скорости. Аналогичные проекции ускорения имеют вид:

$$W_r = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \quad W_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}), \quad W_z = \ddot{z}$$

В полярных координатах радиус-вектор, линейная и секторная скорости, ускорение точки равны:

$$\vec{r} = r \vec{e}_r, \quad \vec{V} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi, \quad \vec{f} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \vec{k} \quad (8)$$

$$\vec{W} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

Скорость точки в сферической системе координат определяется равенством:

$$\vec{V} = \dot{r} \vec{e}_r + \vec{e}_\theta r \dot{\theta} + \vec{e}_\varphi r \dot{\varphi} \sin \theta \quad (9)$$

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)$$

Скорость точки характеризует изменение её положения во времени. Ускорение точки есть производная от скорости по времени или вторая производная от радиус-вектора $\vec{r}$ по времени. Ускорение точки характеризует быстроту изменения скорости.

Методические указания для выполнения работы

«Кинематики точки»

Задачи, решаемые методами кинематики точки, могут состоять в определении траектории, скорости и ускорения точки, в отыскании времени, в течение которого точка проходит какой-либо путь, или пути, проходимого точкой за определенный промежуток времени, и т.п. Прежде чем решать любую из таких задач, надо:

- выбрать систему координат
- на основании условий задачи составить уравнения движения точки, т.е. найти зависимость координат от времени
- ответить на различные вопросы задачи.

Пример решения задачи

Задача

По заданным уравнениям движения точки найти траекторию, скорость и ускорение этой точки:

$$x = \frac{a}{2}(e^{kt} + e^{-kt}) = ach(kt) \quad y = \frac{b}{2}(e^{kt} - e^{-kt}) = bsh(kt)$$

Решение.

Чтобы найти уравнение траектории, достаточно из уравнений движения исключить время t . Для этого уравнения движения запишем в виде:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2}(e^{kt} + e^{-kt}) = ch(kt), \quad \frac{y}{b} = sh(kt).$$

Возведя эти равенства в квадрат и, вычитая второе из первого, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Искомая траектория - гипербола.

Чтобы найти скорость и ускорение точки, предварительно определим их проекции на оси координат:

$$\begin{aligned} V_x = \dot{x} &= \frac{ak}{2}(e^{kt} - e^{-kt}) = \frac{a}{b}ky; & V_y = \dot{y} &= \frac{bk}{2}(e^{kt} + e^{-kt}) = \frac{b}{a}kx \\ W_x = \ddot{x} &= \frac{ak^2}{2}(e^{kt} + e^{-kt}) = k^2x; & W_y = \ddot{y} &= \frac{bk^2}{2}(e^{kt} - e^{-kt}) = k^2y \\ V &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{k}{ab}\sqrt{a^4x^2 + b^4y^2}; & W &= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = k^2\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Задача 2.

Движение тяжелой точки в воздухе, сопротивление которого пропорционально скорости, описывается уравнениями:

$$x = \frac{V_0 \cos \alpha}{kg}(1 - e^{-kgt}), \quad y = \frac{1}{kg}(V_0 \sin \alpha + \frac{1}{k})(1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k},$$

где V_0, α, k, g – постоянные величины.

Определить уравнение траектории точки, наибольшую высоту h подъема точки над уровнем начального положения, а также абсциссу, при которой точка достигнет наивысшего положения.

Решение.

Для определения уравнения траектории точки надо исключить из уравнений движения время. Находим:

$$(1 - e^{-kgt}) = \frac{kg}{V_0 \cos \alpha} x, \text{ отсюда}$$

$$t = -\frac{1}{kg} \ln \left(1 - \frac{kg}{V_0 \cos \alpha} x \right)$$

$$y = \frac{kV_0 \sin \alpha - 1}{kV_0 \cos \alpha} x + \frac{1}{k^2 g} \ln \left(1 - \frac{kg}{V_0 \cos \alpha} x \right)$$

Наибольшую высоту подъема h найдем, учтя, что $V_y = 0$.

$$V_y = \dot{y} = (V_0 \sin \alpha + \frac{1}{k}) e^{-kgt_1} - \frac{1}{k} = 0,$$

t_1 – время достижения точкой наибольшей высоты.

Имеем:

$$e^{kgt_1} = 1 + kV_0 \sin \alpha,$$

отсюда

$$t_1 = \frac{1}{kg} \ln(1 + kV_0 \sin \alpha).$$

Подставляя найденное значение t_1 в выражение для y , получим:

$$h = \frac{V_0 \sin \alpha}{kg} - \frac{1}{k^2 g} \ln(1 + kV_0 \sin \alpha)$$

Для определения абсциссы x_1 , при которой точка достигает наивысшего положения, достаточно найденное значение t_1 подставить в уравнение для x , получим:

$$x_1 = x(t_1) = \frac{V_0 \cos \alpha}{kg} \left(1 - \frac{1}{1 + kV_0 \sin \alpha} \right) = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g(1 + kV_0 \sin \alpha)}.$$

Задания для решения на занятии

1. По данным уравнениям движения точки найти уравнения ее траектории в координатной форме.

1) $x = 3t - 5, y = 4 - t^2$

2) $x = 2t, y = 8t^2$

3) $x = 5 \sin 10t, y = 3 \cos 10t$

4) $x = 2 - 3 \cos 5t, y = 4 \sin 5t - 1$

5) $x = cht = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), y = sht = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$

6) $x = 3t^2, y = 4t^2$

7) $x = 3 \sin t, y = 3 \cos t$

8) $x = a \cos^2 t, y = a \sin^2 t$

9) $x = 5 \cos 5t^2, y = 5 \sin 5t^2$

2. Движение точки, описывающей фигуру Лиссажу, задается уравнениями:

$x = 3 \sin t, y = 3 \cos t$. Найти уравнение траектории, вычертить ее и указать направление движения точки в различные моменты времени. Указать также ближайший после начала

движения момент времени t_1 , когда траектория пересечет Ox .

3. Уравнения движения электрона в постоянном магнитном поле определяется равенством:

$x = a \sin kt, y = a \cos kt, z = vt$, где a, k, v - некоторые постоянные, зависящие от напряженности магнитного поля, массы, заряда и скорости электрона. Определить траекторию электрона и закон движения его по траектории.

4. Определить уравнения движения и траекторию точки обода колеса радиуса

$R = 1$ м автомобиля, если автомобиль движется с постоянной скоростью 20 м/с.

5. Частица, несущая электрический заряд e , движется в однородном электрическом поле с переменной напряженностью $E = A \sin kt$, где A и k - постоянные коэффициенты.

Уравнение движения частицы имеет вид: $x = \frac{eA}{mk} \left(t - \frac{\sin kt}{k} \right)$, где m - постоянная

величина. Определить величину скорости точки, ее начальное значение, а также наибольшее и наименьшее значения скорости.

6. Точка M совершает колебательное движение согласно уравнениям:

$$x = a \cos(2kt - \varepsilon), y = b \cos kt.$$

Определить траекторию точки M . При каких значениях ε траектория точки обращается в параболу? Найти скорость точки в начальный момент времени.

7. Точка M_1 брошена вертикально вверх с начальной скоростью V_0 . Через сколько секунд

T надо бросить вертикально вверх из того же места с начальной скоростью $V_1 > V_0$

вторую точку M_2 , чтобы обе точки встретились? Уравнение движения точки имеет

$$\text{вид: } x = V_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

1. Точка M , движущаяся с постоянной по величине скоростью V , описывает целую линию, уравнение которой имеет вид:

$$y = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}).$$

Определить проекцию скорости и ускорения, а также полное ускорение точки как функции ее координат. Определить радиус кривизны цепной линии. Использовать выражения гиперболических функций через показательные:

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}.$$

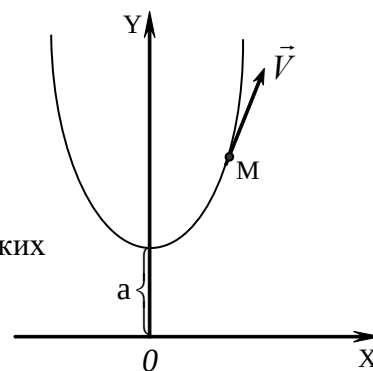


Рис. 7

2. В поле отталкивающего центра точка движется в плоскости xy по

закону $x = \alpha \operatorname{ch} \omega t + \beta \operatorname{sh} \omega t$, $y = \gamma \operatorname{ch} \omega t + \rho \operatorname{sh} \omega t$, где $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ и ω - постоянные величины. Найти уравнение траектории точки.

3. Точка движется в плоскости xy с постоянной по модулю скоростью $|v| = u$. Вектор скорости образует с осью Ox угол $\alpha = at$ (a - постоянная величина). Определить уравнение траектории точки и модуль её ускорения, если в начальный момент $t = 0$ точка находилась в начале координат.

4. Найти касательное и нормальное ускорение точки, движение которой выражается

уравнениями: $x = at, y = \beta t - \frac{gt^2}{2}$.

5. Движение точки задано в полярных координатах уравнениями:

$r = ae^{kt}, \varphi = kt$, где a и k - заданные постоянные величины. Найти уравнение траектории, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории как функции ее радиус-вектора r .

6. Сохраняя условия предыдущей задачи, определить скорость и ускорение искусственного спутника, считая его орбиту круговой, высоту полета над поверхностью Земли $h = 970$ км. Радиус Земли 6370 км.

7. По заданным уравнениям движения точки в декартовых координатах

$x = R \cos^2 \frac{kt}{2}, y = \frac{R}{2} \sin kt, z = R \sin \frac{kt}{2}$ – найти ее траекторию и уравнение движения в сферических координатах.

Контрольные вопросы

1. Что называется траекторией точки?
2. Какие существуют способы задания законов, по которым определяется радиус-вектор движущейся точки?
3. Как найти уравнение траектории точки в координатной форме?
4. Как выражается радиус-вектор движущейся точки в декартовых координатах? В цилиндрических координатах?
5. Как связаны декартовы координаты с цилиндрическими? Со сферическими?
6. Что характеризует скорость точки? Ускорение точки?
7. Чему равны скорость и ускорение точки в декартовых координатах? в цилиндрических координатах? в сферических координатах?
8. Чему равны проекции скорости и ускорения в декартовой системе координат? В цилиндрических координатах? В сферических координатах?
9. Что называется секторной скоростью?
10. Как определяется секторная скорость в цилиндрических координатах? В полярных координатах?

Список литературы

Основная: 2

Дополнительная: 1,2,7

Учебно-методическая: 1,2,3

2. Простейшие движения плоского тела

Цели и задачи: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов простейшего движения плоского тела.

Знания, умения и владения, приобретаемые студентами в результате освоения темы, в рамках формируемых компетенций:

– знать средства и методы областей математики, общей и теоретической физики для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности (ОПК-1, ОПК-2)

- уметь использовать основные соотношения кинематики при описании сложного движения твердого тела, применять на практике базовые общепрофессиональные знания теории (ПК-1, УК-1)
- владеть базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач, основными навыками изучения различных явлений и процессов, пониманием сущности и значения информации в развитии современного информационного общества (ОПК-1, ПК-1).

Актуальность темы практического занятия

Тема дает возможность изучить методы пространственно-временного описания движения тел, Уметь использовать основные соотношения кинематики при описании сложного движения твердого тела; научиться применять теорию к решению практических задач.

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

При рассмотрении данной темы необходимо дать определение различных траекторий движения: плоскопараллельное, поступательное движение и вращательное вокруг неподвижной оси.

§2.1. Плоское движение твердого тела.

Движение называется плоскопараллельным если расстояние от любой его точки до неподвижной плоскости не изменяется. Положение плоской фигуры определяется положением двух произвольных ее точек A и B . Точку A назовем полюсом, угол φ - угол, который образует отрезок AB с некоторой осью неизменного направления. Плоское движение тела определяется уравнениями:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t) \quad (2.1)$$

Из этих уравнений следует, что движение плоской фигуры можно разложить на два движения: 1) поступательное движение, определяемое первыми двумя уравнениями (2.1), и 2) вращательное движение вокруг полюса, определяемое третьим из уравнений (2.1). Угловая скорость вращательного движения не зависит от выбора полюса. Отсюда следует, что скорость любой точки B плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса $\vec{V}_A$ и скорости $\vec{V}_{AB}$ точки B во вращательном движении вокруг полюса A :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \quad (2.2)$$

причем $\vec{V}_{BA}$ перпендикулярно $\overline{AB}$ и $V_{BA} = AB \cdot \omega$.

Отсюда следует: проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется такая точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю.

Если известна скорость $\vec{V}_A$ какой-либо точки A плоской фигуры и угловая скорость этой фигуры, то, повернув вектор $\vec{V}_A$ вокруг точки A на 90° в направлении вращения фигуры и отложив на этой полупрямой отрезок $AP = \frac{V_A}{\omega}$, получим точку P , которая является МЦС.

Если известны направления скоростей двух точек плоской фигуры, то МЦС находят как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных в этих точках к направлениям их скоростей.

Если МЦС P найден и если известна угловая скорость ω фигуры, то скорость любой точки B фигуры определяется как скорость этой точки во вращательном движении вокруг МЦС: $V_B = \omega \cdot PB$.

Отсюда следует, что скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{PA}{PB}. \quad (2.3)$$

§2.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Вращательным движением твердого тела называют такое движение, при котором остаются неподвижными все точки прямой, называемой осью вращения.

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси Oz все его точки перемещаются по окружностям с центрами, лежащими на оси вращения. Закон вращения относительно оси Oz имеет вид:

$$\varphi = \varphi(t) \quad (2.4)$$

При бесконечно малом повороте тела за время Δt радиус-вектор изменится на величину

$$|\Delta \vec{r}| = a \Delta \varphi = \Delta \varphi r \sin \theta \quad (2.5)$$

или

$$\Delta \vec{r} = [\Delta \varphi \vec{r}] \quad (2.6)$$

Предел отношения $\Delta \varphi / \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$ называют мгновенной угловой скоростью вращения:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.7)$$

Линейная скорость точки M равна:

$$\vec{V} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{r=const} = [\vec{\omega} \vec{r}] \quad (2.8)$$

Формулу (2.8) можно обобщить для произвольного вектора A , изменяющегося со временем только по направлению:

$$\left(\frac{dA}{dt} \right)_{A=const} = [\vec{\omega} \vec{A}] \quad (2.9)$$

Если с вращающимся твердым телом жестко связать декартову систему координат с осями $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ то на основании равенства (2.9) имеем:

$$\frac{d\vec{i}_0}{dt} = [\vec{\omega} \vec{i}_0], \quad \frac{d\vec{j}_0}{dt} = [\vec{\omega} \vec{j}_0], \quad \frac{d\vec{k}_0}{dt} = [\vec{\omega} \vec{k}_0] \quad (2.10)$$

Полученные соотношения называются формулами Пуассона. Для определения ускорения точки продифференцируем (2.8) по времени:

$$\vec{W} = [\dot{\vec{\omega}} \vec{r}] + [\vec{\omega} \dot{\vec{r}}] = [\vec{\varepsilon} \vec{r}] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]] \quad (2.11)$$

где $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\varphi} \vec{k}$ - вектор углового ускорения.

Ускорение точки твердого тела складывается из нормального ускорения и касательного ускорения. Нормальное ускорение направлено от точки по перпендикуляру к оси вращения, в сторону этой оси, а его модуль равен:

$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= \vec{a}_A [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB}] + [\vec{\omega} \times \vec{V}_{BA}] \\ W_n &= \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 \rho \end{aligned} \quad (2.12)$$

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории, а его проекция на касательную равна:

$$W_\tau = \rho \varepsilon \quad (2.13)$$

Модуль полного ускорения точки равен:

$$W = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2} = \rho \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (2.14).$$

§2.3. Ускорение точек твердого тела при плоском движении

Ускорение любой точки в плоском движении может быть представлено как геометрическая сумма поступательного ускорения, равного ускорению полюса, и вращательного ускорения вокруг полюса

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}.$$

Сложение вращений вокруг двух параллельных осей

Рассмотрим случай, когда относительное движение тела является вращением с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$ вокруг оси aa' , закрепленной на кривошипе ba (рис.1, а), а переносное – вращением кривошипа ba вокруг оси, bb' параллельной aa' , с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$. Тогда движение тела будет плоскопараллельным по отношению к плоскости, перпендикулярной к осям.

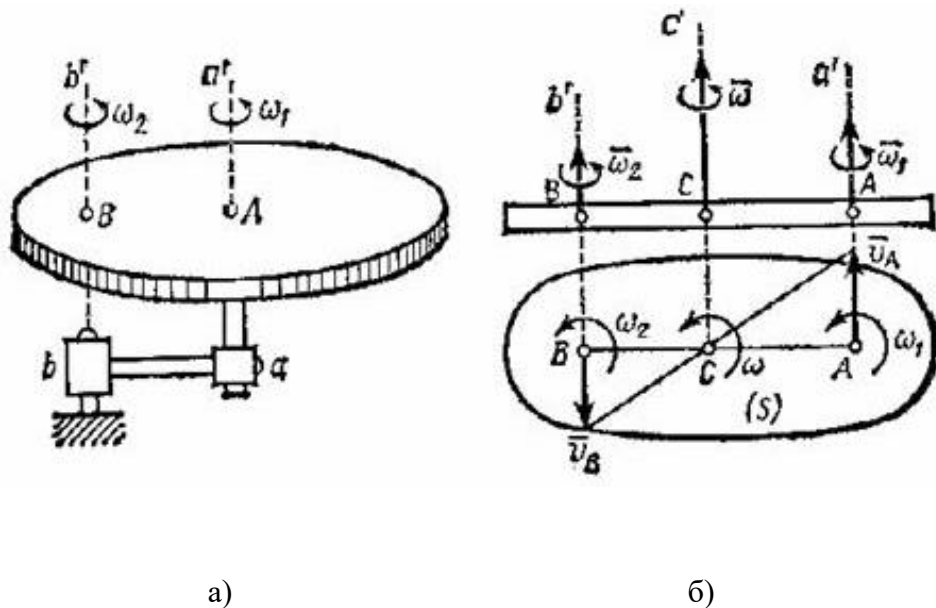


Рис.1

Примем, что вращения направлены в одну сторону. Изобразим сечение S тела плоскостью, перпендикулярной осям (рис. 1, б). Следы осей в сечении обозначим буквами A и B . Тогда $V_A = \omega_2 \cdot AB$ и $V_B = \omega_1 \cdot AB$. При этом векторы $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$ параллельны друг другу, перпендикулярны и направлены в разные стороны. Тогда точка C является мгновенным центром скоростей $V_C = 0$, а следовательно, ось Cc' , параллельная осям Aa' и Bb' , является мгновенной осью вращения. Для определения угловой скорости ω абсолютного вращения тела вокруг оси Cc' и положения самой оси, т.е. точки C , воспользуемся свойством мгновенного центра скоростей $\omega = V_B/BC = V_A/AC$, откуда $\omega = (V_A + V_B)/AB$.

Подставив в эти равенства значения $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$, окончательно получим

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad (2.15)$$

$$\omega_1/BC = \omega_2/AC = \omega/AB. \quad (2.16)$$

Итак, при сложении двух направленных в одну сторону вращений вокруг параллельных осей результирующее движение тела будет мгновенным вращением с абсолютной скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$ вокруг мгновенной оси, параллельной данным, положение которой определяется пропорциями (2.16).

С течением времени мгновенная ось вращения Cc' меняет свое положение, описывая цилиндрическую поверхность.

Рассмотрим теперь случай, когда вращения направлены в разные стороны (рис.2).

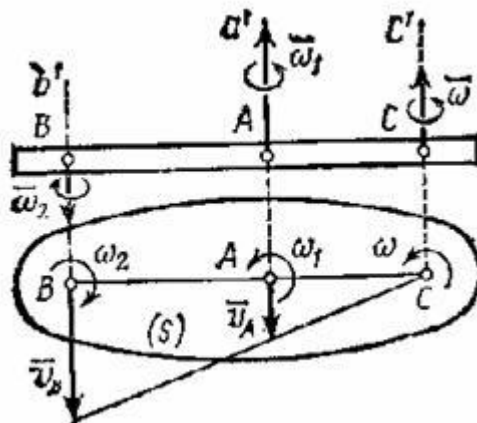


Рис.2.

Допустим, что $\omega_1 > \omega_2$. Тогда, рассуждая, как в предыдущем случае, для угловой скорости ω абсолютного движения тела вокруг оси и положения самой оси, получим

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \quad (2.17)$$

$$\omega_1/BC = \omega_2/AC = \omega/AB. \quad (2.18)$$

Таким образом, при сложении двух направленных в разные стороны вращений вокруг параллельных осей, результирующее движение тела будет мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью $\omega = \omega_1 - \omega_2$ вокруг мгновенной оси, положение которой определяется пропорциями (2.18).

При сложении двух направленных в одну сторону вращений вокруг параллельных осей результирующее движение тела будет мгновенным вращением с абсолютной скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$ вокруг мгновенной оси, параллельной данным, положение которой определяется пропорциями $\omega_1/BC = \omega_2/AC = \omega/AB$

Методические указания для выполнения работы по теме

«Простейшие движения плоского тела»

Задачи могут состоять в определении траектории, скорости и ускорения точки, в отыскании времени, в течение которого точка проходит какой-либо путь, или пути, проходимого точкой за определенный промежуток времени, и т.п. Прежде чем решать любую из таких задач, надо:

1. выбрать систему координат
2. на основании условий задачи составить уравнения движения точки, т.е. найти зависимость координат от времени
3. ответить на различные вопросы задачи.

Пример решения задач

Задача

Конец A стержня AB длины l скользит по вертикальной стене, а конец B по горизонтальному полу. В положении, указанном на рисунке 2.6, скорость и ускорение конца A равны:

$$V_A = u, \quad \vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{AB}^n + \vec{W}_{AB}^\tau, \quad W_A = \frac{2u^2\sqrt{3}}{l}.$$

Найти для этого положения точку M на стержне, ускорение которой будет наименьшим. Определить ускорение этой точки, а также скорость и ускорение точки B .

Решение.

Стержень AB движется плоскопараллельно, направление скоростей в точках A и B известно. Находим мгновенный центр скоростей стержня – точку P (рис.2.6). Угловая скорость стержня равна:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{u}{l \cos 60^\circ} = \frac{2u}{l}$$

Скорость точки B : $V_b = \omega \cdot BP = \frac{2u}{l} l \sin 60^\circ = \sqrt{3} \text{ м/с}$ Ускорение точки B по теореме об ускорениях точек плоской фигуры (полнос – точка A):

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{AB}^n + \vec{W}_{AB}^\tau \quad (a)$$

Вектор $\vec{W}_B$ направлен вдоль пола (предположим влево).

$$\vec{W}_{AB}^n = \omega^2 l = \frac{4u^2}{l^2} l = \frac{4u^2}{l} \text{ м/с}^2$$

вектор $\vec{W}_{AB}^n$ направлен вдоль стержня от точки B :

$$\vec{W}_{AB}^\tau \perp \vec{W}_{AB}^n.$$

Спроецируем векторное равенство (a) на оси Bx и By (рис.2.6).

$$Bx: \quad W_B \cos 60^\circ = -W_A \sin 60^\circ + W_{AB}^n$$

$$W_B = \frac{-a W_A \sin 60^\circ + a_{AB}^n}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{-2u^2\sqrt{3}}{l} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4u^2}{l}}{0,5} = \frac{2u^2}{l}$$

$$By: \quad 0 = -W_A + W_{AB}^n \sin 60^\circ + W_{AB}^\tau \cos 60^\circ$$

$$W_{AB}^\tau = \frac{W_A - W_{AB}^n \sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{2u^2\sqrt{3}}{l} - \frac{4u^2\sqrt{3}}{l} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{0,5} = 0.$$

$$\varepsilon = \frac{W_{AB}^\tau}{l} = 0, \quad \Rightarrow \alpha = \arctg\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right)$$

Это значит, что мгновенным центром ускорений является точка O , так как она находится на пересечении лучей, по которым направлены ускорения точек A и B . Точка M стержня, ускорение которой будет наименьшим, – ближайшая к точке O . Строим OM перпендикулярно AB (рис. 2.7), а вектор ускорения точки M будет направлен вдоль MO .

$$W_M = OM \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = l \cos 60^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \omega^2 = l \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{4u^2}{l^2} = \frac{u^2\sqrt{3}}{l}$$

$$MB = l \cos 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = 0,25l$$

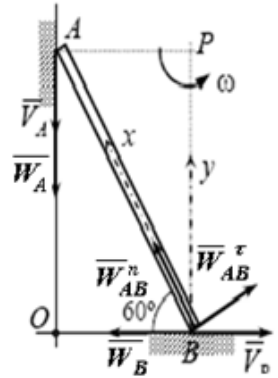


Рис.2.6.

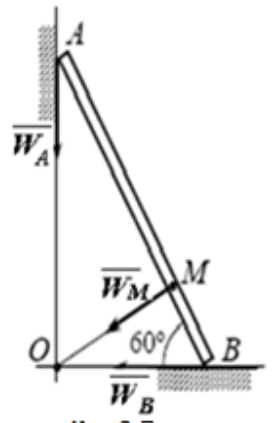
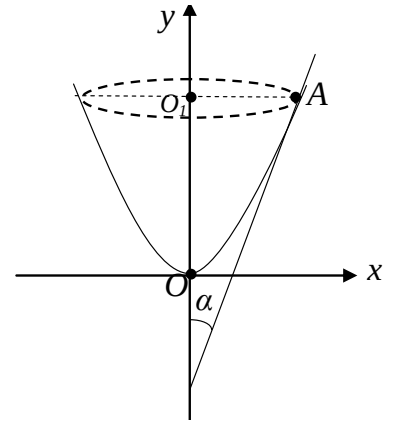


Рис.2.7

Задача №2

Парабола $y = ax^2$ вращается вокруг оси Oy с постоянной угловой скоростью ω . Бусинка A движется по параболе с постоянной скоростью v_0 . Найти скорость и ускорение бусинку в зависимости от её положения.



Решение

$$y = ax^2, y = y(t), x = x(t).$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{dy}{dx} = 2ax = \frac{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}{\sin \alpha},$$

$$(2ax)^2 x^2 \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha (1 + 4a^2 x^2) = 1$$

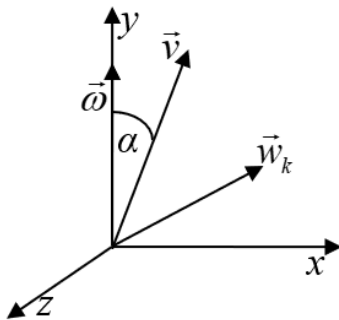
$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2 x^2}}.$$

По теореме сложения скоростей:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{\text{ОТН.}} + \vec{v}_{\text{ПЕР.}},$$

где $v_{\text{ОТН.}} = v$, $v_{\text{ПЕР.}} = \omega x$, $\vec{v}_{\text{ПЕР.}} \perp \vec{v}$,

$\vec{v}_{\text{ПЕР.}}$ – направлена по касательной к окружности, $r = O_1 A = x$, т. е. перпендикулярно плоскости чертежа.



$$v_A = \sqrt{v^2 + \omega^2 x^2}$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2,$$

$$v_y^2 = v^2 - v_x^2,$$

$$v_x = \dot{x},$$

$$v_y^2 = \dot{y}^2 = (2a)^2 x^2 \dot{x}^2 = v^2 - \dot{x}^2$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2 + (2a)^2 x^2 \dot{x}^2 = \dot{x}^2 (1 + 4a^2 x^2) = v^2$$

$$\dot{x} = \frac{v}{\sqrt{1 + 4a^2 x^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 + 4ay}}$$

$$\dot{y} = 2ax\dot{x} = 2ax \frac{v}{\sqrt{1 + 4ay}}$$

$$\ddot{x} = -\frac{v \cdot 4a\dot{y}}{2\sqrt{(1 + 4ay)^3}} = -\frac{2av\dot{y}}{\sqrt{(1 + 4ay)^3}} = -\frac{2av}{\sqrt{(1 + 4ay)^3}} \cdot 2ax\dot{x} = -\frac{4a^2 v^2 x}{(1 + 4ay)^2}$$

$$w_{\text{ПЕР.}}^{(n)} = \omega^2 x$$

$$w_x = -w_{\text{ПЕР.}}^{(n)} - \ddot{x} = -\omega^2 x - \frac{4a^2 v^2 x}{(1 + 4a^2 x^2)^2}$$

$$w_y = \ddot{y} = 2a\dot{x} \frac{v}{\sqrt{1 + 4ay}} - \frac{2axv \cdot 4a\dot{y}}{2\sqrt{(1 + 4ay)^3}} = \frac{2av^2}{1 + 4ay} - \frac{4a^2 xv}{\sqrt{(1 + 4a^2 x^2)^3}} \cdot \frac{2axv}{\sqrt{1 + 4ay}} = \frac{2av^2}{(1 + 4ay)^2}$$

$$w_y = \frac{2av^2}{(1 + 4a^2 x^2)^2}$$

$$w_k = 2\omega v \sin \alpha = \frac{2\omega v}{\sqrt{1 + 4a^2 x^2}}$$

$$w_z = -w_k = -\frac{2\omega v}{\sqrt{1 + 4a^2 x^2}}$$

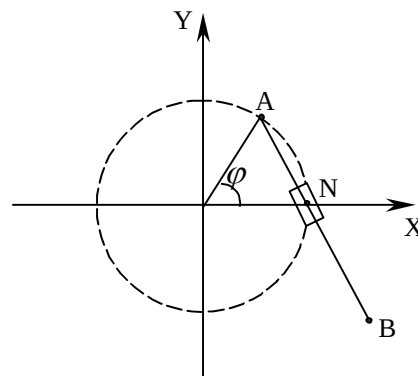
Задания для решения на занятии

1. Точка A подвеса математического маятника AB длины l движется в вертикальной плоскости по окружности радиуса R так, что длина дуги OA равна at . Колебания маятника происходят в этой же плоскости по закону $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$. Найти скорость и ускорение точки B маятника в момент времени $t = \pi/\omega$.
2. Точка описывает окружность радиуса R . Ускорение точки образует с её скоростью постоянный угол α ($\alpha \neq \frac{\pi}{2}$). За какое время скорость точки увеличится в n раз, если в начальный момент она равнялась v_0 ?
3. В поле отталкивающего центра точка движется в плоскости xu по закону $x = \alpha ch\omega t + \beta sh\omega t$, $y = \gamma ch\omega t + \rho sh\omega t$, где $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ и ω – постоянные величины. Найти радиальную w_r и поперечную w_φ компоненты ускорения точки.
4. Точка движется по плоскости так, что угол между вектором скорости и радиус-вектором во все время движения равен α . Найти уравнение траектории точки, если в начальный момент $r(0) = r_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$.
5. Движение точки в плоскости задаётся в полярной системе координат компонентами скорости $v_r = 1/r^2$ и $v_\varphi = 1/ar$, $a = const$. Найти уравнение траектории точки $r = r(\varphi)$, а также радиальную w_r и поперечную w_φ компоненты её ускорения, если в начальный момент $r(0) = r_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$.
6. Точка движется в плоскости xu с постоянной по модулю скоростью $|v| = u$. Вектор скорости образует с осью Ox угол $\alpha = at$ (a – постоянная величина). Определить уравнение траектории точки и модуль её ускорения, если в начальный момент $t = 0$ точка находилась в начале координат.

Задания для самостоятельного решения

1. Точка движется по дуге эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Вектор ускорения точки во всё время движения направлен параллельно оси Oy . Найти ускорение точки в тот момент, когда её ордината равна $b/2$, если в начальный момент $x(0) = 0$, $y(0) = b$, $v(0) = v_0$.

2. Кривошип $OA = r$ вращается равномерно вокруг точки O в плоскости чертежа: $\varphi = kt$. Шатун AB шарнирно соединен с концом кривошипа в точке A и проходит через цилиндрический шарнир, который может вращаться вокруг неподвижного центра N . Длина $AB = l > 2r$. Определить уравнения движения точки B , проекции ее скорости и ускорения на оси координат, касательное, нормальное и полное ускорения, а также радиус кривизны траектории при произвольном положении механизма. Определить координаты, скорость, ускорение точки B и радиус кривизны ее траектории при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.



Контрольные вопросы

1. Какое движение твердого тела называют поступательным?
2. Что называется вращательным движением твердого тела?
3. Чему равна угловая скорость вращения? Угловое ускорение? Линейная скорость?

4. Какие соотношения называют формулами Пуассона?
5. Чему равно ускорение точки при ее вращении?
6. Как определить нормальное ускорение? Касательное ускорение? Как направлены эти ускорения?

Список литературы

Основная: 1, 2

Дополнительная: 1,2,7

Учебно-методическая: 1,2,3

3. Сложное движение точки

Цели и задачи: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов сложного движения точки.

Знания, умения и владения, приобретаемые студентами в результате освоения темы, в рамках формируемых компетенций:

- знать средства и методы областей математики и естественных наук для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности (ПК-1, ОПК-2)
- уметь использовать основные соотношения кинематики при описании сложного движения твердого тела, направления скорости и ускорения при сложном движении, использовать метод проекций для нахождения абсолютных значений скорости и ускорения (ОПК-1, УК-1)
- владеть базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач, основными навыками изучения различных явлений и процессов, (ПК-1, ОПК-2).

Актуальность темы лабораторного занятия

Тема дает возможность изучить способы определения скоростей и ускорений точки при переходе от одной системы отсчета к другой; уметь определять характер движения тела, направления скорости и ускорения при сложном движении; уметь использовать метод проекций для нахождения абсолютных значений скорости и ускорения; уметь применять полученные знания на практике.

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

Теорема сложения скоростей.

При решении кинематических задач требуется знать законы преобразования скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{w}$ материальной точки при переходе от одной системы отсчета к другой. Рассмотрим движение материальной точки M из двух систем отсчета $O x y z$ и $O' x' y' z'$ (рис.3.1).

Положение точки M относительно систем отсчета K и K' характеризуется радиус-векторами $\vec{r}$ и $\vec{r}'$, а положение начала координат O' подвижной системы K' относительно неподвижной - радиус-вектором $\vec{R}_{O'}$. Из треугольника OMO' имеем:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}_{O'} \quad (3.1)$$

$$\text{где} \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{R}_{O'} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad (3.2)$$

$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'. \quad (3.3)$$

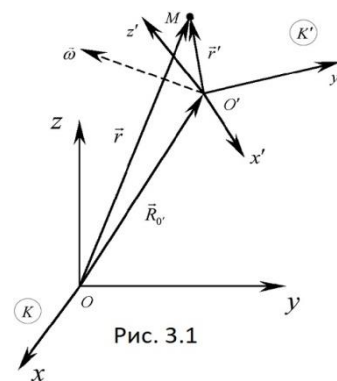


Рис. 3.1

Дифференцируя равенство (3.1) по времени, получим:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}' + \left(x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \right) + \vec{V}_0, \quad (3.4)$$

где

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{V}_0 = \frac{d\vec{R}_0'}{dt} = \dot{X}\vec{i} + \dot{Y}\vec{j} + \dot{Z}\vec{k} \quad (3.5)$$

$$\vec{V}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{i}' \frac{dx'}{dt} + \vec{j}' \frac{dy'}{dt} + \vec{k}' \frac{dz'}{dt} \quad (3.6) \text{ где } \vec{V}' - \text{ скорость точки } M$$

относительно неподвижной системы координат K ; $\vec{V}'$ - скорость точки M относительно подвижной системы координат K' и $\vec{V}_0$ - скорость поступательного движения подвижной системы отсчета K' относительно неподвижной системы K .

Используя формулы Пуассона, имеем:

$$x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} = [\vec{\omega}(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')] = [\vec{\omega}\vec{r}']$$

и, следовательно:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + [\vec{\omega}\vec{r}'] = \vec{V}' + [\vec{\omega}\vec{r}'] \quad (3.7)$$

Окончательно имеем:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_0(t) + [\vec{\omega}\vec{r}']. \quad (3.9)$$

Формулу (3.9) называют теоремой сложения скоростей классической механики.

$\vec{V}'$ - относительная скорость. Сумму скоростей $\vec{V}_0 + [\vec{\omega}\vec{r}']$ называют переносной скоростью точки M :

$$\vec{V}_{\text{пер}} = \vec{V}_0(t) + [\vec{\omega}\vec{r}'] \quad (3.10)$$

Тогда теорему о сложении скоростей можно переписать в виде:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_{\text{пер}} = \vec{V}_{\text{отн}} + \vec{V}_{\text{пер}} \quad (3.11)$$

В частном случае, когда система отсчета K' движется относительно K равномерно и поступательно ($\omega = 0, \vec{V}_0 = \text{const}$), теорема сложения скоростей примет вид:

$$\vec{V} = \vec{V}_{\text{отн}} + \vec{V}_0, \quad (3.12)$$

Теорема сложения ускорений.

Найдем закон преобразования ускорения точки M при переходе от одной системы отсчета к другой.

Дифференцируя по времени равенство (3.9), получим:

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}'}{dt} + \vec{W}_0' + [\dot{\vec{\omega}}\vec{r}'] + [\vec{\omega} \frac{d\vec{r}'}{dt}] = \frac{d\vec{V}'}{dt} + \vec{W}_0' + [\dot{\vec{\omega}}\vec{r}'] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']] + [\dot{\vec{\omega}}\vec{V}'] \quad (3.15)$$

где

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

$\vec{W}$ - ускорение точки M относительно неподвижной системы отсчета K

$$\vec{W}_0' = \frac{d\vec{V}_0'}{dt} = \ddot{X}\vec{i} + \ddot{Y}\vec{j} + \ddot{Z}\vec{k}$$

$\vec{W}_0'$ - ускорение поступательного движения системы отсчета K' относительно системы K .

Используя равенство (3.8), получим:

$$\frac{d\vec{V}'}{dt} = \vec{W}' + [\vec{\omega}\vec{V}'] \quad (3.13)$$

где

$$\vec{W}' = \hat{i}' \frac{d'V'_x}{dt} + \hat{j}' \frac{d'V'_y}{dt} + \hat{k}' \frac{d'V'_z}{dt}$$

- ускорение точки M относительно подвижной системы отсчета K' .

Теорема сложения ускорений классической механики:

$$\vec{W} = \vec{W}' + \vec{W}_{\text{пер}} + \vec{W}_{\text{кор}} \quad (3.14)$$

где

$$\vec{W}_{\text{пер}} = \vec{W}_{0'} + [\dot{\vec{\omega}}\vec{r}'] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']] \quad (3.15)$$

$$\vec{W}_{\text{кор}} = 2[\vec{\omega}\vec{V}'] \quad (3.16)$$

Ускорение $\vec{W}_{\text{пер}}$ определяемое выражением (3.15), навивают переносимым ускорением. $\vec{W}_{0'}$ - ускорение переносного поступательного движения, $[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}'] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]$ - ускорение переносного вращательного движения; ускорение $[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]$ всегда направлено перпендикулярно к мгновенной оси вращения системы отсчета K' и поэтому его называют центробежным.

Ускорение (3.16) называют кориолисовым ускорением. $\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости переносного движения. $\vec{V}'$ - вектор относительной скорости точки. Величина кориолисова ускорения равна:

$$W_{\text{кор}} = 2\omega V' \sin(\omega, V') \quad (3.17)$$

Направление кориолисова ускорения определяется по правилу векторного произведения: кориолисово ускорение $\vec{W}_{\text{кор}}$ направлено перпендикулярно к плоскости, в которой лежат $\vec{\omega}$ и $\vec{V}'$, в ту сторону, чтобы наблюдатель, стоящий по вектору $\vec{W}_{\text{кор}}$, видел поворот от вектора $\vec{\omega}$ к вектору $\vec{V}'$ на наименьший угол против часовой стрелки.

При пользовании теоремой сложения ускорений может быть применен метод проекций. Выбирая неподвижную систему координат $O x y z$ спроектируем векторное равенство (3.14) на каждую из этих осей:

$$\begin{aligned} W_{ax} &= W'_{nx} + W'_{tx} + W'_{\text{пер}(n)x} + W'_{\text{пер}(\tau)x} + W_{\text{кор} x} \\ W_{ay} &= W'_{ny} + W'_{ty} + W'_{\text{пер}(n)y} + W'_{\text{пер}(\tau)y} + W_{\text{кор} y} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$W_{az} = W'_{nz} + W'_{tz} + W'_{\text{пер}(n)z} + W'_{\text{пер}(\tau)z} + W_{\text{кор} z}$$

Модуль абсолютного ускорения определяется формулой:

$$W = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2 + W_{az}^2}.$$

Методические указания для выполнения работы по теме

«Сложное движение точки»

При решении задач по данной теме необходимо:

1. выбрать системы координат: подвижную и неподвижную;
2. мысленно оставив переносное движение, найти скорость и ускорение относительно движения точки;
3. мысленно оставив относительное движение, найти скорость и ускорения

относительно движения точки

4. применив теоремы сложения скоростей и ускорений найти абсолютное значение скорости или ускорения точки.

Задача №1.

Диск вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. По прямолинейному пазу CD движется ползун N по закону $S = CN = 3t^2$ см, расстояние от центра диска до паза $h = 5$ см, $CD = 24$ см. Определить скорость и ускорение ползуна N в момент, когда он достигнет середины паза E

Решение.



За подвижную систему отсчета выберем систему неизменно связанную с диском, тогда переносное движение будет вращательным вокруг оси O с угловой скоростью $\omega_{\text{пер}} = \omega$. Поэтому переносная скорость точки N будет перпендикулярна к ON и по модулю равна $\vec{V}_{\text{пер}} = ON \cdot \omega = 10 \text{ см/с}$.

Диск вращается с постоянной угловой скоростью, поэтому переносное ускорение равно

$$W_{\text{пер}} = ON \cdot \omega^2 = 20 \text{ см/с}^2$$

и направленно к центру диска.

Относительное движение точки является прямолинейным

$$V_{\text{отн}} = \frac{ds}{dt} = 6t \text{ см/с}.$$

Относительное ускорение $W_{\text{отн}} = \frac{dV_{\text{отн}}}{dt} = 6 \text{ см/с}^2$.

Так как скорости $V_{\text{пер}}$ и $V_{\text{отн}}$ направлены в одну сторону, то

$$V_a = V_{\text{пер}} + V_{\text{отн}} = 10 + 6t \text{ см/с}.$$

Так как $CN = 12$ см, то момент $t = t_1$ прохождения ползуна через точку E определяется соотношением $3t_1^2 = 12$, откуда $t_1 = 2 \text{ с}$ следовательно, при $t = t_1 = 2 \text{ с}$

$$V_a = 22 \text{ см/с}.$$

Абсолютное ускорение ползуна определяется формулой (3.20). Так как векторы $\vec{W}_{\text{пер}}$ и $\vec{V}_{\text{отн}}$ взаимно перпендикулярны, то кориолисово ускорение равно

$$W_k = 2\omega V_{\text{отн}} = 24t, \text{ см/с}^2.$$

При $t = t_1$

$$W_k = 48, \text{ см/с}^2$$

Направлено $\vec{W}_k$ в ту же сторону, что и $\vec{W}_{\text{пер}}$.

Спроектируем векторное равенство (3.20) на оси координат:

$$ox: W_{ax} = W_{\text{отн}}$$

$$oy: W_{ay} = W_{\text{пер}} + W_k$$

Абсолютное ускорение точки N при $t_1 = 2 \text{ с}$ равно:

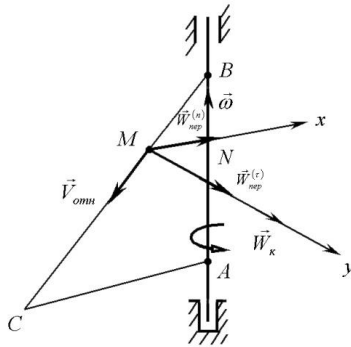
$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2} = \sqrt{W_{\text{отн}}^2 + (W_{\text{пер}} + W_k)^2} \approx 68,2 \text{ см/с}^2.$$

Задача №2.

Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC вращается вокруг катета BA с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0,5 \text{ с}^{-2}$, начальная угловая скорость треугольника

равна нулю. По гипотенузе треугольника от вершины B к основанию движется точка M по закону $S = BM = 20t$ см. Определить абсолютное ускорение точки M в момент $t = 2$ с.

Решение.



Подвижную систему координат жестко свяжем с треугольником ABC . Так как угловое ускорение $\varepsilon \Delta ABC$ постоянно, то угловая скорость $\omega_{\text{пер}} = \omega = \varepsilon t$. Переносное ускорение точки M разложим на нормальное и тангенциальное. $W_{\text{пер}}^{(n)} = \omega^2 \cdot MN$; $W_{\text{пер}}^{(\tau)} = \varepsilon \cdot MN$

Из ΔBMN : $MN = BM \sin 45^\circ = 20t \sin 45^\circ$

При $t = 2$ с

$$W_{\text{пер}}^{(n)} = 20\sqrt{2} = 28,2 \text{ см/с}^2;$$

$$W_{\text{пер}}^{(\tau)} =$$

$$10\sqrt{2} = 14,1 \text{ см/с}^2.$$

$\vec{W}_{\text{пер}}^{(n)}$ направлено по радиусу MN к оси вращения AB

$\vec{W}_{\text{пер}}^{(\tau)}$ направлено перпендикулярно радиусу MN

Относительное движение точки M прямолинейное и скорость

$$V_{\text{отн}} = \frac{ds}{dt} = 20 \text{ см/с, const.}$$

$$\text{Ускорение } W_{\text{отн}} = \dot{V}_{\text{отн}} = 0.$$

Ускорение Кориолиса определим по формуле

$$W_k = 2\omega_{\text{пер}} V_{\text{отн}} \sin(\vec{\omega}_{\text{пер}}, \vec{V}_{\text{отн}}).$$

Из чертежа видно, что $(\vec{\omega}_{\text{пер}}, \vec{V}_{\text{отн}}) = 135^\circ$

$$W_k = 2\omega V_{\text{отн}} \sin 135^\circ = 2\omega V_{\text{отн}} \sin 45^\circ.$$

При $t = 2$ с

$$W_k \approx 28, \text{ см/с}^2$$

Направлено $\vec{W}_k$ в ту же сторону, что и ускорение $\vec{W}_{\text{пер}}^{(\tau)}$, перпендикулярно плоскости треугольника ABC .

Проекции ускорений на оси координат

$$ox: W_{ax} = W_{\text{пер}}^{(n)}$$

$$oy: W_{ay} = W_{\text{пер}}^{(\tau)} + W_k$$

$$W_a = \sqrt{(W_{\text{пер}}^{(n)})^2 + (W_{\text{пер}}^{(\tau)} + W_k)^2} \approx 509 \text{ см/с}^2.$$

Задача №3.

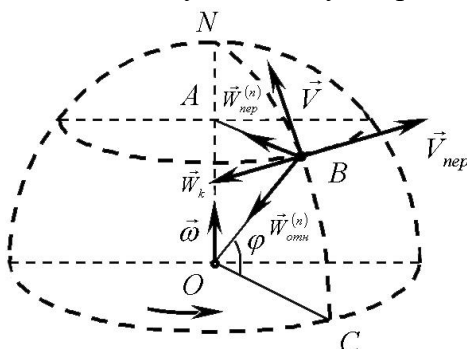
Корабль плывет вдоль меридиана CBN с юга на север. Его скорость по отношению ко дну равна 36 км/час. Определить составляющие абсолютной скорости и абсолютного ускорения корабля, угловое вращение Земли вокруг своей оси. Широта места $\varphi = 60^\circ$. Радиус Земли $R = 64 \cdot 10^5$ м.

Решение.

Подвижную систему координат жестко свяжем с землей. Корабль, находящийся в

точке B , участвует одновременно в двух движениях. В переносном движении вместе с Землей с угловой скоростью

$\omega_{\text{пер}} = \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \text{ с}^{-1}$ вокруг оси ON , где N - северный полюс, O - центр Земли. В переносном



движении точка B описывает окружность радиусом AB .

Переносная скорость

$$V_{\text{пер}} = AB\omega = R \cos 60^\circ \omega = 232 \text{ м/с.}$$

Эта скорость направлена по касательной к параллели 60° северной широты с запада на восток.

Переносное ускорение

$$W_{\text{пер}}^{(n)} = AB\omega^2 = R \cos 60^\circ \omega^2 = 0,017 \text{ м/с}^2,$$

направлено по радиусу AB к оси вращения.

Поскольку $\omega_{\text{пер}} = \omega = \text{const}$, $W_{\text{пер}}^{(\tau)} = 0$.

Корабль участвует в относительном движении вдоль меридиана CBN радиуса R с центром в точке O .

Относительная скорость

$$V_{\text{отн}} = V = 36 \text{ км/час} = 10 \text{ м/с}$$

направленная перпендикулярно OB (или по касательной к дуге NBC).

Относительное ускорение

$$W_{\text{отн}}^{(n)} = \frac{V_{\text{отн}}^2}{R} = \frac{V^2}{R} = 1,56 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2$$

направлено от точки B к точке O

$$W_{\text{отн}}^{(\tau)} = \dot{V}_{\text{отн}} = \dot{V} = 0.$$

Кориолисово ускорение

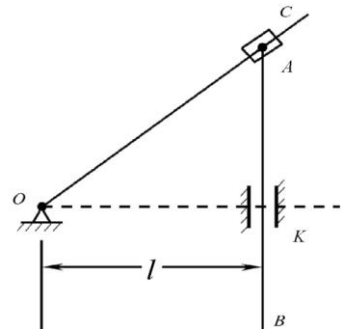
$$W_k = 2\omega_{\text{пер}} V_{\text{отн}} \sin(\vec{\omega}_{\text{пер}}, \vec{V}_{\text{отн}}) = 2\omega V \sin 60^\circ = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$$

$\vec{W}_k$ направлено по касательной к параллели 60° северной широты с востока на запад.

Задания для решения на занятии

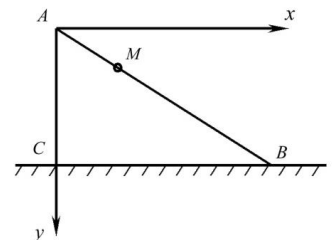
1. При запуске искусственного спутника Земли ему необходимо сообщить вблизи поверхности Земли абсолютную горизонтальную скорость 8 км/сек . Определить наибольшую и наименьшую относительные горизонтальные скорости, которые необходимо сообщить спутнику, если запуск производится на экваторе; на широте 60° ; на Северном полюсе. Радиус Земли 6400 км .

2. В кулиском механизме при качании кривошипа OC вокруг оси O перпендикулярной плоскости рисунка, ползун A , перемещаясь вдоль кривошипа OC , приводит в движение стержень AB , движущийся в вертикальных направляющих K . Расстояние $OK = l$. Определить скорость ползуна A относительно кривошипа OC в функции от угловой скорости ω и угла поворота φ кривошипа.

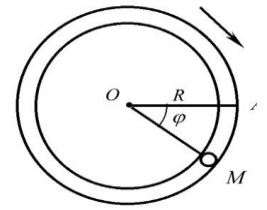


3. Точка M скользит по наклонной плоскости AB призмы с относительной скоростью, модуль которой равен:

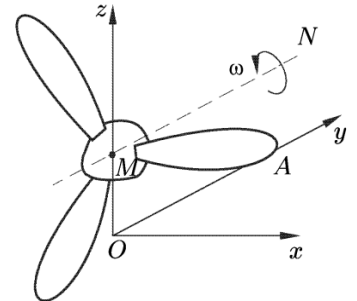
$V_{\text{отн}} = \sqrt{2gy}$. В начальный момент точка M находилась в A . Призма перемещается по горизонтальному полу с постоянной скоростью $V_{\text{пер}}$ вправо. Определить абсолютную траекторию точки M , ее абсолютную скорость в момент касания пола, если $AC = h$, α - угол наклона призмы.



4. Круглая трубка радиуса $R = 1$ м вращается вокруг горизонтальной оси O по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с. В трубке около ее точки A колеблется шарик M так, что угол $\varphi = \sin \pi t$. Определить абсолютные ускорения шарика: касательное и нормальное в момент времени равном $2\frac{1}{6}$ с.

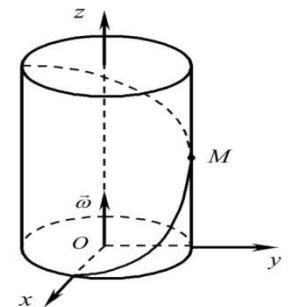


5. Винт самолета, установленного на вибростенде, вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно горизонтальной оси MN (см. рисунок). Ось MN перемещается параллельно самой себе в вертикальной плоскости zy по закону $OM = a \sin \Omega t$. Найти ускорение точки A на конце лопасти, если $MA = R$.

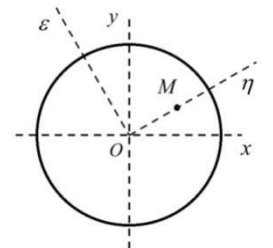


6. При стрельбе по движущейся цели ствол орудия длины l вращается в вертикальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω_1 . Платформа, на которой установлено орудие, поворачивается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω_2 . В момент вылета снаряд имеет относительно ствола скорость v_0 и ускорение w_0 , причем ствол направлен под углом α к горизонту. Найти скорость и ускорение снаряда в этот момент.

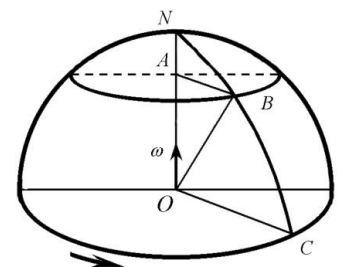
7. Цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ с⁻¹. По поверхности цилиндра движется точка M согласно уравнениям: $x = 3 \cos 2\pi t$, $y = 3 \sin 2\pi t$, $z = 3t$. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M . Как изменяется абсолютная скорость и ускорение точки M , если направление вращения цилиндра изменить на обратное, т. е. если $\omega_1 = -2$ с⁻¹?



8. Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска, по часовой стрелке равноускоренно с угловым ускорением 1 рад/с²; в момент времени $t = 0$ угловая скорость его равна нулю. По одному из диаметров диска колеблется точка M так, что ее координата $\varepsilon = \sin \pi t$. Определить в момент $t = 1/3$ с. проекции абсолютного ускорения точки M на оси ε , η , связанные с диском.

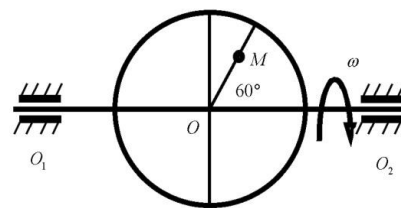


9. Корабль плывет вдоль меридиана CBN с юга на север. Его скорость по отношению ко дну равна 36 км/ч. Определить составляющие абсолютных скорости и ускорения корабля, учитывая вращение Земли вокруг своей оси. Широта места $\varphi = 60^\circ$. Радиус Земли $64 \cdot 10^5$ м. Решить эту же задачу, если корабль плывет вдоль параллели 60° северной широты с запада на восток.

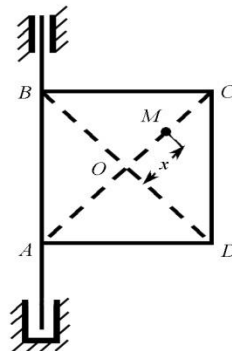


Задания для самостоятельного решения

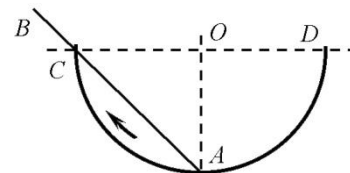
1. По радиусу диска, вращающегося вокруг оси O_1O_2 с угловой скоростью $\omega = 2t$ рад/с, в направлении от центра диска к его ободу движется точка M по закону: $OM = 4t^2$ см. Радиус OM составляет с осью O_1O_2 угол 60° . Определить величину абсолютного ускорения точки M в момент времени равном 1 с.



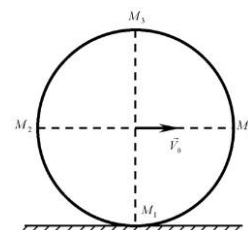
2. Квадрат $ABCD$ со стороной $2a$ вращается вокруг стороны AB с постоянной угловой скоростью $\omega = \pi\sqrt{2}$ рад/с. Вдоль диагонали AC совершает гармоническое колебание точка M по закону: $x_1 = a \cos \frac{\pi}{2} t$ м. Определить величину абсолютного ускорения точки при $t = 1$ с и $t = 2$ с.



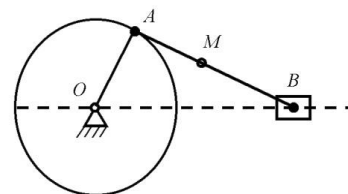
3. Прямая AB движется в плоскости рисунка, причем конец ее A все время находится на полуокружности CAD , а сама прямая все время проходит через неподвижную точку C диаметра CD . Определить скорость V_C точки прямой, совпадающей с точкой C , в тот момент, когда радиус OA перпендикулярен CD , если известно, что скорость точки A в этот момент 4 м/с.



4. Колесо радиуса $R = 0,5$ м катится без скольжения по прямолинейному участку пути; скорость центра его постоянна и равна $V_0 = 10$ м/с. Найти скорость концов M_1, M_2 и M_3, M_4 вертикального и горизонтального диаметров колеса. Определить его угловую скорость.



5. В кривошипном механизме длина кривошипа $OA = 40$ см, длина шатуна $AB = 2$ м; кривошип вращается равномерно с угловой скоростью, равной 6π рад/с. Найти угловую скорость ω шатуна и скорость средней его точки M при четырех положениях кривошипа для которых угол AOB равен $0, \pi/2, 3\pi/2, \pi$.



Контрольные вопросы.

1. Какое движение называется абсолютным? Относительным? Переносным?
2. Сформулируйте и выведите теорему сложения скоростей.
3. Какая скорость называется переносной скоростью?
4. Чему равен модуль абсолютной скорости?
5. Чему равно ускорение поступательного движения подвижной системы отсчета относительно неподвижной?
6. Как определить ускорение точки относительно подвижной системы отсчета?
7. Как определить величину и направление кориолисова ускорения?

8. Сформулируйте и выведите теорему сложения ускорений классической механики.
9. Чему равен модуль абсолютного ускорения?
10. Какое движение твердого тела называют плоскопараллельным?
11. Как определить скорость тела при плоскопараллельном движении?
12. Что называют мгновенным центром скоростей?
13. Какие существуют способы определения мгновенного центра скоростей?
14. Как определить скорость любой точки тела, если известен мгновенный центр скоростей?

Тема №2. Уравнения движения частиц и законы сохранения.

1. Основные понятия и законы динамики Ньютона.

Первая основная задача динамики точки.

Цели и задачи: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов основных понятий и законов динамики Ньютона.

Знания, умения и владения, приобретаемые студентами в результате освоения темы, в рамках формируемых компетенций:

- знать средства и методы областей математики, общей и теоретической физики для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности; границы применимости законов механики Ньютона (ОПК-1, ОПК-2)
- уметь использовать знания высшей математики и математической физики при решении практических задач, применять на практике базовые общепрофессиональные знания теории (ПК-1, УК-1)
- владеть базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач, основными навыками изучения различных явлений и процессов, пониманием сущности и значения информации в развитии современного информационного общества (ОПК-2, ПК-1).

Актуальность темы практического занятия

Тема дает возможность изучить методы и законы, определяющие виды движения; научиться составлять дифференциальные уравнения движения точки, сводить их к уравнениям с разделяющимися переменными или к линейным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами; знать роль начальных условий движения точки, уметь находить постоянные интегрирования по начальным условиям движения, уметь использовать полученные знания при решении задач.

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

При решении задач различают прямую и обратную задачи динамики. Прямая (или основная) задача заключается в том, что по заданным силам, приложенным к движущейся материальной точке, её массе, требуется определить движение этой точки.

Вторая задача динамики - задача о нахождении силы, действующей на материальную точку, по заданному закону движения и известной массе материальной точки.

В прямоугольной системе декартовых координат проекции уравнения движения определяются формулами:

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix}, \quad m_i \ddot{y}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy}, \quad m_i \ddot{z}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iz}$$

здесь $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$ - проекции ускорения W_i , а F_{ix}, F_{iy} и F_{iz} - проекции силы на соответствующие оси декартовых координат.

Методические указания для выполнения работы по теме

«Первая основная задача динамики.»

Для решения этой задачи необходимо:

- установить силы, действующие на точку;
- составить дифференциальные уравнения движения; проинтегрировать
- определить по начальным условиям постоянные интегрирования.

Эти задачи можно разделить на три основных типа:

Задачи, относящиеся к прямолинейному движению свободной материальной точки.

Задачи, относящиеся к криволинейному движению свободной материальной точки.

Задачи, относящиеся к движению не свободной материальной точки.

Задачи типа 1.

1. Задачи, в которых равнодействующая всех сил, приложенных к точке постоянная.

Если точка движется вдоль оси X , то уравнения движения имеют вид:

$$m\ddot{x} = \sum F_x = \text{const}, \text{ откуда } \ddot{x} = \frac{\sum F_x}{m} = \text{const}, \quad \text{т.е. движение}$$

точки является равнопеременным. Поэтому путь может быть найден по формуле:

$$S = x - x_0 = V_0 t + \frac{\sum F_x}{m} \frac{t^2}{2}, \text{ где } V_0 - \text{начальная скорость точки.}$$

Отсюда
$$x = x_0 + V_0 t + \frac{\sum F_x}{m} \frac{t^2}{2}$$

Для нахождения скорости как функции расстояния $V = V(x)$, левую часть уравнения движения приводят к виду:

$$m \frac{dV}{dt} = m \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = mV \frac{dV}{dx}, \text{ откуда } V \frac{dV}{dx} = \frac{\sum F_x}{m} = \text{const} \text{ или } \frac{V^2 - V_0^2}{2} = \frac{\sum F_x}{m} (x - x_0), \quad \text{то}$$

$$V^2 = V_0^2 + 2 \frac{\sum F_x}{m} (x - x_0).$$

2. Задачи, в которых равнодействующая сил, приложенных к точке, есть функция времени t .

Тогда уравнение движения примет вид $m\ddot{x} = \sum F_x = f(t)$. так как $\dot{x} = V_x = V$, то получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$m \frac{dV}{dt} = f(t) \text{ или } m dV = f(t) dt. \quad \text{Интегрируем это уравнение}$$

$$mV - mV_0 = \int_0^t f(t) dt$$

откуда
$$V = \frac{dx}{dt} = V_0 + \frac{1}{m} \int_0^t f(t) dt$$

3. Задачи, в которых равнодействующая сил есть функция координаты.

В этом случае уравнение движения примет вид:

$$m\ddot{x} = \sum F_x = f(x) \quad \text{или} \quad m \frac{dV}{dt} = f(x)$$

Преобразуя левую часть уравнения $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = V \frac{dV}{dx}$, получим:

$$\frac{mV dV}{dx} = f(x) \text{ или } mV dV = f(x) dx.$$

Проинтегрируем последнее уравнение:
$$\frac{mV^2 - mV_0^2}{2} = \int_{x_0}^x f(x) dx$$

Из этого равенства находим скорость V как функцию от расстояния X ,

т.е. $V = \frac{dx}{dt} = \varphi(x)$. Разделяя переменные $\frac{dx}{\varphi(x)} = dt$ и проинтегрировав это уравнение, найдем зависимость координаты x от времени t .

4. Задачи, в которых равнодействующая сил, приложенных к точке, зависит от скорости этой точки. В этом случае уравнение движения имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = f(v) \quad \text{или} \quad \frac{mdv}{f(v)} = dt$$

Отсюда
$$m \int_{V_0}^V \frac{dv}{f(v)} = \int_0^t dt = t$$

Выполняя интегрирование, находим скорость точки как функцию времени

$$V = \frac{dx}{dt} = \psi(t), \text{ тогда } dx = \psi(t)dt$$

Отсюда: $X = X_0 + \int_0^t \psi(t)dt$ Это уравнение выражает закон движения точки.

Задачи типа 2.

В задачах этого типа рассматривается криволинейное движение свободной материальной точки.

1. Задачи, в которых движение точки происходит под действием постоянных сил. Уравнения движения имеют вид $m\ddot{x} = \sum F_x = const,$

$$m\ddot{y} = \sum F_y = const, \quad m\ddot{z} = \sum F_z = const$$

Каждое из этих уравнений нужно проинтегрировать в отдельности таким способом, как и в задачах группы типа 1.

2. Задачи, в которых равнодействующая всех сил, приложенных к точке, является функцией времени. В этом случае:

$$\sum F_x = f_1(t), \quad \sum F_y = f_2(t), \quad \sum F_z = f_3(t)$$

Тогда дифференциальные уравнения движения точки имеют вид: $m\ddot{x} = f_1(t),$

$$m\ddot{y} = f_2(t), \quad m\ddot{z} = f_3(t)$$

Каждое из этих уравнений интегрируется способом, описанным во второй группе типа 2.

3. Задачи, в которых равнодействующая всех сил, приложенных к данной точке, является функцией ее координат. Такой случай возможен, например, когда материальная точка притягивается к неподвижному центру или отталкивается от него силой, зависящей от расстояния точки до этого центра.

4. Задачи, в которых рассматривается движение материальной точки под действием заданной силы в сопротивляющейся среде, причем сила сопротивления среды зависит от скорости материальной точки.

Задачи типа 3.

В задачах этого типа рассматривается движение несвободной материальной точки.

1. Задачи, в которых рассматривается движение несвободной точки по заданной неподвижной линии.

Поскольку траектория точки известна, проще воспользоваться дифференциальными уравнениями движения в естественной форме. При этом необходимо учесть реакции связей, т.е. нормальную реакцию и силу трения.

2. Задачи, в которых рассматривается движение несвободной точки по неподвижной поверхности. Кроме равнодействующих заданных сил, приложенных к точке, необходимо учесть нормальную реакцию поверхности $\vec{N}$ и силу трения. Дифференциальные уравнения движения (4.7) имеют вид:

$$m\ddot{x} = F_x + N_x + F_x^{\text{тр}}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= F_y + N_y + F_y^{\text{тр}} \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z + F_z^{\text{тр}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Если к этим уравнениям присоединить уравнения Кулона

$$F_{\text{тр}} = fN$$

где f - коэффициент трения, и уравнение связи $\varphi(X, Y, Z) = 0$, то получим систему пяти уравнений, из которых можно определить все пять искомых величин X, Y, Z, N и $F_{\text{тр}}$. Если трение отсутствует, то последние члены в правых частях уравнений (4.8) исчезают.

Пример решения задачи

Задача №1

Материальная точка массы $m = 0.5\text{кг}$ движется под действием постоянной силы $F = 10\text{Н}$. В начальный момент скорость точки $V_0 = 2\text{м/с}$. Определить скорость точки в тот момент, когда она пройдёт расстояние 5м .

Решение

Направим ось OX вдоль прямолинейной траектории. Запишем дифференциальные уравнения движения в проекции на ось OX :

$$m\ddot{x} = F$$

Учтём, что $m\ddot{x} = m \frac{dV}{dt} = m \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = mV \frac{dV}{dx}$

Тогда $V \frac{dV}{dx} = \frac{F}{m} = \text{const.}$

Откуда $\int_{V_0}^V V dV = \int_{x_0}^x \frac{F}{m} dx,$

или $\frac{V^2 - V_0^2}{2} = \frac{F}{m} (x - x_0)$

$$V^2 = V_0^2 + \frac{2F}{m} (x - x_0)$$

$$V^2 = 4 + 2 \cdot \frac{10}{0.5} \cdot 5 = 204$$

$$V = 14.28\text{м/с.}$$

Задача №2

На материальную точку массы m действует сила отталкивания $F_x = cx$, где c — коэффициент пропорциональности. Найти закон движения точки, если в начальный момент $t=0, x=0$ и $\dot{x}_0 = V_0$.

Решение

Движение точки прямолинейное. Направим ось OX вдоль движения.

Дифференциальные уравнения движения в проекции на OX имеет вид:

$$m\ddot{x} = cx \quad \text{или} \quad \ddot{x} - \frac{c}{m}x = 0.$$

Обозначим через $k^2 = \frac{c}{m}$, тогда $\ddot{x} - k^2x = 0. \quad (1)$

Для решения дифференциального уравнения (1) составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - k^2 = 0 \quad \text{откуда} \quad \lambda_{1,2} = \pm k.$$

Корни характеристического уравнения вещественные, запишем решение уравнения (1) в виде: $x = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}$

Подставляем в выражение $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ значение $t=0$, $x=0$, $\dot{x}_0 = V_0$, получим:

$$0 = c_1 + c_2, \quad V_0 = c_1 k - c_2 k$$

$$c_1 = -c_2, \quad V_0 = -2c_2 k, \quad c_2 = -\frac{V_0}{2k}, \quad c_1 = \frac{V_0}{2k}$$

$$x = \frac{V_0}{2k} (e^{kt} - e^{-kt}) = \frac{V_0}{k} sh(kt).$$

Задания для решения на занятии

1. Камень падает в шахту без начальной скорости. Звук от удара камня о дно шахты услышан через 6,5 с. от момента начала его падения. Скорость звука равна 330 м/с. Найти глубину шахты.

2. К твердому телу массы m , могущему двигаться вдоль оси X , приложена сила отталкивания, проекция которой на ось X , направленную по горизонтали направо, равна $S = k^2 m x$, где k^2 - постоянный коэффициент, X - абсцисса, определяющая положение твердого тела. Сила отталкивания направлена вдоль оси X . В начальный момент твердое тело находилось в покое на расстоянии a от начала отсчета. Найти закон движения твердого тела, считая его точечной массой.

3. Решить предыдущую задачу с учетом силы трения скольжения, если коэффициент трения равен f .

4. Два геометрически равных и однородных шара сделаны из различных материалов. Плотности материала шаров соответственно равны ν_1 и ν_2 . Оба шара падают в воздухе. Считая сопротивление среды пропорциональным квадрату скорости, определить отношение максимальных скоростей шаров.

5. Парашютист в момент раскрытия парашюта имел скорость V_0 , направленную вертикально вниз. Найти скорость движения парашютиста, если проекция на ось X силы движения парашютиста равна $R_x = -k^2 m x^2$, где m - масса парашютиста, X - проекция на ось X его скорости, k - постоянный коэффициент. Ось X направлена по вертикали вниз.

6. На какую высоту H и за какое время T поднимется тело веса p , брошенное вертикально вверх со скоростью V_0 , если сопротивление воздуха может быть выражено формулой $k^2 r V^2$, где V - величина скорости тела?

7. Определить движение тяжелого шарика вдоль воображаемого прямолинейного канала, проходящего через центр Земли, если принять, что сила притяжения внутри земного шара пропорциональна расстоянию движущейся точки от центра Земли и направлена к этому центру; шарик опущен в канал с поверхности Земли без начальной скорости. Указать также скорость шарика при прохождении через центр Земли и время движения до этого центра. Радиус Земли равен $R = 6,37 \cdot 10^6$ м, ускорение силы притяжения на поверхности Земли $g = 9,8$ м/с².

8. Материальная точка массы M совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону $f = f_0 \cos \omega t$, где f_0 и ω - константы. В начальный момент точка имела скорость $\dot{X}_0 = V_0$. Найти уравнение движения точки.

9. Частица массы M , несущая заряд электричества e , находится в однородном электрическом поле с переменным напряжением $E = A \sin k t$ (A и k - заданные постоянные). Определить движение частицы, если известно, что в электрическом поле на частицу действует сила $\vec{F} = e\vec{E}$, направленная в сторону напряжения $\vec{E}$. Влиянием силы

тяжести пренебречь. Начальное положение частицы принять за начало координат; начальная скорость частицы равна нулю.

10. Тело массы 1 кг. движется под действием переменной силы $F = 10(1 - t)$ Н, где время t - в секундах. Через сколько секунд тело остановиться, если начальная скорость тела $V_0 = 20$ м/с и сила совпадает по направлению со скоростью тела? Какой путь пройдет тело до остановки?

11. Тело брошенное под углом α к горизонту со скоростью V_0 . Определить уравнение траектории тела.

12. Решить предыдущую задачу с учетом силы сопротивления движению, пропорциональной скорости тела: $R = -kmV$, где m - масса тела, k - постоянный коэффициент.

13. Материальная точка движется в вертикальной плоскости под действием центральной силы притяжения, пропорциональной ее расстоянию до неподвижного центра: $\vec{F} = -k^2 m \vec{r}$, где $\vec{r}$ -радиус вектор точки, m - ее масса, k - постоянный коэффициент. Найти уравнение траектории точки, если в начальный момент она занимала положение $M_0 \left(a, -\frac{g}{k^2} \right)$ и имела скорость V_0 , направленную по вертикали вверх.

Задания для самостоятельного решения

1. Точка массы m движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O , изменяющейся по закону $\vec{F} = k^2 m \vec{r}$, где $\vec{r}$ -радиус вектор точки. В начальный момент точка находится в $M_0(a, 0)$ и имела скорость V_0 , направленную параллельно оси Y . Определить траекторию точки.

2. Частица массы m , несущая заряд отрицательного электричества e , вступает в однородное электрическое поле напряжения E со скоростью V_0 , перпендикулярной направлению напряжения поля. Определить траекторию дальнейшего движения частицы, зная, что в электрическом поле на нее действует сила: $\vec{F} = e\vec{E}$, направленная в сторону, противоположную напряжению $\vec{E}$; действием силы тяжести пренебречь.

3. Заряд e массы m движется между обкладками плоского конденсатора, где напряженность электрического поля равна $E = E_0 \cos \omega t$ (E_0 и ω - постоянные величины). В момент $t = 0$ заряд находился в положении $\vec{r}_0$ и имел скорость $\vec{V}_0$. Найти положение и скорость заряда в любой момент времени.

4. Тяжелая точка поднимается по негладкой наклонной плоскости, составляют угол 30° с горизонтом. В начальный момент скорость точки равнялось $V_0 = 15$ м/с. Коэффициент трения $f = 0,1$. Какой путь пройдет точка до остановки? За какое время точка пройдет этот путь?

5. При скоростном спуске лыжник массы 90 кг скользил по склону 45° , не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег $f = 0,1$. Сопротивление воздуха движению лыжника пропорционально квадрату скорости лыжника и при скорости в 1м/с равна 0,635Н. Какую наибольшую скорость мог развить лыжник? Какой станет скорость лыжника, если уменьшить коэффициент трения до 0,05?

Контрольные вопросы

1. Что изучает динамика?
2. Что называется материальной точкой?

3. Как формулируется закон Галилея-Ньютона?
4. В чем заключается прямая задача динамики?
5. Сформулируйте вторую (обратную) основную задачу динамики?
6. Какая схема решения основной задачи динамики?
7. Какой план решения задач типа 1.1?
8. Какая схема решения задач типа 1.2?
9. Какая схема решения задач типа 1.3?
10. Какая схема решения задач типа 1.4?
11. Какая схема решения задач типа 1?
12. Какая схема решения задач типа 2?
13. Какая схема решения задач типа 3?

Список литературы

Основная: 1,2,3,4

Дополнительная: 1

Учебно-методическая: 1,2,3

2. Вторая (обратная) задача динамики.

Цели и задачи: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов динамики материальной точки.

Знания, умения и владения, приобретаемые студентами в результате освоения темы, в рамках формируемых компетенций:

- знать средства и методы областей математики, общей и теоретической физики для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности (ПК-1, ОПК-2)
- уметь использовать знания высшей математики и математической физики при решении практических задач, применять на практике базовые общепрофессиональные знания (УК-1, ОПК-2)
- владеть базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач, основными навыками изучения различных явлений и процессов (ОПК-1, ПК-1).

Актуальность темы практического занятия

Тема дает возможность изучить методы нахождения полной силы, действующей на частицу механической системы по ее массе и заданному радиус-вектору как функцию времени.

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

При рассмотрении данной темы необходимо изучить обратную задачу динамики. Обратная задача - задача о нахождении полной силы $\vec{F}_i$, действующей на i -ю частицу механической системы по ее массе M_i и заданному радиус-вектору $\vec{r}_i(t)$ как функцию времени.

Решение этой задачи сводится к определению ускорения точки.

Если даны уравнения движения материальной точки в декартовых координатах, то сила, вызывающей это движение определяется по формуле: $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$,

Если даны уравнения плоского движения материальной точки массы M в полярных координатах $r = f_1(t)$, $\varphi = f_2(t)$, то проекции F_r, F_φ силы $\vec{F}$, вызывающей это движение, определяется по формулам:

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2), \quad F_\phi = \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\phi})$$

$$\text{Откуда: } F = \sqrt{F_r^2 + F_\phi^2}, \quad \cos(\widehat{r, \vec{F}}) = \frac{F_r}{F}, \quad \cos(\widehat{\phi, \vec{F}}) = \frac{F_\phi}{F}$$

Методические указания для выполнения работы по теме

«Вторая (обратная) задача динамики.»

Обратные задачи динамики несвободной материальной точки, в которых требуется определить активную силу или реакцию связи, следует решать в таком порядке:

- изобразить все силы, приложенные к материальной точке;
- применив закон освобождения от связей, изобразить соответствующие реакции связей;
- выбрать систему отсчета;
- определить ускорение материальной точки и найти его проекции на оси координат;
- составить дифференциальные уравнения движения материальной точки, соответствующее принятой системе отсчета;
- из системы составленных уравнений определить искомые величины.

Обратные задачи динамики можно разделить на два типа в зависимости от траектории движущейся точки:

Задачи, относящиеся к прямолинейному движению точки.

Задачи, относящиеся к криволинейному движению точки.

Задачи типа 1 и 2 можно разделить на две группы.

К первой группе задач относятся те задачи, в которых к движущейся материальной точке приложена одна сила. Необходимо определить эту силу.

Ко второй группе относятся задачи, в которых к движущейся материальной точке приложено несколько сил, причем требуется найти одну из них. В этих задачах часто требуется найти неизвестную реакцию связи при движении несвободной материальной точки.

Пример решения задачи

Задача №1.

Материальная точка массой $m = 0,5 \text{ кг}$ совершает движение согласно уравнениям:

$$x = 2t^2 + 1, \quad y = t^2 - 1, \quad z = t^3 - 1$$

координаты выражены в метрах, время - в секундах. Определить величину и направление силы, действующей на точку, в момент $t = 1 \text{ сек.}$

Решение.

Находим проекции ускорения на оси координат:

$$\ddot{x} = 4; \quad \ddot{y} = 2; \quad \ddot{z} = 6t = 6 \text{ (при } t = 1 \text{)}.$$

Находим проекции силы на оси координат:

$$F_x = m\ddot{x} = 2; \quad F_y = m\ddot{y} = 1; \quad F_z = m\ddot{z} = 3.$$

Определим модуль силы и направляющие косинусы:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14} \text{ Н}$$

$$\cos(F_x, F) = \frac{F_x}{F} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\cos(F_y, F) = \frac{F_y}{F} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\cos(F_z, F) = \frac{F_z}{F} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Задача №2

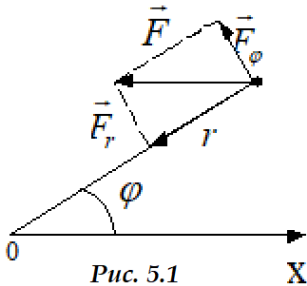


Рис. 5.1

Материальная точка массы m движется по гладкой плоскости. Ее полярные координаты r и φ изменяются по закону: $r = at + b$, $\varphi = ct + d$,

где a, b, c, d – положительные постоянные. Определить силу, под действием которой происходит это движение (рис. 5.1).

Решение

Найдем проекции силы на направление радиуса – вектора.

Радиальная

составляющая силы: $F_r = mW_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$

Поперечная проекция силы F_φ (в сторону увеличения полярного угла φ):

$$F_\varphi = mW_\varphi = \frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}).$$

Так как $\dot{r} = a$, $\ddot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = c$, $\ddot{\varphi} = 0$, получим: $F_r = -m(at + b)c^2 = -mc^2r$.

Радиальная составляющая силы направлена к полюсу. $F_\varphi = 2mac = \text{const}$

Модуль силы, равен: $F = \sqrt{F_r^2 + F_\varphi^2} = mc\sqrt{c^2r^2 + 4a^2}$.

Задания для решения на занятии

1. Материальная точка движется согласно уравнениям $X = at$, $Y = bt$, где a и b постоянные. Определить силу, вызывающую это движение.
2. Материальная точка массы M движется согласно уравнениям $X = A \cos kt$, $Y = B \sin kt$. Определить силу $\vec{F}$, вызывающую это движение, если эта сила зависит только от положения точки.
3. Материальная точка массы M движется по окружности радиуса A согласно уравнению $\sigma = bt$. Определить силу, вызывающую это движение (σ – дуговая координата, b – постоянная величина).
4. Тело массы 2,04 кг совершает колебательное движение по горизонтальной прямой согласно закону $X = 10 \sin \frac{\pi t}{2}$ м. Найти зависимость силы, действующей на тело, от координаты X , а также наибольшую величину этой силы.
5. В вагоне поезда, идущего сначала по прямолинейному пути, а затем по закругленному со скоростью 20 м/с, производится взвешивание некоторого груза на пружинных весах; весы в первом случае показывают 50 Н, а на закруглении 51 Н. Определить радиус закругления пути.
6. Масса кузова трамвайного вагона 10000 кг. Масса тележки с колесами 1000 кг. Определить силу наибольшего и наименьшего давления вагона на рельсы прямолинейного горизонтального участка пути, если на ходу кузов совершает на рессорах вертикальные гармонические колебания по закону $X = 0,02 \sin 10t$ м.
7. Шарик, масса которого равна 100 г, падает под действием силы тяжести и при этом испытывает сопротивление воздуха. Движение шарика выражается уравнением: $X = 4,9t - 2,45(1 - e^{-2t})$
где X – в метрах, t – в секундах, ось OX направлена по вертикали вниз. Определить силы сопротивления воздуха R и выразить ее как функцию скорости шарика.

8. Груженная вагонетка массы 700 кг опускается по канатной дороге с уклоном $\alpha = 15^\circ$, имея скорость $V = 1,6$ м/с. Определить натяжение каната при равномерном спуске и при торможении вагонетки. Время торможения $t = 4$ с., общий коэффициент сопротивления движению $f = 0,015$. При торможении вагонетка движется равнозамедленно.

Задания для самостоятельного решения

1. Самолет, пикируя отвесно, достиг скорости 300 м/с, после чего летчик стал выводить самолет из пике, описывая дугу окружности радиуса $R = 600$ м в вертикальной плоскости. Масса летчика 80 кг. Какая наибольшая сила прижимает летчика к креслу?

2. Велосипедный трек на кривых участках пути имеет виражи, профиль которых в поперечном сечении представляет собой прямую, наклонную к горизонту, так что на кривых участках внешний край трека выше внутреннего. С какой наименьшей и с какой наибольшей скоростью можно ехать по виражу, имеющему радиус R и угол наклона к горизонту α , если коэффициент трения резиновых шин о грунт трека равен f ?

3. С какой постоянной по модулю скоростью должен двигаться искусственный спутник Земли для того, чтобы человек находился в кабине в состоянии невесомости? Спутник движется по круговой орбите радиуса $R + h$, где R - радиус Земли, а h - высота спутника над ее поверхностью.

4. На какую высоту надо запустить искусственный спутник Земли для того, чтобы для наблюдателя, находящегося на Земле, он казался неподвижным? Орбиту спутника Земли приближенно считать окружностью, концентричной с экватором. Радиус Земли 6370 км. Ускорение силы тяжести на поверхности Земли $9,81$ м/с². Модуль угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси $\omega = 0,00007$ 1/с. Сила притяжения спутника Землей обратно пропорциональна квадрату расстояния от спутника до центра Земли. Спутник считать точечной массой.

5. Материальная точка движется под действием центральной силы по логарифмической спирали, уравнение которой имеет вид $r = ae^{-\lambda\varphi}$, где a и λ - постоянные величины. Определить закон изменения центральной силы.

Контрольные вопросы.

1. Чему равна проекция силы в системе естественных осей?
2. В чем заключается вторая (обратная) задача динамики?
3. Как определить проекции силы в декартовой системе координат?
4. Чему равны проекции силы в полярных координатах?
5. В каком порядке следует решать обратные задачи динамики?
6. Какие функции называют первыми и вторыми интегралами уравнений движения?

Список литературы

Основная: 1,2,3,4

Дополнительная: 1

Учебно-методическая: 1,2,3

3. Законы сохранения и изменения механической энергии.

Цели и задачи: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов законов сохранения и изменения механической энергии.

Знания, умения и владения, приобретаемые студентами в результате освоения темы, в рамках формируемых компетенций:

- знать средства и методы областей математики, общей и теоретической физики для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности, знать законы сохранения и основные теоремы динамики (ПК-1, ОПК-2)
- уметь использовать знания высшей математики и математической физики при решении практических задач: выстраивать и реализовывать перспективные линии интеллектуального, нравственного, физического и профессионального саморазвития и самосовершенствования (УК-1, ОПК-1)
- владеть базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач, основными навыками изучения различных явлений и процессов, навыками поиска информации в глобальной информационной сети Интернет (ОПК-1, ПК-1).

Актуальность темы практического занятия

Тема дает возможность выяснить свойства и происхождение первых интегралов движения; уметь применить закон сохранения энергии и теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной и интегральной форме при решении задач.

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

При рассмотрении данной темы необходимо дать определение первыми интегралами дифференциальных уравнений движения (интегралами движения). Обратить внимание на то, что не все первые интегралы движения выполняют важную роль в механике. Среди них есть такие, постоянство которых связано с симметрией пространства и времени, их однородностью и изотропностью. Такие первые интегралы движения имеют вид:

$$f_{\alpha}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n; \vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n) = f_{\alpha_0}$$

называются законами сохранения.

Закон сохранения механической энергии: механическая энергия сохраняется в процессе движения у замкнутых механических систем и систем, находящихся в стационарных потенциальных силовых полях; этот закон является следствием однородности времени.

Для указанных механических систем вводят понятие о потенциальной энергии, т.е. энергии, зависящей от расположения системы в потенциальном силовом поле: $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$.

Полная потенциальная энергия системы, находящейся в стационарном потенциальном поле, складывается из ее внутренней части $U^{(i)}$ и внешней части $U^{(e)}$, описывающей взаимодействие системы с внешним полем.

Ввести понятие работы силы при перемещении материальной точки в потенциальном поле. Сила, действующая в потенциальном поле, направлена по нормали к эквипотенциальной поверхности в данной точке в сторону убывания потенциальной энергии.

Обратить внимание, что у замкнутой механической системы и системы, находящейся в стационарном потенциальном поле, сохраняется полная механическая энергия системы.

Для механических систем, находящихся в нестационарных силовых полях полная энергия не сохраняется. Для этих систем используют теорему об изменении кинетической энергии: $dT = dA^{(e)} + dA^{(i)}$

Кинетическая энергия твердого тела вычисляется по формулам:

- а) При поступательном движении: $T = \frac{MV^2}{2}$
- б) При вращении вокруг неподвижной оси: $T = \frac{1}{2}I_z\omega^2$
- в) При плоском движении: $T = \frac{1}{2}MV_c^2 + \frac{1}{2}I_{zc}\omega^2$,
- г) При вращении вокруг неподвижной точки: $T = \frac{1}{2}I\omega^2$, где I – момент

Методические указания для выполнения работы по теме «Законы сохранения и изменения механической энергии»

Решение задач по теме «Законы сохранения и изменения механической энергии» проводить в такой последовательности:

1. изобразить на рисунке все внешние и внутренние силы системы;
2. вычислить сумму работ этих сил на перемещениях точек системы;
3. вычислить кинетическую энергию системы материальных точек в начальном и конечном положениях системы;
4. воспользовавшись результатами вычислений, записать теорему об изменении кинетической энергии системы и определить искомую величину.

Пример решения задачи

Задача №1.

Какова длина разбега самолета, масса которого $m = 18000$ кг, тяга, развиваемая двигателем $F = 40$ кН, а общая сила сопротивления $R = 10$ кН, взлетная скорость $V = 216$ км/час.

Решение.

По теореме об изменении кинетической энергии:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = (F - R)S$$

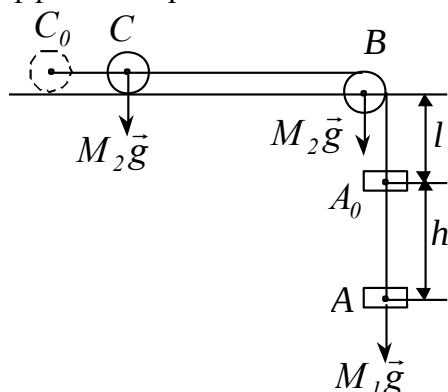
Полагая начальную скорость $V_0 = 0$, получим:

$$S = \frac{mV^2}{2(F-R)} = \frac{18000 \cdot 60^2}{2 \cdot 30000} = 1080 \text{ м.}$$

Задача №2.

Груз A массы M_1 подвешен к однородному нерастяжимому канату длиной L и массой M . Канат переброшен через блок B , вращающийся вокруг оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка. Второй конец каната прикреплен к оси катка C , катящегося без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости. Блок B и каток C – однородные круглые цилиндры радиусом r и массой M_2 каждый.

Коэффициент трения качения катка C о горизонтальную плоскость равен f_k . В начальный момент система покоилась, с блока B свешивалась часть каната длиной l . Определить скорость груза A в зависимости от его вертикального перемещения h .



Решение.

Запишем теорему об изменении

кинетической энергии в конечной форме:

$$T - T_0 = \sum A \quad (1)$$

$T_0 = 0$, т.к. в начальный момент система покоилась.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

где кинетическая энергия:

$$T_1 = M_1 \frac{V^2}{2} \text{ - груза;}$$

$$T_4 = M \frac{V^2}{2} \text{ - каната;}$$

$T_2 = \frac{I_0 \omega^2}{2}$ - блока ($I_0 = \frac{M_2 r^2}{2}$; $\omega = \frac{V}{r}$, I_0 – момент инерции блока, ω – его угловая скорость);

$T_3 = M_2 \frac{V_C^2}{2} + I_C \frac{\omega_1^2}{2}$ - катка ($I_C = \frac{M_2 r^2}{2}$ – момент инерции катка, ω_1 – его угловая скорость).

Скорость точки касания катка неподвижной плоскости равна нулю, т.е. эта точка – мгновенный центр вращения катка. Отсюда $V_C = r\omega_1$, тогда:

$$T_3 = \frac{M_2}{2} V_C^2 + \frac{M_2}{4} V_C^2 = \frac{3M_2 V_C^2}{4} = \frac{3}{4} M_2 V^2.$$

Таким образом, кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{M_1 V^2}{2} + \frac{M V^2}{2} + \frac{M_2 V^2}{2} + \frac{3M_2 V^2}{4} = \frac{V^2}{2} (M_1 + M + 2M_2) \quad (2)$$

Сумма работ всех сил:

$$\sum A = A_1 + A_k + A_2,$$

где:

$$A_1 = M_1 g h \quad \text{– работа силы тяжести груза } A.$$

$$A_k = -f_k M_2 g \varphi \quad \text{– работа момента пары трения качения}$$

$$\text{т.к. } \omega_1 = \omega, \text{ то; } \varphi = \frac{h}{r} A_k = -f_k M_2 g \frac{h}{r}.$$

$$A_2 = M g \frac{h}{L} (h_1 - h_2), \text{ где } M g \frac{h}{L} \text{ – сила тяжести каната длиной } h.$$

$h_1 - h_2$ – разность высот центров тяжести $C_0 C$ и части каната $A_0 A$.

$$h_1 - h_2 = r + l + \frac{h}{2}$$

$$A_2 = \frac{h}{L} (r + l + \frac{h}{2}) M g$$

$$\sum A = M_1 g h - f_k M_2 g \frac{h}{r} + \frac{h}{L} (r + l + \frac{h}{2}) M g \quad (3)$$

Приравнявая (2) и (3), получим:

$$\frac{V^2}{2} (M_1 + M + 2M_2) = h \left[M_1 g + \frac{M g}{L} (r + l + \frac{h}{2}) - \frac{f_k}{r} M_2 g \right]$$

$$V = \sqrt{\frac{2gh \left[M_1 + \frac{M}{L} \left(r + l + \frac{h}{2} \right) - \frac{f_k}{r} M_2 \right]}{M_1 + M + 2M_2}}.$$

Задача №3

Стержень AB длиной $2a$ падает, скользя концом A по гладкому горизонтальному полу (рис.6.2). В начальный момент стержень занимал вертикальное положение и находился в покое. Определить скорость центра масс стержня в зависимости от его высоты h над полом.

Решение

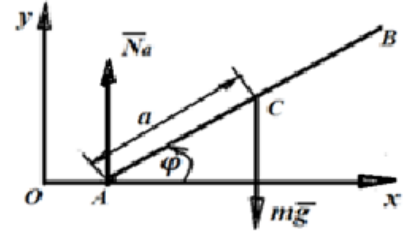


Рис. 6.2

На стержень AB действует сила тяжести $m\vec{g}$ и реакция опоры $\vec{N}_a$. Работа реакции $\vec{N}_a$ равна нулю, сила тяжести – консервативная сила, поэтому справедлив закон сохранения энергии:

$$E = T + U = E_0.$$

Потенциальная энергия $U = mgy_c$, где $y_c = a \sin \varphi$ – ордината центра масс.

Стержень совершает плоское движение. По теореме Кенига кинетическая энергия стержня равна: $T = \frac{1}{2}mV_c^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\varphi}^2$

Скорость центра масс $V_c^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2$, где $\dot{x}_c$ – абсцисса скорости центра масс $\dot{y}_c = a\dot{\varphi} \cos \varphi$ – ордината.

$$\text{Из треугольника } ACD \text{ найдём: } \cos \varphi = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{a}, \quad \sin \varphi = \frac{h}{a} \quad (1)$$

$$\text{Момент инерции стержня относительно оси } z \quad I_c = \frac{ma^2}{3}$$

Тогда кинетическая энергия стержня равна:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}_c^2 + a^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi) + \frac{ma^2}{6}\dot{\varphi}^2 = \frac{m}{2}\dot{x}_c^2 + \frac{ma^2}{6}(1 + 3\cos^2 \varphi)\dot{\varphi}^2$$

Полная энергия E равна:

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}_c^2 + \frac{ma^2}{6}(1 + 3\cos^2 \varphi)\dot{\varphi}^2 + mga \sin \varphi = E_0 \quad (2)$$

Найдём E_0 из начальных условий:

$$\text{При } t = 0, \varphi_0 = 90^\circ, \dot{\varphi}_0 = 0, \dot{x}_c = \dot{x}_{c0} \Rightarrow E_0 = \frac{m}{2}\dot{x}_{c0}^2 + mga \quad (3)$$

Запишем теорему о движении центра масс в проекции на ось x :

$$M \frac{d\dot{x}_c}{dt} = \sum F_X = 0 \Rightarrow \dot{x}_c = \dot{x}_{c0} = \text{const} \quad (4)$$

Подставим равенства (3) и (4) в уравнение (2):

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}\dot{x}_c^2 + \frac{ma^2}{6}(1 + 3\cos^2 \varphi)\dot{\varphi}^2 + mga \sin \varphi &= \frac{m}{2}\dot{x}_c^2 + mga \\ \frac{ma^2}{6}(1 + 3\cos^2 \varphi)\dot{\varphi}^2 &= mga(1 - \sin \varphi) \\ \dot{\varphi}^2 &= \frac{6g(1 - \sin \varphi)}{a(1 + 3\cos^2 \varphi)} \end{aligned} \quad (5)$$

Подставим формулы (1) в (5), получим:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{6g(1 - \frac{h}{a})}{a(1 + 3\frac{a^2 - h^2}{a^2})}} = \sqrt{\frac{6g(a - h)}{4a^2 - 3h^2}}$$

Скорость центра масс стержня в зависимости от его высоты h над полом определяется только проекцией $V_{cy} = \dot{y}_c$, т.к. $V_{cx} = \dot{x}_c = const$, не зависит от h .

$$V_{cy} = \dot{y}_c = a\dot{\varphi} \cos \varphi = a \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{a} \sqrt{\frac{6g(a-h)}{4a^2 - 3h^2}} = \sqrt{\frac{6g(a-h)(a^2 - h^2)}{4a^2 - 3h^2}} =$$

$$= (a-h) \sqrt{\frac{6g(a+h)}{4a^2 - 3h^2}}$$

Задания для решения на занятии

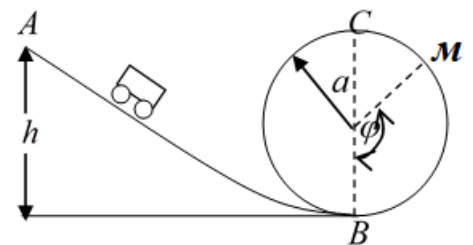
1. Вычислить мощность турбогенераторов на станции трамвайной сети, если число вагонов на линии 45, масса каждого вагона 10 т., сопротивление трения равно 0,02 веса вагона, средняя скорость вагона 3,3 м/с и потери сети 5%.

2. Когда турбоход идет со скоростью 15 узлов, турбина его развивает мощность 3800 кВт. Определить силу сопротивления воды движению турбохода зная, что коэффициент полезного действия турбины и винта 0,41 и 1 узел = 0,5144 м/с.

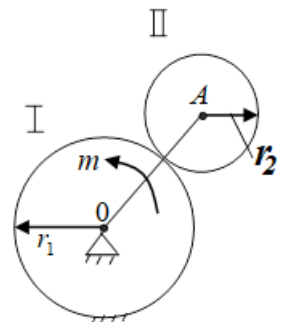
3. Груз весом P , лежащий посередине упругой балки, совершает свободные колебания. Сила упругости балки пропорциональна ее прогибу и направлена по вертикали. Проекция этой силы на вертикальную ось X равна $F_x = -C\Delta_x$, где Δ - прогиб балки в ее середине, C - коэффициент упругости, численно равен силе, которую надо приложить в середине балки для того, чтобы прогнуть ее на единицу длины. Вычислить потенциальную энергию системы, массой балки пренебречь.

4. По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом 30° , спускается без начальной скорости тяжелое тело; коэффициент трения равен 0,1. Какую скорость будет иметь тело, пройдя 2 м от начала движения?

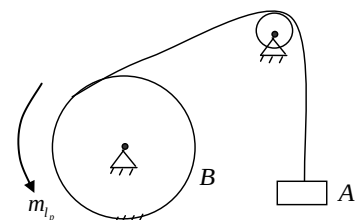
5. По рельсам, положенным по пути АВ и образующим затем петлю в виде кругового кольца ВС радиуса a , скатывается вагонетка массы M . С какой высоты h нужно пустить вагонетку без начальной скорости, чтобы она могла пройти всю окружность кольца, не отделяясь от него? Определить давление N вагонетки на кольцо в точке М, для которой $\angle MOB = \varphi$.



6. Эпициклический механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя посредством постоянного вращающего момента L , приложенного к кривошипу ОА. Определить угловую скорость кривошипа в зависимости от его угла поворота, если неподвижное колесо 1 имеет радиус R_1 , подвижное колесо 2 - радиус R_2 и массу M_1 , а кривошип ОА - массу M_2 . Колесо 2 считать однородным диском, а кривошип - однородным стержнем.

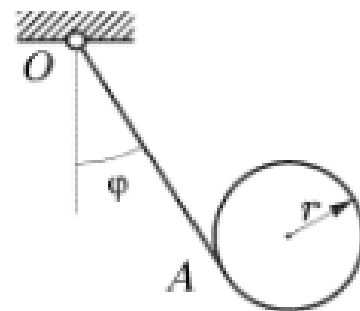


7. На рисунке изображен подъемный механизм лебедки. Груз А массы M_1 поднимается посредством троса, переброшенного через блок С и навитого на



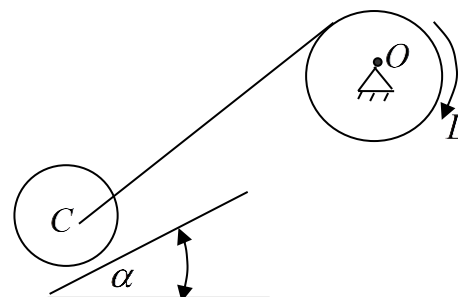
барабан В радиуса r и массы M_2 . К барабану приложен вращающий момент, который с момента включения пропорционален квадрату угла поворота φ барабана: $m_{\text{вр}} = a\varphi^2$, где a - постоянный коэффициент. Определить скорость груза А в момент, когда он поднимется на высоту h . Массу барабана В считать равномерно распределенной по его ободу. Блок С - сплошной диск массы M_3 . Массой троса пренебречь. В начальный момент барабан В вращался против хода часовой стрелки с угловой скоростью ω_0 .

8. Однородный круглый цилиндр радиуса r и массы m обмотанный нерастяжимой нитью, подвешен к неподвижной точке O . Под действием силы тяжести цилиндр опускается, разматывая нить и раскачиваясь вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O . Найти импульс p , момент импульса K_A относительно точки A и кинетическую энергию T цилиндра в зависимости от угла φ , расстояния $OA = l$ и их производных.



9. Скорость автомашины, движущейся по прямой горизонтальной дороге, возросла от V_1 до V_2 за счет увеличения мощности мотора. При этом был пройден путь S . Вычислить работу, совершенную мотором на этом перемещении автомашины, если M_1 - масса каждого из четырех колес, M_2 - масса кузова, r - радиус колес, f_k - коэффициент трения качения колес о шоссе. Колеса считать однородными сплошными дисками.

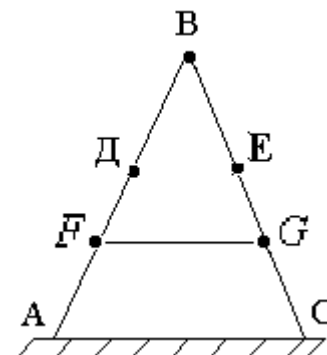
10. К барабану ворота радиуса r_1 и массы M_1 приложен постоянный вращающий момент L . К концу троса, намотанного на барабан, прикреплена ось C колеса массы M_2 . Колесо катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Какую угловую скорость приобретет барабан, сделав n оборотов? Барабан и колесо считать однородными круговыми цилиндрами. В начальный момент система находилась в покое.



Задания для решения на занятии

11. Стремянка ABC с шарниром В стоит на гладком горизонтальном полу, длина $AB=BC=2l$, центры тяжести находятся в серединах Д и Е стержней, радиус инерции каждой лестницы относительно оси, проходящей через центр тяжести, равен ρ , расстояние шарнира В от пола равно h . В некоторый момент времени стремянка начинает падать вследствие разрыва стержня FG . Пренебрегая трением в шарнире, определить:

- 1). скорость точки В в момент удара её о пол;
- 2). скорость точки В в тот момент, когда расстояние её от пола будет равно $\frac{1}{2}h$



Контрольные вопросы.

1. Какие функции называют первыми и вторыми интегралами уравнений движения?

2. Что такое законы сохранения?
3. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
4. Чему равна работа силы потенциального поля?
5. Какую величину называют полной механической энергией системы?
6. Как записывается теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме?
7. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек в интегральной форме.
8. По каким формулам определяется кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении? при вращении вокруг неподвижной оси? при вращении вокруг неподвижной точки? при плоском движении?

Список литературы

Основная: 1,2,3,4

Дополнительная: 1

Учебно-методическая: 1,2,3

4. Закон сохранения и изменения импульса

Теорема о движении центра масс.

Цели и задачи: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов закона сохранения и изменения импульса

Знания, умения и владения, приобретаемые студентами в результате освоения темы, в рамках формируемых компетенций:

- знать средства и методы областей математики, общей и теоретической физики для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности, знать законы сохранения и основные теоремы динамики (ПК-1, ОПК-2)
- уметь использовать знания высшей математики и математической физики при решении практических задач, применять на практике базовые общепрофессиональные знания теории (ПК-1, УК-1)
- владеть базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач, основными навыками изучения различных явлений и процессов, пониманием сущности и значения информации в развитии современного информационного общества (ОПК-1, ОПК-2).

Актуальность темы практического занятия

Тема дает возможность изучить закон сохранения импульса замкнутых систем, знать преобразование импульса при переходе от одной системы отсчета к другой; научиться применять закон сохранения импульса, уметь использовать теоремы о движении центра масс и Кенига для решения практических задач.

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

При рассмотрении данной темы необходимо вывести закон сохранения импульса. Этот закон является следствием однородности пространства. Сформулировать теорему об изменении импульса для незамкнутых систем. Отметить, что импульс незамкнутой механической системы не сохраняется.

В векторной форме теорему о количестве движения выразить двумя способами:

а) дифференциал количества движения материальной точки равен элементарному импульсу силы, действующей на эту точку:

$$d(m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_i dt$$

б) изменения количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени $t - t_0$ равно полному импульсу действующей силы за тот же промежуток времени:

$$m_i \vec{v}_i - m_i \vec{v}_{i0} = \int_{t_0}^t \vec{F}_i dt$$

Сформулировать теорему о движении центра масс, ввести понятие центр масс или центра инерции механической системы. Из этой теоремы следует, что центр масс механической системы движется как некоторая фиктивная материальная точка, в которой сосредоточена масса системы, которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Методические указания для выполнения работы по теме

«Закон сохранения и изменения импульса

Теорема о движении центра масс».

Решать задачи с помощью закона сохранения импульса надо в такой последовательности:

- изобразить на рисунке все внешние силы;
- выбрать систему координат;
- записать теорему об изменении главного вектора количества движения системы материальных точек в проекциях на оси координат;
- если сумма проекций импульсов внешних сил на ось оказывается равной нулю, то следует приравнять между собой проекции на эту ось главного вектора количества движения системы в начальный и конечный момент времени и из полученного уравнения определить искомую величину.

Посредством теоремы о движении центра масс можно решать как прямые, так и обратные задачи динамики. Рекомендуется такая последовательность решения задач:

1. изобразить на рисунке все внешние силы системы;
2. выбрать систему осей координат;
3. вычислить суммы проекций всех внешних сил системы на оси

декартовых координат и подставить их в уравнения:

$$M \ddot{x}_c = \sum_i \vec{F}_{ix}^{(e)}, \quad M \ddot{y}_c = \sum_i \vec{F}_{iy}^{(e)}, \quad M \ddot{z}_c = \sum_i \vec{F}_{iz}^{(e)}$$

Пример решения задачи

Задача №1

Определить промежуток времени T , необходимый для того, чтобы материальная точка массы m , движущаяся по горизонтальной прямой под действием постоянной силы F , увеличила свою начальную скорость $\vec{V}_0$ в n раз.

Решение

Примем прямую, вдоль которой движется точка, за ось ОХ. По теореме о количестве движения материальной точки: $m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \int_0^t \vec{F} dt$

Спроектируем векторное уравнение (7.21) на ось ОХ:

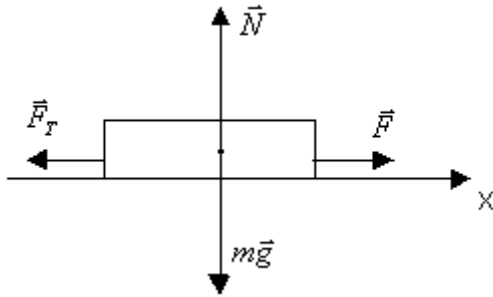
$$m(V - V_0) = \int_0^T \vec{F} dt$$

По условию $V = nV_0$, тогда $mV_0(n - 1) = FT \Rightarrow T = \frac{mV_0}{F}(n - 1)$.

Задача №2

Твёрдое тело массы m начинает двигаться из состояния покоя по шероховатой горизонтальной плоскости под действием силы $\vec{F}$ пропорциональной времени: $\vec{F} = at$, где a – постоянная. Какую скорость приобретёт тело через t секунд после начала движения, если коэффициент трения скольжения тела о горизонтальную плоскость равен f ?

Решение



Изобразим силы, приложенные к телу: $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{F} = at$ – движущая сила, $\vec{N}$ – нормальная реакция опоры, $\vec{F}_T$ – сила трения $\vec{F}_T = fmg$.

Направим ось x по горизонтали в сторону движения тела. Запишем теорему об изменении вектора импульса незамкнутой системы:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i^n \vec{F}_i^{(e)}$$

(1)

спроектируем векторное равенство (1) на ось x :

$$\frac{dP_x}{dt} = \sum_i^n F_{ix}^{(e)} = F - F_T$$

$$dP_x = (F - F_T)dt = Fdt - F_T dt \quad (2)$$

Проинтегрируем уравнение (2):

$$\int_0^V m dV = \int_0^t at dt - \int_0^t fmg dt; \Rightarrow mV = \frac{at^2}{2} - fmg t$$

$$V = gt\left(\frac{at}{2mg} - f\right).$$

Задача №3

На горизонтальной платформе массой M , установлена наклонная плоскость AB , образующая с горизонтом угол α . По этой наклонной плоскости при помощи лебёдки поднимаем груз C массой M_2 так, что расстояние AC изменяем по закону $S = \frac{1}{2}at^2$. В начальный момент система покоилась. Определить скорость движения платформы. Трением пренебречь.

Решение

Запишем теорему о движении центра масс:

$$M \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)}$$

(3)

Спроектируем векторное равенство (3) на ось x :

$$M \frac{dV_x}{dt} = \sum_i F_{ix}$$

$$\text{Т.к. } \sum_i F_{ix} = 0, \text{ то } MV_x = \text{const.} \Rightarrow MV_x = MV_{x_0} \quad (4)$$

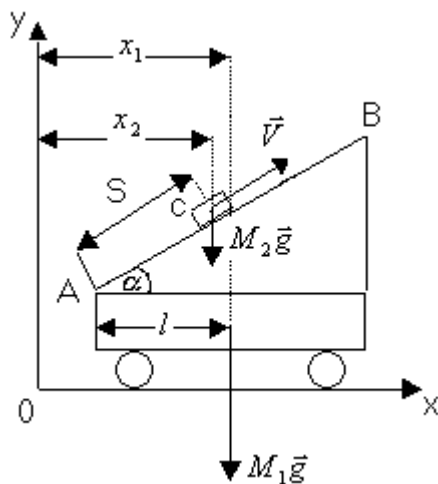
По условию задачи в начальный момент система покоилась, следовательно $V_{x_0} = 0$.

Из равенства (4) следует:

$$M_1 \frac{dx_1}{dt} + M_2 \frac{dx_2}{dt} = 0 \quad (5)$$

где x_1 и x_2 – абсциссы центров тяжести платформы и груза.

$$\text{Из чертежа находим } x_2: \quad x_2 = x_1 - l + S \cos \alpha \quad (6)$$



Дифференцируя равенство (6) по t и подставляя полученное выражение в (5), получим:

$$M_1 \frac{dx_1}{dt} + M_2 \left(\frac{dx_1}{dt} + \frac{ds}{dt} \cos \alpha \right) = 0$$

или $(M_1 + M_2) \frac{dx_1}{dt} = -M_2 \frac{ds}{dt} \cos \alpha$

отсюда $V_1 = \frac{dx_1}{dt} = -\frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{ds}{dt} \cos \alpha$

Знак “-” указывает на то, что платформа будет перемещаться влево.

Задания для решения на занятии

1. Груз спускается вниз по шероховатой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту; f - коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость. В начальный момент времени скорость груза равнялась V . Через какой промежуток времени скорость груза удвоится?

2. По шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$, спускается тяжелое тело без начальной скорости. Определить, в течении какого времени T тело пройдет путь 39,2 м., если коэффициент трения $f = 0,2$.

3. Определить, пользуясь теоремой о количестве движения, время, в течении которого тело, брошенное под углом α_0 к горизонту с начальной скоростью V_0 , достигает максимальной высоты.

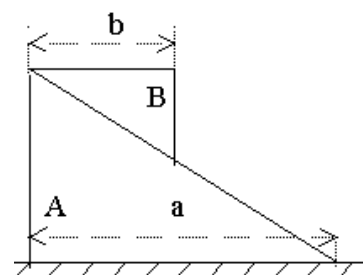
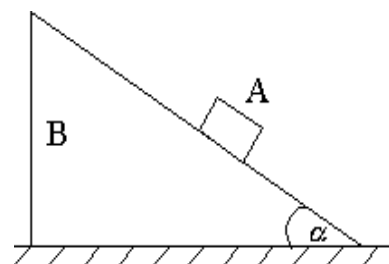
4. Точка совершает равномерное движение по окружности со скоростью $v = 0,2$ м/с, делая полный оборот за время $T = 4$ с. Найти импульс сил действующих на точку, за время одного полупериода, если масса точки $M = 5$ кг. Определить среднее значение силы.

5. Определить массу M Солнца, имея следующие данные: радиус Земли $R = 6,37 \cdot 10^6$ м, средняя плотность $5,5$ т/м³, большая полуось земной орбиты $a = 1,49 \cdot 10^{11}$ м, время обращения Земли вокруг Солнца $T = 365,25$ сут. Силу всемирного тяготения между массами, равными 1 кг, на расстояние 1 м считаем равной gR^2/m Н, где m – масса Земли; из законов Кеплера следует, что сила притяжения Земли Солнцем равна $4\pi^2 a^3 m / T^2 r^2$, где r – расстояние Земли от Солнца.

6. Ракета массы $M = 1200$ кг. вышла со скоростью $V = 7,9$ км/с на круговую орбиту искусственного спутника Земли. Затем от ее головной части отделилась лаборатория массы 200 кг. При этом скорость лаборатории возросла до величины $V_1 = 8$ км/с. Определить, после разделения ракеты, скорость V_2 ее хвостовой части. Силами сопротивления движению пренебречь.

7. Материальная система состоит из груза A весом P_A , лежащего на наклонной плоскости клина B весом P_B , расположенной под углом α к горизонту. В начальный момент система находилась в покое; затем груз A начал скользить по наклонной плоскости с относительной скоростью U . Определить скорость движения клина B . Силой трения скольжения клина о горизонтальную плоскость пренебречь.

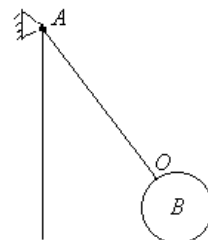
8. На однородную призму A , лежащую на горизонтальной плоскости, положена однородная призма B ; поперечные сечения призм – прямоугольные треугольники, масса призмы A втрое больше массы B . Предполагая, что призмы и горизонтальная плоскость идеально гладкие, определить длину l , на которую



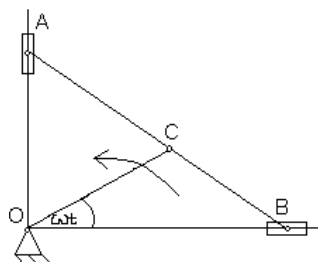
передвинется призма А, когда призма В, спускаясь по А, дойдет до горизонтальной плоскости.

9. В однородном постоянном электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$ движутся две заряженные точки. Их массы и заряды соответственно равны M_1, M_2 и e_1, e_2 . Найти положение центра масс как функцию времени, если начальные значения $\vec{r}_{co}$ и $\vec{v}_{co}$ известны.

10. Определить главный вектор количества движения маятника, состоящего из однородного стержня ОА массы M_1 , длинны $4r$ и однородного диска В массы M_2 , радиуса r , если угловая скорость маятника в данный момент равна ω .

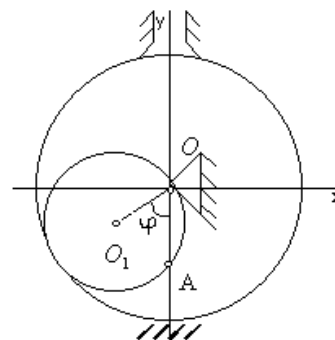


11. Определить величину и направление главного вектора количества движения механизма эллипсографа, если масса кривошипа равна M_1 , масса линейки АВ эллипсографа равна $2M_1$; масса каждой из муфт А и В равна M_2 ; даны размеры: $OC = AC = CB = L$. Центры масс кривошипа и линейки расположены в их серединах. Кривошип вращается с угловой скоростью ω .



Задания для самостоятельного решения

12. В механизме, изображенном на рисунке, движущееся колесо радиуса r имеет массу M , причем центр масс колеса находится в точке O_1 ; центр масс прямолинейного стержня АВ массы KM находится в его середине. Кривошип OO_1 вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω . Определить главный вектор количества движения системы, пренебрегая массой кривошипа.



13. Граната массы 12 кг , летевшая со скоростью 15 м/с , разорвалась в воздухе на две части. Скорость осколка массы 8 кг возросла в направлении движения до 25 м/с . Определить скорость второго осколка.

14. В тот момент, когда скорость моторного судна равна V_0 , выключается мотор, и судно движется, испытывая сопротивление воды, величина которого пропорциональна скорости, причем коэффициент пропорциональности равен μ ; масса судна равна M . Через какой промежуток времени скорость судна уменьшится вдвое?

15. Ракета с запасом топлива имеет начальную массу m_0 . Топливо сжигается с постоянным расходом, так что $dm/dt = -c$, где m – мгновенная масса ракеты. Продукты сгорания выбрасываются с постоянной относительно ракеты скоростью V_r . Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость V ракеты, движущейся вертикально вверх, в произвольный момент времени t . Ускорение силы тяжести g считать постоянным. При решении задачи воспользоваться уравнением Мещерского:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{v}_r$$

Контрольные вопросы.

1. Какая величина называется импульсом системы материальных точек?
2. Сформулируйте закон сохранения импульса замкнутой системы.

3. Как определить проекции импульса в декартовой системе координат?
4. Чему равен модуль импульса системы материальных точек?
5. Сформулируйте теорему об изменении импульса для незамкнутых систем.
6. Какими способами можно выразить в векторной форме теорему о количестве движения?
7. Что называется центром масс механической системы?
8. Чему равна скорость центра масс?
9. Чему равен импульс центра масс?
10. Сформулируйте теорему о движении центра масс?
11. Сформулируйте теорему Кенига.
12. В какой последовательности надо решать задачи с помощью закона сохранения импульса?
13. В какой последовательности надо решать задачи с помощью теоремы о движении центра масс?

Список литературы

Основная: 1,2,3,4

Дополнительная: 1

Учебно-методическая: 1,2,3

5. Закон сохранения и изменения момента импульса

Цели и задачи: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов закона сохранения и изменения момента импульса

Знания, умения и владения, приобретаемые студентами в результате освоения темы, в рамках формируемых компетенций

- знать средства и методы областей математики, общей и теоретической физики для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности, знать законы сохранения и основные теоремы динамики (ПК-1, ОПК-1)
- уметь использовать знания высшей математики и математической физики при решении практических задач, применять на практике базовые общепрофессиональные знания теории (ПК-1, ОПК-2)
- владеть базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач, основными навыками изучения различных явлений и процессов, пониманием сущности и значения информации в развитии современного информационного общества (ОПК-2, ПК-1).

Актуальность темы практического занятия

Тема дает возможность изучить закон сохранения момента импульса замкнутой системы; знать преобразование механического момента при переходе от *л*-системы к *ц*-системе; установить связь между симметрией поля и сохранением отдельных составляющих импульса, уметь применять основные формулы при решении практических задач.

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

При рассмотрении данной темы необходимо дать определение момента импульса или момента количества движения материальной точки, вывести формулы для момента импульса материальной точки относительно осей координат.

Обратить внимание, что закон сохранения момента импульса для замкнутых механических систем является следствием изотропности пространства. Показать, что в процессе движения сохраняется векторная величина:

$$\vec{L} = \sum_i [\vec{r}_i \vec{p}_i] = \text{const}$$

называемая моментом импульса (или моментом количества движения, или механическим моментом) системы. Записать формулу моментом импульса при поступательном движении твердого тела .

Сформулировать теорему об изменении механического момента для незамкнутых систем. Вывести дифференциальное уравнение вращения твердого тела .

Методические указания для выполнения работы по теме «Закон сохранения и изменения момента импульса»

Задачи с помощью теоремы об изменении момента импульса системы материальных точек относительно неподвижной оси решать в следующем порядке:

- 1.направить одну из осей координат вдоль неподвижной оси вращения;
- 2.записать теорему об изменении момента импульса системы относительно соответствующей оси;
- 3.изобразить на рисунке все внешние силы системы;
- 4.вычислить главный момент импульса относительно неподвижной оси и затем взять его производную по времени;
- 5.подставить результаты пункта 4) в 2) и затем, в зависимости от условия, решить прямую или обратную задачи динамики.

Задачи динамики о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси решать в такой последовательности:

1. направить одну из декартовых осей координат, например OZ , по оси вращения твердого тела;
2. вычислить сумму моментов всех внешних сил относительно оси вращения;
3. подставить в дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси выражение суммы моментов всех внешних сил, значение момента инерции твердого тела относительно оси вращения и решать, в зависимости от условия, прямую или обратную задачи динамики.

Пример решения задачи

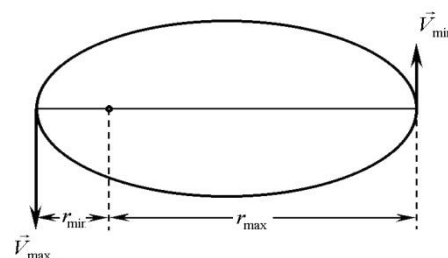
Задача №1.

Траектория наиболее удаленной от солнца планеты Плутон имеет вид эллипса, причем расстояние от Солнца до Плутона меняется от $4,46 \cdot 10^9$ км до $7,4 \cdot 10^9$ км. Определить отношение между максимальной и минимальной скоростью Плутона.

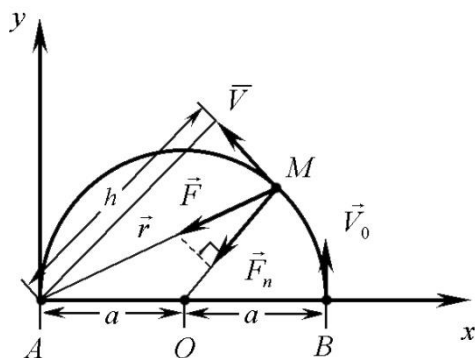
Решение.

Для замкнутой механической системы момент импульса сохраняется, следовательно

$$\frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{7,4}{4,46} = 1,66$$



Задача №2.



Точка M массы m описывает окружность радиуса a , притягиваясь точкой A этой окружности. В начальный момент точка находилась в положении B и имела скорость V_0 . Определить скорость V точки и силу притяжения $\vec{F}$ как функцию радиуса-вектора $\vec{r}$.

Решение.

Точка M движется под действием центральной силы $\vec{F}$ с центром в точке A . По теореме об изменении момента импульса, имеем:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = [\vec{r}\vec{F}] = 0$$

Следовательно $\vec{L} = \text{const} = \vec{L}_0$.

$$mVh = mV_0 2a, \quad \text{откуда } V = V_0 \frac{2a}{h}.$$

Из рисунка имеем:

$$r = 2a \cos(90 - \alpha) = 2a \sin \alpha$$

$$\text{откуда } \sin \alpha = \frac{r}{2a}$$

$$h = r \sin \alpha = \frac{r^2}{2a}, \quad \text{следовательно, } V = \frac{4a^2 V_0}{r^2}$$

Так как точка M движется по окружности радиуса a , то на нее действует сила

$$F_n = \frac{mV^2}{a}$$

$$\text{Сила притяжения } \vec{F} = \frac{F_n}{\sin \alpha} = \frac{mV^2}{a \sin \alpha} = \frac{m}{a} \frac{16a^4 V_0^2}{r^4} \frac{2a}{r} = \frac{32ma^4 V_0^2}{r^5}$$

Задача №3.

При вращении барабана 1 массой M_1 и радиусом r_1 вокруг неподвижной оси z , перпендикулярной плоскости рисунка (рис. 8.4), на боковую поверхность барабана наматывается нить. Нить приводит в движение каток 2 массой M_2 и радиусом r_2 , который катится без скольжения по наклонной плоскости вверх.

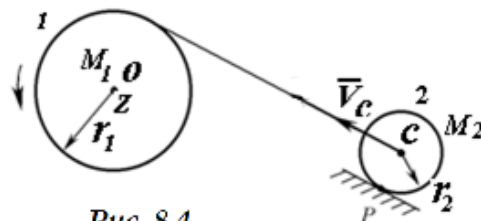


Рис. 8.4

Вычислить главный момент количества движения системы относительно оси z в зависимости от угловой скорости барабана ω_1 . Каток и барабан считать круглыми однородными цилиндрами.

Решение.

$L_z = L_{1z} + L_{2z}$ (1), где L_z, L_{1z}, L_{2z} - главные моменты количества движения системы, барабана и катка соответственно.

Барабан вращается вокруг оси OZ , поэтому $L_{1z} = I_z \omega_1$ момент инерции барабана

$$(\text{цилиндра}) \quad I_z = \frac{M_1 r_1^2}{2}, \quad \text{тогда} \quad L_{1z} = \frac{M_1 r_1^2}{2} \omega_1 \quad (2)$$

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. Разложим его на переносное поступательное движение вместе с центром масс C и относительное вращательное вокруг оси C

$$L_{2z} = L_{Cz} + L'_{2z} \quad (3)$$

$L_{Cz} = I_C \omega_2$, где $I_C = \frac{M_2 r_2^2}{2}$ - момент инерции катка, ω_2 - его угловая скорость

Мгновенный центр скоростей катка P находится в точке его касания с наклонной плоскостью. Поэтому $V_C = r_2 \omega_2 = r_1 \omega_1$,

получим
$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} \quad L_{Cz} = \frac{M_2 r_2^2}{2} \omega_1 \frac{r_1}{r_2} = \frac{M_2 r_1 r_2}{2} \omega_1 \quad (4)$$

Главный вектор количества движения катка $P_2 = M_2 V_C$. Приложим его в центре тяжести C катка. Его момент относительно оси Z

$$L'_{2z} = P_2 r_1 = M_2 r_1 r_2 \omega_2 = M_2 r_1^2 \omega_1 \quad (5)$$

Подставим (4) и (5) в формулу (3), получим:

$$L_{2z} = \frac{M_2 r_1}{2} (2r_1 + r_2) \omega_1 \quad (6)$$

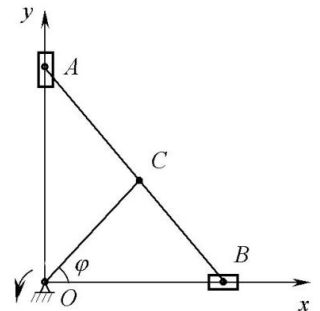
Подставим (6) и (2) в формулу (1), получим: $L_z = \frac{r_1}{2} [M_1 r_1 + M_2 (2r_1 + r_2)] \omega_1$

Задания для решения на занятии

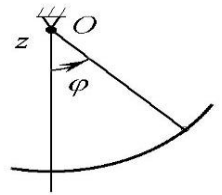
Решите задачи.

1. Механизм эллипсографа состоит из ползунов A и B весом P каждый, кривошипа OC весом P и линейки AB весом $2P$. Кривошип OC вращается вокруг неподвижной оси OZ , перпендикулярной к плоскости чертежа, с угловой скоростью ω .

Найти момент импульса этой системы относительно оси OZ , рассматривая линейку AB и кривошип OC как однородные тонкие стержни, а ползуны A и B - как материальные точки, если $OC = AC = CB = 1$.

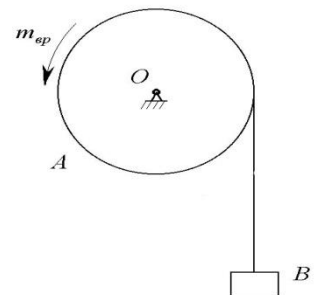


2. Найти закон и период колебаний математического маятника, длина нити которого равна l . В начальный момент маятнику, нить которого занимала отвесное положение, была сообщена посредством толчка начальная угловая скорость. φ_0 . Считать колебания маятника малым: $\sin \varphi = \varphi$.



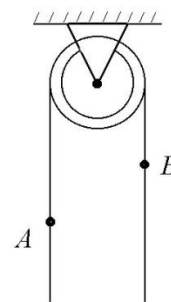
3. Для определения момента трения в цапфах на вал насажен маховик массы 500 кг; радиус инерции маховика ρ - 1,5 м. Маховику сообщена угловая скорость, соответствующая $n = 240$ об/мин.; предоставленные самому себе, он остановился через 10 мин. Определить момент трения, считая его постоянным.

4. При пуске в ход электрической лебедки к барабану A приложен вращающий момент $M_{вр} = at$, где a - постоянная. Груз B массы M_1 поднимается посредством каната, навитого на барабан A радиуса r и массы M_2 . Определить угловую скорость барабана, считая его сплошным цилиндром. В начальный момент лебедка находилась в покое.

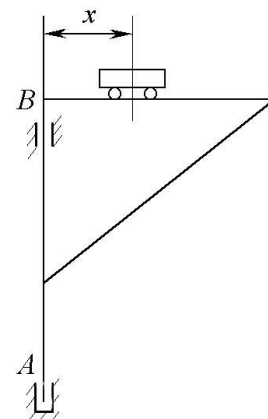


5. Круглая горизонтальная платформа может вращаться без трения вокруг неподвижной оси OZ , проходящей через центр O ; по платформе на неизменном расстоянии от оси OZ , равном r , идет с постоянной относительной скоростью U человек, масса которого равна M_1 . С какой угловой скоростью ω будет вращаться платформа вокруг оси, если массу ее M_2 можно считать равномерно распределенной по площади круга радиуса R , а в начальный момент платформа и человек имели скорость равную нулю?

6. Через блок, массой которого пренебрегаем, перекинут канат; за точку A каната ухватился человек, к точке B подвязан груз одинаковой массы с человеком. Что произойдет с грузом, если человек станет подниматься по канату со скоростью α относительно каната?



7. Тележка поворотного подъемного крана движется с постоянной скоростью V относительно стрелы. Мотор, вращающий кран, создает в период разгона постоянный момент, равный m_0 . Определить угловую скорость вращения крана ω в зависимости от расстояния X тележки до оси вращения AB , если масса тележки с грузом равна M , I - момент инерции крана (без тележки) относительно оси вращения; вращение начинается в момент, когда тележка находится на расстоянии X_0 от оси AB .



8. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси под действием приложенной к нему системы сил. Чему должен быть равен главный момент внешних сил относительно оси вращения для того, чтобы твердое тело вращалось: а) равномерно, б) равнопеременно?

9. Твердое тело начинает вращаться из состояния покоя под действием момента $m_z = m_0$. Определить угловую скорость вращения твердого тела, если его момент инерции относительно оси вращения Z равен I_z . Центр тяжести твердого тела расположен на оси вращения.

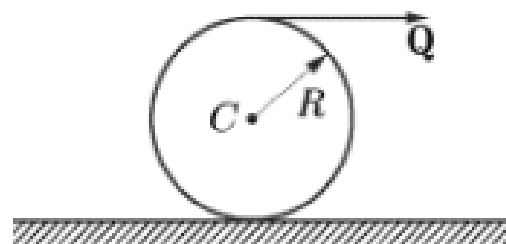
10. К твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси Z , приложен момент $m_z = a \sin kt$, где a и k - постоянные. Найти уравнение вращения твердого тела, если его момент инерции относительно оси вращения Z равен I_z . Центр тяжести твердого тела лежит на оси вращения. В начальный момент твердое тело находилось в покое.

11. Частица массой M находится в однородном поле притяжения Земли. Найти сохраняющиеся составляющие импульса и момента импульса.

Задания для самостоятельного решения

1. Частица массой M находится в центрально-симметрическом поле $U(r)$. Определить сохраняющиеся составляющие момента импульса относительно центра поля.

2. Однородный цилиндр радиуса R и веса mg катится по шероховатой горизонтальной плоскости (коэффициент трения скольжения $f = \frac{1}{8}$) под действием постоянной горизонтальной силы $Q = \frac{mg}{3}$. Найти ускорение центра C цилиндра и угловое ускорение цилиндра..



3. Однородный круговой конус поставлен основанием на гладкий горизонтальный стол. Конусу сообщается угловая скорость ω_0 так, что скорости точек его оси симметрии равны нулю. Чему будет равна угловая скорость конуса, если по его образующей от вершины до основания опустится шарик, масса которого в k раз меньше массы конуса?

Контрольные вопросы.

1. Какая величина называется моментом импульса системы материальных точек?
2. Чему равны проекции момента импульса в декартовой системе координат?
3. Как формулируется закон сохранения импульса замкнутой системы?
4. Чему равен момент импульса при поступательном движении твердого тела?
5. Чему равен момент импульса при вращении твердого тела?
6. Как определить момент импульса при плоском движении твердого тела?
7. Как формулируется теорема об изменении механического момента для незамкнутых систем?
8. Как изменяется главный вектор моментов внешних сил при переносе начала координат?
9. Чему равен момент импульса частиц твердого тела в полярных координатах?
10. Что представляет собой дифференциальное уравнение вращения твердого тела?
11. Какая аналогия между дифференциальным уравнением вращения твердого тела и теоремой о движении центра масс?
12. Для какой системы сохраняется проекция вектора импульса на некоторое направление $\vec{l}$?
13. У какой системы сохраняется проекция момента импульса на ось вращения?
14. В какой последовательности решаются задачи с помощью теоремы об изменении момента импульса системы материальных точек?
15. В какой последовательности решаются задачи динамики о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси?

Список литературы

Основная: 1,2,3,4

Дополнительная: 1

Учебно-методическая: 1,2,3

Тема №3. Одномерное движение. Движение в центральном поле

Цели и задачи: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов одномерного движения в центральном поле

Знания, умения и владения, приобретаемые студентами в результате освоения темы, в рамках формируемых компетенций:

– знать средства и методы областей математики, общей и теоретической физики для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности (ПК-1,ОПК-2)

– уметь использовать знания высшей математики и математической физики при решении практических задач, сводить интегрирование дифференциальных уравнений к квадратурам, применять на практике базовые общепрофессиональные знания теории (УК-1,ОПК-2)

– владеть базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач, основными навыками изучения различных явлений и процессов, пониманием сущности и значения информации в развитии современного информационного общества (ОПК-2,ПК-1)..

Актуальность темы практического занятия

Тема дает возможность исследовать одномерное движение с помощью графиков потенциальной и полной энергии; уметь получать общее решение задачи о поведении одномерной механической системы в центральном силовом поле; уметь сводить интегрирование дифференциальных уравнений к квадратурам, применять полученные знания на практике и в самостоятельной работе.

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

При рассмотрении данной темы необходимо ввести понятие одномерного движения. Полная энергия такого движения представляется в виде:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \text{const} \quad (1)$$

В общем случае под x и m не следует понимать декартову координату и массу частицы. Параметр m называется кинематическим параметром системы, в его роли может выступать момент инерции

Для получения аналитического решения одномерной задачи, можно исходить из первого интеграла движения. Из уравнения (1) находим:

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

откуда

$$t + t_0 = F(x, E) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

Качественное исследование одномерного движения производится с помощью графиков потенциальной и полной энергии, и выясняют следующее:

1. При каких значениях полной энергии E в поле $U(x)$ возможно движение?
2. В каких областях изменения независимого переменного возможно движение системы? Эти области называются классически разрешенными областями).
3. Какой характер имеет движение в каждой разрешенной области?

Изучается задача двух тел. Решение задачи двух тел лежит в основе небесной механики и теории свободного движения искусственных спутников, в основе классической теории столкновений и рассеяния частиц.

Задача о движении частиц m_1 и m_2 сводится к эквивалентной задаче о движении фиктивной μ – частицы.

Исследуется процесс взаимодействия частиц в ходе их сближения и разлета называемым столкновением частиц.

Методические указания для выполнения работы «Интегрирование уравнений движения»

Задачи, решаемые методами интегрирования уравнений движения, могут состоять в определении траекторий движения частицы в потенциальных полях, изменяющихся по различным законам; определении периода колебаний частицы в зависимости от энергии при одномерном движении.

Пример решения задачи

Задача №1

Найти закон движения частицы в поле $U(x) = -Ax^4$, если энергия её равна нулю.

Решение

При однородном движении $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \text{const.}$

Из этого уравнения находим: $dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{Ax^4}} = \pm \sqrt{\frac{m}{2A}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2} = \pm \sqrt{\frac{m}{2A}} \frac{1}{x} \Big|_{x_0}^x =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{m}{2A}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right) \quad \text{Отсюда: } x = \frac{x_0}{1 \pm tx_0 \sqrt{2A/m}}$$

Знак в знаменателе противоположен знаку $\dot{x}_0$. При $x_0 > 0$ и $\dot{x}_0 > 0$ частица уходит на бесконечность за время $t = \sqrt{\frac{m}{2Ax_0^2}}$.

При $x_0 < 0$ частица асимптотически приближается к точке $x = 0$.

Задача №2

Найти закон движения частицы массы m в поле $U(x) = -\frac{ax^2}{2} + \frac{bx^4}{4}$, $a, b > 0$, если в начальный момент $x_0 = -\sqrt{\frac{2a}{b}}$, а $\dot{x}_0 = 0$.

Решение

При однородном движении:

$$E = E_0 = \frac{m\dot{x}_0^2}{2} + U(x_0) = -\frac{ax_0^2}{2} + \frac{bx_0^4}{4} = -\frac{a \cdot 2a}{2b} + \frac{b \cdot 4a^2}{4b^2} = 0$$

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = 0$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{-\frac{2}{m} U(x)}$$

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{-U(x)}}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{ax^2}{2} + \frac{bx^4}{4}}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{bx^2}{4} \left(\frac{2a}{b} - x^2 \right)}} = \sqrt{\frac{2m}{b}} \int \frac{dx}{x \sqrt{\frac{2a}{b} - x^2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{2m}{b}} \sqrt{\frac{b}{2a}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{2a}{b}} + \sqrt{\frac{2a}{b} - x^2}}{x} \right| + c_1 = -\sqrt{\frac{m}{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{2a}{b}} + \sqrt{\frac{2a}{b} - x^2}}{x} \right| + c_1$$

$$\text{при } t = 0 \quad x_0 = -\sqrt{\frac{2a}{b}}$$

$$0 = -\sqrt{\frac{m}{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{2a}{b}} + \sqrt{\frac{2a}{b} - \frac{2a}{b}}}{-\sqrt{\frac{2a}{b}}} \right| + c_1 \Rightarrow c_1 = \sqrt{\frac{m}{a}} \ln |-1|$$

$$t = -\sqrt{\frac{m}{a}} \ln \frac{\sqrt{\frac{2a}{b}} + \sqrt{\frac{2a}{b} - x^2}}{x}$$

$$x \cdot e^{-t\sqrt{\frac{m}{a}}} - \sqrt{\frac{2a}{b}} = \sqrt{\frac{2a}{b} - x^2}$$

$$x^2 e^{-2t\sqrt{\frac{m}{a}}} - 2x \sqrt{\frac{2a}{b}} e^{-t\sqrt{\frac{m}{a}}} + \frac{2a}{b} = \frac{2a}{b} - x^2$$

$$x^2 (1 + e^{-2t\sqrt{\frac{m}{a}}}) - 2x \sqrt{\frac{2a}{b}} e^{-t\sqrt{\frac{m}{a}}} = 0$$

$$\chi = \frac{2\sqrt{\frac{2a}{b}}e^{-t\sqrt{\frac{m}{a}}}}{1+e^{-2t\sqrt{\frac{m}{a}}}} = \frac{2}{e^{t\sqrt{\frac{m}{a}}}+e^{-t\sqrt{\frac{m}{a}}}}\sqrt{\frac{2a}{b}} = \sqrt{\frac{2a}{b}}\frac{1}{ch(t\sqrt{\frac{m}{a}})} = \sqrt{\frac{2a}{b}}sch(t\sqrt{\frac{m}{a}}).$$

Задача №3

Найти сечение рассеяния для частиц массы m , движущихся в потенциале $U(r) = \frac{a}{r^2}$ с энергией E при $a > 0$.

Решение.

Запишем формулу (33):

$$\begin{aligned} \frac{\pi - \chi}{2} &= \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho}{r^2} - \frac{2U(r)}{mV_{\infty}^2}}}, \text{ обозначим } \chi = \frac{1}{r}, dx = -\frac{1}{r^2} dr. \\ \frac{\pi - \chi}{2} &= \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\int_{x_{max}}^{0f} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - x^2(1 + \frac{2a}{m\rho^2 V_{\infty}^2})}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}(\rho^2 + \frac{2a}{mV_{\infty}^2})}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2a}{m\rho^2 V_{\infty}^2}}} \int_{x_{max}}^{0f} \frac{dx}{\sqrt{\frac{m\rho^2 V_{\infty}^2}{\rho^2(m\rho^2 V_{\infty}^2 + 2a)} - x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2a}{m\rho^2 V_{\infty}^2}}} \arccos \frac{x}{\sqrt{\frac{mV_{\infty}^2}{m\rho^2 V_{\infty}^2 + 2a}}} \Bigg|_{r \rightarrow \infty} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2a}{m\rho^2 V_{\infty}^2}}} \arccos \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{2a}{mV_{\infty}^2}} r \rightarrow \infty, \quad \cos \rightarrow 0, \\ &- \arccos 0 = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\frac{\pi - \chi}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m\rho^2 V_{\infty}^2}{m\rho^2 V_{\infty}^2 + 2a}} \Rightarrow \pi - \chi = \pi \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2a}{m\rho^2 V_{\infty}^2}}}$$

$$\frac{\pi^2}{(\pi - \chi)^2} = 1 + \frac{2a}{m\rho^2 V_{\infty}^2}, \text{ отсюда:}$$

$$\rho^2 = \frac{2a}{mV_{\infty}^2 \chi} \frac{(\pi - \chi)^2}{(2\pi - \chi)}$$

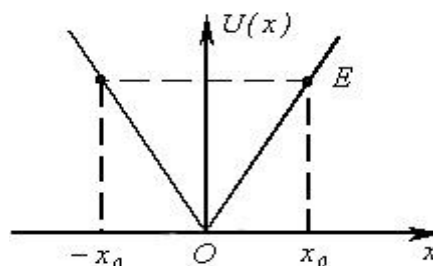
Из формулы (35):

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\Omega = \sqrt{\frac{2a}{m}} \frac{\pi - \chi}{V_{\infty} \sqrt{(2\pi - \chi)\chi}} \frac{1}{\sin \chi} \sqrt{\frac{2a}{m}} \frac{1}{V_{\infty}} \frac{d}{d\chi} \left(\frac{\pi - \chi}{\sqrt{(2\pi - \chi)\chi}} \right) d\Omega \\ &= \frac{2a}{mV_{\infty}^2} \frac{\pi - \chi}{\sqrt{\chi(2\pi - \chi)}} \frac{1}{\chi(2\pi - \chi)} \left| \frac{-\pi^2}{\sqrt{\chi(2\pi - \chi)}} \right| \frac{d\Omega}{\sin \chi} = \frac{2\pi^2 a (\pi - \chi)}{mV_{\infty}^2 \chi^2 (2\pi - \chi)^2 \sin \chi} d\Omega. \end{aligned}$$

Задания для решения на занятии

1. Найти закон движения частицы в поле $U(x) = -Ax^4$, если $E = 0$.
2. Определить закон движения частицы в поле $U(x)$; $U(x) = U_0 tg^2 \alpha x$.
3. Определить закон движения частицы в поле $U(x)$; $U(x) = -\frac{U_0}{ch^2 \alpha x}$.
4. Определить период колебаний частицы массой m в одномерной потенциальной яме.

$$U(x) = \begin{cases} -F_0 x, & x \leq 0 \\ F_0 x, & x \geq 0 \end{cases}$$



5. Определить период колебаний в зависимости от энергии при движении частицы массой m в поле с потенциальной энергией:

$$U = U_0 tg^2 \alpha x, \quad 0 \leq E \leq U.$$

6. Определить период колебаний в зависимости от энергии при движении частицы массой m в поле с потенциальной энергией:

$$U = -U_0 / ch^2 \alpha x, \quad -U_0 < E < 0.$$

7. Рассмотреть упругое столкновение частиц с массами m_1 и m_2 , если $m_1 = m_2$ (столкновение частиц с одинаковыми массами).

Задания для решения на занятии

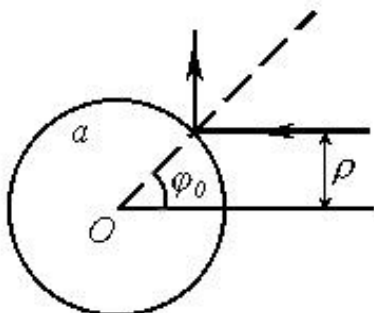
1. Рассмотреть упругое столкновение частиц с массами m_1 и m_2 , если $m_1 > m_2$ (масса налетающей частицы больше массы первоначально покоящейся частицы).

2. Рассмотреть упругое столкновение частиц с массами m_1 и m_2 , движущимися до столкновения относительно Л-системы с отличными от нуля скоростями $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$.

3. Определить закон движения частицы в поле $U(x)$

$$U(x) = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}),$$

если $E = 0, E > 0, E < 0$.



4. Определить эффективное сечение рассеяния частиц А абсолютно твердого шарика радиуса a в Ц-системе при законе взаимодействия $U = \infty$ при $r < a$ и $U = 0$ при $r > a$.

Контрольные вопросы.

1. Какое движение называется одномерным?
2. Как получить аналитическое решение одномерной задачи?
3. Какие вопросы необходимо выяснить при качественном исследовании одномерного движения?
4. Какие области называются классически разрешенными областями?

- 5.Какая область называется потенциальной ямой? Потенциальным барьером?
- 6.Как определить период колебаний в одномерной потенциальной яме?
- 7.Какую задачу называют задачей двух тел?
- 8.Как получить траектории частиц относительно центра масс?
- 9.Какими формулами описывается абсолютное движение частиц?
- 10.Что называется приведенной массой частиц?
- 11.Какая связь между скоростями реально существующих частиц и фиктивной частицей?
- 12.Чему равна внутренняя энергия системы двух частиц?
- 13.Чему равен собственный механический момент системы двух частиц?
- 14.Как описывается характер движения частиц в системах "планета - Солнце"?
- 15.Как описывается характер движения частиц в системах "протон - протон"?
- 16.Какой процесс называется столкновением частиц?
- 17.В чем суть двух задач о столкновениях частиц?
- 18.Как определяются скорости частиц в $\mathcal{C}$ -системе до столкновения?
- 19.Как определяются скорости частиц в $\mathcal{L}$ -системе после столкновения?

Список литературы

Основная: 1,2,3,4

Дополнительная: 2,3

Учебно-методическая: 1,2,3

Тема №4. Рассеяние частиц. Движение в центрально-симметричном поле.

Цели и задачи: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов рассеяния частиц и движения в центрально-симметричном поле.

Знания, умения и владения, приобретаемые студентами в результате освоения темы, в рамках формируемых компетенций:

– знать средства и методы областей математики, общей и теоретической физики для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности (ПК-1,ОПК-2)

– уметь использовать знания высшей математики и математической физики при решении практических задач, определять траектории движущегося тела, зная эксцентриситет кривой второго порядка, применять на практике базовые общепрофессиональные знания теории (УК-1,ОПК-2)

– владеть базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач, основными навыками изучения различных явлений и процессов, пониманием сущности и значения информации в развитии современного информационного общества (ОПК-2,ПК-1).

Актуальность темы практического занятия

Тема дает возможность изучить законы Кеплера, уметь определять траектории движущегося тела, зная эксцентриситет кривой второго порядка; изучить законы рассеяния частиц, научиться применять теорию к решению практических задач, сформировать навыки применения их на практике и навыки самостоятельной работы, развить логическое мышление

Актуальность темы практического занятия

При изучении данной темы необходимо рассмотреть движение легкой частицы массой m в центрально-симметричном поле, создаваемом неподвижной тяжелой частицей массой m_2 . Для описания плоского движения точки в поле $U(r)$ будем использовать полярные координаты (r, φ) , причем полюс полярной системы координат совместим с центром поля 0.

Полученные вторые интегралы движения вместе с уравнением плоскости, в которой происходит движение точки дают полное решение задачи о движении частицы в заданном центрально-симметричном поле $U(r)$.

Найдено общее уравнение траектории частицы, движущейся в центрально-симметричном поле.

При качественном исследовании движения μ -частицы в центрально-симметричном поле по графикам функции $U_{\text{эфф}}(r)$ и полной энергии E можно определить области изменения переменной r , в которых возможно движение.

Из закона сохранения энергии следует: $E - U_{\text{эфф}}(r) \geq 0$. Из этого неравенства определяются области изменения координаты r . Поворотные точки, разделяющие разрешенные и запрещенные области, определяются равенством: $E = U_{\text{эфф}}(r)$.

Важнейшим случаем центрально-симметричных полей являются поля, в которых потенциальная энергия μ -частицы обратно пропорциональна r , а соответствующие силы обратно пропорциональны r^2 .

Задачу о движении μ -частицы в кулоновском поле $U(r) = -\alpha/r$ принято называть задачей Кеплера.

Рассмотрим задачу о движении μ -частицы в кулоновском поле притяжения, в котором постоянная α положительна. Эта задача может быть задачей небесной механики (если $\alpha = Gm_1m_2$) или задачей о водородоподобном атоме (если $\alpha = Ze^2$, где Z – порядковый номер атомного ядра и e – заряд электрона).

Задача состоит в отыскании вида траекторий μ -частицы и законов ее движения. Полученное решение задачи полностью согласуется с качественным анализом движения μ -частицы в слабо сингулярном поле притяжения.

При рассмотрении эллиптического движения вычислено отношение T^2/a^3 , из полученных формул можно сделать вывод, что третий закон Кеплера является приближенным, хотя и выполняется с большой точностью.

Методические указания для выполнения работы «Движение в центрально-симметричном поле»

Задачи, решаемые в данной теме могут состоять в определении законов движения частицы в различных системах координат, времени и скорости движения, интегрированию уравнений движения; определению эксцентриситета орбиты, нахождению интегралов движения

Пример решения задачи

Задача №1

Найти траекторию и угловое расстояние между двумя последовательными прохождениями точек $r_{\min}$ частицы массы m в центральном поле

$$U(r) = -\frac{a}{r} - \frac{b}{r^2}, \quad a, b > 0 \quad \text{при условии} \quad \frac{L_0^2}{2m} > b, \quad E_0 < 0$$

Решение.

Для определения траектории частицы используем формулу

$$\varphi = \int_{r_{min}}^r \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U_{\text{эфф}}(r)]}}, \quad U_{\text{эфф}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = -\frac{a}{r} - \frac{b}{r^2} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Обозначим $x = \frac{1}{r}$, $dx = -\frac{1}{r^2} dr$, получим:

$$\begin{aligned} \varphi &= - \int_{x_{min}}^{x=1/r} \frac{L dx}{\sqrt{2mE + 2max - x^2(-2mb + L^2)}} + \varphi_0 = \varphi_0 - \\ &- \int_{x_{min}}^{x=1/r} \frac{L dx}{\sqrt{2mE + 2max - x^2(L^2 - 2mb) + \left(\frac{ma}{\sqrt{L^2 - 2mb}}\right)^2 - \left(\frac{ma}{\sqrt{L^2 - 2mb}}\right)^2}} = \\ &= \varphi_0 - \int_{x_{min}}^{x=1/r} \frac{L dx}{\sqrt{2mE + \frac{(ma)^2}{L^2 - 2mb} - \left[\left(\frac{ma}{\sqrt{L^2 - 2mb}}\right)^2 - x\sqrt{L^2 - 2mb}\right]^2}} = \\ &= \varphi_0 + \frac{L}{\sqrt{L^2 - 2mb}} \arccos \frac{-x\sqrt{L^2 - 2mb} + \frac{ma}{\sqrt{L^2 - 2mb}}}{\sqrt{2mE + \frac{(ma)^2}{L^2 - 2mb}}} \Bigg|_{x_{min}}^{x=1/r} = \end{aligned}$$

$$= \varphi_0 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2mb}{L^2}}} \arccos \frac{-\frac{L^2 - 2mb}{ma} \frac{1}{r} + 1}{\sqrt{1 + \frac{2mE(L^2 - 2mb)}{m^2 a^2}}} = \varphi_0 + \frac{1}{\gamma} \arccos \frac{1 - \frac{p}{r}}{E},$$

где $p = \frac{L^2 - 2mb}{ma} = \frac{2}{a} \left(\frac{L^2}{m} - b \right)$ – фокальный параметр орбиты

$\gamma = \sqrt{1 - \frac{2mb}{L^2}}$, т. к. $b < \frac{L_0^2}{2m} \Rightarrow \gamma$ – рациональное число

$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2mE(L^2 - 2mb)}{m^2 a^2}} = \sqrt{1 + \frac{4E}{a^2} \left(\frac{L^2}{2m} - b \right)}$ – эксцентриситет орбиты

$$(\varphi - \varphi_0)\gamma = \arccos \frac{1 - \frac{p}{r}}{\varepsilon}$$

$$\frac{p}{r} = 1 - \varepsilon \cos \gamma (\varphi - \varphi_0) \Rightarrow r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \gamma (\varphi - \varphi_0)} \quad \text{— уравнение траектории частицы}$$

Если $E < 0$, $\varepsilon < 1$, траекторией частицы является эллипс

Угловое расстояние между двумя последовательными прохождениями точек r_{min} равно

$$\gamma(\varphi - \varphi_0) = 2\pi, \quad \Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \frac{2\pi}{\gamma}$$

Задача №2.

Найти время падения частицы массы m в центр поля

$$U(r) = -\frac{b}{r^2}, \quad b > 0$$

с расстояния R , при условии $\frac{L_0^2}{2m} < b, E_0 > 0$

Решение.

Запишем второй интеграл движения

$$t = \int_R^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{эфф}}(Q)]}}, \quad \text{где } U_{\text{эфф}}(Q) = U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2} = -\frac{b}{r^2} + \frac{L_0^2}{2mr^2}$$

$$\text{Из начальных условий } E_0 = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{b}{R^2} = \frac{mV_0^2 R^2 - 2b}{2R^2} = \text{const} > 0$$

$$\begin{aligned} t &= \int_R^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{эфф}}(Q)]}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_R^0 \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + \frac{b}{E} - \frac{L_0^2}{2mE}}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \sqrt{r^2 + \frac{b}{E} - \frac{L_0^2}{2mE}} \Big|_0^R = \\ &= \sqrt{\frac{m}{2E}} \left(\sqrt{R^2 + \frac{b}{E} - \frac{L_0^2}{2mE}} - \sqrt{\frac{b}{E} - \frac{L_0^2}{2mE}} \right) \end{aligned}$$

Задания для решения на занятии

1. Частица массой m движется в центрально-симметричном поле, в котором ее потенциальная энергия имеет вид $U(r) = -5ma^2/2r^2$. Проинтегрировать уравнение движения частицы, если известно, что $r(0) = r_0; V(0) = V_0 = a\sqrt{5}/r$ и $\sin \theta = 1/\sqrt{5}$, где $\theta > \pi/2$ - угол между векторами $\vec{r}(0)$ и $\vec{V}(0)$. Определить также траекторию частицы, принимая за полярную ось прямую, соединяющую центр поля с начальным положением частицы.

2. Качественно исследовать характер движения частицы в центрально-симметричном поле при $\alpha > 0, L \neq 0, n > 2; n = 2$ (сильно сингулярное поле притяжение).

3. При каких значениях момента импульса L возможно финитное движение частицы в поле $U(r)$, если $U(r) = -\alpha e^{-\chi r} r$?

4. При каких значениях момента импульса L возможно финитное движение частицы в поле $U(r)$, если $U(r) = -Ve^{-\chi^2 r^2}$?

5. Определить возможные траектории частицы в сферической прямоугольной потенциальной яме

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 & \text{при } r < R \\ 0 & \text{при } r > R \end{cases}$$

6. Определить траекторию частицы в поле $U(r)$

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$$

Задания для решения на занятии

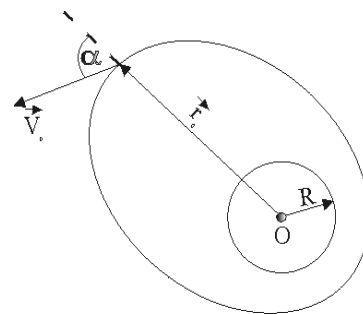
1. Определить время движения и траекторию частицы в поле $U(r) = -\alpha/r^2$, при

$$\text{а) } E > 0, \frac{L^2}{2m} > \alpha$$

б) $E > 0, \frac{L^2}{2m} > \alpha$

в) $E < 0, \frac{L^2}{2m} > \alpha$

2. Телу массой m , находящемуся на расстоянии r_0 от центра Земли, в некоторый момент времени сообщают скорость $\vec{V}_0$, составляющую угол α_0 с направлением его радиуса-вектора. Какой должна быть начальная скорость V_0 тела, чтобы оно стало искусственным спутником Земли или межпланетным кораблем?



3. Материальная точка равномерно движется по круговой орбите на высоте H над поверхностью небесного тела радиуса R под действием силы всемирного тяготения. Определить скорость движения V_1 и период обращения T материальной точки.

4. Зная период обращения T спутника вокруг Земли по эллиптической орбите и разность его апогея и перигея H , определить эксцентриситет орбиты.

Контрольные вопросы.

1. Что называется одномерным эффективным потенциалом?
2. Какой вид имеет общее уравнение траектории частицы, движущейся в центрально-симметричном поле?
3. Какие поля называются слабо сингулярными?
4. Какие поля называются сильно сингулярными?
5. Какой вид имеет условие падения на центр?
6. Какая задача называется задачей Кеплера?
7. Как находится вид траектории μ -частицы и законы ее движения?
8. Как определить фокальный параметр любого конического сечения?
9. Как определить время обращения по эллиптической орбите, т. е. период движения?
10. Сформулируйте третий закон Кеплера.

Список литературы

Основная: 1,2,3,4

Дополнительная: 2,3

Учебно-методическая: 1,2,3

Тема №5. Механика систем со связями.

Уравнение Лагранжа

Цели и задачи: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов движения систем со связями..

Знания, умения и владения, приобретаемые студентами в результате освоения темы, в рамках формируемых компетенций:

- знать средства и методы областей математики, общей и теоретической физики для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности (ПК-1, ОПК-2)
- уметь использовать получаемую информацию и представлять результаты физических исследований, использовать знания высшей математики и математической физики при решении практических задач, (ПК-1, УК-1)
- владеть базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач, основными навыками изучения различных явлений и процессов, пониманием сущности и значения информации в развитии современного информационного общества (ОПК-2, ОПК-1).

Актуальность темы практического занятия

Тема дает возможность изучить общие аналитические приемы решения динамических задач, пригодных как для свободных, так и для связанных механических систем; научиться определять обобщенные координаты и силы, находить равновесные конфигурации системы, применять полученные знания на практике.

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

При рассмотрении данной темы необходимо дать общие понятия и определения несвободной (или связанной) механической системы - системы материальных точек с наложенными на них связями, ограничивающими свободу перемещения системы. Связи также приводят к видоизменению траекторий движения всех точек системы.

Силы, заменяющие эффект действия связей на механическую систему, называются силами реакции связей. Чтобы лучше разобраться в механизме силового воздействия, необходимо связи классифицировать.

Наложение на механическую систему удерживающих связей приводит к уменьшению ее степеней свободы. Задача динамики состоит в отыскании по известным активным силам $\vec{F}_i$ и заданным уравнениям связей закона движения системы и сил реакции связей $\vec{R}_i$

Исследуются свойства голономных систем, вводится понятие виртуальных, возможных и действительных перемещений и определяются идеальные связи; а также работы активных сил $\vec{F}_i$ и сил реакций связей $\vec{R}_i$,

При изучении принципа виртуальных перемещений определяется важный класс голономных связей: идеальных и удерживающих; формулируются условия равновесия голономных механических систем; вводятся понятия обобщенных координат и обобщенных сил.

При исследовании движения связанных систем используются дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах, получившие название уравнений Лагранжа второго рода; рассматривается, какую форму могут принимать уравнения Лагранжа в зависимости от вида функции $Q_\alpha(q, \dot{q}, t)$.

Методические указания для выполнения работы

Задачи на применение уравнений Лагранжа бывают следующих типов: на составление уравнений движения системы, в определении ускорений (линейных или угловых), задачи относящиеся к малым колебаниям системы. Прежде чем решать любую

из таких задач, надо:

1. определить число степеней свободы материальной системы
2. определить обобщенные силы
3. вычислить кинетическую энергию системы материальных точек
4. найти частные производные кинетической энергии по обобщенным скоростям, а затем вычислить их производные по времени
5. найти частные производные кинетической энергии по обобщенным координатам
6. полученные результаты подставить в уравнения Лагранжа.

Пример решения задачи

Задача №1

Найти закон движения шарика B массой m вдоль трубки OA , вращающейся равномерно в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω (рис.11.1) В начальный момент шарик находился от оси O на расстоянии x_0 и его скорость вдоль трубки равна нулю. Найти момент вращения $M_{вр}$.

Решение

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем координату x , определенную относительно движения шарика, и угол поворота φ трубки

Запишем уравнение Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \end{cases} \quad (1)$$

Найдем обобщенные силы Q_x и Q_φ . Работа системы равна:

$$A = A_1 + A_2 = mgy + \int M_{вр} d\varphi = mgy + M_{вр}\varphi,$$

где A_1 - работа сил тяжести, A_2 - работа момента $M_{вр}$.

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$$

$$\delta A = \sum \frac{\partial A_i}{\partial q_i} \delta q_i = \frac{\partial A}{\partial x} \delta x + \frac{\partial A}{\partial \varphi} \delta \varphi = M_{вр} \delta \varphi$$

Отсюда, $Q_x = 0$, $Q_\varphi = M_{вр}$.

Кинетическая энергия системы: $T = T_1 + T_2$

$T_1 = \frac{mV^2}{2}$ - кинетическая энергия шарика

абсолютная скорость шарика $\vec{V} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер}$; $V_{отн} = \dot{x}$

$V_{пер} = OB\omega = x\dot{\varphi}$, направлена перпендикулярно трубки OB т. е. $\vec{V}_{отн} \perp \vec{V}_{пер}$, то

$$T_1 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2)$$

$T_2 = \frac{I_0\dot{\varphi}^2}{2}$ - кинетическая энергия трубки, I_0 - ее момент инерции.

Окончательно получаем :

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2) + \frac{I_0\dot{\varphi}^2}{2}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = mx\dot{\varphi}^2 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mx^2\dot{\varphi} + I_0\dot{\varphi}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 2mx\dot{x}\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}(mx^2 + I_0) \end{aligned}$$

Подставляем вычисленные величины в систему (1), получим,

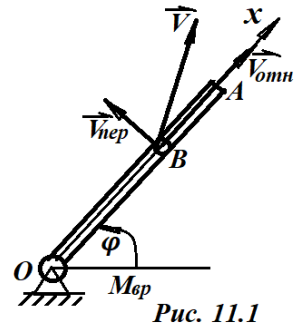


Рис. 11.1

$m\ddot{x} - m\dot{x}\dot{\varphi}^2 = 0$, учтем, что $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$, тогда $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$,
 $\dot{\varphi}(mx^2 + I_0) + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} = M_{\text{вр}}$ или $\dot{\omega}(mx^2 + I_0) + 2mx\dot{x}\omega = M_{\text{вр}}$,
 т. к. $\omega = \text{const} \Rightarrow \dot{\omega} = 0$

окончательно имеем: $2mx\dot{x}\omega = M_{\text{вр}}$ (2)

$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$ (3)

Решение (3) запишем в виде:

$$x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}, \quad \dot{x} = C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t}$$

C_1, C_2 - постоянные интегрирования, находим из начальных условий: при $t = 0$ $x = x_0$,
 $\dot{x}_0 = 0$, $x_0 = C_1 + C_2$

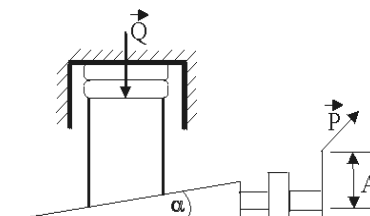
$$0 = C_1 \omega - C_2 \omega \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{x_0}{2}$$

$$x = \frac{x_0}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = x_0 \cosh \omega t. \quad \dot{x} = \frac{x_0}{2} \omega (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) = x_0 \omega \sinh \omega t$$

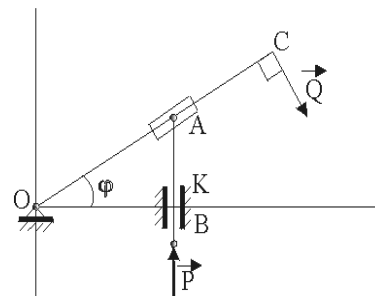
$$M_{\text{вр}} = 2m\omega^2 x x_0 \sinh \omega t = 2m\omega^2 x \sqrt{x^2 - x_0^2}$$

Задания для решения на занятии

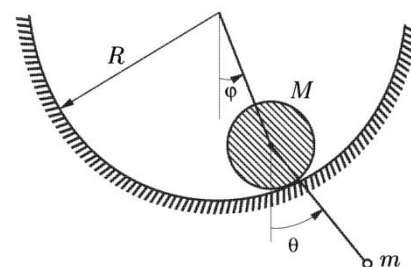
1. Определить зависимость между модулями сил $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ в клиновом процессе, если сила $\vec{P}$ приложена к концу рукоятки длины A перпендикулярно оси винта и рукоятки. Ход винта равен h . Угол при вершине клина равен α .



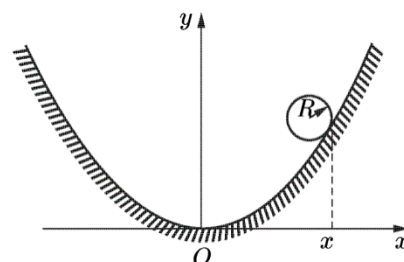
2. В кулиском механизме при качании рычага OC вокруг горизонтальной оси O ползуна A , перемещающегося вдоль рычага OC , приводит в движение стержень AB , движущийся в вертикальных направляющих K . Даны размеры: $OC = R, OK = l$. Какую силу Q надо приложить перпендикулярно кривошипу OC в точке C для того, чтобы уравновесить силу P , направленную вдоль стержня AB вверх?



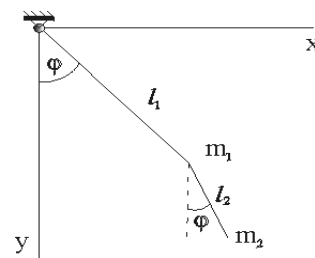
3. Однородный цилиндр массы M и радиуса r (см. рисунок) может катиться без проскальзывания внутри неподвижного полого цилиндра радиуса R . К центру подвижного цилиндра подвешен математический маятник массы m и длины l . Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.



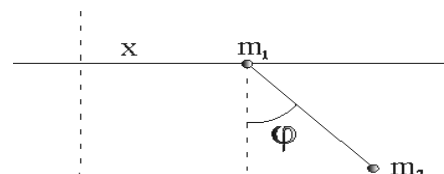
4. Однородный диск радиуса R и массы m (см. рисунок) может катиться без проскальзывания по параболе $y = ax^2$. Ось Oy вертикальна, $Ra \geq 1$. Составить функцию Лагранжа, приняв за обобщенную координату абсциссу x точки касания.



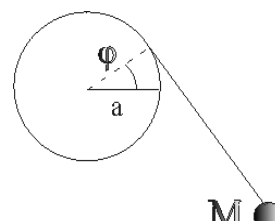
5. Определить функцию Лагранжа двойного плоского маятника, находящегося в однородном поле тяжести (ускорение силы тяжести g).



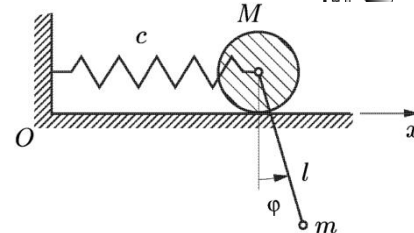
6. Плоский маятник с массой m_2 , точка подвеса которого (с массой m_1 в ней) может совершать движение по горизонтальной прямой. Найти функцию Лагранжа.



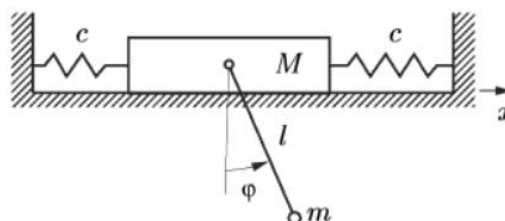
7. Составить уравнение движения маятника, состоящего из материальной точки M массы m , подвешенной на нити, накрученной на неподвижный цилиндр радиуса Q . Длина свисающей в положение равновесия части нити равна l . Массой нити пренебречь.



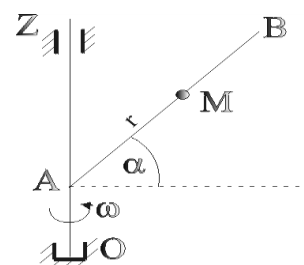
8. Составить уравнения движения маятника массы m и длины l , точка подвеса которого находится в центре диска массы M . Диск может катиться без проскальзывания по горизонтальной прямой Ox ; центр диска соединён с неподвижной стенкой пружиной жесткости c .



9. Брусок массы M соединённый с неподвижными стенками одинаковыми пружинами жесткости c , может скользить без трения вдоль горизонтальной направляющей. К центру бруска на нерастяжимой нити длины l подвешен груз массы m . Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.



10. Точка подвеса маятника, состоящего из материальной точки массы m на нерастяжимой нити длины l , движется по заданному закону $\varepsilon = \varepsilon_0(t)$ по наклонной прямой, образующей угол α с горизонтом. Составить уравнение движения маятника.

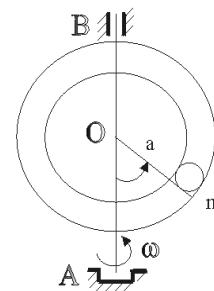


Задания для решения на занятии

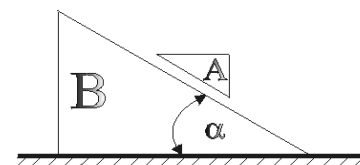
11. Материальная точка M движется под действием силы тяжести по прямолинейному стержню AB , вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси. Стержень AB образует угол α с

горизонталью. Найти закон движения точки.

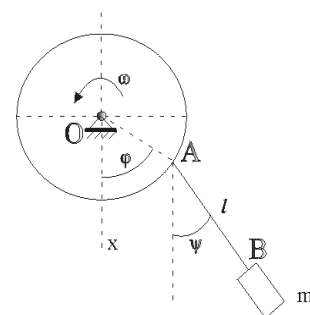
12. Материальная точка массы m движется по круговой рамке радиуса Q , которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикального диаметра AB . Составить уравнение движения точки и определить момент M , необходимый для поддержания постоянства угловой скорости.



13. Призма A массы m скользит по гадкой боковой грани призмы B массы m_1 , образующей угол α с горизонтом. Определить ускорение призмы B . Трением между призмой B и горизонтальной плоскостью пренебречь.



14. Однородный диск радиуса R , имеющий массу M , может вращаться вокруг своей горизонтальной оси O . К диску на нити AB длины l подвешена материальная точка массы m . Составить уравнения движения системы.



Контрольные вопросы.

1. Какая механическая система материальных точек называется несвободной?
2. Какие типы связей различают? Охарактеризуйте эти связи.
3. В чем состоит задача динамики?
4. Какие перемещения точек системы называются возможными?
5. Какие перемещения называются виртуальными?
6. Что понимают под вариацией функции? Как они вычисляются?
7. Что называется виртуальной работой?
8. Как формулируется и записывается условие идеальности связей?
9. Как записывается система уравнений Лагранжа первого рода?
10. Как формулируется принцип виртуальных перемещений?
11. Как записывается условие равновесия свободной частицы?
12. Что называется обобщенной силой? Как она определяется?
13. Как формулируется дифференциальный вариационный принцип Даламбера – Лагранжа?
14. Как записывается уравнение Лагранжа Второго рода в обобщенных координатах?
15. Как определяется кинетическая энергия в декартовых координатах? в цилиндрических? в сферических?
16. Что называется функцией Лагранжа?
17. Как записываются уравнения Лагранжа, если на систему действуют

диссипативные силы?

Список литературы

Основная: 1,2,3,4

Дополнительная: 2,3

Учебно-методическая: 1,2,3

Тема №6. Канонические методы

Цели и задачи: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов канонических уравнений и первых интегралов уравнения Лагранжа

Знания, умения и владения, приобретаемые студентами в результате освоения темы, в рамках формируемых компетенций:

– знать средства и методы областей математики, общей и теоретической физики для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности. (УК-1, ОПК-2)

– уметь использовать получаемую информацию и представлять результаты физических исследований, использовать знания высшей математики и математической физики при решении практических задач, (ПК-1, ОПК-2)

– владеть базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач, основными навыками изучения различных явлений и процессов, пониманием сущности и значения информации в развитии современного информационного общества (ОПК-1, ПК-1).

Актуальность темы практического занятия

Тема дает возможность изучить принцип Гамильтона-Остроградского для систем с потенциальными силами и с неконсервативными активными силами; научиться определять функцию Гамильтона, находить канонические уравнения. Научиться решать общую проблему отыскания любых первых интегралов уравнений движения; изучить свойства скобок Пуассона, уметь записывать канонические уравнения движения через скобки Пуассона; уметь применять полученные знания на практике.

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

При рассмотрении данной темы необходимо найти первые интегралы уравнения Лагранжа (законы сохранения), связанные с симметрией силового поля и наложенных на систему связей, если лагранжиан системы не зависит явно от времени, то сохраняется полная механическая энергия $E = \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - L = \text{const}$

Вводится понятие циклических координат и обобщенных импульсов. Используя понятие обобщенного импульса, можно переписать уравнение Лагранжа через его производную,

Изучая принцип Гамильтона – Остроградского вводится понятие о конфигурационном пространстве механической системы. Принцип Гамильтона – Остроградского утверждает: из множества возможных путей перехода механической системы из одной её конфигурации A в другую конфигурацию B реально осуществляется только тот путь, которому соответствует экстремальное (минимальное) значение функции действия. Для истинного движения механической системы первая вариация функционала обращается в нуль: Из принципа экстремального вытекает важное следствие: функция

Лагранжа механической системы определена с точностью до полной производной по времени от произвольной функции обобщенных координат и времени

Все рассмотренные виды уравнений движения относятся к числу дифференциальных уравнений второго порядка. Из математики известно, что систему S дифференциальных уравнений второго порядка можно заменить равносильной системой $2S$ уравнений первого порядка, которые называются каноническими уравнениями движения (или уравнениями Гамильтона). В методе Гамильтона в качестве независимых переменных рассматриваются S обобщенных координат системы $q_1, q_2, \dots, q_S$ и S ее обобщенных импульсов p_1, p_2 . Уравнения движения механической системы в переменных q и p , называют уравнениями Гамильтона или каноническими уравнениями

Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых какая-нибудь функция координат, импульсов и времени $F(q, p, t)$ является первым интегралом уравнения движения – это требование: $\frac{\partial F}{\partial t} + (H, F) = 0$

Введение скобок Пуассона дает возможность представить уравнения движения в абсолютно симметричном виде по отношению к переменным q и p .

Методические указания для выполнения работы

«Первые интегралы уравнения Лагранжа. Канонические уравнения»

Задачи на нахождение первых интегралов уравнений Лагранжа бывают следующих типов: на составление канонических уравнений движения системы, в нахождении функции Гамильтона, в определении скобок Пуассона, вычислении функции действия. Прежде чем решать любую из таких задач, надо:

1. определить число степеней свободы материальной системы
2. определить обобщенные силы
3. вычислить кинетическую энергию системы материальных точек
4. найти функцию Лагранжа
5. выразить обобщенные скорости через обобщенные импульсы
6. полученные результаты подставить в уравнения Гамильтона

Пример решения задачи

Задача №1.

Найти закон движения заряженной частицы в однородном постоянном поле H , решая уравнение Гамильтона. Векторный потенциал выбирать в виде: $A_y = Hx, A_x = A_z = 0$

Решение.

Данный векторный потенциал определяет магнитное поле H , направленное параллельно оси z .

Функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eH}{c}x\dot{y}$$

Функция Гамильтона

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$$

$$\rho_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad p_x \dot{x} = \frac{p_x^2}{m} \quad \rho_z = m\dot{z},$$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{\rho_x^2 + \rho_z^2}{2m} + \frac{\rho_y^2}{m} - \frac{\rho_y A_x}{m} - \frac{(\rho_y - A_x)^2}{m} - \frac{\rho_y x A}{m} + \frac{A^2 x^2}{m} = \\
&= \frac{\rho_x^2 + \rho_z^2}{2m} + \frac{\rho_y^2}{m} - \frac{\rho_y^2}{2m} - \frac{2\rho_y x A}{m} + \frac{\rho_y x A}{m} - \frac{A^2 x^2}{2m} + \frac{A^2 x^2}{m} = \\
&= \frac{p_x^2 + p_z^2}{2m} + \frac{\rho_y^2}{2m} - \frac{\rho_y x A}{m} + \frac{A^2 x^2}{2m} = \frac{\rho_x^2 + \rho_z^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left(\rho_y - \frac{eH}{c} x \right)^2
\end{aligned} \quad (1)$$

Так как H не зависит от y и z , имеем $p_y = \text{const}$, $p_z = \text{const}$.

Обозначим в уравнении (1) через

$$\omega = \frac{eH}{mc}, \quad x_0 = \frac{cp_y}{eH}, \quad \text{получим}$$

$$H = \frac{\rho_x^2 + \rho_z^2}{2m} + \frac{m}{2} \left(\frac{eH}{mc} \right)^2 (x - x_0)^2 = \frac{\rho_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (x - x_0)^2 + \frac{\rho_z^2}{2m} \quad (2)$$

Определим функцию Гамильтона для гармонического осциллятора, Лагранжиан которого равен

$$\begin{aligned}
L &= \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}; \quad \rho_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{\rho_x}{m} \\
H &= \rho_x \dot{x} - L = \frac{\rho_x^2}{m} - \frac{m\rho_x^2}{2m^2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{\rho_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}
\end{aligned} \quad (3)$$

Сравнивая уравнения (2) и (3), видим, что для X , P_x получится такая же функция Гамильтона, как и для гармонического осциллятора. Поэтому

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) + x_0, \quad \rho_x = -m\omega a \sin(\omega t + \varphi)$$

Для определения y и z используем уравнение $\dot{z} = \frac{\rho_z}{m}$

Откуда $y = a \sin(\omega t + \varphi) + y_0$, $z = \frac{\rho_z}{m} t + z_0$,

Частица движется по винтовой линии с осью, параллельной H Обобщенный импульс ρ_y определяет расстояние этой оси от плоскости yz .

Задача №2.

Составить каноническое уравнение движения сферического маятника массы m .

Решение

Сферический маятник имеет две степени свободы. В обобщенных координат выберем его сферические координаты θ и φ . Длину маятника обозначим через r .

Запишем функцию Лагранжа в сферических координатах:

$$L = \frac{m}{2} (r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + mgl \sin \theta$$

Функция Гамильтона $H = \sum_{\alpha=1}^S p \dot{q}_{\alpha} - L$

Обобщенные импульсы $p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$, $p_{\varphi} = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta$

Тогда функция Гамильтона имеет вид:

$$\begin{aligned}
H &= mr^2 \dot{\theta} + mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - \frac{m}{2} (r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \sin \theta = \\
&= \frac{1}{2mr} \left(\frac{p_{\varphi}^2}{\sin^2 \theta} + p_{\theta}^2 \right) - mgl \sin \theta
\end{aligned}$$

Следовательно, канонические уравнения сферического маятника:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} = \frac{p_{\varphi}}{mr^2 \sin^2 \theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} = \frac{p_{\theta}}{mr^2}$$

$$\dot{p}_{\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \quad \dot{p}_{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_{\varphi}^2 \cos \theta}{mr^2 \sin^2 \theta} + mgl \sin \theta$$

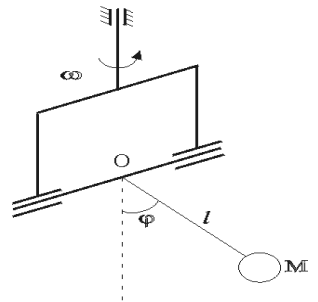
Задания для решения на занятии

1. Определить функцию Гамильтона ангармонического осциллятора, функция Лагранжа которого:

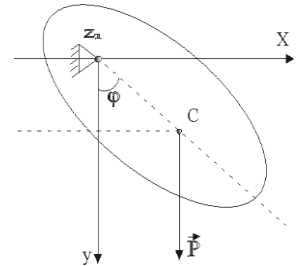
$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3 + \beta x \dot{x}^2$$

2. Найти функцию Гамильтона для одной материальной точки в декартовых, циклических и сферических координатах.
3. Составить функцию Гамильтона и канонические уравнения движения для математического маятника массы m и длины l , положение которого определяется углом ϕ отклонение его от вертикали. Проверить, что полученные уравнения эквивалентны обычному дифференциальному уравнению движения математического маятника.

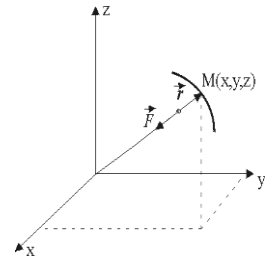
4. Материальная точка массы m подвешена с помощью стержня длины l к плоскому шарниру, горизонтальная ось которого вращается вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью ω . Составить функцию Гамильтона и уравнения движения. Массу стержня не учитывать.



5. Составить канонические уравнения движения физического маятника, если P -его вес, I_z -момент инерции относительно оси привеса Z , $OC=a$ - расстояние от точки привеса O до центра тяжести C маятника. Трением пренебречь. В качестве обобщенной координаты выбрать угол поворота φ .



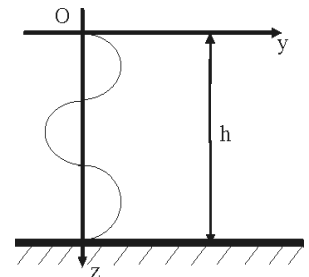
6. Составить канонические уравнения движения свободной материальной точки массы m , находящейся под действием квазиупругой силы $\vec{F} = -c\vec{r}$, где c - постоянный коэффициент. Силой сопротивления движению пренебречь. В качестве обобщенных координат выбрать декартовы координаты x, y, z .



7. Вычислить действие S по Гамильтону для случая свободного падения с высоты h материальной точки массы m . Сопоставить полученный результат с величиной действия $\tilde{S}$ при варьированном движении, описываемом уравнениями

$$\tilde{x} = 0, \tilde{y} = \varepsilon \sin \pi \sqrt{\frac{g}{2h}} t, \tilde{z} = \frac{gt^2}{2}$$

где ε - постоянный малый параметр.



Задания для самостоятельного решения

1. Вывести дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси с помощью интегрального принципа Гамильтона – Остроградского (12.16).

2. Определить скобки Пуассона, составленные из декартовых компонент импульса $\vec{p}$ и момент импульса $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$ материальной частицы.

3. Определить скобки Пуассона, составленные из декартовых компонент момента импульса.

Контрольные вопросы.

1. Как формулируется закон сохранения полной механической энергии?
2. Что называется обобщенными импульсами механической системы?
3. Какие координаты называются циклическими?
4. Как записывается функция Лагранжа для материальной точки в декартовой системе координат? в цилиндрических координатах? в сферических координатах?
5. Что называется конфигурационным пространством?
6. Как формулируется принцип Гамильтона – Остроградского?
7. Как формулируется интегральный принцип Гамильтона – Остроградского?
8. В чем суть метода Гамильтона?
9. Какая функция называется функцией Гамильтона?
10. Что называется каноническими уравнениями? Запишите их.
11. Что называется скобками Пуассона?
12. Как записать канонические уравнения движения при помощи скобок Пуассона?
13. Какие величины называют фундаментальными или основными скобками Пуассона?

Список литературы

Основная: 1,2,3,4

Дополнительная: 3,4

Учебно-методическая: 1,2,3

Тема №8. Малые колебания механических систем

Цели и задачи: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов малых колебаний механических систем.

Знания, умения и владения, приобретаемые студентами в результате освоения темы, в рамках формируемых компетенций:

– знать средства и методы областей математики, общей и теоретической физики для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности, знать основные параметры колеблющейся механической системы (ПК-1, ОПК-1)

– уметь использовать знания высшей математики и математической физики при решении практических задач, применять на практике базовые общепрофессиональные знания теории (УК-1, ОПК-2)

– владеть базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач, основными навыками изучения различных явлений и процессов, пониманием сущности и значения информации в развитии современного информационного общества (ОПК-1, ОПК-2).

Актуальность темы практического занятия

Тема дает возможность научиться составлять и решать дифференциальные уравнения, описывающие идеальные, реальные, свободные или вынужденные колебания одномерной системы; знать основные параметры колеблющейся механической системы; уметь применять теорию к решению практических задач.

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

При изучении данной темы необходимо дать определение свободным колебаниям одномерной механической системы с голономными и стационарными связями. записать функция Лагранжа, составить и решить уравнение движения системы, найти амплитуду и фазу колебаний, показать, что полная энергия системы, совершающей малые колебания, сохраняется .

При наличии внешнего поля к собственной потенциальной энергии системы $kx^2/2$ прибавляется потенциальная энергия $U^{(e)}(q, t)$, обусловленная действием этого поля. Будем считать колебания системы малыми. Уравнение движения осциллятора имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t)$$

Уравнение линейное, неоднородное. Его общее решение складывается из двух слагаемых: общего решения однородного уравнения, описывающего свободные колебания осциллятора, и частного решения неоднородного уравнения описывающее вынужденные колебания системы. При нахождении частного решения, рассмотрены случаи, когда вынуждающая сила постоянна и если вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону. Установлено, что при резонансе амплитуда вынужденных колебаний нарастает по линейному закону. Вынужденные колебания оказываются сдвинутыми по фазе относительно вынуждающей силы на угол $\pi/2$.

При исследовании свободные затухающие колебания одномерной системы, следует различать три случая: случай малого сопротивления, случай большого сопротивления и предельный случай.

При вынужденных колебаниях одномерной механической системы при наличии сил вязкого трения в системе устанавливается стационарный режим гармонических вынужденных колебаний с частотой равной частоте вынуждающей силы. Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний в окрестности частоты ν_1 носит название амплитудного резонанса

Методические указания для выполнения работы

Задачи, решаемые по теме малые колебания материальной точки, бывают следующих типов: на составление уравнений движения системы; в определении периода и частоты колебаний для систем с одной или двумя степенями свободы, совершающих свободные или вынужденные малые колебания. Прежде чем решать любую из таких задач, надо:

- 1.определить число степеней свободы материальной системы
- 2.определить обобщенные силы
3. вычислить кинетическую энергию системы материальных точек
4. найти частные производные кинетической энергии по обобщенным скоростям, а затем вычислить их производные по времени
5. найти частные производные кинетической энергии по обобщенным координатам
6. полученные результаты подставить в уравнения Лагранжа.

7. проинтегрировать дифференциальные уравнения движения, используя начальные условия движения для определения постоянных интегрирования

Пример решения задачи

Задача №1

Тело, подвешенное на двух вертикальных нитях длины l каждая, расстояние между которыми $2a$, закручивается вокруг вертикальной оси, лежащей в плоскости нитей и равноудаленной от них. Радиус инерции тела относительно оси вращения ρ . Найти период малых колебаний (рис. 13.1).

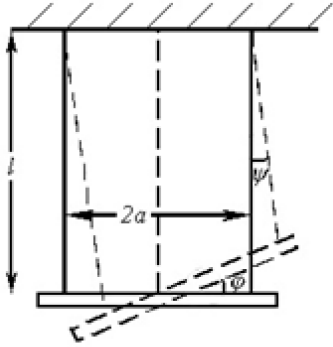


Рис. 13.1

Решение.

Обозначим малый поворот тела вокруг центральной вертикальной оси через φ , а угол, на который при этом отклонилась каждая нить через ψ . С точностью до величины первого порядка находим:

$$a\varphi = l\psi \Rightarrow \psi = \frac{a}{l}\varphi.$$

Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол φ .

Запишем уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad L = T - U$$

Кинетическая энергия тела равна:

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad I = m\rho^2, \quad \omega = \dot{\varphi}, \quad T = \frac{1}{2} m\rho^2 \dot{\varphi}^2$$

Потенциальная энергия:

$$U = -mgy = -mgl \cos \psi = -mgl \cos \frac{a}{l} \varphi.$$

$$L = \frac{1}{2} m\rho^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \frac{a}{l} \varphi \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \frac{a}{l} \sin \frac{a}{l} \varphi$$

Так как колебания системы малые, можно считать что $\sin \frac{a}{l} \varphi \approx \frac{a}{l} \varphi$

$$\text{тогда} \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{mga^2}{l} \varphi \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \ddot{\varphi}.$$

Находим дифференциальное уравнение малых колебаний бифилярного подвеса:

$$m\rho^2 \ddot{\varphi} + \frac{mga^2}{l} \varphi = 0 \quad \ddot{\varphi} + \frac{ga^2}{l\rho^2} \varphi = 0$$

Обозначим через ω_0^2 коэффициент при φ : $\omega_0^2 = \frac{ga^2}{l\rho^2}$

Тогда период колебаний равен: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \frac{\rho}{a} \sqrt{\frac{l}{g}}.$

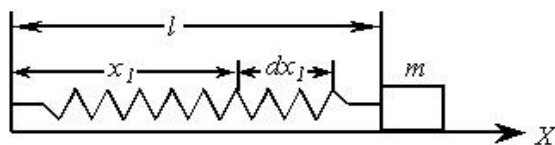
Задача № 2.

Груз массы m прикреплен к пружине, коэффициент жесткости которой s . Масса пружины m_1 . Определить частоту свободных колебаний груза, учтя массу пружины.

Решение.

Смещение x груза m примем за обобщенную координату. Тогда уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$



$$L = T - U$$

Кинетическая энергия системы определяется как сумма кинетической энергии груза и пружин

$$T = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} \int_0^l V_i^2 dm. \quad (1)$$

Определим скорость $\vec{V}_i$ и массу dm элемента пружины. Для этого выделим элемент пружины длиной dx_1 , находящейся на расстоянии x_1 от точки закрепления. Положим, что

$$\vec{V}_i = \frac{x_1}{l} \vec{V} \quad (2)$$

где $\vec{V}$ – скорость груза, прикрепленного на конце пружины. Эта формула удовлетворяет граничным условиям: при $x_1 = 0$, $\vec{V}_i = 0$, что соответствует точке закрепления; при $x_1 = l$, $\vec{V}_i = \vec{V}$, что соответствует скорости конца пружины.

$$dm = \frac{m_1}{l} dx_1 \quad (3)$$

Подставим формулы (2) и (3) в выражение (1), учтя, что $V = \dot{x}$, получим:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{x_1^2}{l^2} V^2 \frac{m_1}{l} dx_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{V_1^2 m_1}{l^3} \int_0^l x_1^2 dx_1 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m_1}{3} \right) \dot{x}^2$$

Потенциальная энергия системы: $U = \frac{1}{2} c x^2$,

$$L = T - U = \frac{1}{6} (3m + m_1) \dot{x}^2 - \frac{1}{2} c x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -cx, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{3} (3m + m_1) \ddot{x}$$

$$\frac{1}{3} (3m + m_1) \ddot{x} + cx = 0 \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{где} \quad \omega_0^2 = \frac{3c}{3m + m_1}.$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{где} \quad \omega_0^2 = \frac{3c}{3m + m_1}$$

Частота свободных колебание $\omega_0 = \sqrt{\frac{3c}{3m + m_1}}$

Задача №3.

Определить вынужденные колебания системы под влиянием силы $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$, если в начальный момент $t = 0$ $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$.

Решение.

При наличии внешней силы лагранжиан гармонического осциллятора равен:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega_0^2 x^2) + x F(t).$$

Уравнение движения осциллятора имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F_0 e^{-\alpha t} = H e^{-\alpha t} \quad (1)$$

где $H = \frac{1}{m} F_0$.

Уравнение (1) линейное, неоднородное с постоянными коэффициентами. Его решение ищем в виде $x = x_1 + x_2$, где

$x_1 = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ – общее решение однородного уравнения, A, B – постоянные интегрирования.

$x_2 = D e^{-\alpha t}$ – частное решение.

Находим, $\ddot{x}_2 = D \alpha^2 e^{-\alpha t}$ (2)

Подставим (2) в (1):

$$D(\alpha^2 + \omega_0^2) = H \Rightarrow D = \frac{H}{\alpha^2 + \omega_0^2} = \frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega_0^2)}$$

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega_0^2)} e^{-\alpha t}$$

$$\dot{x} = -A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t - \frac{F_0\alpha}{m(\alpha^2 + \omega_0^2)} e^{-\alpha t}$$

при $t = 0$ $x = x_0 = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$.

$$0 = A + \frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega_0^2)} \Rightarrow A = -\frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega_0^2)}$$

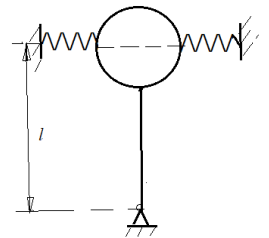
$$0 = B\omega_0 - \frac{F_0\alpha}{m(\alpha^2 + \omega_0^2)} \Rightarrow B = \frac{F_0\alpha}{m\omega_0(\alpha^2 + \omega_0^2)}$$

$$x = \frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega_0^2)} \left(e^{-\alpha t} + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \cos \omega_0 t \right).$$

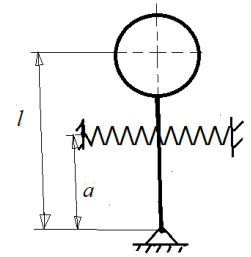
Задания для решения на занятии

1. Определить вынужденные колебания системы под влиянием постоянной силы: $F_0 = \text{const}$, если в начальный момент $t = 0$ система покоится в положении равновесия.

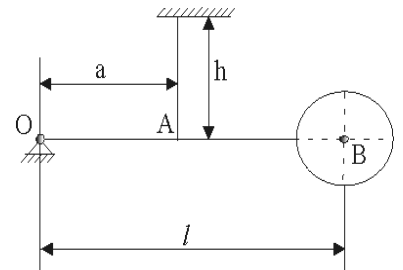
2. Определить период малых колебаний астатического маятника, употребляемого в некоторых сейсмографах для записи колебаний почвы. Маятник состоит из жесткого стержня длины l , несущего на конце массу m , зажатую между двумя горизонтальными пружинами жесткости C с закрепленными концами. Массой стержня пренебречь, и считать пружины в положении равновесия ненапряженными.



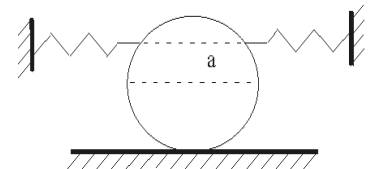
3. Маятник состоит из жесткого стержня длины l , несущего массу m на своем конце. К стержню прикреплены две пружины жесткости C на расстоянии a от его нижнего конца; противоположные концы пружин закреплены. Пренебрегая массой стержня, определить условие, при котором вертикальное положение маятника устойчивое, и вычислить период малых колебаний маятника.



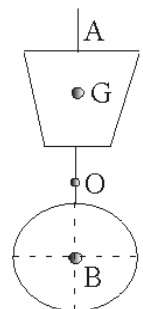
4. Жесткий стержень OB длины l может свободно качаться на шаровом шарнире около конца O и несет шарик весом Q на другом конце. Стержень удерживается в горизонтальном положении посредством нерастяжимого вертикального шнура длины h . Расстояние $OA = a$. Если шарик оттянуть перпендикулярно плоскости рисунка и затем отпустить, то система начнет колебаться. Пренебрегая массой стержня, определить период малых колебаний системы.



5. Цилиндр диаметра d и массы m может катиться без скольжения по горизонтальной плоскости. Две одинаковые пружины жесткости C прикреплены посередине его длины на расстоянии a от оси центра; противоположные концы пружин закреплены. Определить период малых колебаний цилиндра.

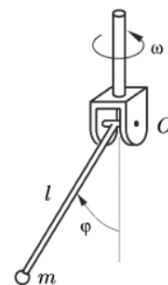


6. Определить период малых колебаний метронома, состоящего из маятника и добавочного подвижного груза G массы m . Момент инерции всей системы относительно горизонтальной оси вращения изменяется путем смещения подвижного груза G . Масса

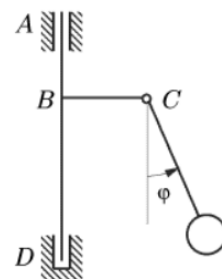


маятника M ; расстояние центра масс маятника от оси вращения O равно S_0 ; расстояние $OG=S$; момент инерции маятника относительно оси вращения равен I .

7. Конец O невесомого стержня длины l , на другом конце которого находится точечная масса m , шарнирно соединён с вертикальным валом, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω . Найти малые колебания стержня около устойчивого положения относительно равновесия.



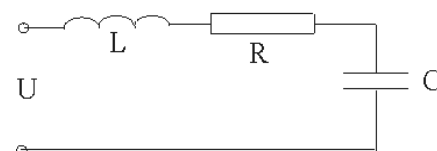
8. Математический маятник длины l совершает колебания в плоскости, вращающейся вокруг вертикальной оси. Точка подвеса маятника находится на расстоянии $l/2$ от оси вращения. Угловая скорость вращения плоскости равна $\omega = \sqrt{g/(\sqrt{3}l)}$. Найти малые колебания маятника во вращающейся системе отсчёта вблизи положения равновесия $\varphi_0 = \pi/6$.



9. Тяжёлое колечко массы m может скользить по неподвижному гладкому проволочному эллипсу, задаваемому уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ось Oy которого вертикальна. Найти малые колебания колечка около устойчивого положения равновесия.

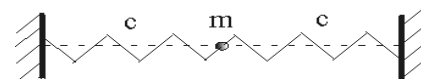
10. Задания для решения на занятии

11. Найти установившиеся колебания напряжения на конденсаторе и ток в контуре с источником напряжения $U(t)$: $U(t) = U_0 \cos \omega t$.



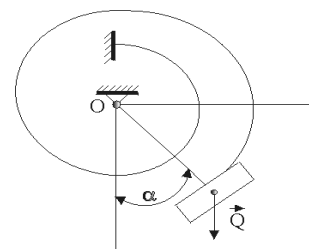
12. Найти свободные колебания системы, если частица может двигаться горизонтально.

Определить главные частоты колебания системы с двумя степенями свободы, если ее функция Лагранжа:

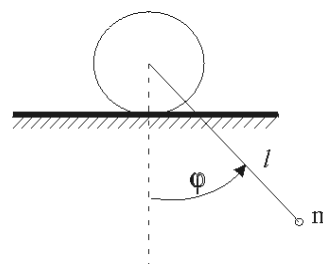


$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha xy$$

13. В вибрографе маятник веса Q удерживается под углом α к вертикали с помощью спиральной пружины жесткости C ; момент инерции маятника относительно оси вращения O равен I , расстояние центра масс маятника от оси вращения S . Определить период свободных колебаний вибрографа.



14. Диск массы M может катиться без скольжения по прямолинейному рельсу. К центру диска шарнирно прикреплен стержень длины l , на конце которого находится точечный груз массы m . Найти период малых колебаний маятника. Массой стержня пренебречь.



Контрольные вопросы.

1. Какая механическая система называется линейным гармоническим осциллятором?
2. Какая сила называется обобщенной квазиупругой силой?
3. Как определяется амплитуда и фаза свободных колебаний одномерной механической системы?
4. Как определить лагранжиан гармонического осциллятора при наличии внешнего переменного поля?
5. Какой вид имеет уравнение движения осциллятора в отсутствие сил трения?
6. Как определить закон малых колебаний осциллятора при отсутствии сил трения?
7. Как определить амплитуду вынужденных колебаний?
8. Как получить закон малых колебаний осциллятора вблизи резонанса?
9. Какие колебания называют биениями?
10. Какой вид имеет уравнение Лагранжа механической системы, на которую действуют силы вязкого трения?
11. По какому закону изменяются свободные затухающие колебания одномерной системы?
12. Как описываются свободные затухающие колебания в случае малого сопротивления?
13. Как описываются свободные затухающие колебания в случае большого сопротивления? в предельном случае?
14. Какой вид принимает уравнение Лагранжа при вынужденных колебаниях механической системы при наличии сил вязкого трения?
15. Как определить амплитуду и фазу вынужденных колебаний при наличии сил вязкого трения?

Список литературы

Основная: 1,2,3,4

Дополнительная: 2,4

Учебно-методическая: 1,2,3

Тема №9. Динамика твёрдого тела.

Цели и задачи: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов динамики твёрдого тела.

Знания, умения и владения, приобретаемые студентами в результате освоения темы, в рамках формируемых компетенций:

– знать средства и методы областей математики, общей и теоретической физики для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности (ПК-1,ОПК-1)

– уметь использовать знания высшей математики и математической физики при решении практических задач; применять на практике базовые общепрофессиональные знания теории; вычислять основные динамические характеристики твердого тела, (УК-1, ОПК-2)

– владеть базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач, основными навыками изучения различных явлений и процессов, пониманием сущности и значения информации в развитии современного информационного общества (ОПК-2,УК-1).

Актуальность темы практического занятия

Тема дает возможность научиться вычислять основные динамические характеристики твердого тела, проводить классификацию тел по их инерционным свойствам, находить главные оси инерции, применять полученные знания на практике.

Теоретическая часть

При рассмотрении данной темы необходимо дать определения импульсу твёрдого тела, кинетической энергии и тензору инерции твердого тела. Показать, что угловая скорость $\vec{\omega}$ не зависит от выбора начала координат системы K . В абсолютно твёрдом теле возможен параллельный перенос вектора $\vec{\omega}$.

Кинетическую энергию твердого тела можно представить как сумму кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения твёрдого тела T_{BP} с угловой скоростью $\vec{\omega}$ относительно оси, проходящей через его центр масс. Кинетическую энергию вращения T_{BP} можно преобразовать к виду

$$T_{BP} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} J_{\alpha\beta} \omega_{\alpha} \omega_{\beta} \quad (\alpha, \beta = x, y, z)$$

Совокупность коэффициентов $J_{\alpha, \beta}$ образует симметричную матрицу

$$J_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix},$$

называемую тензором инерции твёрдого тела. Отдельные элементы тензора называются моментами инерции.

Моментом инерции твердого тела I_z относительно оси Z называется сумма произведений масс материальных точек, из которых состоит твердое тело, на квадраты их расстояний до оси вращения, т.е.

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2.$$

Момент инерции твердого тела относительно оси характеризует распределение масс его материальных точек относительно этой оси. Момент инерции всегда положителен.

Для любой точки твёрдого тела существует такая система координат, в которой тензор инерции приводится к диагональному виду. Эти оси называются главными осями инерции, а диагональные элементы тензора – главными моментами инерции.

Если тело обладает плоскостью симметрии, то центр инерции должен лежать в этой плоскости. В ней же лежат две главные оси инерции, и третья перпендикулярна к ней.

Определили тензор инерции по отношению к системе координат с началом в центре масс. Однако в некоторых случаях проще сначала найти тензор инерции определённый по отношению к другому началу O' , а затем перейти к системе K . Такой переход можно осуществить, используя теорему Штейнера. Момент инерции твердого

тела относительно оси равен сумме его момента инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр тяжести тела C , и произведения массы твердого тела на квадрат расстояния между параллельными осями.

Методические указания для выполнения работы

Задачи, решаемые по теме динамика твердого тела, состоят в определении кинетической энергии движущейся механической системы, нахождении компонентов тензора инерции, главных моментов инерции.

Примеры решения задач

Задача №1

Найти компоненты тензора инерции в главных центральных осях для прямоугольного параллелепипеда массы M .

Дано: $x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c$

Решение

Для расчета моментов инерции прямоугольного параллелепипеда выберем систему координат так, чтобы её оси совпадали с главными центральными осями.

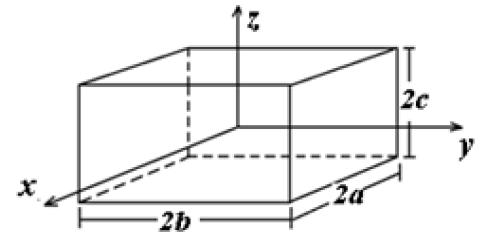


Рис. 14.3

Момент инерции относительно координатных осей определяется равенством:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int (z^2 + x^2) dm, \quad I_z = \int (x^2 + y^2) dm.$$

Разделим прямоугольный параллелепипед на малые элементы, массы которых $dm = \frac{M}{v} dv$, где $v = x \cdot y \cdot z = 8abc$ – объем параллелепипеда.

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm = \frac{M}{8abc} \left[\int_{-a}^a dx \int_{-b}^b y^2 dy \int_{-c}^c dz + \int_{-c}^c z^2 dz \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy \right] = \\ &= \frac{M}{8abc} \left[2a \cdot \frac{2b^3}{3} \cdot 2c + \frac{2c^3}{3} \cdot 2a \cdot 2b \right] = \frac{8M}{8abc} \left[\frac{ab^3c}{3} + \frac{abc^3}{3} \right] = \frac{M}{3} (b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$\text{Аналогично: } I_y = \frac{M}{3} (a^2 + c^2), \quad I_z = \frac{M}{3} (a^2 + b^2).$$

$$I_z = I_x + I_y$$

$$\text{Воспользуемся симметрией диска: } I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{MR^2}{4}$$

Задача № 2.

В вершинах квадрата со стороной $2a$ расположены массы m и M (рис. 14.5). Найти компоненты тензора инерции относительно осей x, y, z .

Решение.

Обозначим на чертеже точки 1, 2, 3, 4.

1. $m(-a, a, 0)$, 2. $M(a, a, 0)$, 3. $m(a, -a, 0)$, 4. $M(-a, -a, 0)$.

Вычислим момент инерции:

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) = ma^2 + Ma^2 + ma^2 + Ma^2 = 2a^2(m + M)$$

$$I_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) = 2a^2(m + M)$$

$$I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = 4a^2(m + M)$$

$$I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i = ma^2 - Ma^2 + ma^2 - Ma^2 = 2a^2(m - M)$$

$$I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i = 0 \quad I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i = 0$$

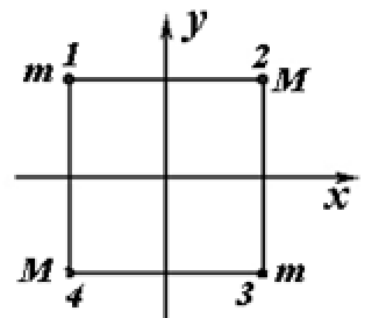


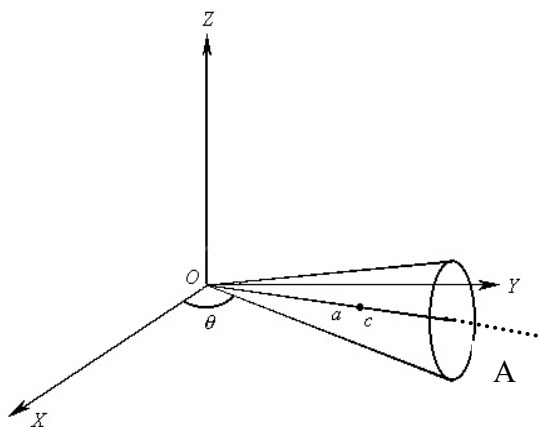
Рис. 14.5

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 2a^2(m+M) & 2a^2(m-M) & 0 \\ 2a^2(m-M) & 2a^2(m+M) & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2(m+M) \end{pmatrix}$$

Задача № 3.

Найти кинетическую энергию однородного конуса с углом раствора 2α и высотой h , катящегося без проскальзывания по плоскости, если известны моменты инерции относительно главных осей I_1, I_3 и масса конуса m .

Решение.



Обозначим угол между линией OA соприкосновения конуса с плоскостью и осью X через θ . Центр инерции находится на оси конуса и его скорость $V_c = a\dot{\theta} \cos \alpha$, где 2α — угол раствора конуса, a — расстояние центра масс от вершин. Угловая скорость вращения — скорость чистого вращения вокруг мгновенной оси вращения OA :

$$\omega = \frac{V_c}{a \sin \alpha} = \dot{\theta} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Одна из главных осей инерции совпадает с осью конуса, а другую выбираем перпендикулярно к оси конуса и линии OA . Тогда проекция вектора $\vec{\omega}$ (направленного параллельно OA) на главные оси инерции будут $\omega \sin \alpha$, $\omega \cos \alpha$. Кинетическая энергия конуса равна:

$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha + \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha + \frac{I_3}{2} \dot{\theta}^2 \frac{\cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

Центр тяжести конуса находится на оси конуса на расстоянии $a = \frac{3}{4}h$ от вершины, тогда

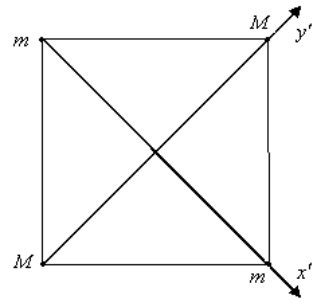
$$T = \frac{9}{32} m h^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha + \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha + \frac{I_3}{2} \dot{\theta}^2 \frac{\cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

Задания для решения на занятии

1. Найти компоненты тензора инерции в главных центральных осях для следующих однородных тел массы M :

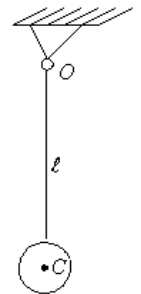
1. Куба с ребром $2a$
2. Для тонкой прямоугольной пластины со сторонами $2a, 2b$.
3. Для прямого кругового цилиндра с радиусом основания R и высотой H .
4. Для полого цилиндра с внешним радиусом R и внутренним радиусом R_1
5. Для шара радиуса R .

6. В вершинах квадрата со стороной $2a$ расположены массы m и M . Найти компоненты тензора инерции относительно осей x' , y' , совпадающих с диагоналями квадрата, и z .



Задания для самостоятельного решения

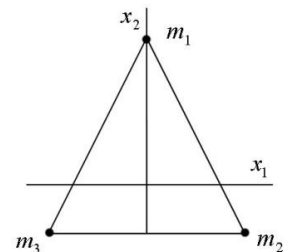
7. Маятник состоит из тонкого однородного стержня длиной ℓ и массой m_1 и круглого однородного диска радиусом R и массой m_2 . Определить момент инерции J_z маятника относительно оси его вращения OZ (ось OZ направлена перпендикулярно к плоскости рисунка).



8. Определить главные моменты инерции

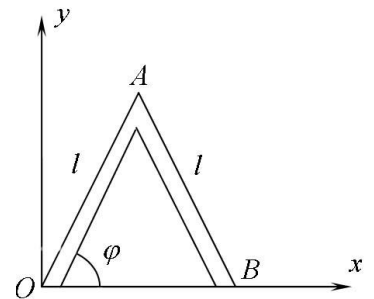
а) для двухатомной молекулы

б) для трехатомной молекулы в виде равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h .



9. Найти кинетическую энергию системы, изображенной на рисунке, если $OA = AB = l$; OA и AB тонкие однородные стержни, шарнирно скрепленные в точке A . Стержень OA вращается в плоскости рисунка вокруг точки O , а конец B

стержня AB скользит вдоль оси Ox . $\left(I = \frac{ml^2}{12} \right)$



Контрольные вопросы.

1. Что называется абсолютно твердым телом?
2. Как описать пространственное положение твёрдого тела?
3. Как влияет выбор начала системы отсчёта на вывод теоремы сложения скоростей?
4. Как определить направления мгновенной оси вращения?
5. Чему равна кинетическая энергия твердого тела?
6. Что такое тензор инерции?
7. Как определить главные моменты инерции?
8. Как определить главные моменты инерции тела обладающего плоскостью симметрии?
9. Чему равны главные моменты инерции ротатора?
10. Как записывается теорема Штейнера?

Список литературы

Основная: 1,2,3,4

Дополнительная: 3,8

Учебно-методическая: 1,2,3

Тема 10. Движение относительно неинерциальных систем отсчета.

Цели и задачи: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов движение относительно неинерциальных систем отсчета

Знания, умения и владения, приобретаемые студентами в результате освоения темы, в рамках формируемых компетенций:

- знать средства и методы областей математики, теоретической и математической физики для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности (ПК-1,УК-1)
- уметь использовать знания высшей математики и математической физики при решении практических задач, применять на практике базовые общепрофессиональные знания теории (ПК-1,ОПК-2)
- владеть базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач, основными навыками изучения различных явлений и процессов, пониманием сущности и значения информации в развитии современного информационного общества (ОПК-2, ПК-1).

Актуальность темы практического занятия

Тема дает возможность научиться производить преобразование функции Лагранжа к новым переменным, характеризующим движение в НИСО; находить уравнения движения частицы относительно НИСО; находить направление сил инерции; изучить теоремы об изменении импульса, механического момента и кинетической энергии относительно произвольной НИСО; применять теорию к решению практических задач.

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

При рассмотрении данной темы необходимо найти уравнения движения механической системы относительно неинерциальных систем отсчета (НИСО).. При этом можно исходить из уравнений Ньютона, которые содержат массы и ускорения точек, а также силы, действующие на них со стороны других тел

Из теоремы сложения ускорений можно получить уравнение точки относительно произвольной неинерциальной системы отсчета можно представить в виде:

$$m\vec{W}' = \vec{F} + \vec{J}^{(n)} + \vec{J}^{(k)}$$

Вектор $\vec{J}^{(n)}$ называют силой инерции переносного движения точки, которая складывается из силы инерции переносного поступательного движения $-m\vec{W}_0'$ и силы инерции $-m[\vec{\omega}\vec{r}'] - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]$ от ее переносного вращательного движения. Составляющую $\vec{J}^{(ц.б)} = -m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]$ называют центробежной силой инерции.

Вектор $\vec{J}^{(k)}$ называют силой инерции Кориолиса. Кориолисова сила инерции перпендикулярна плоскости векторов $\vec{V}'$ и $\vec{\omega}$.

Методические указания для выполнения работы

«Движение относительно неинерциальных систем отсчета»

Задачи, решаемые методами неинерциальных систем отсчета, могут состоять в определении условия относительного равновесия системы, в определении ускорения точек системы. Прежде чем решать любую из таких задач, надо:

1. выбрать систему координат
2. изобразить на рисунке активные силы, силы реакции связей, фиктивные силы инерции

материальных точек системы.

3. составить уравнения «равновесия» для каждой из материальных точек
4. решив составленную систему уравнений, определить искомые величины

Пример решения задачи

Задача №1.

Состояние невесомости. Рассмотрим поведение тела, находящегося в спутнике, который движется под действием притяжения Земли вне ее атмосферы с выключенным двигателем. Допустим, что спутник изменит ориентацию относительно ИСО с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Определить силу $\vec{N}$, с которой стенка спутника действует на материальную точку, соприкасаемую со стенкой.

Решение.

Уравнение движения материальной точки относительно ИИСО имеет вид:

$$m\vec{W} = \vec{F} + \vec{N} - m\vec{W}_c - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']] - 2m[\vec{\omega}\vec{V}'], \quad (5)$$

где $\vec{F}$ – сила притяжения точки Землей $F = -\frac{Gmm_3}{r^3}\vec{r} \approx -\frac{Gmm_3}{R_c^3}\vec{R}_c = m\vec{W}_c$

$\vec{W}_c$ – ускорение центра масс корабля относительно Земли.

Силы $\vec{F}$ и $-m\vec{W}_c$ компенсируют друг друга, поскольку размеры спутника исчезающе малы по сравнению с расстоянием от центра Земли до любой точки спутника ($\vec{r}' \ll \vec{R}_c$). Поэтому уравнение (5) с большой степенью точности можно переписать в виде:

$$m\vec{W} = \vec{N} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']] - 2m[\vec{\omega}\vec{V}']$$

Если материальная точка, соприкасающаяся со стенкой спутника, находится в покое, то сила $\vec{N}$, с которой стенка спутника действует на материальную точку равна:

$$\vec{N} = m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]$$

Эта сила и является весом точки во вращающемся спутнике. Если $\vec{r}' \parallel \vec{\omega}$, то $\vec{N} = 0$, т. е. Точка невесома. Если $\vec{\omega} = 0$, то в любом месте спутника точка невесома.

Задача №2

Точка массы m движется по абсолютно гладкому стержню (рис. 15.1), который равномерно вращается вокруг вертикальной оси OA с постоянной угловой скоростью ω , описывая круглый конус с углом раствора 2α . Определить закон движения точки по стержню, если в начальный момент она находилась на расстоянии l от точки O и имела относительную скорость, равную нулю.

Решение.

Запишем уравнение движения материальной точки относительно ИИСО

$$m\vec{W}' = \vec{F} + \vec{J}^{(n)} + \vec{J}^{(k)} \quad (1)$$

$\vec{N}$ – реакция стержня, направлена перпендикулярно образующей конуса (стержню).

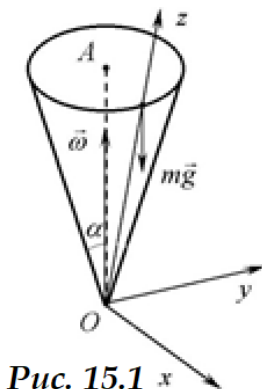


Рис. 15.1

$\vec{J}^{(n)}$ и $\vec{J}^{(k)}$ - силы инерции.

Направим ось Z по стержню, а оси X и Y расположим в плоскости XOY перпендикулярной оси Z . $\vec{F} = m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Реакция $\vec{N}$ направлена перпендикулярно оси Z .

Так как переносное движение стержня вращательное с постоянной угловой скоростью

$$\vec{J}^{(n)} = -m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]$$

Модуль переносной силы инерции равен $J^{(n)} = m\omega^2 r' = m\omega^2 z \sin \alpha$. Эта сила направлена перпендикулярно оси вращения.

Ускорение Кориолиса $\vec{W}^{(k)} = 2[\vec{\omega}\vec{V}']$ точки m направлено по оси Y и его модуль $W^{(k)} = 2\omega V' \sin \alpha$

Спроектируем векторное равенство (1) на ось Z :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg \cos \alpha + J^{(n)} \sin \alpha = -mg \cos \alpha + m\omega^2 z \sin^2 \alpha$$

Это равенство не содержит неизвестных реакций и, следовательно, определяет закон движения точки по оси Z . Запишем это уравнение в виде:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \omega^2 z \sin^2 \alpha = -g \cos \alpha.$$

Обозначим $\omega^2 \sin^2 \alpha = k^2$ (1) тогда $\ddot{z} - k^2 z = -g \cos \alpha$ (2)

Дифференциальные уравнения (2) неоднородные, его общее решение имеет вид: $z = z_1 + z_2$, где z_1 — частное решение неоднородного уравнения, z_2 — общее решение однородного уравнения:

$$z_1 = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}, \quad z_2 = \frac{g \cos \alpha}{k^2}$$

$$z = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} + \frac{g \cos \alpha}{k^2}; \quad \dot{z} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt}$$

Из начальных условий найдем постоянные интегрирования. При $t = 0$, $z = l$, $\dot{z} = 0$.
 $l - \frac{g \cos \alpha}{k^2} = C_1 + C_2 \quad 0 = C_1 k - C_2 k \Rightarrow C_1 = C_2$

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \left(l - \frac{g \cos \alpha}{k^2} \right), \text{ учитывая (1), получим: } C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \left(l - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \right),$$

$$z = \frac{1}{2} \left(l - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \right) (e^{t\omega \sin \alpha} + e^{-t\omega \sin \alpha}) + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} + \left(l - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \right) ch(\omega t \sin \alpha)$$

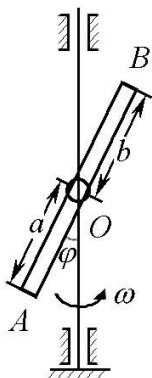
Это соотношение представляет искомый закон движения точки.

Задания для решения на занятии

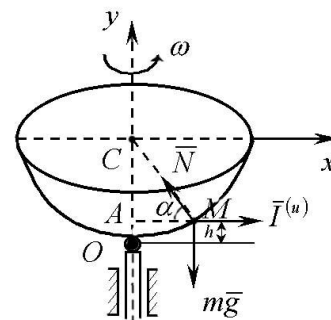
1. Автомобиль массы M движется прямолинейно с ускорением w . Определить вертикальное давление передних и задних колес автомобиля, если его центр масс C находится на высоте h от поверхности грунта. Расстояние передней и задней осей автомобиля от вертикали, проходящей через центр масс, соответственно равны a и b . Массами колес пренебречь. Как должен двигаться автомобиль, чтобы давления передних и задних колес оказались равными?

2. Полый полушар радиусом $R = 2\text{ м}$ равномерно вращается вокруг своей вертикальной оси симметрии, делая 30 об/мин. Внутри полушара находится шарик

весом $P = 2H$. Найти высоту h , соответствующую положению равновесия шарика относительно полушара и реакцию $\vec{N}$ полушара в этом положении.



3. Тонкий однородный прямолинейный стержень AB шарнирно соединен с вертикальным валом в точке O . Вал вращается с постоянной угловой скоростью ω . Определить угол отклонения φ стержня от вертикали, если $AB = a$ $OB = b$. При решении задачи применить теорему об изменении момента импульса механической системы относительно произвольной НИСО.



4. Найти зависимость ускорения свободного падения от географической широты.

5. Найти первое приближение отклонения свободного падения тела с высоты H ($H \ll R$) от вертикали.

Контрольные вопросы

1. Какой явный вид уравнений движения материальной точки относительно произвольной НИСО?
2. Записать уравнения движения в НИСО в форме закона Ньютона. Указать все виды сил инерции и причины их появления.
3. В чём суть эквивалентности?
4. Как записывается теорема об изменении вектора импульса относительно произвольной НИСО?
5. Как записывается теорема об изменении момента импульса?
6. Как записывается теорема об изменении кинетической энергии относительно произвольной НИСО?
7. При каких условиях у механической системы, движущейся в НИСО, может сохраниться полная энергия E' и из чего она складывается?

Список литературы

Основная: 1,2,3,4

Дополнительная: 1,5

Учебно-методическая: 1,2,3

Тема №11. Основы механики сплошной среды

Цели и задачи: формирование общенаучной методологической компетенции, предполагающей знание современных концептуальных подходов к исследованию вопросов основы механики сплошной среды

Знания, умения и владения, приобретаемые студентами в результате освоения темы, в рамках формируемых компетенций

– знать средства и методы областей математики, общей и теоретической физики для решения практических задач, использовать их в профессиональной и познавательной деятельности (ПК-1,ОПК-3)

– уметь использовать знания высшей математики и математической физики при решении практических задач, применять на практике базовые общепрофессиональные знания теории (ОПК-1,ПК-2)

– владеть базовыми теоретическими знаниями для решения профессиональных задач, основными навыками изучения различных явлений и процессов, пониманием сущности и значения информации в развитии современного информационного общества (ОПК-2,УК-1).

Актуальность темы практического занятия

Тема дает возможность выяснить точки зрения Лагранжа и Эйлера на изучение движения сплошной среды; изучить законы, определяющие движения сплошной среды; уметь применять гидродинамические уравнения к решению задач

Теоретико-методическое введение и коллективные задания

При рассмотрении данной темы необходимо сформулировать основные гипотезы и методы механики сплошной среды (МСС). В ней рассматриваются движения таких материальных тел, которые заполняют пространство непрерывно, сплошным образом, и расстояние между точками которых во время движения меняются

МСС включает теорию упругости, пластичности, ползучести, гидро,- аэро- газовую динамику с теорией плазмы, динамику сред с неравновесными процессами и фазовыми переходами. Необходимо дать понятия метрического пространства, понятие времени связано с опытом и необходимо в механике.

Точка зрения Лагранжа на изучение движения сплошной среды опирается на описание истории движения точки сплошной среды в отдельности. Такое описание на практике оказывается слишком подробным и сложным, однако оно всегда подразумевается при формулировке физических законов. Пусть наше внимание концентрируется на данной точке пространства, в которую приходят разные частицы сплошной среды. Это и составляет сущность точки зрения Эйлера на изучение движения сплошной среды.

Фундаментальным законом механики Ньютона является закон сохранения массы m любого индивидуального объема. Этот закон можно рассматривать как опытно установленный закон природы.

Получены уравнения неразрывности или сохранения массы в переменных Эйлера, уравнения движения сплошных сред, закон Паскаля. Второй закон Ньютона для материального континуума формулируется: изменение количества движения любого индивидуального объема материального континуума равно импульсу внешних сил (объемных и поверхностных), действующих на этот индивидуальный объем

Рассматривается уравнение движения жидкости, установленное впервые Эйлером, которое является одним из основных уравнений МСС.

Методические указания для выполнения работы

«Основы механики сплошной среды»

Задачи, решаемые методами кинематики точки, могут состоять в определении траектории, скорости и ускорения точки, в отыскании времени, в течение которого точка проходит какой-либо путь, или пути, проходимого точкой за определенный промежуток времени, и т.п. . Прежде чем решать любую из таких задач, надо:

1. Ввести пространственную систему координат и координаты Лагранжа частиц и найти закон движения в следующих случаях:

а) твердое тело движется поступательно со скоростью, постоянной по направлению и имеющей постоянную величину v ;

б) твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω .

Примеры решения задачи

Задача №1

Ввести пространственную систему координат и координаты Лагранжа частиц и найти закон движения в следующих случаях:

а) твердое тело движется поступательно со скоростью, постоянной по направлению и имеющей постоянную величину v ;

б) твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω .

Решение:

Введем в пространстве декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) . В качестве координат Лагранжа частицы (x_1, x_2, x_3) возьмем координаты (ξ_1, ξ_2, ξ_3) точки пространства, в которой частица находилась в момент $t = 0$.

а) Пусть ось x_1 направлена по (имеющему постоянное направление) вектору скорости. Движение состоит в переносе тела в направлении оси x_1 на расстояние vt . Поэтому закон движения имеет вид

$$x_1 = vt + \xi_1, \quad x_2 = \xi_2, \quad x_3 = \xi_3$$

б) Пусть ось x_3 направлена по неподвижной в пространстве оси вращения. Движение состоит в повороте вокруг оси на угол ωt . Преобразование вектора начального положения частицы в вектор ее положения в момент t осуществляется при таком повороте ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

Поэтому закон движения имеет вид

$$x_1 = \xi_1 \cos \omega t - \xi_2 \sin \omega t, \quad x_2 = \xi_1 \sin \omega t + \xi_2 \cos \omega t, \quad x_3 = \xi_3$$

Другое решение. Соответствие $F \leftrightarrow (a_1, a_2, a_3)$ векторов евклидова пространства и троек чисел не обязательно устанавливать в виде

$$a_1 = x_1, \quad a_2 = x_2, \quad a_3 = x_3$$

где (x_1, x_2, x_3) — компоненты $\mathbf{r}$ в декартовой системе координат.

Например, можно использовать цилиндрические координаты

$$x_1 = R, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z,$$

где R — расстояние от конца вектора $\mathbf{r}$ до оси x_3 , φ — угол между плоскостью, проходящей через $\mathbf{r}$ и ось x_3 , и плоскостью $x_1 O x_3$, $z = x_3$. При вращении вокруг оси x_3 цилиндрические координаты R и z частицы, очевидно, не меняются, а координата φ изменяется за время t на величину ωt , если угловая скорость постоянна. Поэтому закон движения в цилиндрических координатах имеет вид

$$R = R_0, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0, \quad z = z_0,$$

здесь (R_0, φ_0, z_0) — лагранжевы координаты частицы.

Таким образом, декартова система координат не всегда самая удобная

Задача №2

Используя соглашение о суммировании, записать в сокращенном виде формулу для вычисления индивидуальной производной dA/dt в эйлеровом описании.

Решение:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v_i \frac{\partial A(x, t)}{\partial x_i}.$$

Задача №3

Вывести уравнение неразрывности в декартовой системе координат из закона сохранения массы индивидуального объема, раскрыв выражения $d\rho/dt$ и $\text{div } \mathbf{v}$.

Решение:

Если (x, y, z) – декартовы координаты, то уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0$$

Задания для решения на занятии

1. Для поступательных движений твердого тела указать общий вид поля скорости в лагранжевом описании и общий вид закона движения.

2. Движение среды происходит по закону

$$x_1 = \xi_1 \left(1 + \frac{t}{r}\right), \quad x_2 = \xi_2 \left(1 + 2\frac{t}{r}\right), \quad x_3 = \xi_3 \left(1 + \frac{t^2}{r^2}\right)$$

$r = \text{const.}$

а) Найти поля скорости и ускорения в лагранжевом описании.

б) Где находится в момент $t = 3r$ частица, которая в момент $t = \tau$ находилась в точке пространства с координатами (a, b, c) ?

3. Вывести уравнение неразрывности в переменных Эйлера в цилиндрической системе координат (8.7 задача)

4. Написать уравнения одномерного течения идеальной жидкости в переменных a, t , где a есть x -координата частиц жидкости в некоторый момент времени $t = t_0$ (так называемая переменная Лагранжа)

Контрольные вопросы

1. Что изучает предмет механики сплошной среды (МСС)?
2. Какие существуют методы изучения МСС?
3. Какие основные гипотезы МСС?
4. Какое пространство называется метрическим?
5. Какое пространство называют евклидовым?
6. Что такое "абсолютное время"?
7. Что такое прямолинейные и криволинейные системы координат?
8. Как формулируется закон движения континуума?
9. Что называется лагранжевыми переменными?
10. Что называется системой отсчета наблюдателя, сопутствующей системой?
11. В чем суть точки зрения Эйлера при описании движения СС?
12. В чем заключается точка зрения Лагранжа при описании движения СС?

Список литературы

Основная: 1,2,3

Дополнительная: 3, 4
Учебно-методическая: 1,2,3

Список литературы

Основная.

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Т.1. - М.: Физматлит, 2007г.
2. Кульгина Л.М., Закинян А.Р., Дорожко Д.С. Теоретическая механика. Механика сплошных сред: Учебное пособие. – Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2020. - 249 с.
- 3...Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. – Лань, 2009г.
4. Колесникова К.С. Курс теоретической механики. – М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2005г.
5. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: [учебное пособие] – СПб. – М. – Краснодар: Лань, 2010.- 448 с.

Дополнительная

1. Жирнов Н.И. Классическая механика. – М.: Просвещение, 1980г.
2. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Т.1. – М.:1991.
3. Кульгина Л.М., Теоретическая механика. Механика сплошных сред: учебно пособие. – Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2014. – 193 с.
- 4..Голдстейн Г Классическая механика. – РХД, 2011 г.
- 5..Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах : учеб. пособие. Т. 1 : Статика и кинематика / Бать Моисей Иосифович, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. - 11-е изд., стер. - СПб. - М. - Краснодар : Лань,2010. - 670 с.

Учебно-методическая

1. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие Т.2.- СПб. - М. - Краснодар: Лань, 2010.- 639 с.
2. Кульгина Л.М., Механика и основы механики сплошных сред: Лабораторный практикум. – Ставрополь: Изд-во СГУ, 2005. – 211 с.
3. Кульгина Л.М., Теоретическая механика. Механика сплошных сред: учебно методическое пособие. – Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2013. – 160 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД**

**Методические указания для обучающихся по организации и проведению
самостоятельной работы**

Направление подготовки 03.03.02 Физика
Направленность (профиль)
«Медицинская физика»

**Ставрополь
2026**

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Общая характеристика самостоятельной работы студента при изучении дисциплины «Теоретическая механика. Механика сплошных сред».....	5
2. План-график выполнения самостоятельной работы.....	6
3. Контрольные точки и виды отчетности по ним.....	6
4. Методические рекомендации по изучению теоретического материала	7
5. Форма промежуточной аттестации.....	15
6.Список рекомендуемой литературы.....	19

Введение

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студента).

Самостоятельная работа студента является важным видом учебной и научной деятельности студента. Федеральным государственным образовательным стандартом предусматривается значительный объем времени из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу. В связи с этим, обучение включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому самостоятельная работа должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования – подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности.

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

1. Общая характеристика самостоятельной работы студента при изучении дисциплины «Теоретическая механика. Механика сплошных сред»

Самостоятельная работа проводится в виде собеседования и проверки лабораторных занятий. Основной целью этих видов самостоятельной работы является улучшение профессиональной подготовки специалистов высшей квалификации, направленное на формирование действенной системы фундаментальных и профессиональных знаний, умений и навыков, которые они могли бы свободно и самостоятельно применять в практической деятельности.

В ходе организации самостоятельной работы решаются следующие задачи:

- углублять и расширять их профессиональные знания;
- формировать у них интерес к учебно-познавательной деятельности;
- научить студентов овладевать приемами процесса познания;
- развивать у них самостоятельность, активность, ответственность;
- развивать познавательные способности будущих специалистов.

В ходе постановки целей и задач необходимо учитывать, что их выполнение направлено не только на формирование общеучебных умений и навыков, но и определяется рамками данной предметной области.

При самостоятельной работе над лекционным курсом используются записи лекций, учебники и учебные пособия, в которых содержится соответствующий теоретический материал. На контролируемую самостоятельную работу студентов отводится примерно 40% времени, отводимого на изучение каждой дисциплины, куда входит самостоятельное конспектирование и изучение теоретического материала по учебникам и учебным пособиям, а затем собеседование с ведущим преподавателем курса по изученным темам.

Для успешной работы над курсом «Теоретическая механика. Механика сплошных сред» необходимо выполнить задания для самостоятельной работы. Для этого предназначены настоящие рекомендации к самостоятельным работам. Для каждого задания сформулирована цель и даны методические рекомендации по выполнению, представлен список литературы, необходимой для выполнения самостоятельной работы. Изучение дисциплины завершается в третьем семестре экзаменом, условием получения которого является выполнение всего комплекса заданий для самостоятельной работы, решение которых рекомендовалось преподавателем в течении семестра.

2. План-график выполнения самостоятельной работы

Наименование тем дисциплины	Вид самостоятельной работы	Неделя
Тема 1. Обзор элементарных методов и понятий	Тестирование	3 неделя
Тема 2. Уравнения движения частиц и законы сохранения.	Тестирование	4 неделя
Тема 3. Одномерное движение. Движение в центральном поле.	Собеседование	5 неделя
Тема 4. Рассеяние частиц	Собеседование	6 неделя
Тема 5. Релятивистская механика.	Собеседование	7 неделя
Тема 6. Механика систем со связями.	Контрольная работы	8 неделя
Тема 7. Вариационный принцип.	Собеседование	9 неделя
Тема 8. Канонические методы	Собеседование	10 неделя
Тема 9. Малые колебания механических систем	Собеседование	12 неделя
Тема 10. Динамика твердого тела	Собеседование	13 неделя
Тема 11. Движения в неинерциальных системах отсчета	Собеседование	14 неделя
Тема 12. Основы механики сплошных сред.	Собеседование	15 неделя

3. Контрольные точки и виды отчетности по ним

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения	Количество баллов
1.	Собеседование по темам 1-2	5 неделя	20
2.	Собеседование по теме 3,4	9 неделя	20
3.	Собеседование по теме 5,6	13 неделя	15
	Итого за 3 семестр		55
	Итого		55

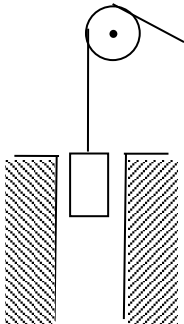
№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения	Количество баллов
4.	Собеседование по темам 1-2	5 неделя	20
5.	Собеседование по теме 3,4	9 неделя	20
6.	Собеседование по теме 5,6	13 неделя	15
	Итого за 4 семестр		55
	Итого		55

4. Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Задания для самостоятельной работы

Темы 1-4:
Базовый уровень

№ 1



Клеть весом P поднимается с помощью каната, накрученного на барабан радиуса R , вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси по закону:

$$\varphi = \frac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = a \operatorname{ch}(\omega t)$$

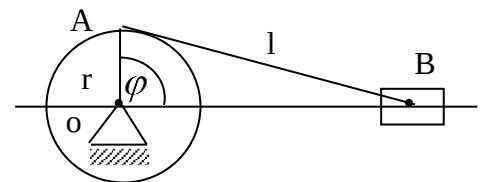
Определить натяжения каната как функцию высоты подъема h .

№ 2

На тело, брошенное под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 действует сопротивление воздуха $R = kPv$. Определить пользуясь теоремой о количестве движения, время, в течение которого тело достигнет максимальной высоты.

№ 3

Вычислить кинетическую энергию кривошипно-шатунного механизма. В положении, указанном на чертеже, если масса кривошипа OA m_1 , длина $OA=r$, масса ползуна B m_2 . Длинна шатуна $AB=l$. Массой шатуна пренебречь. Кривошип считать однородным стержнем. Угловая скорость вращения кривошипа ω .



№ 4

Материальная точка массы $m=0,1$ кг движется прямолинейно под действием силы $F=0,3$ м. Движение происходит в среде, сила сопротивления которой выражается линейной функцией скорости $R = 0,2v + 0,1v^2$, где v - скорость точки. Найти закон движения точки, если начальная скорость равна нулю.

№ 5

По заданным уравнениям движение точки найти траекторию, скорость и ускорение $x = R \sin \omega t$, $y = R(1 - \cos 2\omega t)$, $z = R \sin \omega t$.

№ 6

Точка движется с постоянным тангенциальным ускорением w_τ по окружности радиуса R без начальной скорости. Через сколько секунд после начала движения касательные и нормальные ускорения станут численно равны между собой.

№ 7

Телу весом P , лежащему на горизонтальной плоскости, сообщают начальную горизонтальную скорость v_0 . Через сколько времени и на каком расстоянии остановится тело, если коэффициент трения тела о плоскость f ?

№ 8

Материальная точка M массы m движется прямолинейно по оси Ox . Точка отталкивается от неподвижного центра O силой F , пропорциональной массе m и расстоянию, причем коэффициент пропорциональности равен $\kappa=4$. Найти закон движения точки, если начальное расстояние ее от центра O равно $x_0 = 5\text{ м}$, а начальная скорость $v_0 = 2\text{ м/с}$.

№ 9

Даны уравнения движения точки:

$$x = 2t, \quad y = 4t^2, \quad z = 3t^2$$

Найти радиус кривизны траектории в точке где скорость v движущейся точки равна 5 м/с .

Продвинутый уровень:

№ 1

Частица с массой m_1 до рассеяния покоится, а частица массы m_2 движется со скоростью v , относительно лабораторной системы отсчета. Определить абсолютные величины и направления скоростей обеих

частиц после рассеяния относительно l -системы как функция χ угла рассеяния в системе центра масс.

№ 2

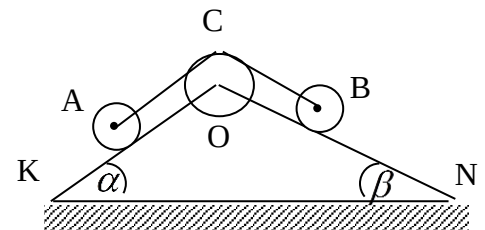
Вагонетка движется самокатом вниз по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α . Определить скорость вагонетки в конце пути, длина которого равна l , начальная скорость вагонетки $v_0 = 0$, коэффициент сопротивления движению f .

№ 3

Вагонетка, вес которой вместе с полезной нагрузкой $P=8500\text{н}$, при движении по горизонтальному пути, испытывает сопротивление, величина которого составляет $0,01$ от всех вертикальных нагрузок. Рабочий толкает вагонетку с силой $f=170\text{н}$. Через сколько времени скорость вагонетки будет $v=0,6\text{м/с}$?

№ 4

Колесо A скатывается без скольжения по наклонной плоскости OK , поднимая посредством нерастяжимого троса колесо B , которое катится без скольжения по наклонной плоскости ON . Трос переброшен через блок C , вращающийся вокруг неподвижной оси O . Найти скорость оси колеса A при ее перемещения параллельно OK на расстояние S . В начальный момент система была в точке. Колеса и блок считать однородными дисками одинакового веса и радиуса.



№ 5

Материальная точка массой $m=2\text{кг}$ описывает криволинейную траекторию по закону $S = 12 \sin \frac{t}{2}$ (S выражено в м, t в сек). В данный

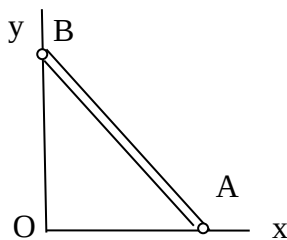
момент она занимает положение M и имеет скорость $v=3\text{ м/с}$, причем радиус кривизны траектории в т. M равен 6 м . Найти в этот момент силу, действующую на эту материальную точку.

№ 6

Материальная точка массой $m=0,5\text{ кг}$ совершает движение согласно уравнениям: $x=2t^2+1$, $y=t^2-1$, $z=t^3-1$

Определить величину и направление силы, действующей на точку, в момент $t=1\text{ с}$.

№ 7



Линейка эллипсографа $AB=l=1\text{ м}$ скользит своими концами по осям ox и oy . $OA=0,1\text{ м}$. Составить уравнение движения точки B и определить скорость и ускорение т. A и B .

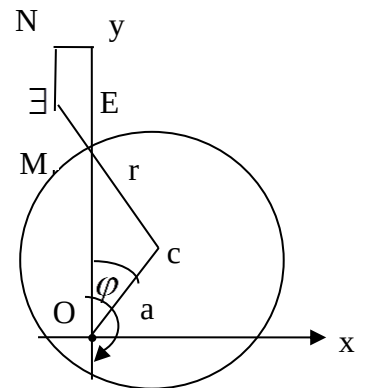
№ 8

Круглый эксцентрик диаметром $2r$ вращается вокруг оси O , отстоящей от геометрической оси C

эксцентрика на расстоянии, равном $OC=a=\frac{r}{3}$, угол

φ меняется по закону $\varphi=\frac{\pi}{2}t$. Найти уравнение

прямолинейного движения т. M стержня MN , движущегося в вертикальных направляющих, а также скорость и ускорение этой точки в момент $t_1=3\text{ с}$.



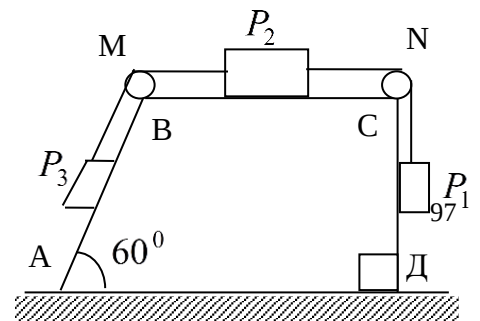
№ 9

Вал вращается в подшипниках вокруг неподвижной горизонтальной оси по

закону $\varphi=\frac{\pi}{16}\sin\frac{3}{4}\pi t$, где φ -угол поворота вала в радианах. Определить

скорость и ускорение точки M вала отстоящей от оси вращения на расстоянии $r=0,8\text{ м}$ в тот момент, когда угловая скорость вала достигает наибольшего абсолютного значения.

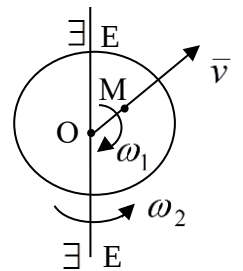
№ 10



Три груза весом $P_1 = 20\text{н}$, $P_2 = 15\text{н}$, $P_3 = 10\text{н}$ соединены невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижные блоки M и N . При опускании груза P_1 вниз груз P_2 перемещается по верхнему основанию четырехугольной усеченной пирамиды $ABCD$ весом $P = 100\text{н}$ вправо, а груз P_3 поднимается по боковой грани AB вверх. Определить перемещения пирамиды $ABCD$ относительно пола, если груз P_1 опустилсся в низ на 1м .

№ 11

По подвижному радиусу диска от центра к ободу движется т. M с постоянной скоростью v . Подвижный радиус поворачивается в плоскости диска с постоянной угловой скоростью ω_1 . Плоскость диска вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью ω_2 . Найти абсолютную скорость т. M , считая, что при $t=0$ т. M находится в центре диска, а подвижный радиус был направлен по оси вращения диска.



№ 12

В момент, когда скорость моторного судна равна v_0 , выключается мотор. Сила сопротивления воды $R = \alpha v + \beta v^2$, где α и β - постоянные. Масса судна m . Найти расстояние, которое пройдет судно с момента выключения мотора до остановки.

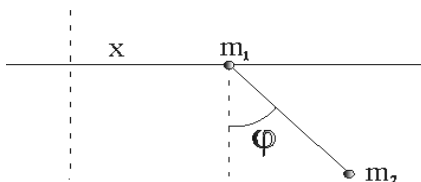
Темы 5-12:

Решать задачи по темам:

Базовый уровень

1. Нахождения функции Лагранжа для механических систем

Плоский маятник с массой m_2 , точка подвеса которого (с массой m_1 в ней) может совершать движение по горизонтальной прямой. Найти функцию Лагранжа.

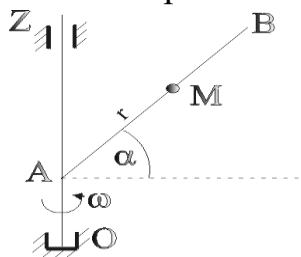


2. Составление уравнений Лагранжа 2-го рода для механических систем с одной и двумя степенями свободы.

Составить уравнение движения маятника, состоящего из материальной точки массы m , подвешенной на нити, длина которой изменяется по произвольно заданному закону $l=l(t)$.

3. Решение уравнений Лагранжа 2-го рода.

Материальная точка M движется под действием силы тяжести по прямолинейному стержню AB , вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси. Стержень AB образует угол α с горизонталью. Найти закон движения точки.

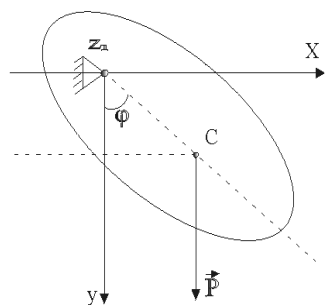


4. Нахождение функции Гамильтона.

Определить функцию Гамильтона ангармонического осциллятора, функция Лагранжа которого:

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3 + \beta x \dot{x}^2.$$

5. Составление канонических уравнений движения в различных системах координат.



Составить канонические уравнения движения физического маятника, если P -его вес, I_z – момент инерции относительно оси привеса Z , $OC=a$ -расстояние от точки привеса O до центра тяжести C маятника. Трением пренебречь. В качестве обобщенной координаты выбрать угол поворота ϕ .

Повышенный уровень

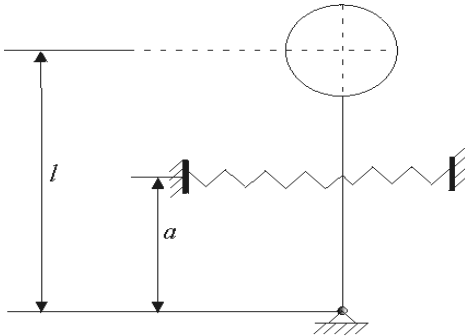
6. Определение скобок Пуассона.

Определить скобки Пуассона, составленные из декартовых компонент

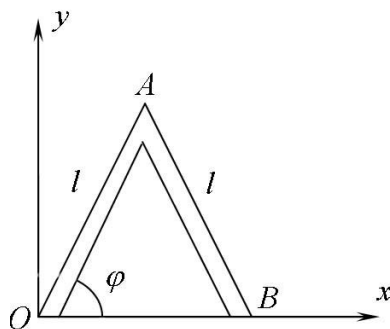
импульса $\vec{p}$ и момент импульса $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$ материальной частицы.

7. Решать дифференциальные уравнения описывающие: идеальные, реальные, свободные и вынужденные колебания одномерной системы.

Маятник состоит из жесткого стержня длины l , несущего массу m на своем конце. К стержню прикреплены две пружины жесткости C на расстоянии a от его нижнего конца; противоположные концы пружин закреплены. Пренебрегая массой стержня, определить условие, при котором вертикальное положение маятника устойчивое, и вычислить период малых колебаний маятника.



8. Вычислять основные динамические характеристики твёрдого тела.



Найти кинетическую энергию системы, изображенной на рисунке, если $OA = AB = l$; OA и AB тонкие однородные стержни, шарнирно скрепленные в точке A . Стержень OA вращается в плоскости рисунка вокруг точки O , а конец B стержня AB скользит вдоль оси Ox . $\left(I = \frac{ml^2}{12} \right)$.

9. Находить главные оси и моменты инерции.

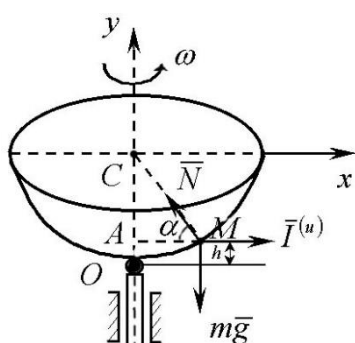
Определить главные моменты инерции

а) для двухатомной молекулы

б) для трехатомной молекулы в виде равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h .

1

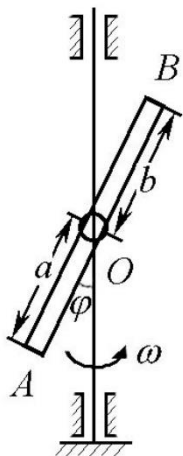
10. Уравнение движение частицы в неинерциальной системе отсчёта.



Полый полушар радиусом $R = 2\text{ м}$ равномерно вращается вокруг своей вертикальной оси симметрии, делая 30 об/мин . Внутри полушара находится шарик весом $P = 2\text{ Н}$ (рис. 8.1). Найти высоту h , соответствующую положению равновесия шарика

относительно полушара и реакцию $\vec{N}$ полушара в этом положении.

11. Применение теорем об изменении импульса, механического момента и кинетической энергии относительно НИСО к решению практических задач.



Тонкий однородный прямолинейный стержень AB шарнирно соединен с вертикальным валом в точке O . Вал вращается с постоянной угловой скоростью ω (рис. 8.2). Определить угол отклонения ϕ стержня от вертикали, если $AB = a$ $OB = b$. При решении задачи применить теорему об изменении момента импульса механической системы относительно произвольной НИСО.

Вопросы для собеседования

Темы 7-9

Базовый уровень

1. Понятие о функционале. Основная задача вариационного исчисления. Вывод уравнения Эйлера.
2. Первая вариация функционалов. Правила вычисления функционалов.
3. Основная вариационная задача механики по отношению к которой уравнение Лагранжа является уравнениями Эйлера. Конфигурационное пространство. Принцип Гамильтона-Остроградского.
4. Вывод уравнения Лагранжа из принципа Гамильтона. Точность определения функции Лагранжа.
5. Интегральный принцип Гамильтона-Остроградского для голономных систем с неконсервативными активными силами. Два способа построения классической механики.
6. Фазовое пространство. Переход от функции Лагранжа к функции Гамильтона.

Продвинутый уровень

1. Канонические уравнения движения. Связь функции Гамильтона с законами сохранения.

2. Необходимые и достаточные условия при выполнении которых функция координат, импульсов и времени является первым интегралом уравнения движения. Скобки Пуассона и интегралы движения. Фундаментальные скобки Пуассона.
3. Каноническое уравнение движения в скобках Пуассона. Свойства скобок Пуассона.
4. Канонические преобразования. Производящая функция, её виды. Канонические преобразования с производящей функцией $F_1(q, Q, t) = \sum q_a Q_a$
5. Действие как функция координат. Связь функции действия с обобщённым импульсом.
6. Действия как функция времени. Связь функции действия с гамильтонианом. Уравнение Гамильтона-Якоби.

5. Форма промежуточной аттестации (экзамен)

Текущая аттестация студентов проводится преподавателем, ведущим лекционные и практические занятия по дисциплине. К практическому занятию студент должен подготовить ответы на вопросы, выполнить задания по теме занятия. Максимальное количество баллов студент получает, если он активно участвует в работе, владеет материалом, умеет логично и четко излагать мысли, творчески подходит к решению основных вопросов темы, показывает самостоятельность мышления.

Основанием для снижения оценки являются:

- слабое знание темы и основной терминологии;
- пассивность участия в групповой работе;
- отсутствие умения применить теоретические знания для решения практических задач;
- несвоевременность предоставления выполненных работ.

Необходимо ознакомиться с обязательным минимумом содержания основной образовательной программы по изучаемой дисциплине. Далее необходимо изучить рабочую программу дисциплины, в которой рассмотрено содержание тем дисциплины лекционного курса, взаимосвязь тем лекций с лабораторных и практических занятий, темы и виды самостоятельной работы. По каждому виду самостоятельной работы предусмотрены определённые формы отчетности

Экзаменационные вопросы:

3 семестр

Базовый уровень:

1. Предмет и основные задачи теоретической механики, основные разделы и объекты

изучения. Классические представления о пространстве и времени.

2. Основные кинематические характеристики движения материальной точки. Метод декартовых координат.
3. Исследование движения точки в цилиндрических координатах.
4. Исследование движения точки в сферических координатах.
5. Движение твердого тела: поступательное, вращательное.
6. Плоское движение твердого тела, мгновенный центр вращения.
7. Теорема сложения скоростей.
8. Теорема сложения ускорений.
9. Понятие о силе и массе. Инерциальные системы отсчета. Принцип относительности Галилея.
10. Основные законы динамики Ньютона.
11. Уравнение движения механической системы. Основная задача динамики.
12. Работа силы и потенциальная энергия частицы во внешнем силовом поле.
13. Закон сохранения и изменения механической энергии.
14. Первые интегралы уравнений движения. Закон сохранения импульса замкнутой системы.
15. Теорема о движении центра масс. Теорема Кенига.
16. Уравнение движения точки переменной массы (теорема Мещерского).

Продвинутый уровень:

1. Закон сохранения момента импульса замкнутой системы, момент импульса в ц-системе.
2. Теорема об изменении механического момента незамкнутой системы.
3. Симметрия внешнего силового поля и сохранение отдельных составляющих импульса, частица в однородном поле.
4. Симметрия внешнего силового поля и сохранение отдельных составляющих механического момента. Частица в центрально-симметричном поле.
5. Одномерное движение. Финитное и инфинитное движение.
6. Понятие об обратной спектральной задаче..
7. Задача двух тел.
8. Общее решение уравнений движения в центральном поле.
9. Исследование движения частицы в слабо сингулярном поле притяжения. Классификация орбит.
10. Исследование движения частицы в сильно сингулярном поле притяжения.
11. Исследование движения частицы в поле притяжения с $n=2$; в поле отталкивания.
12. Задача Кеплера. Первый закон Кеплера.
13. Эллиптическое движение. Третий закон Кеплера.
14. Космические скорости.
15. Упругие столкновения частиц.
16. Упругие столкновения частиц при $m_1 < m_2$.
17. Упругие столкновения частиц при $m_1 = m_2$.
18. Упругие столкновения частиц при $m_1 > m_2$.
19. Кинематика ядерных реакций.
20. Основы классической теории рассеяния частиц. Эффективное сечение рассеяния μ -частицы.
21. Определение функциональной зависимости $\rho = \rho(x)$.
22. Формула Резерфорда

4 семестр

Базовый уровень:

- 1.Основной закон релятивистской механики. Преобразование Лоренца.
- 2.Свойства пространства и времени. Эффект Лоренца-Фицджеральда.
- 3.Четырёхмерное пространство Минковского. Скорость и ускорение в четырёхмерном пространстве.
- 4.Второй закон Ньютона. Энергия в релятивистской механике.
- 5.Общие понятия и определения аналитической механики.
- 6.Возможные, действительные и виртуальные перемещения. Правила вычисления вариации функции.
- 7.Виртуальная работа. Определение идеальных связей.
- 8.Принцип виртуальных перемещений. Условия равновесия свободной материальной точки.
- 9.Обобщенные координаты и силы. Принцип виртуальных перемещений в обобщенных координатах.
- 10.Условие равновесия механической системы в потенциальном силовом поле. Типы равновесных состояний.
- 11.Принцип Даламбера.
- 12.Вывод уравнений Лагранжа из принципа Даламбера.
- 13.Функция Лагранжа для систем с потенциальными и обобщенно-потенциальными силами.
- 14.Функция Лагранжа для систем с диссипативными силами.
- 15.Связь лагранжиана с законом сохранения энергии.
- 16.Циклические координаты и сохранение обобщенных импульсов
- 17.Основная задача вариационного исчисления.
- 18.Первая вариация функционала, правила вычисления вариаций.
- 19.Принцип Гамильтона-Остроградского.

Продвинутый уровень:

1. Вывод уравнений Лагранжа из принципа экстремального действия.
2. Интегральный принцип Гамильтона-Остроградского.
3. Два способа построения классической механики.
4. Фазовое пространство. Вывод функции Гамильтона.
5. Канонические уравнения движения.
6. Скобки Пуассона.
7. Свойства скобок Пуассона.
8. Канонические преобразования.
9. Канонические преобразования с воспроизводящей функцией типа $F_1(q, Q, t)$.
10. Уравнение Гамильтона-Якоби.
11. Вывести дифференциальное уравнение движения, описывающее свободные колебания одномерной механической системы.
12. Независимые решения линейного, однородного дифференциального уравнения. Полная энергия системы.
13. Вывести дифференциальное уравнение движения, описывающее вынужденные колебания осциллятора в отсутствии сил трения.
14. Вынужденные колебания осциллятора, когда вынуждающая сила - периодическая функция времени.
15. Энергетические превращения в механической системе, совершающей вынужденные колебания.
16. Резонанс амплитуд.
17. Вынужденные колебания внутри резонанса, биения.
18. Свободные затухающие колебания, случай малого сопротивления.

19. Энергетические превращения в системе совершающей затухающие колебания.
20. Свободные затухающие колебания, случай большого сопротивления, предельный случай.
21. Вывод уравнения движения системы, совершающей вынужденные колебания при наличии сил вязкого трения.
22. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний, амплитудный резонанс.
23. Энергетические превращения в системе, совершающей вынужденные колебания. Энергетический резонанс.
24. Нелинейные колебания одномерной механической системы.
25. Функция Лагранжа для малых колебаний многомерных систем.
26. Характеристические или вековые уравнения.
27. Собственные и вырожденные частоты, уравнения движения многомерных систем.
28. Нормальные колебания.
29. Преобразование функции Лагранжа в НИСО.
30. Уравнение движения частицы в НИСО.
31. Принцип эквивалентности.
32. Импульс, момент импульса, кинетическая энергия в НИСО.
33. Теорема об изменении импульса в НИСО.
34. Теорема об изменении момента импульса в НИСО.
35. Закон изменения кинетической энергии в НИСО.
36. Импульс твердого тела.
37. Кинетическая энергия твердого тела.
38. Тензор инерции твердого тела.
39. Главные моменты инерции.
40. Классификация твердых тел по их инерциальным свойствам.
41. Теорема Штейнера.
42. Момент импульса твердого тела.

Критерии оценивания компетенций

Оценка «отлично» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает материал; свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний; использует в ответе дополнительный материал все предусмотренные программой задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному; анализирует полученные результаты; проявляет самостоятельность при выполнении заданий.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено полностью, необходимые практические компетенции в основном сформированы, все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения достаточно высокое. Студент твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, большинство предусмотренных программой заданий выполнено, но в них имеются ошибки, при ответе на поставленный вопрос студент допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, наблюдаются нарушения логической последовательности в изложении программного материала.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы, необходимые практические компетенции не сформированы, большинство предусмотренных

программой обучения учебных заданий не выполнено, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному.

6.Список рекомендуемой литературы

Основная

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Т.1. - М.: Физматлит, 2007г.
3. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. – Лань, 2009г.
4. Колесникова К.С. Курс теоретической механики. – М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2005г.
5. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: [учебное пособие] – СПб. – М. – Краснодар: Лань, 2010.- 448 с.

Дополнительная

2. Жирнов Н.И. Классическая механика. – М.: Просвещение, 1980г.
3. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Т.1. – М.:1991.
4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учебник для втузов. – 2-е издание испр. – М.: Высшая школа, 2007г. – С.416.
5. Вильке В.Г. Теоретическая механика. Учебник. – М.: Издательство Лань, 2003г.
6. Голдстейн Г Классическая механика. – РХД, 2011 г.
7. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. - М.: Издательство МГУ, 2000 г.
8. Бать М.И., Джангелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. – М.: Наука, 1990г.
9. Бать М.И., Джангелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. – М.: Наука, 1990г.

Методическая

4. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие.- СПб. - М. - Краснодар: Лань, 2010.- 639 с.
5. Кульгина Л.М., Механика и основы механики сплошных сред: Лабораторный практикум. – Ставрополь: Изд-во СГУ, 2005. – 211 с.

Сайт научной библиотеки СКФУ

<http://catalog.ncstu.ru/catalog/ncstu>

Интернет ресурсы

<http://bomaxi.narod.ru/>

[http://publ.lib.ru/ARCHIVES/S/"Shemotehnika"/ "Shemotehnika".html](http://publ.lib.ru/ARCHIVES/S/)

<http://rf.atnn.ru/>

http://smps.h18.ru/circuit_engineering.html

<http://easyelectronics.ru/tag/nachinayushhim>