

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Методические указания по выполнению лабораторных работ**  
по дисциплине  
**Методы количественного и качественного анализа данных**

|                          |                                       |
|--------------------------|---------------------------------------|
| Направление подготовки   | 44.03.01 «Педагогическое образование» |
| Направленность (профиль) | Физическая культура                   |
| Год начала обучения      | 2026                                  |

## ВВЕДЕНИЕ

**Цель** освоения дисциплины «Методы количественного и качественного анализа данных» является формирование универсальных и общепрофессиональных компетенции будущего бакалавра по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) "Физическая культура", путем освоения возможностей использования средств и методов количественного и качественного анализа для решения прикладных задач в образовательной и педагогической сферах деятельности.

**Задачи** освоения дисциплины

- формирование научного мировоззрения, понимания широты и универсальности методов количественного и качественного анализа данных в области педагогических исследований, умения применять эти методы в решении прикладных задач;
- воспитание математической культуры, которая предполагает четкое осознание необходимости и важности математической подготовки для специалиста в области образования;
- ознакомление с основными объектами статистической обработки информации, а также их приложениями для решения различных задач, требующих применения статистических средств;
- овладение современным математическим аппаратом статистического анализа для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач в образовательной области.

Дисциплина «**Методы количественного и качественного анализа данных**» относится к дисциплинам обязательной части. Ее освоение осуществляется в 6 семестре.

В результате освоения дисциплины «**Методы количественного и качественного анализа данных**» формируются компетенции **УК-1 и ОПК-9**, в соответствии с которыми студент должен быть способен:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач
- понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной деятельности

# 1. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

**Цель:** в результате изучения данной темы обучающийся должен быть способен осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения прикладных задач.

**Форма проведения:** занятие – практикум, включающий в себя следующие этапы: актуализация теоретических знаний, пробное решение несколькими студентами заданий у доски, самостоятельная работа студентов, контроль преподавателем индивидуальных заданий (ИЗ) студентов, выполненных самостоятельно.

**Форма контроля:** проверка выполнения ИЗ -1.

Выборочный метод – это статистический метод исследования общих свойств совокупности однородных объектов на основе изучения свойств только части этих объектов, называемых выборкой.

Совокупность исследуемых объектов называется генеральной совокупностью, а часть объектов, подлежащих изучению, называется выборочной совокупностью или выборкой.

Выборочный метод, основанный на законе больших чисел и теории вероятностей, теоретически был разработан русскими математиками П. Л. Чебышевым, А. М. Ляпуновым, А. А. Марковым и др.

Основная задача выборочного обследования – проведение обследования, позволяющее наиболее точно описать интересующий признак, используя для этого минимальный объем выборочной совокупности. Необходимым условием этого является репрезентативность выборки, т.е. выборка должна объективно представлять свойства генеральной совокупности.

$\bar{x}$  – выборочная средняя

$\overline{x^2}$  – выборочная средняя квадрата признака

$D_B$  – дисперсия (смещенная, неисправленная)

$s^2$  – дисперсия (несмещенная, исправленная)

$Me$  – медиана

$M_0$  – мода

## Основные формулы

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i x_i}{n} & \overline{x^2} &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i^2}{n} & D_B &= \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \\ D_B &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2}{n} & s^2 &= \frac{n}{n-1} D_B \\ Me &= X_{Me} + h_{Me} \frac{0,5 \sum_{i=1}^k n_i - n_{Me-1}^{нак}}{n_{Me}}\end{aligned}$$

$$M_0 = X_{M_0} + h_{M_0} \times \frac{n_{M_0} - n_{M_0-1}}{2n_{M_0} - n_{M_0-1} - n_{M_0+1}}$$

### Решение типового варианта

1. На автомагистрали М4 «Дон» были зафиксированы скорости ста машин. Данные имеют следующий вид: 97,8; 97; 98,8; 101; 102,4; 103,21; 103,6; 105,2; 105,6; 105,6; 106,3; 106,4; 106,4; 106,8; 108,9; 109,5; 109,8; 110,3; 111,5; 111,8; 111,9; 112; 112,3; 112,3; 112,4; 112,5; 112,6; 112,8; 112,8; 113,1; 113,2; 113,5; 113,6; 114,1; 115,2; 115,3; 115,6; 116,7; 116,9; 117,2; 117,4; 118,4; 118,5; 118,6; 118,9; 118,9; 119,1; 119,2; 119,8; 119,9; 120,0; 121,1; 121,2; 121,3; 121,5; 121,8; 121,9; 122,3; 122,5; 122,6; 122,6; 122,8; 122,9; 123,1; 123,2; 123,2; 123,5; 123,7; 123,9; 124,0; 124,3; 124,3; 124,5; 124,6; 124,8; 124,9; 125,2; 125,6; 125,7; 126,3; 126,7; 126,8; 126,9; 127,2; 127,9; 128,5; 128,9; 129,3; 130,3; 130,5; 130,7; 131,8; 131,9; 132,5; 133,8; 134,7; 135,4; 135,9; 140,6; 141,0.

Провести группировку данных. Построить полигон, гистограмму и кумуляту. Определить моду и медиану двумя способами.

**Решение.** В этом примере признаком является скорость автомобилей. Объединим данные в группы. Согласно формуле Стерджесса  $m=1+3,322\lg n=7,644=8$ , следовательно:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3.322 \lg n} = \frac{141 - 97,8}{8} = 5,4$$

Примем  $h=6$ . За начало первого интервала рекомендуется взять величину

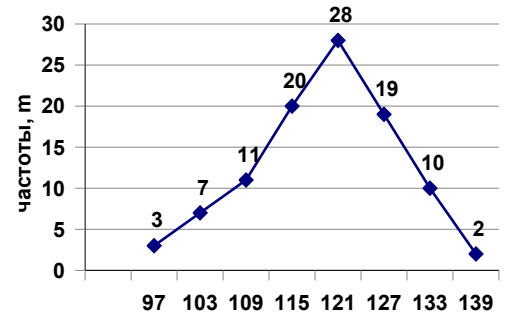
$$a_1 = x_{\min} - h/2 = 97 - 6/2 = 94$$

Сгруппированные данные представим в таблице, где в интервал включаются данные, большие или равные нижней границе интервала и меньшие верхней границы:

|       |        |         |         |         |         |         |         |         |
|-------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $x_i$ | 94-100 | 100-106 | 106-112 | 112-118 | 118-124 | 124-130 | 130-136 | 136-142 |
| $n_i$ | 3      | 7       | 11      | 20      | 28      | 19      | 10      | 2       |

Построим полигон для данного интервального вариационного ряда. Полигон строится, как правило для дискретных вариационных рядов. Для построения полигона для вариационного ряда поступим следующим образом: найдем середины каждого интервала и поставим в соответствие им частоты для данного интервала.

|       |    |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$ | 97 | 103 | 109 | 115 | 121 | 127 | 133 | 139 |
| $n_i$ | 3  | 7   | 11  | 20  | 28  | 19  | 10  | 2   |



Построим гистограмму. Для этого необходимы значения вариантов и плотности частоты  $n_i/h$ . Для удобства построения гистограммы сначала заполним таблицу:

|         |        |         |         |         |         |         |         |         |
|---------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $x_i$   | 94-100 | 100-106 | 106-112 | 112-118 | 118-124 | 124-130 | 130-136 | 136-142 |
| $n_i/h$ | 0,5    | 1,17    | 1,83    | 3,33    | 4,67    | 3,17    | 1,67    | 0,33    |

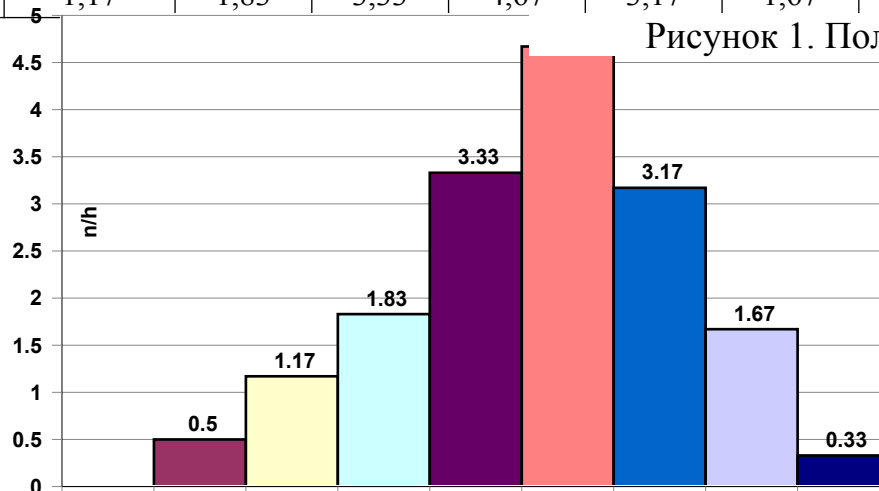


Рисунок 1. Полигон частот

Рисунок 2. Гистограмма интервального ряда

Для построения кумуляты необходимы варианты и накопленные частоты. Построим таблицу:

|             |        |         |         |         |         |         |         |         |
|-------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $x_i$       | 94-100 | 100-106 | 106-112 | 112-118 | 118-124 | 124-130 | 130-136 | 136-142 |
| $n_i^{iac}$ | 3      | 10      | 21      | 41      | 69      | 88      | 98      | 100     |

Кумулята имеет следующий вид:

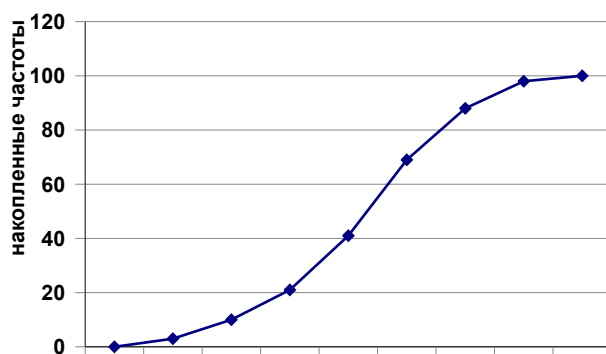


Рисунок 3. Кумулята

Найдем моду двумя способами:

1. По формуле: 
$$M_0 = X_{M_0} + h_{M_0} \times \frac{n_{M_0} - n_{M_0-1}}{2n_{M_0} - n_{M_0-1} - n_{M_0+1}}$$

Найдем модальный интервал (интервал, которому соответствует наибольшая плотность частоты): интервал от 118 до 124  $\frac{n_i}{h} = 4,67$ . Тогда:

$$X_{M_0} = 118, \quad h_{M_0} = 6, \quad n_{M_0} = 28, \quad n_{M_0-1} = 20, \quad n_{M_0+1} = 19$$

Мода будет равна:

$$M_0 = 118 + 6 \times \frac{28 - 20}{2 \times 28 - 20 - 19} = 120,82$$

2. с помощью гистограммы: выберем модальный интервал от 118 до 224, проведем вспомогательные линии, найдем точку пересечения этих линий и опустим перпендикуляр на ось абсцисс. Приблизительное значение моды  $M_0 = 120,5$ , что совпадает с более точным значением моды, вычисленной с использованием формулы.

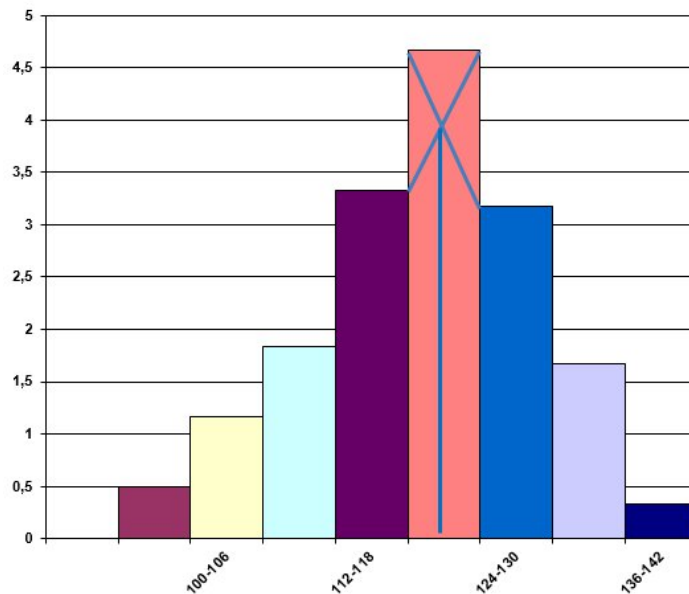


Рисунок 4. Методика нахождения моды графически с помощью гистограммы

Нахождение медианы будем проводить тоже двумя способами:

1. С использованием формулы:  $Me = X_{Me} + h_{Me} \frac{0,5n - n_{Me-1}^{нак}}{n_{Me}}$ .

Найдем медианный интервал: т.к. общее число частот равно 100, то значения 50-51 попадают в интервал 118-124 (совпадение с модальным интервалом является случайным), тогда

$$X_{Me} = 118, \quad h_{Me} = 6, \quad n = 100, \quad n_{Me} = 28, \quad n_{Me-1}^{нак} = 41$$

Аналитически найденная медиана равна:

$$Me = 118 + 6 \times \frac{50 - 41}{28} = 119,93$$

2. с использованием кумуляты. На графике кривой накопленных частот проводим горизонтальную прямую, соответствующую накопленной частоте 50 (половина выборки) до пересечения с графиком, в точке пересечения опускаем перпендикуляр на ось абсцисс, получаем значение медианы, что согласуется с найденным значением.

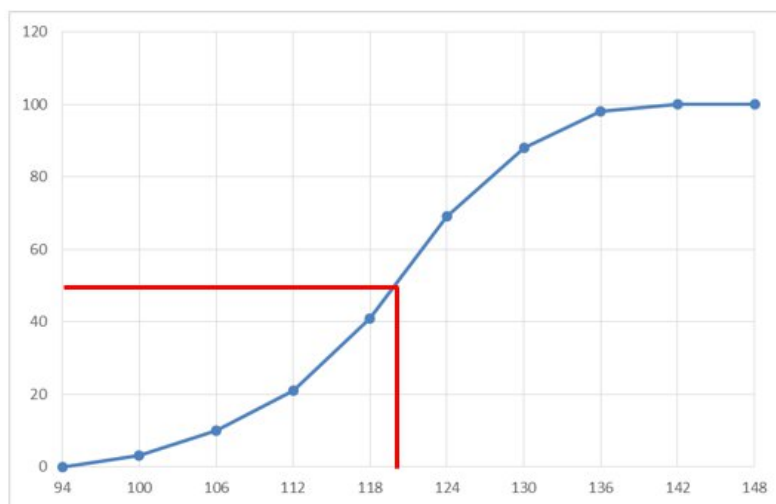


Рисунок 5. Нахождение медианы графически с помощью кумуляты

2. Построить полигон, найти выборочную среднюю, несмещенную оценку дисперсии и среднее квадратическое отклонение на основании распределения выборки в таблице. Найти моду и медиану

|       |   |    |    |    |
|-------|---|----|----|----|
| $x_i$ | 2 | 7  | 9  | 10 |
| $n_i$ | 8 | 14 | 10 | 18 |

Решение. Объем выборки  $n=8+14+10+18=50$ .

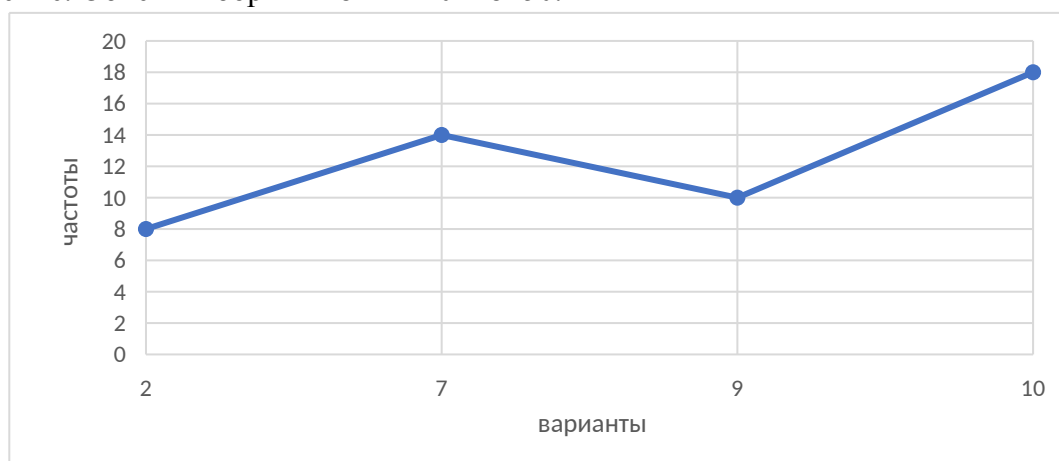


Рисунок 6. Полигон

1. Находим выборочную среднюю по формуле  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n}$

$$\bar{x} = \frac{8 \times 2 + 14 \times 7 + 10 \times 9 + 18 \times 10}{50} = 7,68$$

2. Находим выборочную среднюю квадратов вариантов выборки по формуле

$$\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i^2}{n}$$

$$\overline{x^2} = \frac{8 \times 2^2 + 14 \times 7^2 + 10 \times 9^2 + 18 \times 10^2}{50} = 66,56$$

3. Находим выборочную дисперсию  $D_B = \overline{x^2} - (\bar{x}_B)^2$

$$D_B = 66,56 - 7,68^2 = 7,58$$

4. Находим несмещенную оценку дисперсии («исправленную» выборочную дисперсию):

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{50 \cdot 7,58}{49} = 7,73$$

Значению моды соответствует наибольшая частота, следовательно  $M_0 = 10$ , т.к. этому значению соответствует максимальная частота  $n_{\max} = 18$ .

Т.к. объем выборки является четным, то значению медианы будет соответствовать среднее арифметическое значений для частот 25 и 25:

$$M_c = \frac{x_{25} + x_{26}}{2} = \frac{9 + 9}{2} = 9$$

### ИЗ-1

1. По данным, представленным в таблице № 1 составить интервальный вариационный ряд. Построить полигон, гистограмму и кумуляту (полигон и гистограмму на одном чертеже). Найти выборочную среднюю, смещенную и несмещенную оценку дисперсии, среднее квадратическое отклонение. Моду и медиану найти двумя способами (графически и по формулам).
2. Построить полигон, найти выборочную среднюю, несмещенную оценку дисперсии и среднее квадратическое отклонение на основании распределения выборки в таблице №2. Найти моду и медиану

Таблица 1. Данные для задания №1 ИЗ-1.

| Вариант № 1 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 96          | 37 | 23 | 17 | 22 | 25 | 73 | 20 | 88 | 63 |
| 87          | 48 | 63 | 35 | 82 | 46 | 05 | 32 | 54 | 09 |
| 74          | 06 | 31 | 05 | 90 | 79 | 45 | 57 | 18 | 39 |
| 43          | 03 | 08 | 53 | 67 | 67 | 19 | 64 | 50 | 97 |
| 34          | 07 | 98 | 67 | 09 | 97 | 14 | 90 | 56 | 33 |
| 98          | 68 | 93 | 59 | 14 | 83 | 16 | 52 | 26 | 37 |
| 70          | 90 | 55 | 35 | 75 | 21 | 48 | 57 | 28 | 33 |
| 42          | 35 | 30 | 34 | 26 | 08 | 14 | 06 | 86 | 01 |
| 93          | 23 | 20 | 90 | 25 | 89 | 60 | 42 | 88 | 26 |
| 86          | 22 | 10 | 94 | 05 | 77 | 58 | 52 | 60 | 01 |
| Вариант № 2 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 52          | 92 | 85 | 02 | 38 | 05 | 02 | 05 | 16 | 47 |
| 06          | 83 | 83 | 34 | 54 | 47 | 06 | 28 | 89 | 10 |
| 64          | 01 | 88 | 00 | 47 | 36 | 86 | 50 | 75 | 93 |
| 75          | 10 | 48 | 28 | 75 | 30 | 31 | 24 | 96 | 46 |
| 16          | 76 | 69 | 38 | 82 | 51 | 87 | 63 | 79 | 15 |
| 56          | 68 | 66 | 57 | 48 | 76 | 18 | 26 | 73 | 97 |
| 80          | 50 | 72 | 56 | 82 | 96 | 48 | 45 | 18 | 29 |

|                    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 84                 | 36 | 76 | 66 | 79 | 02 | 51 | 68 | 90 | 54 |
| 47                 | 02 | 29 | 53 | 68 | 79 | 70 | 32 | 32 | 47 |
| 19                 | 35 | 58 | 40 | 44 | 41 | 01 | 07 | 10 | 49 |
| <b>Вариант № 3</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 87                 | 48 | 63 | 35 | 82 | 46 | 05 | 32 | 54 | 09 |
| 03                 | 78 | 73 | 53 | 52 | 93 | 03 | 62 | 96 | 44 |
| 13                 | 69 | 99 | 48 | 56 | 78 | 87 | 15 | 76 | 68 |
| 64                 | 01 | 88 | 00 | 47 | 36 | 86 | 50 | 75 | 93 |
| 71                 | 50 | 65 | 74 | 95 | 03 | 17 | 46 | 85 | 86 |
| 70                 | 90 | 55 | 35 | 75 | 21 | 48 | 57 | 28 | 33 |
| 47                 | 35 | 80 | 83 | 42 | 57 | 82 | 79 | 60 | 64 |
| 49                 | 91 | 82 | 60 | 89 | 73 | 28 | 59 | 93 | 46 |
| 84                 | 36 | 76 | 66 | 79 | 02 | 51 | 68 | 90 | 54 |
| 09                 | 58 | 04 | 77 | 69 | 76 | 74 | 48 | 73 | 11 |
| <b>Вариант № 4</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 23                 | 59 | 00 | 54 | 28 | 69 | 64 | 05 | 18 | 91 |
| 54                 | 51 | 94 | 94 | 03 | 54 | 36 | 16 | 81 | 56 |
| 34                 | 04 | 98 | 26 | 47 | 09 | 45 | 24 | 02 | 07 |
| 52                 | 92 | 85 | 02 | 38 | 05 | 02 | 05 | 16 | 47 |
| 19                 | 49 | 33 | 32 | 54 | 69 | 41 | 94 | 15 | 94 |
| 81                 | 96 | 11 | 96 | 38 | 76 | 96 | 54 | 54 | 99 |
| 08                 | 34 | 88 | 88 | 15 | 19 | 53 | 86 | 01 | 43 |
| 84                 | 44 | 99 | 90 | 88 | 48 | 96 | 08 | 39 | 62 |
| 56                 | 68 | 66 | 57 | 48 | 76 | 18 | 26 | 73 | 97 |
| 09                 | 89 | 43 | 54 | 85 | 62 | 81 | 18 | 88 | 51 |
| <b>Вариант № 5</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 39                 | 01 | 69 | 03 | 11 | 62 | 86 | 50 | 75 | 90 |
| 05                 | 96 | 79 | 40 | 22 | 85 | 71 | 96 | 12 | 39 |
| 98                 | 50 | 66 | 17 | 33 | 81 | 34 | 07 | 27 | 85 |
| 96                 | 37 | 23 | 17 | 22 | 25 | 73 | 20 | 88 | 63 |
| 70                 | 84 | 63 | 29 | 17 | 65 | 16 | 50 | 53 | 82 |
| 84                 | 36 | 93 | 68 | 72 | 68 | 03 | 91 | 76 | 62 |
| 82                 | 69 | 86 | 10 | 25 | 91 | 91 | 75 | 74 | 24 |
| 68                 | 36 | 69 | 73 | 61 | 47 | 70 | 06 | 65 | 57 |
| 98                 | 68 | 93 | 59 | 14 | 83 | 16 | 52 | 26 | 37 |
| 44                 | 40 | 21 | 95 | 25 | 93 | 63 | 60 | 43 | 64 |
| <b>Вариант № 6</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 87                 | 48 | 63 | 35 | 82 | 46 | 05 | 32 | 54 | 09 |
| 34                 | 12 | 63 | 35 | 13 | 06 | 18 | 92 | 72 | 15 |
| 42                 | 32 | 11 | 31 | 59 | 40 | 39 | 80 | 82 | 01 |
| 54                 | 27 | 02 | 35 | 32 | 76 | 08 | 32 | 54 | 51 |
| 06                 | 83 | 83 | 34 | 54 | 47 | 06 | 28 | 89 | 10 |

|                     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 23                  | 76 | 46 | 16 | 28 | 35 | 45 | 54 | 49 | 94 |
| 40                  | 68 | 70 | 29 | 73 | 14 | 45 | 35 | 33 | 53 |
| 90                  | 84 | 36 | 93 | 68 | 72 | 68 | 03 | 91 | 76 |
| 81                  | 79 | 32 | 97 | 92 | 65 | 19 | 75 | 10 | 57 |
| 09                  | 70 | 90 | 55 | 35 | 75 | 21 | 48 | 57 | 28 |
| <b>Вариант № 7</b>  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 68                  | 79 | 19 | 30 | 43 | 67 | 01 | 75 | 87 | 06 |
| 82                  | 32 | 80 | 35 | 57 | 11 | 39 | 80 | 82 | 53 |
| 20                  | 21 | 42 | 13 | 11 | 07 | 97 | 34 | 40 | 59 |
| 68                  | 15 | 99 | 29 | 11 | 95 | 09 | 37 | 67 | 77 |
| 88                  | 69 | 09 | 05 | 77 | 29 | 87 | 51 | 76 | 22 |
| 53                  | 40 | 41 | 92 | 15 | 14 | 85 | 56 | 66 | 54 |
| 77                  | 45 | 31 | 82 | 23 | 56 | 74 | 12 | 21 | 43 |
| 87                  | 16 | 86 | 84 | 87 | 62 | 67 | 48 | 03 | 11 |
| 07                  | 38 | 31 | 13 | 11 | 25 | 65 | 01 | 98 | 90 |
| 49                  | 46 | 42 | 75 | 67 | 05 | 88 | 89 | 96 | 32 |
| <b>Вариант № 8</b>  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 99                  | 86 | 91 | 23 | 08 | 75 | 68 | 47 | 92 | 23 |
| 33                  | 58 | 80 | 98 | 03 | 14 | 28 | 94 | 03 | 40 |
| 39                  | 01 | 69 | 03 | 11 | 62 | 86 | 50 | 75 | 90 |
| 08                  | 54 | 44 | 49 | 04 | 60 | 85 | 15 | 74 | 81 |
| 87                  | 48 | 63 | 35 | 82 | 46 | 05 | 32 | 54 | 09 |
| 76                  | 46 | 16 | 28 | 35 | 45 | 54 | 49 | 94 | 91 |
| 68                  | 70 | 29 | 73 | 14 | 45 | 35 | 33 | 53 | 69 |
| 84                  | 36 | 93 | 68 | 72 | 68 | 03 | 91 | 76 | 62 |
| 79                  | 32 | 97 | 92 | 65 | 19 | 75 | 10 | 57 | 48 |
| 70                  | 90 | 55 | 35 | 75 | 21 | 48 | 57 | 28 | 33 |
| <b>Вариант № 9</b>  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 94                  | 40 | 12 | 42 | 48 | 64 | 11 | 10 | 00 | 39 |
| 23                  | 59 | 00 | 54 | 28 | 69 | 64 | 05 | 18 | 91 |
| 95                  | 74 | 61 | 46 | 45 | 39 | 26 | 45 | 74 | 93 |
| 52                  | 92 | 85 | 02 | 38 | 05 | 02 | 05 | 16 | 47 |
| 34                  | 07 | 98 | 67 | 09 | 97 | 14 | 90 | 56 | 33 |
| 20                  | 12 | 86 | 07 | 46 | 37 | 97 | 55 | 96 | 07 |
| 81                  | 96 | 11 | 96 | 38 | 76 | 96 | 54 | 54 | 99 |
| 77                  | 51 | 92 | 43 | 37 | 04 | 29 | 19 | 65 | 69 |
| 56                  | 68 | 66 | 57 | 48 | 76 | 18 | 26 | 73 | 97 |
| 86                  | 22 | 10 | 94 | 05 | 77 | 58 | 52 | 60 | 01 |
| <b>Вариант № 10</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 01                  | 53 | 15 | 66 | 61 | 39 | 95 | 27 | 07 | 18 |
| 25                  | 87 | 94 | 73 | 04 | 19 | 67 | 89 | 75 | 92 |
| 00                  | 54 | 35 | 07 | 45 | 97 | 26 | 89 | 80 | 24 |

|                     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 47                  | 96 | 37 | 05 | 33 | 63 | 64 | 89 | 47 | 64 |
| 48                  | 42 | 59 | 91 | 12 | 02 | 45 | 42 | 72 | 92 |
| 99                  | 59 | 36 | 78 | 38 | 52 | 48 | 47 | 82 | 44 |
| 43                  | 54 | 62 | 24 | 44 | 85 | 31 | 55 | 91 | 72 |
| 93                  | 33 | 35 | 13 | 54 | 53 | 62 | 96 | 77 | 31 |
| 42                  | 24 | 80 | 52 | 40 | 48 | 37 | 54 | 20 | 20 |
| 68                  | 83 | 60 | 94 | 97 | 83 | 00 | 80 | 13 | 80 |
| <b>Вариант № 11</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 36                  | 86 | 46 | 36 | 08 | 91 | 01 | 39 | 09 | 47 |
| 71                  | 41 | 32 | 97 | 31 | 74 | 87 | 37 | 92 | 57 |
| 19                  | 49 | 33 | 32 | 54 | 69 | 41 | 94 | 15 | 94 |
| 24                  | 04 | 69 | 06 | 39 | 74 | 20 | 11 | 74 | 23 |
| 42                  | 83 | 74 | 17 | 16 | 52 | 06 | 28 | 89 | 37 |
| 22                  | 77 | 28 | 14 | 40 | 52 | 77 | 05 | 93 | 88 |
| 52                  | 05 | 56 | 70 | 70 | 05 | 07 | 17 | 86 | 90 |
| 09                  | 89 | 43 | 54 | 85 | 62 | 81 | 18 | 88 | 51 |
| 52                  | 15 | 95 | 66 | 00 | 14 | 00 | 23 | 18 | 46 |
| 80                  | 43 | 23 | 60 | 02 | 98 | 10 | 35 | 45 | 09 |
| <b>Вариант № 12</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 00                  | 46 | 45 | 38 | 79 | 04 | 19 | 47 | 60 | 33 |
| 52                  | 74 | 94 | 06 | 62 | 01 | 96 | 38 | 27 | 98 |
| 14                  | 71 | 18 | 37 | 56 | 45 | 98 | 14 | 50 | 27 |
| 13                  | 69 | 99 | 48 | 56 | 78 | 87 | 15 | 76 | 68 |
| 80                  | 70 | 74 | 02 | 75 | 52 | 77 | 55 | 73 | 21 |
| 72                  | 43 | 66 | 79 | 45 | 49 | 43 | 15 | 59 | 51 |
| 07                  | 20 | 15 | 12 | 33 | 04 | 87 | 95 | 25 | 10 |
| 65                  | 31 | 01 | 02 | 46 | 25 | 74 | 63 | 05 | 33 |
| 49                  | 91 | 82 | 60 | 89 | 73 | 28 | 59 | 93 | 46 |
| 22                  | 97 | 79 | 01 | 71 | 39 | 19 | 02 | 52 | 94 |
| <b>Вариант № 13</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 92                  | 43 | 54 | 11 | 71 | 12 | 80 | 99 | 33 | 55 |
| 34                  | 27 | 11 | 83 | 33 | 97 | 52 | 07 | 98 | 40 |
| 82                  | 32 | 80 | 35 | 57 | 11 | 39 | 80 | 82 | 53 |
| 20                  | 21 | 42 | 13 | 11 | 07 | 97 | 34 | 40 | 59 |
| 93                  | 24 | 04 | 94 | 27 | 96 | 75 | 24 | 63 | 35 |
| 71                  | 05 | 33 | 51 | 29 | 56 | 69 | 17 | 56 | 84 |
| 48                  | 59 | 38 | 17 | 15 | 98 | 39 | 66 | 09 | 44 |
| 77                  | 45 | 31 | 82 | 23 | 56 | 74 | 12 | 21 | 43 |
| 87                  | 16 | 86 | 84 | 87 | 62 | 67 | 48 | 03 | 11 |
| 38                  | 45 | 86 | 25 | 10 | 24 | 25 | 49 | 61 | 35 |
| <b>Вариант № 14</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 43                  | 03 | 08 | 53 | 67 | 67 | 19 | 64 | 50 | 97 |

|                     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 34                  | 07 | 98 | 67 | 09 | 97 | 14 | 90 | 56 | 33 |
| 23                  | 59 | 00 | 54 | 28 | 69 | 64 | 05 | 18 | 91 |
| 54                  | 51 | 94 | 94 | 03 | 54 | 36 | 16 | 81 | 56 |
| 34                  | 04 | 98 | 26 | 47 | 09 | 45 | 24 | 02 | 07 |
| 93                  | 23 | 20 | 90 | 25 | 89 | 60 | 42 | 88 | 26 |
| 86                  | 22 | 10 | 94 | 05 | 77 | 58 | 52 | 60 | 01 |
| 81                  | 96 | 11 | 96 | 38 | 76 | 96 | 54 | 54 | 99 |
| 08                  | 34 | 88 | 88 | 15 | 19 | 53 | 86 | 01 | 43 |
| 84                  | 44 | 99 | 90 | 88 | 48 | 96 | 08 | 39 | 62 |
| <b>Вариант № 15</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 98                  | 50 | 66 | 17 | 33 | 81 | 34 | 07 | 27 | 85 |
| 96                  | 37 | 23 | 17 | 22 | 25 | 73 | 20 | 88 | 63 |
| 70                  | 84 | 63 | 29 | 17 | 65 | 16 | 50 | 53 | 82 |
| 42                  | 32 | 11 | 31 | 59 | 40 | 39 | 80 | 82 | 01 |
| 87                  | 48 | 63 | 35 | 82 | 46 | 05 | 32 | 54 | 09 |
| 68                  | 36 | 69 | 73 | 61 | 47 | 70 | 06 | 65 | 57 |
| 98                  | 68 | 93 | 59 | 14 | 83 | 16 | 52 | 26 | 37 |
| 44                  | 40 | 21 | 95 | 25 | 93 | 63 | 60 | 43 | 64 |
| 77                  | 13 | 74 | 67 | 00 | 54 | 78 | 80 | 29 | 50 |
| 70                  | 90 | 55 | 35 | 75 | 21 | 48 | 57 | 28 | 33 |
| <b>Вариант № 16</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 06                  | 10 | 83 | 34 | 54 | 06 | 28 | 89 | 06 | 80 |
| 68                  | 06 | 79 | 30 | 43 | 01 | 75 | 87 | 68 | 53 |
| 82                  | 53 | 32 | 35 | 57 | 39 | 80 | 82 | 82 | 77 |
| 20                  | 59 | 21 | 13 | 11 | 97 | 34 | 40 | 20 | 87 |
| 39                  | 90 | 01 | 03 | 11 | 86 | 50 | 75 | 39 | 84 |
| 50                  | 72 | 56 | 82 | 96 | 48 | 45 | 47 | 18 | 29 |
| 40                  | 41 | 92 | 15 | 14 | 85 | 56 | 67 | 66 | 54 |
| 45                  | 31 | 82 | 23 | 56 | 74 | 12 | 11 | 21 | 43 |
| 16                  | 86 | 84 | 87 | 62 | 67 | 48 | 07 | 03 | 11 |
| 36                  | 93 | 68 | 72 | 68 | 03 | 91 | 62 | 76 | 62 |
| <b>Вариант № 17</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 08                  | 81 | 54 | 49 | 04 | 85 | 15 | 74 | 08 | 79 |
| 94                  | 39 | 40 | 42 | 48 | 11 | 10 | 00 | 94 | 20 |
| 23                  | 91 | 59 | 54 | 28 | 64 | 05 | 18 | 23 | 81 |
| 95                  | 93 | 74 | 46 | 45 | 26 | 45 | 74 | 95 | 77 |
| 25                  | 92 | 87 | 73 | 04 | 67 | 89 | 75 | 25 | 43 |
| 32                  | 97 | 92 | 65 | 19 | 75 | 10 | 60 | 57 | 48 |
| 12                  | 86 | 07 | 46 | 37 | 97 | 55 | 64 | 96 | 07 |
| 96                  | 11 | 96 | 38 | 76 | 96 | 54 | 69 | 54 | 99 |
| 51                  | 92 | 43 | 37 | 04 | 29 | 19 | 39 | 65 | 69 |
| 54                  | 62 | 24 | 44 | 85 | 31 | 55 | 19 | 91 | 72 |

| Вариант № 18 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 00           | 24 | 54 | 07 | 45 | 26 | 89 | 80 | 00 | 93 |
| 47           | 64 | 96 | 05 | 33 | 64 | 89 | 47 | 47 | 42 |
| 24           | 23 | 04 | 06 | 39 | 20 | 11 | 74 | 24 | 52 |
| 42           | 37 | 83 | 17 | 16 | 06 | 28 | 89 | 42 | 80 |
| 14           | 27 | 71 | 37 | 56 | 98 | 14 | 50 | 14 | 65 |
| 33           | 35 | 13 | 54 | 53 | 62 | 96 | 97 | 77 | 31 |
| 24           | 80 | 52 | 40 | 48 | 37 | 54 | 63 | 20 | 20 |
| 15           | 95 | 66 | 00 | 14 | 00 | 23 | 74 | 18 | 46 |
| 43           | 23 | 60 | 02 | 98 | 10 | 35 | 52 | 45 | 09 |
| 31           | 01 | 02 | 46 | 25 | 74 | 63 | 45 | 05 | 33 |
| Вариант № 19 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 13           | 68 | 69 | 48 | 56 | 87 | 15 | 76 | 13 | 49 |
| 80           | 21 | 70 | 02 | 75 | 77 | 55 | 73 | 80 | 22 |
| 52           | 98 | 74 | 06 | 62 | 96 | 38 | 27 | 52 | 07 |
| 91           | 17 | 86 | 33 | 90 | 76 | 52 | 01 | 91 | 35 |
| 43           | 97 | 03 | 53 | 67 | 19 | 64 | 50 | 43 | 93 |
| 91           | 82 | 60 | 89 | 73 | 28 | 59 | 78 | 93 | 46 |
| 97           | 79 | 01 | 71 | 39 | 19 | 02 | 52 | 52 | 94 |
| 20           | 15 | 12 | 33 | 04 | 87 | 95 | 01 | 25 | 10 |
| 34           | 67 | 35 | 48 | 25 | 76 | 09 | 95 | 80 | 73 |
| 23           | 20 | 90 | 25 | 89 | 60 | 42 | 67 | 88 | 26 |
| Вариант № 20 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 34           | 33 | 07 | 67 | 09 | 14 | 90 | 56 | 34 | 86 |
| 96           | 63 | 37 | 17 | 22 | 73 | 20 | 88 | 96 | 98 |
| 70           | 82 | 84 | 29 | 17 | 16 | 50 | 53 | 70 | 44 |
| 42           | 01 | 32 | 31 | 59 | 39 | 80 | 82 | 42 | 77 |
| 00           | 24 | 54 | 07 | 45 | 26 | 89 | 80 | 00 | 93 |
| 22           | 10 | 94 | 05 | 77 | 58 | 52 | 97 | 60 | 01 |
| 68           | 93 | 59 | 14 | 83 | 16 | 52 | 25 | 26 | 37 |
| 40           | 21 | 95 | 25 | 93 | 63 | 60 | 65 | 43 | 64 |
| 13           | 74 | 67 | 00 | 54 | 78 | 80 | 40 | 29 | 50 |
| 33           | 35 | 13 | 54 | 53 | 62 | 96 | 97 | 77 | 31 |
| Вариант № 21 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 83 | 06 | 34 | 54 | 06 | 28 | 89 | 06 | 80 |
| 33 | 07 | 34 | 67 | 09 | 14 | 90 | 56 | 34 | 86 |
| 06 | 79 | 68 | 30 | 43 | 01 | 75 | 87 | 68 | 53 |
| 53 | 32 | 82 | 35 | 57 | 39 | 80 | 82 | 82 | 77 |
| 59 | 21 | 20 | 13 | 11 | 97 | 34 | 40 | 20 | 87 |
| 50 | 72 | 56 | 82 | 96 | 48 | 45 | 47 | 18 | 29 |

|                     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 22                  | 10 | 94 | 05 | 77 | 58 | 52 | 97 | 60 | 01 |
| 40                  | 41 | 92 | 15 | 14 | 85 | 56 | 67 | 66 | 54 |
| 45                  | 31 | 82 | 23 | 56 | 74 | 12 | 11 | 21 | 43 |
| 16                  | 86 | 84 | 87 | 62 | 67 | 48 | 07 | 03 | 11 |
| <b>Вариант № 22</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 81                  | 54 | 08 | 49 | 04 | 85 | 15 | 74 | 08 | 79 |
| 82                  | 84 | 70 | 29 | 17 | 16 | 50 | 53 | 70 | 44 |
| 98                  | 74 | 52 | 06 | 62 | 96 | 38 | 27 | 52 | 07 |
| 01                  | 32 | 42 | 31 | 59 | 39 | 80 | 82 | 42 | 77 |
| 21                  | 70 | 80 | 02 | 75 | 77 | 55 | 73 | 80 | 22 |
| 32                  | 97 | 92 | 65 | 19 | 75 | 10 | 60 | 57 | 48 |
| 40                  | 21 | 95 | 25 | 93 | 63 | 60 | 65 | 43 | 64 |
| 20                  | 15 | 12 | 33 | 04 | 87 | 95 | 01 | 25 | 10 |
| 13                  | 74 | 67 | 00 | 54 | 78 | 80 | 40 | 29 | 50 |
| 97                  | 79 | 01 | 71 | 39 | 19 | 02 | 52 | 52 | 94 |
| <b>Вариант № 23</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 90                  | 01 | 39 | 03 | 11 | 86 | 50 | 75 | 39 | 84 |
| 39                  | 40 | 94 | 42 | 48 | 11 | 10 | 00 | 94 | 20 |
| 91                  | 59 | 23 | 54 | 28 | 64 | 05 | 18 | 23 | 81 |
| 93                  | 74 | 95 | 46 | 45 | 26 | 45 | 74 | 95 | 77 |
| 92                  | 87 | 25 | 73 | 04 | 67 | 89 | 75 | 25 | 43 |
| 36                  | 93 | 68 | 72 | 68 | 03 | 91 | 62 | 76 | 62 |
| 12                  | 86 | 07 | 46 | 37 | 97 | 55 | 64 | 96 | 07 |
| 96                  | 11 | 96 | 38 | 76 | 96 | 54 | 69 | 54 | 99 |
| 51                  | 92 | 43 | 37 | 04 | 29 | 19 | 39 | 65 | 69 |
| 54                  | 62 | 24 | 44 | 85 | 31 | 55 | 19 | 91 | 72 |
| <b>Вариант № 24</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 24                  | 54 | 00 | 07 | 45 | 26 | 89 | 80 | 00 | 93 |
| 64                  | 96 | 47 | 05 | 33 | 64 | 89 | 47 | 47 | 42 |
| 23                  | 04 | 24 | 06 | 39 | 20 | 11 | 74 | 24 | 52 |
| 37                  | 83 | 42 | 17 | 16 | 06 | 28 | 89 | 42 | 80 |
| 27                  | 71 | 14 | 37 | 56 | 98 | 14 | 50 | 14 | 65 |
| 33                  | 35 | 13 | 54 | 53 | 62 | 96 | 97 | 77 | 31 |
| 24                  | 80 | 52 | 40 | 48 | 37 | 54 | 63 | 20 | 20 |
| 15                  | 95 | 66 | 00 | 14 | 00 | 23 | 74 | 18 | 46 |
| 43                  | 23 | 60 | 02 | 98 | 10 | 35 | 52 | 45 | 09 |
| 31                  | 01 | 02 | 46 | 25 | 74 | 63 | 45 | 05 | 33 |
| <b>Вариант № 25</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 68                  | 69 | 13 | 48 | 56 | 87 | 15 | 76 | 13 | 49 |

|                     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 21                  | 70 | 80 | 02 | 75 | 77 | 55 | 73 | 80 | 22 |
| 98                  | 74 | 52 | 06 | 62 | 96 | 38 | 27 | 52 | 07 |
| 17                  | 86 | 91 | 33 | 90 | 76 | 52 | 01 | 91 | 35 |
| 97                  | 03 | 43 | 53 | 67 | 19 | 64 | 50 | 43 | 93 |
| 91                  | 82 | 60 | 89 | 73 | 28 | 59 | 78 | 93 | 46 |
| 97                  | 79 | 01 | 71 | 39 | 19 | 02 | 52 | 52 | 94 |
| 20                  | 15 | 12 | 33 | 04 | 87 | 95 | 01 | 25 | 10 |
| 34                  | 67 | 35 | 48 | 25 | 76 | 09 | 95 | 80 | 73 |
| 23                  | 20 | 90 | 25 | 89 | 60 | 42 | 67 | 88 | 26 |
| <b>Вариант № 26</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 63                  | 37 | 96 | 17 | 22 | 73 | 20 | 88 | 96 | 98 |
| 82                  | 84 | 70 | 29 | 17 | 16 | 50 | 53 | 70 | 44 |
| 01                  | 32 | 42 | 31 | 59 | 39 | 80 | 82 | 42 | 77 |
| 79                  | 43 | 75 | 87 | 06 | 53 | 40 | 41 | 92 | 68 |
| 21                  | 11 | 34 | 40 | 59 | 87 | 16 | 86 | 84 | 20 |
| 68                  | 93 | 59 | 14 | 83 | 16 | 52 | 25 | 26 | 37 |
| 40                  | 21 | 95 | 25 | 93 | 63 | 60 | 65 | 43 | 64 |
| 13                  | 74 | 67 | 00 | 54 | 78 | 80 | 40 | 29 | 50 |
| 15                  | 14 | 85 | 56 | 30 | 67 | 01 | 66 | 68 | 54 |
| 87                  | 62 | 67 | 48 | 13 | 07 | 97 | 03 | 20 | 11 |
| <b>Вариант № 27</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 54                  | 04 | 15 | 74 | 81 | 79 | 32 | 97 | 92 | 08 |
| 84                  | 17 | 50 | 53 | 82 | 44 | 40 | 21 | 95 | 70 |
| 32                  | 59 | 80 | 82 | 01 | 77 | 13 | 74 | 67 | 42 |
| 01                  | 11 | 50 | 75 | 90 | 84 | 36 | 93 | 68 | 39 |
| 40                  | 48 | 10 | 00 | 39 | 20 | 12 | 86 | 07 | 94 |
| 65                  | 19 | 75 | 10 | 49 | 60 | 85 | 57 | 08 | 48 |
| 25                  | 93 | 63 | 60 | 29 | 65 | 16 | 43 | 70 | 64 |
| 00                  | 54 | 78 | 80 | 31 | 40 | 39 | 29 | 42 | 50 |
| 72                  | 68 | 03 | 91 | 03 | 62 | 86 | 76 | 39 | 62 |
| 46                  | 37 | 97 | 55 | 42 | 64 | 11 | 96 | 94 | 07 |
| <b>Вариант № 28</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 18                  | 29 | 73 | 48 | 56 | 87 | 15 | 76 | 13 | 59 |
| 55                  | 70 | 80 | 02 | 75 | 77 | 12 | 73 | 32 | 01 |
| 24                  | 74 | 52 | 06 | 62 | 96 | 38 | 27 | 52 | 07 |
| 17                  | 86 | 91 | 33 | 90 | 76 | 52 | 01 | 91 | 35 |
| 64                  | 03 | 43 | 53 | 67 | 19 | 64 | 50 | 43 | 93 |
| 91                  | 82 | 60 | 89 | 73 | 28 | 59 | 78 | 93 | 46 |
| 97                  | 79 | 01 | 71 | 39 | 19 | 02 | 52 | 52 | 94 |

|                     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 20                  | 15 | 12 | 33 | 04 | 87 | 95 | 01 | 25 | 10 |
| 34                  | 67 | 35 | 48 | 25 | 76 | 09 | 95 | 80 | 73 |
| 23                  | 20 | 90 | 25 | 89 | 60 | 42 | 67 | 88 | 34 |
| <b>Вариант № 29</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 13                  | 68 | 69 | 48 | 56 | 87 | 15 | 76 | 13 | 49 |
| 80                  | 21 | 70 | 02 | 75 | 77 | 55 | 73 | 80 | 22 |
| 52                  | 98 | 74 | 06 | 62 | 96 | 38 | 27 | 52 | 07 |
| 91                  | 17 | 86 | 33 | 90 | 76 | 52 | 01 | 91 | 35 |
| 43                  | 97 | 03 | 53 | 67 | 19 | 64 | 50 | 43 | 93 |
| 91                  | 82 | 60 | 89 | 73 | 28 | 59 | 78 | 93 | 46 |
| 97                  | 79 | 01 | 71 | 39 | 19 | 02 | 52 | 52 | 94 |
| 20                  | 15 | 12 | 33 | 04 | 87 | 95 | 01 | 25 | 10 |
| 34                  | 67 | 35 | 48 | 25 | 76 | 09 | 95 | 80 | 73 |
| 23                  | 20 | 90 | 25 | 89 | 60 | 42 | 67 | 88 | 26 |
| <b>Вариант № 30</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 87                  | 48 | 63 | 35 | 82 | 46 | 05 | 32 | 54 | 09 |
| 03                  | 78 | 73 | 53 | 52 | 93 | 03 | 62 | 96 | 44 |
| 13                  | 69 | 99 | 48 | 56 | 78 | 87 | 15 | 76 | 68 |
| 64                  | 01 | 88 | 00 | 47 | 36 | 86 | 50 | 75 | 93 |
| 71                  | 50 | 65 | 74 | 95 | 03 | 17 | 46 | 85 | 86 |
| 70                  | 90 | 55 | 35 | 75 | 21 | 48 | 57 | 28 | 33 |
| 47                  | 35 | 80 | 83 | 42 | 57 | 82 | 79 | 60 | 64 |
| 49                  | 91 | 82 | 60 | 89 | 73 | 28 | 59 | 93 | 46 |
| 84                  | 36 | 76 | 66 | 79 | 02 | 51 | 68 | 90 | 54 |
| 09                  | 58 | 04 | 77 | 69 | 76 | 74 | 48 | 73 | 11 |

Таблица 2. Данные для задания № 2 ИЗ – 1

| варианты |       |   |   |    |    |    | варианты  |       |   |    |    |    |    |
|----------|-------|---|---|----|----|----|-----------|-------|---|----|----|----|----|
| <b>1</b> | $x_i$ | 1 | 2 | 5  | 7  | 12 | <b>16</b> | $x_i$ | 3 | 6  | 8  | 12 | 25 |
|          | $n_i$ | 2 | 4 | 13 | 1  | 5  |           | $n_i$ | 2 | 4  | 13 | 6  | 4  |
| <b>2</b> | $x_i$ | 3 | 4 | 6  | 8  | 16 | <b>17</b> | $x_i$ | 3 | 5  | 13 | 17 | 23 |
|          | $n_i$ | 2 | 5 | 8  | 3  | 5  |           | $n_i$ | 2 | 4  | 13 | 1  | 5  |
| <b>3</b> | $x_i$ | 2 | 4 | 7  | 6  | 17 | <b>18</b> | $x_i$ | 1 | 3  | 4  | 7  | 32 |
|          | $n_i$ | 8 | 9 | 12 | 3  | 6  |           | $n_i$ | 7 | 13 | 15 | 5  | 18 |
| <b>4</b> | $x_i$ | 5 | 7 | 9  | 14 | 16 | <b>19</b> | $x_i$ | 4 | 10 | 12 | 14 | 20 |
|          | $n_i$ | 5 | 9 | 2  | 4  | 13 |           | $n_i$ | 6 | 13 | 4  | 7  | 13 |

|           |       |    |    |    |    |    |           |       |    |    |    |    |    |
|-----------|-------|----|----|----|----|----|-----------|-------|----|----|----|----|----|
| <b>5</b>  | $x_i$ | 6  | 8  | 10 | 13 | 17 | <b>20</b> | $x_i$ | 1  | 5  | 8  | 21 | 30 |
|           | $n_i$ | 15 | 22 | 3  | 7  | 8  |           | $n_i$ | 8  | 5  | 15 | 12 | 2  |
| <b>6</b>  | $x_i$ | 1  | 3  | 7  | 9  | 54 | <b>21</b> | $x_i$ | 2  | 3  | 9  | 14 | 19 |
|           | $n_i$ | 12 | 2  | 4  | 13 | 4  |           | $n_i$ | 5  | 9  | 2  | 4  | 13 |
| <b>7</b>  | $x_i$ | 5  | 7  | 9  | 16 | 29 | <b>22</b> | $x_i$ | 3  | 5  | 7  | 12 | 23 |
|           | $n_i$ | 5  | 13 | 4  | 22 | 3  |           | $n_i$ | 2  | 14 | 8  | 3  | 5  |
| <b>8</b>  | $x_i$ | 3  | 5  | 6  | 7  | 17 | <b>23</b> | $x_i$ | 4  | 5  | 9  | 15 | 18 |
|           | $n_i$ | 1  | 5  | 18 | 12 | 2  |           | $n_i$ | 12 | 2  | 4  | 13 | 4  |
| <b>9</b>  | $x_i$ | 4  | 5  | 8  | 9  | 37 | <b>24</b> | $x_i$ | 8  | 9  | 10 | 21 | 31 |
|           | $n_i$ | 2  | 4  | 13 | 13 | 4  |           | $n_i$ | 5  | 13 | 4  | 22 | 3  |
| <b>10</b> | $x_i$ | 2  | 5  | 9  | 13 | 25 | <b>25</b> | $x_i$ | 6  | 10 | 12 | 16 | 35 |
|           | $n_i$ | 8  | 12 | 2  | 22 | 3  |           | $n_i$ | 8  | 11 | 12 | 3  | 6  |
| <b>11</b> | $x_i$ | 3  | 6  | 8  | 12 | 51 | <b>26</b> | $x_i$ | 1  | 2  | 5  | 7  | 12 |
|           | $n_i$ | 7  | 13 | 20 | 5  | 18 |           | $n_i$ | 2  | 4  | 13 | 1  | 5  |
| <b>12</b> | $x_i$ | 4  | 6  | 9  | 22 | 55 | <b>27</b> | $x_i$ | 3  | 4  | 6  | 8  | 16 |
|           | $n_i$ | 6  | 13 | 4  | 7  | 13 |           | $n_i$ | 2  | 5  | 8  | 3  | 5  |
| <b>13</b> | $x_i$ | 5  | 9  | 10 | 12 | 14 | <b>28</b> | $x_i$ | 2  | 4  | 7  | 6  | 17 |
|           | $n_i$ | 8  | 5  | 18 | 12 | 2  |           | $n_i$ | 8  | 9  | 12 | 3  | 6  |
| <b>14</b> | $x_i$ | 4  | 5  | 8  | 28 | 31 | <b>29</b> | $x_i$ | 5  | 7  | 9  | 14 | 16 |
|           | $n_i$ | 14 | 8  | 2  | 4  | 13 |           | $n_i$ | 5  | 9  | 2  | 4  | 13 |
| <b>15</b> | $x_i$ | 3  | 7  | 17 | 28 | 32 | <b>30</b> | $x_i$ | 6  | 8  | 10 | 13 | 17 |
|           | $n_i$ | 22 | 3  | 12 | 2  | 5  |           | $n_i$ | 15 | 22 | 3  | 7  | 8  |

### Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите задачи математической статистики.
2. Какое обследование называется выборочным?
3. Какая совокупность объектов (наблюдений) называется генеральной? Что называется объемом генеральной совокупности?
4. Какая совокупность объектов (наблюдений) называется выборочной совокупностью или выборкой? Что называется объемом выборочной совокупности?
5. Что означает репрезентативность выборки? Как она обеспечивается?
6. Какая выборка называется повторной?
7. Какая выборка называется бесповторной?
8. Что называется вариантами?
9. Что называется вариационным рядом?
10. Что называется частотами?
11. Что называется относительными частотами?
12. Что называется размахом вариационного ряда?
13. Что называется таблицей статистического распределения выборки?

14. Что называется накопленной частотой?
15. Что называется интервальным вариационным рядом?
16. Запишите формулу Стёрджесса. Что она позволяет найти?
17. Что называется полигоном частот?
18. Что называется гистограммой?
19. Как строиться кумулята?
20. Как находится выборочная средняя?
21. Что представляет собой выборочная дисперсия? (запишите две формулы)
22. Какая статистическая оценка является несмещенной?
23. Когда статистическая оценка является смещенной?
24. Как устранить смещенность выборочной дисперсии? (как найти «исправленную» выборочную дисперсию  $s^2$ )

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная литература:

1. Бондарь, В. В. (СКФУ). Математика (Теория вероятностей) : электронный ресурс : учебник / В.В. Бондарь, О.Д. Рожено и др.; ФГАОУ ВПО Сев.-Кав. федер. ун-т., Ч. 1. - Ставрополь : СКФУ, 2018.
2. Колемаев, В.А; Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : учебник / В.Н. Калинина / В.А. Колемаев ; ред. В.А. Колемаев. - Теория вероятностей и математическая статистика, - Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2017. - 352 с.
3. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - Москва : Юрайт, 2016. - 480 с. : ил. - (Бакалавр). - Гриф: Рек. УМО и МО
4. Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : учебник / П.Е. Рябов / С.Я. Криволапов / В.И. Глебов / А.В. Браилов. - Теория вероятностей и математическая статистика, 2020-08-23. - Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2016. - 414 с.

### Дополнительная литература:

1. Логинов, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : задачник / В.А. Логинов. - Теория вероятностей и математическая статистика, 2019-06-22. - Москва : Московская государственная академия водного транспорта, 2017.
2. Чайкина, И.А. Основы теории вероятностей и математической статистики Электронный ресурс : учебное пособие / И.А. Чайкина. - Ростов-на-Дону : Институт водного транспорта имени Г.Я. Седова – филиал «Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова», 2016. - 54 с.
3. Блатов, И.А. Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : учебное пособие / О.В. Старожилова / И.А. Блатов. - Самара : Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2017. - 276 с.

4. Тарасов, В.Н. Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы Электронный ресурс : учебное пособие / Н.Ф. Бахарева / В.Н. Тарасов. - Самара : Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2017. - 283 с.
5. Гриднева, И.В. Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : учебное пособие / В.П. Шацкий / Л.И. Федулова / И.В. Гриднева. - Воронеж : Воронежский Государственный Аграрный Университет им. Императора Петра Первого, 2017

#### **Методическая литература:**

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической *В.М.* : 2008
2. Гурьянова, И.Э. Теория вероятностей и математическая статистика. Теория вероятностей. Краткий курс с примерами Электронный ресурс : учебное пособие / Е.В. Левашкина / И.Э. Гурьянова. - Теория вероятностей и математическая статистика. Теория вероятностей. Краткий курс с примерами, 2019-09-01. - Москва : Издательский Дом МИСиС, 2016. - 106 с..

#### **Интернет-ресурсы:**

- [MathWorld: Wolfram Web Resource by Eric W. Weisstein](#), один из самых больших веб-сайтов по математике
- [Mathematical Atlas by Dave Rusin](#), один из самых больших веб-сайтов по математике
- [arXiv.org](#), автоматический электронный архив статей по математике
- [S.O.S. Mathematics](#): свободные материалы по математике от алгебры до [дифференциальных уравнений](#)
- [Wikipedia: Свободная энциклопедия](#) – математика
- [PlanetMath.Org](#) – Математическая энциклопедия

## 2. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

**Цель:** в результате изучения данной темы обучающийся должен быть способен осуществлять проверку статистических гипотез, необходимых для решения прикладных задач.

**Оборудование:** листы заданий для аудиторной работы, карточки с ИЗ, калькуляторы.

**Форма проведения:** занятие – практикум, включающий в себя следующие этапы: актуализация теоретических знаний, пробное решение несколькими студентами заданий у доски, самостоятельная работа студентов, контроль преподавателем индивидуальных заданий (ИЗ) студентов, выполненных самостоятельно.

**Форма контроля:** проверка выполнения ИЗ -2.

### Основные формулы

#### t - критерий Стьюдента (Проверка гипотез о равенстве средних величин)

| Правило 1.                                                                                                               | Правило 2.                                                                                                         | Правило 3.                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $H_0: M(X)=M(Y)$                                                                                                         |                                                                                                                    |                                                                                                                      |
| $H_1: M(X) \neq M(Y)$                                                                                                    | $H_1: M(X)>M(Y)$                                                                                                   | $H_1: M(X)<M(Y)$                                                                                                     |
| $t_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}$                                     |                                                                                                                    |                                                                                                                      |
| $\Phi(t_{\text{кр}}) = \frac{1 - \alpha}{2}$                                                                             | $\Phi(t_{\text{кр}}) = \frac{1 - 2\alpha}{2}$                                                                      |                                                                                                                      |
| Если $ t_{\text{набл}}  < t_{\text{кр}} \Rightarrow H_0$ .<br>Если $ t_{\text{набл}}  > t_{\text{кр}} \Rightarrow H_1$ . | Если $t_{\text{набл}} < t_{\text{кр}} \Rightarrow H_0$ .<br>Если $t_{\text{набл}} > t_{\text{кр}} \Rightarrow H_1$ | Если $t_{\text{набл}} > -t_{\text{кр}} \Rightarrow H_0$ .<br>Если $t_{\text{набл}} < -t_{\text{кр}} \Rightarrow H_1$ |

#### $\chi^2$ - критерий (Сравнение исправленной выборочной дисперсии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокупности)

| Правило 1.                                                                                                                             | Правило 2.                                                                                                                                        | Правило 3.                                                                                                                                                             |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $H_0: s^2 = s_0^2$                                                                                                                     |                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                        |
| $H_1: s^2 > s_0^2$                                                                                                                     | $H_1: s^2 \neq s_0^2$                                                                                                                             | $H_1: s^2 < s_0^2$                                                                                                                                                     |
| $\chi^2_{\text{набл}} = \frac{(n-1)s^2}{s_0^2}$                                                                                        |                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                        |
| $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k) \quad k=n-1$                                                                                            | $\chi^2_{\text{лев.кр}} = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}; k = \frac{n}{2}$<br>$\chi^2_{\text{прав.кр}} = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}; k = \frac{n}{2}$ | $\chi^2_{\text{кр}} = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}; k = \frac{n}{2}$                                                                                                    |
| Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}} \Rightarrow H_0$ .<br>Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}} \Rightarrow H_1$ | Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}} \Rightarrow H_0$ .<br>Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}} \Rightarrow H_1$ .          | Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}(1 - \alpha; k) \Rightarrow H_0$ .<br>Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}(1 - \alpha; k) \Rightarrow H_1$ . |

### Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

| Правило 1.                                                            | Правило 2.                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $H_0: D(X)=D(Y)$                                                      |                                                                                 |
| $H_1: D(X)>D(Y)$                                                      | $H_1: D(X) \neq D(Y)$                                                           |
| $F_{\text{набл}} = \frac{s_{\text{больш}}^2}{s_{\text{меньш}}^2}$     |                                                                                 |
| $F_{\text{кр}}(a; k_1; k_2) \quad k_1 = n_1 - 1; \quad k_2 = n_2 - 1$ | $F_{\text{кр}}(\frac{a}{2}; k_1; k_2) \quad k_1 = n_1 - 1; \quad k_2 = n_2 - 1$ |
| Если $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}} \Rightarrow H_0$ .              | Если $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}} \Rightarrow H_1$                          |

#### Решение типового варианта

1. По двум независимым выборкам, объемы которых  $n=40$  и  $m=50$ , извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние:  $\bar{x}=130$  и  $\bar{y}=140$ . Генеральные дисперсии известны:  $D(X)=80$ ,  $D(Y)=100$ . Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу  $H_0: M(X)=M(Y)$  при конкурирующей гипотезе  $H_1: M(X) \neq M(Y)$ .

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$t_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}} = \frac{130 - 140}{\sqrt{\frac{80}{40} + \frac{100}{50}}} = -5$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид  $M(X) \neq M(Y)$ , поэтому критическая область – двусторонняя. Найдем правую критическую точку из равенства

$$\Phi(t_{\text{кр}}) = \frac{1 - 2\alpha}{2} = \frac{1 - 0,01}{2} = 0,495$$

По таблице функции Лапласа (Приложение № 2) находим  $t_{\text{кр}}=2,58$ .

Так как  $|t_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}}$ , то в соответствии с правилом 1 нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

2. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема  $n=21$  и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия  $s^2=16,2$ . Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу  $H_0: s^2 = s_0^2=15$ , приняв в качестве конкурирующей гипотезы  $H_1: s^2 > 15$ .

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$c_{\text{набл}}^2 = \frac{(n-1)s^2}{s_0^2} = \frac{(21-1) \cdot 16,2}{15} = 21,6$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид  $s^2 > 15$ , поэтому конкурирующая гипотеза - правосторонняя (правило 1). По таблице (Приложение №4) по уровню значимости 0,01 и числу степеней свободы  $k=n-1=21-1=20$  находим критическую точку  $c_{\text{кр}}^2(0,01; 20) = 37,6$

Так как  $s_{набл}^2 < s_{кр}^2$  - нет оснований отвергать нулевую гипотезу о равенстве генеральной дисперсии гипотетическому значению  $s_0^2 = 15$ . Другими словами, различие между исправленной дисперсией (16,2) и гипотетической генеральной дисперсией (15) незначительно.

3. По двум независимым выборкам, объемы которых  $n_1=11$  и  $n_2=14$ , извлеченным из нормальных генеральных совокупностей  $X$  и  $Y$ , найдены исправленные выборочные дисперсии  $s_x^2 = 0,76$  и  $s_y^2 = 0,38$ . При уровне значимости  $\alpha = 0,05$  проверить нулевую гипотезу  $H_0: D(X)=D(Y)$  о равенстве генеральных дисперсий, при конкурирующей гипотезе  $H_1: D(X)>D(Y)$ .

Решение. Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{набл} = \frac{0,76}{0,38} = 2$$

По условию конкурирующая гипотеза имеет вид  $D(X)>D(Y)$ , поэтому критическая область правосторонняя.

По таблице (Приложение № 5), по уровню значимости  $\alpha = 0,05$  и числам степеней свободы  $k_1=n_1-1=11-1=10$  и  $k_2=n_2-1=14-1=13$  находим критическую точку

$$F_{кр}(0,05; 10; 13)=2,67$$

Так как  $F_{набл} < F_{кр}$  - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Другими словами, выборочные исправленные дисперсии различаются незначительно.

## ИЗ - 2

### 1. t- критерий Стьюдента (Проверка гипотез о равенстве средних величин)

По двум независимым выборкам  $X$  и  $Y$  (таблица 3), извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, проверьте при уровне значимости  $\alpha$  нулевую гипотезу  $H_0: M(X)=M(Y)$  при конкурирующей гипотезе  $H_1: M(X) \neq M(Y)$ .

Результат представить по следующей форме:

Дано:

|       |     |     |     |     |  |       |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|--|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$ | ... | ... | ... | ... |  | $y_i$ | ... | ... | ... | ... | ... |
| $n_i$ | ... | ... | ... | ... |  | $n_i$ | ... | ... | ... | ... | ... |

$\alpha =$

$n =$

$m =$

|                        | $\bar{x}$ | $\overline{x^2}$ | $\bar{y}$ | $\overline{y^2}$ | $D(X)$ | $D(Y)$ | $t_{набл}$ | $\Phi(t_{кр})$ | $t_{кр}$                |
|------------------------|-----------|------------------|-----------|------------------|--------|--------|------------|----------------|-------------------------|
| Формулы для нахождения | ...       | ...              | ...       | ...              | ...    | ...    | ...        | ...            | по таблице приложения 2 |
| Результат              |           |                  |           |                  |        |        |            |                |                         |

Вывод: т.к.  $|t_{набл}| (< \text{или } >) t_{кр}$ , то гипотеза ..... отвергается и принимается гипотеза ....., следовательно средние величины в двух выборках статистически ..... (различаются или не различаются).

## 2. $s^2$ - критерий (Сравнение исправленной выборочной дисперсии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокупности)

Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка (таблица 4).

Требуется при уровне значимости  $\alpha$  проверить нулевую гипотезу  $H_0: s^2 = s_0^2$ , приняв в качестве конкурирующей гипотезы  $H_1: s^2 > s_0^2$ .

Результат представить по следующей форме:

Дано:

|                        |                                                                                                                                                                                     |                  |           |               |             |                         |       |     |     |     |     |  |  |  |  |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|-----------|---------------|-------------|-------------------------|-------|-----|-----|-----|-----|--|--|--|--|
|                        | <table><tr><td><math>x_i</math></td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr><tr><td><math>n_i</math></td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr></table> | $x_i$            | ...       | ...           | ...         | ...                     | $n_i$ | ... | ... | ... | ... |  |  |  |  |
| $x_i$                  | ...                                                                                                                                                                                 | ...              | ...       | ...           |             |                         |       |     |     |     |     |  |  |  |  |
| $n_i$                  | ...                                                                                                                                                                                 | ...              | ...       | ...           |             |                         |       |     |     |     |     |  |  |  |  |
|                        | $a =$                                                                                                                                                                               | $n =$            | $s_0^2 =$ | $k = n - 1 =$ |             |                         |       |     |     |     |     |  |  |  |  |
|                        | $\bar{x}$                                                                                                                                                                           | $\overline{x^2}$ | $D(X)$    | $s^2$         | $c_{наб}^2$ | $c_{кр}^2(a; k)$        |       |     |     |     |     |  |  |  |  |
| Формулы для нахождения | ....                                                                                                                                                                                | .....            | .....     | .....         | .....       | по таблице приложения 4 |       |     |     |     |     |  |  |  |  |
| Результат              |                                                                                                                                                                                     |                  |           |               |             |                         |       |     |     |     |     |  |  |  |  |

Вывод: т.к.  $c_{наб}^2$  ( $<$  или  $>$ )  $c_{кр}^2(\alpha; k)$ , то гипотеза ..... отвергается и принимается гипотеза ....., следовательно различие между исправленной дисперсией  $s^2$  и гипотетической генеральной дисперсией  $s_0^2$  статистически ..... (значимо или незначимо).

## 3. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

Даны две независимые выборки, извлеченные из нормальных генеральных совокупностей  $X$  и  $Y$  (таблица 5). При уровне значимости  $\alpha$ , проверить нулевую гипотезу  $H_0: D(X) = D(Y)$  о равенстве генеральных дисперсий, при конкурирующей гипотезе  $H_1: D(X) > D(Y)$ . Результат представить по следующей форме:

Дано:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                |                  |                |                  |         |      |         |         |                   |                                       |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|------------------|----------------|------------------|---------|------|---------|---------|-------------------|---------------------------------------|-------|-----|-----|-----|-----|-------|-----|-----|-----|-----|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| <div><div><table><tr><td><math>x_i</math></td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr><tr><td><math>n_i</math></td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr></table></div><div><table><tr><td><math>y_i</math></td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr><tr><td><math>n_i</math></td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr></table></div></div> |                |                  |                |                  |         |      |         |         |                   |                                       | $x_i$ | ... | ... | ... | ... | $n_i$ | ... | ... | ... | ... | $y_i$ | ... | ... | ... | ... | ... | $n_i$ | ... | ... | ... | ... | ... |
| $x_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | ...            | ...              | ...            | ...              |         |      |         |         |                   |                                       |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |
| $n_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | ...            | ...              | ...            | ...              |         |      |         |         |                   |                                       |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |
| $y_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | ...            | ...              | ...            | ...              | ...     |      |         |         |                   |                                       |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |
| $n_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | ...            | ...              | ...            | ...              | ...     |      |         |         |                   |                                       |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |
| $\mathbf{a} =$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                |                  |                |                  | $k_1 =$ |      |         | $k_2 =$ |                   |                                       |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $\overline{X}$ | $\overline{x^2}$ | $\overline{y}$ | $\overline{y^2}$ | D(X)    | D(Y) | $s_x^2$ | $s_y^2$ | $F_{\text{набл}}$ | $F_{\text{кр}}(\mathbf{a}; k_1; k_2)$ |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |
| Формулы для нахождения                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | ...            | ...              | ...            | ....             | ...     | ...  | ...     | ...     |                   | по таблице приложения 5               |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |
| Результат                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                |                  |                |                  |         |      |         |         |                   |                                       |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |       |     |     |     |     |     |

Вывод: Так как  $F_{набл}$  ( $<$  или  $>$ )  $F_{кр}$  – то гипотеза ..... отвергается и принимается гипотеза ....., следовательно, выборочные исправленные дисперсии различаются статистически ..... (значимо или незначимо).

Таблица 3 Данные к заданию 1 ИЗ-2

| B  | $\alpha$ | ВЫБОРКА X |   |    |    |    | ВЫБОРКА Y |   |    |    |    |
|----|----------|-----------|---|----|----|----|-----------|---|----|----|----|
| 1  | 0,1      | $X_i$     | 2 | 5  | 7  | 12 | $y_i$     | 7 | 15 | 16 | 22 |
|    |          | $N_i$     | 4 | 7  | 1  | 5  | $N_i$     | 8 | 2  | 7  | 1  |
| 2  | 0,05     | $X_i$     | 4 | 6  | 8  | 16 | $y_i$     | 6 | 8  | 9  | 26 |
|    |          | $N_i$     | 5 | 8  | 3  | 5  | $N_i$     | 6 | 2  | 5  | 8  |
| 3  | 0,02     | $X_i$     | 4 | 7  | 6  | 17 | $y_i$     | 6 | 8  | 10 | 13 |
|    |          | $N_i$     | 9 | 4  | 3  | 6  | $N_i$     | 1 | 3  | 7  | 2  |
| 4  | 0,01     | $X_i$     | 7 | 9  | 14 | 16 | $y_i$     | 4 | 7  | 8  | 21 |
|    |          | $N_i$     | 9 | 2  | 4  | 5  | $N_i$     | 5 | 5  | 6  | 2  |
| 5  | 0,02     | $X_i$     | 8 | 10 | 13 | 17 | $y_i$     | 7 | 9  | 20 | 36 |
|    |          | $N_i$     | 6 | 3  | 7  | 8  | $N_i$     | 4 | 3  | 1  | 3  |
| 6  | 0,001    | $X_i$     | 3 | 7  | 9  | 54 | $y_i$     | 6 | 8  | 12 | 25 |
|    |          | $N_i$     | 2 | 4  | 3  | 4  | $N_i$     | 4 | 5  | 6  | 4  |
| 7  | 0,1      | $X_i$     | 7 | 9  | 16 | 29 | $y_i$     | 5 | 13 | 17 | 23 |
|    |          | $N_i$     | 3 | 4  | 5  | 3  | $N_i$     | 4 | 3  | 1  | 5  |
| 8  | 0,05     | $X_i$     | 5 | 6  | 7  | 17 | $y_i$     | 3 | 4  | 7  | 32 |
|    |          | $N_i$     | 5 | 4  | 2  | 2  | $N_i$     | 8 | 4  | 5  | 1  |
| 9  | 0,02     | $X_i$     | 5 | 8  | 9  | 37 | $y_i$     | 7 | 15 | 16 | 22 |
|    |          | $N_i$     | 4 | 5  | 3  | 4  | $N_i$     | 8 | 2  | 7  | 1  |
| 10 | 0,01     | $X_i$     | 5 | 9  | 13 | 25 | $y_i$     | 5 | 8  | 9  | 26 |
|    |          | $N_i$     | 7 | 2  | 2  | 3  | $N_i$     | 7 | 5  | 5  | 3  |
| 11 | 0,02     | $X_i$     | 6 | 8  | 12 | 51 | $y_i$     | 6 | 8  | 10 | 13 |
|    |          | $N_i$     | 6 | 3  | 5  | 3  | $N_i$     | 2 | 3  | 7  | 8  |
| 12 | 0,001    | $X_i$     | 6 | 9  | 22 | 55 | $y_i$     | 4 | 7  | 8  | 21 |
|    |          | $N_i$     | 5 | 4  | 7  | 2  | $N_i$     | 5 | 3  | 4  | 2  |
| 13 | 0,1      | $X_i$     | 9 | 10 | 12 | 14 | $y_i$     | 7 | 9  | 20 | 36 |
|    |          | $N_i$     | 5 | 4  | 3  | 2  | $N_i$     | 1 | 3  | 5  | 3  |
| 14 | 0,05     | $X_i$     | 5 | 8  | 28 | 31 | $y_i$     | 6 | 8  | 12 | 25 |
|    |          | $N_i$     | 8 | 2  | 4  | 3  | $N_i$     | 4 | 3  | 6  | 4  |
| 15 | 0,02     | $X_i$     | 7 | 17 | 28 | 32 | $y_i$     | 5 | 13 | 17 | 23 |
|    |          | $N_i$     | 3 | 2  | 2  | 5  | $N_i$     | 4 | 3  | 1  | 5  |

|    |       |       |   |    |    |    |       |   |   |   |    |
|----|-------|-------|---|----|----|----|-------|---|---|---|----|
| 16 | 0,01  | $X_i$ | 7 | 15 | 16 | 22 | $y_i$ | 1 | 2 | 5 | 7  |
|    |       | $N_i$ | 8 | 2  | 7  | 7  | $N_i$ | 2 | 4 | 3 | 1  |
| 17 | 0,02  | $X_i$ | 6 | 8  | 9  | 26 | $y_i$ | 3 | 4 | 6 | 8  |
|    |       | $N_i$ | 6 | 1  | 5  | 8  | $N_i$ | 2 | 5 | 8 | 3  |
| 18 | 0,001 | $X_i$ | 6 | 8  | 4  | 3  | $y_i$ | 2 | 4 | 7 | 6  |
|    |       | $N_i$ | 4 | 3  | 7  | 2  | $N_i$ | 8 | 5 | 2 | 3  |
| 19 | 0,1   | $X_i$ | 4 | 7  | 8  | 21 | $y_i$ | 5 | 7 | 9 | 14 |

|    |       |       |   |    |    |    |       |   |    |    |    |
|----|-------|-------|---|----|----|----|-------|---|----|----|----|
|    |       | $N_I$ | 5 | 3  | 5  | 2  | $N_I$ | 5 | 9  | 2  | 4  |
| 20 | 0,05  | $X_I$ | 7 | 9  | 20 | 36 | $y_I$ | 6 | 8  | 10 | 13 |
|    |       | $N_I$ | 2 | 3  | 6  | 3  | $N_I$ | 5 | 2  | 3  | 7  |
| 21 | 0,02  | $X_I$ | 6 | 8  | 12 | 25 | $y_I$ | 1 | 3  | 7  | 9  |
|    |       | $N_I$ | 4 | 2  | 6  | 4  | $N_I$ | 3 | 2  | 4  | 3  |
| 22 | 0,01  | $X_I$ | 5 | 13 | 17 | 23 | $y_I$ | 5 | 7  | 9  | 16 |
|    |       | $N_I$ | 4 | 5  | 1  | 5  | $N_I$ | 5 | 1  | 4  | 2  |
| 23 | 0,02  | $X_I$ | 3 | 4  | 7  | 32 | $y_I$ | 3 | 5  | 6  | 7  |
|    |       | $N_I$ | 7 | 2  | 5  | 3  | $N_I$ | 1 | 5  | 2  | 12 |
| 24 | 0,1   | $X_I$ | 2 | 5  | 7  | 12 | $y_I$ | 7 | 15 | 16 | 22 |
|    |       | $N_I$ | 4 | 7  | 1  | 5  | $N_I$ | 8 | 2  | 7  | 1  |
| 25 | 0,05  | $X_I$ | 4 | 6  | 8  | 16 | $y_I$ | 6 | 8  | 9  | 26 |
|    |       | $N_I$ | 5 | 8  | 3  | 5  | $N_I$ | 6 | 2  | 5  | 8  |
| 26 | 0,02  | $X_I$ | 4 | 7  | 6  | 17 | $y_I$ | 6 | 8  | 10 | 13 |
|    |       | $N_I$ | 9 | 4  | 3  | 6  | $N_I$ | 1 | 3  | 7  | 2  |
| 27 | 0,01  | $X_I$ | 7 | 9  | 14 | 16 | $y_I$ | 4 | 7  | 8  | 21 |
|    |       | $N_I$ | 9 | 2  | 4  | 5  | $N_I$ | 5 | 5  | 6  | 2  |
| 28 | 0,02  | $X_I$ | 8 | 10 | 13 | 17 | $y_I$ | 7 | 9  | 20 | 36 |
|    |       | $N_I$ | 6 | 3  | 7  | 8  | $N_I$ | 4 | 3  | 1  | 3  |
| 29 | 0,001 | $X_I$ | 3 | 7  | 9  | 54 | $y_I$ | 6 | 8  | 12 | 25 |
|    |       | $N_I$ | 2 | 4  | 3  | 4  | $N_I$ | 4 | 5  | 6  | 4  |
| 30 | 0,1   | $X_I$ | 7 | 9  | 16 | 29 | $y_I$ | 5 | 13 | 17 | 23 |
|    |       | $N_I$ | 3 | 4  | 5  | 3  | $N_I$ | 4 | 3  | 1  | 5  |

Таблица 4 Данные к заданию 2 ДЗ-2

| <b>В</b>  | <b>ВЫБОРКА</b> |   |    |    |    | <b>а</b> | <b><math>s^2_0</math></b> |
|-----------|----------------|---|----|----|----|----------|---------------------------|
| <b>1</b>  | $x_i$          | 3 | 7  | 9  | 54 | 0,01     | 128                       |
|           | $N_i$          | 2 | 4  | 3  | 4  |          |                           |
| <b>2</b>  | $x_i$          | 7 | 9  | 16 | 29 | 0,025    | 17                        |
|           | $N_i$          | 3 | 4  | 5  | 3  |          |                           |
| <b>3</b>  | $x_i$          | 5 | 6  | 7  | 17 | 0,05     | 53                        |
|           | $N_i$          | 5 | 4  | 2  | 2  |          |                           |
| <b>4</b>  | $x_i$          | 5 | 8  | 9  | 37 | 0,01     | 112                       |
|           | $N_i$          | 4 | 5  | 3  | 4  |          |                           |
| <b>5</b>  | $x_i$          | 5 | 9  | 13 | 25 | 0,025    | 68                        |
|           | $N_i$          | 7 | 2  | 2  | 3  |          |                           |
| <b>6</b>  | $x_i$          | 6 | 8  | 12 | 51 | 0,05     | 48                        |
|           | $N_i$          | 6 | 3  | 5  | 3  |          |                           |
| <b>7</b>  | $x_i$          | 6 | 9  | 22 | 55 | 0,01     | 86                        |
|           | $N_i$          | 5 | 4  | 7  | 2  |          |                           |
| <b>8</b>  | $x_i$          | 9 | 10 | 12 | 14 | 0,025    | 18                        |
|           | $N_i$          | 5 | 4  | 3  | 2  |          |                           |
| <b>9</b>  | $x_i$          | 5 | 8  | 28 | 31 | 0,05     | 122                       |
|           | $N_i$          | 8 | 2  | 4  | 3  |          |                           |
| <b>10</b> | $x_i$          | 7 | 17 | 28 | 32 | 0,01     | 57                        |
|           | $N_i$          | 3 | 2  | 2  | 5  |          |                           |
| <b>11</b> | $x_i$          | 7 | 15 | 16 | 22 | 0,025    | 69                        |
|           | $N_i$          | 8 | 2  | 7  | 7  |          |                           |
| <b>12</b> | $x_i$          | 6 | 8  | 9  | 26 | 0,05     | 65                        |
|           | $N_i$          | 6 | 1  | 5  | 8  |          |                           |
| <b>13</b> | $x_i$          | 6 | 8  | 4  | 3  | 0,01     | 89                        |
|           | $N_i$          | 4 | 3  | 7  | 2  |          |                           |
| <b>14</b> | $x_i$          | 4 | 7  | 8  | 21 | 0,025    | 99                        |
|           | $N_i$          | 5 | 3  | 5  | 2  |          |                           |
| <b>15</b> | $x_i$          | 7 | 9  | 20 | 36 | 0,05     | 151                       |
|           | $N_i$          | 2 | 3  | 6  | 3  |          |                           |
| <b>16</b> | $x_i$          | 6 | 8  | 12 | 25 | 0,01     | 52                        |
|           | $N_i$          | 4 | 2  | 6  | 4  |          |                           |
| <b>17</b> | $x_i$          | 5 | 13 | 17 | 23 | 0,025    | 58                        |
|           | $N_i$          | 4 | 5  | 1  | 5  |          |                           |
| <b>18</b> | $x_i$          | 3 | 4  | 7  | 32 | 0,05     | 21                        |
|           | $N_i$          | 7 | 2  | 5  | 3  |          |                           |

|    |       |   |    |    |    |       |     |
|----|-------|---|----|----|----|-------|-----|
| 19 | $x_i$ | 7 | 15 | 16 | 22 | 0,01  | 146 |
|    | $n_i$ | 8 | 2  | 7  | 1  |       |     |
| 20 | $x_i$ | 6 | 8  | 9  | 26 | 0,025 | 59  |
|    | $x_i$ | 6 | 2  | 5  | 8  | 0,01  | 52  |
| 21 | $x_i$ | 6 | 8  | 10 | 13 | 0,05  | 21  |
|    | $n_i$ | 1 | 3  | 7  | 2  |       |     |
| 22 | $x_i$ | 4 | 7  | 8  | 21 | 0,01  | 87  |
|    | $n_i$ | 5 | 5  | 6  | 2  |       |     |
| 23 | $x_i$ | 7 | 9  | 20 | 36 | 0,025 | 95  |
|    | $n_i$ | 4 | 3  | 1  | 3  |       |     |
| 24 | $x_i$ | 3 | 7  | 9  | 54 | 0,01  | 128 |
|    | $n_i$ | 2 | 4  | 3  | 4  |       |     |
| 25 | $x_i$ | 7 | 9  | 16 | 29 | 0,025 | 17  |
|    | $n_i$ | 3 | 4  | 5  | 3  |       |     |
| 26 | $x_i$ | 5 | 6  | 7  | 17 | 0,05  | 53  |
|    | $n_i$ | 5 | 4  | 2  | 2  |       |     |
| 27 | $x_i$ | 5 | 8  | 9  | 37 | 0,01  | 112 |
|    | $n_i$ | 4 | 5  | 3  | 4  |       |     |
| 28 | $x_i$ | 5 | 9  | 13 | 25 | 0,025 | 68  |
|    | $n_i$ | 7 | 2  | 2  | 3  |       |     |
| 29 | $x_i$ | 6 | 8  | 12 | 51 | 0,05  | 48  |
|    | $n_i$ | 6 | 3  | 5  | 3  |       |     |
| 30 | $x_i$ | 6 | 9  | 22 | 55 | 0,01  | 86  |
|    | $n_i$ | 5 | 4  | 7  | 2  |       |     |

Таблица 5 Данные к заданию 3 ИЗ-2

| В | а    | ВЫБОРКА X |   |    |    |    | ВЫБОРКА Y |   |   |    |    |
|---|------|-----------|---|----|----|----|-----------|---|---|----|----|
| 1 | 0,01 | $x_i$     | 6 | 8  | 12 | 51 | $y_i$     | 6 | 9 | 22 | 55 |
|   |      | $n_i$     | 2 | 3  | 5  | 3  | $n_i$     | 1 | 4 | 3  | 2  |
| 2 | 0,05 | $x_i$     | 5 | 13 | 17 | 23 | $y_i$     | 6 | 8 | 10 | 13 |
|   |      | $n_i$     | 4 | 2  | 1  | 5  | $n_i$     | 2 | 3 | 4  | 1  |
| 3 | 0,01 | $x_i$     | 6 | 9  | 22 | 55 | $y_i$     | 4 | 7 | 8  | 21 |
|   |      | $n_i$     | 3 | 4  | 1  | 2  | $n_i$     | 3 | 3 | 4  | 2  |
| 4 | 0,05 | $x_i$     | 5 | 7  | 9  | 16 | $y_i$     | 4 | 7 | 8  | 21 |
|   |      | $n_i$     | 5 | 1  | 4  | 2  | $n_i$     | 3 | 3 | 4  | 2  |
| 5 | 0,01 | $x_i$     | 6 | 8  | 12 | 25 | $y_i$     | 7 | 9 | 20 | 36 |

|    |      |       |   |    |    |    |       |   |    |    |    |
|----|------|-------|---|----|----|----|-------|---|----|----|----|
|    |      | $N_i$ | 4 | 2  | 3  | 4  | $N_i$ | 2 | 3  | 4  | 3  |
| 6  | 0,05 | $x_i$ | 1 | 3  | 7  | 9  | $y_i$ | 6 | 8  | 10 | 13 |
|    |      | $N_i$ | 3 | 2  | 4  | 3  | $N_i$ | 5 | 2  | 3  | 2  |
| 7  | 0,01 | $x_i$ | 2 | 4  | 7  | 6  | $y_i$ | 4 | 7  | 8  | 21 |
|    |      | $N_i$ | 1 | 5  | 2  | 3  | $N_i$ | 5 | 3  | 2  | 2  |
| 8  | 0,05 | $x_i$ | 5 | 7  | 9  | 14 | $y_i$ | 6 | 8  | 4  | 3  |
|    |      | $N_i$ | 2 | 3  | 2  | 4  | $N_i$ | 4 | 3  | 2  | 2  |
| 9  | 0,01 | $x_i$ | 1 | 2  | 5  | 7  | $y_i$ | 6 | 8  | 9  | 26 |
|    |      | $N_i$ | 2 | 4  | 3  | 1  | $N_i$ | 3 | 1  | 5  | 2  |
| 10 | 0,05 | $x_i$ | 3 | 4  | 6  | 8  | $y_i$ | 7 | 15 | 16 | 22 |
|    |      | $N_i$ | 2 | 5  | 1  | 3  | $N_i$ | 4 | 2  | 3  | 1  |
| 11 | 0,01 | $x_i$ | 6 | 8  | 12 | 25 | $y_i$ | 7 | 17 | 28 | 32 |
|    |      | $N_i$ | 4 | 3  | 1  | 4  | $N_i$ | 3 | 2  | 2  | 5  |
| 12 | 0,05 | $x_i$ | 5 | 13 | 17 | 23 | $y_i$ | 5 | 8  | 28 | 31 |
|    |      | $N_i$ | 4 | 3  | 1  | 5  | $N_i$ | 1 | 2  | 4  | 3  |
| 13 | 0,01 | $x_i$ | 7 | 9  | 20 | 36 | $y_i$ | 9 | 10 | 12 | 14 |
|    |      | $N_i$ | 1 | 3  | 5  | 3  | $N_i$ | 1 | 4  | 3  | 2  |
| 14 | 0,05 | $x_i$ | 5 | 8  | 9  | 26 | $y_i$ | 6 | 9  | 22 | 55 |
|    |      | $N_i$ | 1 | 2  | 5  | 3  | $N_i$ | 5 | 4  | 1  | 2  |
| 15 | 0,01 | $x_i$ | 4 | 7  | 8  | 21 | $y_i$ | 5 | 9  | 13 | 25 |
|    |      | $N_i$ | 4 | 3  | 4  | 2  | $N_i$ | 1 | 2  | 2  | 3  |

|    |      |       |   |    |    |    |       |   |    |    |    |
|----|------|-------|---|----|----|----|-------|---|----|----|----|
| 16 | 0,05 | $x_i$ | 3 | 4  | 7  | 32 | $y_i$ | 5 | 8  | 9  | 37 |
|    |      | $N_i$ | 2 | 4  | 5  | 1  | $N_i$ | 4 | 1  | 3  | 4  |
| 17 | 0,01 | $x_i$ | 7 | 15 | 16 | 22 | $y_i$ | 5 | 6  | 7  | 17 |
|    |      | $N_i$ | 1 | 2  | 4  | 1  | $N_i$ | 5 | 4  | 2  | 2  |
| 18 | 0,05 | $x_i$ | 5 | 13 | 17 | 23 | $y_i$ | 7 | 9  | 16 | 29 |
|    |      | $N_i$ | 4 | 3  | 1  | 5  | $N_i$ | 3 | 4  | 2  | 3  |
| 19 | 0,01 | $x_i$ | 7 | 9  | 20 | 36 | $y_i$ | 3 | 7  | 9  | 54 |
|    |      | $N_i$ | 4 | 3  | 1  | 3  | $N_i$ | 2 | 4  | 3  | 4  |
| 20 | 0,05 | $x_i$ | 6 | 8  | 12 | 25 | $y_i$ | 8 | 10 | 13 | 17 |
|    |      | $N_i$ | 4 | 2  | 1  | 4  | $N_i$ | 6 | 3  | 2  | 1  |
| 21 | 0,01 | $x_i$ | 4 | 7  | 8  | 21 | $y_i$ | 7 | 9  | 14 | 16 |
|    |      | $N_i$ | 1 | 1  | 6  | 2  | $N_i$ | 1 | 2  | 4  | 5  |
| 22 | 0,05 | $x_i$ | 6 | 8  | 9  | 26 | $y_i$ | 4 | 7  | 6  | 17 |
|    |      | $N_i$ | 1 | 2  | 5  | 1  | $N_i$ | 1 | 4  | 5  | 2  |
| 23 | 0,05 | $x_i$ | 5 | 13 | 17 | 23 | $y_i$ | 7 | 9  | 16 | 29 |
|    |      | $N_i$ | 4 | 3  | 1  | 5  | $N_i$ | 3 | 4  | 2  | 3  |
| 24 | 0,01 | $x_i$ | 6 | 8  | 12 | 51 | $y_i$ | 6 | 9  | 22 | 55 |

|    |      |       |   |    |    |    |       |   |   |    |    |
|----|------|-------|---|----|----|----|-------|---|---|----|----|
|    |      | $N_i$ | 2 | 3  | 5  | 3  | $N_i$ | 1 | 4 | 3  | 2  |
| 25 | 0,05 | $x_i$ | 5 | 13 | 17 | 23 | $y_i$ | 6 | 8 | 10 | 13 |
|    |      | $N_i$ | 4 | 2  | 1  | 5  | $N_i$ | 2 | 3 | 4  | 1  |
| 26 | 0,01 | $x_i$ | 6 | 9  | 22 | 55 | $y_i$ | 4 | 7 | 8  | 21 |
|    |      | $N_i$ | 3 | 4  | 1  | 2  | $N_i$ | 3 | 3 | 4  | 2  |
| 27 | 0,05 | $x_i$ | 5 | 7  | 9  | 16 | $y_i$ | 4 | 7 | 8  | 21 |
|    |      | $N_i$ | 5 | 1  | 4  | 2  | $N_i$ | 3 | 3 | 4  | 2  |
| 28 | 0,01 | $x_i$ | 6 | 8  | 12 | 25 | $y_i$ | 7 | 9 | 20 | 36 |
|    |      | $N_i$ | 4 | 2  | 3  | 4  | $N_i$ | 2 | 3 | 4  | 3  |
| 29 | 0,05 | $x_i$ | 1 | 3  | 7  | 9  | $y_i$ | 6 | 8 | 10 | 13 |
|    |      | $N_i$ | 3 | 2  | 4  | 3  | $N_i$ | 5 | 2 | 3  | 2  |
| 30 | 0,01 | $x_i$ | 2 | 4  | 7  | 6  | $y_i$ | 4 | 7 | 8  | 21 |
|    |      | $N_i$ | 1 | 5  | 2  | 3  | $N_i$ | 5 | 3 | 2  | 2  |

## Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение статистической гипотезы.
2. Что такое статистический критерий?
3. Какая гипотеза может быть нулевой? альтернативной?
4. Объясните, что такое ошибка первого рода.
5. Объясните, что такое ошибка второго рода.
6. Можно ли одновременно уменьшить ошибки первого и второго рода?
7. Объясните, что такое левосторонняя, правосторонняя и двусторонняя критические области.
8. В чем состоит алгоритм проверки статистической гипотезы?

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная литература:

1. Бондарь, В. В. (СКФУ). Математика (Теория вероятностей) : электронный ресурс : учебник / В.В. Бондарь, О.Д. Роженко и др.; ФГАОУ ВПО Сев.-Кав. федер. ун-т., Ч. 1. - Ставрополь : СКФУ, 2018.
2. Колемаев, В.А; Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : учебник / В.Н. Калинина / В.А. Колемаев ; ред. В.А. Колемаев. - Теория вероятностей и математическая статистика, - Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2017. - 352 с.
3. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - Москва : Юрайт, 2016. - 480 с. : ил. - (Бакалавр). - Гриф: Рек. УМО и МО
4. Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : учебник / П.Е. Рябов / С.Я. Криволапов / В.И. Глебов / А.В. Браилов. - Теория вероятностей и математиче-

ская статистика, 2020-08-23. - Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2016. - 414 с.

#### **Дополнительная литература:**

1. Логинов, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : задачник / В.А. Логинов. - Теория вероятностей и математическая статистика, 2019-06-22. - Москва : Московская государственная академия водного транспорта, 2017.
2. Чайкина, И.А. Основы теории вероятностей и математической статистики Электронный ресурс : учебное пособие / И.А. Чайкина. - Ростов-на-Дону : Институт водного транспорта имени Г.Я. Седова – филиал «Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова», 2016. - 54 с.
3. Блатов, И.А. Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : учебное пособие / О.В. Старожилова / И.А. Блатов. - Самара : Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2017. - 276 с.
4. Тарасов, В.Н. Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы Электронный ресурс : учебное пособие / Н.Ф. Бахарева / В.Н. Тарасов. - Самара : Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2017. - 283 с.
5. Гриднева, И.В. Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : учебное пособие / В.П. Шацкий / Л.И. Федулова / И.В. Гриднева. - Воронеж : Воронежский Государственный Аграрный Университет им. Императора Петра Первого, 2017

#### **Методическая литература:**

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. В.М. : 2008
2. Гурьянова, И.Э. Теория вероятностей и математическая статистика. Теория вероятностей. Краткий курс с примерами Электронный ресурс : учебное пособие / Е.В. Левашкина / И.Э. Гурьянова. - Теория вероятностей и математическая статистика. Теория вероятностей. Краткий курс с примерами, 2019-09-01. - Москва : Издательский Дом МИСиС, 2016. - 106 с..

#### **Интернет-ресурсы:**

- [MathWorld: Wolfram Web Resource by Eric W. Weisstein](#), один из самых больших веб-сайтов по математике
- [Mathematical Atlas by Dave Rusin](#), один из самых больших веб-сайтов по математике
- [arXiv.org](#), автоматический электронный архив статей по математике
- [S.O.S. Mathematics](#): свободные материалы по математике от алгебры до [дифференциальных уравнений](#)
- [Wikipedia: Свободная энциклопедия](#) – математика
- [PlanetMath.Org](#) – Математическая энциклопедия

### 3. КРИТЕРИЙ СОГЛАСИЯ ПИРСОНА

**Цель:** в результате изучения данной темы обучающийся должен быть способен осуществлять проверку гипотезы о законе распределения изучаемого признака, что необходимо для решения прикладных задач.

**Оборудование:** листы заданий для аудиторной работы, карточки с ИЗ, калькуляторы.

**Форма проведения:** занятие – практикум, включающий в себя следующие этапы: актуализация теоретических знаний, пробное решение несколькими студентами заданий у доски, самостоятельная работа студентов, контроль преподавателем индивидуальных заданий (ИЗ) студентов, выполненных самостоятельно.

**Форма контроля:** проверка выполнения ИЗ -3.

#### Ход работы

1. Сгруппировать экспериментальные данные;
2. Построить гистограмму равновероятностным способом;
3. По виду гистограммы выдвинуть нулевую гипотезу  $H_0$ : генеральная совокупность распределена нормально, конкурирующая гипотеза  $H_1$  отвергает это предположение;
4. Найти числовые характеристики выборки  $\bar{x}$ ;  $D_x$ ;  $s$ ;
5. Начало каждого интервала заменить на  $-\frac{\sqrt{s}}{2}$ , конец последнего интервала заменить на  $+\frac{\sqrt{s}}{2}$ ;
6. Вычислить  $\frac{x_i - \bar{x}}{s}$  и  $\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{s}$  для каждого интервала;
7. По таблице значений функции Лапласа (Приложения 2) найти значения функции Лапласа для каждого значения  $x_i$ :  $\Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)$  и  $\Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{s}\right)$ ;
8. Вычислить значение вероятности по формуле  $p_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)$ ;
9. Найти теоретические частоты для каждого интервала  $n_i^T = n \cdot p_i$ ;
10. Вычислить наблюдаемое значение критерия: 
$$c_{\text{набл}}^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n_i^T)^2}{n_i^T}$$
11. Найти число степеней свободы:  $k = m - r - 1$ , где  $m$  – количество интервалов, по выборке рассчитаны два параметра, следовательно,  $r=2$ ;
12. Вычислить критическое значение параметра по таблице «Критические точки распределения хи-квадрат» (Приложение 4);
13. Сделать вывод:  
Если  $c_{\text{набл}}^2 < c^2(a; k)$ , то нет оснований отвергать нулевую гипотезу  $H_0$ ;  
Если  $c_{\text{набл}}^2 > c^2(a; k)$ , то нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернативная  $H_1$ .

## Решение типового варианта

Измерены 100 обработанных деталей, отклонения от заданного размера приведены в таблице:

|       |            |            |           |          |          |          |          |          |
|-------|------------|------------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_i$ | $[-3; -2)$ | $[-2; -1)$ | $[-1; 0)$ | $[0; 1)$ | $[1; 2)$ | $[2; 3)$ | $[3; 4)$ | $[4; 5)$ |
| $n_i$ | 3          | 10         | 15        | 24       | 25       | 13       | 7        | 3        |

Проверить при уровне значимости  $\alpha = 0,01$  гипотезу  $H_0$  о том, что отклонения от проектного размера подчиняются нормальному закону распределения.

Решение. Случайную величину – отклонения – обозначим  $X$ . Найдем числовые характеристики:

$$\bar{x} = 0,9; \quad D_x = 2,54; \quad s = 1,594$$

Для нахождения наблюдаемого значения параметра заполним таблицу:

| Интервал,<br>$[x_i; x_{i+1})$ | Эмпирич.<br>част.,<br>$n_i$ | $\frac{x_i - \bar{x}}{s}$ | $\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{s}$ | $\Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right) - \frac{\Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{s}\right)}{\Delta x}$ | $\Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{s}\right) - \frac{\Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)}{\Delta x}$ | $p_i$  | Теорет.<br>част.,<br>$np_i$ | $\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ |
|-------------------------------|-----------------------------|---------------------------|-------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|-----------------------------|-------------------------------|
| $(-\infty; -2)$               | 3                           | $-\infty$                 | -1,8196                       | -0,5                                                                                                       | -0,4656                                                                                                    | 0,0344 | 3,44                        | 0,056279                      |
| $[-2; -1)$                    | 10                          | -1,8196                   | -1,1922                       | -0,4656                                                                                                    | -0,3830                                                                                                    | 0,0826 | 8,26                        | 0,366538                      |
| $[-1; 0)$                     | 15                          | -1,1922                   | -0,5647                       | -0,3830                                                                                                    | -0,2157                                                                                                    | 0,1673 | 16,73                       | 0,178894                      |
| $[0; 1)$                      | 24                          | -0,5647                   | 0,0628                        | -0,2157                                                                                                    | 0,0239                                                                                                     | 0,2396 | 23,96                       | 6,68E-05                      |
| $[1; 2)$                      | 25                          | 0,06275                   | 0,6902                        | 0,0239                                                                                                     | 0,2549                                                                                                     | 0,231  | 23,1                        | 0,156277                      |
| $[2; 3)$                      | 13                          | 0,6902                    | 1,3177                        | 0,2549                                                                                                     | 0,4066                                                                                                     | 0,1517 | 15,17                       | 0,310409                      |
| $[3; 4)$                      | 7                           | 1,3177                    | 1,9451                        | 0,4066                                                                                                     | 0,4744                                                                                                     | 0,0678 | 6,78                        | 0,007139                      |
| $[4; +\infty)$                | 3                           | 1,9451                    | $+\infty$                     | 0,4744                                                                                                     | 0,5                                                                                                        | 0,0256 | 2,56                        | 0,075625                      |
| $\Sigma$                      | 100                         |                           |                               |                                                                                                            |                                                                                                            | 1      | 100                         | 1,151227                      |

Построим на одном чертеже гистограмму эмпирических частот и кривую теоретических частот.

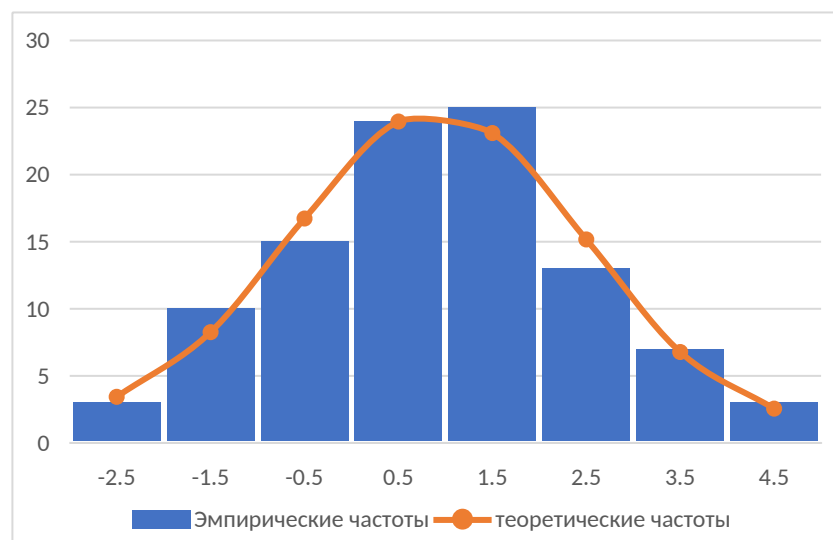


Рисунок 7. Гистограмма эмпирических частот и кривая теоретических частот

Находим число степеней свободы. По выборке рассчитаны два параметра,  $r = 2$ . Количество интервалов  $m = 8$ , следовательно,  $k = m - r - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$ . По таблице  $\chi^2_{кр}(0,01; 5) = 15,1$ . Т.к.  $\chi^2_{набл} = 1,1512 < \chi^2_{кр}(0,01; 5) = 15,1$ , то нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

### ИЗ-3

Темп роста курса акций 100 фирм по сравнению с предыдущим периодом (%) представлен в таблице 6. Построить по этим данным интервальный вариационный ряд случайной величины  $X$  и начертить гистограмму. Вычислить среднее арифметическое выборки, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратичное отклонение. Используя критерий  $\chi^2$  - Пирсона по данному вариационному ряду при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ , проверить гипотезу о том, что случайная величина  $X$  распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и теоретическую нормальную кривую.

Таблица 6 Данные к ИЗ-3

|     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| В-1 | 28,5 | 24,8 | 17,8 | 20,7 | 15,7 | 21,3 | 24,0 | 23,6 | 36,6 | 21,3 |
|     | 37,4 | 29,3 | 24,4 | 14,1 | 27,7 | 35,3 | 24,3 | 10,1 | 18,7 | 24,3 |
|     | 23,3 | 32,2 | 17,5 | 25,8 | 27,6 | 24,3 | 33,5 | 34,1 | 17,8 | 22,0 |
|     | 17,9 | 22,7 | 10,9 | 32,3 | 17,2 | 24,1 | 21,2 | 28,2 | 30,9 | 25,9 |
|     | 20,2 | 31,4 | 23,7 | 27,1 | 25,1 | 23,3 | 28,9 | 17,9 | 15,3 | 28,1 |
|     | 33,2 | 14,5 | 24,5 | 17,1 | 27,9 | 23,3 | 32,9 | 33,1 | 20,4 | 28,3 |
|     | 25,8 | 18,7 | 24,1 | 20,7 | 29,1 | 25,1 | 31,4 | 20,6 | 31,3 | 33,6 |
|     | 28,9 | 30,8 | 28,2 | 25,1 | 24,9 | 22,0 | 30,9 | 26,3 | 20,6 | 22,7 |
|     | 20,0 | 27,1 | 23,7 | 22,6 | 34,2 | 37,1 | 35,2 | 25,5 | 29,0 | 18,2 |
|     | 25,9 | 16,5 | 18,8 | 26,2 | 14,4 | 24,8 | 29,8 | 20,1 | 21,0 | 20,4 |

|     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| B-2 | 32,9 | 20,1 | 34,0 | 30,1 | 30,7 | 22,6 | 21,4 | 30,4 | 28,2 | 33,0 |
|     | 26,3 | 30,9 | 31,4 | 27,7 | 25,1 | 35,5 | 22,5 | 20,1 | 26,5 | 38,0 |
|     | 35,5 | 24,5 | 30,1 | 35,5 | 22,6 | 15,6 | 33,1 | 19,8 | 28,8 | 20,7 |
|     | 33,0 | 24,5 | 30,5 | 22,5 | 34,6 | 24,1 | 25,1 | 17,6 | 31,7 | 22,2 |
|     | 22,5 | 20,4 | 27,9 | 23,0 | 17,8 | 30,0 | 22,5 | 16,5 | 22,1 | 29,0 |
|     | 17,7 | 16,6 | 25,0 | 28,5 | 26,0 | 20,2 | 24,6 | 18,8 | 25,6 | 35,4 |
|     | 22,4 | 31,2 | 18,5 | 24,0 | 22,8 | 12,3 | 18,1 | 26,6 | 25,8 | 23,6 |
|     | 23,4 | 22,5 | 25,9 | 25,1 | 32,3 | 14,1 | 18,9 | 24,6 | 30,1 | 25,6 |
|     | 17,8 | 16,6 | 25,3 | 26,6 | 21,9 | 31,0 | 26,4 | 28,3 | 23,6 | 23,6 |
|     | 27,3 | 31,1 | 21,7 | 31,2 | 28,0 | 34,1 | 18,0 | 23,0 | 21,1 | 39,6 |
| B-3 | 22,6 | 16,6 | 18,9 | 26,5 | 16,3 | 19,9 | 25,2 | 20,3 | 24,9 | 20,8 |
|     | 17,2 | 17,1 | 23,9 | 29,9 | 23,2 | 23,6 | 16,1 | 23,8 | 21,4 | 31,3 |
|     | 14,7 | 24,8 | 20,6 | 17,4 | 32,0 | 29,4 | 25,3 | 18,5 | 29,3 | 27,6 |
|     | 27,6 | 34,8 | 19,2 | 14,0 | 39,9 | 28,0 | 34,6 | 21,7 | 32,0 | 20,4 |
|     | 21,4 | 26,9 | 21,7 | 32,1 | 19,0 | 14,0 | 21,9 | 19,2 | 19,7 | 22,0 |
|     | 22,7 | 18,7 | 19,1 | 24,0 | 23,3 | 26,3 | 27,3 | 13,7 | 27,3 | 21,3 |
|     | 24,4 | 26,1 | 26,2 | 30,1 | 34,5 | 23,1 | 21,5 | 27,7 | 23,4 | 22,4 |
|     | 29,9 | 23,5 | 26,5 | 20,8 | 29,5 | 21,4 | 18,0 | 27,9 | 26,6 | 19,7 |
|     | 25,6 | 25,9 | 22,7 | 29,0 | 23,4 | 20,1 | 22,2 | 24,1 | 20,8 | 34,9 |
|     | 34,6 | 21,0 | 24,4 | 25,7 | 19,8 | 22,2 | 23,7 | 21,1 | 34,4 | 21,9 |
| B-4 | 31,2 | 23,0 | 24,5 | 33,5 | 24,2 | 29,0 | 21,6 | 42,9 | 32,7 | 20,3 |
|     | 19,8 | 21,6 | 30,9 | 22,6 | 27,3 | 23,2 | 32,9 | 33,0 | 27,8 | 32,0 |
|     | 33,1 | 33,0 | 31,9 | 15,2 | 23,0 | 42,1 | 28,6 | 27,9 | 34,5 | 20,2 |
|     | 24,9 | 25,5 | 30,1 | 31,5 | 27,5 | 20,9 | 16,2 | 31,8 | 22,5 | 24,2 |
|     | 25,4 | 17,7 | 31,7 | 21,2 | 22,1 | 31,9 | 23,7 | 26,6 | 23,8 | 23,5 |
|     | 24,5 | 28,5 | 12,9 | 31,9 | 15,3 | 19,3 | 14,7 | 34,3 | 13,2 | 33,3 |
|     | 30,2 | 30,0 | 16,6 | 24,1 | 28,3 | 23,4 | 22,8 | 17,1 | 21,6 | 29,8 |
|     | 24,5 | 16,6 | 16,5 | 16,0 | 26,5 | 30,9 | 18,0 | 16,4 | 37,4 | 25,3 |
|     | 22,8 | 23,0 | 25,2 | 18,6 | 16,6 | 34,1 | 26,3 | 27,3 | 23,0 | 28,7 |
|     | 22,0 | 13,5 | 17,9 | 29,9 | 24,0 | 16,0 | 25,5 | 24,8 | 14,2 | 30,4 |
| B-5 | 35,6 | 20,1 | 21,2 | 24,4 | 28,4 | 22,0 | 29,3 | 15,5 | 27,3 | 17,8 |
|     | 27,6 | 18,5 | 19,3 | 23,1 | 30,8 | 27,9 | 31,2 | 11,8 | 25,1 | 31,1 |
|     | 38,9 | 21,8 | 22,1 | 21,9 | 24,0 | 30,1 | 23,3 | 35,7 | 26,4 | 20,3 |
|     | 29,1 | 28,6 | 24,7 | 25,7 | 29,4 | 31,4 | 30,6 | 28,1 | 27,2 | 22,4 |
|     | 13,7 | 25,7 | 27,5 | 25,6 | 18,1 | 26,9 | 23,6 | 17,6 | 17,6 | 28,5 |
|     | 16,3 | 19,7 | 31,6 | 16,2 | 26,4 | 24,9 | 27,1 | 30,9 | 21,6 | 34,7 |
|     | 27,2 | 29,5 | 19,6 | 31,3 | 18,5 | 18,0 | 28,8 | 28,1 | 25,6 | 20,5 |
|     | 26,0 | 16,0 | 23,7 | 16,5 | 36,3 | 24,3 | 20,3 | 30,0 | 22,6 | 35,4 |

|     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|     | 22,4 | 26,9 | 20,6 | 30,4 | 22,3 | 12,9 | 29,6 | 39,1 | 21,4 | 26,2 |
|     | 14,5 | 30,6 | 20,9 | 28,3 | 14,9 | 25,7 | 30,1 | 21,6 | 27,6 | 20,5 |
| B-6 | 54,8 | 35,3 | 38,3 | 56,0 | 61,9 | 39,1 | 41,6 | 65,8 | 58,6 | 56,1 |
|     | 58,7 | 46,0 | 45,6 | 42,7 | 41,4 | 44,1 | 51,0 | 59,5 | 57,4 | 39,9 |
|     | 48,9 | 48,9 | 40,5 | 55,4 | 46,2 | 40,2 | 47,4 | 62,8 | 57,2 | 59,4 |
|     | 48,4 | 36,0 | 51,0 | 51,8 | 71,9 | 48,6 | 46,9 | 47,2 | 56,7 | 43,9 |
|     | 47,4 | 60,6 | 42,3 | 59,6 | 46,7 | 54,6 | 60,1 | 56,1 | 63,3 | 63,3 |
|     | 53,9 | 42,8 | 50,5 | 51,8 | 32,5 | 48,5 | 58,9 | 64,5 | 54,1 | 52,6 |
|     | 52,4 | 33,6 | 45,4 | 54,3 | 49,3 | 44,2 | 65,5 | 48,2 | 51,5 | 49,8 |
|     | 40,2 | 46,6 | 48,6 | 50,8 | 65,4 | 29,0 | 65,8 | 65,9 | 36,3 | 48,3 |
|     | 54,5 | 46,8 | 55,0 | 63,0 | 38,1 | 47,8 | 56,8 | 49,8 | 55,4 | 32,2 |
|     | 66,3 | 58,0 | 40,2 | 51,8 | 42,2 | 48,1 | 42,6 | 36,2 | 50,1 | 53,0 |
| B-7 | 48,9 | 48,1 | 60,5 | 36,4 | 33,2 | 71,0 | 50,1 | 50,7 | 38,2 | 44,9 |
|     | 57,4 | 69,6 | 50,2 | 44,9 | 45,5 | 45,6 | 44,6 | 64,6 | 48,2 | 51,9 |
|     | 49,9 | 52,5 | 47,3 | 39,0 | 53,1 | 56,8 | 37,3 | 63,9 | 52,8 | 52,9 |
|     | 42,0 | 54,2 | 53,8 | 57,6 | 47,2 | 52,6 | 48,2 | 58,5 | 38,7 | 48,4 |
|     | 58,1 | 38,8 | 40,9 | 42,0 | 67,9 | 53,8 | 58,9 | 43,0 | 64,6 | 47,4 |
|     | 47,4 | 30,2 | 64,7 | 46,8 | 47,6 | 36,7 | 51,8 | 58,8 | 59,1 | 41,7 |
|     | 52,4 | 61,5 | 35,1 | 48,6 | 49,7 | 49,2 | 59,4 | 44,4 | 51,8 | 54,3 |
|     | 50,7 | 47,1 | 44,0 | 31,2 | 63,0 | 34,2 | 42,1 | 49,6 | 49,9 | 33,7 |
|     | 33,4 | 51,4 | 52,9 | 38,1 | 46,0 | 53,3 | 55,0 | 58,8 | 40,8 | 54,0 |
|     | 36,7 | 44,7 | 54,5 | 58,7 | 58,7 | 35,1 | 48,8 | 49,4 | 71,9 | 46,6 |
| B-8 | 45,7 | 58,5 | 49,6 | 50,7 | 53,1 | 62,8 | 57,8 | 49,6 | 62,0 | 55,2 |
|     | 35,0 | 32,2 | 57,9 | 62,6 | 48,2 | 68,2 | 31,9 | 49,9 | 63,4 | 51,8 |
|     | 44,8 | 55,1 | 54,2 | 53,6 | 57,6 | 46,6 | 63,4 | 51,6 | 38,4 | 48,8 |
|     | 56,8 | 43,0 | 40,4 | 55,7 | 49,3 | 51,7 | 59,8 | 46,8 | 46,5 | 48,5 |
|     | 58,1 | 64,3 | 33,1 | 26,3 | 40,8 | 50,3 | 49,1 | 38,5 | 42,7 | 51,4 |
|     | 55,8 | 48,2 | 48,7 | 44,2 | 54,5 | 48,3 | 58,5 | 51,1 | 53,7 | 47,9 |
|     | 82,8 | 46,5 | 51,8 | 59,2 | 35,1 | 42,5 | 58,0 | 68,4 | 46,2 | 58,0 |
|     | 53,7 | 49,2 | 57,7 | 38,9 | 65,8 | 39,0 | 62,3 | 52,3 | 46,9 | 43,4 |
|     | 51,1 | 43,1 | 32,6 | 57,1 | 50,5 | 52,6 | 50,5 | 41,6 | 45,0 | 56,7 |
|     | 54,3 | 51,1 | 46,5 | 35,7 | 56,8 | 44,4 | 54,9 | 53,3 | 52,9 | 55,9 |
| B-9 | 33,3 | 38,8 | 38,3 | 39,6 | 37,9 | 48,7 | 58,4 | 55,7 | 61,7 | 51,9 |
|     | 35,5 | 45,9 | 53,7 | 55,3 | 46,3 | 42,1 | 48,9 | 47,3 | 54,6 | 46,5 |
|     | 46,5 | 28,9 | 51,0 | 46,4 | 51,2 | 58,8 | 40,5 | 53,6 | 51,7 | 59,4 |
|     | 73,4 | 37,5 | 54,3 | 47,8 | 68,1 | 70,1 | 72,2 | 56,1 | 47,2 | 41,8 |
|     | 53,4 | 61,0 | 51,1 | 52,4 | 41,2 | 47,3 | 63,3 | 50,7 | 40,4 | 51,8 |
|     | 49,5 | 48,4 | 40,2 | 40,9 | 43,5 | 71,2 | 55,1 | 50,0 | 53,8 | 57,0 |

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|      | 55,7 | 51,1 | 38,6 | 47,1 | 41,8 | 49,9 | 35,7 | 57,6 | 40,1 | 46,6 |
|      | 58,3 | 56,4 | 64,2 | 65,8 | 35,2 | 34,4 | 32,4 | 47,7 | 43,5 | 64,9 |
|      | 48,6 | 48,2 | 42,6 | 48,0 | 53,9 | 39,5 | 41,0 | 58,2 | 37,9 | 46,0 |
|      | 42,2 | 36,0 | 47,5 | 45,5 | 60,4 | 48,4 | 55,4 | 49,3 | 51,7 | 43,3 |
| B-10 | 50,4 | 63,7 | 38,8 | 46,6 | 41,3 | 48,9 | 47,2 | 50,1 | 43,8 | 31,1 |
|      | 51,6 | 47,5 | 33,9 | 33,8 | 41,6 | 63,9 | 56,2 | 59,2 | 50,5 | 52,3 |
|      | 49,8 | 40,2 | 60,8 | 38,9 | 54,5 | 60,2 | 49,4 | 51,1 | 46,8 | 38,0 |
|      | 61,7 | 48,7 | 56,1 | 57,6 | 63,2 | 48,3 | 58,6 | 48,0 | 26,0 | 41,9 |
|      | 60,3 | 31,1 | 43,5 | 72,6 | 56,9 | 48,2 | 54,2 | 55,3 | 49,5 | 47,9 |
|      | 43,4 | 54,0 | 40,2 | 49,0 | 47,7 | 56,8 | 48,4 | 56,7 | 51,1 | 42,6 |
|      | 58,9 | 79,6 | 66,2 | 53,3 | 47,1 | 30,3 | 34,1 | 48,0 | 72,6 | 54,7 |
|      | 68,6 | 31,8 | 35,7 | 64,8 | 45,2 | 35,0 | 52,6 | 36,7 | 65,3 | 38,9 |
|      | 46,4 | 56,8 | 52,3 | 58,9 | 37,6 | 54,8 | 67,1 | 61,5 | 37,2 | 44,8 |
|      | 46,3 | 47,3 | 41,9 | 68,6 | 73,4 | 44,6 | 56,3 | 53,7 | 49,9 | 42,1 |
| B-11 | 27,6 | 24,3 | 33,5 | 34,1 | 17,8 | 22   | 23,3 | 32,2 | 17,5 | 25,8 |
|      | 17,2 | 24,1 | 21,2 | 28,2 | 30,9 | 25,9 | 17,9 | 22,7 | 10,9 | 32,3 |
|      | 25,1 | 23,3 | 28,9 | 17,9 | 15,3 | 28,1 | 20,2 | 31,4 | 23,7 | 27,1 |
|      | 27,9 | 23,3 | 32,9 | 33,1 | 20,4 | 28,3 | 33,2 | 14,5 | 24,5 | 17,1 |
|      | 29,1 | 25,1 | 31,4 | 20,6 | 31,3 | 33,6 | 25,8 | 18,7 | 24,1 | 20,7 |
|      | 24,9 | 22   | 30,9 | 26,3 | 20,6 | 22,7 | 28,9 | 30,8 | 28,2 | 25,1 |
|      | 34,2 | 37,1 | 35,2 | 25,5 | 29   | 18,2 | 20   | 27,1 | 23,7 | 22,6 |
|      | 14,4 | 24,8 | 29,8 | 20,1 | 21   | 20,4 | 25,9 | 16,5 | 18,8 | 26,2 |
|      | 15,7 | 21,3 | 24   | 23,6 | 36,6 | 21,3 | 28,5 | 24,8 | 17,8 | 20,7 |
|      | 27,7 | 35,3 | 24,3 | 10,1 | 18,7 | 24,3 | 37,4 | 29,3 | 24,4 | 14,1 |
| B-12 | 21,9 | 31   | 26,4 | 28,3 | 23,6 | 23,6 | 17,8 | 16,6 | 25,3 | 26,6 |
|      | 28   | 34,1 | 18   | 23   | 21,1 | 39,6 | 27,3 | 31,1 | 21,7 | 31,2 |
|      | 30,7 | 22,6 | 21,4 | 30,4 | 28,2 | 33   | 32,9 | 20,1 | 34   | 30,1 |
|      | 25,1 | 35,5 | 22,5 | 20,1 | 26,5 | 38   | 26,3 | 30,9 | 31,4 | 27,7 |
|      | 22,6 | 15,6 | 33,1 | 19,8 | 28,8 | 20,7 | 35,5 | 24,5 | 30,1 | 35,5 |
|      | 34,6 | 24,1 | 25,1 | 17,6 | 31,7 | 22,2 | 33   | 24,5 | 30,5 | 22,5 |
|      | 17,8 | 30   | 22,5 | 16,5 | 22,1 | 29   | 22,5 | 20,4 | 27,9 | 23   |
|      | 26   | 20,2 | 24,6 | 18,8 | 25,6 | 35,4 | 17,7 | 16,6 | 25   | 28,5 |
|      | 22,8 | 12,3 | 18,1 | 26,6 | 25,8 | 23,6 | 22,4 | 31,2 | 18,5 | 24   |
|      | 32,3 | 14,1 | 18,9 | 24,6 | 30,1 | 25,6 | 23,4 | 22,5 | 25,9 | 25,1 |
| B-13 | 29   | 23,4 | 20,1 | 22,2 | 24,1 | 20,8 | 34,9 | 25,6 | 25,9 | 22,7 |
|      | 25,7 | 19,8 | 22,2 | 23,7 | 21,1 | 34,4 | 21,9 | 34,6 | 21   | 24,4 |
|      | 26,5 | 16,3 | 19,9 | 25,2 | 20,3 | 24,9 | 20,8 | 22,6 | 16,6 | 18,9 |
|      | 29,9 | 23,2 | 23,6 | 16,1 | 23,8 | 21,4 | 31,3 | 17,2 | 17,1 | 23,9 |

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|      | 17,4 | 32   | 29,4 | 25,3 | 18,5 | 29,3 | 27,6 | 14,7 | 24,8 | 20,6 |
|      | 14   | 39,9 | 28   | 34,6 | 21,7 | 32   | 20,4 | 27,6 | 34,8 | 19,2 |
|      | 32,1 | 19   | 14   | 21,9 | 19,2 | 19,7 | 22   | 21,4 | 26,9 | 21,7 |
|      | 24   | 23,3 | 26,3 | 27,3 | 13,7 | 27,3 | 21,3 | 22,7 | 18,7 | 19,1 |
|      | 30,1 | 34,5 | 23,1 | 21,5 | 27,7 | 23,4 | 22,4 | 24,4 | 26,1 | 26,2 |
|      | 20,8 | 29,5 | 21,4 | 18   | 27,9 | 26,6 | 19,7 | 29,9 | 23,5 | 26,5 |
| B-14 | 25,2 | 18,6 | 16,6 | 34,1 | 26,3 | 27,3 | 23   | 28,7 | 22,8 | 23   |
|      | 17,9 | 29,9 | 24   | 16   | 25,5 | 24,8 | 14,2 | 30,4 | 22   | 13,5 |
|      | 24,5 | 33,5 | 24,2 | 29   | 21,6 | 42,9 | 32,7 | 20,3 | 31,2 | 23   |
|      | 30,9 | 22,6 | 27,3 | 23,2 | 32,9 | 33   | 27,8 | 32   | 19,8 | 21,6 |
|      | 31,9 | 15,2 | 23   | 42,1 | 28,6 | 27,9 | 34,5 | 20,2 | 33,1 | 33   |
|      | 30,1 | 31,5 | 27,5 | 20,9 | 16,2 | 31,8 | 22,5 | 24,2 | 24,9 | 25,5 |
|      | 31,7 | 21,2 | 22,1 | 31,9 | 23,7 | 26,6 | 23,8 | 23,5 | 25,4 | 17,7 |
|      | 12,9 | 31,9 | 15,3 | 19,3 | 14,7 | 34,3 | 13,2 | 33,3 | 24,5 | 28,5 |
|      | 16,6 | 24,1 | 28,3 | 23,4 | 22,8 | 17,1 | 21,6 | 29,8 | 30,2 | 30   |
|      | 16,5 | 16   | 26,5 | 30,9 | 18   | 16,4 | 37,4 | 25,3 | 24,5 | 16,6 |
| B-15 | 20,6 | 30,4 | 22,3 | 12,9 | 29,6 | 39,1 | 21,4 | 26,2 | 22,4 | 26,9 |
|      | 20,9 | 28,3 | 14,9 | 25,7 | 30,1 | 21,6 | 27,6 | 20,5 | 14,5 | 30,6 |
|      | 21,2 | 24,4 | 28,4 | 22   | 29,3 | 15,5 | 27,3 | 17,8 | 35,6 | 20,1 |
|      | 19,3 | 23,1 | 30,8 | 27,9 | 31,2 | 11,8 | 25,1 | 31,1 | 27,6 | 18,5 |
|      | 22,1 | 21,9 | 24   | 30,1 | 23,3 | 35,7 | 26,4 | 20,3 | 38,9 | 21,8 |
|      | 24,7 | 25,7 | 29,4 | 31,4 | 30,6 | 28,1 | 27,2 | 22,4 | 29,1 | 28,6 |
|      | 27,5 | 25,6 | 18,1 | 26,9 | 23,6 | 17,6 | 17,6 | 28,5 | 13,7 | 25,7 |
|      | 31,6 | 16,2 | 26,4 | 24,9 | 27,1 | 30,9 | 21,6 | 34,7 | 16,3 | 19,7 |
|      | 19,6 | 31,3 | 18,5 | 18   | 28,8 | 28,1 | 25,6 | 20,5 | 27,2 | 29,5 |
|      | 23,7 | 16,5 | 36,3 | 24,3 | 20,3 | 30   | 22,6 | 35,4 | 26   | 16   |
| B-16 | 63   | 38,1 | 47,8 | 56,8 | 49,8 | 55,4 | 32,2 | 54,5 | 46,8 | 55   |
|      | 51,8 | 42,2 | 48,1 | 42,6 | 36,2 | 50,1 | 53   | 66,3 | 58   | 40,2 |
|      | 56   | 61,9 | 39,1 | 41,6 | 65,8 | 58,6 | 56,1 | 54,8 | 35,3 | 38,3 |
|      | 42,7 | 41,4 | 44,1 | 51   | 59,5 | 57,4 | 39,9 | 58,7 | 46   | 45,6 |
|      | 55,4 | 46,2 | 40,2 | 47,4 | 62,8 | 57,2 | 59,4 | 48,9 | 48,9 | 40,5 |
|      | 51,8 | 71,9 | 48,6 | 46,9 | 47,2 | 56,7 | 43,9 | 48,4 | 36   | 51   |
|      | 59,6 | 46,7 | 54,6 | 60,1 | 56,1 | 63,3 | 63,3 | 47,4 | 60,6 | 42,3 |
|      | 51,8 | 32,5 | 48,5 | 58,9 | 64,5 | 54,1 | 52,6 | 53,9 | 42,8 | 50,5 |
|      | 54,3 | 49,3 | 44,2 | 65,5 | 48,2 | 51,5 | 49,8 | 52,4 | 33,6 | 45,4 |
|      | 50,8 | 65,4 | 29   | 65,8 | 65,9 | 36,3 | 48,3 | 40,2 | 46,6 | 48,6 |
| B-17 | 38,1 | 46   | 53,3 | 55   | 58,8 | 40,8 | 54   | 33,4 | 51,4 | 52,9 |
|      | 58,7 | 58,7 | 35,1 | 48,8 | 49,4 | 71,9 | 46,6 | 36,7 | 44,7 | 54,5 |

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|      | 36,4 | 33,2 | 71   | 50,1 | 50,7 | 38,2 | 44,9 | 48,9 | 48,1 | 60,5 |
|      | 44,9 | 45,5 | 45,6 | 44,6 | 64,6 | 48,2 | 51,9 | 57,4 | 69,6 | 50,2 |
|      | 39   | 53,1 | 56,8 | 37,3 | 63,9 | 52,8 | 52,9 | 49,9 | 52,5 | 47,3 |
|      | 57,6 | 47,2 | 52,6 | 48,2 | 58,5 | 38,7 | 48,4 | 42   | 54,2 | 53,8 |
|      | 42   | 67,9 | 53,8 | 58,9 | 43   | 64,6 | 47,4 | 58,1 | 38,8 | 40,9 |
|      | 46,8 | 47,6 | 36,7 | 51,8 | 58,8 | 59,1 | 41,7 | 47,4 | 30,2 | 64,7 |
|      | 48,6 | 49,7 | 49,2 | 59,4 | 44,4 | 51,8 | 54,3 | 52,4 | 61,5 | 35,1 |
|      | 31,2 | 63   | 34,2 | 42,1 | 49,6 | 49,9 | 33,7 | 50,7 | 47,1 | 44   |
| B-18 | 57,1 | 50,5 | 52,6 | 50,5 | 41,6 | 45   | 56,7 | 51,1 | 43,1 | 32,6 |
|      | 35,7 | 56,8 | 44,4 | 54,9 | 53,3 | 52,9 | 55,9 | 54,3 | 51,1 | 46,5 |
|      | 50,7 | 53,1 | 62,8 | 57,8 | 49,6 | 62   | 55,2 | 45,7 | 58,5 | 49,6 |
|      | 62,6 | 48,2 | 68,2 | 31,9 | 49,9 | 63,4 | 51,8 | 35   | 32,2 | 57,9 |
|      | 53,6 | 57,6 | 46,6 | 63,4 | 51,6 | 38,4 | 48,8 | 44,8 | 55,1 | 54,2 |
|      | 55,7 | 49,3 | 51,7 | 59,8 | 46,8 | 46,5 | 48,5 | 56,8 | 43   | 40,4 |
|      | 26,3 | 40,8 | 50,3 | 49,1 | 38,5 | 42,7 | 51,4 | 58,1 | 64,3 | 33,1 |
|      | 44,2 | 54,5 | 48,3 | 58,5 | 51,1 | 53,7 | 47,9 | 55,8 | 48,2 | 48,7 |
|      | 59,2 | 35,1 | 42,5 | 58   | 68,4 | 46,2 | 58   | 82,8 | 46,5 | 51,8 |
|      | 38,9 | 65,8 | 39   | 62,3 | 52,3 | 46,9 | 43,4 | 53,7 | 49,2 | 57,7 |
| B-19 | 42,6 | 48   | 53,9 | 39,5 | 41   | 58,2 | 37,9 | 46   | 48,6 | 48,2 |
|      | 47,5 | 45,5 | 60,4 | 48,4 | 55,4 | 49,3 | 51,7 | 43,3 | 42,2 | 36   |
|      | 38,3 | 39,6 | 37,9 | 48,7 | 58,4 | 55,7 | 61,7 | 51,9 | 33,3 | 38,8 |
|      | 53,7 | 55,3 | 46,3 | 42,1 | 48,9 | 47,3 | 54,6 | 46,5 | 35,5 | 45,9 |
|      | 51   | 46,4 | 51,2 | 58,8 | 40,5 | 53,6 | 51,7 | 59,4 | 46,5 | 28,9 |
|      | 54,3 | 47,8 | 68,1 | 70,1 | 72,2 | 56,1 | 47,2 | 41,8 | 73,4 | 37,5 |
|      | 51,1 | 52,4 | 41,2 | 47,3 | 63,3 | 50,7 | 40,4 | 51,8 | 53,4 | 61   |
|      | 40,2 | 40,9 | 43,5 | 71,2 | 55,1 | 50   | 53,8 | 57   | 49,5 | 48,4 |
|      | 38,6 | 47,1 | 41,8 | 49,9 | 35,7 | 57,6 | 40,1 | 46,6 | 55,7 | 51,1 |
|      | 64,2 | 65,8 | 35,2 | 34,4 | 32,4 | 47,7 | 43,5 | 64,9 | 58,3 | 56,4 |
| B-20 | 52,3 | 58,9 | 37,6 | 54,8 | 67,1 | 61,5 | 37,2 | 44,8 | 46,4 | 56,8 |
|      | 41,9 | 68,6 | 73,4 | 44,6 | 56,3 | 53,7 | 49,9 | 42,1 | 46,3 | 47,3 |
|      | 38,8 | 46,6 | 41,3 | 48,9 | 47,2 | 50,1 | 43,8 | 31,1 | 50,4 | 63,7 |
|      | 33,9 | 33,8 | 41,6 | 63,9 | 56,2 | 59,2 | 50,5 | 52,3 | 51,6 | 47,5 |
|      | 60,8 | 38,9 | 54,5 | 60,2 | 49,4 | 51,1 | 46,8 | 38   | 49,8 | 40,2 |
|      | 56,1 | 57,6 | 63,2 | 48,3 | 58,6 | 48   | 26   | 41,9 | 61,7 | 48,7 |
|      | 43,5 | 72,6 | 56,9 | 48,2 | 54,2 | 55,3 | 49,5 | 47,9 | 60,3 | 31,1 |
|      | 40,2 | 49   | 47,7 | 56,8 | 48,4 | 56,7 | 51,1 | 42,6 | 43,4 | 54   |
|      | 66,2 | 53,3 | 47,1 | 30,3 | 34,1 | 48   | 72,6 | 54,7 | 58,9 | 79,6 |
|      | 35,7 | 64,8 | 45,2 | 35   | 52,6 | 36,7 | 65,3 | 38,9 | 68,6 | 31,8 |

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| B-21 | 27,7 | 35,3 | 24,3 | 10,1 | 18,7 | 24,3 | 37,4 | 29,3 | 24,4 | 14,1 |
|      | 34,2 | 37,1 | 35,2 | 25,5 | 29   | 18,2 | 20   | 27,1 | 23,7 | 22,6 |
|      | 14,4 | 24,8 | 29,8 | 20,1 | 21   | 20,4 | 25,9 | 16,5 | 18,8 | 26,2 |
|      | 15,7 | 21,3 | 24   | 23,6 | 36,6 | 21,3 | 28,5 | 24,8 | 17,8 | 20,7 |
|      | 24,9 | 22   | 30,9 | 26,3 | 20,6 | 22,7 | 28,9 | 30,8 | 28,2 | 25,1 |
|      | 27,6 | 24,3 | 33,5 | 34,1 | 17,8 | 22   | 23,3 | 32,2 | 17,5 | 25,8 |
|      | 17,2 | 24,1 | 21,2 | 28,2 | 30,9 | 25,9 | 17,9 | 22,7 | 10,9 | 32,3 |
|      | 25,1 | 23,3 | 28,9 | 17,9 | 15,3 | 28,1 | 20,2 | 31,4 | 23,7 | 27,1 |
|      | 27,9 | 23,3 | 32,9 | 33,1 | 20,4 | 28,3 | 33,2 | 14,5 | 24,5 | 17,1 |
|      | 29,1 | 25,1 | 31,4 | 20,6 | 31,3 | 33,6 | 25,8 | 18,7 | 24,1 | 20,7 |
| B-22 | 18,5 | 24   | 22,8 | 12,3 | 18,1 | 26,6 | 25,8 | 23,6 | 22,4 | 31,2 |
|      | 25,9 | 25,1 | 32,3 | 14,1 | 18,9 | 24,6 | 30,1 | 25,6 | 23,4 | 22,5 |
|      | 25,3 | 26,6 | 21,9 | 31   | 26,4 | 28,3 | 23,6 | 23,6 | 17,8 | 16,6 |
|      | 21,7 | 31,2 | 28   | 34,1 | 18   | 23   | 21,1 | 39,6 | 27,3 | 31,1 |
|      | 34   | 30,1 | 30,7 | 22,6 | 21,4 | 30,4 | 28,2 | 33   | 32,9 | 20,1 |
|      | 31,4 | 27,7 | 25,1 | 35,5 | 22,5 | 20,1 | 26,5 | 38   | 26,3 | 30,9 |
|      | 30,1 | 35,5 | 22,6 | 15,6 | 33,1 | 19,8 | 28,8 | 20,7 | 35,5 | 24,5 |
|      | 30,5 | 22,5 | 34,6 | 24,1 | 25,1 | 17,6 | 31,7 | 22,2 | 33   | 24,5 |
|      | 27,9 | 23   | 17,8 | 30   | 22,5 | 16,5 | 22,1 | 29   | 22,5 | 20,4 |
|      | 25   | 28,5 | 26   | 20,2 | 24,6 | 18,8 | 25,6 | 35,4 | 17,7 | 16,6 |
| B-23 | 21,5 | 27,7 | 23,4 | 22,4 | 24,4 | 26,1 | 26,2 | 30,1 | 34,5 | 23,1 |
|      | 18   | 27,9 | 26,6 | 19,7 | 29,9 | 23,5 | 26,5 | 20,8 | 29,5 | 21,4 |
|      | 22,2 | 24,1 | 20,8 | 34,9 | 25,6 | 25,9 | 22,7 | 29   | 23,4 | 20,1 |
|      | 23,7 | 21,1 | 34,4 | 21,9 | 34,6 | 21   | 24,4 | 25,7 | 19,8 | 22,2 |
|      | 25,2 | 20,3 | 24,9 | 20,8 | 22,6 | 16,6 | 18,9 | 26,5 | 16,3 | 19,9 |
|      | 16,1 | 23,8 | 21,4 | 31,3 | 17,2 | 17,1 | 23,9 | 29,9 | 23,2 | 23,6 |
|      | 25,3 | 18,5 | 29,3 | 27,6 | 14,7 | 24,8 | 20,6 | 17,4 | 32   | 29,4 |
|      | 34,6 | 21,7 | 32   | 20,4 | 27,6 | 34,8 | 19,2 | 14   | 39,9 | 28   |
|      | 21,9 | 19,2 | 19,7 | 22   | 21,4 | 26,9 | 21,7 | 32,1 | 19   | 14   |
|      | 27,3 | 13,7 | 27,3 | 21,3 | 22,7 | 18,7 | 19,1 | 24   | 23,3 | 26,3 |
| B-24 | 28,3 | 23,4 | 22,8 | 17,1 | 21,6 | 29,8 | 30,2 | 30   | 16,6 | 24,1 |
|      | 26,5 | 30,9 | 18   | 16,4 | 37,4 | 25,3 | 24,5 | 16,6 | 16,5 | 16   |
|      | 16,6 | 34,1 | 26,3 | 27,3 | 23   | 28,7 | 22,8 | 23   | 25,2 | 18,6 |
|      | 24   | 16   | 25,5 | 24,8 | 14,2 | 30,4 | 22   | 13,5 | 17,9 | 29,9 |
|      | 24,2 | 29   | 21,6 | 42,9 | 32,7 | 20,3 | 31,2 | 23   | 24,5 | 33,5 |
|      | 27,3 | 23,2 | 32,9 | 33   | 27,8 | 32   | 19,8 | 21,6 | 30,9 | 22,6 |
|      | 23   | 42,1 | 28,6 | 27,9 | 34,5 | 20,2 | 33,1 | 33   | 31,9 | 15,2 |
|      | 27,5 | 20,9 | 16,2 | 31,8 | 22,5 | 24,2 | 24,9 | 25,5 | 30,1 | 31,5 |

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|      | 22,1 | 31,9 | 23,7 | 26,6 | 23,8 | 23,5 | 25,4 | 17,7 | 31,7 | 21,2 |
|      | 15,3 | 19,3 | 14,7 | 34,3 | 13,2 | 33,3 | 24,5 | 28,5 | 12,9 | 31,9 |
| B-25 | 18,5 | 18   | 28,8 | 28,1 | 25,6 | 20,5 | 27,2 | 29,5 | 19,6 | 31,3 |
|      | 36,3 | 24,3 | 20,3 | 30   | 22,6 | 35,4 | 26   | 16   | 23,7 | 16,5 |
|      | 22,3 | 12,9 | 29,6 | 39,1 | 21,4 | 26,2 | 22,4 | 26,9 | 20,6 | 30,4 |
|      | 14,9 | 25,7 | 30,1 | 21,6 | 27,6 | 20,5 | 14,5 | 30,6 | 20,9 | 28,3 |
|      | 28,4 | 22   | 29,3 | 15,5 | 27,3 | 17,8 | 35,6 | 20,1 | 21,2 | 24,4 |
|      | 30,8 | 27,9 | 31,2 | 11,8 | 25,1 | 31,1 | 27,6 | 18,5 | 19,3 | 23,1 |
|      | 24   | 30,1 | 23,3 | 35,7 | 26,4 | 20,3 | 38,9 | 21,8 | 22,1 | 21,9 |
|      | 29,4 | 31,4 | 30,6 | 28,1 | 27,2 | 22,4 | 29,1 | 28,6 | 24,7 | 25,7 |
|      | 18,1 | 26,9 | 23,6 | 17,6 | 17,6 | 28,5 | 13,7 | 25,7 | 27,5 | 25,6 |
|      | 26,4 | 24,9 | 27,1 | 30,9 | 21,6 | 34,7 | 16,3 | 19,7 | 31,6 | 16,2 |
| B-26 | 44,2 | 65,5 | 48,2 | 51,5 | 49,8 | 52,4 | 33,6 | 45,4 | 54,3 | 49,3 |
|      | 29   | 65,8 | 65,9 | 36,3 | 48,3 | 40,2 | 46,6 | 48,6 | 50,8 | 65,4 |
|      | 47,8 | 56,8 | 49,8 | 55,4 | 32,2 | 54,5 | 46,8 | 55   | 63   | 38,1 |
|      | 48,1 | 42,6 | 36,2 | 50,1 | 53   | 66,3 | 58   | 40,2 | 51,8 | 42,2 |
|      | 39,1 | 41,6 | 65,8 | 58,6 | 56,1 | 54,8 | 35,3 | 38,3 | 56   | 61,9 |
|      | 44,1 | 51   | 59,5 | 57,4 | 39,9 | 58,7 | 46   | 45,6 | 42,7 | 41,4 |
|      | 40,2 | 47,4 | 62,8 | 57,2 | 59,4 | 48,9 | 48,9 | 40,5 | 55,4 | 46,2 |
|      | 48,6 | 46,9 | 47,2 | 56,7 | 43,9 | 48,4 | 36   | 51   | 51,8 | 71,9 |
|      | 54,6 | 60,1 | 56,1 | 63,3 | 63,3 | 47,4 | 60,6 | 42,3 | 59,6 | 46,7 |
|      | 48,5 | 58,9 | 64,5 | 54,1 | 52,6 | 53,9 | 42,8 | 50,5 | 51,8 | 32,5 |
| B-27 | 59,4 | 44,4 | 51,8 | 54,3 | 52,4 | 61,5 | 35,1 | 48,6 | 49,7 | 49,2 |
|      | 42,1 | 49,6 | 49,9 | 33,7 | 50,7 | 47,1 | 44   | 31,2 | 63   | 34,2 |
|      | 55   | 58,8 | 40,8 | 54   | 33,4 | 51,4 | 52,9 | 38,1 | 46   | 53,3 |
|      | 48,8 | 49,4 | 71,9 | 46,6 | 36,7 | 44,7 | 54,5 | 58,7 | 58,7 | 35,1 |
|      | 50,1 | 50,7 | 38,2 | 44,9 | 48,9 | 48,1 | 60,5 | 36,4 | 33,2 | 71   |
|      | 44,6 | 64,6 | 48,2 | 51,9 | 57,4 | 69,6 | 50,2 | 44,9 | 45,5 | 45,6 |
|      | 37,3 | 63,9 | 52,8 | 52,9 | 49,9 | 52,5 | 47,3 | 39   | 53,1 | 56,8 |
|      | 48,2 | 58,5 | 38,7 | 48,4 | 42   | 54,2 | 53,8 | 57,6 | 47,2 | 52,6 |
|      | 58,9 | 43   | 64,6 | 47,4 | 58,1 | 38,8 | 40,9 | 42   | 67,9 | 53,8 |
|      | 51,8 | 58,8 | 59,1 | 41,7 | 47,4 | 30,2 | 64,7 | 46,8 | 47,6 | 36,7 |
| B-28 | 42,5 | 58   | 68,4 | 46,2 | 58   | 82,8 | 46,5 | 51,8 | 59,2 | 35,1 |
|      | 39   | 62,3 | 52,3 | 46,9 | 43,4 | 53,7 | 49,2 | 57,7 | 38,9 | 65,8 |
|      | 52,6 | 50,5 | 41,6 | 45   | 56,7 | 51,1 | 43,1 | 32,6 | 57,1 | 50,5 |
|      | 44,4 | 54,9 | 53,3 | 52,9 | 55,9 | 54,3 | 51,1 | 46,5 | 35,7 | 56,8 |
|      | 62,8 | 57,8 | 49,6 | 62   | 55,2 | 45,7 | 58,5 | 49,6 | 50,7 | 53,1 |
|      | 68,2 | 31,9 | 49,9 | 63,4 | 51,8 | 35   | 32,2 | 57,9 | 62,6 | 48,2 |

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|      | 46,6 | 63,4 | 51,6 | 38,4 | 48,8 | 44,8 | 55,1 | 54,2 | 53,6 | 57,6 |
|      | 51,7 | 59,8 | 46,8 | 46,5 | 48,5 | 56,8 | 43   | 40,4 | 55,7 | 49,3 |
|      | 50,3 | 49,1 | 38,5 | 42,7 | 51,4 | 58,1 | 64,3 | 33,1 | 26,3 | 40,8 |
|      | 48,3 | 58,5 | 51,1 | 53,7 | 47,9 | 55,8 | 48,2 | 48,7 | 44,2 | 54,5 |
| В-29 | 49,9 | 35,7 | 57,6 | 40,1 | 46,6 | 55,7 | 51,1 | 38,6 | 47,1 | 41,8 |
|      | 34,4 | 32,4 | 47,7 | 43,5 | 64,9 | 58,3 | 56,4 | 64,2 | 65,8 | 35,2 |
|      | 39,5 | 41   | 58,2 | 37,9 | 46   | 48,6 | 48,2 | 42,6 | 48   | 53,9 |
|      | 48,4 | 55,4 | 49,3 | 51,7 | 43,3 | 42,2 | 36   | 47,5 | 45,5 | 60,4 |
|      | 48,7 | 58,4 | 55,7 | 61,7 | 51,9 | 33,3 | 38,8 | 38,3 | 39,6 | 37,9 |
|      | 42,1 | 48,9 | 47,3 | 54,6 | 46,5 | 35,5 | 45,9 | 53,7 | 55,3 | 46,3 |
|      | 58,8 | 40,5 | 53,6 | 51,7 | 59,4 | 46,5 | 28,9 | 51   | 46,4 | 51,2 |
|      | 70,1 | 72,2 | 56,1 | 47,2 | 41,8 | 73,4 | 37,5 | 54,3 | 47,8 | 68,1 |
|      | 47,3 | 63,3 | 50,7 | 40,4 | 51,8 | 53,4 | 61   | 51,1 | 52,4 | 41,2 |
|      | 71,2 | 55,1 | 50   | 53,8 | 57   | 49,5 | 48,4 | 40,2 | 40,9 | 43,5 |
| В-30 | 30,3 | 34,1 | 48   | 72,6 | 54,7 | 58,9 | 79,6 | 66,2 | 53,3 | 47,1 |
|      | 35   | 52,6 | 36,7 | 65,3 | 38,9 | 68,6 | 31,8 | 35,7 | 64,8 | 45,2 |
|      | 54,8 | 67,1 | 61,5 | 37,2 | 44,8 | 46,4 | 56,8 | 52,3 | 58,9 | 37,6 |
|      | 44,6 | 56,3 | 53,7 | 49,9 | 42,1 | 46,3 | 47,3 | 41,9 | 68,6 | 73,4 |
|      | 48,9 | 47,2 | 50,1 | 43,8 | 31,1 | 50,4 | 63,7 | 38,8 | 46,6 | 41,3 |
|      | 63,9 | 56,2 | 59,2 | 50,5 | 52,3 | 51,6 | 47,5 | 33,9 | 33,8 | 41,6 |
|      | 60,2 | 49,4 | 51,1 | 46,8 | 38   | 49,8 | 40,2 | 60,8 | 38,9 | 54,5 |
|      | 48,3 | 58,6 | 48   | 26   | 41,9 | 61,7 | 48,7 | 56,1 | 57,6 | 63,2 |
|      | 48,2 | 54,2 | 55,3 | 49,5 | 47,9 | 60,3 | 31,1 | 43,5 | 72,6 | 56,9 |
|      | 56,8 | 48,4 | 56,7 | 51,1 | 42,6 | 43,4 | 54   | 40,2 | 49   | 47,7 |

### Вопросы для самоконтроля

1. Что такое критерии согласия?
2. В чем состоит суть критерия Пирсона?
3. Расскажите алгоритм проверки критерия согласия?
4. Если нет оснований отвергать нулевую гипотезу, то о чем это говорит?

### ЛИТЕРАТУРА

#### Основная литература:

1. Бондарь, В. В. (СКФУ). Математика (Теория вероятностей) : электронный ресурс : учебник / В.В. Бондарь, О.Д. Роженко и др.; ФГАОУ ВПО Сев.-Кав. федер. ун-т., Ч. 1. - Ставрополь : СКФУ, 2018.
2. Колемаев, В.А; Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : учебник / В.Н. Калинина / В.А. Колемаев ; ред. В.А. Колемаев. - Теория вероятностей и математическая статистика, - Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2017. - 352 с.

3. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - Москва : Юрайт, 2016. - 480 с. : ил. - (Бакалавр). - Гриф: Рек. УМО и МО
4. Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : учебник / П.Е. Рябов / С.Я. Криволапов / В.И. Глебов / А.В. Браилов. - Теория вероятностей и математическая статистика, 2020-08-23. - Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2016. - 414 с.

#### **Дополнительная литература:**

1. Логинов, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : задачник / В.А. Логинов. - Теория вероятностей и математическая статистика, 2019-06-22. - Москва : Московская государственная академия водного транспорта, 2017.
2. Чайкина, И.А. Основы теории вероятностей и математической статистики Электронный ресурс : учебное пособие / И.А. Чайкина. - Ростов-на-Дону : Институт водного транспорта имени Г.Я. Седова – филиал «Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова», 2016. - 54 с.
3. Блатов, И.А. Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : учебное пособие / О.В. Старожилова / И.А. Блатов. - Самара : Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2017. - 276 с.
4. Тарасов, В.Н. Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы Электронный ресурс : учебное пособие / Н.Ф. Бахарева / В.Н. Тарасов. - Самара : Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2017. - 283 с.
5. Гриднева, И.В. Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : учебное пособие / В.П. Шацкий / Л.И. Федулова / И.В. Гриднева. - Воронеж : Воронежский Государственный Аграрный Университет им. Императора Петра Первого, 2017

#### **Методическая литература:**

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: 2008
2. Гурьянова, И.Э. Теория вероятностей и математическая статистика. Теория вероятностей. Краткий курс с примерами Электронный ресурс : учебное пособие / Е.В. Левашкина / И.Э. Гурьянова. - Теория вероятностей и математическая статистика. Теория вероятностей. Краткий курс с примерами, 2019-09-01. - Москва : Издательский Дом МИСиС, 2016. - 106 с..

#### **Интернет-ресурсы:**

- [MathWorld: Wolfram Web Resource by Eric W. Weisstein](https://mathworld.wolfram.com/), один из самых больших веб-сайтов по математике
- [Mathematical Atlas by Dave Rusin](https://mathematical-atlas.org/), один из самых больших веб-сайтов по математике
- [arXiv.org](https://arxiv.org/), автоматический электронный архив статей по математике

- [S.O.S. Mathematics](#): свободные материалы по математике от алгебры до [дифференциальных уравнений](#)
- [Wikipedia: Свободная энциклопедия](#) – математика
- [PlanetMath.Org](#) – Математическая энциклопедия

## 4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

**Цель:** в результате изучения данной темы обучающийся должен быть способен на основе описания различных процессов и явлений строить стандартные теоретические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты.

**Оборудование:** листы заданий для аудиторной работы, карточки с ИЗ, калькуляторы.

**Форма проведения:** занятие – практикум, включающий в себя следующие этапы: актуализация теоретических знаний, пробное решение несколькими студентами заданий у доски, самостоятельная работа студентов, контроль преподавателем индивидуальных заданий (ИЗ) студентов, выполненных самостоятельно.

**Форма контроля:** проверка выполнения ИЗ -4.

### Основные формулы

Выборочный коэффициент корреляции

$$r_b = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{s_x s_y}$$

Выборочное уравнение прямой регрессии Y на X:

$$y_x - \bar{y} = r_b \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x})$$

Выборочное уравнение прямой регрессии X на Y:

$$x_y - \bar{x} = r_b \frac{s_x}{s_y} (y - \bar{y})$$

Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

$$H_0: r_b = 0 \quad H_1: r_b \neq 0,$$

$$T_{\text{набл}} = |r_b| \sqrt{\frac{n-2}{1-r_b^2}}$$

$k=n-2$   $t_{\text{кр}}(a; k)$  по приложению №3.

Если  $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{кр}} \rightarrow H_0$

Если  $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}} \rightarrow H_1$

Ранговая корреляция (коэффициент ранговой корреляции Спирмена)

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n^3 - n}$$

Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента ранговой корреляции Спирмена

$$H_0: r_b = 0, \quad H_1: r_b \neq 0$$

$$T_{\text{набл}} = |r_v| \times \sqrt{\frac{n-2}{1-r_v^2}}$$

$t_{\text{кр}}(a; k)$  по приложению №3

Если  $T_{\text{набл}} < t_{\text{кр}} \rightarrow H_0$ . Если  $T_{\text{набл}} > t_{\text{кр}} \rightarrow H_1$

### Решение типового варианта

1. Определить коэффициент линейной корреляции между двумя рядами показателей. Найти уравнения выборочной прямой регрессии  $Y$  на  $X$  и  $X$  на  $Y$ .

|   |   |   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|---|---|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 3 | 7 | 12 |
| y | 2 | 3 | 8 | 4 | 5 | 8  |

При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции. Другими словами, требуется проверить, является ли значимой корреляционная связь между этими рядами.

**Решение.**

$$1. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1+2+3+3+7+12}{6} = 4,67$$

$$2. \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 7^2 + 12^2}{6} = 36$$

$$3. D(X) = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 36 - 4,67^2 = 14,19$$

$$4. s_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{14,19} = 3,77$$

$$5. \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{2+3+8+4+5+8}{6} = 5$$

$$6. \overline{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} = \frac{2^2 + 3^2 + 8^2 + 4^2 + 5^2 + 8^2}{6} = 30,33$$

$$7. D(Y) = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 30,33 - 5^2 = 5,33$$

$$8. s_y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{5,33} = 2,31$$

$$9. \overline{xy} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{n} = \frac{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 8 + 3 \times 4 + 7 \times 5 + 12 \times 8}{6} = 29,17$$

$$10. r_B = \frac{\overline{x} \times \overline{y} - \overline{x} \times \overline{y}}{s_x \times s_y} = \frac{29,17 - 4,67 \times 5}{3,77 \times 2,31} = 0,67$$

11. Найдем выборочное уравнение прямой регрессии Y на X:

$$y_x - 5 = 0,67 \times \frac{2,31}{3,77} (x - 4,67)$$

$$y_x = 0,41x + 3,08$$

12. Найдем выборочное уравнение прямой регрессии X на Y:

$$x_y - 4,67 = 0,67 \times \frac{3,77}{2,31} (y - 5)$$

$$x_y = 1,09y - 0,8$$

Изобразим на одном чертеже точками эмпирические данные и выборочные уравнения прямой регрессии Y на X и X на Y.

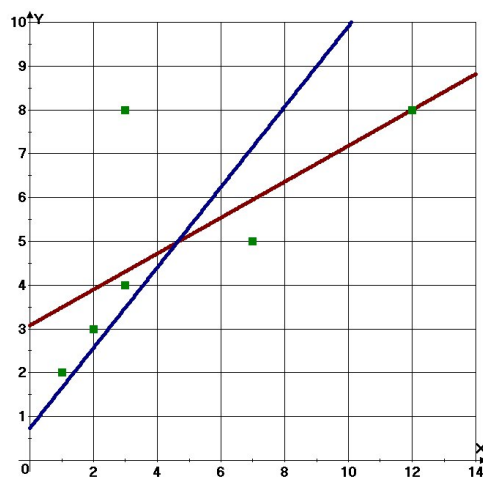


Рисунок 8. Графики прямых регрессий Y на X и X на Y

Проверим, является ли значимой корреляционная связь между этими рядами

Вычислим наблюдаемое значение критерия

$$T_{\text{набл}} = |r_B| \times \sqrt{\frac{n-2}{1-r_B^2}} = |0,67| \times \sqrt{\frac{6-2}{1-0,67^2}} = 1,805$$

Найдем критическую точку двусторонней критической области распределения Стьюдента по уровню значимости  $\alpha = 0,01$  и числу степеней свободы  $k=n-1=6-2=4$ . Найдем критическую точку (приложение 3):  $t_{\text{кр}}(0,01;8)=4,6$

$$\text{Итак, } T_{\text{набл}} = 1,805 \quad t_{\text{кр}}(0,01;8)=4,6$$

Так как  $T_{\text{набл}} < t_{\text{кр}}$  - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции. Другими словами, корреляционная связь между оценками по двум тестам незначимая.

2. Два контролера A и B расположили образцы изделий, изготовленных девятью мастерами, в порядке ухудшения качества (в скобках помещены порядковые номера изделий одинакового качества):

|     |   |   |     |    |    |     |    |    |    |
|-----|---|---|-----|----|----|-----|----|----|----|
| (A) | 1 | 2 | (3, | 4, | 5) | (6, | 7, | 8, | 9) |
| (B) | 2 | 1 | 4   | 3  | 5  | (6, | 7) | 8  | 9  |

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена между рангами изделий, присвоенными им двумя контролерами. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции Спирмена. Другими словами, требуется проверить, является ли значимой ранговая корреляционная связь между оценками по двум тестам.

**Решение.** Учитывая, что ранги изделий одинакового качества равны среднему арифметическому порядковых номеров изделий:  $\frac{3+4+5}{3}=4$ ,  $\frac{6+7+8+9}{4}=7,5$ ,  $\frac{6+7}{2}=6,5$ , напомним последовательности рангов, присвоенные изделиям контролерами:

|       |   |   |   |   |   |     |     |     |     |
|-------|---|---|---|---|---|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$ | 1 | 2 | 4 | 4 | 4 | 7,5 | 7,5 | 7,5 | 7,5 |
| $y_i$ | 2 | 1 | 4 | 3 | 5 | 6,5 | 6,5 | 8   | 9   |

Найдем выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена, учитывая, что  $\sum d_i^2 = 8,5$ ,  $n = 9$ :

$$r_v = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6 \cdot 8,5}{9^3 - 9} = 0,93$$

Итак,  $r_v = 0,93$ .

Вычислим наблюдаемое значение критерия

$$T_{\text{набл}} = |r_v| \times \sqrt{\frac{n-2}{1-r_v^2}} = |0,64| \times \sqrt{\frac{10-2}{1-0,64^2}} = 2,356$$

Найдем критическую точку двусторонней критической области распределения Стьюдента по уровню значимости  $\alpha = 0,01$  и числу степеней свободы  $k = n-1 = 10-2 = 8$  (приложение 3):  $t_{\text{кр}}(0,01; 8) = 3,36$ .

Итак,  $T_{\text{набл}} = 2,356$ ,  $t_{\text{кр}}(0,01; 8) = 3,36$

Так как  $T_{\text{набл}} < t_{\text{кр}}(0,01; 8)$  - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента ранговой корреляции Спирмена. Другими словами, ранговая корреляционная связь между оценками по двум тестам незначимая.

#### ИЗ-4

1. Коэффициент линейной корреляции. Определить коэффициент линейной корреляции между двумя рядами показателей X и Y (таблица 7). При уровне значимости  $\alpha$  проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции (т.е. требуется проверить, является ли значимой корреляционная связь между этими рядами).

Результат представить по следующей форме:

Дано:

|   |  |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|--|
| x |  |  |  |  |  |  |
| y |  |  |  |  |  |  |

$$a = \quad n =$$

|                        | $\bar{x}$ | $\bar{x}^2$ | D(X) | $s_x$ | $\bar{y}$ | $\bar{y}^2$ | D(Y) | $s_y$ | $\overline{xy}$ | $r_s$ | $T_{набл}$ | $t_{кр}(a; k)$          |
|------------------------|-----------|-------------|------|-------|-----------|-------------|------|-------|-----------------|-------|------------|-------------------------|
| Формулы для нахождения |           |             |      |       |           |             |      |       |                 |       |            | по таблице приложения 3 |
| Результат              |           |             |      |       |           |             |      |       |                 |       |            |                         |

Вывод:

2. Ранговая корреляция (Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена). Преподавателя интересует, влияет ли интерес студентов к учебному курсу на их успеваемость. С помощью некоторой методики удалось измерить величину интереса студентов к учению и выразить его в виде ряда чисел X. Так же были определены средние оценки этих же студентов по данному курсу, представленные соответственно рядом Y (таблица 8).

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена между двум показателями. При уровне значимости **a** проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента ранговой корреляции Спирмена (проверить, является ли значимой ранговая корреляционная связь между этими двумя показателями).

Результат представить по следующей форме:

Дано:

|   |     |     |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| X | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| Y |     |     |     |     |     |     |

$$a = \quad n =$$

|                       |     |     |     |     |     |     |
|-----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| <b>Интерес</b>        | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| Ранг $x_i$            |     |     |     |     |     |     |
| <b>Средние оценки</b> |     |     |     |     |     |     |
| Ранг $y_i$            |     |     |     |     |     |     |
| $d_i = x_i - y_i$     |     |     |     |     |     |     |
| $d_i^2$               |     |     |     |     |     |     |
| $\sum d_i^2$          |     |     |     |     |     |     |
| $r_s$                 |     |     |     |     |     |     |
| $T_{набл}$            |     |     |     |     |     |     |
| $t_{кр}(a; k)$        |     |     |     |     |     |     |

Вывод:

Таблица 7 Данные к заданию 1 ИЗ-4

| В |   |   |   |   |    |    |    | a     | В  |   |    |    |    |    |    |    | a    |
|---|---|---|---|---|----|----|----|-------|----|---|----|----|----|----|----|----|------|
| 1 | X | 1 | 1 | 3 | 5  | 7  | 8  | 0,001 | 16 | X | 4  | 6  | 7  | 12 | 16 | 17 | 0,01 |
|   | Y | 2 | 4 | 5 | 10 | 15 | 21 |       |    | Y | 1  | 11 | 14 | 18 | 22 | 24 |      |
| 2 | X | 1 | 2 | 4 | 8  | 10 | 12 | 0,002 | 17 | X | 1  | 7  | 7  | 18 | 16 | 24 | 0,02 |
|   | Y | 5 | 1 | 7 | 10 | 15 | 21 |       |    | Y | 23 | 12 | 11 | 1  | 9  | 3  |      |

|           |   |    |    |    |    |    |    |       |           |   |    |    |    |    |    |    |       |
|-----------|---|----|----|----|----|----|----|-------|-----------|---|----|----|----|----|----|----|-------|
| <b>3</b>  | X | 2  | 4  | 5  | 8  | 9  | 11 | 0,01  | <b>18</b> | X | 2  | 5  | 7  | 10 | 11 | 16 | 0,05  |
|           | Y | 24 | 15 | 9  | 6  | 3  | 1  |       |           | Y | 6  | 5  | 11 | 16 | 13 | 23 |       |
| <b>4</b>  | X | 5  | 6  | 8  | 9  | 13 | 17 | 0,02  | <b>19</b> | X | 1  | 2  | 4  | 5  | 7  | 11 | 0,1   |
|           | Y | 5  | 1  | 5  | 10 | 22 | 31 |       |           | Y | 2  | 3  | 5  | 6  | 15 | 28 |       |
| <b>5</b>  | X | 3  | 4  | 7  | 9  | 13 | 71 | 0,05  | <b>20</b> | X | 1  | 5  | 8  | 9  | 12 | 22 | 0,001 |
|           | Y | 14 | 12 | 9  | 1  | 5  | 2  |       |           | Y | 5  | 4  | 5  | 10 | 28 | 33 |       |
| <b>6</b>  | X | 1  | 3  | 4  | 6  | 11 | 18 | 0,1   | <b>21</b> | X | 4  | 4  | 7  | 7  | 13 | 15 | 0,002 |
|           | Y | 4  | 1  | 6  | 9  | 25 | 21 |       |           | Y | 11 | 12 | 10 | 1  | 6  | 2  |       |
| <b>7</b>  | X | 2  | 3  | 10 | 18 | 19 | 27 | 0,001 | <b>22</b> | X | 2  | 3  | 6  | 6  | 14 | 18 | 0,01  |
|           | Y | 26 | 14 | 19 | 7  | 3  | 2  |       |           | Y | 5  | 4  | 6  | 8  | 17 | 21 |       |
| <b>8</b>  | X | 4  | 6  | 7  | 12 | 16 | 17 | 0,002 | <b>23</b> | X | 1  | 8  | 10 | 13 | 16 | 24 | 0,02  |
|           | Y | 1  | 18 | 14 | 15 | 22 | 35 |       |           | Y | 17 | 14 | 12 | 7  | 3  | 1  |       |
| <b>9</b>  | X | 1  | 5  | 7  | 10 | 16 | 24 | 0,01  | <b>24</b> | X | 4  | 4  | 7  | 15 | 16 | 20 | 0,05  |
|           | Y | 28 | 12 | 15 | 1  | 7  | 3  |       |           | Y | 1  | 13 | 14 | 15 | 24 | 28 |       |
| <b>10</b> | X | 3  | 5  | 7  | 8  | 11 | 17 | 0,02  | <b>25</b> | X | 3  | 5  | 10 | 10 | 16 | 22 | 0,1   |
|           | Y | 6  | 1  | 11 | 15 | 13 | 27 |       |           | Y | 21 | 11 | 15 | 1  | 9  | 3  |       |
| <b>11</b> | X | 1  | 4  | 5  | 10 | 19 | 31 | 0,05  | <b>26</b> | X | 1  | 1  | 3  | 5  | 7  | 8  | 0,001 |
|           | Y | 27 | 19 | 9  | 7  | 3  | 2  |       |           | Y | 2  | 4  | 5  | 10 | 15 | 21 |       |
| <b>12</b> | X | 4  | 8  | 8  | 9  | 10 | 17 | 0,1   | <b>27</b> | X | 1  | 2  | 4  | 8  | 10 | 12 | 0,002 |
|           | Y | 9  | 1  | 2  | 3  | 27 | 34 |       |           | Y | 5  | 1  | 7  | 10 | 15 | 21 |       |
| <b>13</b> | X | 2  | 7  | 10 | 12 | 13 | 17 | 0,001 | <b>28</b> | X | 2  | 4  | 5  | 8  | 9  | 11 | 0,01  |
|           | Y | 34 | 28 | 21 | 6  | 4  | 3  |       |           | Y | 24 | 15 | 9  | 6  | 3  | 1  |       |
| <b>14</b> | X | 1  | 3  | 5  | 5  | 7  | 10 | 0,002 | <b>29</b> | X | 5  | 6  | 8  | 9  | 13 | 17 | 0,02  |
|           | Y | 2  | 4  | 6  | 10 | 19 | 16 |       |           | Y | 5  | 1  | 5  | 10 | 22 | 31 |       |
| <b>15</b> | X | 1  | 5  | 4  | 8  | 10 | 12 | 0,01  | <b>30</b> | X | 3  | 4  | 7  | 9  | 13 | 71 | 0,05  |
|           | Y | 8  | 1  | 12 | 10 | 20 | 21 |       |           | Y | 14 | 12 | 9  | 1  | 5  | 2  |       |

Таблица 8 Данные к заданию 2 ИЗ-4

| <b>В</b> |   |     |     |     |     |     |     | <b>а</b> |
|----------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
| <b>1</b> | X | 9   | 5   | 8   | 7   | 4   | 8   | 0,1      |
|          | Y | 5   | 3,5 | 4,8 | 3,4 | 2,8 | 4,3 |          |
| <b>2</b> | X | 7   | 5   | 9   | 6   | 2   | 7   | 0,05     |
|          | Y | 4,1 | 3,7 | 4,6 | 4,1 | 3,8 | 2,9 |          |
| <b>3</b> | X | 5   | 6   | 10  | 6   | 4   | 3   | 0,02     |
|          | Y | 3,4 | 2,3 | 3,7 | 3,4 | 4,2 | 5   |          |
| <b>4</b> | X | 7   | 5   | 8   | 7   | 8   | 9   | 0,01     |
|          | Y | 3,4 | 4,5 | 2,2 | 4,5 | 2,9 | 4,9 |          |

|    |   |     |     |     |     |     |     |       |
|----|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
| 5  | X | 5   | 1   | 6   | 7   | 4   | 6   | 0,002 |
|    | Y | 2,9 | 2   | 3,6 | 4,6 | 3,1 | 4   |       |
| 6  | X | 8   | 7   | 3   | 5   | 9   | 7   | 0,001 |
|    | Y | 4,5 | 4,2 | 2,4 | 4,2 | 4,8 | 3,9 |       |
| 7  | X | 3   | 6   | 8   | 4   | 6   | 10  | 0,1   |
|    | Y | 2,8 | 3,5 | 4,5 | 3,1 | 3,7 | 4,9 |       |
| 8  | X | 2   | 5   | 6   | 7   | 5   | 3   | 0,05  |
|    | Y | 2,1 | 2,8 | 4,3 | 4,8 | 3,1 | 4,3 |       |
| 9  | X | 5   | 7   | 8   | 3   | 7   | 6   | 0,02  |
|    | Y | 3,4 | 4,2 | 4,6 | 2,8 | 4,4 | 4,3 |       |
| 10 | X | 6   | 8   | 10  | 3   | 3   | 4   | 0,01  |
|    | Y | 3,9 | 4,3 | 4,9 | 2,4 | 3,5 | 4,1 |       |
| 11 | X | 8   | 6   | 8   | 7   | 6   | 8   | 0,002 |
|    | Y | 5   | 3,4 | 4,8 | 3,6 | 2,9 | 4,3 |       |
| 12 | X | 6   | 5   | 10  | 6   | 3   | 6   | 0,001 |
|    | Y | 4,2 | 3,7 | 4,7 | 4,1 | 3,6 | 2,8 |       |
| 13 | X | 5   | 7   | 10  | 7   | 3   | 3   | 0,1   |
|    | Y | 3,5 | 2,9 | 4,7 | 3,4 | 4,2 | 5   |       |
| 14 | X | 6   | 4   | 8   | 8   | 8   | 9   | 0,05  |
|    | Y | 3,8 | 4,5 | 2,2 | 4,5 | 2,7 | 4,2 |       |
| 15 | X | 6   | 2   | 6   | 8   | 2   | 6   | 0,02  |
|    | Y | 3,9 | 2,1 | 3,6 | 4,6 | 3,6 | 4   |       |
| 16 | X | 6   | 2   | 4   | 7   | 3   | 7   | 0,02  |
|    | Y | 4,2 | 4   | 3,8 | 4,3 | 2,4 | 4,5 |       |
| 17 | X | 5   | 5   | 9   | 6   | 7   | 6   | 0,01  |
|    | Y | 2,5 | 3,8 | 4,9 | 3,7 | 4,9 | 3,2 |       |
| 18 | X | 8   | 3   | 7   | 8   | 4   | 7   | 0,002 |
|    | Y | 4,3 | 2,3 | 4,5 | 4,3 | 2,3 | 4,2 |       |
| 19 | X | 5   | 7   | 2   | 8   | 9   | 5   | 0,001 |
|    | Y | 3,6 | 4,4 | 2,1 | 4,4 | 4,8 | 3,2 |       |
| 20 | X | 7   | 4   | 9   | 3   | 8   | 4   | 0,1   |
|    | Y | 4,4 | 3,1 | 4,6 | 2,4 | 4,3 | 2,4 |       |
| 21 | X | 7   | 4   | 7   | 5   | 3   | 9   | 0,05  |
|    | Y | 4,2 | 3,4 | 4,6 | 3,4 | 2,9 | 4,5 |       |
| 22 | X | 7   | 4   | 8   | 9   | 5   | 6   | 0,02  |
|    | Y | 3,3 | 2,4 | 4,5 | 4,5 | 2,4 | 4,4 |       |
| 23 | X | 6   | 6   | 3   | 7   | 10  | 4   | 0,01  |
|    | Y | 3,4 | 4,6 | 2,7 | 4,6 | 4,8 | 3,5 |       |
| 24 | X | 8   | 3   | 8   | 4   | 9   | 4   | 0,002 |

|    |   |     |     |     |     |     |     |       |
|----|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
|    | Y | 4,6 | 2,1 | 4,6 | 2,3 | 4,3 | 2,5 |       |
| 25 | X | 8   | 4   | 6   | 6   | 3   | 8   | 0,001 |
|    | Y | 4,6 | 3,2 | 4,6 | 3,2 | 2,8 | 4,5 |       |
| 26 | X | 9   | 5   | 8   | 7   | 4   | 8   | 0,1   |
|    | Y | 5   | 3,5 | 4,8 | 3,4 | 2,8 | 4,3 |       |
| 27 | X | 7   | 5   | 9   | 6   | 2   | 7   | 0,05  |
|    | Y | 4,1 | 3,7 | 4,6 | 4,1 | 3,8 | 2,9 |       |
| 28 | X | 5   | 6   | 10  | 6   | 4   | 3   | 0,02  |
|    | Y | 3,4 | 2,3 | 3,7 | 3,4 | 4,2 | 5   |       |
| 29 | X | 7   | 5   | 8   | 7   | 8   | 9   | 0,01  |
|    | Y | 3,4 | 4,5 | 2,2 | 4,5 | 2,9 | 4,9 |       |
| 30 | X | 5   | 1   | 6   | 7   | 4   | 6   | 0,002 |
|    | Y | 2,9 | 2   | 3,6 | 4,6 | 3,1 | 4   |       |

### Вопросы для самоконтроля

1. Запишите формулу для нахождения коэффициента линейной корреляции.
2. Что характеризует коэффициент корреляции?
3. В каких пределах могут изменяться значения коэффициента корреляции?
4. Что такое ложная корреляция?
5. Объясните алгоритм нахождения коэффициента корреляции.
6. В чем состоит проверка значимости коэффициента корреляции?
7. Если при проверки значимости коэффициента корреляции нет оснований отвергать нулевую гипотезу, то о чем это говорит?
8. В каких случаях необходимо использовать ранговую корреляцию?

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная литература:

1. Бондарь, В. В. (СКФУ). Математика (Теория вероятностей) : электронный ресурс : учебник / В.В. Бондарь, О.Д. Роженко и др.; ФГАОУ ВПО Сев.-Кав. федер. ун-т., Ч. 1. - Ставрополь : СКФУ, 2018.
2. Колемаев, В.А; Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : учебник / В.Н. Калинина / В.А. Колемаев ; ред. В.А. Колемаев. - Теория вероятностей и математическая статистика, - Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2017. - 352 с.
3. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - Москва : Юрайт, 2016. - 480 с. : ил. - (Бакалавр). - Гриф: Рек. УМО и МО
4. Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : учебник / П.Е. Рябов / С.Я. Криволапов / В.И. Глебов / А.В. Браилов. - Теория вероятностей и математическая статистика, 2020-08-23. - Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2016. - 414 с.

### Дополнительная литература:

1. Логинов, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : задачник / В.А. Логинов. - Теория вероятностей и математическая статистика, 2019-06-22. - Москва : Московская государственная академия водного транспорта, 2017.
2. Чайкина, И.А. Основы теории вероятностей и математической статистики Электронный ресурс : учебное пособие / И.А. Чайкина. - Ростов-на-Дону : Институт водного транспорта имени Г.Я. Седова – филиал «Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова», 2016. - 54 с.
3. Блатов, И.А. Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : учебное пособие / О.В. Старожилова / И.А. Блатов. - Самара : Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2017. - 276 с.
4. Тарасов, В.Н. Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы Электронный ресурс : учебное пособие / Н.Ф. Бахарева / В.Н. Тарасов. - Самара : Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2017. - 283 с.
5. Гриднева, И.В. Теория вероятностей и математическая статистика Электронный ресурс : учебное пособие / В.П. Шацкий / Л.И. Федулова / И.В. Гриднева. - Воронеж : Воронежский Государственный Аграрный Университет им. Императора Петра Первого, 2017

### Методическая литература:

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: 2008
2. Гурьянова, И.Э. Теория вероятностей и математическая статистика. Теория вероятностей. Краткий курс с примерами Электронный ресурс : учебное пособие / Е.В. Левашкина / И.Э. Гурьянова. - Теория вероятностей и математическая статистика. Теория вероятностей. Краткий курс с примерами, 2019-09-01. - Москва : Издательский Дом МИСиС, 2016. - 106 с..

### Интернет-ресурсы:

- [MathWorld: Wolfram Web Resource by Eric W. Weisstein](https://mathworld.wolfram.com/), один из самых больших веб-сайтов по математике
- [Mathematical Atlas by Dave Rusin](https://mathworld.wolfram.com/), один из самых больших веб-сайтов по математике
- [arXiv.org](https://arxiv.org/), автоматический электронный архив статей по математике
- [S.O.S. Mathematics](https://www.sos-mathematics.org/): свободные материалы по математике от алгебры до [дифференциальных уравнений](#)
- [Wikipedia: Свободная энциклопедия](https://ru.wikipedia.org/) – математика
- [PlanetMath.Org](https://planetmath.org/) – Математическая энциклопедия

ебр

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Методические указания по организации и проведению самостоятельной работы**  
по дисциплине  
**Методы количественного и качественного анализа данных**

|                          |                                       |
|--------------------------|---------------------------------------|
| Направление подготовки   | 44.03.01 «Педагогическое образование» |
| Направленность (профиль) | Физическая культура                   |
| Год начала обучения      | 2026                                  |

## ВВЕДЕНИЕ

**Самостоятельная работа** – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студента).

Самостоятельная работа студента является важным видом учебной и научной деятельности студента. Федеральным государственным образовательным стандартом предусматривается значительный объем времени из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу. В связи с этим, обучение включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому самостоятельная работа должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования – подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности.

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

Самостоятельная работа студента предполагает, прежде всего, его научно-исследовательскую и практическую деятельность, поскольку именно эти виды учебной работы в первую очередь готовят к самостоятельному выполнению профессиональных задач. Конечной целью самостоятельной работы является организация самостоятельной познавательной деятельности, формирование умения самостоятельно анализировать информацию, выделять главное и второстепенное.

В результате освоения дисциплины **«Методы количественного и качественного анализа данных»** формируются компетенции **УК-1 и ОПК-9**, в соответствии с которыми студент должен быть способен:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач
- понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной деятельности

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «Методы количественного и качественного анализа данных»**

Самостоятельная работа проводится в виде подготовки к практическим занятиям, выполнения домашних заданий по темам дисциплины **«Спецглавы алгебры»**. Основной целью этих видов самостоятельной работы является улучшение профессиональной подготовки бакалавров высшей квалификации, направленное на формирование действенной системы фундаментальных и профессиональных знаний, умений и навыков, которые они могли бы свободно и самостоятельно применять в практической деятельности.

### **Цели самостоятельной работы:**

- научить студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свою квалификацию.
- закрепление, расширение и углубление знаний, умений и навыков, полученных студентами на аудиторных занятиях под руководством преподавателей;
- изучение студентами дополнительных материалов по изучаемым дисциплинам и умение выбирать необходимый материал из различных источников; воспитание у студентов самостоятельности, организованности, самодисциплины, творческой активности, потребности развития познавательных способностей и упорства в достижении поставленных целей.

Предлагаемый подход к освоению материала усиливает мотивацию к аудиторной и внеаудиторной активности, что обеспечивает необходимый уровень знаний по изучаемым дисциплинам и позволяет повысить готовность студентов к сдаче экзаменов.

Приступая к изучению учебной дисциплины **«Методы количественного и качественного анализа данных»**, студенты должны ознакомиться с учебной программой, учебной, научной и методической литературой, имеющейся в библиотеке, получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

В ходе лекционных занятий вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

В ходе подготовки к практическим занятиям изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях: журналах, газетах и т.д. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой. После подведения итогов практического занятия устранить недостатки, отмеченные преподавателем.

В ходе организации самостоятельной работы **решаются следующие задачи:**

- углублять и расширять их профессиональные знания;
- формировать у них интерес к учебно-познавательной деятельности;
- развивать у бакалавров самостоятельность, активность, ответственность;
- развивать познавательные способности специалистов.

Учебный процесс в высшем учебном заведении в значительной степени строится на самостоятельной работе студентов, без которой трудно в полной мере овладеть сложным программным материалом и научиться, в дальнейшем, постоянно совершенствовать приобретенные знания и умения.

Самостоятельная работа является внеаудиторной и предназначена для самостоятельного ознакомления студента с определенными разделами дисциплины **«Методы количественного и качественного анализа данных»** по рекомендованным преподавателем материалам и подготовки к выполнению индивидуальных заданий.

## ПЛАН – ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

| <b>Вид деятельности студентов</b>                                                            | <b>Итоговый продукт самостоятельной работы</b> | <b>Средства и технологии оценки</b> | <b>Примерные сроки выполнения</b> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| <b>6 семестр</b>                                                                             |                                                |                                     |                                   |
| Изучение лекционного материала, рекомендуемой литературы, подготовка к практическим занятиям | Конспект                                       | Собеседование                       | 5 неделя                          |
| Изучение лекционного материала, рекомендуемой литературы, подготовка к практическим занятиям | Конспект                                       | Собеседование                       | 11 неделя                         |
| Изучение лекционного материала, рекомендуемой литературы, подготовка к практическим занятиям | Конспект                                       | Собеседование                       | 15 неделя                         |

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Как уже отмечалось, самостоятельная работа по изучению теоретического материала (а также самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях) – это важнейшее условие формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

- Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать».

- Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

- Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).

- Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.

- При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...

- Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

- Если книга – Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора (это очень хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).

- Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать), и это может занять немалое время (у кого-то – до нескольких недель и даже месяцев); опыт показывает, что после этого студент каким-то «чудом» начинает буквально заглатывать книги и чуть ли не видеть «сквозь обложку», стоящая эта работа или нет...

- «Либо читайте, либо перелистывайте материал, но не пытайтесь читать быстро... Если текст меня интересует, то чтение, размышление и даже фантазирование по этому поводу сливаются в единый процесс, в то время как вынужденное скорочтение не только не способствует качеству чтения, но и не приносит чувства удовлетворения, которое мы получаем, размышляя о прочитанном», – советует Г. Селье (Селье, 1987. – С. 325-326).

- Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент (или молодой ученый) будет как бы искать аргументы

«за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Проблема лишь в том, как найти «свою» идею...

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того насколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют четыре основные установки в чтении научного текста:

1. **информационно-поисковый** (задача – найти, выделить искомую информацию)
2. **усваивающая** (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)
3. **аналитико-критическая** (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)
4. **творческая** (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких видов чтения:

1. **библиографическое** – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
2. **просмотровое** – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
3. **ознакомительное** – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;
4. **изучающее** – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;
5. **аналитико-критическое и творческое чтение** – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВИДАМ РАБОТ, ПРЕДУСМОТРЕННЫХ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Предполагается, что отдельные вопросы тем дисциплины изучаются студентами самостоятельно. Знания указанных вопросов проверяется наличием конспектов и собеседованием. Ниже приведены вопросы для собеседования по всем темам дисциплины «**Методы количественного и качественного анализа данных**». Ответы на теоретические вопросы в рамках каждого практического занятия (собеседование) показывают умения и навыки студентов анализировать теоретический материал и готовность к применению теоретических знаний в практической деятельности.

Данное оценочное мероприятие проводится на каждом практическом занятии на основании материалов и знаний, полученных на лекциях, а также при изучении основной и дополнительной литературы.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования материалами лекций, основной и дополнительной литературы, а также интернет-ресурсов.

При проверке задания оцениваются:

- правильность ответов;
- чёткое знание терминологии;
- умение грамотно, четко и последовательно излагать материал;
- использование дополнительной литературы при подготовке;
- умение анализировать теоретический материал и сопоставлять его с практикой;
- умение приводить конкретные примеры.

В процессе самостоятельного изучения отдельных вопросов тем дисциплины рекомендуется работа с литературой, перечень которой приведен в конце методических указаний.

### СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

#### Перечень основной литературы:

1. Ивлева, А. М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / А. М. Ивлева, П. И. Прилуцкая, И. Д. Черных. - 5-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2019. - 183 с. - ISBN 978-5-7782-3868-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/98793.html>

2. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2011. - 265 с. - ISBN 978-985-536-229-7. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28035.html>

#### Перечень дополнительной литературы:

1. Пономарёв, К. Н. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия и комплексные числа: учебное пособие / К. Н. Пономарёв, И. А. Сажин. - 2-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2022. - 127 с. - ISBN 978-5-7782-4735-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/126500.html>

2. Чеголин, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / А. П. Чеголин. - Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/68568.html>

3. Алания, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Алания, С. М. Гусейн-Заде, И. А. Дынников. - Москва: Логос, 2005. - 376 с. - ISBN 5-

94010-375-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/9121.html>

**Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

1. Бобылева, Т. Н. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие / Т. Н. Бобылева, Л. В. Кирьянова, Т. Н. Титова. - Москва: МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 144 с. - ISBN 978-5-7264-1909-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/80626.html>

2. Лебедева, Е. А. Практические занятия по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебно-методическое пособие / Е. А. Лебедева, О. Е. Рощенко, Т. И. Ерзина. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2013. - 130 с. — ISBN 978-5-7782-2275-5. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/45428.html>

**Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

<http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

<http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

<http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.

<http://www.mathedu.ru/> Электронная библиотека по математике и вопросам ее преподавания. Включает [популярные книги и пособия](#), [методические руководства](#), [учебники](#), [журналы](#), [исторические работы](#), [авторефераты](#), [диафильмы](#).

<http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

<http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).

<http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.