

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания
к практическим занятиям
по дисциплине
«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА»

для бакалавров направления
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Ставрополь, 2026

Оглавление

Оглавление

1	ЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.....	3
2	МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ	10
3	СИНТЕЗ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ	19
4	ПРИЛОЖЕНИЯ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ К ТЕОРИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ	28
5	МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ В ИСЧИСЛЕНИИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ	37
1.	Из методической разработки решить задачи с четными номерами.	49
6	ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ.....	50
7	ПОСТРОЕНИЕ ВЫВОДОВ В ИСЧИСЛЕНИИ ПРЕДИКАТОВ	56
8	МОДЕЛИ ПЕРВОПОРЯДКОВОЙ ЛОГИКИ.....	66
	ЛИТЕРАТУРА	80

1 ЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Учебные цели: Закрепить определения логических операций над высказываниями, научиться составлять таблицы истинности для формул алгебры высказываний, закрепить навыки использования законов логики для доказательства равносильностей, освоить принцип двойственности в алгебре высказываний.

1.1 Учебные вопросы занятия:

1. Выполнение логических преобразований.
2. Решение задач с использованием законов логики высказываний.

1.2 Вопросы для проверки готовности студентов к практическому занятию

1. Всякое ли предложение естественного языка является высказыванием?
2. Что означает союз «или» в неисключающем смысле?
3. Дать словесные определения логических операций над высказываниями и привести их обозначения.
4. Определить понятие формулы алгебры высказываний.
5. Какая формула называется тавтологией?
6. Какая формула называется тождественно ложной?
7. Какая формула называется выполнимой?
8. Какие формулы называются равносильными?
9. Записать основные законы логики (тавтологии).
10. Сформулировать закон двойственности для булевых формул.

1. Выполнение логических преобразований

Условимся для дальнейшего значение «истина» обозначать цифрой 1, а значение «ложь» – цифрой 0 (в литературе используются также обозначения T (true) и F (false) и др.) Тогда определения пяти основных логических операций над высказываниями (отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и эквиваленцию) можно свести в одну таблицу (таблица 1.1), которая называется *таблицей истинности*:

Таблица 1.1 – Таблица истинности для определения основных логических операций

x	y	$\bar{x}$	$x \& y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Подобные таблицы истинности часто используют для доказательства логических тождеств и равносильностей, законов логики, в различных приложениях булевой алгебры.

На данном практическом занятии на основе определения логических операций и законов логики мы будем устанавливать, к какому классу (тавтологии, тождественно ложные или выполнимые) принадлежат данные формулы алгебры логики. Кроме того, мы научимся выражать одни логические операции через другие, а также находить формулы, двойственные данным формулам. Материал данного практического занятия необходим для закрепления и приобретения простейших навыков для приведения логических функций к СДНФ (СКНФ), их оптимизации и синтезу логических схем.

Напомним, что всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения логических операций и круглых скобок, регулирующих порядок их выполнения, называется *формулой алгебры логики*. При

этом сами элементарные высказывания, а также константы 0 и 1 также являются простейшими формулами.

Все возможные логические значения формулы в зависимости от значений входящих в неё элементарных высказываний могут быть описаны полностью с помощью таблицы истинности.

По определению формула $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *двойственной* формуле $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}$, при этом столбец значений f^* таблицы истинности получается из столбца значений функции f инвертированием последнего и отрицанием.

Для булевых формул двойственная формула может быть получена заменой операции $\&$ на $\vee$, операции $\vee$ на $\&$, 1 на 0, 0 на 1 и сохранением структуры формулы (т.е. соответствующего порядка действий). Если в формулах присутствуют операции импликации и эквиваленции, их предварительно выражают через операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

Для выполнения тождественных преобразований формул логики высказываний необходимо *знать*:

а) определение логических операций над высказываниями;

б) основные законы алгебры Буля;

уметь: составлять таблицы истинности для сложных высказываний.

Приведем список основных свойств (законов) булевых операций алгебры высказываний. При этом условимся отношение равносильности на множестве высказываний (формул) обозначать знаком « $\equiv$ ».

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad x \& x \equiv x \\ 2. \quad x \vee x \equiv x \end{array} \right\} - \text{законы идемпотентности}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3. \quad x \& 1 \equiv x \\ 4. \quad x \vee 1 \equiv 1 \\ 5. \quad x \& 0 \equiv 0 \\ 6. \quad x \vee 0 \equiv x \end{array} \right\} - \text{законы нуля и единицы;}$$

$$7. \quad x \& \overline{x} \equiv 0 - \text{закон противоречия;}$$

$$8. \quad x \vee \overline{x} \equiv 1 - \text{закон исключенного третьего;}$$

$$\left. \begin{array}{l} 9. \quad x \& (y \vee x) \equiv x \\ 10. \quad x \vee (y \& x) \equiv x \end{array} \right\} - \text{законы поглощения;}$$

$$11. \quad \overline{\overline{x}} \equiv x - \text{закон двойного отрицания;}$$

$$\left. \begin{array}{l} 12. \quad \overline{x \& y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y} \\ 13. \quad \overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \& \overline{y} \end{array} \right\} - \text{законы де Моргана;}$$

- $$\left. \begin{array}{l} 14. x \& y \equiv y \& x \\ 15. x \vee y \equiv y \vee x \end{array} \right\} - \text{коммутативные законы}$$
- $$\left. \begin{array}{l} 16. x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z \\ 17. x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z \end{array} \right\} - \text{ассоциативные законы}$$
- $$\left. \begin{array}{l} 18. x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z) \\ 19. x \vee (y \& z) \equiv (x \vee y) \& (x \vee z) \end{array} \right\} - \text{дистрибутивные законы}$$
20. $x \rightarrow y \equiv \bar{y} \rightarrow \bar{x}$ - закон контрапозиции.

Надо также уметь выражать одни логические операции через другие. Среди таких равносильностей особую роль играют следующие равносильности:

1. $x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x);$
2. $x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y; x \rightarrow y \equiv \overline{x \& \bar{y}};$
3. Законы де Моргана 12 и 13.
4. $x \& y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}};$
5. $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{y}};$
6. $\overline{x \rightarrow y} \equiv x \& \bar{y}$ и др.

Задачи

1.1. Составить таблицы истинности для следующих формул и установить, какие из них являются тавтологиями. К какому классу относятся остальные формулы?

- 1.1.1. $(x \vee y) \rightarrow ((x \& \bar{y} \vee x) \rightarrow \bar{y});$
- 1.1.2. $(x \& \bar{y}) \rightarrow ((y \vee \bar{x}) \rightarrow \bar{z});$
- 1.1.3. $(\bar{x} \vee z) \& (y \rightarrow (\bar{z} \rightarrow x));$
- 1.1.4. $\overline{\overline{x \vee y} \rightarrow \overline{x \& y}};$
- 1.1.5. $((x \rightarrow y) \& \bar{y}) \rightarrow \bar{x};$
- 1.1.6. $((p \& (q \rightarrow p)) \rightarrow \bar{p}).$

В качестве примера рассмотрим формулу 1.1.2

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x \& \bar{y}$	$y \vee \bar{x}$	$(y \vee \bar{x}) \rightarrow \bar{z}$	f
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Формула 1.1.2 является тавтологией, так как значение этой формулы на всех наборах равно 1.

1.2. Используя основные законы логики, с помощью равносильных преобразований доказать следующие соотношения:

$$1.2.1. \quad x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{y}};$$

$$1.2.2. \quad (x \& y) \vee (x \& \bar{y}) \equiv x;$$

$$1.2.3. \quad x \vee x \& y \equiv x;$$

$$1.2.4. \quad \bar{x} \vee \bar{y} \equiv y \rightarrow \bar{x};$$

$$1.2.5. \quad (x \& y) \vee (\bar{x} \& \bar{y}) \vee (\bar{x} \& y) \equiv x \rightarrow y;$$

$$1.2.6. \quad (x \rightarrow \bar{y}) \equiv (y \rightarrow \bar{x}).$$

Докажем, например, 1.2.5.

$$(x \& y) \vee (\bar{x} \& \bar{y}) \vee (\bar{x} \& y) \equiv (x \& y) \vee (\bar{x} \& (\bar{y} \vee y)) \equiv (x \& y) \vee \bar{x} \equiv (x \vee \bar{x}) \& (y \vee \bar{x}) \equiv y \vee \bar{x} \equiv x \rightarrow y.$$

1.3. Доказать тождественную истинность или тождественную ложность формул, применяя равносильные преобразования:

$$1.3.1. \quad (x \vee (\bar{x} \& y)) \sim (y \vee x);$$

$$1.3.2. \quad (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow \bar{y});$$

$$1.3.3. \quad (x \vee y) \& \bar{x} \rightarrow y;$$

$$1.3.4. \quad x \& (x \rightarrow y) \& (x \rightarrow \bar{y});$$

$$1.3.5. \quad (x \rightarrow y) \& \bar{y} \rightarrow \bar{x};$$

ставителем. Тем самым будет более широкий охват заданий, у доски поработает большее количество студентов и будет экономия времени.

2. Решение задач с использованием законов логики высказываний

Основываясь на законе контрапозиции $(x \rightarrow y) \equiv (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$ для теоремы Пифагора сформулировать обратное, противоположное и обратное противоположному предположение и установить истинность каждого из них.

Решение. Теорему Пифагора сформулируем на языке импликации «если, ..., то ...»: *если треугольник прямоугольный, то в нем сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы* - истинное высказывание $(x \rightarrow y)$.

Обратное высказывание имеет вид $y \rightarrow x$: *если в некотором треугольнике сумма квадратов длин каких-либо сторон равна квадрату длины третьей стороны, то этот треугольник прямоугольный*. Это утверждение также истинно.

Противоположное высказывание: *если треугольник не прямоугольный, то в нем сумма квадратов длин никаких двух сторон не равна квадрату длины третьей стороны* $(\bar{x} \rightarrow \bar{y})$. Применяя закон контрапозиции в виде $(y \rightarrow x) \equiv \bar{x} \rightarrow \bar{y}$, убеждаемся в истинности и этого утверждения.

Наконец, выражая словесно формулу $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$, получаем предположение, обратное противоположному теореме Пифагора: *если в треугольнике сумма квадратов длин никаких двух сторон не равна квадрату длины третьей стороны, то этот треугольник не прямоугольный*. В силу закона контрапозиции, записанного в начале задачи, получаем, что и это высказывание истинно.

Заметим, что закон контрапозиции лежит в основе доказательства утверждений *методом от противного*.

2.1. Сформулировать четыре вида утверждений, как в задаче 2.1, и установить истинность каждого из них для теорем:

- а) точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии;
- б) всякая монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

2.2. Найти высказываниех, если $\overline{(x \vee a)} \vee \overline{(x \vee a)} \equiv b$.

Ответ: $x \equiv \bar{b}$.

2.3. Штрихом Шеффера двух высказываний x и y называется высказывание, обозначаемое через $x|y$ (читается « x не совместимо с y »), которое ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны. Составить таблицу истинности штриха Шеффера и выразить его через операции $\&$, $\vee$, $\bar{}$ и наоборот, операции $\&$, $\vee$, $\bar{}$ выразить через штрих Шеффера.

Ответ: $x|y \equiv \overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$; $\bar{x} \equiv x|x$; $x \& y \equiv (x|y)|(x|y)$; $x \vee y \equiv (x|x)|(y|y)$.

2.4. Стрелкой Пирса (штрихом Лукасевича) двух высказываний x и y называется высказывание, обозначаемое через $x \downarrow y$ (читается «ни x , ни y »), которое истинно в том и только в том случае, когда оба данные высказывания ложны. Составить таблицу истинности

стрелки Пирса и выразить ее через $\&$, $\vee$, $\bar{}$ и обратно, операции $\&$, $\vee$, $\bar{}$ выразить через стрелку Пирса.

Ответ: $x \downarrow y \equiv \overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \& \bar{y}$;

$$\bar{\bar{x}} \equiv x \downarrow x;$$

$$x \vee y \equiv (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y);$$

$$x \& y \equiv (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y).$$

На занятии рекомендуется решить из п.1 задачи с четными номерами и задачи 2.1 и 2.4.

Заключение

Пусть задано произвольное непустое множество $M = \{a, b, c, \dots, x, y, z, \dots\}$ и на нем определены две бинарные алгебраические операции, условно называемые умножением и сложением, и обладающие свойствами, аналогичными свойствам 1-20. Множество M в этом случае называется **алгеброй Буля**. Эта алгебра абстрактная. Если рассматривать конкретные множества и конкретные операции на нем, то мы будем получать различные интерпретации алгебры Буля. Таким образом, алгебра логики является одной из интерпретаций алгебры Буля. Другими примерами интерпретаций алгебры Буля могут служить алгебра множеств, алгебра комбинационных схем и т.д.

Принцип двойственности позволяет почти в два раза сократить усилия на вывод тождеств при рассмотрении свойств элементарных булевых функций. Есть и другие применения принципа двойственности.

1.3 Задание студентам для самостоятельной работы

1. Из данной методической разработки решить задачи 1.1.1, 1.1.3, 1.1.5, 1.2.1, 1.2.3, 1.2.5, 1.3.1, 1.3.3, 1.3.5, 1.4.1, 1.4.3, 1.4.5, 1.5.1, 1.5.3, 1.5.5, 2.2, 2.3, 2.5.
2. Подготовиться к практическому занятию на тему «Минимизация булевых функций». Кроме того, подготовить вопросы, связанные с приведением булевых функций к совершенным дизъюнктивным и конъюнктивным нормальным формам.

2 МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Учебные цели: Приобрести умения приводить булевы функции от небольшого числа переменных к минимальной форме аналитическим методом (методом Квайна), графическим методом (методом карт Карно), включая минимизацию частично определенных функций. Попутно научиться преобразовывать булеву функцию к СДНФ (СКНФ) с помощью таблиц истинности.

2.1 Учебные вопросы занятия:

1. Минимизация булевых функций методом Квайна
2. Минимизация булевых функций методом карт Карно
3. Минимизация не полностью определенных логических функций.

2.2 Вопросы для проверки готовности студентов к занятию

1. Что называется импликантой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$? Что такое имплицента?
2. Какая импликанта называется простой?
3. Какая импликанта называется существенной?
4. В чем суть минимизации булевой функции методом Квайна?
5. Что называется сокращенной дизъюнктивной нормальной формой (СокДНФ) булевой функции? К чему сводится алгоритм отыскания СокДНФ?
6. Что называется тупиковой ДНФ (ТДНФ) булевой функции? Как ее найти?
7. Каким образом из ТДНФ выбирают минимальную ДНФ (МДНФ) булевой функции?
8. Что представляет собой карта Карно? Изобразить заготовки карт Карно для функций 2, 3 и 4 переменных.
9. Описать алгоритм отыскания МДНФ булевой функции на основе карт Карно.
10. Какая булева функция называется не полностью (частично) определенной?
11. Каким образом проводится доопределение частично определенной функции при ее минимизации?

1. Минимизация булевых функций методом Квайна
Сокращенная и тупиковые ДНФ (КНФ)

Определение 1. Сокращенной дизъюнктивной нормальной формой называется дизъюнкция всех простых импликант данной функции.

Следовательно, отыскание сокращенной ДНФ функции является проблемой отыскания всех ее простых импликант.

Аналогичным образом можно ввести сокращенную КНФ.

Определение 2. Дизъюнкция (конъюнкция) простых импликант (имплицента), ни одна из которых не является лишней, называется ее **тупиковой** дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой – ТДНФ (ТКНФ).

Логическая функция может быть представлена одной или несколькими ТДНФ и ТКНФ.

Определение 3. ТДНФ (ТКНФ) логической функции, содержащая наименьшее возможное число переменных и их отрицаний, называется **минимальной** дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой – МДНФ (МКНФ).

Точное решение задачи минимизации булевых функций предполагает нахождение их МДНФ (МКНФ). Решение этой задачи включает следующие этапы:

1. Представление булевой функции в СДНФ или СКНФ.
2. Получение сокращенной ДНФ (КНФ).
3. Нахождение всех ТДНФ (ТКНФ).
4. Выбор из полученных тупиковых форм МДНФ (МКНФ).

Минимизация булевых функций методом Квайна проводится в точном соответствии с основными этапами минимизации, указанными выше. Поскольку представление миними-

зируемой функции в СДНФ является отдельной задачей, независимой от минимизации, для лучшего понимания метода Квайна мы ограничимся функциями, уже приведенными к СДНФ.

Получение сокращенной ДНФ методом Квайна состоит в следующем. Путем последовательного проведения всех возможных операций неполного склеивания типа $x\bar{y} \vee x\bar{y} = x$ каждого минтерма СДНФ с каждым другим минтермом, а затем всех возможных поглощений конституент единицы вида $x\bar{y} \vee x = x$, мы получим все простые импликанты минимизируемой функции. Этот этап удобнее всего проводить с помощью прямоугольной таблицы, имена строк и столбцов которой представляют собой все минтермы, входящие в СДНФ. С помощью такой таблицы подбираются пары минтермов, отличающиеся друг от друга лишь одной переменной в собственных частях. Результат такого неполного склеивания записывается в таблицу на пересечении склеиваемых минтермов. При этом таблица окажется симметричной относительно главной диагонали, поэтому, во избежание лишних импликант, берется дизъюнкция импликант только в верхней (или только в нижней) части таблицы. Полученные импликанты и дают *сокращенную ДНФ*.

Нахождение всех тупиковых ДНФ также можно произвести с помощью прямоугольной таблицы (*импликантной матрицы*), столбцы которой соответствуют конституентам единицы (минтермам), а строки – простым импликантам. Из полученной матрицы выбираются минимальные количества самых коротких простых импликант, которые совместно поглощают (перекрывают) все минтермы СДНФ минимизируемой функции, и ни одна из которых не является лишней. Дизъюнкция выбранных таким образом простых импликант и будет являться тупиковой. В импликантной матрице в клетках на пересечении строк со столбцами, в которых простая импликанта входит в данный минтерм, проставляются метки. Из всех тупиковых форм выбирают минимальную.

В более сложных примерах, когда число переменных больше 3, при нахождении сокращенной ДНФ приходится несколько раз проводить операции склеивания и поглощения над вновь полученными импликантами, поскольку они могут оказаться не простыми. Заметим при этом, что импликанту, которая в единственном числе перекрывает ту или иную конституенту единицы (минтерм) называют *существенной*. Существенные импликанты всегда входят в МДНФ.

Задачи

1.1. Методом Квайна найти МДНФ и МКНФ функции, заданной в СДНФ:

$$f(x, y, z) = \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz, \quad (2.1)$$

Решение. Заполним прямоугольную таблицу 1 по указанному выше алгоритму.

Таблица 2.1 – Первичное склеивание минтермов в задаче 1.1

Мин-термы	$\bar{x}yz$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}\bar{z}$	xyz
$\bar{x}yz$		$\bar{y}z$				xz
$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{y}z$		$\bar{x}y$			
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$		$\bar{x}y$		$\bar{x}z$		
$\bar{x}yz$			$\bar{x}z$		$\bar{y}z$	
$x\bar{y}\bar{z}$				$\bar{y}z$		xy
xyz					xy	

Поскольку все импликанты, стоящие в верхней части таблицы 1, являются простыми (то есть больше попарно не склеиваются), то сокращенной ДНФ данной функции будет функция

ной и ее отрицанием. При этом в силу симметрии таблицы достаточно заполнить лишь верхнюю ее часть.

Таблица 2.3 – Первичное склеивание минтермов в задаче 1.3

Мин-термы	$\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{x}y\overline{z}$
$\overline{x}y\overline{z}v$		$\overline{x}z\overline{v}$				$\overline{y}z\overline{v}$				
$\overline{x}y\overline{z}v$	$\overline{x}z\overline{v}$			$\overline{x}y\overline{v}$						
$\overline{x}y\overline{z}v$				$\overline{x}y\overline{z}$					$\overline{y}z\overline{v}$	
$\overline{x}y\overline{z}v$		$\overline{x}y\overline{v}$	$\overline{x}y\overline{z}$							$\overline{y}z\overline{v}$
$\overline{x}y\overline{z}v$						$\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{x}y\overline{v}$			
$\overline{x}y\overline{z}v$	$\overline{y}z\overline{v}$				$\overline{x}y\overline{z}$			$\overline{x}y\overline{v}$		
$\overline{x}y\overline{z}v$					$\overline{x}y\overline{v}$			$\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{x}z\overline{v}$	
$\overline{x}y\overline{z}v$						$\overline{x}y\overline{v}$	$\overline{x}y\overline{z}$			$\overline{x}z\overline{v}$
$\overline{x}y\overline{z}v$			$\overline{y}z\overline{v}$				$\overline{x}z\overline{v}$			$\overline{x}y\overline{z}$
$\overline{x}y\overline{z}v$				$\overline{y}z\overline{v}$				$\overline{x}z\overline{v}$	$\overline{x}y\overline{z}$	

Из полученных 13 импликант составим новую таблицу 2.4, поскольку не все они являются простыми. В то же время не задействованные импликанты $\overline{x}z\overline{v}$, $\overline{y}z\overline{v}$, $\overline{x}y\overline{v}$ в операциях склеивания будут простыми. Кроме того, простыми оказываются импликанты $\overline{y}z$, $\overline{x}y$ и $\overline{x}z$, так как дальнейшему склеиванию они не подлежат.

Таблица 2.4 - Вторичное склеивание минтермов в задаче 1.3

Им-пли-каны	$\overline{x}z$	$\overline{y}z$	$\overline{x}y$	$\overline{x}z$	$\overline{y}z$	$\overline{x}y$	$\overline{x}z$	$\overline{y}z$	$\overline{x}y$	$\overline{x}z$	$\overline{y}z$	$\overline{x}y$
$\overline{x}z\overline{v}$												
$\overline{y}z\overline{v}$												
$\overline{x}y\overline{v}$												
$\overline{x}y\overline{z}$												$\overline{y}z$
$\overline{y}z\overline{v}$					$\overline{y}z$							
$\overline{y}z\overline{v}$					$\overline{y}z$							
$\overline{x}y\overline{z}$									$\overline{x}y$			

$\overline{x}\overline{y}v$									$\overline{x}y$			
$x\overline{y}v$								$x\overline{y}$				
$\overline{x}yz$							$\overline{x}y$					xz
$xz\overline{v}$												xz
$xz\overline{v}$										xz		
xyz				yz						xz		

Таким образом, сокращенная ДНФ исходной функции принимает вид $f_{\text{сокДНФ}} = \overline{x}\overline{y} \vee xz \vee yz \vee \overline{x}y\overline{v} \vee xz\overline{v} \vee \overline{y}zv$.

Найдем теперь все тупиковые и минимальную ДНФ данной функции. Строим импликантную матрицу (таблица 2.5):

Таблица 2.5 – Импликантная матрица к задаче 1.3

Мин-термы Прос-тые импликанты	$\overline{x}\overline{y}z\overline{v}$	$\overline{x}y\overline{z}v$	$\overline{x}y\overline{z}\overline{v}$	$\overline{x}yzv$	$x\overline{y}z\overline{v}$	$x\overline{y}zv$	$\overline{x}y\overline{z}v$	$\overline{x}yz\overline{v}$	$x\overline{y}z\overline{v}$	$x\overline{y}zv$
$\overline{x}\overline{y}$					*	*	*	*		
xz							*	*	*	*
yz			*	*					*	*
$\overline{x}y\overline{v}$		*		*						
$\overline{x}z\overline{v}$	*	*								
$\overline{y}zv$	*					*				

В нашем случае, как показывает импликантная матрица, существенными являются две простые импликанты $\overline{x}\overline{y}$ (только она перекрывает минтерм $\overline{x}\overline{y}z\overline{v}$) и yz (только она перекрывает минтерм $\overline{x}y\overline{z}\overline{v}$). Поэтому они обязательно должны войти в минимальную форму.

Вместе импликанты $\overline{x}\overline{y}$ и yz перекрывают все минтермы, кроме первых $\overline{x}\overline{y}z\overline{v}$ и $\overline{x}y\overline{z}\overline{v}$. Поглощение указанных двух минтермов может быть получено двумя способами: либо импликантой $\overline{y}zv$, либо двумя импликантами $\overline{x}y\overline{v}$ и $\overline{x}z\overline{v}$. В результате получаем две тупиковые ДНФ

$$f_1(x, y, z, v) = \overline{x}\overline{y} \vee yz \vee \overline{x}z\overline{v}, \quad f_2(x, y, z, v) = \overline{x}\overline{y} \vee yz\overline{v} \vee \overline{x}y\overline{v} \vee \overline{x}z\overline{v}.$$

Поскольку первая ТДНФ содержит 7 букв, а вторая – 10, то минимальной формой данной функции является первая ТДНФ f_1 .

1.4. Определить методом Квайна все ТДНФ и МДНФ логической функции

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum(0, 3, 7, 8, 9, 11).$$

На остальных наборах данная функция принимает значение 0.

Ответ: получим две ТДНФ: $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$;

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4.$$

Очевидно, что МДНФ данной функции совпадает с ТДНФ $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

2. Минимизация булевых функций методом карт Карно

Одним из возможных способов графического представления логической функции от небольшого числа переменных являются карты Карно (диаграммы Вейча).

Карты Карно состоят из 2^m клеток, где m - число аргументов функции, и представляют собой преобразованные таблицы истинности. Каждая клетка соответствует определенному набору аргументов. В клетках записываются либо нули, либо единицы в соответствии с тем, какие значения принимает функция на каждом наборе. Наличие единицы в клетке указывает на то, что соответствующая ей конституента единицы должна входить в СДНФ функции.

Карты Карно для функций двух переменных состоят из 4 клеток. Столбцы и строки карты могут обозначаться либо цифрами 0 и 1 (таблица 2.6), либо чертой (рис.2.1). Черта обозначает значение 1 для соответствующей переменной.

у

Таблица 2.6 – Карта Карно для 2-х переменных

x \ y	1	0
1	xu	$x\bar{u}$
0	$\bar{x}u$	$\bar{x}\bar{u}$

xu	$x\bar{u}$
$\bar{x}u$	$\bar{x}\bar{u}$

Рисунок 2.1- Чертой обозначено значение, равное 1, указанной около этой черты переменной

На рис.1 верхний ряд клеток соответствует аргументу x , равному 1, нижний ряд – аргументу x , равному 0. Аналогично, левый столбец соответствует значению аргумента u , равному 1, правый – аргументу u , равному 0. Если задана конкретная функция, то в клетках будут находиться значения этой функции при соответствующем наборе аргументов.

Единицы, расположенные в соседних (по горизонтали или вертикали, но не по диагонали) клетках могут склеиваться, что соответствует склеиванию минтермов в СДНФ по одному из аргументов. В случае двух аргументов могут быть склеены две или четыре единицы.

Основу минимизации булевых функций с помощью карт Карно составляет следующее рассуждение. Два минтерма, находящиеся в соседних клетках карты, могут быть заменены одной конъюнкцией, содержащей на одну переменную меньше. Если соседними являются две пары минтермов, то такая группа из четырех минтермов может быть заменена конъюнкцией, содержащей на две переменные меньше.

юнкцией, которая содержит на две переменных меньше. В общем случае наличие минтермов в 2^k соседних клетках позволяет исключить k переменных. В этом нетрудно убедиться, если соседние пары минтермов преобразовать методом последовательного исключения переменных, используя при этом дистрибутивные законы конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции, правила поглощения и склеивания.

При минимизации булевых функций с помощью карт Карно необходимо помнить, что соседними клетками являются не только клетки, расположенные рядом по горизонтали и вертикали, но и клетки на противоположных границах карты Карно. При этом клетки могут объединяться по 2, 4, 8 и т.д., и одна и та же клетка может входить в несколько групп.

Картами Карно можно пользоваться для минимизации булевых функций, задаваемых как в СДНФ, так и СКНФ. В последнем случае необходимо каждой клетке поставить в соответствие определенную конституенту нуля (макстерм). Наличие 0 в клетке карты Карно указывает на то, что соответствующая ей конституента нуля должна входить в СКНФ функции. Соседние нули могут быть склеены по тем же правилам, что и единицы.

Отыскание МДНФ сводится к определению наиболее рационального варианта, при котором все единицы карты Карно данной функции накрываются наименьшим количеством коротких конъюнкций.

Задачи

С помощью карт Карно минимизировать функции предыдущего пункта:

$$2.1. f(x, y, z) = xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz \vee \bar{x}yz.$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee$$

$$2.2. \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4.$$

$$2.3. f(x, y, z, v) = \bar{x}yzv \vee \bar{x}yz\bar{v} \vee \bar{x}y\bar{z}v \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{v} \vee \bar{x}y\bar{z}v \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{v} \vee \bar{x}y\bar{z}v \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{v} \vee \bar{x}y\bar{z}v \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{v}.$$

$$2.4. f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum(0, 3, 7, 8, 9, 11).$$

Решение 2.1. Получаем следующие карты Карно (рис. 2а) и 2б)).

уу

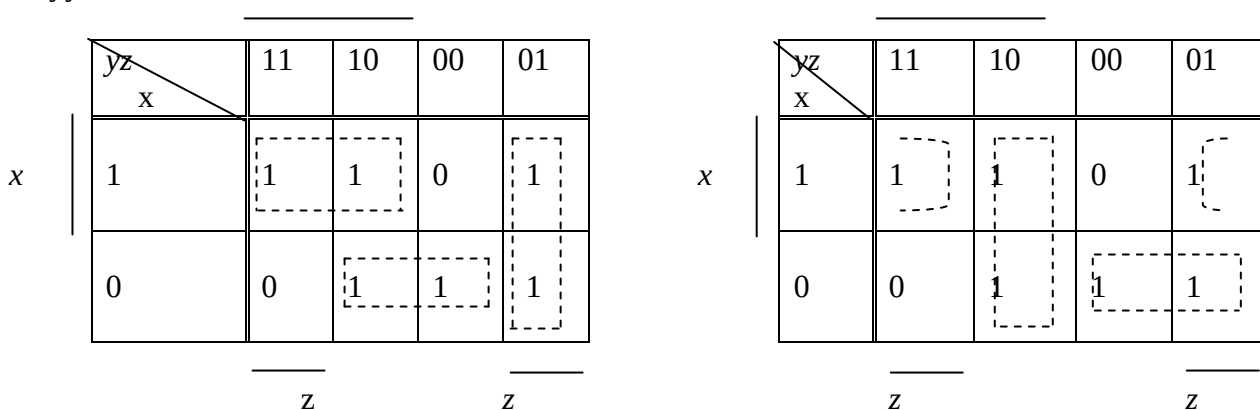


Рисунок 2.2а) - Первый вариант склейки Рисунок 2.2б) - Второй вариант склейки

В карте Карно на рис.2а) все минтермы образуют три группы: 1) xyz и $\bar{x}yz$, откуда $xyz \vee \bar{x}yz = xy$; 2) $\bar{x}yz$ и $\bar{x}\bar{y}z$, откуда $\bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z = \bar{x}z$; 3) $x\bar{y}z$ и $\bar{x}\bar{y}z$, откуда $x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z = \bar{y}z$ и в результате получаем МДНФ $f_1 = xy \vee \bar{x}z \vee \bar{y}z$, что совпадает с МДНФ (3). Группируя единицы по-другому (рис.2б)), получим: 1) $xyz \vee \bar{x}yz = xz$; 2) $x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z = \bar{y}z$; 3) $\bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z = \bar{x}y$. Тогда МДНФ будет функция $f_2 = xz \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y$, что совпадает с МДНФ (4).

Решение 2.3. Группируя три группы минтермов, как показано ниже на рис. 3, получим:

$$1) \overline{x}yzv \vee x\overline{y}zv \vee xy\overline{z}v \vee xyz\overline{v} = \overline{x}yz \vee x\overline{y}z = \overline{x}y; 2)$$

$$xyz\overline{v} \vee xyzv \vee \overline{x}yz\overline{v} \vee \overline{x}yzv = xyz \vee \overline{x}yz = yz;$$

3) $\overline{x}yzv \vee \overline{x}yz\overline{v} = \overline{x}yz$, откуда $f_{\min} = \overline{x}y \vee yz \vee \overline{x}zv$, что совпадает с ранее полученной минимальной формой.

z

		zv xy	10	11	01	00
x	10	1	1	1	1	
	11	1	1	0	0	
	01	1	1	1	0	y
	00	0	0	1	0	
		v				

v

Рисунок 2.3 - Карта Карно для функции 2.3

3. Минимизация не полностью определенных логических функций

Минимизацию частично определенных логических функций значения функций при не указанных комбинациях значений аргументов необходимо доопределить для получения минимальной ДНФ. Минимизацию таких логических функций можно проводить как с помощью карт Карно, так и методом Квайна.

Задачи

3. Частично определенная функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задана таблицей истинности, а именно, указаны номера наборов аргументов, на которых она принимает определенные значения. На остальных наборах аргументов эта функция не определена. Минимизировать следующие функции.

3.1.

Номер набора N	1	2	3	4	6	7	8	9	11	12
Значение функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0

3.2.

Номер набора N	0	2	3	5	6	7	8	9	13	15
Значение функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0

Заключение

При большом количестве переменных ($n > 5$) метод Квайна как и метод карт Карно при «ручном» способе минимизации становятся утомительными и неэффективными. Однако по заданному алгоритму можно составить программу для ЭВМ, с помощью которой процесс минимизации можно автоматизировать для достаточно большого числа переменных.

Рассмотренный на данном практическом занятии материал служит основой синтеза комбинационных схем, которому будет посвящено следующее практическое занятие.

2.3 Задание студентам для самостоятельной работы

1. Из данной методической разработки решить задачи 1.2, 1.4, 2.2, 2.4, 3.2.
2. Подготовиться к практическому занятию на тему «Синтез комбинационных схем».

3 СИНТЕЗ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ

Учебные цели: Уяснить постановку задачи синтеза комбинационных схем в функционально полных наборах элементов. Закрепить методику и основные этапы процесса структурного синтеза, приобрести первичные умения и навыки построения комбинационных схем в различных функционально полных наборах элементов.

3.1 Учебные вопросы занятия:

1. Последовательные и параллельные соединения вентиляей.
2. Основные этапы построения комбинационной схемы в выбранном функционально полном наборе.

3.2 Вопросы для проверки готовности студентов к занятию

1. Что такое комбинационная схема? Почему мы ее отождествляем с «черным ящиком»?
2. Какие логические операции соответствуют последовательному и параллельному соединению проводников
3. Что называется базисом булевых функций?
4. Сформулировать постановку задачи синтеза логической схемы.
5. Перечислить основные этапы процесса структурного синтеза логических (комбинационных) схем.

1. Последовательное и параллельное соединение вентиляей

Синтез логической схемы – это проектирование этой схемы, если задан закон ее функционирования. В самой общей постановке задача структурного синтеза состоит в построении комбинационных схем, реализующих заданные алгоритмы с помощью простых вентиляей – *конъюнктора, дизъюнктора, инвертора* и др.

В результате структурного синтеза должен быть определен перечень логических элементов, входящих в комбинационную схему, и порядок их соединения между собой. В качестве функционально полной системы функций первоначально можно взять избыточную систему $\{ \bar{}, \&, \vee \}$.

Данное практическое занятие является итоговым по циклу лекций и практических занятий, на которых изучалась алгебра высказываний.

Задачи

Изобразить схемы дискретных сигналов, состоящие из последовательно и параллельно включенных контактов.

Изобразить электрические и стандартные графические изображения (схемы) инвертора, дизъюнктора, конъюнктора, стрелки Пирса и штриха Шеффера.

Привести примеры функционально полных систем функций (связок) алгебры логики. Привести примеры базисов.

1.4. Построить комбинационные схемы, заданные функциями:

1.4.1. $f(x, y, z) = xyz \vee \overline{xyz} \vee \overline{xy}$;

1.4.2. $f(x, y, z) = x(yz \vee \overline{yz}) \vee \overline{x}(yz \vee \overline{yz})$;

1.4.3. $f(x, y, z, u) = (\overline{x} \vee y) \vee (zy \vee x) \vee u$;

1.4.4. $f(x, y, z) = (x \rightarrow y)(y \rightarrow z)$.

Заметим, что при решении задач 1.4.1-1.4.4 не следует добиваться оптимальности схемы, т.е. данные функции не следует на этом этапе минимизировать.

В качестве примера рассмотрим функцию 1.4.2. Поскольку правая часть функции содержит выражение $\overline{yz}$, воспользуемся законом де Моргана и приведем эту функцию к виду

$$f(x, y, z) = xyz \vee x\overline{y} \vee x\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}\overline{y}z.$$

Тогда соответствующую комбинационную схему в функционально полном наборе $\{ \neg, \&, \vee \}$ можно изобразить рисунком 3.1:

xyz

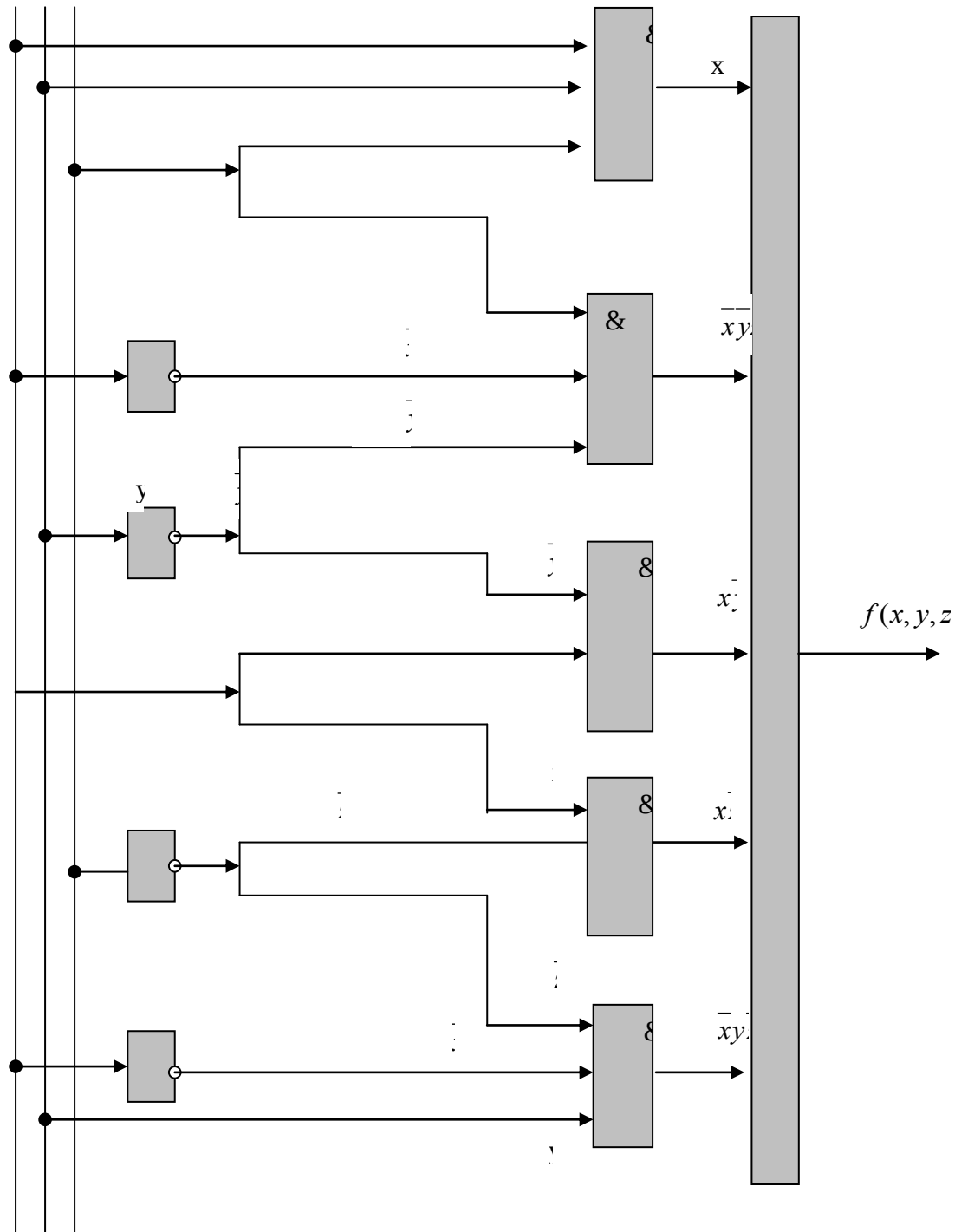


Рисунок 3.1 - Комбинационная схема, соответствующая функции 1.4.2

Целесообразно на некоторых наборах проверить правильность работы построенной комбинационной схемы.

На занятии рекомендуется решить задачи 1.1-1.3, 1.4.2 и 1.4.4.

2. Основные этапы построения комбинационной схемы в выбранном функционально полном наборе

Процесс структурного синтеза логических схем состоит из следующих основных этапов:

1. Формализация словесного задания схемы.
2. Составление таблицы истинности.
3. Запись логической функции в СДНФ или СКНФ.
4. Выбор функционально полной системы логических элементов.
5. Минимизация логической функции.
6. Построение комбинационной схемы, соответствующей логической функции.
7. Проверка правильности работы комбинационной схемы.

Хотя при синтезе комбинационной схемы формализация словесного задания обычно не вызывает особых затруднений и сводится к выявлению наборов переменных, на которых функция равна 0 или 1, на занятии рекомендуется решить одну из задач с использованием первого этапа.

Задачи

2.1. По установленному сигналу каждый игрок **А** и **В** замыкает или размыкает выключатель, находящийся под его управлением. Если оба делают одно и то же, то выигрывает игрок **А**, в противном случае – выигрывает игрок **В**. Построить схему так, чтобы в случае выигрыша игрока **А** зажглась лампочка.

Решение. Обозначим через x состояние выключателя игрока **А**, а через y – состояние выключателя игрока **В**. Тогда по условию задачи функция $f(x, y)$ принимает значение 1 на наборах $(0, 0)$ и $(1, 1)$. СДНФ данной функции является $f(x, y) = xy \vee \bar{x}\bar{y}$.

Соответствующая схема имеет вид (рис.3.2):

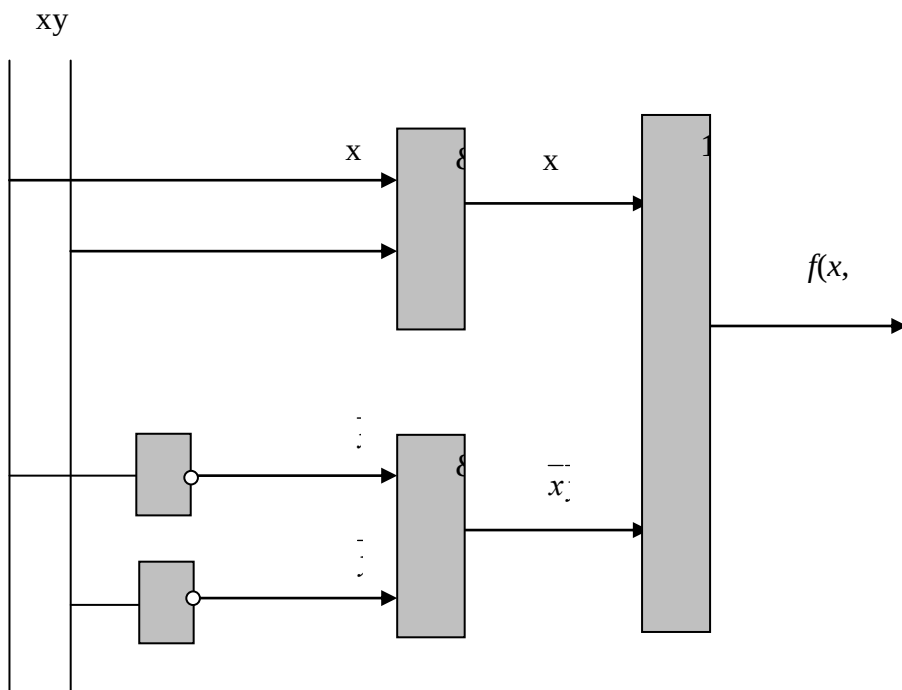


Рисунок 3.2 - Комбинационная схема, реализуемая функцией задачи 2.1

Задача 2.2. Имеется одна лампочка в лестничном пролете двухэтажного дома. Построить схему так, чтобы на каждом этаже своим выключателем можно было гасить и зажигать лампочку независимо от положения другого выключателя.

Ответ: $f(x, y) = xy \vee \bar{y}$.

Из полученных в таблице 3.1 импликант составим новую таблицу 3.2, поскольку не все они являются простыми.

Таблица 3.2 - Вторичное склеивание

М ин- тер- мы	$\bar{a}\bar{b}$	$\bar{a}b$	$a\bar{b}$	ab	$\bar{b}c$	$b\bar{c}$	$\bar{a}c$	$a\bar{c}$	ac	$\bar{a}d$	ad	$\bar{b}d$	bd
$\bar{a}cd$													
$\bar{b}cd$													
$\bar{a}bd$													
$\bar{a}bc$													$b\bar{c}$
$\bar{b}cd$						$b\bar{c}$							
$\bar{b}cd$					$b\bar{c}$								
$\bar{a}bc$									ac				
$\bar{a}bd$								ad					
$\bar{a}bd$								ad					
$\bar{a}bc$							ac						ac
$\bar{a}cd$												ac	
$\bar{a}cd$											ac		
$\bar{a}bc$				$b\bar{c}$					ac				

Сокращенная ДНФ исходной функции принимает вид:

$$f(a, b, c, d) = \bar{a}cd \vee \bar{b}cd \vee \bar{a}bd \vee bc \vee \bar{a}b \vee ac.$$

Теперь найдем все тупиковые и минимальную ДНФ данной функции с помощью построения импликантной матрицы (таблица 3.3).

Таблица 3.3 – Импликантная матрица

Мин- термы Импликан- ты	$\bar{a}\bar{b}$	$\bar{a}\bar{b}c$	$\bar{a}b\bar{c}$	$\bar{a}bcd$	$a\bar{b}$	$a\bar{b}c$	$ab\bar{c}$	$abcd$	$ab\bar{c}$	$abc\bar{d}$	$abcd$
$\bar{a}\bar{b}$					*	*	*	*			
ac							*	*	*	*	
bc			*	*					*	*	
$\bar{a}bd$		*		*							
$\bar{a}cd$	*	*									
$\bar{b}cd$	*					*					

Имеем две тупиковые формы $f_1 = \bar{a}\bar{b} \vee bc \vee \bar{a}cd$ и $f_2 = ab \vee bc \vee \bar{a}bd \vee \bar{b}cd$,

при этом импликанты $\bar{a}\bar{b}$ и bc являются существенными.

Построим комбинационную схему, соответствующую минимальной форме данной функции.

abcd

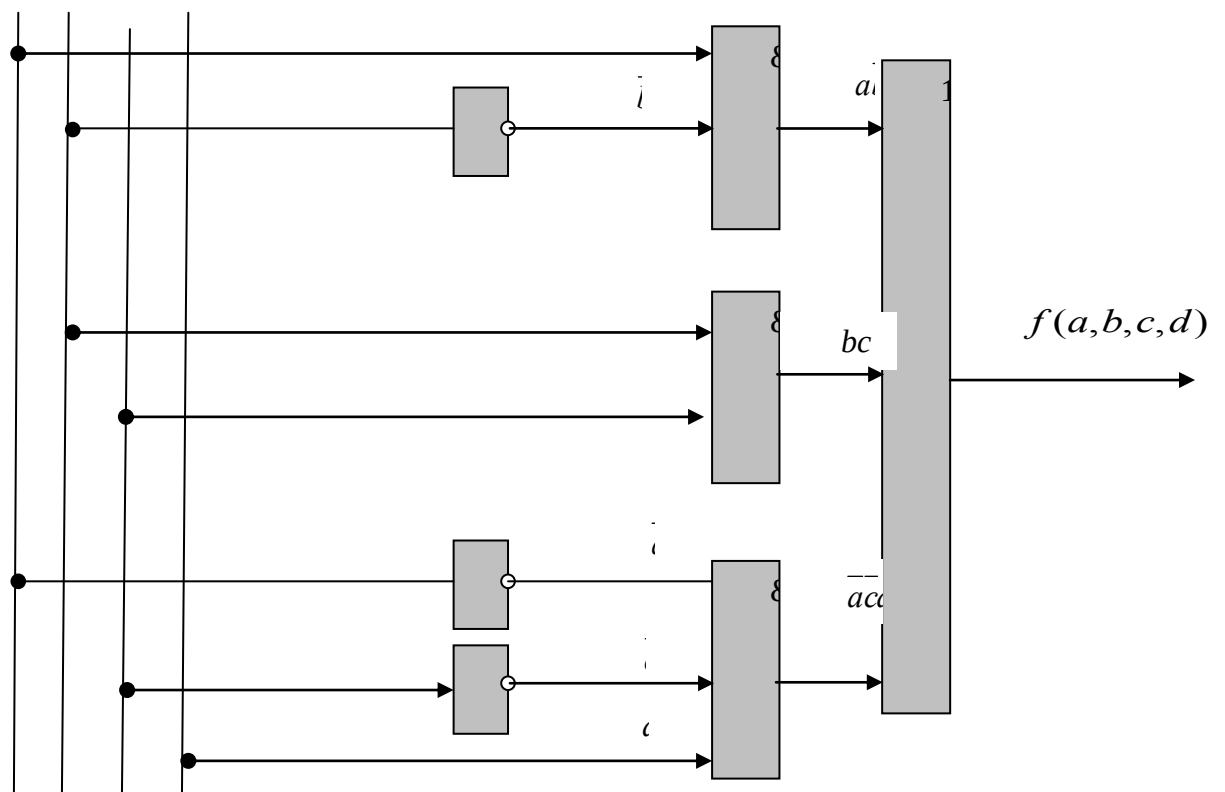


Рисунок 3.3 - Комбинационная схема, реализуемая функцией задачи 2.3

Остается осуществить проверку правильности работы данной комбинационной схемы.

Булева функция задана в виде числового произведения $f(x, y, z) = \prod(3, 5)$ на 3-м и на 5-ом наборах. Следуя основным этапам синтеза комбинационных схем, синтезировать эту функцию в наборе $\{\&, \vee, \bar{}\}$, а также в базисах стрелка Пирса $\{\downarrow\}$ и штрих Шеффера $\{\bar{}\}$.

Решение. а) Функция $f(x, y, z)$ по определению числового произведения на 3-м наборе $\langle 0, 1, 1 \rangle$ и на 5-ом наборе $\langle 1, 0, 1 \rangle$ принимает значение 0, на остальных наборах эта функция принимает значение 1. б) Таблица истинности для данной функции принимает вид таблицы 3.4:

Таблица 3.4 – Таблица истинности для функции $f(x, y, z)$

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0							
$f(x,y,z)$	1							
Номернабора	0							

в) СДНФ данной функции представляет собой ее запись в виде $f(x, y, z) = \Sigma(0, 1, 2, 4, 6, 7)$ (под знаком суммы стоят номера наборов, на которых функция f принимает значение 1). Тогда СДНФ функции f принимает вид $f(x, y, z) = xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$. Из той же таблицы истинности легко получаем СКНФ данной функции: $f(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$.

г) Рассмотрим сначала избыточную функционально полную систему $\{\&, \vee, \bar{}\}$.

д) Минимизацию проведем с помощью карты Карно.

Склеивая минтермы, как показано на рисунке 3.4, получаем минимальную дизъюнктивную нормальную форму функции: $f = xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{z}$.

$\begin{array}{c} yz \\ \backslash \end{array} \quad x$	00	01	11	10
1	1	0	1	1
0	1	1	0	1

Рисунок 3.4 - Карта Карно для минимизируемой функции f

МКНФ получается сразу в виде числового произведения $f(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$.

е) Построим КС в двух вариантах: для МДНФ (рис. 3.5) и для МКНФ (рис. 3.6).

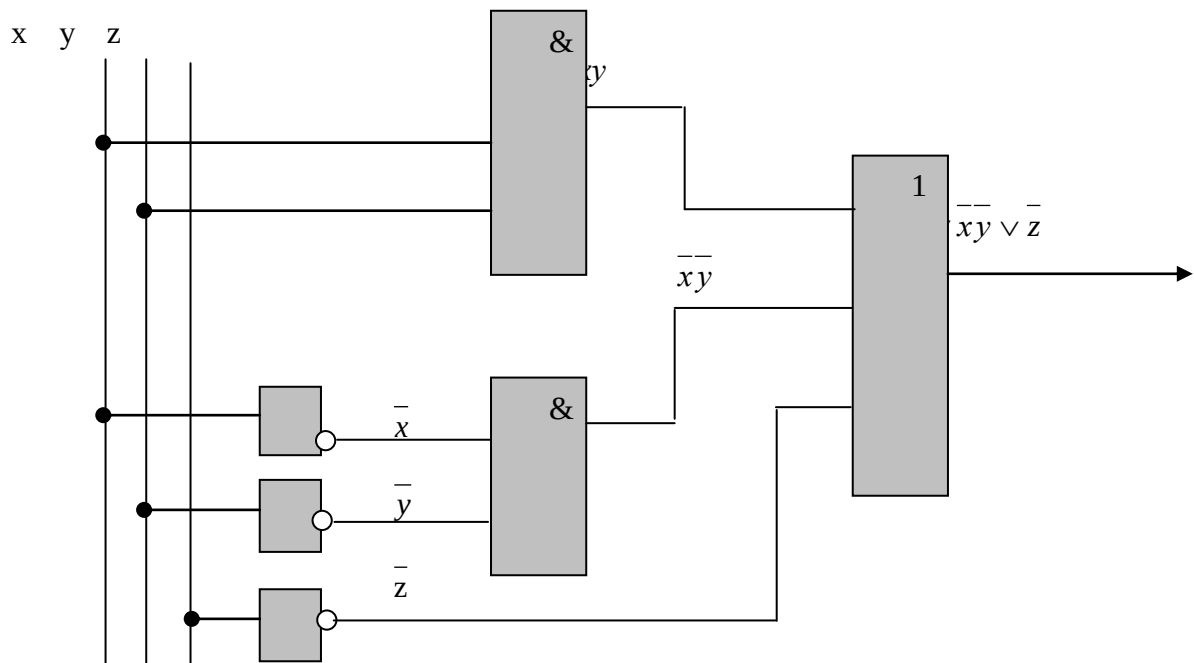


Рисунок 3.5 - Комбинационная схема, построенная на базе МДНФ данной функции
Сравнивая две полученные КС, можно заметить, что в этом случае затраты на построение того или иного варианта схем практически одинаковы.

ж) Проверку правильности работы полученных КС на некоторых наборах выполним в устной форме.

Перейдем к синтезу данной функции в базисах $\{\downarrow\}$ и $\{\uparrow\}$. Напомним правила перехода данной функции к указанным базисам. Если функция f имеет вид ДНФ $f = d_1 \vee d_2 \vee \dots \vee d_s$, то, взяв от правой части этой ДНФ двойное отрицание и применив к нему правило де Моргана, получим $f = \overline{d_1} \downarrow \overline{d_2} \downarrow \dots \downarrow \overline{d_s}$. Отсюда имеем

Правило 1. Для того чтобы от ДНФ булевой функции перейти к ее представлению в базисе $\{\downarrow\}$, необходимо все знаки дизъюнкции и конъюнкции заменить символами Шеффера $\downarrow$ и группы букв, входящих в каждую элементарную конъюнкцию, заключить в скобки.

Для компактности записи можно прежнее представление инверсии сохранить, имея при этом в виду, что $\overline{\overline{x}} = x$ и т.п. Тогда отыскание минимальных форм в базисе $\{\downarrow\}$ выполняется по следующему алгоритму: 1) определяем МДНФ функции; 2) заменяем все операции $\vee$ и $\&$ штрихом Шеффера и заключаем в скобки буквы, входящие в элементарные конъюнкции МДНФ функции; 3) заменяем отрицания аргументов $\overline{x}, \overline{y}, \dots$ выражениями $x \downarrow x, y \downarrow y, \dots$ и т.д.

Для нашей функции МДНФ имеет вид $f = xy \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z}$. МДНФ в базисе $\{\downarrow\}$ согласно сформулированному алгоритму принимает вид $f = (x \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow z$. Аналогично имеем

Правило 2. Для того чтобы получить представление логической функции в базисе $\{\uparrow\}$, достаточно в ее КНФ заменить все знаки $\&$ и $\vee$ стрелкой Пирса и заключить в скобки группы букв, входящих в каждую элементарную дизъюнкцию.

Алгоритм отыскания минимального представления функции в базисе $\{\uparrow\}$ основывается на правиле 2 и включает в себя следующие этапы: 1) определение МНКФ функции; 2) замена всех знаков $\&$ и $\vee$ знаком $\uparrow$ и заключение в скобки букв, входящих в элементарные дизъюнкции МНКФ функции; 3) замена отрицаний аргументов $\overline{x}, \overline{y}, \dots$ выражением вида $x \uparrow x, y \uparrow y$ и т.д. Для нашей функции МНКФ имеет вид $f(x, y, z) = (x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})$.

МКНФ в базисе $\{\downarrow\}$ согласно указанному выше алгоритму принимает вид $f = (x \downarrow (y \downarrow y) \downarrow (z \downarrow z) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow y \downarrow (z \downarrow z)))$.

КС данной функции в базисе $\{\downarrow\}$ имеет вид:

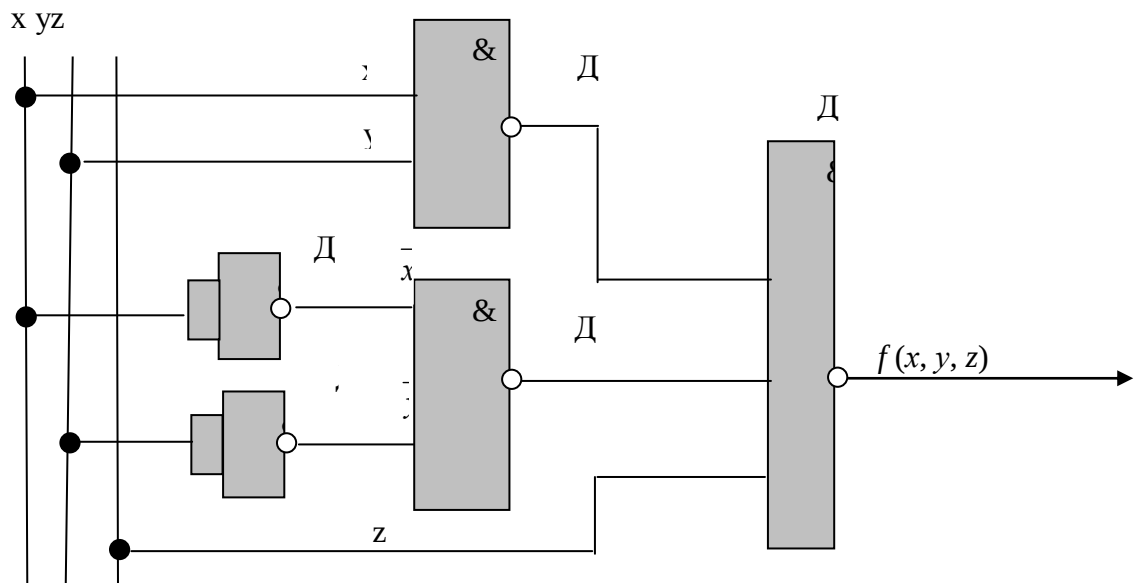


Рисунок 3.7 - Комбинационная схема, реализующая заданную функцию в базисе $\{\downarrow\}$

На рис.3.7 микросхемы Д1-Д2 служат для получения инверсий сигналов x, y . Часто в схеме, предшествующей синтезируемой схеме, формируются не только переменные, но и их отрицания. В этих случаях микросхемы Д1-Д2 могут быть исключены из схемы. Выражение, стоящее в первых скобках реализуется микросхемой Д3 (2И-НЕ). На ее входы подаются сигналы x и y . Выражение, стоящее во вторых скобках, реализуется микросхемой Д4 (2И-НЕ). На ее входы поступают сигналы $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Наконец, микросхема Д5 (3И-НЕ) реализует всю функцию (число, стоящее перед буквой И, означает число входов в схему). На рисунке 3.8 показан синтез КС в базисе $\{\downarrow\}$, реализующий нашу функцию.

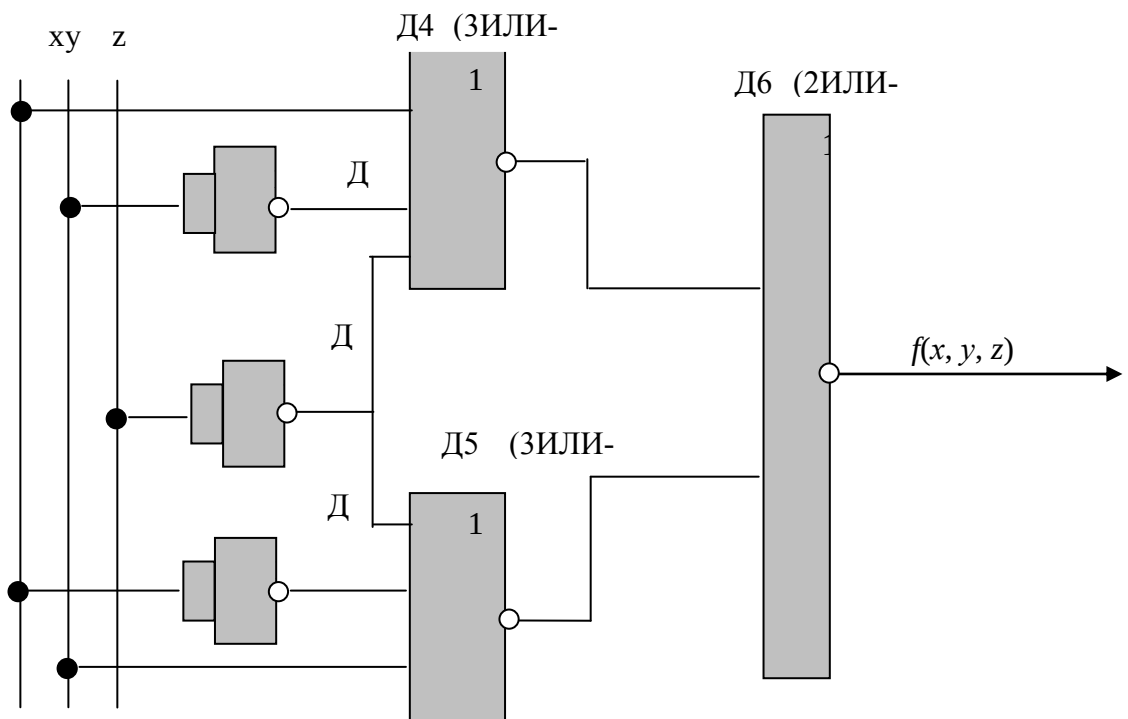


Рисунок 3.8 - Комбинационная схема, реализующая заданную функцию в базисе $\{\downarrow\}$

Остается проверить правильность работы схем, представленных рисунками 3.7 и 3.8.

2.5. Для данных булевых функций построить соответствующие им комбинационные схемы в избыточном функционально полном наборе $\{\&, \vee, \neg\}$, а также в базисах стрелка Пирса $\{\downarrow\}$ и штрих Шеффера $\{\mid\}$.

2.5.1. $f(x, y, z)$ определена так, что $f(1, 0, 1) = f(1, 1, 0) = 1$, остальные значения функции f равны нулю.

$$2.5.2. f(x, y, z) = (\bar{x} \vee y)(zy \vee x).$$

$$2.5.3. f(x, y, z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{x}(y \vee z)).$$

$$2.5.4. f(x, y, z) = x\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{y}.$$

$$2.5.5. f(x, y, z) = x\bar{y}z \vee ((x \vee y) \vee z).$$

Из п.2 на занятии рекомендуется решить задачи 2.1, 2.3, 2.5.1, 2.5.2, 2.5.4 и подробно разобрать решение задачи 2.4.

Заключение

Мы рассмотрели постановку задачи синтеза КС и сформировали алгоритм процесса структурного синтеза. Технология собственно самого синтеза КС зависит от выбора функционально полной системы логических операций.

Мы не касались синтеза логических схем с несколькими выходами, то есть схем, задаваемых системой булевых функций. Этот материал, как и синтез не полностью определенных функций,

можно найти во многих книгах по дискретной математике и цифровой схемотехнике. Тем не менее, рассмотренный на данном практическом занятии материал позволяет решать задачи синтеза довольно широкого класса КС.

Заметим, что существует ряд систем схемотехнического моделирования, предназначенных для автоматизации моделирования и анализа аналоговых, цифровых и цифро-аналоговых схем достаточно большой степени сложности на персональных компьютерах. Среди них особое место занимает система схемотехнического моделирования ElectronicsWorkbench, обладающая большой библиотекой широко распространенных электронных компонентов, параметры которых можно изменять в широком диапазоне значений.

3.3 Задание студентам для самостоятельной работы

1. Из данной методической разработки решить задачи 1.4.1, 1.4.3, 2.2, 2.5.3 и 2.5.5.
2. Подготовиться к практическому занятию по теме «Приложения исчисления высказываний к теории доказательств».

4 ПРИЛОЖЕНИЯ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ К ТЕОРИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Учебные цели: Освоить основные принципы аксиоматического построения формальных теорий на примере исчисления высказываний; научиться использовать аксиомы и правила вывода исчисления высказываний к установлению доказуемости простейших формул исчисления высказываний, а также приобрести навыки построения выводов простейших формул.

4.1 Учебные вопросы занятия:

1. Доказуемость формул
2. Построение выводов из совокупности формул

4.2 Вопросы для проверки готовности студентов к занятию

1. Сформулировать основные принципы аксиоматического построения формальной теории (исчисления).
2. Из чего состоит алфавит исчисления высказываний?
3. Дать индуктивное определение формулы и подформулы исчисления высказываний.
4. Записать систему аксиом исчисления высказываний. Что такое схема аксиом?
5. Сформулировать основные правила вывода исчисления высказываний (правило заключения и правило подстановки).
6. Дать определение выводимой формулы, теоремы.
7. Что такое производные правила вывода. Сформулировать несколько таких правил.
8. Понятие вывода из совокупности формул – это определение или теорема?
9. Сформулировать теорему дедукции в исчислении высказываний.
10. Какими теоремами выражается связь между алгеброй высказываний и исчислением высказываний?

Исторически понятие формальной теории было разработано в период интенсивных исследований в области оснований математики для формализации собственно логики и теории доказательства. Сейчас этот аппарат широко используется при создании специальных исчислений для решения конкретных прикладных задач.

Таблицы истинности в алгебре высказываний позволяют ответить на многие вопросы, касающиеся логики высказываний. Однако более сложные вопросы логики высказываний уже не могут быть решены с помощью таблиц истинности. Давая описание алгебры высказываний, мы пользовались логическими значениями высказываний (истина, ложь). Но понятия истинности и ложности не являются математическими. Эти понятия во многих случаях субъективны и скорее относятся к методологии познания. В связи с этим желательно построить теорию, не пользуясь понятием истинности и ложности, не применяя законов логики. Такой теорией, в частности, является исчисление высказываний, которое строится по общим правилам построения формальных аксиоматических (дедуктивных) систем (или исчислений). Именно построение такой формальной системы или теории является одним из способов моделирования наших рассуждений во многих практически важных приложениях.

Формальная теория строится следующим образом.

1. Определяется множество формул, или правильно построенных выражений, образующее язык теории. Это множество задается конструктивными средствами (как правило, индуктивным определением) и, следовательно, перечислимо, а в большинстве случаев и разрешимо.
2. Выделяется подмножество формул, называемых аксиомами теории, которое должно быть разрешимым.

3. Задаются правила вывода теории, то есть вычислимое отношение на множестве формул.

Процесс построения теорем в таких теориях называется *формальным выводом* или *доказательством* в формальной теории.

Одной из таких формальных теорий является исчисление высказываний. Исчисление высказываний – это аксиоматическая логическая система, интерпретацией которой является алгебра высказываний.

Описание всякого исчисления включает в себя описание символов этого исчисления (алфавита), формул, являющихся конечными конфигурациями символов, и определение выводимых формул.

Доказуемость формул исчисления высказываний основывается на его аксиомах, основных и производных правилах вывода. Поэтому большое значение приобретает усвоение на практике правил вывода и, прежде всего, правила заключения и правила подстановки.

Второй важной составной частью исчисления высказываний является умение для различных формул строить вывод и устанавливать выводимость формул из совокупности формул.

Особое значение для исчисления высказываний имеет теорема дедукции, которая, с одной стороны, служит обоснованием одного из методов доказательства теорем исчисления высказываний, а с другой – она используется и в других исчислениях.

1. Доказуемость формул

Алфавит, формулы и подформулы исчисления высказываний

Алфавит исчисления высказываний состоит из символов трех категорий:

1. Символы, которые обозначают переменные высказывания: $x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots$ – строчные буквы латинского алфавита (с индексами или без них).

2. Логические связки: $\&, \vee, \rightarrow, \neg$.

3. Круглые скобки $(,)$.

Других символов алфавит исчисления высказываний не имеет.

Формулы исчисления высказываний представляют собой конечные последовательности символов алфавита исчисления высказываний. Для обозначения формул будем пользоваться прописными буквами латинского алфавита. Эти буквы не являются символами алфавита исчисления высказываний, а представляют собой только условные обозначения формул, то есть это символы так называемой *метатеории*, с помощью которой описывается исчисление высказываний.

Множество формул обычно задается индуктивным определением с помощью формальной грамматики. Как правило, это множество бесконечно.

Определение формулы:

1. Всякое переменное высказывание $x, y, z, \dots$ является формулой.

2. Если A и B – формулы, то формулами является и следующие комбинации символов: $(A\&B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(\neg A)$.

3. Никакая другая комбинация символов формулой не является.

Переменные высказывания будем называть *элементарными формулами*.

Одновременно с понятием формулы вводится понятие *подформулы* или части формулы.

Определение подформулы:

1. Подформулой элементарной формулы является только она сама.

2. Если формула имеет вид $\neg A$, то ее подформулами являются: она сама, формула A и все подформулы формулы A .

3. Если формула имеет вид $(A * B)$, где под символом $*$ понимается любая из логических связей $\vee$, $\&$, $\rightarrow$, то ее подформулами являются: она сама, формулы A и B и все подформулы формул A и B .

Введем в запись формул некоторые упрощения, а именно: будем опускать внешние скобки и некоторые внутренние, если последовательность выполнения логических операций не вызывает сомнений ввиду их приоритета: $\neg$, $\&$, $\vee$, $\rightarrow$.

Следующим шагом в описании исчисления высказываний будет выделение некоторого класса формул, которые мы будем называть *исходными доказуемыми* (выводимыми) *формулами* или *аксиомами* исчисления высказываний.

Одна из возможных систем аксиом исчисления высказываний состоит из 11 аксиом, которые делятся на четыре группы.

Система аксиом исчисления высказываний

Первая группа аксиом:

$$I_1. x \rightarrow (y \rightarrow x);$$

$$I_2. (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)).$$

Вторая группа аксиом:

$$II_1. x \& y \& x;$$

$$II_2. x \& y \rightarrow y;$$

$$II_3. (z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow x \& y)).$$

Третья группа аксиом:

$$III_1. x \rightarrow x \vee y;$$

$$III_2. y \rightarrow x \vee y;$$

$$III_3. (x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z)).$$

Четвертая группа аксиом:

$$IV_1. (x \rightarrow y) \rightarrow (\neg y \rightarrow \neg x);$$

$$IV_2. x \rightarrow x;$$

$$IV_3. x \rightarrow x.$$

Все аксиомы первой группы из логических связей содержат только импликацию. Эта связка входит и во все остальные группы, но во второй группе к импликации присоединяется конъюнкция, в третьей группе – дизъюнкция, а в четвертой – отрицание.

Основные правила вывода

Выявление того факта, что из множества высказываний (формул исчисления высказываний) логически следует некоторое другое высказывание (формула) и является, по существу, одной из основных задач исчисления высказываний.

Определение *доказуемых формул* имеет тот же характер, что и определение формулы. После введения исходных доказуемых формул (аксиом) определяются *основные правила вывода*, которые позволяют из имеющихся доказуемых формул получать новые доказуемые формулы. Образование доказуемой формулы из исходных доказуемых формул путем применения правил вывода, называется *логическим выводом* данной формулы, *доказательством* или *логическим следствием*.

Правило заключения. Если формулы A и $A \rightarrow B$ доказуемы в исчислении высказываний, то формула B также доказуема.

Схематически это правило записывают так:

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B} \quad (4.1)$$

В литературе доказуемость формулы F чаще всего обозначают символом $\vdash F$ или символом $\models F$ (мы будем использовать обозначение $\vdash F$). Тогда правило заключения можно записать в виде:

$$\frac{\vdash A, \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}.$$

Запятая над чертой означает союз «и».

Правило заключения принято называть правилом *modusponens*. В этом правиле мы принимаем процедуру перехода от двух формул вида A и $A \rightarrow B$ к одной формуле B . В выводе по этому правилу (то есть в применении этого правила) формулы A и $A \rightarrow B$ являются *посылками*, а формула B — *заключением*.

В некоторых источниках символ доказуемости обозначается символом логического следствия « $\Rightarrow$ » (запись $P \Rightarrow Q$ означает, что формула Q логически следует из формулы P , то есть что импликация $P \rightarrow Q$ является тавтологией). Концепция логического следствия обычно используется в логическом программировании и в искусственном интеллекте при описании методов логического вывода. Заметим, что импликацию иногда обозначают символом « $\supset$ ».

В теории доказательств в большинстве случаев правило *modusponens* (или правило от- деления, как его еще называют) принимается в качестве единственного основного правила вывода. Однако часто в качестве основного правила вывода вводится еще правило *под- становки*.

Правило подстановки. Если формула A доказуема в исчислении высказываний, x — пе- ременная, B — произвольная формула исчисления высказываний, то формула, полученная в результате замены в формуле A переменной x всюду, где она входит, формулой B , явля- ется также доказуемой формулой.

Символически это правило можно записать в виде

$$\frac{\vdash A(x)}{\vdash A(B)} \quad (4.2)$$

Формулы, используемые в правилах (4.1) и (4.2), называются *метаформулами* или *схемами формул*. Смысл метаформул состоит в том, что они обозначают множество всех формул исчисления, которые получаются, если ее метаварьируемые заметить формулами исчисления. Использование схем формул можно распространить и на аксиомы. Например, если в первой группе аксиом метаварьируемые высказывания x, y, z заменив метаварьируемыми X, Y, Z , то получается две схемы аксиом, задающие три бесконечных множества аксиом. В результате возникает другой способ построения исчисления высказываний с бесконечным множеством аксиом (задаваемым конечным числом схем), но без правила подстановки, поскольку оно неявно содержится в истолковании схем аксиом. Первый способ, то есть способ, которым воспользовались мы, более конструктивен: все его средства явно зафик- сированы и конечны. С другой стороны, второй способ больше соответствует мате- матической традиции истолкования формул: например, алгебраическое тождество $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ или тождества булевой алгебры истолковываются именно как схе- мы тождеств, а не конкретные тождества, верные лишь для конкретных букв.

Теперь несколько уточним правило подстановки.

- а) Если формула A есть переменная x , то подстановка (4.2) дает формулу B .
- б) Если формула A есть переменная $y \neq x$, то подстановка (4.2) дает формулу A .
- в) Если A — формула, для которой подстановка уже определена, то подстановка B вме- сто x в отрицание формулы A есть отрицание подстановки.
- г) Если A_1 и A_2 — формулы, для которых подстановки уже определены, то

$$\frac{\vdash A_1 * A_2}{\vdash A_1(B) * A_2(B)},$$

где под символом $*$ понимается любая из логических связок $\vee, \&, \rightarrow$.

Определение доказуемой (выводимой) формулы

1. Каждая аксиома является доказуемой формулой.
2. Формула B , полученная из доказуемых формул A и $A \rightarrow B$ путём применения правила заключения, есть доказуемая формула.
3. Формула, полученная из доказуемой формулы путём применения правила подстановки вместо переменной x произвольной формулы B есть доказуемая формула.
4. Никакая другая формула исчисления высказываний не считается доказуемой.

Процесс получения доказуемой формулы называется *доказательством*.

Производные правила вывода

Обозначим через $\mathbf{T}$ – формальную теорию исчисления высказываний. Тогда под доказательством формулы B в теории $\mathbf{T}$ мы будем понимать такой вывод, в котором в качестве исходных формул используются только аксиомы. Формула B , для которой существует доказательство, называется формулой, *доказуемой* в теории $\mathbf{T}$ или теоремой теории $\mathbf{T}$, а сам факт доказуемости формулы B мы, как и ранее, будем обозначать символом $\vdash B$.

Однако вывод формулы B может осуществляться не только из аксиом, но и из других формул, то есть из совокупности некоторого числа формул, не обязательно являющихся только аксиомами. Таким образом, понятие доказательства является частным случаем понятия выводимости. На этом пути при дальнейшем развитии теории исчисления высказываний мы можем получить ряд новых правил вывода, отличных от правил заключения и подстановки, которые в свою очередь могут использоваться для доказательства большинства законов логики и установления связи между алгеброй высказываний и исчислением высказываний. Эти правила (то есть правила, отличные от аксиом) и называются *производными правилами вывода*. Рассмотрим наиболее важные производные правила вывода.

Правило одновременной подстановки: пусть A – доказуемая формула; $x_1, x_2, \dots, x_n$ – переменные высказывания, а $B_1, B_2, \dots, B_n$ – любые формулы теории $\mathbf{T}$. Тогда результат одновременной подстановки в формулу A вместо переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ соответственно формул $B_1, B_2, \dots, B_n$ является доказуемой формулой теории $\mathbf{T}$.

Правило сложного заключения:

$$\frac{\vdash A_1, \vdash A_2, \dots, \vdash A_n, \vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (\dots A_n \rightarrow Z) \dots)))}{\vdash Z}.$$

Правила одновременной подстановки и сложного заключения являются естественным обобщением соответственно правил подстановки, и заключения на случай n формул.

Правило силлогизма:

$$\frac{\rightarrow B, \vdash B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C}.$$

Правило контрапозиции:

$$\frac{\vdash A \rightarrow B}{\vdash \bar{B} \rightarrow \bar{A}}.$$

Правила снятия двойного отрицания:

$$\vdash A \rightarrow \bar{\bar{A}}, \quad \bar{\bar{A}} \rightarrow A$$

$\vdash A \rightarrow B, \vdash A \rightarrow B.$

Задачи

1.1. Какие из следующих выражений являются формулами исчисления высказываний:

- 1.1.1. $(\overline{P_1} \& \overline{P_2}) \rightarrow (P_1 \vee P_2);$
- 1.1.2. $((P_1 \vee P_2) \vee (P_1 P_2)) \rightarrow \overline{P_2};$
- 1.1.3. $(P_1 \rightarrow (P_2 \vee P_3)) \rightarrow P_3;$
- 1.1.4. $(P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow ((P_1 \rightarrow \overline{P_2}) \rightarrow P_1);$
- 1.1.5. $(P_1 \& (\rightarrow P_2)) \rightarrow (P_2 \rightarrow \overline{P_1});$
- 1.1.6. $(P_1 \rightarrow P_3)((P_2 \rightarrow P_3) \rightarrow ((P_1 \vee P_2) \rightarrow P_3));$
- 1.1.7. $((P_1 \rightarrow P_2) \& (P_1 \rightarrow P_3)) \rightarrow (P_1 \rightarrow (P_2 \& P_3));$
- 1.1.8. $((P_1 \& \overline{P_2}) \rightarrow (\overline{P_1} \vee \vee P_2)) \leftrightarrow (\vee P_1 \vee P_2).$

Ответ: выражения 1.1.2, 1.1.5 и 1.1.8 формулами не являются.

1.2. Выписать все подформулы формул:

- 1.2.1. $x \rightarrow (y \rightarrow x);$
- 1.2.2. $a \& \overline{c \vee b};$
- 1.2.3. $x \vee y \& z \rightarrow x;$
- 1.2.4. $\overline{x \rightarrow y \vee x \& y};$
- 1.2.5. $\overline{t};$
- 1.2.6. $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow \overline{y}) \rightarrow \overline{y}.$

1.3. Установить доказуемость формул:

- 1.3.1. $A \& B \rightarrow A \& B \vee C;$
- 1.3.2. $(A \& B \rightarrow (C \rightarrow B \& C)) \rightarrow ((A \& B \rightarrow C) \rightarrow (A \& B \rightarrow B \& C));$
- 1.3.3. $A \vee A \rightarrow A;$
- 1.3.4. $A \& B \rightarrow B \& A;$
- 1.3.5. $A \vee B \rightarrow B \vee A.$

Указания. 1.3.1. В аксиоме Π_1 осуществить подстановку вместо x $A \& B$, вместо y — C .

1.3.2. К доказуемости приводит постановка в аксиому I_2 вместо x, y, z соответственно формул $A \& B, C, B \& C$.

1.3.3. В аксиому Π_3 подставить вместо x, y, z формулу A . Получим доказуемую формулу $(A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \vee A \rightarrow A))$. Затем применить правило сложного заключения

1.3.4. В аксиому Π_3 подставить вместо x, y, z соответственно формулы $B, A, A \& B$. Затем снова применить правило сложного заключения.

1.3.5. В аксиому Π_3 подставить вместо x, y, z соответственно формулы $A, B, B \vee A$ и воспользоваться правилом сложного заключения.

1.4. Используя производные правила вывода показать, что доказуемы следующие формулы:

- 1.4.1. $\overline{A \vee B} \rightarrow \overline{A \& B};$
- 1.4.2. $(A \rightarrow B) \& \overline{B} \rightarrow \overline{A};$
- 1.4.3. $A \& B \rightarrow \overline{A \vee B}.$

Указания.1.4.1. В аксиоме Π_3 вместо x, y, z подставить соответственно $\bar{A}, \bar{B}, \overline{A \& B}$ и далее воспользоваться аксиомами Π_1, Π_2 , правилами контрапозиции и сложного заключения.

1.4.2. Осуществить последовательно подстановки: в аксиоме I_2 вместо x, y, z соответственно $(A \rightarrow B) \& \bar{B}, \bar{B}, \bar{A}$, в аксиоме Π_2 - вместо x, y соответственно $A \rightarrow B$ и $\bar{B}$, в аксиоме Π_1 - вместо x, y соответственно $A \rightarrow B$ и $\bar{B}$ и воспользоваться правилом сложного заключения.

1.4.3. В аксиоме Π_3 сделать подстановку, заменяя в ней зна $\overline{x \& y}$ и далее воспользоваться аксиомами Π_1, Π_2 и правилами контрапозиции, снятия двойного отрицания и сложного заключения.

1.5. Применяя правило подстановки, установить доказуемость формул:

1.5.1. $(A \& B) \rightarrow ((A \& B) \vee C)$;

1.5.2. $\overline{P \vee Q} \rightarrow P \vee Q$.

1.6. Применяя правило подстановки и правило *modus ponens*, установить доказуемость формул:

1.6.1. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)$;

1.6.2. $P \rightarrow P \& Q$.

1.7. Показать, что следующие формулы доказуемы:

1.7.1. $a \rightarrow (\bar{a} \& b)$; 1.7.2. $p \vee \bar{p}$; 1.7.3. $\bar{r} \& \bar{s} \rightarrow \overline{r \vee s}$.

1.8. Доказать производные правила вывода:

1.8.1.
$$\frac{\begin{array}{l} | - A \rightarrow B, | - \bar{B} \\ \hline | - \bar{A} \end{array}}{}$$
;

1.8.2.
$$\frac{\begin{array}{l} | - A, | - \bar{B} \\ \hline | - \overline{A \rightarrow B} \end{array}}{}$$
;

1.8.3.
$$\frac{\begin{array}{l} | - A \rightarrow B, | - A \rightarrow \bar{B} \\ \hline | - \bar{A} \end{array}}{}$$
;

1.8.4.
$$\frac{\begin{array}{l} | - P \rightarrow Q, | - \bar{P} \rightarrow Q \\ \hline | - Q \end{array}}{}$$
.

1.9. Доказать:

1.9.1. Правило силлогизма.

1.9.2. Правило контрапозиции.

1.9.3. Правила снятия двойного отрицания.

Докажем в качестве примера правило контрапозиции, которое лежит в основе мощного метода доказательства теорем – *метода от противного*. Для доказательства в аксиоме $IV_1 ((x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x}))$ сделаем одновременную подстановку: вместо x подставим формулу A , а вместо y – формулу B . Получим доказуемую формулу $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$. Из посылок правила контрапозиции формула $A \rightarrow B$ доказуема, поэтому, применяя правило *modus ponens*, получим заключение правила контрапозиции.

1.10. Используя производные правила вывода показать, что доказуемы следующие формулы:

- 1.10.1. $\overline{A \vee B} \rightarrow \overline{A \& B}$;
 1.10.2. $(A \rightarrow B) \& \overline{B} \rightarrow \overline{A}$;
 1.10.3. $A \& B \rightarrow \overline{A \vee B}$.

Указания. 1.10.1. В аксиоме Π_3 вместо x, y, z подставить соответственно формулы $\overline{A}, \overline{B}, \overline{A \& B}$. Затем применить к аксиомам Π_1 и Π_2 правило контрапозиции, после чего воспользоваться правилом сложного заключения.

1.10.2. В аксиому I_2 подставить вместо x, y, z соответственно формулы $(A \rightarrow B) \& \overline{B}, \overline{B}, \overline{A}$, в аксиому Π_2 подставить вместо x, y соответственно формулы $A \rightarrow B$ и $\overline{B}$, в аксиому Π_1 подставить вместо x, y соответственно формулы $A \rightarrow B$ и $\overline{B}$, затем применить правило сложного заключения получим.

1.10.3. В аксиоме Π_3 заменить $\overline{x \& y}$ на $\overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$ и применить аксиомы Π_1 и Π_2 . После этого последовательно применить правило контрапозиции, правило снятия двойного отрицания, правило сложного заключения и снова правило контрапозиции и правило снятия двойного отрицания.

2. Построение выводов из совокупности формул

Рассмотрим конечную совокупность формул $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

Выводом формулы B из формул множества Γ называется последовательность формул $F_1, F_2, \dots, F_m$ такая, что $F_m = B$, а любая из формул $F_1, F_2, \dots, F_m$ либо аксиома, либо одна из исходных формул $A_1, A_2, \dots, A_n$, либо непосредственно выводима из формул, предшествующих ей, по одному из правил вывода.

Если существует вывод формулы B из совокупности формул Γ , то говорят, что формула B *выводима* из совокупности формул Γ и записывают $\Gamma \vdash B$ или $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$. Формулы $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *гипотезами* или *посылками вывода*. Переход в выводе F_{i-1} к F_i называется i -ым шагом вывода. Очевидно, что присоединение формул к гипотезам не нарушает выводимости. Поэтому, если $\vdash B$, то $A \vdash B$, и если $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$, то $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1} \vdash B$.

На интуитивном уровне применительно к некоторой конкретной и содержательной теории T вывод есть ничто иное, как получение в процессе доказательства некоторого утверждения (теоремы, леммы, формулы и т.д.) промежуточных утверждений, основанных либо на аксиомах, либо на полученных ранее утверждениях по имеющимся правилам вывода (умозаключениям).

Теорема дедукции. Пусть Γ - множество формул, A и B - формулы. Тогда

$$\begin{array}{l} \Gamma, A \vdash B \\ \hline \Gamma \vdash A \rightarrow B. \end{array}$$

Правило введения конъюнкции:

$$\begin{array}{l} \Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B \\ \hline \Gamma \vdash A \& B. \end{array}$$

Правило введения дизъюнкции:

$$\begin{array}{l} \Gamma, A \vdash C, \Gamma, B \vdash C \\ \hline \Gamma, A \vee B \vdash C. \end{array}$$

Закон перестановки посылок: $\vdash (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (y \rightarrow (x \rightarrow z))$.

Закон соединения посылок: $\vdash (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \& y \rightarrow z)$.

Закон разъединения посылок: $\vdash (x \& y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z))$.

Задачи

2.1. Записать вывод для следующих формул:

2.1.1. $H = \{A, B\}$, $H \vdash A \& B$;

2.1.2. $\Gamma = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$, $\Gamma / A \rightarrow C$;

2.1.3. $\Gamma = \{A, \bar{A} \rightarrow B\}$, $\Gamma \vdash B$;

2.1.4. $H = \{A \rightarrow (B \rightarrow C)\}$, $H \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$.

В качестве примера запишем вывод для задачи 2.1.1.

$F_1 \equiv A$; $F_2 \equiv B$; $F_3 \equiv (A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A \& B))$ (подстановка в аксиому Π_3 вместо x, y, z соответственно формул A, B, A); $F_4 \equiv A \rightarrow A$ (как доказуемая формула); $F_5 \equiv (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A \& B)$ (по правилу заключения из F_3 и F_4); $F_6 \equiv B \rightarrow (A \rightarrow B)$ (подстановка в аксиому I_1 вместо x, y соответственно B и A); $F_7 \equiv A \rightarrow B$ (по правилу заключения из F_2 и F_6); $F_8 \equiv A \rightarrow A \& B$ (по правилу заключения из F_5 и F_7); $F_9 \equiv A \& B$ (по правилу заключения из F_1 и F_8).

2.2. Доказать, что если $\Gamma = \{A \rightarrow B\}$, то $\Gamma \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$.

Указание. Использовать правило силлогизма и теорему дедукции.

2.3. Доказать правила введения конъюнкции, дизъюнкции и законы перестановки, соединения и разъединения посылок

Заключение

Рассмотренные задачи, относящиеся к исчислению высказываний, позволяют овладеть отдельными логическими правилами вывода для доказательства формул и построения выводов для различных формул.

Задание студентам для самостоятельной работы

1. Решить задачи с нечетными номерами.
2. По одному из литературных источников разобрать доказательство теоремы дедукции.
3. Подготовиться к практическому занятию по теме «Метод резолюций в исчислении высказываний».

5 МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ В ИСЧИСЛЕНИИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Учебные цели: расширить и углубить знания студентов, полученные на лекциях, которые можно использовать при решении задач методом резолюций в исчислении высказываний; максимально приблизить символику и терминологию метода резолюций к языку логического программирования.

5.1 Учебные вопросы занятия:

3. Доказательство истинности логических клауз методом резолюций.
4. Основные принципы логического программирования.

5.2 Вопросы для проверки готовности студентов к занятию

1. Какими свойствами обладает отношение порядка?
2. Что понимается под *литерой* и *атомом*?
3. Что в логическом выводе понимают под *клаузой* и *легендой*?
4. Чем отличается *хорновская* клауза от других видов клауз?
5. Дать определения *хорновского дизъюнкта*, множества дизъюнктов.
6. Что такое «*эрбрановский универсум*» данного множества дизъюнктов?
7. Дать определение *интерпретации* множества дизъюнктов над эрбрановским универсумом.
8. Сформулировать теорему Эрбрана о невыполнимости множества дизъюнктов.
9. Что называется *резольвентой* двух дизъюнктов?
10. Сформулировать правило резолюций для исчисления высказываний.
11. Как определяется *логическое следствие* дизъюнктов через их резольвенту?
12. Как называется вывод пустого дизъюнкта из данного множества дизъюнктов?
13. Из каких типов предложений состоит программа на языке программирования Пролог?

В булевой алгебре все доказательства строились на *отношении эквивалентности*. Две логические функции считались эквивалентными, если они давали на соответствующих наборах аргументов абсолютно одинаковые значения нулей и единиц. При использовании формальной записи логических выражений отдельные звенья цепи любого доказательства там были связаны символом равенства « $=$ ». В исчислении высказываний все доказательства строятся на *отношении порядка*, которое устанавливается между причиной и следствием. Здесь уже отдельные звенья цепи доказательства связаны символом импликации « $\rightarrow$ ». Как и в алгебре Буля, в исчислении высказываний существует аксиоматический и конструктивный подходы доказательств логических выражений. *Аксиоматическое* построение исчисления высказываний состоит в том, чтобы попытаться вычленив из бесконечного числа истинных формул независимую систему аксиом, с помощью которой можно было бы устанавливать справедливость любых других формул. Исчисление высказываний, как мы уже знаем, является расширением алгебры высказываний. Другими словами, алгебра высказываний служит одной из интерпретаций исчисления высказываний.

К *конструктивному* подходу доказательства логических выражений относится метод составления таблиц истинности.

Кроме аксиоматического и конструктивного методов доказательства логических формул существуют еще *смешанные* методы доказательства, среди которых особое место занимает *метод резолюций*. Правило резолюций есть правило вывода, которое порождает резольвенты для множества дизъюнктов.

Для доказательства теорем с использованием правила резолюций преобразуют исходную формулу к множеству хорновских дизъюнктов S_0 . Далее строят всевозможные резольвенты $R = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ из дизъюнктов, принадлежащих множеству S_0 . Далее получа-

ем множество $S_1 = S_0 \cup R$ и повторяем все сначала до тех пор, пока не получим множество S_m , содержащее пустой дизъюнкт.

1. Доказательство истинности логических клауз методом резолюций

При логическом выводе символ импликации « $\Rightarrow$ » мы будем заменять символом « $\Rightarrow$ ». Символ « $\Rightarrow$ » является *объектным*, а символ « $\Rightarrow$ » - *субъектным*. Таким образом, следует различать язык логики высказываний и *метаязык* исследователя. Во избежание путаницы введем еще два *метасимвола*: вместо *объектной конъюнкции* « $\&$ » будем использовать *субъектный* символ *метаконъюнкции* – « $\&$ », а вместо *объектной дизъюнкции* « $\vee$ » - *субъектную метадизъюнкцию* « $;$ ». Тогда утверждение, которое требуется доказать, в исчислении высказываний оформляется в виде следующего *причинно-следственного отношения*:

$$P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n \Rightarrow C, \quad (5.1)$$

где P_i - *посылка (причина)*, C – *заключение (следствие)*. Читается: «Если посылки $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ истинны, то заключение C тоже истинно» или, по-другому: «Если причины $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ имели место, то будет иметь место и следствие C ».

Чтобы не спутать *объектное высказывание* (предложение) с *субъектным высказыванием*, справедливость которого мы намереваемся установить, условимся предложения типа (5.1) называть **клаузой**. Клауза – *метапредложение*, в котором использовано отношение порядка, оформленное через символ метаимпликации « $\Rightarrow$ ». Как и отношение эквивалентности, отношение порядка удовлетворяет трем аксиомам (законам):

рефлексивности: $A \Rightarrow A$;

антисимметричности: если $A \Rightarrow B$, то $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$;

транзитивности: если $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow C$, то $A \Rightarrow C$.

Закон антисимметричности можно записать и так: если $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, то $A = B$.

Клауза есть именно формальная запись доказываемого предложения. Вместо букв в ней можно подставить объектные высказывания, и тогда клауза наполняется конкретным содержанием, которое называется *семантикой* или *легендой*. Пример клаузы:

$$A \rightarrow B, A \Rightarrow B.$$

Если принять, что A = сверкнула молния, B = грянул гром, то можно составить следующую легенду: известно, что если сверкнула молния, то после этого грянет гром. Молния сверкнула. Следовательно, должен и грянуть гром.

Над субъектом, который формулирует метапредложения, может стоять другой субъект, для которого уже предложения первого субъекта окажутся объектными. Тогда клаузу (5.1) второй субъект или метасубъект запишет для себя следующим логическим выражением:

$$(P_1 \& P_2 \& \dots \& P_{n-1} \& P_n) \rightarrow C.$$

Преобразовав это выражение в дизъюнкт, получим:

$$\overline{P_1} \vee \overline{P_2} \vee \dots \vee \overline{P_{n-1}} \vee \overline{P_n} \vee C.$$

Отсюда легко находим:

$$(P_1 \& P_2 \& \dots \& P_{n-1}) \rightarrow (\overline{P_n} \vee C).$$

Поэтому клауза (5.1) может быть представлена в другой эквивалентной форме:

$$P_1, P_2, \dots, P_{n-1} \Rightarrow \overline{P_n}; C. \quad (5.2)$$

В силу коммутативности конъюнкции на месте посылки P_n может оказаться любая другая, причем не одна. Например, клауза

$$P_1, P_2, P_3, P_4 \Rightarrow C_1; C_2; C_3$$

может быть преобразована в другую, эквивалентную форму:

$$P_4, \overline{C_2}, P_1, \overline{C_1} \Rightarrow \overline{P_1}; C_3; \overline{P_2}. \quad (5.3)$$

Однако клауза (5.1) по сравнению с (5.2) и другими подобными формами типа (5.3), имеет определенные преимущества и, в частности, используется в языке логического программирования ПРОЛОГ. Ее называют *хорновской*. Произвольную клаузу всегда можно свести путем равносильных преобразований к хорновскому виду.

Если символ метаимпликации « $\Rightarrow$ » клаузы (5.2) сместить в крайнее левое положение, то она превратится в *тавтологию*; если же его сместить в крайнее правое положение, то она превратится в *противоречие*:

$$1 \Rightarrow \overline{P_1}; \overline{P_2}; \dots; \overline{P_{n-1}}; \overline{P_n}; C \text{ – тавтология,}$$

$$P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n, \overline{C} \Rightarrow 0 \text{ – противоречие.}$$

Напомним теперь правило (принцип) резолюций для исчисления высказываний:

Если для любых двух дизъюнктов C_1 и C_2 существует литера L_1 в дизъюнкте C_1 , которая инверсна (контрарная) литере L_2 в C_2 , то, вычеркнув L_1 и L_2 из C_1 и C_2 соответственно, построим дизъюнкцию оставшихся дизъюнктов. Построенный дизъюнкт называется **резольвентой** дизъюнктов C_1 и C_2 .

Имеет место теорема: пусть даны два дизъюнкта C_1 и C_2 . Тогда резольвента C дизъюнктов C_1 и C_2 есть логическое следствие дизъюнктов C_1 и C_2 .

Метод доказательства истинности логических клауз, в котором используется *принцип резолюций*, относится к полуконструктивным методам доказательства. Принцип резолюций играет роль аксиомы порядка и вместе с тем порождает очень эффективную конструктивную процедуру. Таким образом, суть этого принципа сводится к тому, что два посыльных дизъюнкта с противоположными литерами (термами) всегда можно склеить в один заключительный дизъюнкт (резольвенту), в котором уже не будет противоположных литер:

$$X \vee A, Y \vee \overline{A} \Rightarrow X \vee Y,$$

где X и Y – произвольные термы или дизъюнкты с любым набором термов, включая пустой дизъюнкт $\emptyset$ (в дальнейшем мы его будем обозначать нулем «0»); A и $\overline{A}$ – произвольные термы.

При последовательном применении метода резолюций происходит уменьшение числа литер, вплоть до их полного исчезновения. При этом исходная клауза конструируется в форме конъюнктивного противоречия:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \Rightarrow 0.$$

Некоторые рассмотренные нами правила вывода исчисления высказываний являются частными случаями правила резолюций. Докажем, например, с помощью метода резолюций правило *modus ponens*, которое во введенной нами здесь символике записывается следующим образом:

$$A, A \rightarrow B \Rightarrow B \text{ или } 0 \vee A, \overline{A} \vee B, \overline{B} \vee 0 \Rightarrow 0.$$

Здесь имеется три дизъюнкта. Склеивая их последовательно, получаем в результате пустой дизъюнкт (0), который говорит о несовместимости заключения и посылок. Это как раз и свидетельствует об истинности исходной клаузы.

Принцип резолюций целиком заменяет аксиому порядка, поскольку сама эта аксиома может быть доказана в рамках метода резолюций. Действительно,

$$A, B \Rightarrow A, A, B, \overline{A} \Rightarrow 0, 0, B \Rightarrow 0.$$

Следует обратить внимание на то, что посылка *В* здесь вообще не используется. Это необходимо иметь в виду: необязательно использовать все посылки (их число часто бывает избыточным) – главное получить пустой дизъюнкт.

Пусть дана клауза $\bar{A} \rightarrow B, C \vee A, B \rightarrow \bar{C} \Rightarrow A$. Доказательство ее справедливости следует начать с приведения ее в НКФ: $A \vee B, C \vee A, \bar{B} \vee \bar{C}, \bar{A} \Rightarrow 0$.

Выпишем по порядку все посылки и далее начнем их склеивать согласно очередности. Справа от каждого нового дизъюнкта будем писать номера используемых дизъюнкторов. Получим следующую цепочку вывода пустого дизъюнкта:

1. $A \vee B$,
2. $C \vee A$,
3. $\bar{B} \vee \bar{C}$,
4. $\bar{A}$,
5. $A \vee \bar{C}$, (1, 3)
6. B , (1, 4)
7. $A \vee \bar{B}$, (2, 3)
8. C , (2, 4)
9. A , (2, 5)
10. $\bar{C}$, (3, 6)
11. $\bar{B}$, (3, 8)
12. $\bar{C}$, (4, 5)
13. $\bar{B}$, (4, 7)
14. 0 . (4, 9)

Подобная стратегия поиска пустого дизъюнкта очень непродуктивна. Если к этой же задаче подойти более творчески, то пустой дизъюнкт обнаружится на четвертом шаге от начала поиска:

5. B (1, 4), 6. C (2, 4), 7. $\bar{B}$ (3, 6), 8. 0 (5, 7).

До сих пор мы использовали формулу *конъюнктивного противоречия*. Исходя из *принципа двойственности*, метод резолюции можно сформулировать относительно *дизъюнктивной тавтологии*, при этом принцип резолюций, естественно изменится:

$$X \& Y \Rightarrow X \& A; \quad Y \& \bar{A}.$$

Докажем оду и ту же клаузу двумя способами – в форме противоречия и в форме тавтологии. Пусть задана клауза: $A, A \rightarrow B, B \rightarrow (A \rightarrow C) \Rightarrow C$.

Доказательство в форме противоречия выглядит следующим образом:

$$A, \bar{A} \vee B, \bar{B} \vee \bar{A} \vee C, \bar{C} \Rightarrow 0.$$

1 2 3 4

Склейки: 5. B (1, 2), 6. $\bar{A} \vee C$ (1, 6), 7. C (3, 5), 8. 0 (4, 7).

Доказательство в форме тавтологии выглядит аналогично:

$$1 \Rightarrow \bar{A}; \quad A \& \bar{B}; \quad B \& A \& \bar{C}; \quad C.$$

1 2 3 4

Склейки: 5. $\bar{B}$ (1, 2), 6. $A \& \bar{C}$ (1, 6), 7. $\bar{C}$ (3, 5), 8. 1 (4, 7).

Одним из недостатков метода резолюций является то, что исходная клауза обязательно должна быть представлена в нормальной дизъюнктивной или конъюнктивной форме.

1. Приведённые ниже клаузы доказать методом резолюций:
 - 1.1. $A \rightarrow B, C \rightarrow D, B \rightarrow E, D \rightarrow F, E \rightarrow \bar{F}, A \rightarrow C \Rightarrow \bar{A}$.
 - 1.2. $(A \rightarrow C) \rightarrow (\bar{A} \& B) \Rightarrow A \vee B$.
 - 1.3. $A \vee D, B \vee E, D \rightarrow C, D \vee C \Rightarrow A \& C; E \& D; B$.
 - 1.4. $A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C, A \rightarrow \bar{D}, C \rightarrow \bar{B} \Rightarrow (A \vee B) \rightarrow (A \& B)$.

Пример доказательства клауз в форме противоречия и в форме тавтологии приведен выше.

2. Составить легенды для следующих клауз:

$$2.1. A \rightarrow B, B \rightarrow E, A \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow F, \overline{E \& F} \Rightarrow \bar{A}.$$

$$2.2. J \rightarrow H, K \rightarrow H, I \rightarrow J, H \rightarrow I, \bar{H} \Rightarrow \bar{J} \& \bar{K}.$$

Приведем пример легенды для клаузы 2.1:

«Если человек занимается спортом (A), то он хочет быть здоровым (B). Хорошее здоровье (B) ведет к счастливой жизни (E). Кроме того, если человек занимается спортом (A), то он, как правило, стремится достичь высоких спортивных результатов (C). Наличие высоких результатов (C) позволяет одерживать победы на соревнованиях (D). Победы на соревнованиях (D) влекут за собой всеобщее признание (F). Однако человек не хочет жить счастливо и иметь всеобщее признание ($\overline{E \& F}$). Следовательно, он не станет заниматься и спортом ($\bar{A}$)».

3. Для заданных легенд составить клаузы, отвечающие тексту или контексту этих легенд, для чего сформулировать необходимые посылки и два следствия: одно истинное, другое ложное.

Если в цепи будет большой перепад напряжения, то сгорит предохранитель, что повлечет за собой необходимость его замены. При целом предохранителе телевизор, конечно, будет работать, но только если он включен в сеть питания. Если телевизор работает нормально, то я увижу сегодняшние «Новости» Итак, я смотрю телевизионные «Новости» при условии отсутствия перепада напряжения и подключения телевизора к сети питания.

Решение. Если ввести обозначения: A - возникновение перепада напряжения в сети; B - перегорание предохранителя; C - необходимость замены предохранителя; D - телевизор работает нормально; E - телевизор подключен к сети питания; F - я смотрю «Новости», то для легенды 3.1 можно составить следующую клаузу:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, E \rightarrow (\bar{B} \rightarrow D), D \rightarrow F \Rightarrow (\bar{B} \& \bar{A} \& E) \rightarrow F.$$

В этой клаузе заключение является истинным, в то время как умозаключение, данное в легенде $((\bar{A} \& E) \rightarrow F)$, является ложным.

Уменьшение температуры приводит к снижению давления и уменьшению объема. Увеличение объема приводит к росту скорости потока. Повышение давления приводит к падению уровня, если при этом уменьшать температуру. Снижение скорости приводит к уменьшению давления или росту температуры. Технолог Иванов рассудил так: «Мне надо повысить давление при одновременном снижении скорости потока, поэтому я должен увеличить объем и температуру».

Мотоцикл я сначала не заметил, так как его заслонил бензовоз, а «Волга» вывернула из-за угла, когда «Жигули» были уже вблизи светофора. «Иномарка» проскочила на красный свет и явилась, как мне кажется, причиной всей этой аварии. Из-за нее «Волга» резко затормозила, и мотоциклист оказался на асфальте. «Жигули», чтобы не задавить мотоциклиста, свернули на тротуар, а бензовоз в это время врезался в «Волгу». Если бы не было мотоциклиста, то опасной ситуации тоже могло и не быть. Хотя виноват и водитель «Волги», поскольку он явно превысил скорость.

- 3.4. Если усложнить схему устройства, то возрастет его производительность, а если использовать новую элементную базу, то увеличится период эксплуатации устройства.

Устройство начнут хорошо раскупать только при одновременном росте его производительности и периода эксплуатации. Но устройство не пользуется спросом.

3.5. Увеличение денег в обращении влечет за собой инфляцию. Но рост денежной массы происходит по двум причинам: из-за денежной эмиссии или снижения товарооборота. Снижение товарооборота приводит к безработице и спаду производства. Из-за инфляции падает курс денежной единицы. Рекомендации экономиста Иванова: увеличить денежную эмиссию и поднять производство, тогда избежим безработицы, и курс денежной единицы останется неизменным.

3.6. Если в одном месте что-то убудет, то в другом месте что-то прибудет – это истина, не требующая доказательств. Но есть такая теория, которая утверждает: где-то в далеком космосе существуют «черные дыры», куда все проваливается, но оттуда ничего не появляется. Эта теория ничего не говорит о существовании «белых дыр», которые действовали бы противоположно «черным дырам». Один иностранный астрономический журнал сообщил координаты «черной дыры». Российский астроном Петров направил туда свой мощный телескоп и ничего не обнаружил. «Так-так, - сказал Петров, - но «белую дыру» я все же открою».

2. Основные принципы логического программирования

На начальном этапе развития искусственного интеллекта (ИИ) языков и систем, ориентированных специально на создание прикладных систем, основанных на знаниях, не существовало. С одной стороны, в то время еще не оформился сам подход, в котором центральное место отводилось бы изложению теории в форме программ, а с другой – сама область ИИ только зарождалась как научное направление. Немаловажным было и то, что появившиеся к тому времени универсальные языки программирования высокого уровня казались адекватным инструментом для создания любых, в том числе и интеллектуальных систем. Однако сложность и трудоемкость разработки здесь настолько велики, что практически полезные интеллектуальные системы становятся недоступными для реализации. Учитывая вышесказанное, были разработаны языки и системы обработки символьной информации, которые на несколько десятилетий стали основным инструментом программирования интеллектуальных систем.

До недавнего времени наиболее популярным базовым языком реализации систем ИИ вообще и экспертных систем (ЭС), в частности, был *Лисп*. Этот язык был разработан в Стэнфорде под руководством Дж. Маккарти в начале 60-х годов и не предназначался вначале для программирования задач ИИ. Это был язык, который должен был быть следующим за *Фортраном* шагом на пути автоматизации программирования. К моменту создания первых *Лисп*-интерпретаторов в практику работы на ЭВМ стал входить диалоговый режим, и режим интерпретации естественно вписался в общую структуру диалоговой работы. Примерно тогда же окончательно сформировались и принципы, положенные в основу языка *Лисп*: использование единого спискового представления для программ и данных; применение выражений для определения функций, скобочный синтаксис языка. Процесс разработки языка завершился созданием версии *Лисп* 1.5, которая на многие годы определила пути его развития. Параллельно с развитием языка *Лисп* и его различных версий разрабатывались и другие системы программирования для ИИ, среди которых отметим языки *Снобол* и *Рефал*.

В начале 70-х годов прошлого века появился еще один новый язык, способный составить конкуренцию *Лиспу* при реализации систем, ориентированных на знания, - язык *Пролог*. Он не дает новых сверхмощных средств программирования по сравнению с *Лиспом*, но поддерживает другую модель организации вычислений. Подобно тому, как *Лисп* скрыл от программиста устройство памяти ЭВМ, *ПРОЛОГ* позволил ему не заботиться (без необходимости) о потоке управления в программе. *ПРОЛОГ* предлагает такую парадигму мышления, в рамках которой описание решаемой задачи представляется в виде слабо

структурированной совокупности отношений. Это удобно, если число отношений не слишком велико и каждое отношение описывается небольшим числом альтернатив. В противном случае ПРОЛОГ-программа становится весьма сложной для понимания и модификации. Возникают и проблемы эффективности реализации языка, так как в общем случае механизмы вывода, встроенные в ПРОЛОГ, обеспечивают поиск решения на основе перебора возможных альтернатив и декларативного возврата из тупиков. Он относится в большей степени к *реляционным* или *декларативным (описательным)*, а не к функциональным языкам, и является языком программирования логического типа. Логическую основу языка ПРОЛОГ составляют *унификация* и *метод резолюций*.

Поясним на примере применение принципа резолюций и унификации к процедуре вывода в языке ПРОЛОГ.

Запишем выражение « X – футболист» в виде $\text{footballer}(X)$. Здесь footballer – предикатная буква (литера), X – переменный терм. Кроме того, запишем выражение « X – спортсмен» в виде $\text{sportsman}(X)$. Таким образом, выражение «футболист является спортсменом» можно записать в виде $\text{footballer}(X) \rightarrow \text{sportsman}(X)$.

Попробуем теперь, задав выражение «Пеле – футболист», то есть $\text{footballer}(\text{Пеле})$, где Пеле константный терм (или просто константа), вывести методом резолюций выражение $\text{sportsman}(\text{Пеле})$.

Прежде всего, добавим к исходному множеству формул отрицание утверждения, которое мы хотим доказать, то есть $\neg \text{sportsman}(\text{Пеле})$:

$$\overline{\text{footballer}(X) \vee \text{sportsman}(X)} \quad (5.4)$$

$$\overline{\text{footballer}(\text{Пеле})} \quad (5.5)$$

$$\overline{\text{sportsman}(\text{Пеле})}. \quad (5.6)$$

Формула $\overline{\text{footballer}(X) \vee \text{sportsman}(X)}$ логически эквивалентна формуле $\text{footballer}(X) \rightarrow \text{sportsman}(X)$.

Поэтому необходимо осуществить унифицирующую подстановку $X = \text{Пеле}$ в дизъюнкцию формул (5.4) и (5.5). В результате удаляется тождественно истинная формула вида $\overline{a} \vee a$ и остается лишь выражение $\text{sportsman}(\text{Пеле})$. После этого, присоединив к выражению $\text{sportsman}(\text{Пеле})$ с помощью операции дизъюнкции формулу (5.5), снова получим тождественно истинное выражение

$$\overline{\text{sportsman}(\text{Пеле})} \vee \text{sportsman}(\text{Пеле}),$$

которое также удаляется, давая при этом пустой дизъюнкт. Это показывает невыполнимость формул (5.4) – (5.6) и, следовательно, выводимость методом опровержения формулы $\text{sportsman}(\text{Пеле})$, то есть истинность теоремы $\text{footballer}(X) \rightarrow \text{sportsman}(X)$.

На языке *Пролог* приведенный пример доказательства может выглядеть следующим образом:

$\text{sportsman}(X) : - \text{footballer}(X).$

$\text{footballer}(\text{Пеле}).$

? - $\text{sportsman}(\text{Пеле}).$

Эта коротенькая программа содержит три предложения. Первое из них является правилом, второе – фактом и третье – вопросом. В общем виде *прологовские* предложения бывают только трех типов: *факты*, *правила* и *вопросы* (или *запросы*). Обращаем внимание на то, что каждое предложение в программе на *Прологе* заканчивается точкой.

Пролог-программы можно расширять, добавляя в них новые предложения.

Факты содержат утверждения, которые являются всегда безусловно истинными. В нашем примере фактом является предложение $\text{footballer}(\text{Пеле})$.

Правила содержат утверждения, истинность которых зависит от некоторых условий. Поэтому правила имеют условную часть (правая половина правила после символа $:$ – , который читается как «если») и часть вывода (левая половина правила). Вывод называют

также *головой* предложения, а условную часть – его *телом*. Отсюда следует, что факты – это предложения, имеющие пустое тело, а правила имеют голову и непустое тело. В нашем примере имеется только одно правило – первое предложение. Оно читается так: если X – футболист, то он спортсмен. В общем случае тело правила – это список *целей*, разделенных запятыми. *Запятая* понимается как *конъюнкция*. Например, правило для отношения «быть сестрой» может выглядеть так:

Сестра (X, Y): – родитель (Z, X), родитель (Z, Y), женщина (X), различны (X, Y).

По ходу вычислений вместо переменной в предикат может быть подставлен другой объект. В этом случае говорят, что переменная *конкретизирована*. Предполагается, что все переменные связаны квантором всеобщности, хотя для переменных, появляющихся только в теле правил, возможно, связывание и квантором существования.

С помощью *вопросов* пользователь может спрашивать систему о том, какие утверждения являются истинными. Вопрос является целевым утверждением. Обычно ответ на вопрос бывает либо утвердительным «yes» (да), либо отрицательным «no» (нет). В языке программирования *Пролог*, как и в методе резолюций, взяв за отправную точку отрицание данной формулы, методом опровержения можно доказать саму формулу.

Одним из наиболее важных аспектов программирования на *Прологе* являются понятия *унификации* (отождествления) и *конкретизации переменных*. *Пролог* пытается отождествить термы при доказательстве или согласовании целевого предложения. Например, для согласования запроса $?- собака(X)$ целевое предложение $собака(X)$ можно отождествить с фактом $собака(рекс)$, в результате чего переменная X стала конкретизированной: $X = рекс$. Переменные, входящие в предложения, отождествляются особым образом – сопоставляются. Факт доказывается для всех значений переменной (переменных). Правило доказываем для всех значений переменных в головном целевом предложении при условии, что целевые утверждения в теле правила доказаны. Переменные принимают конкретные значения на время доказательства целевого предложения. В том случае, когда переменные содержатся только в целевых предложениях тела правила, правило считается доказанным, если целевое предложение тела истинно для одного или более значений переменных. Таким образом, они принимают конкретные значения на то время, когда целевое предложение, в котором переменные были согласованы, остается доказанным.

Терм X сопоставляется с термом Y по следующим правилам. Если X и Y – константы, то они сопоставимы только в том случае, если они одинаковы. Если X является константой или структурой, а Y – не конкретизированной переменной, то X и Y сопоставимы и Y принимает значение X (и наоборот). Если X и Y – структуры, то они сопоставимы тогда и только тогда, когда у них одни и те же главный оператор и аргументы, и каждая из их соответствующих компонент сопоставима. Если X и Y – не конкретизированные (свободные) переменные, то они сопоставимы; в этом случае говорят, что они *сцеплены*. Заметим, что *Пролог* находит наиболее общий унификатор термов. Разберем конкретный пример программы на *Прологе*.

Пример. Имеется следующая легенда: Ивана интересуют компьютеры, книги и автомобили. Петра интересует нечто, что интересует Ивана, но если это нечто является техникой и если это произведено в России. Известно, что компьютеры и автомобили – это техника. Кроме того, известно, что компьютеры производятся в Америке, а автомобили – в США и России. Вопрос: «Что интересует Петра?». Для удобства анализа нижеприведенной программы все предикаты и конкретные значения переменных будем обозначать не отдельными литерами, а словами, передающими их семантику. Кроме того, объекты программы (факты, правила и запросы) будем нумеровать, а справа от текста программы приведем символьные выражения, чтобы далее у нас была возможность продемонстрировать в аналитической форме *метод резолюций*, который лежит в основе функционирования *Пролога*.

Программа

1) <i>интерес</i> (Иван, компьютеры).	$A(i, a)$
2) <i>интерес</i> (Иван, книги).	$A(i, b)$
3) <i>интерес</i> (Иван, автомобили).	$A(i, c)$
4) <i>интерес</i> (Петр, x) $\Leftarrow A(p, x)$	
5) $\Leftarrow$ <i>интерес</i> (Иван, x),	$A(i, x)$
6) <i>техника</i> (x),	$T(x)$
7) <i>произведено</i> (x , Россия).	$P(x, r)$
8) <i>техника</i> (компьютеры).	$T(a)$
9) <i>техника</i> (автомобили).	$T(c)$
10) <i>произведено</i> (компьютеры, США).	$P(a, s)$
11) <i>произведено</i> (автомобили, США).	$P(c, s)$
12) <i>произведено</i> (автомобили, Россия).	$P(c, r)$

Цель: *интерес* (Петр, x). $A(p, x)$

Данная программа позволяет составить следующее противоречие, которое может быть разрешено в рамках метода резолюций:

$$A(i, a), A(i, b), A(i, c), T(a), T(c), A(p, x) \vee \overline{A(i, x)} \vee \overline{T(x)} \vee \overline{P(x, r)}, P(a, s), P(c, s), P(c, r), \\ \overline{A(p, x)} \Rightarrow 0.$$

Ноль можно получить только в том случае, если $x=c$. Тогда дизъюнкт

$$A(p, c) \vee \overline{A(i, c)} \vee \overline{T(c)} \vee \overline{P(c, r)}$$

нейтрализуется предикатами под номерами 3, 9, 12 и 13. Поиск нужного значения как раз и осуществляется через процедуру унификации, которую можно отследить путем *трассировки* программы. **Трассировка** – это пошаговое протоколирование выполнения программы.

Введем следующие обозначения: **В** – вызов нового предиката; **П** – повторный вызов предиката; **У** – успешное завершение процедуры унификации, то есть вызванный предикат отвечает какому-либо факту; **Н** – неуспешное завершение унификации; **У** – указатель, который говорит о том, что существует, по крайней мере, еще один факт с подходящей унификацией. Символ подчеркивания на месте является *анонимной переменной* и полностью заменяет x при трассировке программы. Строка трассировки заканчивается числом, отвечающим номеру листинга программы. Приведем трассировку нашей программы:

1. **В:** *цель*() – 13,
2. **В:** *интерес* (Петр, _) – 1,
3. **П:** *интерес* (Петр, _) – 2,
4. **П:** *интерес* (Петр, _) – 3,
5. **У:** *интерес* (Петр, _) – 4,
6. **В:** *интерес* (Иван, _) – 5,
7. **У:** *интерес* (Иван, компьютеры) – 1 у,
8. **В:** *техника* (компьютеры) – 6,
9. **У:** *техника* (компьютеры) – 8,
10. **В:** *произведено* (компьютеры, Россия) – 7,
11. **П:** *произведено* (компьютеры, Россия) – 10,
12. **П:** *произведено* (компьютеры, Россия) – 11,
13. **Н:** *произведено* (компьютеры, Россия) – 12,
14. **П:** *интерес* (Иван, _) – 5,
15. **У:** *интерес* (Иван, книги) – 2 у,
16. **В:** *техника* (книги) – 6,
17. **П:** *техника* (книги) – 8,
18. **Н:** *техника* (книги) – 9,
19. **П:** *интерес* (Иван, _) – 5,
20. **У:** *интерес* (Иван, автомобили) – 3,

21. **В:** *техника* (автомобили) – 6,
22. **П:** *техника* (автомобили) – 8,
23. **У:** *техника* (автомобили) – 9,
24. **В:** *произведено* (автомобили, Россия) – 7,
25. **П:** *произведено* (автомобили, Россия) – 10,
26. **П:** *произведено* (автомобили, Россия) – 11,
27. **У:** *произведено* (автомобили, Россия) – 12,
28. **У:** *цель* () – 13.

Для того чтобы ответить на вопрос «Что интересует Петра?» или в предикатной форме – *интерес* (Петр, x), *Пролог-система* ищет факты и заголовки правил, сопоставимые с целью. Поиск всегда начинается с первой строки программы. Первые три факта несопоставимы с целью; далее следует правило, заголовок которого заменяется тремя подцелями. В строке 6 вызывается первая подцель. Затем *Пролог-система* возвращается в начало программы, где ее ожидает *успех*. Выставляется указатель «**У**», к которому система вернется в случае *неуспеха*, который может появиться в другом месте программы. В строке 8 производится вызов второй подцели – *техника* (компьютер), для которой тут же находится подходящий факт (строка 9). Однако для третьей подцели *произведено* (компьютеры, Россия) – нужного факта не находится (строка 13). Тогда переменная освобождается от своей прежней конкретизации (компьютеры) и принимает новое значение – книги. Эта конкретизация не удовлетворяет вторую подцель (строка 18). Переменная вновь освобождается и принимает значение автомобили. При этой конкретизации удовлетворены все три подцели, следовательно, и поиск ответа на основной вопрос заканчивается успехом: Петра интересуют автомобили, то есть *интерес* (Петр, автомобили) является тем конкретизированным предикатом, при котором обеспечена истинность всей клаузы.

Задачи

2.1. Задана *Пролог-программа* «Родственные отношения». Необходимо выполнить трассировку программы отдельно для двух целей, предварительно введя недостающие предикаты и правила. Так как может существовать несколько значений для переменных x и y , удовлетворяющих одной и той же цели, при трассировке допустимо ограничиться одним истинным значением x или y . Кроме того, ввиду большого числа повторных вызовов, разрешается указывать только первую и последнюю строки повторяющихся вызовов, например:

- ...
81. **В:** *муж* (Феликс) – 85,
82. **П:** *муж* (Феликс) – 1,
- ...
99. **П:** *муж* (Феликс) – 18,
100. **У:** *муж* (Феликс) – 19.

Пролог-программа «Родственные отношения»

$\text{муж}(x)$ – x мужчина,
 $\text{жен}(x)$ – x женщина,
 $\text{отец}(x, y)$ – x отец y ,
 $\text{мать}(x, y)$ – x мать y ,
 $\text{дочь}(x, y)$ – x дочь y ,
 $\text{сын}(x, y)$ – x сын y ,
 $\text{род}(x, y)$ – x родитель y ,
 $\text{брат}(x, y)$ – x брат y ,
 $\text{сестра}(x, y)$ – x сестра y .

Клаузы:

- 1) *муж* (Николай).
- 3) *муж* (Степан).
- 5) *муж* (Павел).
- 7) *муж* (Анатолий).
- 9) *муж* (Роман).
- 11) *муж* (Дмитрий).
- 13) *муж* (Евгений).
- 15) *муж* (Ефим).
- 17) *муж* (Вадим).
- 19) *муж* (Феликс).
- 21) *жен* (Ольга).
- 23) *жен* (Жанна).
- 25) *жен* (Алиса).
- 27) *жен* (Елена).
- 29) *жен* (Полина).
- 31) *жен* (Наталья).
- 33) *жен* (Белла).
- 35) *отец* (Николай, Иван).
- 37) *отец* (Иван, Ольга).
- 39) *отец* (Иван, Татьяна).
- 41) *отец* (Павел, Роман).
- 43) *отец* (Иосиф, Ирина).
- 45) *отец* (Ефим, Полина).
- 47) *отец* (Петр, Ефим).
- 49) *отец* (Петр, Анна).
- 51) *отец* (Дмитрий, Наталья).
- 53) *отец* (Олег, Евгений).
- 55) *мать* (Екатерина, Елена).
- 57) *мать* (Елена, Юрий).
- 59) *мать* (Мария, Ольга).
- 61) *мать* (Луиза, Евгений).
- 63) *мать* (Мария, Сергей).
- 65) *мать* (Татьяна, Анатолий).
- 67) *мать* (Виктория, Белла).
- 69) *мать* (Ольга, Жанна).
- 71) *мать* (Жанна, Ирина).
- 73) *мать* (Ирина, Кирилл).
- 75) $\text{род}(x, y) \Leftarrow \text{отец}(x, y)$.
- 76) $\text{род}(x, y) \Leftarrow \text{мать}(x, y)$.
- 77) $\text{сын}(x, y) \Leftarrow \text{род}(y, x), \text{ муж}(x)$.
- 78) $\text{дочь}(x, y) \Leftarrow \text{род}(y, x), \text{ жен}(x)$.
- 79) $\text{брат}(x, y) \Leftarrow \text{род}(z, x), \text{ род}(z, y), \text{ муж}(x), x \neq y$.
- 80) $\text{сестра}(x, y) \Leftarrow \text{род}(z, x), \text{ род}(z, y), \text{ жен}(x), x \neq y$.
- 2) *муж* (Иван).
- 4) *муж* (Сергей).
- 6) *муж* (Игорь).
- 8) *муж* (Иосиф).
- 10) *муж* (Кирилл).
- 12) *муж* (Максим).
- 14) *муж* (Петр).
- 16) *муж* (Юрий).
- 18) *муж* (Олег).
- 20) *жен* (Мария).
- 22) *жен* (Татьяна).
- 24) *жен* (Ирина).
- 26) *жен* (Екатерина).
- 28) *жен* (Виктория).
- 30) *жен* (Луиза).
- 32) *жен* (Луиза).
- 34) *жен* (Анна).
- 36) *отец* (Степан, Мария).
- 38) *отец* (Иван, Сергей).
- 40) *отец* (Сергей, Виктория).
- 42) *отец* (Сергей, Дмитрий).
- 44) *отец* (Ефим, Анатолий).
- 46) *отец* (Юрий, Вадим).
- 48) *отец* (Петр, Юрий).
- 50) *отец* (Максим, Петр).
- 52) *отец* (Феликс, Олег).
- 54) *мать* (Алиса, Петр).
- 56) *мать* (Елена, Ефим).
- 58) *мать* (Елена, Анна).
- 60) *мать* (Анна, Виктория).
- 62) *мать* (Татьяна, Полина).
- 64) *мать* (Анна, Олег).
- 66) *мать* (Анна, Дмитрий).
- 68) *мать* (Мария, Татьяна).
- 70) *мать* (Ольга, Павел).
- 72) *мать* (Ирина, Игорь).
- 74) *мать* (Барбара, Роман).

Варианты целей:

1. *тесть* (Феликс, x), *племянник* (Павел, y).
2. *тетя* (Анна, y), *внук* (x , Алиса).
3. *двоюродный брат* (Вадим, y), *внучка* (x , Сергей).
4. *дядя* (Ефим, y), *свекровь* (Мария, y).

5. невестка (х, Максим), внук (х, Анна).
6. племянница (Жанна, у), внук (Роман, у).
7. теща (Елена, у), внучка (Белла, у).
8. теща (Мария, у), свекор (х, Елена).
9. внук (Евгений, у), дядя (Юрий, у).
10. тетя (Татьяна, у), двоюродный брат (Дмитрий, у).
11. зять (Петр, у), тетя (Ольга, у).
12. свекровь (х, Луиза), дядя (Сергей, у).
13. тесть (х, Сергей), двоюродный брат (Вадим, у).
14. теща (х, Сергей), двоюродная сестра (х, Виктория).
15. племянник (Вадим, у), внучка (Ирина, у).
16. свекор (Петр, у), внучка (Полина, у).

В качестве примера произведем трассировку *Пролог-программы* «Родственные отношения» для первой цели варианта 16. Для этого имеющуюся программу дополним клаузой:

81) свекор (х, у) $\Leftarrow$

82) отец (х, z),

83) отец (z, u),

84) мать (у, u).

Цель: 85) свекор (Петр, у).

Трассировка программы:

1. В: цель() – 85,
2. В: свекор (Петр, _) – 81,
3. В: отец (Петр, _) – 82,
4. П: отец (Петр, _) – 35,
- ...
15. П: отец (Петр, _) – 46,
16. У: отец (Петр, Ефим) – 47,
17. В: отец (Ефим, _) – 83,
18. П: отец (Ефим, _) – 35,
- ...
26. П: отец (Ефим, _) – 43,
27. У: отец (Ефим, Анатолий) – 44 у,
28. В: мать (_ , Анатолий) – 84,
29. П: мать (_ , Анатолий) – 54,
- ...
39. П: мать (_ , Анатолий) – 64,
40. У: мать (Татьяна, Анатолий) – 65 у,
41. У: цель () – 85.

Из соответствующих фактов и правил составим противоречие:

$\text{свекор}(\text{Петр}, \text{у}) \vee \text{отец}(\text{Петр}, z) \vee \text{отец}(z, u) \vee \text{мать}(y, u),$

$\text{отец}(\text{Петр}, \text{Ефим}), \text{отец}(\text{Ефим}, \text{Анатолий}), \text{мать}(\text{Татьяна}, \text{Анатолий}) \Rightarrow 0.$

Целевой дизъюнкт нейтрализуется предикатами под номерами 47, 44 и 65, когда переменные принимают конкретные значения: $y = \text{Татьяна}$, $z = \text{Ефим}$, $u = \text{Анатолий}$.

2.2. Используя предикат *супруги(жена, муж)*, описать отношения *теща*, *шурин* и *зять*.

2.3. Записать следующее утверждение в виде правила на Прологе: а) всякий, кто имеет ребенка, - счастлив; б) всякий X , имеющий ребенка, у которого есть сестра, имеет двух детей.

Указание. В случае а) ввести одноаргументное отношение *счастлив*; в случае б) ввести новое отношение *иметь двух детей*.

2.4. Предположим, что прямоугольник представлен термом *прямоугольник*(p_1, p_2, p_3, p_4), где p_1, p_2, p_3, p_4 – упорядоченные вершины прямоугольника. Определить отношение *регулярный*(R), которое имеет место, если R – прямоугольник с вертикальными и горизонтальными сторонами.

Указание. Применить конкретизацию.

2.5. Башня из кубиков может быть описана совокупностью фактов вида *на*(кубик1, кубик2), которые истинны, если кубик1 поставлен на кубик2. Определить предикат *выше*(кубик1, кубик2), который истинен, если кубик1 расположен в башне выше, чем кубик2.

2.6. Написать логическую программу, задающую логическое отношение *fib*(n, F) для определения n -го числа Фибоначчи F .

Указание. Использовать рекурсию.

2.7. Написать определение типа «булева формула».

2.8. Написать программу, распознающую логические формулы в конъюнктивной нормальной форме, то есть формулы, являющейся конъюнкцией дизъюнкций литералов, где литерал – атомарная формула или ее отрицание.

2.9. Написать программу, задающую отношение *negation*(F_1, F_2), которое выполнено, если логическая формула F_2 получается из логической формулы F_1 внесением всех операций отрицания внутрь конъюнкций и дизъюнкций.

2.10. Написать программу приведения логической формулы к конъюнктивной нормальной форме, то есть к конъюнкции дизъюнкций литералов.

Заключение

Практическая значимость и оригинальность метода резолюций определяются следующими его двумя свойствами.

1. Управление движением по дереву «и-или», обычно необходимое при всяком доказательстве, в данном случае отсутствует. Эту функцию выполняет стандартизованный набор дизъюнктов, причем может быть определена простая процедура обработки «выбор + унификация».
2. Гипотезы, предположение и промежуточные предложения играют здесь одну и ту же роль. Доказательства получаются при одновременном движении в двух направлениях: от гипотез к заключениям и от заключений к гипотезам, причем доказательство достигается, когда оба эти пути просмотра встречаются друг с другом.

Существенным недостатком метода резолюций является то, что уже по построению он предназначен только для доказательства теорем, а не получать новые теоремы. К тому же, если предположение не является теоремой, резолюция может привести к построению бесконечного дерева решения. Таким образом, метод резолюций интересен благодаря простоте и систематичности, но применим только для ограниченного числа случаев (доказательство не должно иметь большую глубину, а число потенциальных резолюций не должно быть большим).

Задание студентам для самостоятельной работы

3. Из методической разработки решить задачи с четными номерами.
 1. Подготовиться к практическому занятию по теме «Логика предикатов».

6 ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Учебные цели: Основными целями проведения занятия являются: переход от алгебры высказываний к ее расширению – логике предикатов, привитие первичных навыков использования логических и кванторных операций над предикатами для решения практических задач.

6.1 Учебные вопросы занятия:

1. Нахождение областей истинности предикатов.
2. Доказательство равносильности формул логики предикатов.
3. Применение логики предикатов для записи математических определений и предложений.

Язык логики предикатов является расширением языка логики высказываний. По этой причине расширяется и алфавит, и набор операций. Формулы логики предикатов получают определенную интерпретацию, если указано непустое множество M и заданы истинностные значения каждого из входящих в формулу компонентов. Особый интерес представляют общезначимые формулы (тождества, логические законы), истинностное значение которых равно 1 в любой интерпретации. Поэтому студентам необходимо овладеть достаточно богатым запасом тождеств логики предикатов и уметь их обосновывать при помощи содержательных теоретико-множественных соображений.

6.2 Вопросы для проверки готовности студентов к занятию

1. Что является отличительной особенностью логики предикатов от логики высказываний?
2. Что представляет собой высказывательная форма?
3. Дать определение одноместного предиката, его области определения и множества истинности.
4. Какие предикаты называются тождественно истинными (тождественно ложными)?
5. Каким образом понятие одноместного предиката обобщается на понятие n -местного предиката?
6. Дать определение логических операций над предикатами. Как связаны результаты логических операций над предикатами с множествами истинности исходных предикатов?
7. Дать определение кванторных операций.
8. Сформулировать правило о введении знака отрицания под знак квантора.
9. Дать определение формулы и подформулы логики предикатов.
10. Дать определение равносильных формул логики предикатов.

1. Нахождение областей истинности предикатов

Конъюнкцией одноместных предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется предикат $P(x) \& Q(x)$, который обращается в истинное высказывание тогда и только тогда, когда в истинное высказывание обращается каждый из предикатов $P(x)$ и $Q(x)$.

Если J_P , J_Q , $J_{P \& Q}$ – области истинности предикатов $P(x)$, $Q(x)$ и $P(x) \& Q(x)$ соответственно, то $J_{P \& Q} = J_P \cap J_Q$.

Дизъюнкцией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется предикат $P(x) \vee Q(x)$, который обращается в истинное высказывание для тех и только тех значений переменной x из области определения данных предикатов, для которых хотя бы один из предикатов $P(x)$ или $Q(x)$ обращается в истинное высказывание.

Область истинности $J_{P \vee Q}$ дизъюнкции $P(x) \vee Q(x)$ является множество $J_P \cup J_Q$.

Отрицанием предиката $P(x)$, заданного на множестве M , называется предикат $\bar{P}(x)$, который обращается в истинное высказывание для тех и только тех значений $x \in M$, для которых предикат $P(x)$ обращается в ложное высказывание.

Если J_P – область истинности предиката $P(x)$, $\bar{J}_P$ – дополнение множества J_P до множества M , то областью истинности предиката $\bar{P}(x)$ является множество $\bar{J}_P = M \setminus J_P$.

Импликацией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, заданных на множестве M , называется предикат $P(x) \rightarrow Q(x)$, который обращается в ложное высказывание для тех и только значений $x \in M$, для которых предикат $P(x)$ обращается в истинное высказывание, а предикат $Q(x)$ – в ложное.

Освобождаясь от импликации, легко показать, что областью истинности предиката $P(x) \rightarrow Q(x)$ является множество $J_{P \rightarrow Q} = \bar{J}_P \cup J_Q$.

Определения конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и импликации можно обобщить и на случай многоместных предикатов.

6.3 Задачи

1.1. На множестве $M = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ заданы предикаты:

$A(x) \equiv$ "x не делится на 5";

$B(x) \equiv$ "x – четное число";

$C(x) \equiv$ "x – число простое";

$D(x) \equiv$ "x кратно 3".

Найти области истинности следующих предикатов:

$$1.1.1. A(x) \& B(x);$$

$$1.1.2. B(x) \& C(x);$$

$$1.1.3. B(x) \vee \bar{D}(x);$$

$$1.1.4. A(x) \vee B(x) \vee D(x);$$

$$1.1.5. C(x) \rightarrow A(x);$$

$$1.1.6. D(x) \rightarrow \bar{C}(x);$$

$$1.1.7. (A(x) \& C(x)) \rightarrow \bar{D}(x);$$

$$1.1.8. (A(x) \& D(x)) \rightarrow \bar{C}(x).$$

Ответы:

$$1.1.1. J_{A \& B} = \{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18\};$$

$$1.1.2. J_{B \& D} = \{2\};$$

$$1.1.3. J_{B \vee \bar{D}} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20\};$$

$$1.1.4. J_{A \vee B \vee D} = J_A \cup J_B \cup J_D = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19\} \cup \\ \cup \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \cup \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} = M \setminus \{5\};$$

$$1.1.5. J_{C \rightarrow A} = \bar{J}_C \cup J_A = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\} \cup \\ \cup \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19\} = M \setminus \{5\}.$$

$$1.1.6. J_{D \rightarrow \bar{C}} = \bar{J}_D \cup J_{\bar{C}} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20\} \cup \\ \cup \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20\} = M \setminus \{3\};$$

$$1.1.7. J_{(F \& C) \rightarrow \bar{D}} = \bar{J}_{A \& C} \cup J_{\bar{D}} = \overline{J_A \cap J_C} \cup J_{\bar{D}} = \bar{J}_A \cup \bar{J}_C \cup \bar{J}_D = \\ = \overline{J_A \cap J_C \cap J_D} = M \setminus \{3\};$$

$$\begin{aligned}
 1.1.8. \quad J_{(A \& D) \rightarrow \bar{C}} &= \bar{J}_{A \& D} \cup J_{\bar{C}} = \bar{J}_A \cup \bar{J}_C \cup \bar{J}_D \\
 &= \overline{J_A \cap J_C \cap J_D} = M \setminus \{3\}.
 \end{aligned}$$

1.2. Изобразить на диаграммах Эйлера-Венна области истинности для следующих предикатов:

$$1.2.1. \quad \bar{P}(x) \& \bar{Q}(x);$$

$$1.2.2. \quad (P(x) \rightarrow Q(x)) \vee (R(x) \& \bar{Q}(x));$$

$$1.2.3. \quad P(x) \rightarrow (Q(x) \vee \bar{Q}(x));$$

$$1.2.4. \quad P(x) \& Q(x) \rightarrow \bar{R}(x).$$

1.3. Изобразить на действительной координатной плоскости области истинности предикатов:

$$1.3.1. \quad (x \geq 3) \rightarrow (y < 5);$$

$$1.3.2. \quad \overline{(x > 2)} \& (x < y);$$

$$1.3.3. \quad (x^2 + y^2 < 1) \rightarrow (xy > 0);$$

$$1.3.4. \quad \begin{cases} y > 2x - 4; \\ y < 1/3x + 2; \\ y > -\frac{1}{2}x + 3. \end{cases}$$

2. Доказательство равносильности формул логики предикатов

Квантор всеобщности. Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве M . Тогда под выражением $\forall xP(x)$ понимают высказывание, истинное, когда предикат $P(x)$ обращается в истинное высказывание для каждого элемента $x \in M$, и в ложное – в противном случае.

Квантор существования. Под выражением $\exists xP(x)$ понимают высказывание, которое является истинным в том и только в том случае, когда существует хотя бы один элемент $x \in M$, для которого предикат $P(x)$ обращается в истинное высказывание.

Переменную x в предикате $P(x)$ называют *свободной*, а в выражениях $\forall xP(x)$ и $\exists xP(x)$ – *связанной* переменной. Кванторы $\forall$ и $\exists$ называются *двойственными друг другу*. Знак отрицания можно ввести под знак квантора, заменив квантор двойственным ему квантором.

Предикатные символы от предметных постоянных и переменных, а также переменные высказывания называются *элементарными формулами*. Из элементарных формул с помощью операций конъюнкции, дизъюнкции, отрицания, импликации и связывания кванторами всеобщности и существования можно получать более сложные формулы логики предикатов.

6.4 Задачи

2.1. Какие из следующих выражений (слов) являются формулами логики предикатов? В каждой формуле выделить свободные и связанные переменные.

$$2.1.1. \quad \overline{\exists x \forall z (P(x, y) \rightarrow P(y, z))};$$

$$2.1.2. \quad \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow xR(x, y));$$

$$2.1.3. \quad (p \rightarrow q) \& (\bar{r} \vee \bar{p});$$

- 2.1.4. $P(x) \& \forall x Q(x)$;
 2.1.5. $(P(x) \rightarrow Q(x)) \vee \exists y (\forall y R(y))$;
 2.1.6. $\exists x \forall z (P(x, y) \rightarrow P(y, z))$;
 2.1.7. $p \rightarrow \forall x P(x, y)$;
 2.1.8. $\exists x, y P(x, y)$.

Ответ. Формулами являются 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.6 и 2.1.7. Остальные выражения формулами не являются.

2.2. Вычислить значения формул:

- 2.2.1. $\forall x (P(x) \& Q(x) \rightarrow R(x))$;
 2.2.2. $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y)$,

где $P(x) \equiv$ « x делится на 3», $Q(x) \equiv$ « x делится на 4», $R(x) \equiv$ « x делится на 2» и предикаты определены на множестве натуральных чисел; $P(x, y) \equiv$ «число x меньше числа y » и $P(x, y)$ задан на множестве N^2 .

Ответ: в случае 2.2.1 данная формула принимает значение «истина»; формула 2.2.2 принимает значение «ложь». Во втором случае высказывание $\forall x \exists y P(x, y)$ - истинно, а высказывание $\exists x \forall y P(x, y)$ - ложно, следовательно, вся формула принимает значение «ложь» по определению импликации высказываний.

2.3. Доказать следующие равносильности:

- 2.3.1. $\forall x A(x) \equiv \overline{\overline{\exists x \overline{A(x)}}}$;
 2.3.2. $\exists x A(x) \equiv \overline{\overline{\forall x \overline{A(x)}}}$;
 2.3.3. $c \& \forall x A(x) \equiv c \& A(x)$;
 2.3.4. $c \vee c A(x) \equiv \forall x (c \vee A(x))$;
 2.3.5. $\exists x (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$;
 2.3.6. $\exists x (c \vee A(x)) \equiv c \vee \exists x A(x)$.

В качестве примера докажем равносильность предикатов в 2.3.3. Рассмотрим два случая.

а) Пусть высказывание c – ложно. Тогда для любого x ложными будут высказывания $c \& \forall x A(x)$ и $\forall x (c \& A(x))$. Следовательно, в этом случае обе исходные формулы тождественно ложны.

б) Пусть теперь высказывание c истинно. Тогда, очевидно, значения исходных формул будут целиком зависеть от значений предиката $A(x)$. Если $A(x)$ – тождественно истинный предикат, то будет тождественно истинным и предикат $c \& A(x)$, и, следовательно, будут тождественно истинными высказывания $\forall x A(x)$, $c \& \forall x A(x)$, $\forall x (c \& A(x))$, то есть тождественно истинны исходные формулы. Если же предикат $A(x)$ не тождественно истинный, то будет не тождественно истинным и предикат $c \& A(x)$, а высказывания $\forall x A(x)$, $c \& \forall x A(x)$, $\forall x (c \& A(x))$ будут ложными, то есть ложные значения принимают обе исходные формулы, что в итоге доказывает их равносильность.

2.4. Найти отрицания следующих формул:

- 2.4.1. $\exists x (A(x) \& B(x) \& C(x))$;
 2.4.2. $\forall x (A(x) \vee \exists y B(y))$;
 2.4.3. $\forall x (A(x) \rightarrow \forall y B(y))$;
 2.4.4. $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \& \exists x (S(x) \& R(x))$;
 2.4.5. $\exists x (R(x) \rightarrow R(x))$.

Решим, например, 2.4.2 и 2.4.3.

$$2.4.2. \overline{\forall x(A(x) \vee \exists yB(y))} \equiv \overline{\forall xA(x)} \& \overline{\exists yB(y)} \equiv \exists x\overline{A(x)} \& \overline{\exists yB(y)}.$$

$$\begin{aligned} & \overline{\forall x(A(x) \rightarrow \forall yB(y))} \equiv \exists x(\overline{A(x) \rightarrow \forall yB(y)}) \equiv \exists x(\overline{A(x)} \& \overline{\forall yB(y)}) \equiv \\ 2.4.3. & \equiv \exists x(\overline{A(x)} \& \overline{\exists yB(y)}) \equiv \exists x\overline{A(x)} \& \overline{\exists yB(y)}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались правилом введения отрицания под знак квантора.

2.5. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – два одноместных предиката, определенных на множестве M таких, что высказывание $\exists x(A(x) \rightarrow (\overline{A(x)} \vee (\overline{B(x)} \rightarrow A(x))))$ истинно. Доказать, что высказывание $\forall xA(x)$ ложно.

Доказательство легко проводится методом от противного.

3. Применение логики предикатов для записи математических определений и предложений

3.1. Записать на языке логики предикатов определения:

3.1.1. Линейно упорядоченного множества (множество называется линейно упорядоченным, если для любых элементов этого множества x и y либо $x=y$, либо $x<y$, либо $x>y$).

3.1.2. Ограниченной функции (функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве M , если существует такое неотрицательное число l , что для всех $x \in M$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq l$).

Ответ: 3.1.1. $\forall(x \in M)\forall(y \in M)((x = y) \vee (x > y) \vee (x < y))$.

3.1.2. $\exists(l \in R)\forall(x \in M)(|f(x)| \leq l)$.

3.2. Записать на языке логики предикатов следующие высказывания:

3.2.1. Некоторые действительные числа являются рациональными.

3.2.2. Ни одно простое число не является точным квадратом.

3.2.3. Некоторые четные числа не делятся на 8.

3.2.4. Всякое число, кратное 6, делится на 3.

3.2.5. Числа 5 и 12 не имеют общих делителей, отличных от +1 и -1.

3.2.6. Натуральное число, делящееся на 6, делится на 2 и на 3.

3.2.7. Для любого целого числа x существует такое целое число y , что $x=2y$ или $x=2y+1$.

3.2.8. Для любого натурального числа существует другое натуральное число, которое больше первого.

3.2.9. Существует наименьшее натуральное число.

3.2.10. Не существует такого рационального числа x , что $x^2 - 2 = 0$.

3.2.11. Для всяких целых чисел x и y существует целое число z такое, что $x+y=z$.

3.2.12. Для любых двух рациональных чисел x и y существует рациональное число z такое, что $x<z$ и $z<y$.

Пусть $P(x)$ обозначает « x – простое число», $Q(x)$ – « x – четное число», $R(x)$ – « x – целое число», $D(x, y)$ – « x делит y ». Сформулировать словами следующие высказывания, записанные на языке логики предикатов. Отметить, какие из них истинные и какие ложные:

3.3.1. $\forall xP(x) \rightarrow Q(x)$;

3.3.2. $\forall x(\overline{P(x)} \rightarrow \forall y P(y) \rightarrow \overline{D(z, y)})$;

3.3.3. $\forall x(Q(x) \rightarrow \forall y(D(x, y) \rightarrow Q(y)))$;

3.3.4. $\forall x \exists y(R(x) \& R(y) \rightarrow D(x, y))$;

$$3.3.5. \quad \forall y \forall x (R(x) \& R(y) \rightarrow D(x, y));$$

$$3.3.6. \quad \exists x \forall y (R(x) \& R(y) \rightarrow D(x, y)).$$

Заключение

В результате изучения и исследования цикла задач на логику предикатов, мы фактически совершаем переход на новый уровень абстракции такого типа, какой был совершен в школе – от арифметики вещественных чисел к алгебре числовых функций. Новым здесь по сравнению с алгеброй высказываний и исчислением высказываний является введение кванторных операций. Эти операции широко используются для записи определений и компактной записи доказательства различных теорем

6.5 Задание студентам для самостоятельной работы

Решить задачи №№ 1.1.2, 1.1.6, 1.1.8, 1.2.2, 1.2.3, 1.3.2, 1.3.4, 2.2.2, 2.3.2, 2.3.4, 2.3.6, 2.4.1, 2.4.3, 2.4.5, 2.5, 3.1.2, 3.2.2, 3.2.4, 3.2.6, 3.2.8, 3.2.10, 3.2.12, 3.3.2, 3.3.4, 3.3.6.

Подготовиться к практическому занятию на тему «Построение выводов в исчислении предикатов».

7 ПОСТРОЕНИЕ ВЫВОДОВ В ИСЧИСЛЕНИИ ПРЕДИКАТОВ

Учебные цели: Закрепить при решении задач основные понятия исчисления предикатов как теории, образующей следующую ступень абстракции в построении формальных систем.

7.1 Учебные вопросы занятия:

1. Выполнимость и общезначимость формул логики предикатов.
2. Предваренная, сколемовская и клаузная формы представления формул в исчислении предикатов.

7.2 Вопросы для проверки готовности студентов к занятию

1. Дать определение алфавита исчисления предикатов.
2. Дать индуктивное определение формулы и подформулы исчисления предикатов.
3. Доказать, что выражения $\exists x(F^1(x) \rightarrow \forall y G^2(y, z))$ и $\forall x F^1(x) \vee \forall x \exists y G^2(x, y)$ являются формулами, а выражение $\exists x F^1(x) \& \exists y G^2(x, y)$ формулой не является.
4. Объяснить, почему в формуле свободные и связанные переменные должны обозначаться разными буквами.
5. Почему, если какой-либо квантор находится в области действия другого квантора, то переменные, связанные этими кванторами, следует обозначать разными буквами?
6. Какая формула называется тождественно истинной в исчислении предикатов?
7. Сформулировать аксиомы, специфичные только для исчисления предикатов.
8. Сформулировать для исчисления предикатов основные правила вывода.
9. Сформулировать теорему дедукции в исчислении предикатов.
10. Чем отличаются понятия выполнимой формулы в заданной области от понятия просто выполнимой формулы?
11. Дать определение общезначимых формул логики предикатов.
12. Определить понятия вывода и доказуемых формул в исчислении предикатов.
13. Сформулировать необходимые и достаточные условия общезначимости формулы исчисления предикатов.
14. Определить понятия предваренной, сколемовской и клаузной форм представления формул исчисления предикатов.

Предварительные сведения

Исчисление предикатов, как и всякая аксиоматическая система, содержит символы (алфавит), из которых составляются формулы. Затем среди всех формул выделяются формулы, называемые выводимыми. Выделение выводимых формул в исчислении предикатов так же, как и в исчислении высказываний, осуществляется путем указания некоторой конечной совокупности формул, которые называются аксиомами, и указанием правил вывода, позволяющих из выводимых формул получать новые выводимые формулы.

Определение формулы исчисления предикатов

Каждая формула исчисления предикатов представляет собой некоторую конечную последовательность символов этого исчисления (алфавита). Алфавит исчисления предикатов можно разбить на шесть групп.

1. Малые латинские буквы с индексами или без них: $a, b, c, \dots, x, y, z, \dots, a_1, a_2, \dots, x_1, \dots$. Эти символы носят название *переменных предметов* (предметные переменные).
2. Прописные латинские буквы с индексами внизу или без них: $A, B, \dots, A_1, A_2, \dots$. Эти символы называются *переменными высказываниями*.
3. Прописные латинские буквы с индексами вверх: $F^P, G^P, \dots, S^P, \dots$, и эти же символы с индексами внизу: $F_1^P, F_2^P, \dots, G_1^P, G_2^P, \dots, S_1^P, S_2^P, \dots$. Эти символы носят названия *переменных предикатов* от p переменных ($p = 1, 2, \dots, n$).

4. Знаки операций исчисления высказываний: $\neg, \&, \vee, \rightarrow$.
5. Символы кванторов $\forall, \exists$.
6. Круглые скобки: $(,)$.

Каждая формула является *словом* в алфавите, содержащем указанные выше в п.п. 1-6 символы. Поэтому мы определим, какие слова называются формулами.

1. Каждое переменное высказывание есть формула.
2. Если F^p - символ переменного предиката, $a_1, a_2, \dots, a_p$ - символы предметных переменных, не обязательно различных, то слово $F^p(a_1, a_2, \dots, a_p)$ есть формула. За такими формулами мы сохраним название переменного предиката.

Формулы, определённые в п.п. 1 и 2, мы будем называть *элементарными*.

3. Пусть формула F содержит свободную переменную x . Тогда слова

$$\forall x F, \exists x F \quad (7.1)$$

также являются формулами.

Напомним, что символы $\forall$ и $\exists$, как и в логике предикатов, носят название кванторов: первый – квантор всеобщности, второй - квантор существования. Переменная x в формулах (1) является связанной переменной. Остальные же предметные переменные, которые в формуле F свободны, остаются свободными и в обеих формулах (7.1). Переменные, которые связаны в формуле F , остаются связанными и в формулах (7.1).

4. Пусть F_1 и F_2 - формулы, причём в них нет таких предметных переменных, которые связаны в одной формуле и свободны в другой. Тогда слова

$$(F_1 \& F_2), (F_1 \vee F_2), (F_1 \rightarrow F_2), (\overline{F_1}) \quad (7.2)$$

являются формулами. При этом свободные переменные в формулах F_1 и F_2 остаются свободными во всех формулах (7.2), а связанные переменные в формулах F_1 и F_2 остаются связанными и в формулах (7.2).

Определение формулы исчисления предикатов имеет тот же индуктивный характер, что и определение формул в исчислении высказываний.

Для доказательства каких-либо утверждений о формулах можно применять принцип полной математической индукции по построению формул. А именно, такое доказательство имеет следующий вид. Утверждение доказывается для элементарных формул 1 и 2. Затем доказывается, что из предположения истинности этого утверждения для формулы F следует его истинность для формул $\forall x F$ и $\exists x F$, а из истинности его для формул F_1 и F_2 следует его истинность для формул (2). Отсюда делается заключение, что наше утверждение истинно для любой формулы.

Из определения формулы видно, что все формулы исчисления высказываний являются также формулами исчисления предикатов. В самом деле, в числе формул исчисления предикатов находятся переменные высказывания, и мы можем, исходя из них, образовывать формулы, пользуясь теми же операциями, что и в исчислении высказываний. При этом к формулам, построенным только из переменных высказываний (то есть не включающим символов предикатов), ограничения, указанные в п. 4 определения формулы, не относятся, так как они относятся только к формулам, содержащим предметные переменные.

Как и в исчислении высказываний, условимся вносить некоторые упрощения в записи формул: опускать внешние скобки и некоторые внутренние, если последовательность операций, исходя из их приоритета, не вызывает сомнений; иногда круглые скобки заменяют квадратными; можно в записи F^p опускать верхний индекс p , указывающий количество переменных, если эти переменные указаны явно в формуле F .

Кроме того, из условия 4 индуктивного определения формулы следует, что:

а) в формуле свободные и связанные переменные должны обозначаться разными буквами;

б) если какой-либо квантор находится в области действия другого квантора, то переменные, связанные этими кванторами, также обозначаются разными буквами.

Нарушение условий *a)* и *б)* называется *коллизией* переменных. Например, слово $\forall x(F(x) \rightarrow \exists x G(x, y))$ формулой не является, так как для него нарушено условие *б)*.

Аксиомы исчисления предикатов

Аксиомы исчисления предикатов делятся на две группы:

- 1) Аксиомы исчисления высказываний, состоящих из 11 аксиом и разделенных на четыре группы $I_1, I_2, II_1 - II_3, III_1 - III_3, IV_1 - IV_3$.
- 2) Две предикатные аксиомы:

$$V_1. \quad \forall x F(x) \rightarrow F(y).$$

$$V_2. \quad F(y) \rightarrow \exists x F(x).$$

В аксиомах V_1 и $V_2 F(x)$ – любая формула, содержащая свободные вхождения переменной x , причем ни одно из них не находится в области действия квантора по y ; формула $F(y)$ получена из $F(x)$ заменой всех свободных вхождений переменной x на y .

Чтобы пояснить существенность требования к вхождениям x в формулу F , рассмотрим в качестве формулы $F(x)$ формулу $\exists y P(y, x)$, где это требование нарушено: свободное вхождение x находится в области действия $\exists y$. Подстановка этой формулы в аксиому V_1 дает формулу $\forall x \exists y P(y, x) \rightarrow \exists y P(y, y)$. Если ее проинтерпретировать на множестве N натуральных чисел с предикатом $P(u, v) \equiv \langle u \text{ больше } v \rangle$, то получим высказывание: «если для всякого натурального числа x найдется натуральное число y , большее, чем x , то найдется натуральное число y , большее самого себя». Посылка этой импликации истинна на множестве N , а ее заключение ложно и, следовательно, само высказывание ложно.

Основные правила вывода

1. **Правило заключения(modusponens)**: если G и $G \rightarrow H$ – выводимые формулы, то H – также выводимая формула.

Видим, что это правило формулируется так же, как и в исчислении высказываний, только объем формул, к которым применяется это правило, здесь шире.

2. Правило введения квантора всеобщности:

$$\frac{F \rightarrow G(x)}{F \rightarrow \forall x G(x)},$$

где $G(x)$ содержит свободные вхождения переменной x , а формула F их не содержит.

3. Правило введения квантора существования:

$$\frac{G(x) \rightarrow F}{\exists x G(x) \rightarrow F}$$

при тех же требованиях к формулам F и G , что и в правиле 2.

Нарушения правил 1-3 могут привести к ложным выводам из истинных высказываний. Рассмотрим в подтверждение этого пример.

Пример1. Пусть $P(x)$ – одноместный предикат « x делится на 6», $Q(x)$ – предикат « x делится на 3». Высказывание $P(x) \rightarrow Q(x)$, очевидно, истинно для любого x , однако применение к нему правила введения квантора всеобщности дает высказывание $P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$, не всегда являющееся истинным. Если же к формуле $P(x) \rightarrow Q(x)$ применить правило введения квантора существования, то получим предикат $\exists x P(x) \rightarrow Q(x)$, из которого путем уже корректного) применения правила 3 получим высказывание $\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$, ложное на множестве натуральных чисел.

Заметим, что правило подстановки окончательно исчезло из изложения; тем самым из двух возможных толкований системы аксиом (о чем шла речь в исчислении высказываний) выбрано толкование, при котором правило *подстановки* отсутствует, а вместо аксиом рассматриваются схемы аксиом. Фактически этот выбор произошел уже тогда, когда аксиомы V_1 и V_2 были сопровождаемы словесным описанием ограничений на вхождения переменных. Тем самым аксиомы перестали быть выражениями исчисления, а вместе с этим словесным текстом превратились в *метаописания* множества формул, являющихся аксиомами, то есть в *схемы аксиом*.

Построение исчисления предикатов с правилом подстановки существенно более громоздко из-за необходимости различать свободные и связанные вхождения предметных переменных. Поэтому в большинстве современных книг по логике используется подход со схемами аксиом.

Понятие вывода и доказуемой формулы в исчислении предикатов определяются аналогично этим понятиям в исчислении высказываний. Утверждение о том, что формула F является выводимой в исчислении предикатов, обозначается так же, как и в исчислении высказываний: $\vdash F$.

Так как все формулы, выводимые в исчислении высказываний, являются также выводимыми в исчислении предикатов, то, совершая подстановки в выводимые формулы исчисления высказываний, мы будем получать выводимые формулы исчисления предикатов.

Пример2. Заменяя в выводимой формуле исчисления высказываний $\vdash A \vee \bar{A}$ формулу A формулой $F(x)$, получим выводимую формулу исчисления предикатов $\vdash F(x) \vee \bar{F}(x)$.

Пример3. Заменяя в выводимой формуле $\vdash A \rightarrow A \vee B$ формулу A формулой $F(x)$, формулу B формулой $\forall y G(y)$, получим $\vdash F(x) \rightarrow F(x) \vee \forall y G(y)$.

Подстановкой в выводимые формулы исчисления высказываний можно легко получить многие выводимые формулы исчисления предикатов; однако таким образом всякую выводимую формулу исчисления предикатов вывести нельзя, тем более что мы отказались от правила подстановки в исчислении предикатов, а лишь подразумеваем это правило в схемах аксиом.

В исчислении предикатов часто используется следующее производное правило вывода: если формула $F(x)$, содержащая свободную предметную переменную x , выводима, то и формула $\forall x F(x)$ также выводима в исчислении предикатов.

Итак, если имеет место $\vdash F(x)$, то выводимой будет и формула $\vdash \forall x F(x)$, то есть:

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)}.$$

Это правило называется *производным правилом связывания квантором всеобщности*. Оно применимо к любой предметной переменной.

В исчислении предикатов имеет место теорема, аналогичная теореме дедукции в исчислении высказываний: *если формула G выводима из формулы F , то формула $F \rightarrow G$ также выводима в исчислении предикатов*.

Эта теорема позволяет получать выводимые формулы исчисления предикатов, не производя для них всех операций формальной дедукции, что в значительной степени сокращает непосредственный путь вывода доказуемых формул. Отметим, что доказательство данной теоремы (как и большинства других теорем исчисления предикатов) достаточно сложно и требует специального изучения.

1. Выполнимость и общезначимость формул логики предикатов

Определение1. Формула A логики предикатов называется выполнимой в области M , если существуют значения переменных из области M , входящих в эту формулу, для которых формула A обращается в истинное высказывание.

Определение2. Формула A называется выполнимой, если существует область, на которой эта формула выполнима.

Из определений 1 и 2 следует, что если формула A выполнима, то это еще не означает, что она выполнима в любой области.

Определение3. Формула A называется тождественно истинной на множестве M , если она принимает истинное значение для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к области M .

Определение 4. Формула A называется общезначимой, если она тождественно истинна на любой области.

Из определений 1- 4 следует:

1°. Если формула A общезначима, то она и выполнима на всякой области.

2°. Если формула A тождественно истинна в области M , то она и выполнима в этой области.

3°. Если формула A не выполнима, то она тождественно ложна на всякой области.

Выделяют два класса формул логики предикатов: класс выполнимых и класс невыполнимых формул. Общезначимую формулу называют *логическим законом*.

Пример 4. Формулы $\forall x \exists y P(x, y)$ и $\exists x \exists y (P(x) \& P(y))$ выполнимы: первая является тождественно истинной в области $M = N_0 \times N_0$ (N_0 – множество неотрицательных целых чисел), если в качестве $P(x, y)$ взять предикат « $x < y$ »; вторая – если в качестве $P(x, y)$ взять предикат «Число x – четное» на том же множестве N_0 .

Пример 5. Формула $\forall x (P(x) \vee \overline{P(x)})$ тождественно истинна в любой области M , следовательно, она является общезначимой, то есть является логическим законом (закон исключенного третьего). В то же время формула $\forall x (P(x) \& \overline{P(x)})$ тождественно ложна в любой области M и поэтому невыполнима.

Существуют некоторые критерии, позволяющие определить, общезначима формула или нет. Эти критерии основаны на связи между общезначимостью и выполнимостью формул исчисления предикатов. Эту связь можно выразить двумя следующими теоремами.

Теорема 1. Для того чтобы формула A была общезначима, необходимо и достаточно, чтобы ее отрицание было невыполнимо.

Теорема 2. Для того чтобы формула A была выполнимой, необходимо и достаточно, чтобы ее отрицание было не общезначимо.

7.3 Задачи

1.1. Выполнимы ли следующие формулы:

1.1.1. $\exists x P(x)$;

1.1.2. $\forall x P(x)$;

1.1.3. $\exists x \forall y P(x, y)$;

1.1.4. $\exists x \forall y (Q(x, x) \& \overline{Q(x, y)})$;

1.1.5. $\exists x \exists y (P(x) \& \overline{P(y)})$.

Указание. Для доказательства выполнимости той или иной формулы достаточно найти область определения соответствующих предикатов и такие их значения, что в этой области формула принимает истинные значения.

1.2. Являются ли тождественно истинными следующие формулы:

1.2.1. $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$;

1.2.2. $\overline{\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)}$;

1.2.3. $\exists x \forall y Q(x, x) \rightarrow \forall y \exists x Q(x, y)$;

1.2.4. $\forall x \exists y Q(x, y) \rightarrow \exists y \forall x Q(x, y)$.

Ответ: Формула 1.2.1 представляет собой закон исключенного третьего, следовательно, эта формула тождественно истинна. Очевидно, что формула 1.2.2 – тождественно ложна. Формула 1.2.3 тождественно истинна, например, на множестве N^2 , если в качестве $Q(x, y)$ взять отношение « $y < x$ ». Формула 1.2.4 тождественно истинная на любом множестве.

1.3. Доказать, что следующие формулы не являются общезначимыми:

1.3.1. $(\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y))$;

1.3.2. $\exists x (P_1(x) \rightarrow P_2(x)) \rightarrow (\exists x P_1(x) \rightarrow \exists x P_2(x))$.

1.4. Какие из нижеприведенных формул являются общезначимыми:

1.4.1. $\exists x (P_1(x) \& P_2(x)) \rightarrow (\exists x P_1(x) \& \exists x P_2(x))$;

1.4.2. $\forall x (U(x) \rightarrow V(x)) \rightarrow (\forall x U(x) \rightarrow \forall x V(x))$;

1.4.3. $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$;

1.4.4. $\exists x P(x) \& (r \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x (P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \overline{r})$.

Ответ: Используя равносильные преобразования можно доказать, что формулы 1.4.1 и 1.4.4 являются тождественно истинными на любом множестве и, следовательно, являются общезначимыми, чего нельзя сказать о формулах 1.4.2 и 1.4.3.

2. Предваренная, сколемовская и клаузная формы представления формул исчисления предикатов

В алгебре высказываний были введены дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы, которые позволяют упрощать многие доказательства в алгебре высказываний. Проблемы, возникающие в логике предикатов при оперировании с кванторами и областями действия кванторов, бывают достаточно сложными. В частности, к некоторым трудностям может привести наличие в формуле одновременно связанной и свободной одной и той же переменной. Поэтому в исчислении предикатов путем тождественных преобразований данную формулу также приводят к более простому или стандартному виду - к *нормальной* форме. Говорят, что *формула логики предикатов имеет нормальную форму, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам*. Среди нормальных форм логики предикатов большое значение имеют *предваренные нормальные формы*. В них кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо используются после всех операций алгебры высказываний. Дадим строгое определение предваренной формы.

Определение 5. **Предваренной формой** формулы исчисления предикатов называется формула $F \equiv K_1 x_1 K_2 x_2 \dots K_n x_n R$, где K_i – один из двух кванторов, x_i – переменные, входящие в формулу F , ($i = \overline{1, n}$), R – формула, не содержащая кванторов. Выражение $K_1 x_1 K_2 x_2 \dots K_n x_n$ называется **префиксом** формулы F , а формула R – ее **матрицей**.

Теорема 3. Для любой формулы исчисления предикатов существует логически эквивалентная ей предваренная нормальная форма.

Можно предложить следующий алгоритм приведения формулы исчисления предикатов к предваренной нормальной форме, основанный на использовании законов логики.

1. Исключить из данной формулы все импликации (если они присутствуют в формуле) по закону: $P \rightarrow Q \equiv \overline{P} \vee Q$. Тем самым данная формула преобразуется к нормальной форме.

2. Уменьшить объем действия операции отрицания так, чтобы символ отрицания был применен не более чем к одной предикатной букве. Для этого следует использовать правила построения отрицаний формул, содержащих кванторы, а также законы де Моргана и закон двойного отрицания:

$$\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)};$$

$$\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)};$$

$$\overline{P \& Q} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q};$$

$$\overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \& \overline{Q};$$

$$\overline{\overline{P}} \equiv P.$$

3. Переименовать, если это необходимо, связанные переменные так, чтобы в области действия каждого квантора каждая связанная им переменная имела бы индивидуальное имя, а имена свободных и связанных переменных не совпадали. Это можно сделать, так как имя связанной квантором переменной не влияет на значение формулы, например:

$$\forall x U(x, y) \& \exists x V(x, y) \vee U(x) \equiv \forall x U(x, y) \& \exists z V(z, y) \vee U(m).$$

4. Удалить кванторы, если область их действия не содержит переменной, связываемой квантором, например: $\forall x \exists z P(x, y, z) \equiv \forall x P(x, y, c)$.

5. Переместить кванторы в начало формулы, например:

$$\forall x P(x) \& \forall x Q(x) \equiv \forall x (P(x) \& Q(x)); \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \equiv \exists x (P(x) \vee Q(x)).$$

6. Если P – формула, не содержащая свободной переменной x , то будут иметь место следующие эквивалентности:

$$P \& \forall x Q(x) \equiv \forall x (P \& Q(x)); P \& \exists x Q(x) \equiv \exists x (P \& Q(x)).$$

Требуемый алгоритм построен. Разумеется, что в процессе приведения формулы к предваренной нормальной форме некоторые шаги рассмотренного выше алгоритма могут быть опущены за ненадобностью.

Пример5. Привести к предваренной нормальной форме формулу

$$F \equiv \forall x (P(x) \rightarrow (\forall y (P(y) \rightarrow P(g(x, y))) \& \forall y (Q(x, y) \rightarrow P(y)))).$$

Решение. 1. Избавимся в формуле F от импликаций:

$$F \equiv \forall x (\overline{P(x)} \vee (\forall y (\overline{P(y)} \vee P(g(x, y))) \& \forall y (\overline{Q(x, y)} \vee P(y)))).$$

2. Уменьшим объем действия операции отрицания:

$$F \equiv \forall x (\overline{P(x)} \vee (\forall y (\overline{P(y)} \vee P(g(x, y))) \& \exists y (Q(x, y) \& \overline{P(y)}))).$$

3. Переименуем связанную квантором существования переменную y на z :

$$F \equiv \forall x (\overline{P(x)} \vee (\forall y (\overline{P(y)} \vee P(g(x, y))) \& \exists z (Q(x, z) \& \overline{P(z)}))).$$

4. Перемещая кванторы в начало формулы согласно п.5 алгоритма, получим искомую нормальную предваренную форму формулы F :

$$F \equiv \forall x \forall y \exists z (\overline{P(x)} \vee ((\overline{P(y)} \vee P(g(x, y))) \& (Q(x, z) \& \overline{P(z)}))).$$

Определение6. Формула логики предикатов называется **замкнутой**, если она не содержит свободных предметных переменных.

Одна и та же формула исчисления предикатов допускает много эквивалентных предваренных форм. Вид полученного результата зависит от порядка применения правил, а также от произвольного переименования переменных (шаг 3 алгоритма). Тем не менее, предваренные и нормальные формы сохраняют всю выразительную силу исчисления предикатов. В частности, существует связь между общезначимостью формулы логики предикатов и ее предваренной нормальной формой. Эта связь выражается следующими двумя утверждениями, которые можно доказать методом от противного.

1. Если замкнутая формула логики предикатов в предваренной нормальной форме содержит только кванторы существования и тождественно истинна на любой области, состоящей из одного элемента, то она общезначима.

2. Если замкнутая формула логики предикатов в предваренной нормальной форме содержит только кванторы всеобщности и тождественно истинна на любой области, состоящей из элементов, число которых не превышает числа переменных, входящих в данную формулу, то она общезначима.

Работать с формулами, содержащими кванторы, гораздо трудней, чем с бескванторными. Т. А. Сколем (1887 – 1963) в 1928 г. предложил метод замены в формулах кванторов некоторыми функциональными символами. Без ограничения общности можно рассматривать только предваренные формы, так как по теореме 3 любая формула может быть пре-

образована в эквивалентную ей предваренную форму. Более того, достаточно оперировать с замкнутыми формулами. Суть метода Сколема сводится к следующему рассуждению.

Пусть, например, $F \equiv \exists x \forall y \exists z \forall u \forall v \exists w P(x, y, z, u, v, w)$ - замкнутая формула исчисления предикатов. Обозначим значение переменной x , которое существует в соответствии с первым квантором, предметной константой, например, буквой a , отбросив при этом первый квантор существования в формуле F . В результате получим формулу

$$F_1 \equiv \forall y \exists z \forall u \forall v \exists w P(a, y, z, u, v, w).$$

Тот факт, что по каждому значению переменной y может быть найдено значение переменной z , может быть выражен некоторой функцией $z = f(y)$, называемой *сколемовской*. Тогда формула F_1 преобразуется в формулу

$$F_2 \equiv \forall y \forall u \forall v \exists w P(a, y, f(y), u, v, w).$$

Тот факт, что для любых значений переменных y, u и v найдется значение переменной z , можно выразить другой сколемовской функцией $w = g(y, u, v)$, которая в предыдущей формуле подставляется вместо переменной w :

$$F_3 \equiv \forall y \forall u \forall v P(a, y, f(y), u, v, g(y, u, v)).$$

Так как по условию все переменные, входящие в формулу F должны быть связаны кванторами, кванторы существования исключены, а порядок следования кванторов всеобщности роли не играет при вычислении значения формулы, то отбрасывают и кванторы всеобщности, *предполагая*, что все переменные ими связаны. В итоге мы и получим сколемовскую форму представления данной формулы F : $S_F \equiv P(a, y, f(y), u, v, g(y, u, v))$.

Так, для формулы примера 5 ее сколемовская форма имеет вид

$$S_F \equiv \overline{P(x)} \vee ((\overline{P(y)} \vee P(g(x, y))) \& (Q(x, h(x)) \& \overline{P(h(x))})),$$

где $z = h(x)$ - сколемовская функция.

Итак, мы сопоставили формуле F формулу S_F более простого строения с гарантией, что формулы F и S_F либо обе выполнимы, либо обе невыполнимы. Эта связь между формулами F и S_F слабее, чем логическая эквивалентность, но она очень полезна при доказательстве того, что некоторое заключение является логическим следствием данных гипотез.

Определение 7. **Клаузуальной** формой формулы исчисления предикатов называется ее сколемовская форма, у которой матрица представлена в виде конъюнктивной нормальной формы, то есть в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций. Любая сколемовская форма допускает эквивалентную ей клаузуальную форму.

Используя дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции, приведем сколемовскую форму S_F примера 5 к конъюнктивной нормальной форме. В результате получим клаузуальную форму S функции S_F

$$S = (\overline{P(x)} \vee \overline{P(y)} \vee P(g(x, y))) \& (\overline{P(x)} \vee Q(x, h(x))) \& (\overline{P(x)} \vee \overline{P(h(x))}),$$

которую, заменяя символ конъюнкции запятой, записывают в виде так называемого множества *дизъюнктов*:

$$S = \{ \overline{P(x)} \vee \overline{P(y)} \vee P(g(x, y)), \overline{P(x)} \vee Q(x, h(x)), \overline{P(x)} \vee \overline{P(h(x))} \}.$$

Содержательный смысл формул, выводимых в исчислении предикатов, показывает, что эти формулы представляют собой тождественно истинные высказывания, то есть логические тавтологии. Обратно, каждая тождественно истинная формула является выводимой в исчислении предикатов. Отсюда следует, что в исчислении предикатов нельзя вывести никакое сколько-нибудь содержательное по существу высказывание, в частности, математическое. Однако если к аксиомам исчисления предикатов присоединить какие-либо не выводимые формулы в качестве новых аксиом (сохраняя те же правила вывода), то полу-

чится другое исчисление, в котором выводимы, помимо тождественно истинных формул, и другие формулы.

7.4 Задачи

Привести к предваренной нормальной форме следующие формулы логики предикатов:

$$2.1.1. F \equiv \overline{\exists x \forall y \exists z \forall u P(x, y, z, u)};$$

$$2.1.2. F \equiv \overline{\forall x R(x)} \vee \exists x Q(x, y);$$

$$2.1.3. F \equiv \overline{p \rightarrow \exists x R(x)};$$

$$2.1.4. F \equiv \forall x (A(x) \rightarrow \exists y C(y));$$

$$2.1.5. F \equiv \exists x \forall y P(x, y) \& \exists x \forall y Q(x, y);$$

$$2.1.6. F \equiv \exists x \forall y P(x, y) \vee \exists x \forall y Q(x, y).$$

Ответ: 2.1.1. $\forall x \exists y \forall z \exists u \overline{P(x, y, z, u)}$; 2.1.2. $\exists x (\overline{R(x)} \vee Q(x, y))$;

2.1.3. $\forall x (p \& \overline{R(x)})$; 2.1.4. $\forall x \exists y (\overline{A(x)} \vee C(y))$;

2.1.5. $\exists x \exists z \forall y (P(x, y) \& Q(z, y))$; 2.1.6. $\exists x \forall y \forall z (P(x, y) \vee Q(x, z))$.

2.2. Доказать выводимость следующих формул в исчислении предикатов

$$2.2.1. F(x) \vee \overline{F(x)};$$

$$2.2.2. F(x) \rightarrow F(x) \vee \forall y G(y).$$

Указания. 2.2.1. Заменяя в выводимой формуле исчисления высказываний $\vdash A \vee \overline{A}$ формулу A на $F(x)$, получим выводимую формулу исчисления предикатов $\vdash F(x) \vee \overline{F(x)}$.

2.2.2. Заменяя в выводимой формуле $\vdash A \rightarrow A \vee B$ формулу A формулой $F(x)$, формулу B формулой $\forall y G(y)$, получим $\vdash F(x) \rightarrow F(x) \vee \forall y G(y)$.

В аксиомах и формулах исчисления высказываний и исчисления предикатов мы нигде не использовали операцию эквиваленции. Однако во многих случаях встречаются формулы вида $(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x)$, которые мы для краткости будем обозначать символом эквиваленции, то есть $(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x) \equiv x \leftrightarrow y$. Кроме того, введем понятие секвенции: *секвенциями* называются выражения вида $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ (читается: из формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ следует формула B или формула B - доказуема). Здесь $n > 0$, а $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ - произвольные формулы исчисления предикатов (или исчисления высказываний). Секвенция называется выводимой в исчислении предикатов, если существует вывод из конечной последовательности секвенций.

2.3. Пусть переменная x не входит свободно в формулу A . Доказать выводимость следующих секвенций:

$$2.3.1. \vdash (\forall x A \leftrightarrow A);$$

$$2.3.2. \vdash (\exists A \leftrightarrow A);$$

$$2.3.3. \vdash (\forall x \forall y B(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x B(x, y));$$

$$2.3.4. \vdash (\exists x \exists y B(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x B(x, y));$$

$$2.3.5. \vdash (\forall x \forall y B(x, y) \rightarrow \forall x B(x, x));$$

$$2.3.6. \vdash (\exists x B(x, x) \rightarrow \exists x \exists y B(x, y)).$$

2.4. Доказать, что выводимы секвенции:

$$2.4.1. (A \leftrightarrow B) \vdash (\overline{A} \leftrightarrow \overline{B});$$

2.4.2. $(A \leftrightarrow B) \vdash \neg((A \& C) \leftrightarrow (B \& C));$

2.4.3. $(A \leftrightarrow B) \vdash \neg((A \vee C) \leftrightarrow (B \vee C));$

2.4.4. $(A \leftrightarrow B) \vdash \neg((A \rightarrow C) \leftrightarrow (B \rightarrow C)).$

2.5. Доказать выводимость следующих формул в исчислении предикатов:

2.5.1. $F(x) \vee \bar{F}(x);$

2.5.2. $F(x) \rightarrow F(x) \vee \forall y G(y).$

Указания. 2.5.1. Заменить в выводимой формуле исчисления высказываний $\vdash A \vee \bar{A}$ формулу A формулой $F(x)$. 2.5.2. Заменить в выводимой формуле $\vdash A \rightarrow A \vee B$ формулу A формулой $F(x)$, формулу B формулой $\forall y G(y)$.

2.6. Построить выводы, соответствующие следующим рассуждениям (легендам):

2.6.1. Ни один торговец наркотиками не является наркоманом. Некоторые наркоманы привлекались к ответственности. Следовательно, некоторые люди, привлекавшиеся к ответственности, не являются торговцами наркотиками.

2.6.2. Все рациональные числа являются действительными числами. Некоторые рациональные числа являются целыми числами. Следовательно, некоторые действительные числа являются целыми числами.

Указание. Данные рассуждения следует формализовать (построить *клаузы*). Далее, используя аксиомы и правила вывода исчисления предикатов, построить вывод заключения из данных посылок, записывая последовательно все шаги доказательства.

Заключение

Подстановкой в выводимые формулы исчисления высказываний можно легко получить многие выводимые формулы исчисления предикатов; однако таким образом всякую выводимую формулу исчисления предикатов вывести нельзя, тем более что мы отказались от правила подстановки в исчислении предикатов, а лишь подразумеваем это правило в схемах аксиом.

7.5 Задание студентам для самостоятельной работы

1. Решить из методической разработки задачи №№1.1.2, 1.1.4, 1.2.2, 1.2.4, 1.3.2, 1.4.2, 1.4.4, 2.1.2, 2.1.4, 2.1.6, 2.2.2, 2.3.2, 2.3.4, 2.3.6, 2.4.2, 2.4.4, 2.5.2, 2.6.2.
2. Подготовиться к практическому занятию на тему «Модели теорий первопорядковой логики».

8 МОДЕЛИ ПЕРВОПОРЯДКОВОЙ ЛОГИКИ

Учебные цели: Расширить и углубить основные концепции построения теорий первого порядка. Получить первичные навыки изучения свойств объектов в конкретных математических теориях из линейной и общей алгебры, арифметики натуральных чисел с помощью специальных аксиом.

8.1 Учебные вопросы занятия:

1. Теории с равенством и частичного упорядочения
2. Теория групп, колец и полей
3. Теория натуральных чисел
4. Теория векторных пространств

8.2 Вопросы для проверки готовности студентов к занятию

1. Определить понятия алфавита языка теории первого порядка, слова в этом алфавите, равенства слов, множества выражений теории.
2. Дать определение сигнатуры языка теории первого порядка.
3. Сформулировать индуктивное определение терма и формулы теории первого порядка.
4. Привести примеры содержательных математических теорий первого порядка.
5. Сформулировать правило заключения и правило связывания квантором всеобщности теории первого порядка.
6. Что называется доказательством в теории первого порядка? А теоремой?
7. Что понимают под интерпретацией языка теории первого порядка?
8. Доказать, что если Γ - множество аксиом теории T сигнатуры σ , M - алгебраическая система сигнатуры σ , в которой истинны все формулы из множества Γ , то во множестве M истинны все теоремы теории T .

Указание. Применить индукцию по длине вывода из множества Γ .

9. Доказать, что если все аксиомы теории T истинны в некоторой алгебраической системе M , то существует модель теории T .

Указание. Пусть в системе $M = \langle M; \sigma \rangle$ истинны все аксиомы теории T . Положим $x \sim y \Leftrightarrow M \models (x = y)$, где символом $\sim$ обозначено бинарное отношение. Надо доказать, что $\sim$ является отношением эквивалентности во множестве M . Тогда фактормножество $M / \sim$ и будет требуемой моделью.

Предварительные сведения

В алгебре высказываний и в исчислении высказываний использование таблиц истинности давало эффективный способ решения вопроса о том, является ли данная формула тавтологией (тождественно истинной) или нет. В логике предикатов нет эффективного способа, позволяющего для каждой формулы решить вопрос о том, является ли она общезначимой или нет (кроме частных случаев). В связи с этим, в математических теориях, которые используют понятие предиката и связанные с ним понятия кванторных операций, необходимым становится аксиоматический метод. Этот метод базируется на простых отношениях между символами и выражениями точных формальных языков и использует достаточно простые арифметические методы.

Под аксиоматической теорией, построенной на основе данной системы аксиом, понимается совокупность всех теорем, доказываемых на основе этой системы аксиом.

Аксиоматические теории делятся на формальные и неформальные теории.

Неформальные аксиоматические теории наполнены теоретико-множественным содержанием, понятие выводимости в них довольно расплывчато и в значительной степени опирается на здравый смысл.

Формальная аксиоматическая теория считается определенной, если выполнены следующие условия:

Задан язык теории.

Определено понятие формулы в этой теории.

Выделено некоторое множество формул, называемых аксиомами.

Определены правила вывода в этой теории.

Здесь под языком теории понимается множество всех слов теории над заданным алфавитом вместе с этим алфавитом.

Содержательный смысл формул, выводимых в исчислении предикатов, показывает, что эти формулы представляют собой тождественно истинные высказывания, то есть логические тавтологии. Обратно, каждая тождественно истинная формула является выводимой в исчислении предикатов. Отсюда следует, что в исчислении предикатов нельзя вывести никакое сколько-нибудь содержательное по существу высказывание, в частности, математическое. Однако если к аксиомам исчисления предикатов присоединить какие-либо невыводимые формулы в качестве новых аксиом (сохраняя те же правила вывода), то получится другое исчисление, в котором выводимы, помимо тождественно истинных формул, и другие формулы.

Среди многочисленных математических теорий выделяют так называемые теории первого порядка. Они отличаются от теорий высших порядков тем, что не допускают в своем изложении предикатов, которые имеют в качестве возможных значений своих аргументов другие предикаты. Кроме того, они не допускают кванторных операций над предикатами. Исчисление предикатов является примером теории первого порядка. В исчислениях второго порядка возможны, например, кванторы по предикатам, то есть выражения вида $\forall P(P(x))$. Приложения таких исчислений встречаются гораздо реже.

Теорий первого порядка в принципе достаточно для описания большинства математических теорий. Большинство теорий высших порядков может быть сведено к теориям первого порядка.

Теории первого порядка относят и к прикладным исчислениям, характеризующимся тем, что в них к логическим аксиомам добавляются собственные аксиомы. В собственных аксиомах, как правило, участвуют конкретные (индивидуальные) предикатные буквы (например, $=$, $<$), функциональные буквы ($+$, $\cdot$, $-$) и предметные константы (например, натуральные числа, пустое множество в теории множеств и т. п.).

Ценность всякой формальной теории, в конечном счете, определяется ее способностью описывать какие-то объекты и связи между ними. Поэтому одним из первых вопросов для любой теории является вопрос: для описания каких объектов пригодна данная теория? Конечно, если ставить его как общую проблему соответствия научных знаний о мире самому миру, то он не может обсуждаться средствами лишь математики (поскольку математика, в отличие от естественных наук, имеет дело не непосредственно с миром, а с формальным описанием его различных фрагментов) и становится фундаментальной проблемой философии и методологии науки. Эта проблема выходит далеко за рамки нашей дисциплины. Речь у нас идет о более простом случае, когда множество объектов, для которого строится формальная теория, само по себе представляет достаточно строго описанный предмет исследований. Более точно, проблема адекватности формальной теории и описываемых ею объектов рассматривается как математическая задача о соответствии между содержательно построенной теорией и множеством высказываний об этой теории, построенном как формальное значение исчислений. Поэтому большое значение имеет задание значений (смысла) математических выражений (символов, формул и т.д.), то есть интерпретация теории.

Введем основные понятия формальных аксиоматических теорий первого порядка. К этим понятиям относятся понятия алфавита, языка теории, сигнатуры языка, терма и формулы.

Определение 1. Алфавитом A языка теории первого порядка называется непустое конечное множество символов, называемых буквами.

Определение 2. Словом в алфавите A называется всякая конечная последовательность букв алфавита A . Пустая последовательность букв называется пустым словом.

Пустое слово мы условимся обозначать символом Λ .

Определение 3. Два слова $a_1a_2\dots a_n$ и $b_1b_2\dots b_k$ в алфавите A называются равными, если $k = n \wedge \forall i (a_i = b_i)$, $i = \overline{1, n}$. В этом случае пишут $a_1a_2\dots a_n = b_1b_2\dots b_k$. Число n называется длиной слова.

Определение 4. Пусть T - некоторая теория. Обозначим через $A(T)$ алфавит этой теории. Множество $A^*(T)$ слов алфавита $A(T)$ называется множеством выражений теории T .

Определение 5. Языком теории T называется пара $\langle A(T), A^*(T) \rangle$.

Языки первого порядка обслуживают теории первого порядка. В алфавит всякой теории T первого порядка входят по существу те же символы, что и при построении исчисления предикатов.

Определение 6. Множество предикатных букв (или предикатных переменных) $F_1^p, F_2^p, \dots, S_1^p, S_2^p, \dots$ вместе с переменными высказываниями и значениями предметных переменных (констант) называется сигнатурой языка данной теории и является его специфической частью.

Различные теории первого порядка могут отличаться друг от друга по составу букв в алфавите и сигнатурой.

Дальнейшее описание теории первого порядка T требует индуктивных определений термина и формулы. Термы и формулы – это два класса слов множества $A(T)$.

Определение 7 (индуктивное определение термина).

1. Предметные переменные и константы являются термами.
2. Если $r_1, r_2, \dots, r_n$ - термы и A – символ n -местной операции, то

$A_i^n(r_1, r_2, \dots, r_n)$ – терм.

3. Никаких других термов, кроме термов, перечисленных в п.п. 1 и 2, в теории T нет.

Согласно естественному истолкованию (интерпретации) терм – это имя некоторого предмета. Кроме переменных и предметных констант, термами являются цепочки, образованные из переменных и предметных констант посредством символов операций, так как в подразумеваемом истолковании термина он понимается как значение некоторой функции.

Определение 8 (индуктивное определение формулы).

1. Если A – предикат или функция, а $r_1, r_2, \dots, r_n$ - термы, то $A(r_1, r_2, \dots, r_n)$ - формула. В частности, если A переменный предикат, то $A_i^n(r_1, r_2, \dots, r_n)$ называется элементарной формулой.

2. Если A и B – формулы, то $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(\bar{A})$ - формулы.

3. Если A - формула, а y - предметная переменная, свободная в A или не содержащаяся в формуле A , то выражения $\forall y A$, $\exists y A$ – формулы. При этом A называется областью действия квантора.

4. Никаких других формул, кроме перечисленных в п.п. 1-3, нет.

Аксиомы теории первого порядка T разбиваются на два класса: логические аксиомы и специальные (специальные аксиомы еще называют собственными аксиомами теории T).

Логические и специальные аксиомы

Каковы бы ни были формулы A , B и C теории T , следующие формулы являются схемами логических аксиом теории T :

$$A \rightarrow (B \rightarrow A), \quad (8.1)$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)), \quad (8.2)$$

$$(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow ((\bar{B} \rightarrow A) \rightarrow B), \quad (8.3)$$

$$\forall x_i A(x_i) \rightarrow A(t), \quad (8.4)$$

где $A(x_i)$ есть формула теории T , а t - терм этой теории, свободный в формуле $A(x_i)$.

Отметим, что t может и совпадать с x_i . И тогда мы приходим к аксиоме

$$\forall x_i A(x_i) \rightarrow A(x_i).$$

$$\forall x_i (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x_i B), \quad (8.5)$$

если x_i не входит свободно в формулу A .

Специальные аксиомы не могут быть сформулированы в общем случае, так как они меняются от теории к теории.

Теория первого порядка, не содержащая собственных аксиом, очевидно, представляет собой чисто логическую теорию. Она носит название исчисления предикатов первого порядка. Заметим, что исчисление предикатов, как и исчисление высказываний, может быть построено не обязательно на тех системах аксиом, которые мы сформулировали при изучении этих вопросов. Эти исчисления могут быть построены на других системах аксиом со значительно меньшим их числом. Теория первого порядка является сужением исчисления предикатов на ту или иную заданную область. Аксиоматическая система любой конкретной теории получается присоединением специфических для этой теории аксиом к адекватной полной аксиоматической системе исчисления предикатов. Это вовсе не означает, что теорема исчисления предикатов остается теоремой в рассматриваемой теории, так как язык этой теории, вообще говоря, более ограничен, чем язык исчисления предикатов. Очень часто он располагает лишь конечным числом различных предикатных и функциональных констант.

К созданию и развитию формальной или неформальной теории могут приводить различные причины. В большинстве случаев теорию разрабатывают для отражения каких-то реальных объектов и их свойств. Тогда цель теории состоит в том, чтобы из множества истинных выражений (формул), принятых за аксиомы данной теории, вывести другие истинные факты (формулы, выражения) этой теории.

Правила вывода и понятие доказательства в теории первого порядка, теорема дедукции

В число правил вывода теории первого порядка входит два правила:

1. Правилозаключения (modus ponens):

$$\frac{\vdash A, \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}. \quad (8.6)$$

2. Правило связывания квантором всеобщности (или правило обобщения):

$$\frac{\vdash A}{\vdash \forall x A}. \quad (8.7)$$

В аксиоматической теории понятие истинного высказывания имеет смысл лишь в связи с возможными приложениями этой теории.

Определение 9. Доказательством в теории T называется конечная последовательность $S_1, S_2, \dots, S_k$ высказываний теории T , каждое из которых либо является аксиомой, либо выводится из предыдущих высказываний этой последовательности по логическим правилам вывода.

Определение 10. Теоремой или доказуемым высказыванием называется высказывание, являющееся последним высказыванием некоторого доказательства.

Ясно, что любая аксиома является теоремой, причем ее доказательство состоит из одного шага.

В основе многих доказательств лежит уже знакомая нам теорема дедукции, которую мы рассматривали и в исчислении высказываний и в исчислении предикатов, но в теориях

первого порядка теорема дедукции имеет место в несколько ослабленной форме. Прежде, чем формулировать теорему дедукции для теорий первого порядка, уточним понятие вывода из совокупности формул. Понятие вывода из совокупности формул в исчислении высказываний можно обобщить на случай теорий первого порядка с двумя оговорками.

Рассмотрим совокупность формул $\{G, A\}$ и вывод $F_1, F_2, \dots, F_m$ из этой совокупности. Будем считать, что формула F_k , где $1 \leq k \leq m$, зависит от формулы A в этом выводе в двух случаях:

- 1) формула F_k совпадает с формулой A и она включена в вывод как формула, содержащаяся в совокупности $\{G, A\}$;
- 2) формула F_k получена по правилам заключения и связывания квантором всеобщности, сформулированным в начале этого пункта, из формул, предшествующих ей в выводе, из которых, по крайней мере, одна зависит от формулы A .

Теорема дедукции. Пусть $G, A \vdash F$ и при этом пусть существует такой вывод F из совокупности формул $\{G, A\}$, в котором ни при каком применении правила связывания квантором всеобщности к формулам, зависящим в этом выводе от A , не связывается квантором никакая свободная переменная, входящая в A . Тогда $G \vdash A \rightarrow F$.

Условия теоремы дедукции слишком громоздки, поэтому на практике часто бывают полезными более слабые следствия.

Следствие 1. Если $G, A \vdash F$ и существует вывод, построенный без применения правила (5) к свободным переменным формулы A , то $G \vdash A \rightarrow F$.

Следствие 2. Если формула A замкнута и $G, A \vdash F$, то $G \vdash A \rightarrow F$.

Рассмотрим пример. Убедиться, что $\vdash \forall x \forall y A \rightarrow \forall y \forall x A$. Действительно, формула $\forall x \forall y A$, как гипотеза, доказуема. По схеме аксиом (4) доказуемой является формула $\forall x \forall y A \rightarrow \forall y A$. Тогда по правилу *modusponens* получим $\vdash \forall y A$ и, снова применяя схему аксиом (4), получим доказуемость формулы $\forall y A \rightarrow A$. Снова применяя правило *modusponens*, получим $\vdash A$, а по правилу (5.7) сначала получим $\vdash \forall x A$, затем $\vdash \forall x \forall y A$. В результате всех этих рассуждений мы имеем $\forall x \forall y A \vdash \forall y \forall x A$, при этом в построенном выводе мы ни при одном применении правила (7) не связывается свободная переменная формулы $\forall x \forall y A$, поэтому, на основании следствия 1, $\vdash \forall x \forall y A \rightarrow \forall y \forall x A$, что и требовалось.

Понятия интерпретации и модели теории. Изоморфизм интерпретаций

Подинтерпретацией теории T понимаются всякую систему, включающую в себя:

- 1) Непустое множество M , называемое *областью интерпретации*.
- 2) Какое-либо соответствие f , которое каждому элементу языка теории T сопоставляет единственный элемент множества M : $\langle A(T), A^*(T) \rangle \rightarrow M$.

В частности, каждой предикатной букве $A_j^n \in \langle A(T), A^*(T) \rangle$ ставит в соответствие некоторые n -местное отношение во множестве M ; каждой функциональной букве $f_j^n \in \langle A(T), A^*(T) \rangle$ ставится в соответствие некоторая n -местная операция в M , то есть функция $M^n \rightarrow M$; каждой предметной переменной x – некоторый элемент из множества M .

Всякая формула без свободных переменных представляет собой высказывание, которое истинно или ложно, а всякая формула со свободными переменными выражает некоторое отношение на области интерпретации. Это отношение может быть истинным для одних значений переменных из области интерпретации и ложно для других.

Пусть задана некоторая интерпретация теории T с областью M , а G – множество всех счетных последовательностей элементов из M .

С помощью последовательности $S = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots) \in G$ определим индуктивно функцию S^* , отображающую все термы во множество M , следующим образом:

если терм t – предметная постоянная, то $S^*(t) = b_i$;

если терм t – предметная константа, то $S^*(t)$ совпадает с интерпретацией этой константы во множестве M ;

если f_j^n – функциональная буква, интерпретируемая как операция g в M , и $t_1, t_2, \dots, t_n$ – термы, то $S^*(f_j^n(t_1, t_2, \dots, t_n)) = g(S^*(t_1), S^*(t_2), \dots, S^*(t_n))$.

Проще говоря, для любой последовательности $S = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ и для любого терма t $S^*(t)$ есть элемент множества M , который получается в результате подстановки при каждом i элемента b_i на места всех вхождений переменной x_i в терм t и затем выполнение всех операций интерпретации, соответствующий функциональным буквам терма t .

Например, пусть терм $t = f_2(x_3, f_1(x_1, a_1))$; $M = Z$ – область интерпретации; f_1 будем интерпретировать как операцию сложения целых чисел, f_2 – как операцию умножения, a_1 – как целое число 15. Тогда для всякой последовательности $S = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ целых чисел $S^*(t)$ представляет собой целое число $b_3 \cdot (b_1 + 15)$.

Определение 11 (индуктивное определение выполненной формулы).

1. Если A есть элементарная формула $A_j(t_1, t_2, \dots, t_n)$ (здесь верхний индекс опущен) и B_j – соответствующее формуле A отношение в интерпретации теории, то формула A считается выполненной на последовательности S тогда и только тогда, когда $B_j(S^*(t_1), \dots, S^*(t_n))$ принадлежит отношению B_j .

Формула $\bar{A}$ выполнена на последовательности S тогда и только тогда, когда формула A не выполнена на S .

3. Формула $A \rightarrow B$ выполнена на S тогда и только тогда, когда формула A не выполнена на S или когда формула B выполнена на S (ср. определение операции импликации предикатов).

4. Формула $\forall x_i A$ выполнена на S тогда и только тогда, когда формула A выполнена на любой последовательности из G , отличающейся от S не более чем своим i -ым компонентом.

Не следует смешивать понятия выполнимой и выполненной формул.

Определение 12. Формула A называется истинной в данной интерпретации тогда и только тогда, когда она выполнена на всякой последовательности из G . Эта формула называется ложной в той же интерпретации, если она не выполнена ни на одной последовательности из G .

Определение 13. Интерпретация I называется моделью для множества формул Γ , если любая формула из множества Γ истинна в данной интерпретации I . Интерпретация I называется моделью теории T , если она является моделью множества всех теорем теории T , то есть, если всякая формула в T , доказуема в T , истинна в интерпретации I .

Понятие модели теории T можно рассматривать как интерпретацию языка этой теории. А именно: имея некоторую теорию T , мы приписываем первоначальным понятиям этой теории некоторый новый смысл. Если некоторая совокупность предметов и отношений между ними, выбранных в качестве первоначальных понятий аксиоматической теории, то есть в качестве ее интерпретации, удовлетворяет всем аксиомам теории, то она называется моделью данной аксиоматической теории.

Определение 14. Интерпретация I_1 данной теории T первого порядка изоморфна интерпретации I_2 той же теории, если существует биективное отображение g (называемое изоморфизмом) области M_1 интерпретации I_1 на область M_2 интерпретации I_2 такое, что:

1. Если A_1j и A_2j – интерпретации предикатной буквы A_j соответственно в интерпретациях I_1 и I_2 , то каковы бы ни были $b_1, b_2, \dots, b_n \in M_1$ $A_1j(b_1, b_2, \dots, b_n)$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $A_2j(g(b_1), g(b_2), \dots, g(b_n))$.

2. Если $f1j$ и $f2j$ – интерпретации функциональной буквы fj соответственно в $I1$ и $I2$, то $\forall b1 \forall b2 \dots \forall bn \in M1 \quad f1j(b1, b2, \dots, bn) = f2j(g(b1), g(b2), \dots, g(bn))$.

Если $a1j$ и $a2j$ – интерпретации предметной постоянной соответственно в $I1$ и $I2$, то $\alpha_{2j} = g(\alpha_{1j})$.

Ясно, что если интерпретации $I1$ и $I2$ изоморфны (пишут $I2 \cong I1$), то области этих интерпретаций имеют одинаковые мощности.

Теории с равенством и частичного упорядочения

1. Теории с равенством. Во многих теориях, которые могут быть аксиоматизированы как теории первого порядка, используется понятие равенства и определяющие его специальные аксиомы:

1. $\forall x (x = x)$.

1. Если x, y, z – различные предметные переменные и $F(z)$ – формула, то $\forall x \forall y (x = y \rightarrow F(x) = F(y))$.

Всякая теория, в которой присутствуют специальные аксиомы 1 и 2, называется **теорией с равенством**. Из аксиом 1 и 2 выводимы основные свойства равенства – *рефлексивность, симметричность и транзитивность*:

- 1) $\vdash t = t$ для любого терма t ;
- 2) $\vdash (x = y) \rightarrow (y = x)$;
- 3) $\vdash (x = y) \rightarrow ((y = z) \rightarrow (x = z))$.

Указанные свойства равенства имеют большое значение для прикладных исчислений. Из свойств равенства следует, что отношение равенства объектов в любой теории с равенством является отношением эквивалентности, которое позволяет разбить множество всех объектов, на котором это отношение определено, на попарно не пересекающиеся классы. Аксиома 2 теории с равенством выражает тождественность (неотличимость) равных элементов. Смысл этого понятия состоит в том, что если x и y тождественны, то они обозначают один и тот же объект. При этом каждый из классов, на которые разбивается множество всех объектов теории с равенством по отношению « $=$ », состоит только из одного объекта. Если рассматривать исчисление предикатов первого порядка с точки зрения наивной теории множеств, то равенство, которое определяется аксиомами 1 и 2, представляет собой именно теоретико-множественное тождество.

2. Теория частичного упорядочения. Пусть теория T содержит одну предикатную букву A_1^2 и не содержит функциональных букв и предметных констант. Вместо формул $A_1^2(x_1, x_2)$ и $A_1^2(x_1, x_2)$ обычно пишут $x_1 < x_2$ и $x_1 \not< x_2$. Кроме того, пусть теория T содержит две специальные аксиомы:

1. $\forall x_1 (x_1 \not< x_1)$ – иррефлексивность;

2. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_1 < x_2) \& (x_2 < x_3) \rightarrow (x_1 < x_3))$ – транзитивность.

Всякая модель этой теории называется *частично упорядоченной структурой*.

Задачи

1.1. Доказать основные свойства равенства – рефлексивность, симметричность и транзитивность.

1.2. Показать, что $\forall x \forall y (x < y) \& (y < x)$.

Данное свойство частичного порядка показывает, что в никакой интерпретации теории T никакой элемент не может одновременно предшествовать какому-нибудь другому элементу и следовать за ним.

1.3. Если к аксиомам 1 и 2 теории частичного упорядочения добавить еще одну аксиому 3: $\forall x \forall y (x < y \vee y < x)$, то порядок с сигнатурой « $<$ » называется *полным*, а множество, на котором он задан, называется вполне упорядоченным или *цепью*. В любой цепи из

любых двух различных элементов один обязательно предшествует другому. Примером может служить стандартное отношение « $<$ » на множествах натуральных, целых, рациональных и действительных чисел. На множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел можно определить и другие отношения строгого линейного порядка. Например, $\forall x \forall y (x < y)$, если $(xy \neq 0 \& x < y) \vee (x \neq 0 \& y = 0)$. Доказать для заданного таким образом отношения порядка выполнение аксиом 1-3.

1.4. Зададим на множестве $\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ множество упорядоченных пар натуральных чисел (x, y) , для которых разность $x - y$ является положительным четным числом. Доказать, что соответствующее бинарное отношение есть отношение частичного порядка.

1.5. Задать отношение полного линейного порядка на множестве $\{a, b, c\}$. Сколькими способами это можно сделать? Привести пример такого отношения линейного порядка на заданном множестве, что в этом множестве не найдется элемента, предшествующего остальным элементам.

1.6. Определим бинарное отношение « $\leq$ » в некоторой интерпретации $\mathbf{I}$ теории $\mathbf{P}$ как отношение, обладающее следующими тремя свойствами:

- 1) $\forall x (x \leq x)$ - рефлексивность;
- 2) $\forall x \forall y (x \leq y \& y \leq x \rightarrow x = y)$ - антисимметричность;
- 3) $\forall x \forall y \forall z (x \leq y \& y \leq z \rightarrow x \leq z)$ - транзитивность.

Такое отношение называется отношением нестрогого порядка. Возьмем в качестве множества $\mathbf{I}$ множество $\mathbf{Z}$ всех целых чисел, и пусть $x \leq y$ означает, что число x делится нацело на целое число $y \neq 0$. Доказать, что отношение делимости является отношением частичного порядка.

1.7. Обозначим через $\mathbf{E}$ теорию с равенством. Являются ли следующие предложения теоремами теории $\mathbf{E}$:

- 1.7.1. $\forall x \exists y \forall z (\bar{z} = x \vee \bar{y} = z)$;
- 1.7.2. $\forall x \exists y \forall z \exists v (\overline{v = z \& z = x \& \bar{x} = y \& v = y})$.

2. Теория групп, колец и полей

Напомним определения группы, кольца и поля.

Моноид $G = (G, *, e)$ называется **группой** относительно бинарной операции $*$, если для каждого элемента $g \in G$ существует симметричный ему элемент. Группа называется **коммутативной** (или абелевой), если групповая операция, кроме того, коммутативна.

Здесь через e обозначен нейтральный элемент относительно операции $*$.

Более подробно, с точки зрения теорий первого порядка, определение группы можно сформулировать так. Пусть теория $\mathbf{T}$ содержит одну предикатную букву A_1^2 , одну функциональную букву f_1^2 и одну предметную константу a_1 . Пользуясь принятыми в алгебре обозначениями, будем писать:

- t вместо $A_1^2(t, s)$,
- $t * s$ вместо $f_1^2(t, s)$,
- e вместо a_1 .

Специальными аксиомами теории $\mathbf{T}$ здесь являются следующие формулы:

- а) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 * (x_2 * x_3)) = ((x_1 * x_2) * x_3)$ – ассоциативность;
- б) $\forall x_1 (e * x_1 = x_1)$ – свойство нейтрального элемента;
- в) $\forall x_1 \exists x_2 (x_1 * x_2 = e)$ – существование противоположного элемента;
- г) $\forall x_1 (x_1 = x_1)$ – рефлексивность равенства;
- д) $\forall x_1 \forall x_2 ((x_1 = x_2) \rightarrow (x_2 = x_1))$ – симметричность равенства;

е) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (((x_1 = x_2) \& (x_2 = x_3)) \rightarrow (x_1 = x_3))$ - транзитивность равенства;
 ж) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_2 = x_3) \rightarrow (x_1 * x_2 = x_1 * x_3) \& (x_2 * x_1 = x_3 * x_1))$ – подстановочность равенства.
 Всякая модель этой теории называется *группой*. Если в группе истинна формула $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 * x_2 = x_2 * x_1)$,

то группа называется *абелевой* или *коммутативной*.

Кольцом называется непустое множество K , в котором заданы две бинарные алгебраические операции – сложение и умножение, причем по сложению это должна быть абелева группа – аддитивная группа кольца K , а умножение должно быть связано со сложением левым и правым законами дистрибутивности: для любых элементов $a, b, c \in K$ $a(b + c) = ab + ac, (b + c)a = ba + ca$.

На умножение в общем случае не накладывается никаких ограничений, то есть кольцо K по умножению является лишь группоидом (множеством с мультипликативной бинарной алгебраической операцией). Если умножение в кольце ассоциативно, то кольцо называется ассоциативным. В этом случае можно говорить о мультипликативной полугруппе кольца K . Если умножение в кольце K ассоциативно и коммутативно, то это кольцо называется ассоциативно-коммутативным. Если $(K, \cdot, e)$ - моноид, то кольцо $(K, \cdot, 0, e)$ называется кольцом с единицей или унитарным кольцом. Коммутативное кольцо K называется **областью целостности**, если в нем $0_k \neq e_k$ и $\forall a \in K \forall b \in K (a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0)$. Элементы a и b кольца K называются делителями нуля, если $(a \neq 0 \& b \neq 0) \Rightarrow (a \cdot b = 0 \vee b \cdot a = 0)$.

Поле P называется ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей (не совпадающей с аддитивным нейтральным элементом), в котором каждый элемент $a \neq 0$ обратим (то есть для каждого элемента $a \neq 0$ существует обратный a^{-1}).

Из определения поля вытекает, что относительно умножения отличные от нуля элементы поля образуют коммутативную группу, которая называется мультипликативной группой поля P . Таким образом, поле представляет собой гибрид двух абелевых групп – аддитивной и мультипликативной, связанных законом дистрибутивности (ввиду коммутативности умножения левый и правый законы дистрибутивности совпадают). Произведение ab^{-1} записывается обычно в виде дроби (или отношения, частного) a/b . Следовательно, дробь a/b , имеющая смысл только при $b \neq 0$, является единственным решением уравнения $b x = a$, при этом действия над дробями подчиняется обычным правилам, известным из школьного курса математики, и вытекающим из определения поля. Таким образом, поля – это класс колец с делением.

Задачи

2.1. Образует ли данное множество относительно указанной операции группу. Если да, то будет ли она абелевой. Если нет, то указать, какие аксиомы группы не выполняются.

2.1.1. Множество всех взаимно однозначных отображений множества M на себя, рассматриваемое вместе с операцией суперпозиции отображений.

2.1.2. Множество неотрицательных целых чисел относительно сложения.

2.1.3. Множество Z всех целых чисел относительно операции сложения.

2.1.4. Множество V_2 всех векторов плоскости относительно операции сложения.

2.1.5. Множество всех четных чисел относительно вычитания.

2.1.6. Множество всех положительных действительных чисел, если операция определена так: $a * b = a^b$.

2.1.7. Множество всех векторов n -мерного арифметического пространства относительно операции покомпонентного сложения векторов (координаты векторов являются действительными числами).

2.1.8. Множество всех вещественных матриц одного и того же размера относительно операции сложения.

2.1.9. Множество всех корней n -ой степени из единицы (действительных и мнимых) относительно умножения.

2.1.10. Множество всех положительных целых чисел относительно умножения.

2.1.11. Множество всех нечетных чисел относительно сложения.

2.1.12. Множество всех рациональных чисел относительно умножения.

2.1.13. Множество всех квадратных матриц порядка n с действительными элементами относительно умножения.

2.1.14. Множество действительных многочленов степени n относительно сложения многочленов.

2.1.15. Множество всех поворотов с общим центром на плоскости относительно последовательного их выполнения (композиции).

2.1.16. Множество всех квадратных матриц порядка n с целыми элементами и определителем, равным единице, относительно умножения матриц.

2.2. Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно указанных операций. Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение.

2.2.1. Множество целых чисел.

2.2.2. Множество четных чисел.

2.2.3. Множество целых чисел, кратных данному числу m (рассмотреть, в частности случай $m=0$).

2.2.4. Множество рациональных чисел.

2.2.5. Множество действительных чисел.

2.2.6. Множество комплексных чисел.

2.2.7. Множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$ с целыми a и b .

2.2.8. Множество чисел вида $a + b\sqrt{3}$ с рациональными a и b .

2.2.9. Множество комплексных чисел вида $a + bi$ с рациональными a и b .

2.2.10. Множество квадратных матриц порядка n с целыми элементами относительно сложения и умножения матриц.

2.2.11. Множество квадратных матриц порядка n с действительными элементами относительно сложения и умножения матриц.

2.2.12. Множество многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения многочленов.

2.2.13. Множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ с рациональными или действительными элементами a и b относительно сложения и умножения матриц.

Ответ: 2.2.1 – 2.2.3. Кольца. В 2.2.3 при $m=0$ получаем нулевое кольцо, состоящее из одного числа 0, которое будет единицей кольца и сам для себя обратным. Нулевое кольцо не будет полем, так как поле должно содержать более одного элемента. 2.2.4 – 2.2.6. Поля. 2.2.7. Кольцо. 2.2.8. Поле. 2.2.9. Поле. 2.2.10. Кольцо. 2.2.11. Кольцо. 2.2.12. Кольцо. 2.2.13. Матрицы с рациональными элементами a и b образуют поле, а действительными a и b – кольцо, но не поле.

2.3. Доказать, что множество чисел вида $a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}$ с рациональными коэффициентами a , b и c образуют поле; найти в этом поле число, обратное числу $x = 2 + 3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25}$.

3. Теория натуральных чисел

Аксиоматическое построение натурального ряда чисел, предложенное итальянским математиком Д. Пеано.

Первоначальные понятия: непустое множество N , называемое множеством натуральных чисел; отношение следования «'» и выделенный элемент 1. Специальные аксиомы:

1. $\forall x \in N (x' \neq 1)$;
2. $\forall x \forall y (x = y \rightarrow x' = y')$;
3. $\forall x \forall y (x' = y') \rightarrow x = y$;
4. Пусть $M \subset N$. Тогда $((1 \in M) \& \forall x (x \in M \rightarrow x' \in M)) \rightarrow (M = N)$.

Аксиома 4 носит название аксиомы математической индукции. На ней основан принцип математической индукции, который лежит в основе метода доказательства теорем, называемого методом полной математической индукции. Для того чтобы доказать, что некоторым свойством $P(x)$ обладают все натуральные числа, доказывают сначала, что им обладает число 1, а затем доказывают его для произвольного числа x' при «индуктивном предположении», что число x свойством $P(x)$ уже обладает. В силу аксиомы 4 множество чисел, обладающих свойством $P(x)$, должно содержать множество всех натуральных чисел.

Аксиоматическое построение системы натуральных чисел

Предположим, что натуральный ряд чисел уже построен так, что выполняются аксиомы Пеано 1-4. Каждой паре натуральных чисел x , уможно единственным образом поставить в соответствие натуральное число, обозначаемое через $x+y$, так, чтобы оказались выполненными следующие аксиомы:

5. $\forall x \in N (x' = x + 1)$;
6. $\forall x \in N \forall y \in N ((x + y)' = x + y')$.

Число $x+y$ называется *суммой* натуральных чисел x и y , а соответствующее отображение $N^2 \rightarrow N$ - *операцией сложения*.

Каждой паре натуральных чисел x , уможно единственным образом поставить в соответствие натуральное число, обозначаемое через $x \cdot y$ или через xy , так, чтобы выполнялись следующие две аксиомы:

7. $\forall x \in N (x \cdot 1 = x)$;
8. $\forall x \in N \forall y \in N (x \cdot y' = x \cdot y + x)$.

Число $x \cdot y$ называется *произведением* чисел x и y , а соответствующее отображение $N^2 \rightarrow N$ - *операцией умножения*.

Числовая система $N = \langle N, 1, +, \cdot \rangle$, операции сложения и умножения в которой удовлетворяют аксиомам 1-8, называется *системой натуральных чисел*.

На основе специальных аксиом системы натуральных чисел, логических аксиом теорий первого порядка с использованием метода полной математической индукции и правил вывода можно доказать большинство свойств операций сложения и умножения натуральных чисел (коммутативность и ассоциативность этих операций, дистрибутивный закон умножения относительно сложения и др.), ввести на множестве N отношение линейного порядка и т.д. Также можно доказать следующую важную теорему: *каждое непустое множество натуральных чисел содержит наименьшее число, то есть такое число, которое меньше всех остальных чисел этого множества*. Если к аксиомам 1-8 добавить еще две аксиомы нуля 9. $x + 0 = x$, 10. $x \cdot 0 = 0$, мы получим систему **целых неотрицательных чисел**.

Задачи

3.1. Доказать методом полной математической индукции, что для любого натурального числа выполняются следующие равенства:

$$3.1.1. \frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(7n+6)(7n+1)} = \frac{n}{7n+1};$$

$$3.1.2. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)};$$

$$3.1.3. (7^n + 3n - 1) : 9;$$

$$3.1.4. 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2);$$

$$3.1.5. (6^{2n} + 3^{2n+2} + 3^n) : 11;$$

$$3.1.6. (3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}) : 19.$$

В качестве примера докажем равенство 3.1.1. Обозначим сумму, стоящую в левой части доказываемого равенства через S_n , то есть $S_n = \frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(7n-6)(7n+1)}$.

Очевидно, что $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(7n+1)(7n+8)}$. Требуется доказать, что $S_n = \frac{n}{7n+1}$.

1. Проверяем исходное равенство для $n=1$. Из последнего равенства при $n=1$ получаем $S_1 = \frac{1}{8}$, следовательно, для $n=1$ исходное равенство истинно.
2. Предположим, что данное равенство истинно для некоторого натурального числа $k=n$, то есть $S_k = \frac{k}{7k+1}$, и докажем при этом предположении истинность данного равенства при $k=n+1$. Для этого рассмотрим сумму S_{k+1} :

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(7k+1)(7k+8)} = \frac{k}{7k+1} + \frac{1}{(7k+1)(7k+8)} = \frac{7k^2 + 8k + 1}{(7k+1)(7k+8)} = \frac{k+1}{7k+8}.$$

Выражение S_{k+1} совпадает с тем, которое получается из S_n при $n = k+1$. Заменяя S_k через $\frac{k}{7k+1}$, мы тем самым, использовали предположение, что исходное равенство истинно при $n=k$.

Заключение: на основании принципа полной математической индукции данное равенство истинно для любого натурального числа.

3.2. Обозначим через s – символ одноместной операции; через «+» и «·» - символы двухместных соответственно аддитивной и мультипликативной операций; через 1 – нейтральный элемент относительно операции «·». Тогда $\sigma_N = \langle s, +, \cdot, 0 \rangle$ - сигнатура системы натуральных чисел. Определить эти символы так, чтобы моделями теории натуральных чисел стали множества:

$$3.2.1. N \cup \{a\} = \{1, 2, 3, \dots; a\} \ (a \notin N);$$

$$3.2.2. N \cup \{a, b\} = \{1, 2, 3, \dots; a, b\} \ (a, b \notin N);$$

$$3.2.3. N \cup \{a_1, a_2, \dots\} = \{1, 2, 3, \dots; a_1, a_2, \dots\} \ (a_i \notin N \text{ для всех } i \text{ и при } i \neq j \ a_i \neq a_j).$$

4. Теория векторных пространств

Для каждого натурального числа $n > 0$ определим теорию E_n – *элементарную теорию векторного пространства размерности n*. Эта теория строится на языке векторов. Специальные аксиомы E_n распадаются на две группы. Первая группа – это просто аксиомы поля

действительных чисел с обычными операциями сложения и умножения, относящаяся к переменным $x, y, z, \dots$, формулам и термам теории действительных чисел. Вторая группа специальных аксиом – известные аксиомы линейного пространства:

В приведенных ниже аксиомах начальными буквами латинского алфавита обозначены векторы, символом Θ обозначен нулевой вектор. Последние две аксиомы как раз выражают то обстоятельство, что размерность подразумеваемого пространства равна n .

Естественной моделью теории E_n является n -мерное линейное векторное пространство над полем действительных чисел.

- 1) $a + \Theta = a$;
- 2) $a + b = b + a$;
- 3) $(a + b) + c = a(b + c)$;
- 4) $\exists b(a + b = 0)$;
- 5) $x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b$;
 $(x + y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a$;
- 6) $x \cdot (y \cdot a) = (x \cdot y) \cdot a$;
- 7) $a \cdot 1 = a$;
- 8) $\exists a_1 \exists a_2 \dots \exists a_n \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (x_1 \cdot a_1 + \dots + x_n \cdot a_n = \Theta \rightarrow x_1 = \Theta \& x_2 = \Theta \& \dots \& x_n = \Theta)$;
- 9) $\forall a_1 \dots \forall a_{n+1} \exists x_1 \dots \exists x_{n+1} ((x_1 \neq 0 \vee \dots \vee x_{n+1} \neq 0) \& x_1 \cdot a_1 + \dots + x_{n+1} \cdot a_{n+1} = \Theta)$.

Задачи

4.1. Является ли линейным подпространством соответствующего векторного пространства каждая из следующих совокупностей векторов:

4.1.1. Все векторы n -мерного векторного пространства, координаты которых целычисла?

4.1.2. Все векторы плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат?

4.1.3. Все векторы плоскости, начала и концы которых лежат на данной прямой?

4.1.4. Все векторы плоскости, концы которых лежат в первой четверти системы координат?

4.1.5. Все векторы арифметического векторного пространства над полем действительных чисел, сумма всех координат которых равна 0?

4.1.6. Доказать, что все квадратные матрицы порядка n с действительными элементами образуют векторное пространство над полем действительных чисел, если в качестве операций взять сложение матриц и умножение матрицы на число.

4.1.7. Доказать, что все симметрические матрицы образуют линейное подпространство пространства всех квадратных матриц порядка n .

Заключение

Методы математической логики описания моделей находят самое широкое применение при формализации различных предметных областей. Грубо говоря, при построении модели предметной области все начинается с введения подходящих обозначений и отношений с последующим исследованием их свойств. Введение терминологии математической логики, таким образом, входит в арсенал средств, необходимых для абстрактного моделирования, предшествующего практическому программированию задач конкретной предметной области.

Всякую конкретную математическую теорию T можно перевести на язык подходящей формальной системы. Таким образом, что каждое осмысленное (ложное или истинное) предложение теории T выражается некоторой формулой системы S . Однако К. Гедель в

30-х годах XX в. показал, что такой метод формализации позволяет построить не все положительное содержание математических теорий. Поэтому существуют определенные границы возможностей аксиоматического метода в том виде, который он приобрел в рамках гильбертовского формализма (именно Д. Гильберт впервые предложил такой формализм в конце 19-го века).

8.3 Задание студентам для самостоятельной работы

1. Решить из методической разработки задачи с четными номерами.
2. Подготовиться к контрольной работе по темам 1-8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горюшкин, А. П. Математическая логика и теория алгоритмов: учебник / А. П. Горюшкин. — Саратов: Вузовское образование, 2022. — 499 с. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/117296.html>, экземпляров неограниченно.
2. Афанасьев, С. Г. Математическая логика: учебное пособие / С. Г. Афанасьев. — Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2021. — 82 с. — ISBN 978-5-4497-0963-9. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/103656.html>, экземпляров неограниченно.
3. Гамова, А. Н. Математическая логика и теория алгоритмов: учебное пособие для студентов механико-математического факультета и факультета компьютерных наук и информационных технологий / А. Н. Гамова. - Саратов: Издательство Саратовского университета, 2020. — 91 с. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/106266.html>, экземпляров неограниченно.
4. Хоменко, Т. В. Дискретная математика. Отдельные методы теории множеств и математической логики. Лабораторный практикум / Т. В. Хоменко. — Астрахань: Астраханский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2020. — 111 с.— Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/100830.html>, экземпляров неограниченно
5. Мачикина, Е. П. Математическая логика и теория алгоритмов: учебно-методическое пособие / Е. П. Мачикина. — Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2020. — 86 с. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/102154.html>, экземпляров неограниченно