

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению практических занятий
по дисциплине «Геометрия»

для студентов

Специальности 10.05.03 Информационная безопасность
автоматизированных систем

Специализация «Анализ безопасности информационных систем»

Ставрополь
2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Практическое занятие №1. Тема 1. Векторы. Операции над векторами.....	4
Практическое занятие № 2. Тема 2. Линейная зависимость векторов. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов.....	6
Практическое занятие № 3. Тема 3. Аффинная система координат. Прямоугольная декартова система координат. Полярная система координат.	8
Практическое занятие № 4. Тема 4. Преобразование аффинной системы координат. Преобразование прямоугольной декартовой системы координат. ...	10
Практическое занятие № 5. Тема 5. Смешанное и векторное произведения векторов.....	12
Практическое занятие № 6-7. Тема 6-7. Прямая линия на плоскости.	14
Практическое занятие № 8. Тема 8. Плоскости в пространстве.	17
Практическое занятие № 9. Тема 9. Уравнение прямой в пространстве.....	20
Практическое занятие № 10. Тема 10. Линии второго порядка.	22
Практическое занятие № 11-12. Тема 11-12. Приведение общего уравнения линий второго порядка к каноническому виду.	25
Список рекомендуемой литературы.....	29

ВВЕДЕНИЕ

Цель и задачи освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Геометрия» является формирование у будущего специалиста по специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем специализация «Анализ безопасности информационных систем» заключается в формировании у студентов пространственного и аналитического мышления, а также математических компетенций, необходимых для решения профессиональных задач в области защиты информации.

Задачи дисциплины:

1. Развитие геометрического мышления.
2. Освоение аналитической геометрии – работа с векторными и матричными представлениями, используемыми в алгоритмах обработки изображений и криптографии.

Практическое занятие №1. Тема 1. Векторы. Операции над векторами.

Цель: сформировать основные представления о векторе, их геометрическом изображении.

Знания и умения, приобретаемые обучающимся: конструктивные определения операций над векторами. Уметь выполнять построения суммы, разности векторов; вектора, равного произведению данного вектора на действительное число.

Актуальность темы: необходимость ознакомиться с основными понятиями и определениями; приобретение начальных знаний и умений по дисциплине.

Теоретическая часть:

Изучить:

Глава 1. Аналитическая геометрия на плоскости

§ 1.1. Векторы

§ 1.2. Операции над векторами

1. Определение и свойства суммы двух векторов.
2. Сумма n векторов.
3. Разность векторов.
4. Определение умножения вектора на число.
5. Необходимое и достаточное условия коллинеарности двух векторов (в векторной форме).
6. Свойства умножения вектора на число.

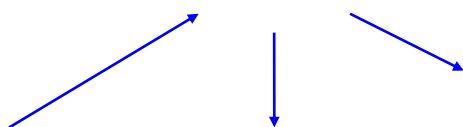
Вопросы и задания:

Вопросы для обсуждения:

1. Направленные отрезки. Векторы. Коллинеарные и компланарные векторы.
2. Сложение векторов (Определение и свойства).
3. Вычитание векторов.
4. Умножение вектора на число (Определение и свойства).
5. Теорема о коллинеарных векторах.

Задачи:

1. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы своими направленными отрезками.



Построить:

- а) $\vec{a} + \vec{b}$ (по правилу треугольника)
- б) $\vec{a} + \vec{b}$ (по правилу параллелограмма)
- в) $\vec{a} - \vec{b}$ (первый способ)
- г) $\vec{a} - \vec{c}$ (второй способ)

д) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

е) $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 0,5\vec{c}$

2. Дописать равенства:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\vec{MN} + \underline{\hspace{2cm}} = \vec{MK}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\vec{AB} + \vec{NA} + \vec{BC} + \vec{CA} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\vec{AB} - \vec{CB} - \vec{DC} = \underline{\hspace{2cm}}$$

3. Написать векторные равенства, связывающие векторы.

4. Представить в виде суммы (разности) двух векторов векторы $\vec{AB}, \vec{CB}, \vec{AC}$.

5. Дан правильный шестиугольник ABCDEF. Обозначив $\vec{AB} = \vec{q}, \vec{BC} = \vec{p}$ выразить через них векторы $\vec{CD}, \vec{DE}, \vec{EF}, \vec{FA}, \vec{AC}, \vec{AD}$.

Задание для самостоятельного выполнения.

1. ABCDEF- правильный шестиугольник. $OA = \vec{a}$, $OB = \vec{b}$, где О - точка пересечения диагоналей. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следующие векторы: ОС, ОД, ОЕ, ОF, АВ, ВС, ЕД, ЕС, СА, ДА.
2. Дан произвольный треугольник ABC, EF - средняя линия треугольника. Обозначив $AE = \vec{a}$, $AF = \vec{b}$, выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы АВ, ВС, АС.
3. ABCD - параллелограмм. О - точка пересечения AC и BD. Обозначить $AO = \vec{a}$, $BO = \vec{b}$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы АВ, ВС, CD, ДА.

Практическое занятие № 2. Тема 2. Линейная зависимость векторов. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов.

Цель: сформировать основные представления о линейной зависимости векторов.

Знания и умения, приобретаемые обучающимся: Применение знаний о линейной зависимости векторов к использованию свойств линейной зависимости и независимости векторов.

Актуальность темы: необходимость ознакомиться с основными понятиями и определениями; приобретение геометрических знаний и умений по дисциплине.

Изучить:

§ 1.3. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

1. Определение.
2. Свойства линейной зависимости векторов.
3. Теоремы о линейной зависимости векторов.

§ 1.4. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

1. Векторное пространство, векторное подпространство.
2. Координаты вектора.
3. Свойства координат вектора.

§ 1.5. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Определения и свойства скалярного произведения.
2. Выражение скалярного произведения в координатах.
3. Длина вектора.

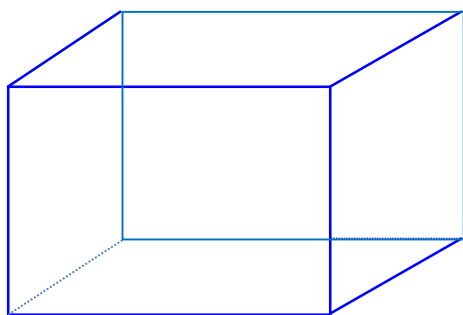
Вопросы и задания:

Вопросы для обсуждения:

1. Линейная зависимость векторов (Определение и свойства).
2. Теоремы о линейной зависимости двух, трех, четырех векторов.
3. Векторное пространство.
4. Векторное подпространство.
5. Базис и размерность векторного пространства.
6. Базис и размерность векторного подпространства.
7. Примеры векторных подпространств.
8. Определение координат вектора. Свойства координат.
9. Скалярное произведение векторов.

Задачи:

1. Установить какие векторы линейно зависимы.



$\vec{AB}$ и $\vec{AD}$
 $\vec{AD}$ и $\vec{AM}$
 $\vec{AM}$ и $\vec{AA_1}$
 $\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AC}$
 $\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AA_1}$
 $\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{BD}$
 $\vec{DC}, \vec{CC_1}, \vec{A_1D_1}$
 $\vec{DC}, \vec{D_1C_1}, \vec{AA_1}$

2. В треугольнике ABC проведена медиана BK и средняя линия MN параллельная AC. Прямые MN и BK пересекаются в точке O. Найти координаты векторов CM, OB, KM, CB, NC, AN, принимая векторы OC и OM за базис B ($\vec{e}_1, \vec{e}_2$).
3. Дано: $\vec{a}(1, 2, -3), \vec{b}(3, 0, 1), \vec{c}(0, 2, -4)$. Найти координаты векторов $2\vec{a}, \vec{a} - \vec{b}, 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.
4. Даны векторы $\vec{a}(3, -2), \vec{b}(-2, 1), \vec{c}(7, -4)$. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
5. Дано: $\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = 2\pi/3, |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$. Найти $\vec{a}\vec{b}, \vec{a}^2, \vec{b}^2, (\vec{a} + \vec{b})^2$.
6. Дано: $\vec{a}(1, 5, 1), \vec{b}(1, -5, 2), \vec{c}(2, 1, \frac{3}{2})$. Вычислить их попарные скалярные произведения и по этим произведениям определить, какой будет угол: прямой, острый или тупой.
7. Найти угла $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$, если:
 - а) $\vec{a}(8, 4, 1), \vec{b}(2, -2, 1)$.
 - б) $\vec{a}(2, 5, 4), \vec{b}(6, 0, -3)$.
8. В треугольнике ABC: AD - высота, AM - медиана, AB (5; 2), BC (2; -4). Найти векторы AM и AD и их длины.

Задание для самостоятельного выполнения.

1. В треугольнике ABC проведена медиана BK и средняя линия MN параллельная AC. Прямые MN и BK пересекаются в точке O. Найти координаты векторов CM, OB, KM, CB, NC, AN, принимая векторы KN и KC за базис B ($\vec{e}_1, \vec{e}_2$).
2. Дано: $\vec{a}(2, 3, -1), \vec{b}(0, 1, 4), \vec{c}(1, 0, 3)$. Найти координаты векторов:
 - а) $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$
 - б) $\vec{q} = \vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$
3. В треугольнике ABC: BH - высота, BM - медиана, AB (4, 2, 5), AC (2; -2, 0). Найти координаты векторов BM и BH и их длины.

Практическое занятие № 3. Тема 3. Аффинная система координат. Прямоугольная декартова система координат. Полярная система координат.

Цель: сформировать основные представления о векторе, их геометрическом изображении.

Знания и умения, приобретаемые обучающимся: конструктивные определения операций над векторами. Уметь выполнять построения суммы, разности векторов; вектора, равного произведению данного вектора на действительное число.

Актуальность темы: необходимость ознакомиться с основными понятиями и определениями; приобретение начальных знаний и умений по дисциплине.

Теоретическая часть:

Изучить:

Глава 2. Аффинные и евклидовы пространства.

2.1. Системы координат.

1. Аффинная система координат на плоскости и в пространстве.

2. Прямоугольная декартова система координат. Расстояние между точками.

3. Полярная система координат. Другие системы координат.

Вопросы и задания:

Вопросы для обсуждения:

1. Дайте определение аффинной системы координат на плоскости.
2. Дайте определение аффинной системы координат в пространстве.
3. Какой вектор называется радиус-вектором?
4. Дайте определение координат точки в аффинной системе координат.
5. Как найти координаты вектора, зная координаты его начала и конца?
6. Дайте определение прямоугольной декартовой системы координат в пространстве.
7. Как найти расстояние между точками в прямоугольной декартовой системе координат?
8. Дайте определение полярной системы координат.

Задачи:

1. В аффинной системе координат на плоскости построить точки $A(2,1)$, $B(-1,3)$, $C(4,0)$.
2. В аффинной системе координат в пространстве построить точки $A(2,1,3)$, $B(-2,-1,2)$, $C(3,0,1)$, $D(2,0,0)$.
3. В прямоугольной декартовой системе координат построить точки $A(2,3,1)$, $B(1,-1,4)$.
4. В прямоугольной декартовой системе координат найти координаты точек, симметричных точкам $A(2,-1,3)$, $B(1,-3,4)$, $C(2,0,-2)$ относительно:

а) оси Ox ; б) оси Oy ; в) начала координат.

5. Определить расстояние между точками $A_1(2,-1)$ и $A_2(1,2)$; $B_1(1,5)$ и $B_2(1,1)$.
6. Определить расстояние между точками $A_1(3,-2,-4)$ и $A_2(1,-1,3)$, $B_1(2,-1,5)$ и $B_2(1,1,1)$, $C_1(-3,1,5)$ и $C_2(1, 3,-2)$.
7. В полярной системе координат $O r \varphi$:
- изобразить координатные линии $r = 1, r = 2, r = 3, \varphi = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2}$;
 - изобразить точки M_1, M_2 с полярными координатами $r_1 = 3, \varphi_1 = \frac{9\pi}{4}, r_2 = 3, \varphi = -\frac{7\pi}{4}$. Найти главные значения полярных углов этих точек;
 - найти прямоугольные координаты точек M_1, M_2 .
8. Даны полярные координаты $\varphi_A = \frac{\pi}{3}, r_A = 4$ и $\varphi_B = \frac{2\pi}{3}, r_B = 2$ точек A и B . Найти:
- скалярное произведение $\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle$;
 - длину отрезка AB .
9. На координатной плоскости Oxy отмечена точка $A(4, -3)$. Найти полярные координаты точки A' , образа точки A при повороте радиус-вектора $\vec{OA}$ на угол $\frac{\pi}{3}$ в округ начала координат.

Практическое занятие № 4. Тема 4. Преобразование аффинной системы координат.

Преобразование прямоугольной декартовой системы координат.

Цель: сформировать основные представления о векторе, их геометрическом изображении.

Знания и умения, приобретаемые обучающимся: конструктивные определения операций над векторами. Уметь выполнять построения суммы, разности векторов; вектора, равного произведению данного вектора на действительное число.

Актуальность темы: необходимость ознакомиться с основными понятиями и определениями; приобретение начальных знаний и умений по дисциплине.

Теоретическая часть:

§ 2.2. Ориентация плоскости и пространства.

1. Условие компланарности 3-х векторов.
2. Матрица перехода от одного базиса к другому.
3. Ориентация плоскости и пространства.
4. Угол между векторами на ориентированной плоскости.

§ 2.3. Формулы преобразования координат точек.

§ 2.4. Преобразования прямоугольных систем координат на плоскости.

Вопросы и задания:

Вопросы для обсуждения:

1. Формулы, выражающие связь полярной и прямоугольно-декартовой систем координат.
2. Формулы преобразования аффинной системы координат на плоскости и в пространстве.
3. Частные случаи преобразования аффинной системы координат на плоскости и в пространстве.
4. Формулы преобразования прямоугольной декартовой системы координат на плоскости и в пространстве.

Задачи:

1. Записать формулы преобразования аффинной системы координат, если заданы координаты нового центра и новых базисных векторов относительно старой системы координат:
 - а) $e_1'(4,3)$, $e_2'(0,5)$, $O'(3,-1)$.
 - б) $e_1'(4,-1)$, $e_2'(1,2)$, $O'(2,5)$.
 - в) $e_1'(-2,1)$, $e_2'(3,-2)$, $O'(1,2)$.
2. Пусть OAB - произвольный треугольник. Записать формулы преобразования при переходе от системы координат O , $e_1=OA$, $e_2=OB$ к следующей системе координат:
 - а) $O'=A$, $e_1'=AB$, $e_2'=AO$.

б) $O'=O$, $e_1'=OB$, $e_2'=OA$.

в) $O'=C$, $e_1'=CA$, $e_2'=CB$, где C - середина отрезка AB .

3. Записать формулы преобразования при переносе начала координат:

а) $O'(-1,2)$;

б) $O'(2,-3)$;

в) $O'(-2,4)$.

4. Написать формулы преобразования аффинной системы при повороте вокруг начала координат:

а) $e_1'(-3,3)$, $e_2'(1,2)$.

б) $e_1'(1,2)$, $e_2'(-1,-2)$.

в) $e_1'(2,-1)$, $e_2'(2,-2)$.

5. Написать формулы преобразования прямоугольной системы координат в каждом из следующих случаев:

а) $i'=\sqrt{2}/10i+7\sqrt{2}/10j$, $O'(-3, \sqrt{2})$ системы координат имеют одну и ту же ориентацию.

б) $\angle(i, i')=30^\circ$, $O'(0, -2)$, системы имеют различные ориентации.

с) $\angle(i, i')=45^\circ$, $O'(0, 0)$, системы имеют одну и ту же ориентацию.

д) $i'=2/\sqrt{5}i-2/\sqrt{5}j$, $O'(2, -12)$ системы имеют различные ориентации.

6. В прямоугольной декартовой системе координат $R = (O, i, j)$ дано множество точек уравнением $5x^2+8xy+5y^2-9=0$. Найти уравнение того же множества в прямоугольной декартовой системе, которая получается из данной поворотом на:

а) $+45^\circ$;

б) $+30^\circ$.

7. В системе координат $r=(O, e_1, e_2)$ даны линии уравнениями: а) $x-2y+1=0$; б) $x+y=0$; с) $y-3=0$. Найти уравнения тех же линий в системе $R'=(O', e'_1, e'_2)$, если $O'(1,0)$, $e'_1(1,-3)$, $e'_2(4,4)$.

Практическое занятие № 5. Тема 5. Смешанное и векторное произведения векторов.

Цель: сформировать основные представления о векторе, их геометрическом изображении.

Знания и умения, приобретаемые обучающимся: конструктивные определения операций над векторами. Уметь выполнять построения суммы, разности векторов; вектора, равного произведению данного вектора на действительное число.

Актуальность темы: необходимость ознакомиться с основными понятиями и определениями; приобретение начальных знаний и умений по дисциплине.

Теоретическая часть:

§ 2.5. Смешанное произведение векторов.

1. Определение смешанного произведения векторов.
2. Выражение смешанного произведения в координатах.
3. Свойства смешанного произведения векторов.
4. Объем тетраэдра.

§ 2.6. Векторное произведение векторов.

1. Определение векторного произведения векторов.
2. Связь векторного, смешанного и скалярного произведений векторов.
3. Выражение векторного произведения в координатах.
4. Свойства векторного произведения векторов.
5. Площадь треугольника.

Вопросы и задания:

Вопросы для обсуждения:

1. Дайте определение смешанного произведения векторов.
2. Свойства смешанного произведения векторов.
3. Выражение смешанного произведения векторов в координатах.
4. Объем параллелепипеда.
5. Дайте определение векторного произведения векторов.
6. Теорема о связи смешанного, векторного и скалярного произведения векторов.
7. Свойства векторного произведения векторов.
8. Выражение векторного произведения векторов в координатах.
9. Площадь треугольника.

Задачи:

1. Пусть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 3$. Вычислить: а) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a})$; б) $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + 2\vec{a} - 3\vec{b})$

2. Найти $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и определить ориентацию тройки векторов, если $\vec{a} (1; -1; 3)$, $\vec{b} (-2; 2; 1)$, $\vec{c} (3; -2; 5)$.
3. Вычислить объем тетраэдра, если вершины находятся в точках А (2; -1; -1), В (5; -1; 2), С(3; 0; -3), Д(6; 0; -1).
4. Упростить: а) $[2\vec{a} - 3\vec{b}, 3\vec{a} - 4\vec{b}]$; б) $[\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}]$.
5. Определить координаты и длины векторов $[\vec{a}, \vec{c}]; [\vec{b}, \vec{d}]; [\vec{d}, \vec{a}]$, если $\vec{a} (0; 1; 0)$, $\vec{b} (2; -1; 3)$, $\vec{c} (0; 5; -2)$, $\vec{d} (1; 2; -3)$.
6. Найти $\sin(\vec{a}, \vec{b})$, если $\vec{a} (2; -2; 1)$, $\vec{b} (2; 3; 6)$.
7. Вычислить площадь треугольника ABC, если А (1; 2; 0), В (-3; -6; 4), С (-2; 4; 1).

Задание для самостоятельного выполнения.

1. Найти $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$, если $\vec{a} (1; 0; 0)$, $\vec{b} (0; 3; 1)$, $\vec{c} (2; 0; 1)$.
2. Вычислить $[\vec{a}(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})]$.
3. Вычислить площадь треугольника ABC, если А (4; 2; 3), В (5; 7; 0), С (2; 8; -1).
4. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и определить ориентацию тройки векторов, если $\vec{a} (2; -3; 1)$, $\vec{b} (1; 2; 1)$, $\vec{c} (3; -1; 1)$.
5. В треугольной пирамиде ABCD векторы $\vec{AB} (1; -2; 0)$ и $\vec{AC} (1; 1; -1)$ определяют основание, а $\vec{AD} (2; -1; 4)$ направлен по боковому ребру. Найти объем пирамиды и площади всех граней.

Практическое занятие № 6-7. Тема 6-7. Прямая линия на плоскости.

Цель: сформировать основные представления о векторе, их геометрическом изображении.

Знания и умения, приобретаемые обучающимся: конструктивные определения операций над векторами. Уметь выполнять построения суммы, разности векторов; вектора, равного произведению данного вектора на действительное число.

Актуальность темы: необходимость ознакомиться с основными понятиями и определениями; приобретение начальных знаний и умений по дисциплине.

Теоретическая часть:

Глава 3. Прямая линия на плоскости.

§3.1. Уравнение прямой на плоскости.

1. Каноническое уравнение прямой.
2. Параметрическое уравнение прямой.
3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
4. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
5. Уравнение прямой в отрезках.
6. Вектор нормали. Уравнение прямой, заданной точкой и вектором нормали
7. Общее уравнение прямой.

§ 3.2. Взаимное расположение двух прямых.

§ 3.3. Расстояние от точки до прямой.

§ 3.4. Угол между прямыми.

1. Угол и направленный угол между прямыми.
2. Нахождение угла между прямыми, заданными общими уравнениями.
3. Нахождение угла между прямыми, заданными уравнениями с угловым коэффициентом.

Вопросы и задания:

Вопросы для обсуждения:

1. Различные способы задания уравнения прямой на плоскости (вывод каждой из формул).
2. Общее уравнение прямой на плоскости (теоремы с доказательством).
3. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
4. Расстояние от точки до прямой (вывод формулы - теорема).
5. Угол между прямыми.

Задачи:

1. Дана прямая $l: 3x - y - 5 = 0$. Найти координаты точек пересечения с осями координат и построить прямую в аффинной системе координат.
 2. Написать уравнения прямых, проходящих:
 - а) через точки $A(-1, 1)$ и $B(2, 5)$;
 - б) через начало координат и точку $A(3, 2)$;
 - в) через точку $A(2, -6)$ и параллельно вектору $\vec{p}(1, -1)$;
 - г) через точку $A(3, 5)$ и параллельно оси OX ;
 - д) через точку $A(1, -5)$ и параллельно прямой $x - 3y + 1 = 0$
 3. Задано общее уравнение прямой. Написать уравнение этой прямой в параметрическом виде:
 - а) $3x - y + 5 = 0$
 - б) $x + y - 3 = 0$
 4. Найти угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый этой прямой на оси ординат:
 - а) $2x + y + 5 = 0$
 - б) $x - 3y + 6 = 0$
 5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1, 4)$ и перпендикулярно вектору $\vec{n}(2, 1)$.
 6. Выяснить взаимное расположение прямых:
 - а) $x + y - 3 = 0$ и $2x - 2y - 6 = 0$
 - б) $x + 2y + 1 = 0$ и $x + 2y + 3 = 0$
 - в) $\frac{\sqrt{3}}{2}x - 3y + \sqrt{3} = 0$ и $x - 2\sqrt{3}y + 2 = 0$
 7. Написать уравнение окружности с центром в точке $C(6, -3)$ и касающуюся прямой $3x - 4y - 15 = 0$.
 8. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x - y + 6 = 0$ и $6x - 2y - 1 = 0$.
 9. Написать уравнение множества точек, удаленных от прямой $3x - 2y + 4 = 0$ на 3 единицы.
 10. Найти ориентированный угол между прямыми $3x + y - 6 = 0$ и $2x - y + 5 = 0$.
- Составить уравнение катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы $3x - y + 5 = 0$ и вершину прямого угла $C(4, -1)$.

Задание для самостоятельного выполнения.

1. Написать уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника ABC , параллельно противоположащей стороне, если $A(-1, 2)$, $B(0, 3)$, $C(1, 1)$.
2. Даны две вершины треугольника ABC : $A(-1, 5)$, $B(3, 2)$ и точка $H(5, -3)$ - точка пересечения его высот. Составить уравнения сторон треугольника.

3. Даны две вершины параллелограмма $A(1, -2)$ и $B(3, 2)$ и точка $P(1, 1)$ - точка пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон параллелограмма.
4. Показать, что прямые $2x - 3y + 5 = 0$ и $4x - 6y - 25 = 0$ параллельны и найти расстояние между ними.
5. Написать уравнения множества точек, удаленных от прямой $4x - 3y = 0$ на 4 единицы.

Практическое занятие № 8. Тема 8. Плоскости в пространстве.

Цель: сформировать основные представления о векторе, их геометрическом изображении.

Знания и умения, приобретаемые обучающимся: конструктивные определения операций над векторами. Уметь выполнять построения суммы, разности векторов; вектора, равного произведению данного вектора на действительное число.

Актуальность темы: необходимость ознакомиться с основными понятиями и определениями; приобретение начальных знаний и умений по дисциплине.

Теоретическая часть:

Изучить:

Глава 4. Плоскости и прямые в пространстве.

§ 4.1. Плоскости в пространстве.

1. Уравнение плоскости, заданной точкой и направляющим подпространством.
2. Параметрическое уравнение плоскости.
3. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.
4. Уравнение плоскости, заданной точкой и вектором нормали.
5. Уравнение плоскости в отрезках.
6. Общее уравнение плоскости.

§ 4.2. Взаимное расположение двух плоскостей.

§ 4.3. Метрические задачи теории плоскостей.

1. Расстояние от точки до плоскости.
2. Угол между плоскостями.

Вопросы и задания:

Вопросы для обсуждения:

1. Различные способы задания уравнения плоскости (вывод каждой из формул).
2. Общее уравнение плоскости (теоремы с доказательством).
3. Расстояние от точки до плоскости (вывод).
4. Взаимное расположение двух плоскостей.
5. Взаимное расположение трех плоскостей.

Задачи:

1. Найти уравнение плоскости:
 - а) проходящей через точку $A(2,0,3)$ и параллельной векторам $p_1(1,0,1)$ и $p_2(2,1,3)$;
 - б) проходящей через точку $A(1,2,3)$ и параллельной векторам $p_1(1,2,2)$ и $p_2(4,1,1)$;

- в) проходящей через точки $M_1(-1,0,0)$ и $M_2(0,0,1)$ и параллельной вектору $p(1,2,2)$;
- г) проходящей через точки $M_1(1,2,3)$ и $M_2(2,-1,3)$ и параллельной вектору $p(2,1,2)$;
- д) проходящей через точки $A(1,2,3)$, $B(2,1,4)$, $C(0,-1,2)$;
- е) проходящей через точки $A(0,0,3)$, $B(1,1,2)$, $C(3,0,2)$.
- ж) проходящей через точку $M(2,3,-1)$ и перпендикулярной вектору $p(1,2,-4)$.
- з) проходящей через точку $M(2,-3,6)$ и перпендикулярной вектору $p(0,-2,3)$.

2. Найти уравнения плоскостей:

- а) проходящих через точку $A(1,2,-1)$ и параллельных каждой из координатных плоскостей;
- б) проходящих через точки $M_1(1,2,-4)$, $M_2(2,0,-3)$ и параллельных каждой из координатных осей;
- в) проходящих через точку $M(2,1,-5)$ и через каждую из координатных осей.

3. В каждом из следующих случаев написать уравнение плоскости в «отрезках»:

- а) $2x-y+3z+2=0$;
- б) $x-2y+4z+4=0$
- в) $5x+2y+5z-10=0$

4. Даны вершины тетраэдра $A(4,0,2)$, $B(0,5,1)$, $C(4,-1,3)$ и $D(3,-1,5)$. Написать уравнение плоскостей, проходящих через каждую из вершин, параллельно противоположной грани.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,-1,3)$, $B(1,2,4)$ и перпендикулярной плоскости: а) $2x-y+3z-1=0$; б) $x+2y+z=0$.

6. Составить уравнение касательной плоскости к сфере:

- а) $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=24$ в точке $M(0,1,3)$
- б) $(x)^2+(y)^2+(z+1)^2=49$ в точке $M(2,-3,6)$.

7. Найти расстояние от точки до плоскости в каждом из следующих случаев:

- а) $M(1,-2,2)$, $2x+y+2z-7=0$;
- б) $M(3,0,4)$, $2x+3y+8=0$;
- в) $M(-1,2,\sqrt{2})$, $5x-3y+\sqrt{2}z=0$.

8. Вычислить расстояние между следующими параллельными плоскостями:

- а) $x-2y+2z-6=0$, $x-2y+2z+18=0$;
- б) $x-2y+5z+27=0$, $x-2y+5z-54=0$
- в) $2x-3y+6z-14=0$, $4x-6y+12z-21=0$.

9. На каждой из осей найти точку, равноудаленную от точки $M(1,1,1)$ и от плоскости $2x-2y+z-12=0$.

10. Установить расположение плоскости $2x-2y-z+9=0$ относительно сферы:

а) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$

б) $(x+2)^2+(y)^2+(z-3)^2=9$

в) $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=4.$

Практическое занятие № 9. Тема 9. Уравнение прямой в пространстве.

Цель: сформировать основные представления о векторе, их геометрическом изображении.

Знания и умения, приобретаемые обучающимся: конструктивные определения операций над векторами. Уметь выполнять построения суммы, разности векторов; вектора, равного произведению данного вектора на действительное число.

Актуальность темы: необходимость ознакомиться с основными понятиями и определениями; приобретение начальных знаний и умений по дисциплине.

Теоретическая часть:

§ 4.4. Уравнение прямой в пространстве.

1. Каноническое уравнение прямой.
2. Уравнение прямой, заданной двумя точками.
3. Уравнение прямой, заданной двумя плоскостями.
4. Параметрическое уравнение прямой.

§ 4.5. Взаимное расположение прямых в пространстве.

§ 4.6. Взаимное расположение прямой и плоскости.

§ 4.7. Угол между прямыми в пространстве.

§ 4.8. Угол между прямой и плоскостью

Вопросы и задания:

Вопросы для обсуждения:

1. Различные способы задания уравнения прямой в пространстве.
2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
3. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Задачи:

1. Составить уравнение прямой:

- а) проходящей через точки М (2,-3,1/2) и К (3,5,3/2);
- б) проходящей через точки А (1,-3,4) и В (3,-1,2);
- в) проходящей через точку А (2,1,-3) и параллельно вектору $p(1,-3,2)$;
- г) проходящей через точку А (1,2,-1) и параллельно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{3}$;
- д) образованной пересечением плоскости $x+3y-z+1=0$ с плоскостью, проходящей через точки А (2,0,3), В (1,1,1), С (2,4,-3). Записать эти уравнения в каноническом и параметрическом виде;
- е) образованной пересечением плоскости $x+3y-z+1=0$ с координатными плоскостями. Записать эти уравнения в каноническом и параметрическом виде.

2. Через точку М (1,-3,4) провести прямую, параллельную прямой $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$.

3. Установить взаимное расположение:

а) двух прямых l: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ и t: $\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$

б) прямой l: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$ и плоскости π : $2x - y + z + 1 = 0$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

t: $\frac{x+5}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{2}$ и параллельно прямой l: $\begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку М (2,3,-1) параллельно

прямой l: $\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases}$ и перпендикулярно плоскости π : $2x - 2y + 3z - 4 = 0$

6. Даны две прямые $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2}$; $z-1=0$. Доказать, что они скрещиваются и написать уравнения плоскостей, проходящих через каждую из них, параллельно другой прямой.

Практическое занятие № 10. Тема 10. Линии второго порядка.

Цель: сформировать основные представления о векторе, их геометрическом изображении.

Знания и умения, приобретаемые обучающимся: конструктивные определения операций над векторами. Уметь выполнять построения суммы, разности векторов; вектора, равного произведению данного вектора на действительное число.

Актуальность темы: необходимость ознакомиться с основными понятиями и определениями; приобретение начальных знаний и умений по дисциплине.

Теоретическая часть:

Глава 5. Линии второго порядка.

§ 5.1 Эллипс.

1. Определение и каноническое уравнение.
2. Исследование форм эллипса.
3. Эксцентриситет и директрисы.

§ 5.2. Гипербола.

1. Определение и каноническое уравнение.
2. Исследование форм гиперболы.
3. Равносторонние гиперболы.
4. Сопряженные гиперболы.
5. Эксцентриситет и директрисы гиперболы.

§ 5.3. Парабола.

1. Определение и каноническое уравнение.
2. Исследование форм параболы.

§ 5.4. Фокально-директориальное свойство эллипса, гиперболы, параболы.

Вопросы и задания:

Вопросы для обсуждения:

1. Определение и каноническое уравнение эллипса (вывод).
2. Свойства эллипса.
3. Определение и каноническое уравнение гиперболы (вывод).
4. Свойства гиперболы.
5. Определение и каноническое уравнение параболы (вывод).
6. Свойства параболы.

Задачи:

1. Найти уравнение множества точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек $F_1(4,0)$ и $F_2(-4,0)$ равна 10.
2. Эллипс задан каноническим уравнением $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$. Найти фокусы, эксцентриситет, директрисы. Построить эллипс.
3. Составить уравнения эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что:
 - а) его полуоси равны 5 и 2.
 - б) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами равно 10.
 - в) его большая ось равна 20, а эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$.
4. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, симметрично относительно начала координат, зная, что:
 - а) его полуоси равны 7 и 2.
 - б) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами равно 8. Построить его.
5. Составить уравнение множества точек, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек $F_1(5,0)$ и $F_2(-5,0)$ равно 6. Найти эксцентриситет, асимптоты, директрисы. Построить линию.
6. Составить уравнение гиперболы, сопряженной данной в задаче 5. Найти ее фокусы, эксцентриситет, асимптоты, директрисы и построить ее.
7. Составить уравнение гиперболы с действительной осью OX , если:
 - а) ее действительная ось равна 10, а мнимая 8.
 - б) расстояние между фокусами равно 10, а мнимая ось равна 8.
 - в) расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет равен $\frac{3}{2}$.
8. Найти фокальный параметр параболы, фокус, директрису и построить параболу:
 - а) $y^2=6x$; б) $x^2=10y$; в) $y^2=-4x$; г) $x^2=-2y$.
9. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что парабола симметрична относительно оси OX и проходит через точку $B(-1,5)$.

Задание для самостоятельного выполнения.

1. Составить уравнения эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что:
 - а) его полуоси равны 7 и 3.
 - б) его большая ось равна 25, а расстояние между фокусами равно 8.

в) расстояние между фокусами равно 24, а эксцентриситет равен $\frac{12}{13}$.

2. Построить эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$. Найти его фокусы, директрисы, эксцентриситет.

3. Составить уравнение гиперболы с действительной осью ОХ, если:

а) ее действительная ось равна 7, а мнимая 4.

б) расстояние между директрисами равно $22\frac{2}{13}$, а между фокусами равно 26.

в) действительная ось равна 16, а эксцентриситет равен $\frac{5}{4}$. Составить уравнение сопряженной ей гиперболы. Найти ее фокусы, эксцентриситет, асимптоты, директрисы и построить ее.

4. Найти фокальный параметр параболы, фокус, директрису и построить параболу:

а) $y^2=8x$; б) $x^2=4y$; в) $y^2=-16x$; г) $x^2=-6y$.

5. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что парабола симметрична относительно оси ОУ и проходит через точку М (1,1)

Практическое занятие № 11-12. Тема 11-12. Приведение общего уравнения линий второго порядка к каноническому виду.

Цель: сформировать основные представления о векторе, их геометрическом изображении.

Знания и умения, приобретаемые обучающимся: конструктивные определения операций над векторами. Уметь выполнять построения суммы, разности векторов; вектора, равного произведению данного вектора на действительное число.

Актуальность темы: необходимость ознакомиться с основными понятиями и определениями; приобретение начальных знаний и умений по дисциплине.

Теоретическая часть:

§ 5.5. Приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду

1. Общее уравнение линии второго порядка.
2. Приведение уравнения к виду, не содержащему произведения координат.
3. Упрощение уравнения путем переноса начала координат.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0.$$

Построить линию и записать формулы преобразования координат точек.

Решение. Так как в заданном уравнении коэффициент $a_{12}=4$, т.е. не равен 0, то применяем преобразование поворота системы координат.

1. Выпишем коэффициенты уравнения и найдем инварианты I_1 и I_2 :

$$a_{11}=5, a_{12}=4, a_{22}=5, a_{10}=0, a_{20}=0, a_{00}=9, I_1=a_{11}+a_{22}=10, I_2=9.$$

2. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0, \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0. \text{ Отсюда } \lambda_1=1, \lambda_2=9.$$

3. Найдём направление новых осей координат:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{1-5}{4} = -1 \Rightarrow \alpha = -45^\circ, \sin \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\vec{i}'(\cos \alpha, \sin \alpha) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \vec{p}'(1, -1) \text{ определяет направление оси } Ox'.$$

$$\vec{j}'(\sin \alpha, \cos \alpha) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \vec{q}'(1, 1) \text{ определяет направление оси } Oy'.$$

4. Найдём новые коэффициенты a_{10}' и a_{20}' по формулам из (4):

$$a_{10}' = a_{10} \cos \alpha + a_{20} \sin \alpha,$$

$$a_{20}' = -a_{10} \sin \alpha + a_{20} \cos \alpha,$$

$$a_{10}'=0, a_{20}'=0.$$

5. Запишем уравнение линии в новой системе координат:

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2a_{10}'x' + 2a_{20}'y' + a_{00} = 0$$

$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{1} = 1$. Получили уравнение эллипса, полуоси которого, $a=3, b=1$.

6. Построим линию.

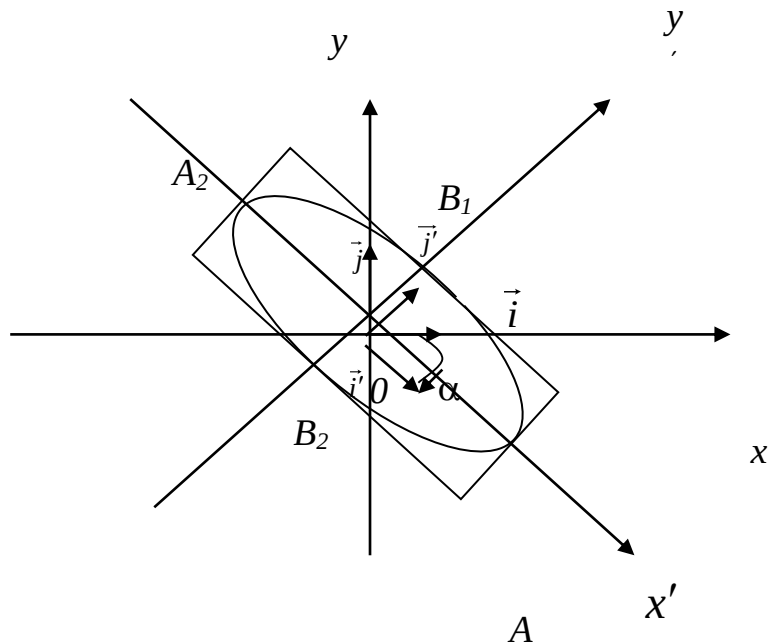


Рис.1. Эллипс, заданный уравнением.

7. Запишем формулы преобразования координат точек в виде (2):

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y', \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'.$$

Пример. Привести к простейшему виду, записать формулы преобразования координат точек и построить линию, заданную уравнением $2x^2 - 8x + 4y + 12 = 0$.

Решение. Так как $a_{12}=0$, то применим преобразование параллельного переноса осей координат.

Дополним до полного квадрата слагаемые с переменной x :

$$2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 4y + 12 = 0,$$

$$2(x-2)^2 - 8 + 4y + 12 = 0,$$

$$2(x-2)^2 + 4(y+1) = 0,$$

введем новые переменные:

$$\bar{x} = x-2, \bar{y} = y+1. \Rightarrow x = \bar{x} + 2, y = \bar{y} - 1 \Rightarrow \bar{O} = (2, -1).$$

Уравнение линии примет вид:

$$\bar{x}^2 = -2\bar{y}.$$

Получили уравнение параболы, параметр которой $p=1$, $\bar{y} \leq 0$,

$$F(0, -\frac{1}{2}), D(0, \frac{1}{2}).$$

Точки F и D заданы относительно новой системы координат $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$.

Построим линию.

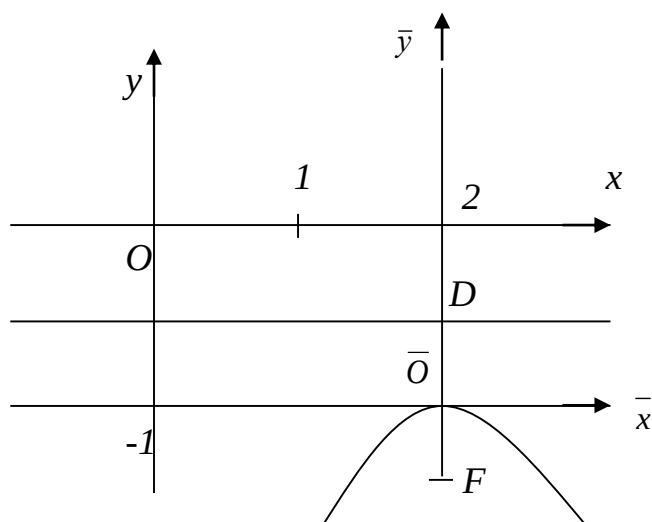


Рис.2.Парабола, заданная уравнением

Задачи:

Вопросы и задания:

Вопросы для обсуждения:

1. Общее уравнение линий второго порядка.
2. Приведение общего уравнения линий второго порядка к каноническому виду.
3. Классификация линий второго порядка.

Задачи:

1. Привести общее уравнение линии второго порядка к каноническому виду:

а) путем поворота системы координат.

1. $9x^2 - 6xy + y^2 - 3\sqrt{10}x - 9\sqrt{10}y - 90 = 0$

2. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0$

3. $2x^2 + 12xy - 7y^2 + 20 = 0$

4. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$

5. $4x^2 - 4xy + y^2 - 15 = 0$

6. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2\sqrt{3}x + 2y = 0$

б) путем переноса начала координат.

1. $2x^2 - 3y^2 + 4x + 12y - 16 = 0$

2. $3x^2 - 6x - 5y + 13 = 0$

3. $4x^2 - 24x + 27 = 0$

4. $2x^2 - 8x + 4y + 9 = 0$

5. $x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 13 = 0$

Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Кострикин, А.И. Геометрия и группы [Текст] / А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. - 3-е изд. - М. : МЦНМО, 2020. - 312 с. - ISBN 978-5-4439-4001-2.
2. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] / Д.В. Беклемишев. - 13-е изд. - М. : Лань, 2021. - 320 с. - ISBN 978-5-8114-6890-8.
3. Дубровин, Б.А. Современная геометрия: методы и приложения [Текст] : учеб. пособие для вузов / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. - 7-е изд., перераб. и доп. - Москва : Ленанд, 2020. - 760 с. : ил. - ISBN 978-5-9710-6789-2.

Дополнительная литература

1. Ильин, В.А. Аналитическая геометрия [Текст] : учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 5-е изд., перераб. - М. : Физматлит, 2018. - 224 с. - ISBN 978-5-9221-1623-7.
2. Прасолов, В.В. Задачи по планиметрии [Текст] : учеб. пособие / В.В. Прасолов. - 6-е изд., испр. и доп. - Москва : МЦНМО, 2019. - 640 с. : ил. - ISBN 978-5-4439-2960-3.
3. Коблиц, Н. Алгебраические аспекты криптографии [Текст] : пер. с англ. / Н. Коблиц ; под ред. А.А. Болотова. - 2-е изд., испр. - Москва : Мир, 2018. - 421 с. : ил. - ISBN 978-5-03-010567-2.
4. Василенко, О.Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии [Текст] : учеб. пособие / О.Н. Василенко. - 3-е изд., перераб. - Москва : МЦНМО, 2020. - 328 с. - ISBN 978-5-4439-1567-5.