МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания
по выполнению практических работ по дисциплине
«Математика»
для студентов направления подготовки
19.03.03 Продукты питания животного происхождения
Направленность (профиль): Биоинженерия и технологии

Ставрополь. 2026г.

Содержание

Практическое занятие 1. Определители.

Практическое занятие 2. Матрицы.

Практическое занятие 3. Системы линейных уравнений.

Практическое занятие 4. Аналитическая геометрия на плоскости.

Практическое занятие 5. Векторы

Практическое занятие 6. Векторное и смешанное произведение векторов.

Практическое занятие 7. Аналитическая геометрия в пространстве.

Практическое занятие 8. Функции одной переменной.

Практическое занятие 9. Предел функции

Практическое занятие 10. Производная функции.

Практическое занятие 11. Техника дифференцирования

Практическое занятие 12. Приложения дифференциального исчисления.

Практическое занятие 13. Комплексные числа.

Практическое занятие 14. Действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме.

Практическое занятие 15. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования.

Практическое занятие 16. Интегрирование рациональных дробей.

Практическое занятие 17. Определенный интеграл.

Практическое занятие 18. Геометрические приложения определенного интеграла.

Практическое занятие 19. Функции нескольких переменных.

Практическое занятие 20. Дифференцирование функции нескольких переменных.

Практическое занятие 21. Числовые ряды.

Практическое занятие 22. Знакочередующиеся ряды

Практическое занятие 23. Степенные ряды

Практическое занятие 24. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Практическое занятие 25. Дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков, допускающие понижения порядка.

Практическое занятие 26. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Практическое занятие 27. Основные понятия и теоремы теории вероятностей.

Практическое занятие 28. Повторные независимые испытания

Практическое занятие 29. Дискретные случайные величины.

Практическое занятие 30. Непрерывные случайные величины.

Практическое занятие 31. Основы математической статистики.

Практическое занятие 32. Точечная и интервальная оценки, точность и надежность оценки, доверительный интервал.

Практическое занятие 33. Линейная корреляция

Практическое занятие 34. Проверка статистических гипотез

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

ВВЕДЕНИЕ

Цель освоения дисциплины: «Математика» является формирование соответствующих компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 19.03.03 Продукты питания жи происхождения.

Задачи освоения дисциплины:

- формирование математической культуры бакалавров;
- получение базовых знаний по высшей математике;
- овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использова решении теоретических и прикладных задач в профессиональной деятельности.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина «Математика» входит в блок обязательной части дисциплин. Ее освоение происходит в 1-2 семестрах.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.

***Цель*:** закрепить знания по теме «Основы линейной алгебры», научиться вычислять определители различными методами: по правилу треугольника и по теореме Лапласа.
Знать: основные понятия теории определителей.
Уметь: вычислять определители.
Владеть: навыками работы с определителями

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: ознакомление с основными понятиями и методами линейной алгебры, как средства решения задач вычислительной математики в профессиональной области; теория систем линейных алгебраических уравнений представляет большой практический интерес для построения алгоритмов получения решений систем с минимальной допустимой погрешностью и минимальной вычислительной трудоемкостью.

Теоретическая часть

I. Ответить на контрольные вопросы:

1. Что называется определителем 2-го порядка?
2. Сформулируйте свойства определителей.
3. Что называется определителем третьего порядка? Способы его вычисления.
4. Что называется минором?
5. Что называется алгебраическим дополнением?
6. С помощью, какой теоремы можно вычислить любой определитель, сведя его к определителю меньшего порядка?
7. Дайте определение определителя *n* –го порядка.

Примеры решения задач

Задача №1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0.$

Решение.

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1) - 3 = x^2 - 1 - 3 = x^2 - 4$$

Тогда, $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 2.$

Ответ: $x_1 = -2,\ x_2 = 2.$

Задача №2. Вычислить. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Ответ: **1.**

Задача №3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ по правилу Саррюса.

Решение.

Допишем справа 1-ый и 2-ой столбцы определителя.

Произведения элементов, стоящих на главной диагонали, и параллельны ей, знаки не меняют.

Произведения элементов побочной диагонали и параллельных ей, меняют знак на противоположный.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{matrix} = 1\times 1\times(-1) + 2\times 3\times 5 + 0 - 5\times 1\times 0 - 0\times 3\times 1 - (-1)\times 0\times 2 = 29.$$

Ответ: **29.**

Задача №4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам 3-ей строки.

Решение.

Используем теорему Лапласа. $\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 0\times\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 16 \end{vmatrix} - (-1)\times\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 1\times(32 - 5) + 10\times(6 - 0)$$

Ответ: **87.**

5. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$

Ответ: 0 или 1.

6. Вычислить определители, разложив их по элементам: 1) первой строки; 2) любой строки или столбца:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: а) 50; б) -15.

7. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

Ответ: а) 20; б) 70.

8. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Ответ: -10 или 2.

9. ***Вычислите определитель четвертого порядка***.

Методические рекомендации:

Вычислить определитель четвертого порядка: $D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение.

В данном определителе имеются нули, и если, например, разложить его по элементам второго столбца, то в результате нам придется вычислить два определителя 3-го порядка.

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

в 1-ом и 3-ем слагаемом полученные определители так же разложим по элементам 2-го столбца, получим:

$$=-\left[\begin{array}{l}0+4\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3&2\\2&3\end{vmatrix}\\+0\end{array}\right]+0-\left[\begin{array}{l}3\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&2\\2&3\end{vmatrix}\\+0\end{array}\right]+0+0+0=$$

$$=-\left[4(9-4)\right]-3\left[-2(9-4)\right]=-20+30=10.$$

Ответ: 10.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**	**4 вариант**	**5 вариант**
$\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\7&0&1&2\\4&3&-3&2\\1&5&0&1\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}5&6&7&8\\4&5&6&7\\3&4&5&6\\2&3&4&5\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\3&4&5&6\\5&6&7&8\\7&8&9&10\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}5&4&3&2\\4&3&2&1\\3&2&1&0\\2&1&0&-1\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}1&2&-3&4\\5&1&2&3\\1&3&2&1\\1&2&3&1\end{vmatrix}$
6 вариант	**7 вариант**	**8 вариант**	**9 вариант**	**10 вариант**
$\begin{vmatrix}8&6&4&2\\6&4&2&0\\4&2&0&-2\\2&0&-2&-4\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}4&3&2&1\\6&4&2&0\\4&2&0&-2\\-1&0&1&2\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}8&6&4&-1\\3&2&1&0\\4&2&0&1\\1&0&-1&1\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}8&6&2&2\\6&4&1&0\\-1&1&0&1\\2&0&-1&-4\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}9&6&3&0\\10&6&2&-2\\4&2&0&-2\\2&0&-2&-4\end{vmatrix}$

ЗАДАНИЕ НА САМОСТОЯТЕЛЬНУЮ РАБОТУ

1. Вычислить определитель по правилу треугольников: $\begin{vmatrix}5&6&3\\0&2&0\\7&4&5\end{vmatrix}$.
2. Вычислить определитель, разлагая его по элементам третьего столбца:
$$\begin{vmatrix}2&2&0&1\\2&1&3&4\\1&1&0&2\\5&2&1&0\end{vmatrix}.$$
3. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}0&6&3&5&1\\-3&2&4&1&0\\5&1&4&3&26\\-3&8&7&6&1\\1&0&3&4&0\end{vmatrix}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

МАТРИЦЫ.

***Цель*:** закрепить знания по теме «Основы линейной алгебры», научиться выполнять действия над матрицами; вычислять ранг матрицы и находить обратную матрицу.
Знать: действия над матрицами.
Уметь: выполнять действия над матрицами**,** вычислять ранг матрицы и находить обратную матрицу.
Владеть: навыками работы с матрицами.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: ознакомление с основными понятиями и методами линейной алгебры, как средства решения задач вычислительной математики в профессиональной области; теория систем линейных алгебраических уравнений представляет большой практический интерес для построения алгоритмов получения решений систем с минимальной допустимой погрешностью и минимальной вычислительной трудоемкостью.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Что называется определителем 2-го порядка?
2. Сформулируйте свойства определителей.
3. Что называется определителем третьего порядка? Способы его вычисления.
4. Что называется минором?
5. Что называется алгебраическим дополнением?
6. С помощью, какой теоремы можно вычислить любой определитель, сведя его к определителю меньшего порядка?
7. Дайте определение определителя *n* –го порядка.
8. Дать определение прямоугольной матрицы размера (m, n). Её обозначение.
9. Какая матрица называется квадратной? Чему равен определитель квадратной матрицы? Как обозначается?
10. Что такое матрица-строка? Матрица-столбец?
11. Какая матрица называется диагональной? Единичной?
12. Когда две матрицы равны?
13. Какая матрица называется невырожденной?
14. Действия над матрицами.
15. Какие матрицы называются эквивалентными?
16. Дайте определение обратной матрицы. Для каких матриц существует обратная матрица?
17. Какая матрица называется транспонированной?
18. Что называется рангом матрицы?

Примеры решения задач

1. ***Выполнить действия над матрицами***.

Методические рекомендации:

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

Найти матрицы $A+B,\ 3A-B,\ A\times B$.

Решение.

$$A+B=\begin{pmatrix}0+4 & 2+3 & -1+2\\ -2+3 & -1+2 & 2+1\\ 3+1 & -2+3 & -1+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix};\quad 3A=\begin{pmatrix}0 & 6 & -3\\ -6 & -3 & 6\\ 9 & -6 & -3\end{pmatrix}$$

Для нахождения матрицы $3A-B$ сложим матрицы $3A$ и $-B$, получим:

$$3A-B=\begin{pmatrix}-4 & 3 & -5\\ -9 & -5 & 5\\ 8 & -9 & -8\end{pmatrix}$$

Произведение определено, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Произведение матриц найдем по правилу «строка на столбец»:

$$AB=\begin{pmatrix}0\times4+2\times3+(-1)\times1 & 0\times3+2\times2+(-1)\times3 & 0\times2+2\times1+(-1)\times5\\ (-2)\times4+(-1)\times3+2\times1 & (-2)\times3+(-1)\times2+2\times3 & (-2)\times2+(-1)\times1+2\times5\\ 3\times4+(-2)\times3+(-1)\times1 & 3\times3+(-2)\times2+(-1)\times3 & 3\times2+(-2)\times1+(-1)\times5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & 1 & -3\\ -9 & -2 & 5\\ 5 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
Для матриц $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ найти произведения $A\times B$ и $B\times A$, если они существуют.	Для матриц $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 2\\ 7 & 3 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 8\\ 3 & -5\end{pmatrix}$ найти произведения $A\times B$ и $B\times A$, если они существуют.	Для матриц $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ найти произведения $A\times B$ и $B\times A$, если они существуют.
4 вариант	**5 вариант**	**6 вариант**
Для матриц $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ и	Для матриц $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$	Для матриц $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ найти произведения $A\times B$ и $B\times A$, если они существуют.	и $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ найти произведения $A\times B$ и $B\times A$, если они существуют.	и $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ найти произведения $A\times B$ и $B\times A$, если они существуют.
7 вариант Для матриц $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ найти произведения $A\times B$ и $B\times A$, если они существуют.	**8 вариант** Для матриц $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & -4 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -5\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ найти произведения $A\times B$ и $B\times A$, если они существуют.	**9 вариант** Для матриц $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ найти произведения $A\times B$ и $B\times A$, если они существуют.
10 вариант Для матриц $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ найти произведения $A\times B$ и $B\times A$, если они существуют.		

2. Найти ранг матрицы.

Методические рекомендации:

Используя элементарные преобразования найти ранг матрицы: $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix}$.

Решение.

Применяя элементарные преобразования, получим треугольную матрицу, элементы главной диагонали которой равны единице.

1. Из 2 строки вычитаем 3 строку (получаем 2).
2. Меняем местами 1 и 2 строки.
3. 1 строку умножаем на (-2) и складываем со 2 строкой (получаем 2 стр).
4. 1 строку умножаем на (-3) и складываем с 3 строкой (получаем 3 стр).
5. 2 строку умножаем на (-2) и складываем с 3 строкой (получаем 3 стр).

6. 2 строку делим на 5 (получаем 2 стр).

7. 3 строку умножаем на (-1) (получаем 3 стр).

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & -2\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 5 & 7\\ 0 & 10 & 13\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 5 & 7\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & \frac{7}{5}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \quad rangA=3.$$

Ответ: $rangA=3$.

3. Найти обратную матрицу.

Методические рекомендации:

Найти матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}$

Решение.

Матрица имеет обратную, если матрица невырожденная, т.е. $\Delta \neq 0$.

1. Вычисляем определитель матрицы A:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{vmatrix}=27+2-24=5,\quad \Delta\neq 0 \Rightarrow$$ матрица A невырожденная и для нее существует обратная.

2. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы и записываем их в транспонированном виде (поменяем местами строки на столбцы):

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=9,\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2,\qquad A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 4\end{vmatrix}=1,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=2,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-12,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=1,\ A_{33}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=7.$$

3.Записываем союзную матрицу $A^{*}=\begin{pmatrix}9 & -2 & -4\\ 1 & 2 & -1\\ -12 & 1 & 7\end{pmatrix}$

4. Следовательно, $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Ответ: $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Вариант 1	**Вариант 2**	**3 вариант**
1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & -6 \\ 2 & -3 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -12 & -12 \\ 2 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & -9 & -8 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	1.Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 21 & -3 & -12 \\ -4 & 6 & -14 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
4 вариант	**5 вариант**	**6 вариант**
1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & 19 & -4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -7 & 34 & -16 \\ -3 & 0 & -2 \\ -2 & 11 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -2 & -1 & -5 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
7 вариант	**8 вариант**	**9 вариант**
1. Вычислить ранг матрицы	1. Вычислить ранг матрицы	1.Вычислить ранг матрицы

$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 13 & 18 \\ 2 & -5 & 13 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \\ 3 & -4 & 8 & 14 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -3 & 13 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & -3 & 11 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
10 вариант 1.Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$		

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Цель: изучить решение системы n уравнений с n -неизвестными различными методами.

Знать: знать основные понятия теории систем линейных уравнений, теорему Крамера.
Уметь: применять аппарат линейной алгебры для решения различных практических задач.
Владеть: различными методами решения системы n уравнений с n -неизвестными-методом Крамера, матричным методом и методом Жордана –Гаусса.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности**.**
Актуальность: ознакомление с основными понятиями и методами линейной алгебры, как средства решения задач вычислительной математики в профессиональной области ; теория систем линейных алгебраических уравнений представляет большой практический интерес для построения алгоритмов получения решений систем с минимальной допустимой погрешностью и минимальной вычислительной трудоемкостью.

Теоретическая часть

Система уравнений вида $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = в_2 \\ ..... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = в_n \end{cases}$ **(1)**

называется **системой n линейных уравнений с n неизвестными**, где a_{ij} - **коэффициенты системы** (1), $в_n$ - **свободные члены**.

Система линейных уравнений (1) называется **квадратной**, так как у нее число уравнений совпадает с числом неизвестных.

Решением системы (1) называется такая совокупность чисел $(c_1, c_2, ... c_n)$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она решений не имеет.

Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

В последнем случае каждое ее решение называется **частным решением** системы. Совокупность всех частных решений называется **общим решением.**

Если система линейных уравнений (СЛУ) имеет более одного решения, то она имеет бесконечное множество решений.

Следовательно, неопределенная СЛУ имеет бесконечное множество решений.

Решить СЛУ – это значит выяснить, совместна она или нет. Если СЛУ совместна, найти ее общее решение.

Две системы линейных уравнений называются **равносильными** или **эквивалентными**, если они имеют одно и тоже множество решений.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при **элементарных преобразованиях системы**, к которым относятся:

1. перестановка уравнений;
2. умножение обеих частей одного из уравнений на число, отличное от нуля;
3. умножение какого-либо уравнения на число и прибавление его к другому уравнению.

Если в результате элементарных преобразований системы появилось уравнение вида $0 \times x_1 + 0 \times x_2 + ... + 0 \times x_n = 0,$

которое называется **тривиальным**, то его можно вычеркнуть, так как оно не влияет на решение системы.

Если в результате элементарных преобразований системы появилось уравнение вида $0 \times x_1 + 0 \times x_2 + ... + 0 \times x_n = b, \qquad (b \neq 0)$

которое называется **противоречивым**, то такая СЛУ является несовместной, т.е. решений не имеет.

Примеры решения задач

Пример 1. Решить систему по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ 5x + y + z = 18 \\ 2x + y + 2z = 15 \end{cases}.$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 18 & 1 & 1 \\ 15 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 18 & 1 \\ 2 & 15 & 2 \end{vmatrix} = 33; \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 18 \\ 2 & 1 & 15 \end{vmatrix} = -27;$$

тогда

$$x = \frac{-12}{-3} = 4; \qquad y = \frac{33}{-3} = -11; \quad z = \frac{-27}{-3} = 9.$$

Ответ: $\{4; -11; 9\}$.

Пример 2. Решить систему уравнений, используя метод полного исключения Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 5 & \\ 5 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ответ: $x = -1, y = 3, z = 2$.

Пример 3. Решить матричным методом систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=9 \\ x+2y-3z=14 \\ 3x+4y+z=16 \end{cases}.$$

Решение.

Перепишем систему в виде $AX=B$,

где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Решение матричного уравнения имеет вид $X=A^{-1}B$. Найдем A^{-1}.

$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=28-30-4=-6$. $\Delta\neq 0$ следовательно, матрица невырожденная и существует A^{-1}. Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=14, \quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=5, \quad A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-13,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-10, \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=8,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2, \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1, \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1.$$

Таким образом, $A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Тогда $X=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 126+70-208 \\ -90-56+128 \\ -18+14+16 \end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Следовательно $x=2, y=3, z=-2$.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

5 вариант	**6 вариант**	**7 вариант**	**4 вариант**	**5 вариант**
$\begin{cases} x-2y+3z=-4 \\ 2x+y-z=0 \\ 4x+y+2z=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x+y+6z=12 \\ 3x+y-z=7 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+4z=5 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+4z=15 \\ 3x-y+z=8 \\ -2x+y+z=0 \end{cases}$

6 вариант	7 вариант	8 вариант	9 вариант	10 вариант
$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y+3z=-4 \\ 2x+y-z=0 \\ 4x+y+2z=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x+y+6z=12 \\ 3x+y-z=7 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+4z=5 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ.

Цель: рассмотреть различные виды уравнений прямой на плоскости, взаимное расположение двух прямых на плоскости.

Знать: различные уравнения прямой.
Уметь: применять аппарат аналитической геометрии **для** решения различных практических задач, находить расстояние от точки до прямой.
Владеть: методами аналитической геометрии решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.

Актуальность: при изучении различных разделов физики, механики и технических наук встречаются применения прямой линии на плоскости.

Теоретическая часть

Вектор $\bar{a} \neq \bar{0}$ называется *направляющим* вектором прямой l, если $\bar{a}$ параллелен l. Вектор $\bar{n} \neq \bar{0}$ называется *нормальным* к прямой l или *вектором нормали*, если $\bar{n} \perp l$, т.е. $\bar{n} \perp \bar{a}$.

Любая прямая в аффинной системе координат может быть задана уравнением первой степени (линейным уравнением):

$$Ax+By+C=0, \qquad (1)$$

где *(x,y)* - координаты точек прямой, *A, B, C* – коэффициенты, причем *A* и *B* не равны нулю одновременно.

Любое уравнение первой степени в аффинной системе координат определяет прямую.

Уравнение (1) называется *общим уравнением* прямой. Для прямой, заданной общим уравнением (1) в прямоугольной декартовой системе координат, вектор $\bar{a} = (-B, A)$ является направляющим, а $\bar{n} = (A, B)$ - вектором нормали.

Прямая l, заданная уравнением (1), разбивает плоскость на две полуплоскости. Координаты точек, лежащих по одну сторону от прямой l удовлетворяют неравенству $Ax + By + C > 0$, а координаты точек, лежащих по другую сторону от прямой l, - неравенству $Ax + By + C < 0$.

1. **Каноническое уравнение прямой.** Прямая l задана точкой $M_0(x_0,y_0)$ и направляющим вектором $\bar{a}(\alpha, \beta)$. Если $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, то каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}.$$

2. **Параметрическое уравнение прямой.** Если прямая l задана точкой $M_0(x_0,y_0)$ и направляющим вектором $\bar{a}(a,\beta)$, то ее параметрическое уравнение имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + a\,t, \\ y = y_0 + \beta\,t, t \in R \end{cases}$$, здесь t - параметр.

3. **Уравнение прямой, проходящей через две точки.** Пусть $M_1(x_1,y_1) \in l$, $M_2(x_2,y_2) \in l$. Если $x_2 - x_1 \neq 0, y_2 - y_1 \neq 0$, то уравнение прямой l имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

4. **Уравнение прямой в отрезках.** Пусть прямая l пересекает ось *Ox* в точке *A(a,0)*, а ось *Oy* в точке *B(0,b)*, где $a \neq 0, b \neq 0$. Говорят, что прямая l отсекает от осей *Ox, Oy* отрезки $|a|, |b|$ соответственно (знак чисел *a* и *b* показывает с какой стороны от начала координат на оси *Ox* и *Oy* отсекается отрезок). Уравнение прямой в этом случае имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Замечание. Все сказанное выше справедливо для плоскости, как с аффинной, так и с прямоугольной декартовой системой координат.

5. **Уравнение прямой с угловым коэффициентом.** Пусть на плоскости *Oxy* задана прямоугольная декартовая систем координат, прямая l проходит через точку $M_0(x_0,y_0)$ и образует угол φ с положительным направлением оси *Ox*. Число $k = tg\varphi$ называется *угловым коэффициентом прямой*. Тогда уравнение прямой l имеет вид

$y-y_0=k(x-x_0)$ или $y=kx+b$, где $b=y_0-kx_0$.

Примеры решения задач

Задача 1. Задайте ту полуплоскость, в которую попадает точка *M(1,2)* относительно прямой l: *5x-3y+7=0*.

Решение. Подставим координаты точки *M* в левую часть уравнения прямой l, получим неравенство $5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 7 = 5 - 6 + 7 = 6 > 0$. Этому же неравенству будут удовлетворять все точки рассматриваемой полуплоскости.

Ответ: *5x-3y+7>0*.

Задача 2. Составить уравнение прямой, отсекающее на оси ординат отрезок *b=-3* и образующий с положительным направлением оси абсцисс угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Построить прямую.

Решение. Угловой коэффициент прямой $k = tg\varphi = tg\frac{\pi}{4} = 1$. Так как прямая отсекает от оси ординат отрезок *b=-3*, то она проходит через точку *B(0,b)*, т.е. *B(0,-3)*. Уравнение прямой имеет вид *y-(-3)=1(x-0)*, т.е. *y=x-3* или *x-y-3=0* - общее уравнение прямой. Для построения достаточно двух точек. Одна точка известна – это точка *B*. Пусть ордината другой точки равна нулю, подставляя *y=0* в общее уравнение прямой, получим *x=3*, т.е. прямая проходит через точку *A(3,0)* .

Ответ: *x-y-3=0* - общее уравнение прямой.

Задача 3. Дан треугольник *ABC*: *A(0,1), B(6,5) C(12,-1).*

1) Составить уравнение медианы *AM*.

Решение. *M* – середина *BC*, поэтому координаты точки *M* $x_M = \frac{6+12}{2} = 9$; $y_M = \frac{5+(-1)}{2} = 2$. Запишем уравнение прямой *AM* как уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x-9}{0-9}=\frac{y-2}{1-2},\qquad \frac{x-9}{-9}=\frac{y-2}{-1},$$

x-9=9y-18, *x-9y+9=0* - общее уравнение *AM.*

Ответ: *x-9y+9=0.*

2) Составить уравнение высоты *CH*.

Решение. $CH \perp AB$, поэтому направляющий вектор $\overline{AB}(6,4)$ прямой *AB* является нормальным для прямой *CH*. Пусть прямая *CH* задана общим уравнением *ax+by+c=0*, тогда $\vec{n}(a,b) \perp CH$, поэтому *a=6, b=4*, т.е. *6x+4y+c=0*. Так как $C \in CH$, то координаты точки *C* удовлетворяют уравнению прямой, подставляя координаты точки *C* в уравнение прямой *CH*, найдем коэффициент *c:* $6\cdot 2+4\cdot(-1)+c=0$, *c=-68*, т.е. *6x+4y-68=0* или *3x+2y-34=0* - уравнение прямой *CH*.

Ответ: *3x+2y-34=0.*

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

ЗАДАНИЯ

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(2, 3):
   а) параллельно оси Ox;
   б) параллельно оси Oy;
   в) составляющей с осью Ox угол 45^0.
   Построить данные прямые.
   Ответ: а) y = 3; б) x = 2; в) y = x + 1.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(4, 3) и отсекающей от координатного угла треугольник площадью, равной 3 кв.ед.
   Ответ: $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3/2}=1$ или $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x-y+10=0,\quad 8x+4y+9=0$ и параллельной прямой $x+3y=0$. Построить данную прямую.
   Ответ: $x+3y-2=0$.

4. Дан треугольник с вершинами A (-2, 0), B(2, 4) и C(4, 0). Написать уравнения сторон треугольника, высоты AD и найти величину угла A.
   Ответ: 1) AC: y=0, AB: x+2=y, BC: 2x+y–8=0; 2) AD: x– 2y+2=0; 3) $\angle A=45^0$.

5. Среди прямых $3x-2y+7=0,\ 6x-4y-9=0,\ 6x+4y-5=0,\ 2x+3y-6=0$ указать параллельные и перпендикулярные.

6. Определить угол между прямыми:
   а) $y=2x-3$ и $y=\frac{1}{2}x+1$; б) $5x-y+7=0$ и $2x-3y+1=0$.
   Ответ: а) $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; б) 45^0.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Дано общее уравнение прямой: 12x- 5y- 65=0. Написать:1)уравнение с угловым коэффициентом; 2)уравнение в «отрезках».
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(2,3) под углом 60^0 к оси Ox. Построить данную прямую.
3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(2,5) и отсекающей на оси ординат отрезок b=7.
4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых 2x-3y+5=0 и 3x+y-7=0 перпендикулярно к прямой y=2x.
5. Составить уравнение прямой, проходящей через центр окружности $x^2+y^2+4x+12y+15=0$ параллельно прямой x+y=0.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

ВЕКТОРЫ.

Цель: решение задач на выполнение аксиом векторного (линейного) пространства, изучить нелинейные операции над векторами
Знать: нахождение модуля вектора и направляющих косинусов.
Уметь: применять аппарат векторной алгебры для решения различных практических задач на скалярное произведение векторов, приложения скалярного произведения.
Владеть: алгебраическими методами решения геометрических задач.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение векторными величинами такими как сила, скорость, ускорение, которые определяются не только своим числовым значением, но и направлением - векторные величины.

Теоретическая часть

Пусть $L = \{x, y, \ldots\}$ - линейное пространство.

О. Скалярным произведением векторов в линейном пространстве L с элементами произвольной природы называется правило, по которому любым двум элементам $(x; y)$ этого пространства ставится в соответствие действительное число, называемое скалярным произведением элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и обозначаемое символом $(x; y)$, при условии, что это правило удовлетворяет аксиомам:

1) $(x; x) \geq 0$, причем $(x; x) = 0, \text{если } x = 0$
2) $(x; y) = (y; x)$ скалярное произведение симметрично;
3) $(x_1 + x_2; y) = (x_1; y) + (x_2; y)$ дистрибутивный закон;
4) $(\lambda x; y) = \lambda (x; y)$ для $\lambda \in R$

О. Линейное пространство в котором введено скалярное произведение называется евклидовым пространством.

Отметим, что перечисленные аксиомы позволяют векторные множества перемножать скалярно по правилам умножения обычных многочленов.

Примеры:

1) ***n-*** мерное арифметическое пространство R^n, элементами которого служат системы из n действительных чисел $x=(x_1, x_2.x_3, \ldots, x_n)$ с обычными операциями сложения и умножения на число и скалярным произведением, определенным по правилу

$$(x;y)=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \quad \text{Û} \quad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

" $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n); y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

В R^n все аксиомы выполняются, следовательно оно является евклидовым пространством.

T. **Скалярное произведение** двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданных своими прямоугольными декартовыми координатами, равно сумме произведений их соответствующих координат:

$$\bar{a} \times \bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

где $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$.

Следствия.

1. Для того чтобы векторы $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$ были ортогональными (перпендикулярными), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

2. Длина вектора $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ выражается формулой: $|\bar{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

3. Угол φ между векторами $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$ выражается формулой:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\times\bar{b}}{|\bar{a}|\times|\bar{b}|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\times\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}},$$

где $0 \le \varphi \le \pi$.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}=\{1,-2,2\}$ и $\bar{b}=2\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}$.

Решение: $\bar{a}\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=1\times2+(-2)\times(-2)+2\times(-1)=4$.

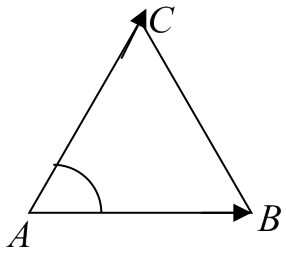
Задача 2. Вычислит какую работу производит сила $\bar{F}=\{2,-1,-4\}$ когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M(1,-2,3)$ в положение $N(5,-6,1)$.

Решение: известно $A=\bar{F}\times\bar{S}$, где $\bar{S}$ - вектор пути $\overline{MN}$

$\bar{S}=\{4,-4,-2\}$, $A=\bar{F}\times\bar{S}=2\times4+(-1)(-4)+(-4)(-2)=20$ (ед. раб.)

Задача 3. Дан треугольник с вершинами $A(-3, 5, 6)$, $B(1, -5, 7)$, $C(8, -3, -1)$. Найти внутренний угол при вершине A.

Решение: Угол при вершине A образован векторами $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$, найдем их координаты $\overline{AC} = \{11, -8, -7\}$, $\overline{AB} = \{4, -10, 1\}$



$$\cos\angle A = \cos\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right|} =$$

$$= \frac{4 \cdot 11 + (-10)(-8) + 1(-7)}{\sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-7)^2}} = \frac{117}{\sqrt{117} \cdot \sqrt{234}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\angle A = 45^0$.

Задача 4. Найти проекцию вектора $\bar{a} = 5\bar{i} + \bar{j}$ на ось, имеющую направление вектора $\bar{b} = 5\bar{i} - 12\bar{j}$.

Решение: из определения скалярного произведения $\bar{a}\bar{b} = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cos\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = \left|\bar{b}\right| np_{\bar{b}}\bar{a}$:

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\bar{b}}{\left|\bar{b}\right|} = \frac{5 \cdot 5 - 12}{\sqrt{5^2 + (-2)^{12}}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = \frac{13}{13} = 1$$

Задача 5. Определить перпендикулярны или нет векторы:

1) $\bar{a} = \{2, 3, -1\}$ и $\bar{b} = \{-1, 2, 1\}$

2) $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 7\bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{k}$

Решение:

1) найдем $\bar{a}\bar{b} = 2(-1) + 3 \cdot 2 + (-1)(1) = 3 \neq 0$ и векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не перпендикулярны
2) $\bar{a}\bar{b} = 3 \cdot 2 + 4(-5) + 7 \cdot 2 = 6 - 20 + 14 = 0 \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$

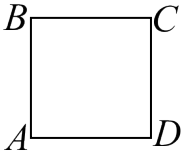
Задача 6. Даны векторы $\bar{a} = m\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ и $\bar{b} = 4\bar{i} + m\bar{j} - 7\bar{k}$. При каком значении эти векторы перпендикулярны?

Решение: найдем скалярное произведение этих векторов $\bar{a}\bar{b} = 4m + 3m - 28 = 0$, т.к. $\bar{a} \perp \bar{b}$, отсюда $7m - 28 = 0$, $m = 4$

6) Решение задач самостоятельно.

Задача 7. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5, 3, 4)$, $B(-1, -7, 5)$, $C(6, -5, -3)$, $D(2, 5, -4)$ есть квадрат.

Решение:



$\overline{AB} = \{4, -10, 1\}$; $\overline{BC} = \{7, 2, -8\}$;

$\overline{DC} = \{4, -10, 1\}$; $\overline{AD} = \{7, 2, -8\}$

Сравнивая координаты, видим, что $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{BC} = \overline{AD}$.

Так как $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2} = \sqrt{117}$

$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{117}$, отсюда $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{DC}\right| = \left|\overline{AD}\right|$.

Так как $\overline{AB} \times \overline{BC} = 4 \times 7 + (-10)2 + 1(-8) = 0$, то $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ $\Rightarrow$ $ABCD$ - квадрат.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Найти $(\bar{a} + 2\bar{b})(3\bar{a} - \bar{b})$, если $|\bar{a}| = 10$, $|\bar{b}| = 2$, $\varphi = (\bar{a}^{\wedge}\bar{b}) = \frac{2\pi}{3}$.
   Ответ: 242.
2. Определить, при каком значении m векторы $\bar{a} = m\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - m\bar{k}$ взаимно перпендикулярны.
   Ответ: -6.
3. Проекции перемещения $\bar{S}$ движущейся точки на оси координат равны $S_x = 2$м, $S_y = 1$м и $S_z = -2$м. Проекции действующей силы $\bar{F}$ на оси координат равны $F_x = 50$Н, $F_y = 40$Н и $F_z = 30$Н. Вычислить работу А силы $\bar{F}$ и угол между силой $\bar{F}$ и перемещением $\bar{S}$.
   Ответ: 1) 80 Дж; 2) $\arccos\frac{4\sqrt{2}}{15}$.
4. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = (2,1,0)$ и $\bar{b} = (0,-1,1)$.
   Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6

ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ.

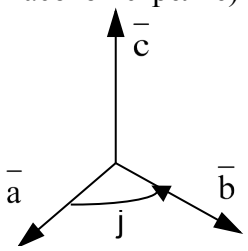
Цель: решение задач на выполнение аксиом векторного (линейного) пространства, изучить нелинейные операции над векторами.
Знать: нелинейные операции над векторами.
Уметь: применять аппарат векторной алгебры для решения различных практических задач на скалярное произведение векторов, приложения скалярного произведения, векторное и смешанное произведение.
Владеть: алгебраическими методами решения геометрических задач.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение векторными величинами такими как сила, скорость, ускорение, которые определяются не только своим числовым значением, но и направлением - векторные величины.

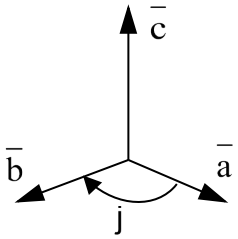
Теоретическая часть
Правые и левые тройки векторов

0. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ называется **правой (левой)**, если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора

кратчайший поворот от первого ко второму вектору виден совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке) .



правая тройка



левая тройка

Определение и свойства векторного произведения векторов

0. **Векторным произведением** вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}| \times |\bar{b}| \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
2) $\bar{c} \perp \bar{a},\ \bar{c} \perp \bar{b}$;
3) векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначения: $\bar{a} \times \bar{b}$; $[\bar{a}; \bar{b}]$.

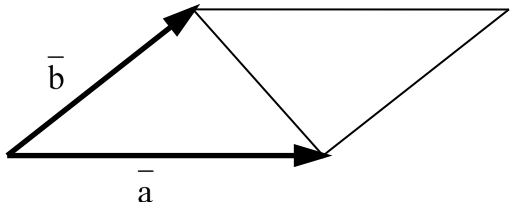
Геометрические свойства векторного произведения

1. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно $\bar{0}$:

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \quad (\bar{a} \neq \bar{0},\ \bar{b} \neq \bar{0}).$$

Следствие. $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$ для любого вектора $\bar{a}$.

2. Модуль векторного произведения двух неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ численно равен площади S параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах : $S = |\bar{a} \times \bar{b}|$.



Следствие. Площадь приведенных к общему началу неколлинеарных векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна половине модуля векторного произведения этих векторов:

$$S_{тр} = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|.$$

Алгебраические свойства векторного произведения

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$

2. $(\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \lambda (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \times (\lambda \bar{b})$

3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$

Данные свойства имеют фундаментальное значение. Они позволяют при векторном перемножении векторных многочленов выполнять действия почленно и производить сочетание числовых множителей (но при этом необходимо либо сохранять порядок векторных множителей, либо при изменении этого порядка менять знак на противоположный).

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат Oxyz с ортонормированным базисом $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$. Для векторов этого базиса справедливы соотношения:

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k},\ \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i},\ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j},\ \bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}.$$

Т. Векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданных своими прямоугольными декартовыми координатами, выражается формулой:

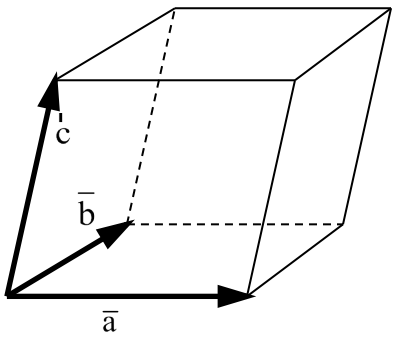
$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

где $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Следствие. Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, т.е. $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar{0} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

0. **Смешанным произведением** трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения $\bar{a} \times \bar{b}$ на вектор $\bar{c}$.

Обозначение: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, $[\bar{a}\bar{b}]\bar{c}$.



Таким образом, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$.

Смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ равно объему V параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, взятому со знаком «+», если тройка $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ – правая, и со знаком «–», если тройка $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ – левая .

Следствия.

1. Объем V параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, определяется по формуле $V = |\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}|$.

2. Объем $V_{пир}$ треугольной пирамиды, построенной на приведенных к общему началу векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, определяется по формуле $V = \frac{1}{6}|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}|$.

3. Справедливо равенство $\bar{a} \times (\bar{b} \cdot \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{b}) \times \bar{c}$.

4. Три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = 0$.

5. Смешанное произведение трех векторов, два из которых совпадают, равно 0.

Алгебраические свойства смешанного произведения

1. При циклической перестановке векторов смешанное произведение не меняется т.е.
$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a} = \bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b}.$$
2. При перестановке двух сомножителей знак смешанного произведения меняется на противоположный:
$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = -\,\bar{b}\,\bar{a}\,\bar{c} = -\,\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b} = -\,\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}.$$

Выражение смешанного произведения в координатах

Т. Смешанное произведение трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, заданных своими прямоугольными декартовыми координатами, определяется формулой:
$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$
где $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Следствие. Для того чтобы векторы $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$ были компланарны необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

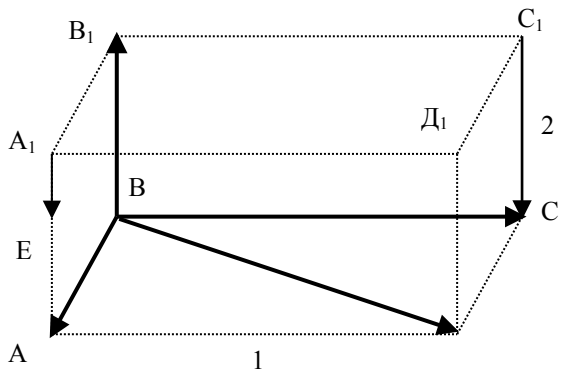
Примеры решения задач

Задача 1. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 5 кв.ед. Верно ли утверждение $\overset{\circledR}{AB} \cdot \overset{\circledR}{AD} = 5?$

Ответ: нет; $\left|\overset{\circledR}{AB} \cdot \overset{\circledR}{AD} = 5.\right|$

Задача 8. $ABCD$ - квадрат,

$$\left|BB_1\right| = 2;\quad \left|\overset{\circledR}{AD}\right| = 1;\quad \left|\overset{\circledR}{A_1E}\right| = \left|\overset{\circledR}{EA}\right|.$$



Какой из векторов $\overset{\circledR}{BB_1};\ \overset{\circledR}{CC_1};\ \overset{\circledR}{A_1E};\ \overset{\circledR}{BD}$ является векторным произведением $\overset{\circledR}{BC}'\ \overset{\circledR}{BA}$?

Ответ: $\overset{\circledR}{A_1T}$.

1. Что происходит с векторным произведением при перестановке его сомножителей?

Д

2. В наших случаях векторное произведение равно нулю?
3. Чему равен векторный квадрат?

Задача 2. Сила $\vec{F} = 3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ приложена к точке $M\left(1;\ 2;\ -1\right)$. Найти момент силы относительно точки $A\left(2;\ 1;\ -3\right)$.

Решение

Из механического смысла векторного произведение

$$\overset{\rightarrow}{m_A F} = \overset{\circledR}{AM}'\ \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Найдем $\overset{\circledR}{AM};\quad \overset{\circledR}{AM} = \left\{-1;\ 1;\ 2\right\}$, а $\vec{F} = \left\{3;\ -1;\ 2\right\}$, тогда

$$\overset{\rightarrow}{m_A F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5i + j - 3k.$$

А как найти величину момента силы?

Задача 3. Даны точки $A\left(1;\ 2;\ 0\right),\quad B\left(3;\ 0;\ -3\right),\quad C\left(5;\ 2;\ 6\right).$

Вычислить $S\Delta ABC$ и h_B.

Решение

$$S\Delta = \frac{1}{2} S_{\square} = \frac{1}{2}\left|\overset{\circledR}{AB} \times \overset{\circledR}{AC}\right|, \quad \overset{\circledR}{AB} \times \overset{\circledR}{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \{-12; -24; 8\}.$$

$$\Delta S = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 14 кв.ед.$$

$$h_B = \frac{2S_{\Delta}}{\left|\overset{\circledR}{AC}\right|} = \frac{28}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 6^2}} = \frac{28}{2\sqrt{13}} = \frac{14\sqrt{13}}{13}.$$

1. Дайте определение смешанного произведения. Что является результатом: вектор, скаляр?
2. Рассказать по плакату о геометрическом смысле смешанного произведения.

Задача 4. Лежат ли точки

$$A(-4; 0; 1), \quad B(9; -2; 1), \quad C(1; 3; -1), \quad D(3; 0; 5)$$

в одной плоскости?

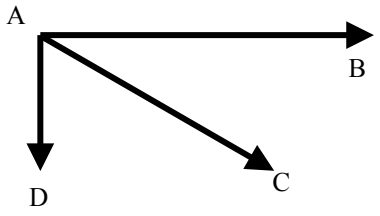
Решение

Условие компланарности $\overset{\circledR}{AB}\,\overset{\circledR}{AC}\,\overset{\circledR}{AD} = 0$. Найдем

$$\overset{\circledR}{AB} = \{13; -2; 0\},$$

$$\overset{\circledR}{AC} = \{5; 3; -2\},$$

$$\overset{\circledR}{AD} = \{8; 0; 4\}.$$



Подсчитаем смешанное произведение

$$\overset{\circledR}{AB}\,\overset{\circledR}{AC}\,\overset{\circledR}{AD} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{\circledR}{AB}, \overset{\circledR}{AC}, \overset{\circledR}{AD}$$

одной плоскости, а следовательно A, B, C, D принадлежит одной плоскости.

Резерв. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами в точках

$$D(3;-1;2),\quad A(3;2;0),\quad B(-1;2;3),\quad C(2;1;-3).$$

Ответ: $V = 8\frac{5}{6}$ ед^3.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, для которых $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 6$ и $\varphi = (\bar{a}\hat{\ }\bar{b}) = \frac{5\pi}{6}$. Найти:

   а) $|\bar{a} \times \bar{b}|$; б) $|(2\bar{a} + 3\bar{b}) \times (\bar{a} - 4\bar{b})|$.

   Ответ: а) 6; б) 66.
2. Найти площадь и высоту BD треугольника с вершинами A(1, -2, 8), B(0, 0, 4) и C(6, 2, 0).

   Ответ: $S = 7\sqrt{5}$, $BD = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.
3. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\bar{b} = -3\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = 2\bar{j} + 5\bar{k}$. Выяснить, правой или левой является тройка векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$.

   Ответ: V = 51, тройка векторов левая.
4. Построить пирамиду с вершинами O(0, 0, 0), A(5, 2, 0), B(2, 5, 0) и C(1, 2, 4). Вычислить:

   а) объем пирамиды;

   б) площадь грани ABC;

   в) высоту пирамиды, опущенную на грань ABC.

   Ответ: а) 14; б) $6\sqrt{3}$; в) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.
5. Вычислить произведение $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a})$.

   Ответ: 0.
6. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках A(2, 1, -1), B(3, 0, 1), C(2, -1, 3). Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

   Ответ: D(0, 8, 0) или D(0, -7, 0).
7. Дано: $|\bar{a}| = 1, |\bar{b}| = 2, \varphi = (\bar{a}\hat{\ }\bar{b}) = 2\pi/3$. Найти: $|\bar{a} \times \bar{b}|, |(\bar{a} + 2\bar{b}) \times (-\bar{a} + 3\bar{b})|$.
8. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$=(8,4,1) и $\bar{b}$=(2,-2,1).
9. При каком значении λ векторы $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + \lambda\bar{k}, \bar{b}$ =(0,1,0) и $\bar{c}$ =(3,0,1) компланарны?
10. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$=(1,-2,1), $\bar{b}$=(3,2,1), $\bar{c}$ =(1,0,-1).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.

Цель: решать задачи на составление различных уравнений плоскости.
Знать: различные уравнения плоскости и ее алгоритм построения.
Уметь: решать задачи на составление различных уравнений плоскости.
Владеть: методами исследования уравнений плоскости.
Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:

ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение методами аналитической геометрии в пространстве.

Решение типовых задач

Задача 1**.** Найти уравнение плоскости параллельной оси Oz и проходящей через точки $A=(2;3;-1),\quad B(-1;2;4)$

Решение

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точки ***A*** и ***B***, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению плоскости. Получим

$$\begin{cases} 2A+3B+D=0 \\ -A+2B+D=0. \end{cases}$$

Методические указания. Вспомнить метод решения систем однородных линейных уравнений, метод Крамера. Обратить внимание курсантов на множество решений данной системы.

$$\begin{cases} 2A+3B=-D \\ -A+2B=-D, \end{cases} \quad \text{пусть} \quad \begin{matrix} D=t \\ \Delta\neq 0. \end{matrix}$$

Используем формулы Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4+3=7,$$

$$\Delta A=\begin{vmatrix} -t & 3 \\ -t & 2 \end{vmatrix}=-2t+3t=t; \quad \Delta B=\begin{vmatrix} 2 & -t \\ -1 & -t \end{vmatrix}=-2t-t=-3t.$$

$$A=\frac{t}{7}; \qquad B=-\frac{3t}{7}; \quad D=t.$$

Тогда уравнение плоскости примет вид: $\frac{t}{7}x-\frac{3t}{7}y+t=0,$ после преобразований разделим на $t\neq 0$,

$$t\,x - 3\,t\,y + 7\,t = 0,$$

$$x - 3y + 7 = 0.$$

Ответ: $x - 3y + 7 = 0.$

Задача 2. Какие отрезки на координатных осях отсекает плоскость

$$2x + 3y - 5z + 30 = 0?$$

Проблема: Какое из известных уравнений плоскости выбрать для решения задачи?

Ответ: уравнение в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

Решение

$$2x + 3y - 5z + 30 = 0;$$

$$\frac{2x}{-30} + \frac{3y}{-30} + \frac{-5z}{-30} = 1;$$

$$\frac{x}{-15} + \frac{y}{-10} + \frac{z}{6} = 1.$$

Ответ: $a = -15;\quad b = -10;\quad c = 6.$

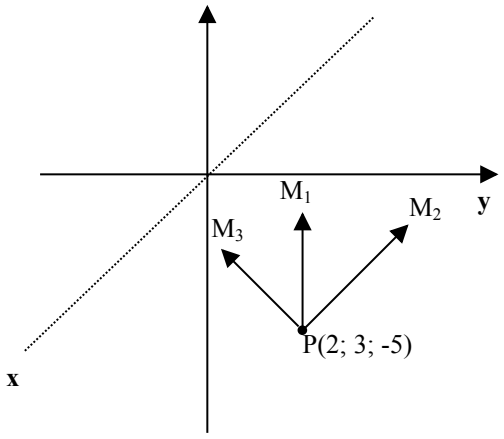
Задача 3. Из точки $P\left(2;\,3;\,-5\right)$ на координатные плоскости опущены перпендикуляры. Найти уравнение плоскости, проходящей через их основания.

Проблема. Какими будут координаты точек, через которые нужно провести плоскость?

Какое уравнение плоскости взять для решения задачи?

Решение

Точка M_1 лежит на координатной плоскости xOy, следовательно, координата $z = 0.\quad M_1\left(2;\,3;\,0\right).$



Аналогично: $M_2\left(2;\,0;\,-5\right),\ M_3\left(0;\,3;\,-5\right).$ Используем уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Методические указания

Сначала записать это уравнение в общем виде, затем использовать координаты точек $M_1;\,M_2;\,M_3.$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1-1 & 0-2 & 4+1 \\ -2-1 & -1-2 & 1+1 \end{vmatrix}=0.$$

Какие методы вычисления определителей вы знаете?
Вычислим определитель одним из них.

Ответ: $x-y+1=0$.

Задача 4**.** Через точку $M(2;3;-1)$ провести плоскость параллельно плоскости

$$2x-3y+5z-4=0.$$

Решение

Уравнение связки плоскостей, проходящих через точку M имеет вид:

$$A(x-2)+B(y-3)+C(z+1)=0.$$

Используем условие параллельности плоскостей

$$\frac{A}{2}=\frac{B}{-3}=\frac{C}{5}=k;\quad A=2k;\quad B=-3k;\quad C=5k;\quad 2k(x-2)-3k(y-3)+5k=0;$$

$$k\neq 0;$$

после преобразований получим $2x-3y+5z+10=0$.

Ответ: $2x-3y+5z+10=0$.

Задача 5**.** Найти угол между плоскостями

$$x+2z-6=0 \quad \text{и} \quad x+2y-4=0.$$

Решение

$$\cos\varphi=\frac{1+0+0}{\sqrt{1+4}\times\sqrt{1+4}}=\frac{1}{5}.$$

Ответ: $\varphi=\pm\arccos\frac{1}{5}$.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Аналиическая геометрия в пространстве».

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(4,-4,2)$ и параллельной плоскости Oxz.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5,4,3)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2,-3,1)$, параллельно векторам $\bar{a}=(-3,2,1)$ и $\bar{b}=(1,2,3)$.
4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0,2,0)$, $M_2(2,0,0)$ и образующей угол 60^0 с плоскостью x=0.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(7,6,7)$, $M_2(5,10,5)$ и $M_3(-1,8,9)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №8

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Цель: изучить функции и их свойства.
Знать: понятие функции, способы ее задания и основные характеристики.
Уметь: находить область определения функции, область значений, определять характеристики функций, строить графики функций с помощью преобразований
Владеть: навыками исследования функций и построения их графиков.
Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение понятием функции, способами ее задания и основными характеристики.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Дайте определение функции одной переменной.
2. Что называется областью определения и областью значений функции одной переменной.
3. Дать сравнительный анализ способов задания функции.
4. Дайте определение обратной функции.
5. Какая функция называется заданной параметрически?
6. Что понимается под множеством?
7. Дайте определение интервала, сегмента, окрестности точки. Какова их геометрическая интерпретация.
8. Каков геометрический смысл:

а) $|x| < R$, б) $|x| > R$, в) $|x| = R$, г) $|x - a| < R$, д) $|x - a| > R$, ж) $|x - a| = R$.

Примеры решения задач

1. Найти область определения функции.

Методические рекомендации:

1.Найти область определения функции: $y = \frac{1}{ln(1 - x)} + \sqrt{x + 2};$

Решение.

$$y = \frac{1}{ln(1 - x)} + \sqrt{x + 2}; \quad \begin{cases} 1 - x > 0, \\ ln(1 - x) \neq 0, \\ x + 2 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1, \\ 1 - x \neq 1, \\ x \geq -2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x \neq 0, \\ x \geq -2. \end{cases}$$

$x \in [-2; 0) \cup (0; 1)).$

2. Найти область определения функции: $f\left(x\right)=\sqrt{x}-\sqrt{x-9}.$

Решение.

В данном примере – радикал четной степени, поэтому область определения задается системой неравенств $\begin{cases} x\geq 0, \\ x\geq 9; \end{cases}\Rightarrow\ x\geq 9.$

Ответ: $\left[9;+\infty\right).$

3. Найти область определения функции: $f\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{3x+14}{3x-1}}.$

Решение.

$\dfrac{3x+14}{3x-1}\geq 0,\ \dfrac{x+\dfrac{14}{3}}{x-\dfrac{1}{3}}\geq 0.$ Методом интервалов находим $x>\dfrac{1}{3},\ x\leq -\dfrac{14}{3}.$

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{14}{3}\right]\cup\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$

4. Найти область определения функции: $f\left(x\right)=\lg\left(x+7\right)-\dfrac{1}{2}\lg\left(2x-1\right).$

Решение.

Область определения данной функции задается системой неравенств

$\begin{cases} x+7>0, \\ 2x-1>0; \end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases} x>-7, \\ x>\dfrac{1}{2}; \end{cases}\Leftrightarrow\ x>\dfrac{1}{2}.$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

5. Найти область определения функции: $f\left(x\right)=\log_{\frac{x-1}{x+5}}0,3.$

Решение.

Область определения данной функции задается системой неравенств

$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+5}>0, \\ \dfrac{x-1}{x+5}\neq 1; \end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases} x<-5, x>1, \\ x\text{ - любое;} \end{cases}\Leftrightarrow\ x<-5, x>1.$

Ответ: $\left(-\infty;-5\right)\cup\left(1;+\infty\right).$

6. Найти область определения функции: $f\left(x\right)=\lg\left(x-1\right)-\arcsin\dfrac{x}{3}.$

Решение.

Область определения данной функции задается системой неравенств

$\begin{cases} x-1>0, \\ -1\leq\dfrac{x}{3}\leq 1; \end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases} x>1, \\ -3\leq x\leq 3; \end{cases}\Leftrightarrow\ 1<x\leq 3.$

Ответ: $(1;3]$.

2. ***Определить четность фунции.***.

Методические рекомендации:

1. Определить четность функции $f(x)=\frac{x^2}{cos2x}$.

Решение.

$f(-x)=\frac{(-x)^2}{cos(-2x)}=\frac{x^2}{cos2x}=f(x)$, т.к. $f(-x)=f(x)$, следовательно функция четная.

2. Определить четность или нечетность функции: $y=2^x$.

Решение.

$y=2^x;\quad y(-x)=2^{-x}=\frac{1}{2^x}$ ì $y(x)$ / î $-y(x)$ -- ни четная, ни нечетная.

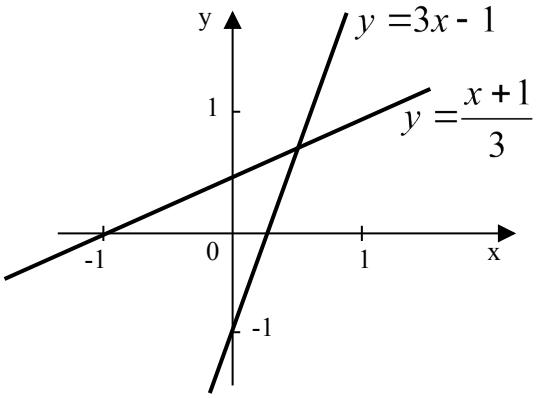
3. ***Найти функцию обратной данной и построить график.***

Методические рекомендации:

1. Найти функцию обратной данной $y=3x-1$ и построить график.

Решение

$x=\frac{y+1}{3}$ или $y=\frac{x+1}{3}$.



2. Найти обратные функции:

1) $y=x^3;$

Решение.

Выразим x из функции, а затем обозначим аргумент через x, а функцию через y, получим функцию обратную данной $x = \sqrt[3]{y}; \quad y = \sqrt[3]{x}$;

2) $y = e^x;$

Решение.

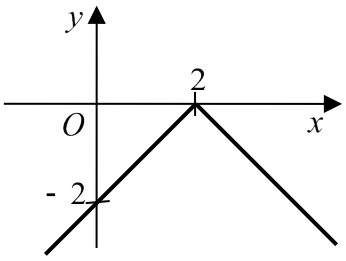
$y = e^x; \quad x = ln\ y; \quad y = ln\, x.$

4. Построить график функции $y = -|x - 2|$.

Решение.

1) если $x - 2 \geq 0$ то $|x - 2| = x - 2$ и $y = -x + 2$ для $x \geq 2$;

2) если $x - 2 < 0$ то $|x - 2| = -(x - 2)$ и $y = x - 2$ для $x < 2$.



5. Определить при каких x будут справедливы неравенства:

а) $|x| > 2$, б) $|x - 1| \leq 3$, в) $|x - 3| < 2$, д) $|x^2 + 6x + 8| > 0$.

4. Найти период функции.

Методические рекомендации:

1. Найти период функции: $f(x) = 10sin3x$.

Решение.

$10sin(3x + 2\pi) = 10sin\left(3\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)\right); T = \frac{2\pi}{3}$.

Для функций y=sin x и y=cos x наименьший положительный период $T = 2\pi$*, а для y=tg x и y=ctg x наименьший положительный период* $T = \pi$.

2. Найти период функции: $f(x) = ctg\frac{3x}{2}$.

Решение.

$$ctg\frac{3x}{2} = ctg\left(\frac{3x}{2} + \pi\right) = ctg\left(\frac{3}{2}x + \frac{2\pi}{3}\right);\ T = \frac{2\pi}{3},$$

3. $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$.

Решение.

Область определения функции – вся числовая ось Ox, кроме точек $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$. Следовательно, если точка x принадлежит области определения данной функции, то точки $x + 2\pi$, $x - 2\pi$ также принадлежат этой области определения;

$$f(x + 2\pi) = \frac{\cos(x + 2\pi)}{1 + \sin(x + 2\pi)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} = f(x).$$

Ответ: наименьший период данной функции $T = 2\pi$.

4. $f(x) = |\sin x|$.

Решение.

Областью определения функции $f(x)$ является вся числовая ось Ox; для любого x точки $x + \pi$ и $x - \pi$ принадлежат этой области определения,

$$f(x + \pi) = |\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x).$$

Ответ: данная функция является периодической с периодом π.

5. $f(x) = 3\sin x + \sin 2x$.

Решение.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что число π не является периодом данной функции.

Возьмем

$$T = 2\pi,\ f(x + 2\pi) = 3\sin(x + 2\pi) + \sin 2(x + 2\pi) = 3\sin x + \sin 2x = f(x).$$

Ответ: $T = 2\pi$ - наименьший положительный период данной функции.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант	5 вариант
Задача 1. Определить при каких x будут справедливы неравенства:				
$\lvert x - 5\rvert \geq 2$	$\lvert x - 1\rvert \leq 3$	$\lvert x - 3\rvert < 2$	$\lvert x - 4\rvert > 2$	$\lvert x^2 - 5x + 6\rvert > 0$
Задача 2. Найти область определения функции:				
$y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5 - x}}$	$y = \dfrac{5}{1 - x}$	$y = \dfrac{2}{\sqrt{x + 5}}$	$y = \dfrac{1}{ln(3 - x)}$	$y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$
Задача 3. Определить четность:				

$y = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$f(x) = x^3 + 2x$	$f(t) = lg\frac{1-t}{1+t}$	$f(x) = \frac{x^2}{cos2x}$	$f(x) = \frac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right)$
Задача 4. Найти период функции:				
$y = cos\frac{x}{3}$	$f(x) = tg\frac{3x}{2}$	$y = sin\,3x\,cos\,3x;$	$y = 2cos\frac{x}{4}$	$f(x) = ctg\frac{3x}{2}$
Задача 5 . Найти обратные функции:				
$y = x^3 + 3$	$y = 2e^x$	$y = 2^x - 7$	$y = 5^{-x} + 5$	$y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №9

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ.

Цель: изучить предел функции и способы его нахождения.
Знать:, определение предела функции, основные теоремы о пределах.
Уметь: находить предел и раскрывать неопределенности.
Владеть: техникой вычисления пределов.
Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение техникой вычисления пределов.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Определение предела функции в точке и его геометрический смысл.
2. Теорема единственности предела.
3. Свойства функции, имеющей конечный предел в точке.
4. Односторонние пределы и их геометрическая интерпретация.
5. Теорема о необходимом и достаточном условиях существования предела функции в точке.
6. Предел функции на бесконечности.
7. Определение бесконечно малой величины, примеры.
8. Свойства бесконечно малых величин.
9. Определение бесконечно больших величин.
10. Сравнение бесконечно малых величин.

Примеры решения задач

1. ***Найти предел функции.***

Методические рекомендации:

Задача 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

Доказательство

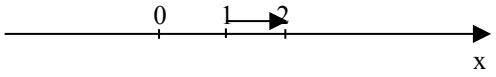
$\dfrac{2x+3}{3x}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2x+3-2x}{3x}-\dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, т.е. разность $\left(\dfrac{2x+3}{3x}-\dfrac{2}{3}\right)$ бесконечно малая величина $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

Задача 2. Найти предел функции:

а) $y=\dfrac{5}{2-x}$ при $x\to 2-$ (слева).

Решение:

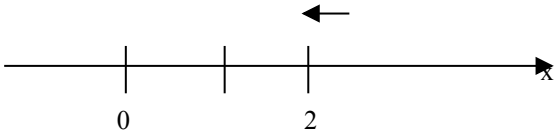
Переменная стремится к точке $x=2$, оставаясь все время меньше 2,



следовательно, разность $2-x>0$ и сама дробь положительна. Тогда по свойству знакопостоянства, получим, $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{5}{2-x}=\infty$.

б) $y=\lim\dfrac{5}{2-x}$ при $x\to 2+$ (справа).

Решение:



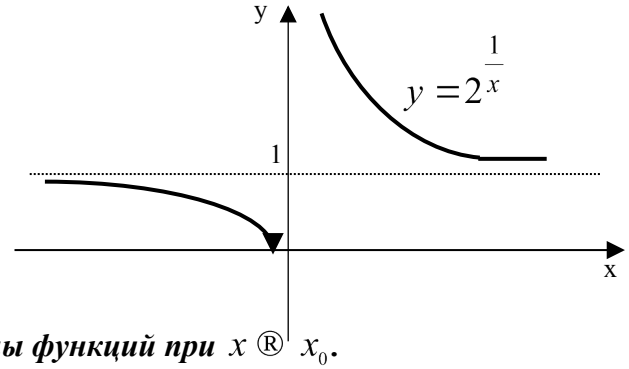
Переменная стремится к точке $x=2$, оставаясь все время больше 2, следовательно, разность $2-x<0$ и сама дробь отрицательна. Тогда по свойству знакопостоянства, получим,

$\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{5}{2-x}=-\infty$

Задача 3. Найти предел функции $y=2^{\frac{1}{x}}$ при $x\to 0-$; $x\to 0+$.

1) При $x\to 0-$ переменная $x<0$, следовательно, $\dfrac{1}{x}<0$. Преобразуем функцию таким образом, чтобы показатель степени был положительным, получим $\dfrac{1}{2^{-\frac{1}{x}}}$. В этом случае, дробь $-\dfrac{1}{x}>0$, т.е. показатель степени положителен и $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{2^{-\frac{1}{x}}}=0$,

2) $\lim\limits_{x \to 0+} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$.



2. Найти пределы функций при $x \to x_0$**.**

Методические рекомендации:

Задача 1. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x^2 - 7x + 2}{x - 1}$.

Решение:

Замечаем, что при $x \to 1$ знаменатель $x - 1$ и числитель дроби стремятся к нулю. Получили неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности нужно числитель и знаменатель дроби разложить на простейшие сомножители и сократить дробь на нулевой множитель $(x - 1)$.

Чтобы числитель разложить на множители, надо решить квадратное уравнение $5x^2 - 7x + 2 = 0$

$$\lim_{x \to 1} \frac{5x^2 - 7x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{5(x - 1)\left(x - \frac{2}{5}\right)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(5x - 2) = 3.$$

Задача 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{x + 1}}{x}$;

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 - \sqrt{x + 1}\right)\left(1 + \sqrt{x + 1}\right)}{x\left(1 + \sqrt{x + 1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x\left(1 + \sqrt{x + 1}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{1 + \sqrt{x + 1}} = -\frac{1}{2}.$$

3. Найти пределы функций при x ® ¥ ***:***

Методические рекомендации:

Задача 1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 1}{5x^2 + 2x}$;

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-0}{5+0}=\frac{3}{5}$$

Числитель и знаменатель дроби нужно разделить почленно на степень x наибольшую в числителе и знаменателе и воспользоваться тем, что величина обратная бесконечно большой является бесконечно малой.

4. ***Вычислить пределы, используя замечательные пределы и эквивалентности бесконечно малых величин.***

Методические рекомендации:

Задача 1. Использовать первый замечательный предел: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

а) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3;$

б) $\lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}=\lim\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right)}{t}=\lim\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t}=\frac{\pi}{2};$

$1-x=t;\ x=1-t;\ t\to 0.$

в) $\lim_{x\to\infty}x\cdot arcctgx=$ положим: $arcctgx=\alpha;\ x=ctg\alpha;\ \alpha\to 0.$

$=\lim_{\alpha\to 0}\alpha\cdot ctg\alpha=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha=1.$

Задача 2. Использовать второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;\ \lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e;\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k;\ \lim_{\alpha\to 0}\left(1+k\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e^{\alpha}.$$

а) $\lim_{x\to 0}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{x}}=e^2;$

б) $\lim_{x\to 0}\left(1-4x\right)^{\frac{1-x}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\left(-4x\right)\right)^{\frac{1}{-4x}}\right)^{\frac{-4x}{1}\cdot\frac{(1-x)}{x}}=e^{-4x};$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}=\{1^{\infty}\}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1-2}{2x+1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x-1}\right)^{2x}=$$

в)

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{-2}}\right]^{\frac{-2}{2x-1}\cdot 2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{2x-1}}=e^{-2}$$

Задача 3. Показать, что $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$ при $x\to 0$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ \frac{x}{2}\to 0}}\frac{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\times\frac{x}{2}}=1\times 1=1$$

Задача 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$.

Решение.

Обозначим $\arcsin x=t$. Тогда $x=\sin t$ и $t\to 0$.Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}=\frac{1}{1}=1.$$

Следовательно, $\arcsin x\sim x$ при $x\to 0$.

Задача 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin 3x}$.

Решение. Т.к. $tg2x\sim 2x,\quad \sin 3x\sim 3x$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых при $x\to 0$

1)	$\sin x\sim x$.
2)	$\arcsin x\sim x$.
3)	$\operatorname{tg} x\sim x$.
4)	$\operatorname{arctg} x\sim x$.
5)	$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$.
6)	$\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$ $(a>0,\ a\neq 1)$.
6′)	$\ln(1+x)\sim x$.
7)	$a^x-1\sim x\ln a$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

$7')$	$e^x - 1 \sim x$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Вариант 1

Вычислить: 1. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$; 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+x} - 1}$; 4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{x+5}$.

Вариант 2

Вычислить: 1. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} tg7x \cdot ctg2x$; 3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$; 4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1 + 4x}{3 + 4x}\right)^{2x}$

Вариант 3

Вычислить: 1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$; 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$; 4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + 8}{x - 2}\right)^{x}$.

Вариант 4

Вычислить: 1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 8x + 12}{x^3 - 8}$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{3x^2 + 2x}$; 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg7x}{\sin 3x}$; 4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x - 1}{2x + 1}\right)^{4x}$

Вариант 5

Вычислить: 1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$; 2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}$; 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 12x}{tg4x}$; 4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{5}{x}\right)^{3x+2}$.

Вариант 6

Вычислить: 1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5 + 3x^3}{5x^4 + 2x^3}$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} ctg2x \cdot \sin 3x$; 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 + 2x}{\sqrt{1+x} - 1}$; 4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x + 1}{3x - 2}\right)^{2x+5}$

Вариант 7

Вычислить: 1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + x - 6}$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{5}}{3x^2}$; 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{9+x} - 3}$; 4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{3}{2x}\right)^{x+5}$

Вариант 8

Вычислить: 1. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{18x^2 - 9x + 1}{27x^3 - 1}$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ctg7x}{ctg2x}$; 3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{(x+1)\sqrt{2+x}}$; 4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3 - 4x}{1 - 4x}\right)^{2x-3}$

Вариант 9

Вычислить: 1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 + x^2 - 2x - 8}$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 6x}{tg5x}$; 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{2x}$; 4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{7x - 8}{7x + 2}\right)^{x+1}$

Вариант 10

Вычислить: 1. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x + 2}$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 + 2x}{\sqrt[3]{8-x} - \sqrt[3]{8+x}}$; 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x^2}{1 - \cos x}$; 4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x - 3}{2x + 4}\right)^{4x+1}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №10

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ.

Цель: изучить производную функции.
Знать: понятие производной, правила дифференцирования и таблицу производных основных элементарных функций
Уметь: находить производные сложных и простых функций
Владеть: техникой дифференцирования основных элементарных функций.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение понятием производной, правила дифференцирования и таблицу производных основных элементарных функций.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Дать определение производной функции.
2. Сформулировать геометрический смысл.
3. Сформулировать физический смысл производной функции.
4. Записать уравнение касательной, нормали к кривой.
5. Сформулировать необходимое условие дифференцируемости.
6. Записать формулу для производной сложной функции.
7. Дифференцирование функций, заданных неявно.
8. Дифференцирование функций заданных параметрически.
9. Дифференцирование степенно-показательной функции

Примеры решения задач

1. Найти производные функций, применяя таблицу производных и правила дифференцирования:

1) $\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5\right)$;

Решение.

$$\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5\right) = \frac{1}{3}\left(x^3\right) - 2\left(x^2\right) + 4 \times x - 5 = x^2 - 4x + 4;$$

2) $\left(x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}\right)$;

Решение.

$$\left(x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{5x^5}\right)'=x'+\left(x^{-2}\right)'-\frac{1}{5}\left(x^{-5}\right)'=1-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^6}.$$

3) $\left(x^2\cos x\right)'$;

Решение.

$$\left(x^2\cos x\right)'=\left(x^2\right)'\cos x+x^2\left(\cos x\right)'=2x\cos x-x^2\sin x.$$

4) $\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)'$;

Решение.

$$\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'\left(x^2+1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\left(x^2+1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Методические рекомендации:

Обратить внимание та то, что таблицу производных надо знать наизусть, чтобы свободно ею пользоваться.

1.	$C'=0$	**15.**	$\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'$
2.	$x'=1$	**16.**	$\left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$
3.	$\left(u+v-w\right)'=u'+v'-w'$	**17.**	$\left(tgu\right)'=\frac{u'}{\cos^2 u}=\sec^2 u\cdot u'$
4.	$\left(u\cdot v\right)'=u'v+uv'$	**18.**	$\left(ctgu\right)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}=-\operatorname{cosec}^2 u\cdot u'$
5.	$\left(c\cdot u\right)'=c\cdot u'$	**19.**	$\left(\sec u\right)'=\sec u\cdot tgu\cdot u'$
6.	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$	**20.**	$\left(\operatorname{cosec} u\right)'=-\operatorname{cosec} u\cdot ctgu\cdot u'$
7.	$\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{cv'}{v^2};$	**21.**	$\left(\arcsin u\right)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\ \lvert u\rvert<1$
8.	$\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c};$	**22.**	$\left(\arccos u\right)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\ \lvert u\rvert<1$
9.	$\left(u^n\right)'=n\cdot u^{n-1}u'$	**23.**	$\left(arctgu\right)'=\frac{u'}{1+u^2}$
10.	$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	**24.**	$\left(arcctgu\right)'=-\frac{u'}{1+u^2}$
11.	$\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'$	**25.**	$\left(shu\right)'=chu\cdot u'$

12.	$\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u', \ \left(e^{x}\right)' = e^{x}$	**26.**	$\left(chu\right)' = shu \cdot u'$
13.	$\left(\log_{a} u\right)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$	**27.**	$\left(thu\right)' = \frac{u'}{ch^{2} u}$
14.	$\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}; \ \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$	**28.**	$\left(cthu\right)' = -\frac{u'}{sh^{2} u}$

2. Найти производные функций с помощью теоремы о производной сложной функции:

Методические рекомендации:

1) $\left(\left(1 - 5x\right)^{4}\right)'$;

Решение.

$\left(\left(1 - 5x\right)^{4}\right)' = 4\left(1 - 5x\right)^{3}\left(1 - 5x\right)' = -20\left(1 - 5x\right)^{3}$.

2) $\left(\ln\left(x^{2} + 2x\right)\right)'$;

Решение.

$\left(\ln\left(x^{2} + 2x\right)\right)' = \frac{\left(x^{2} + 2x\right)'}{2^{2} + 2x} = \frac{2x + 2}{x^{2} + 2x}$.

3) $\left(a^{\sin x}\right)'$;

Решение.

$\left(a^{\sin x}\right)' = a^{\sin x} \cdot \ln a \cos x$.

4) $\left(arc\sin\frac{x}{a}\right)'$;

Решение.

$\left(arc\sin\frac{x}{a}\right)' = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^{2}}{a^{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{a^{2} - x^{2}}}$.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1.Найти производную следующих функций:

1) $y = x \ln x$;

2) $y = \frac{1 + \ln x}{x}$;

3) $y = \lg\left(5x\right)$;

4) $y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^{2}}$;

5) $y = \ln\left(x^{2} + 2x\right)$

6) $y = \ln\left(1 + \cos x\right)$;

7) $y = \ln \sin x - \frac{1}{2}\sin^{2} x$;

8) $y = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x + 1}\right)$

9) $y = ln\dfrac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$;

10) $y = ln\dfrac{x^2}{1 - x^2}$;

11) $y = ln\, tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$

12) $y = ln\sqrt{\dfrac{1 + 2x}{1 - 2x}}$;

13) $y = ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$

14) $y = 2\sqrt{x} - 4ln\left(2 + \sqrt{x}\right)$

15) $y = \dfrac{cos\, x}{sin^2 x} + ln\, tg\dfrac{x}{2}$;

16) $y = ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1 - a\, x^4}}$.

1. Найти производные обратных тригонометрических функций

1) $y = \sqrt{1 - x^2} + arc\sin x$;

2) $y = x - arc\, tg\, x$;

3) $y = arc\sin\sqrt{1 - 4x}$;

4) $y = arc\sin\dfrac{x}{a}$;

5) $y = arc\, tg\dfrac{x}{a}$;

6) $y = arc\cos\left(1 - 2x\right)$;

7) $y = arc\, ctg\dfrac{1 + x}{1 - x}$;

8) $y = x\sqrt{1 - x^2} + arc\sin x$;

9) $y = arc\sin\left(e^{3x}\right)$

10) $y = arc\, tg\, x + ln\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$;

11) $y = arc\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

12) $y = x\, arc\, tg\dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{2}ln\left(x^2 + a^2\right)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 11

ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Цель: изучить производную функции.
Знать: понятие производной, правила дифференцирования и таблицу производных основных элементарных функций
Уметь: находить производные сложных функций
Владеть: техникой дифференцирования функций, заданных неявно, заданных параметрически и степенно-показательных функций.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение понятием производной, правила дифференцирования и таблицу производных основных элементарных функций.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Дать определение производной функции.
2. Сформулировать геометрический смысл.
3. Сформулировать физический смысл производной функции.
4. Записать уравнение касательной, нормали к кривой.
5. Сформулировать необходимое условие дифференцируемости.
6. Записать формулу для производной сложной функции.
7. Дифференцирование функций, заданных неявно.
8. Дифференцирование функций заданных параметрически.
9. Дифференцирование степенно-показательной функции

Примеры решения задач

1. Найти производную функции заданной неявно, пользуясь нужным правилом.

Методические рекомендации:

Дифференцирование функций, заданных неявно.

$$y' = -\frac{F_x'}{F_y'}$$

$x^2 + y^2 - 4xy - 10y + 4 = 0.$

Решение.

I способ. $2x + 2yy' - 4y - 4xy' - 10y' = 0, \quad yy' - 2xy' - 5y' = 2y - x,$

$$y' = \frac{2y - x}{y - 2x - 5}.$$

II способ. $F_x' = 2x - 4y,\ F_y' = 2y - 4x - 10,\ y' = -\frac{2x - 4y}{2y - 4x - 10} = \frac{2y - x}{y - 2x - 5}.$

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

Методические рекомендации:

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$

$x' = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t$

$y' = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t$

$$y' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{at\sin t}{at\cos t} = tgt.$$

3Найти производные степенно-показательных функций, используя логарифмическое дифференцирование: $y = x^x$.

Методические рекомендации:

Решение. $ln\, y = x\, ln\, x$, $\frac{y¢}{y} = ln\, x + x\frac{1}{x} = ln\, x + 1$, $y¢ = \left(ln\, x + 1\right)x^{x}$.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4вариант	5 вариант
$y = \left(x^2 + 1\right)^3$	$y = \left(3x^5 - x^2 + 2\right)^2$	$y = \sqrt{x^3 - 2}$	$y = \sqrt{x^2 + x + 1}$	$y = \left(2x^2 - 3x\right)^3$
$y = x^2 \cdot 2^x$;	$y = x^2 \cdot e^x$;	$y = \frac{1 + sin\, 2x}{x^2}$;	$y = xe^{sin\, x}$;	$y = \frac{cos\, x}{sin^2 x}$;
$y = ln\frac{e^x}{x^2 + 1}$;	$y = ln\frac{x^2}{1 - x^2}$;	$y = ln\frac{x^3 - 3}{2 + x^2}$;	$y = ln\sqrt{\frac{1 - 2x}{1 + 2x}}$;	$y = ln\frac{x^2 + 3}{x^2}$;
$5x^2 + 3y - 2y^2 + 2 = 0.$	$2x^3 + 4y^2 - 7y + 5 = 0.$	$3xy + 2y^3 + 7 = 0.$	$x^4 + 3x^2 y + 4y^2 - 2 = 0.$	$4x^3 + 3xy - 2y^2 - 8 = 0.$
$r = \left(cos\, a\right)^{sin\, 2a}$	$x^y = y^x$, $y_x¢ - ?$	$y = (sin\, x)^{cos\, x}$	$r = \left(cos\, 2a\right)^{sin\, a}$	$y = (sin\, 2x)^{cos\, 2x}$
$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t^3 - 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 - 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 4t^3 \\ y = t^4 + 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 2t^3 - 4 \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 12

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Цель: приложения дифференциального исчисления.
Знать: раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя и исследование функций по полной схеме.
Уметь: находить исследование функций на экстремум, находить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции, асимптот графика функции.
Владеть: техникой исследование функций и построения графика.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение техникой исследования функций и построения графика.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1) Какая функция называется убывающей, возрастающей, монотонной? Примеры.

2) Сформулировать признаки монотонности.
3) Что называется максимумом (минимум) функции в точке?
4) Что значит «функция имеет в точке экстремум»?
5) Сформулировать необходимый признак экстремума.
6) Какие точки называются стационарными, критическими, подозрительными на экстремум.
7) Сформулировать второе правило исследования на экстремум
8) Для какого вида неопределённостей применяется правило Лопиталя?
9) Сформулируйте правило Лопиталя, укажите основные условия его применения.
10) Какая функция называется убывающей (возрастающей)?
11) Что называется $max \ \ (min\ )$ функции?
12) Что можно узнать о функции и ее графике, используя элементарное исследование?
13) Что можно узнать о функции и ее графике, используя исследование с помощью 1-ой производной?
14) В каком случае график функции называется выпуклым, вогнутым?
15) Что называется точкой перегиба графика функции?
16) Что можно знать о функции и ее графике, используя исследование с помощью 2-ой производной?

Примеры решения задач

1. Найти пределы по правилу Лопиталя

Задача № 1. Неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 1}{\ln x} = \lim_{x \to 4} \frac{3x^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 4} 3x^3 = 3 .$$

Задача № 2. Неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \to 4} \frac{2x}{2x - 5} = \frac{8}{3} .$$

Задача № 3 . Неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx - x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x)\cos^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2$$

Здесь правило Лопиталя применили 1 раз.

Задача № 4 . Неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + b}{cx^2 + d} = \lim_{x \to \infty} \frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}$$

Задача № 5 . Неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = 2 \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Здесь правило Лопиталя применили 2 раза.

Задача № 6. Неопределённость вида $\infty - \infty$.

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x \ln x + x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}.$$

Задача № 7. Неопределенность вида $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0.$$

Задача № 8. Неопределенность вида $\infty - \infty$.

$$\lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} (\sec\varphi - \operatorname{tg}\varphi) = \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin\varphi}{\cos\varphi} = \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos\varphi}{-\sin\varphi} = 0.$$

2. Определить промежутки монотонности функции

Задача №9 $f(x) = 2x^2 - \ln x$.

Решение

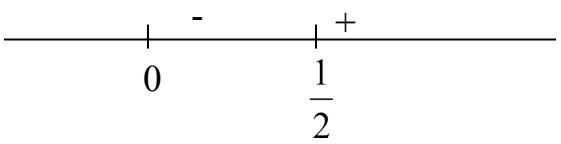
1. $D(f) = (0; +\infty)$.

2. $f'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$.

3. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2} \notin D(f)$; $x = \frac{1}{2}$ - критическая точка.

$f'(x) = \infty \Rightarrow x = 0$; но $0 \notin D(f)$.

4)



Ответ: на $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ - функция убывает, $y' < 0$;

на $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ - функция возрастает, т.к. $y' > 0$.

3. Исследовать на экстремум

Задача № 10. Дана функция $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$.

Решение

$D(f)=]-\infty;+\infty[;$

$y'=2-2x^{-\frac{1}{3}}=2\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)=2\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}};$

$y'=0;\quad \sqrt[3]{x}-1=0 \Rightarrow x=1$ критические точки.

$y'=\infty;\quad \sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow x=0$

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;1[$	1	$]1;+\infty[$
y'	+	не сущ.	_	**0**	+
y	↗	**0**	↘	**-1**	↗
		max		**min**	

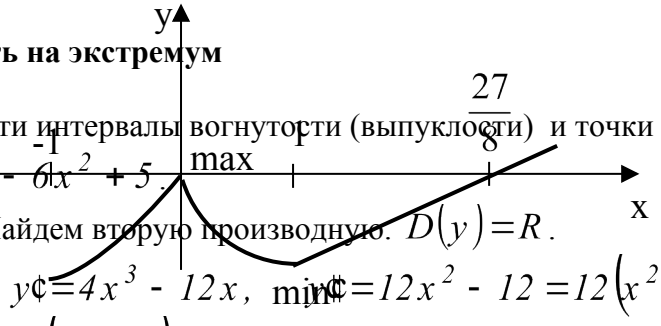
Нули функции:

1) Ось $OY;\quad x=0;\quad y=0$.

2) Ось $OX;\quad y=0;\quad 2x-3\sqrt[3]{x^2}=0;\quad \sqrt[3]{x^2}\left(2\sqrt[3]{x}-3\right)=0;$

$$2\sqrt[3]{x}=3;\quad x=\frac{27}{8}.$$

Построение графика.



2. Исследовать на экстремум

Задача № 11. Найти интервалы вогнутости (выпуклости) и точки перегиба графика функции: $y=x^4-6x^2+5$.

Решение. Найдем вторую производную. $D(y)=R$.

$y'=4x^3-12x,\quad y''=12x^2-12=12\left(x^2-1\right)$

Решим уравнение $12\left(x^2-1\right)=0,\quad x_{1,2}=\pm 1$.

Исследуем знак второй производной в окрестности точек $x_1=-1,\quad x_2=1$.

Составим таблицу.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	+	0	_	0	+
y	∪	$m.n$ 0	∩	$m.n$ 0	∪

$y(-1)=0;\quad y(1)=0$.

Задача 12. Найти интервалы вогнутости (выпуклости) и точки перегиба графика функции: $y = x^{\frac{4}{3}}$.

Решение. $D(y) = R$. Найдем вторую производную.

$$y' = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}; \qquad y'' = \frac{4}{9} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}.$$

Производная y'' нигде в нуль не обращается. Приравнивая знаменатель дроби к нулю, получаем $9\sqrt[3]{x^2} = 0; \quad x = 0$. В точке $x = 0$ вторая производная не существует $(y''(0) = \infty)$. Исследуем знак второй производной в окрестности этой точки:

$$y''(-\infty; 0) > 0; \qquad y''(0; +\infty) > 0.$$

Точек перегиба нет.
На интервале $(-\infty; +\infty)$ вогнутость кривой направлена вверх.

3. Найти асимптоты

Задача 13. Найти асимптоты функции $y = \frac{x^2 - x - 6}{x - 2}$.

Решение. $D(y) = R$, кроме $x = 2$. Данная функция имеет вертикальную асимптоту $x = 2$. Найдем односторонние пределы.

$$\lim_{x \to 2-} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = +\infty; \qquad \lim_{x \to 2+} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = -\infty.$$

Определим наклонную асимптоту $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx).$$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x(x - 2)} = \lim_{x \to} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - 6}{x - 2} = 1$$

$$y = x + 1.$$

4. Исследовать по полной схеме и построить график функции

Задача 14. Исследовать по полной схеме и построить график функции

$$y = \sqrt[3]{x^2} e^x.$$

1) $D(f) = R$;
2)ни четная, ни нечетная, симметрии графика нет;
3)функция положительна, график весь над осью OX.

4). $y = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{x^2} \times e^x = e^x\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right) = e^x \frac{3x+2}{3\sqrt[3]{x}}$;

$y' = O_x$ при $x = -\frac{2}{3}$;

$y' = \infty$ при $x = O$.

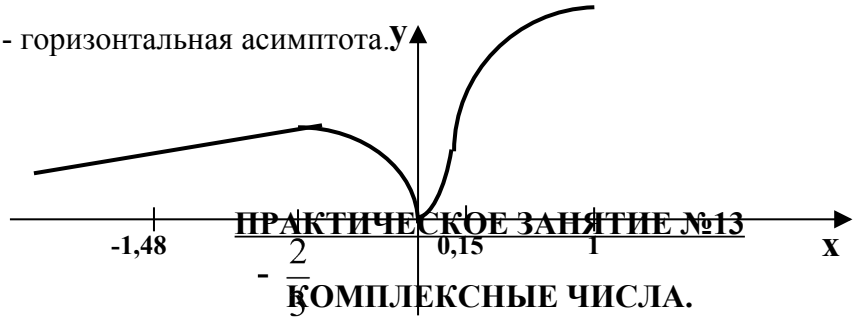
5) $y' = e^x \frac{9x^2 + 15x - 1}{9x\sqrt[3]{x}} = e^x \frac{9(x - 0{,}15)(x + 1{,}48)}{9x\sqrt[3]{x}}$;

$y'' = 0$ при $x_1 = 0{,}15$ и $x_2 = -1{,}48$.

	$(-\infty; -1{,}48)$	$-1{,}48$	$(-1{,}48; -\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3}; 0)$	0	$(0; 0{,}15)$	$0{,}15$	$(0{,}15; +\infty)$
y'	+	+	+	0	-	∞	+		+
y''	+	+	-		0	∞	-	0	+
y		Перегиб $y = 0{,}26$		max $y = 0{,}3918$		min $y = 0$		Перегиб $y = 0{,}32799$	

Строим график функции

Ось OX - горизонтальная асимптота.



ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №13

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

Цель: изучить действия над комплексными числами в форме в алгебраической форме.
Знать: формы представления комплексных чисел.
Уметь: выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме, находить модуль и аргумент комплексного числа.
Владеть: техникой перевода чисел из одной формы в другую.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение техникой применения комплексных чисел.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Дать понятие комплексного числа в алгебраической форме.
2. Дать геометрическую интерпретацию комплексных чисел, объяснить смысл числовой сферы и стереографической проекции.
3. Модуль и аргумент комплексного числа.
4. Чем удобно определение комплексного числа как упорядоченной пары действительных чисел?
5. Какие комплексные числа называются равными, сопряженными?
6. Произведение каких комплексных чисел дает действительное число?
7. Как найти частное двух комплексных чисел?
8. Сколько существует различных значений корня степени n из комплексного числа?
9. Какие комплексные числа называются равными, сопряженными?
10. Произведение каких комплексных чисел равно действительному числу?

Примеры решения задач

Задача 1.Указать точки и построить векторы, изображающие комплексные числа:

$z_1 = 1 + i;$ $z_2 = 1 - i;$ $z_3 = 1 - 2i;$ $z_4 = -3 - 4i;$ $z_5 = 2i;$

$z_6 = 2;$ $z_7 = -3;$ $z_8 = 2 + 2i;$ $z_9 = -1 - i;$ $z_{10} = -i.$

Задача 2. Выполнить сложение комплексных чисел:

$z_1 = -3 + 2i$; $z_2 = 13 - i$.

$z_1 = 2 + i$; $z_2 = 1 + 3i$; $z_3 = -1 + 2i$.

$z_1 = 3 + i$; $z_2 = -2 + 3i$; $z_3 = -3 - 2i$; $z_4 = 4 - 3i$.

(0,4 – 4,2i) + (1,5 + 0,6i) + (1,1 – 0,2i) .

Решение.

$z_1 + z_2$ = (-3 + 2i) +(13 – i) = (-3 + 13) + (2 – 1)i = 10 + i .

$z_1 + z_2 + z_3$ = (2 + i) + (1 + 3i) + (-1 +2i) = (2 + 1 – 1) + (1 + 3 + 2)i = 2 + 6i.

$z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ = (3 + i) + (-2 + 3i) + (-3 –2i) + (4 – 3i) = (3 – 2 – 3 + 4) + (1 + 3 – 2 – 3)i = 2 – i.

(0,4 – 4,2i) + (1,5 + 0,6i) + (1,1 – 0,2i) = (0,4 + 1,5 + 1,1) + (- 4,2 + 0,6 – 0,2)i = 3 – 3,8i.

Задача 3. Найти комплексное число z из равенства ***2 + 3i = z + 4 + i.***

Решение.

Пусть ***z = x + yi*** . Тогда ***2 + 3i = x + yi + 4 + i*** или

2 + 3i = (x + 4) + + (y + 1)i.

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда соответственно равны их действительные и мнимые части. Следовательно,

$$x + 4 = 2, \qquad y + 1 = 3.$$

Решив эту систему, найдем $x = -2, y = 2$. Таким образом, $z = -2 + 2i$.

Задача 4 . Найти разность комплексных чисел:

$z_1 = -5 + 2;\ z_2 = 10 - i$

$z_1 = -3 - 2i;\ z_2 = 13 - i.$

Решение.

$z_1 - z_2 = (-5 + 2i) - (10 - i) = (-5 - 10) + (2 + 1)i = -15 + 3i.$

$z_1 - z_2 = (-3 - 2i) - (13 - i) = -16 - i.$

Задача 5. Найти произведение комплексных чисел:

$z_1 = 3 + 2i;\ z_2 = -1 - i.$

$z_1 = -3 + 2i;\ z_2 = 13 - i.$

Решение. Нужно помнить, что $i^2 = -1$

$z_1 z_2 = (3 + 2i)(-1 - i) = -3 - 3i - 2i - 2i^2 = -1 - 5i.$

$z_1 z_2 = (-3 + 2i)(13 - i) = -39 + 3i + 26i + 2 = -37 + 29i.$

Задача 6. Найти частное от деления комплексного числа z_1 на число z_2 :

$z_1 = 13 - i;\ z_2 = -3 + 2i$

$z_1 = 2 + 3i;\ z_2 = 2 - i.$

$z_1 = 5 + i;\ z_2 = 1 + i.$

$z_1 = 10 - i;\ z_2 = -5 + 2i.$

Решение. Числитель и знаменатель дроби умножаем на число, сопряженное знаменателю. В результате в знаменателе получается действительное число, на которое и делим числитель

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{13 - i}{-3 + 2i} = \frac{(13 - i)(-3 - 2i)}{(-3 + 2i)(-3 - 2i)} = \frac{-39 - 26i + 3i - 2}{9 + 4} = \frac{-41 - 23i}{13} = -\frac{41}{13} - \frac{23}{13}i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 + 3i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{4 + 2i + 6i - 3}{4 + 1} = \frac{1 + 8i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i.$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5+i}{1+i}=\frac{(5+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{5+i-5i+1}{1+1}=\frac{6-4i}{2}=3-2i\,.$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{10-i}{-5+2i}=\frac{(10-i)(-5-2i)}{(-5+2i)(-5-2i)}=\frac{-50+5i-20i-2}{25+4}=\frac{-52-15i}{29}=-\frac{52}{29}-\frac{15}{29}i\,.$$

Задача 7**.** Записать комплексное число $z=\dfrac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$ в алгебраической форме.

Решение.

$$z=\frac{5+i}{(1+i)(2-3i)}=$$

$$=\frac{5+i}{2+2i-3i+3}=\frac{5+i}{5-i}=\frac{(5+i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\frac{24+10i}{26}=\frac{12}{13}+\frac{5}{13}i\,.$$

Задача 8**.** Найти значение i^{59}, i^{318}.

Решение.

При делении числа ***59*** на ***4*** имеем: ***59*** = $14\times 4+3$, поэтому $i^{59}=i^{14\times 4+3}=$

$=(i^4)^{14}\,i^3=1\,(-i)=-i.$

При делении числа ***318*** на ***4*** имеем**:** ***318*** = $79\times 4+2$, поэтому $i^{318}=$

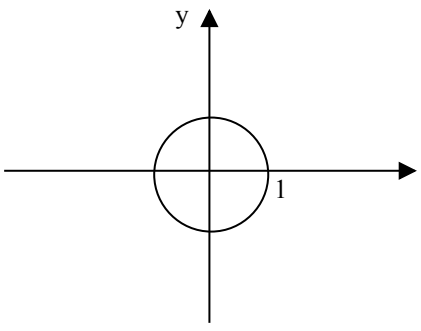
$=i^{79\times 4+2}=(i^4)^{79}\,i^2=1\,(-1)=-1.$

Задача 9. Дать геометрическое описание множества всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям

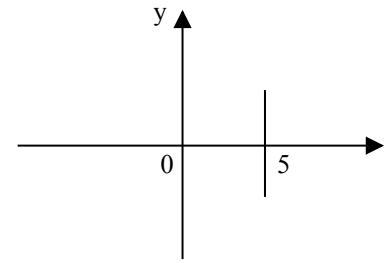
1)

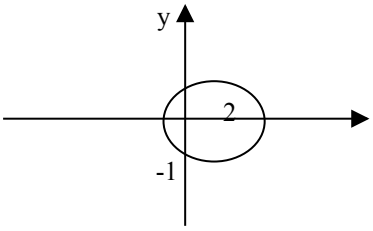
$$|z|=1;\quad |x+iy|=1\sqrt{x^2+y^2}=1;$$

$$x^2+y^2=1$$



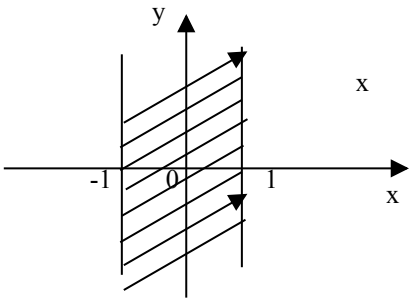
2) $|z - 2 + i| = 3;$ $|z - (2 - i)| = 3$ - окружность с центром в точке $(2;-1)$, радиуса 3.



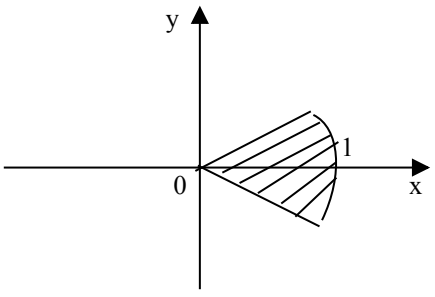


3) $Re Z = 5;$ $z = x + iy \Rightarrow x = 5.$

4) $|Re Z| < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1.$



5) $|z| < 1;$ $-\frac{\pi}{4} < arc\alpha < \frac{\pi}{4}.$



Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{1+i}{2+3i}$.
2. Вычислить в алгебраической форме $\left(\frac{2-4i}{3+i}\right)$.
3. Вычислить в алгебраической форме $\frac{2-5i}{-1-2i}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №14

ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ЗАПИСАННЫМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ.

Цель: изучить действия над комплексными числами.
Знать: формы представления комплексных чисел.
Уметь: выполнять действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме, находить модуль и аргумент комплексного числа.
Владеть: техникой перевода чисел из одной формы в другую.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение техникой применения комплексных чисел.

Теоретическая часть
Ответить на контрольные вопросы:

1. Дать понятие комплексного числа в алгебраической форме.
2. Дать геометрическую интерпретацию комплексных чисел, объяснить смысл числовой сферы и стереографической проекции.
3. Модуль и аргумент комплексного числа.
4. Чем удобно определение комплексного числа как упорядоченной пары действительных чисел?
5. Какие комплексные числа называются равными, сопряженными?
6. Произведение каких комплексных чисел дает действительное число?
7. Как найти частное двух комплексных чисел?
8. Сколько существует различных значений корня степени n из комплексного числа?
9. Какие комплексные числа называются равными, сопряженными?
10. Произведение каких комплексных чисел равно действительному числу?

Примеры решения задач

1. **Найти модуль и аргумент комплексного числа**

Задача 1. $z_4 = 1 + i$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \quad \varphi = arctg1 = \frac{\pi}{4}.$$

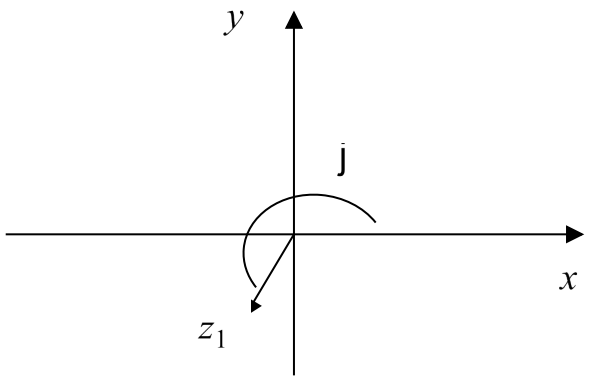
Так как z_4 принадлежит первой четверти, то $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Задача 2. $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$

Найдем модуль комплексного числа $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

и аргумент $\varphi = arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = arctg\sqrt{3}$.

Построим число $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$



Так как $x < 0$ и $y < 0$, то число z_1 расположено в третьей четверти комплексной плоскости, тогда его аргументом будет число

$$\varphi = arctg\sqrt{3} + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Задача 3. $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$

Модуль равен $r = \sqrt{12 + 4} = 4$; аргумент

$$\varphi = arctg\left(\frac{-2}{2\sqrt{3}}\right) = arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Так как $x > 0$ и $y < 0$, то число z_2 расположено в четвертой четверти и его аргументом будет число

$$\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11}{6}\pi.$$

Задача 13. $z_3 = -2\sqrt{3} + 2i$

$$r = \sqrt{12+4} = 4;\ \varphi = arctg\left(\frac{2}{-2\sqrt{3}}\right) = arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Так как $x < 0$ и $y > 0$, то число z_3 расположено во второй четверти и его аргументом будет число $\varphi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$.

Задача 14. $z_5 = 1$, **т.е.** $z_5 = 1 + 0 \cdot i$

$$r = 1,\ \varphi = arctg0 = 0.$$

Для всех действительных, положительных чисел arg z = 0

$$z_5 = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

Задача 15. $z_6 = i$, т.е. $z_6 = 0 + 1 \cdot i;\ r = 1$.

Для всех чисто мнимых чисел с положительной мнимой частью arg z = π/2, значит

$$\varphi = \frac{\pi}{2},\qquad z_6 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Задача 16. $z_7 = -2$, т.е. $z_7 = -2 + 0 \cdot i;\quad r = 2$.

Для всех действительных отрицательных чисел arg z = π, значит

$$\varphi = \pi,\qquad z_7 = 2(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Задача 4. $z_8 = -2i$, т.е. $z_8 = 0 - 2 \cdot i;\quad r = 2$. ***Для всех чисто мнимых чисел с отрицательной мнимой частью*** $arg\, z = \frac{3}{2}\pi$ ***, значит***

$$\varphi = \frac{3\pi}{2},\qquad z_8 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right).$$

Задача №5. Выполнить действие: $(1+i)^{10}$.

Это удобно сделать в тригонометрической форме по формуле Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi)$$

Переводим число $z = 1 + i$ в тригонометрическую форму

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\varphi=arctg1=\frac{\pi}{4}$$

$z=\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$ и выполним действие

$$z^{10}=\left(1+i\right)^{10}=\left[\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10}=\left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(cos\frac{10}{4}\pi+i\,sin\frac{10}{4}\pi\right)=$$

$$=2^5\left(cos\frac{5}{2}\pi+i\,sin\frac{5}{2}\pi\right)=32\left(0+i\right)=32i$$

Задача № 6. Найти все значения $\sqrt[5]{1}$.

Решение

Так как $1=1(cos\,0^\circ+i\,sin\,0^\circ)$, то

$$\sqrt[5]{(cos\,0^\circ+i\,sin\,0^\circ)}=1\left(cos\frac{0+2\pi k}{5}+i\,sin\frac{0+2\pi k}{5}\right)$$

(k = 0, 1, 2, 3, 4).

Придавая k последовательно значения 0, 1, 2, 3, 4, соответственно получаем:

$$z_1=1;\ z_2=cos\frac{2\pi}{5}+i\,sin\frac{2\pi}{5};\ z_3=cos\frac{4\pi}{5}+i\,sin\frac{4\pi}{5};$$

$$z_4=cos\frac{6\pi}{5}+i\,sin\frac{6\pi}{5};\ z_5=cos\frac{8\pi}{5}+i\,sin\frac{8\pi}{5}.$$

Задача № 7. .Вычислить $\sqrt[3]{i}$.

Действие извлечения корня из комплексного числа выполняется в тригонометрической форме по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\,sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)k=0,1,...,n-1.$$

$$z=i,r=\sqrt{0^2+1^2}=1,\varphi=arctg\frac{1}{0}=\frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}}=cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3},k=0,1,2.$$

$$k=0,\sqrt[3]{i}=cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$k=1,\sqrt[3]{i}=cos\frac{5}{6}\pi+i\,sin\frac{5}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$k=2,\sqrt[3]{i}=cos\frac{3}{2}\pi+i\,sin\frac{3}{2}\pi=-i$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Вариант 1

1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{1+i}{2+3i}$.
2. Записать в тригонометрической форме $\left(2\sqrt{3}-6i\right)$.
3. Извлечь корень $\sqrt[3]{i}$.

Вариант 2

1. Вычислить в алгебраической форме $\left(\frac{2-4i}{3+i}\right)$.
2. Записать в тригонометрической форме $\left(4-4\sqrt{3}i\right)$.
3. Извлечь корень $\sqrt[3]{-1}$.

Вариант 3

1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{2-5i}{-1-2i}$.
2. Записать в тригонометрической форме $3-3i$.
3. Извлечь корень $\sqrt[3]{2+2i}$.

Вариант 4

1.Вычислить в алгебраической форме $\frac{1+i}{2+3i}$.
2. Записать в тригонометрической форме $\left(2\sqrt{3}-2i\right)$.
3. Извлечь корень $\sqrt{3+4i}$

Вариант 5

1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{-1+2i}{1+3i}$.
2. Записать в тригонометрической форме $2+2\sqrt{3}i$.
3. Извлечь корень $\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}$

Вариант 6

1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{5-i}{1+i}$.
2. Записать в тригонометрической форме $-5-5\sqrt{3}i$.
3. Извлечь корень $\sqrt{3-4i}$.

Вариант 7

1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{1-i}{1+4i}$.
2. Записать в тригонометрической форме $\left(2\sqrt{3}-2i\right)$.
3. Извлечь корень $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$.

Вариант 8 1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{2-i}{3-2i}$. 2. Записать в тригонометрической форме $\sqrt{3}-i$. 3. Извлечь корень $\sqrt[3]{2+2i}$.
Вариант 9 1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{-1-3i}{2+3i}$. 2. Записать в тригонометрической форме $\left(-4\times\sqrt{3}-4i\right)$. 3. Извлечь корень $\sqrt[3]{2-2i}$.
Вариант 10 1. Вычислить в алгебраической форме $\left(\frac{1+2i}{3-i}\right)$. 2. Записать в тригонометрической форме $-7+7\sqrt{3}i$. 3. Извлечь корень $\sqrt[3]{-2-2i}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №15

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

Цель: изучить понятие первообразной функции и неопределенного интеграла.
Знать: основные правила интегрирования.
Уметь: интегрировать с помощью формул и простейших приемов.
Владеть: навыками интегрирования.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение навыками интегрирования.

Теоретическая часть
Ответить на контрольные вопросы:

1. Первообразная функция. Теорема об общем виде первообразной.
2. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.
3. Таблица основных интегралов.
4. Метод непосредственного интегрирования.
5. Метод интегрирования подстановкой.
6. Метод интегрирования по частям.

Решение типовых задач

Задача 1.В следующих равенствах заполнить пропущенные места:

1) $d(\quad)=2xdx$

Решение:

Дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал независимой переменной, значит нужно найти функцию, производная которой равна $2x$. Это x^2.

2) $d(\quad)=x^3dx$ Ответ: $\frac{x^4}{4}$

3) $d(\quad)=\cos x\,dx$ Ответ: $\sin x$

4) $d(\quad)=\frac{dx}{x}$ Ответ: $\ln x$

Задача 2. Найти интегралы

1) $\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx$

Решение:

Студент должен сформулировать правила интегрирования (интеграл от суммы u о постоянном многочлене) и взять интегралы по формулам:

$$\int x^2dx+2\int x\,dx+\int\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{x}+2\frac{x^2}{2}+\ln x+c$$

2):

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\int x^{-\frac{3}{4}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}}+c=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+c$$

3):

$$\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx=\int e^xdx-\int x^{-2}dx=e^x-\frac{x^{-1}}{-1}+c=e^x+\frac{1}{x}+c$$

4)

$$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2x\sin^2x}dx=\int\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x\times\sin^2x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2x}-\int\frac{dx}{\cos^2x}=-ctg\,x-tg\,x+c$$

разделим числитель почленно на знаменатель

Задача 3. Вычислить интеграл $\int\cos 3x\,dx$

Решение:

Интеграл не является табличным. Табличный выглядит так: $\int\cos u\,du$, для того, чтобы данный интеграл стал табличным, надо иметь $\int\cos 3xd3x$, но $d3x=3dx$, т.е. внесение постоянного множителя k под знак дифференциала увеличивает дифференциал в k раз: $dx=\frac{1}{k}d(kx)$ поэтому имеем:

$$\frac{1}{3}\int\cos 3xd(3x)=\frac{1}{3}\sin 3x+c$$

Задача 4. Вычислить интеграл:

$$\int \sin\frac{x}{2}dx = 2\int \sin\frac{x}{2}d\frac{x}{2} = -2\cos\frac{x}{2} + c$$

Задача 5. Вычислить интеграл:

$$\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}\int e^{-3x}d(-3x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + c$$

Задача 6. Вычислить: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

Решение:

Выделим полный квадрат в многочлене $x^2+2x+3 = (x+1)^2 + 2$, запишем интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}} = \left|\begin{matrix}заменим \\ x+1=t,\ \ dx=dt\end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+2}\right| + C =$$

вернемся к старой переменной

$$\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+2}\right| + C = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right| + C.$$

Замечание: Такой интеграл можно вычислить и непосредственно, помня, что введение постоянного слагаемого под знак дифференциала последнего не меняет, т.е. $d(x+1) = dx$

Имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+2}} = \ln\left|x+1+\sqrt{(x-1^2+2)}\right| + C =$$

В этом

$$= \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right| + C$$

случае не нужно возвращаться к старой переменной и время решения сокращается.

Задача 7. Вычислить: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-(x^2+2x+1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}} = \left|\begin{matrix}x+1=t \\ dx=dt\end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

Задача 8. Вычислить: $\int xe^{2x}dx$

Решение:

Видим, что из двух множителей x и e^{2x}, первый упрощается после дифференцирования, а второй не изменяется, ни от дифференцирования, ни от интегрирования, получим:

$$\int xe^{2x}dx = \left|\begin{matrix}u = x & du = dx \\ dv = e^{2x}dx & v = \frac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right| = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Непосредственное интегрирование».

1. Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7}dx$ 2) $\int \frac{dx}{1-10x}$ 3) $\int \frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}}dx$ 4) $\int \frac{\sin x\,dx}{1+3\cos x}$

5) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ 6) $\int \sin^2 x\cos x\,dx$ 7) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^4 x}$ 8) $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$

9) $\int e^{x^3}x^2dx$ 10) $\int \sqrt{x^2+1}\,x\,dx$ 11) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ 12) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Методы интегрирования».

1. Вычислить интегралы подстановкой:

а) $\int \frac{x^2dx}{4+x^6}$ б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-x^4}}$.

2. . Вычислить интегралы по частям:

а) $\int e^x \sin x\,dx$ б) $\int x\,arc\,tg\,x\,dx$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №16

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ.

Цель: научиться интегрировать рациональные дроби.
Знать: основные методы интегрирования рациональных дробей.
Уметь: интегрировать рациональные дроби.
Владеть: методом неопределенных коэффициентов, методом частных значений и комбинированным методом.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение навыками интегрирования.

Теоретическая часть
Ответить на контрольные вопросы:

1. Первообразная функция. Теорема об общем виде первообразной.
2. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.
3. Таблица основных интегралов.
4. Метод непосредственного интегрирования.
5. Метод интегрирования подстановкой.
6. Метод интегрирования по частям.

Решение типовых задач

Задача 1. Вычислить интеграл: $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx$

Решение:

Находя корни знаменателя, видим, что действительных корней нет, т.к. $D=-16$, т.е. знаменатель сам является простым множителем с действительными коэффициентами. Данный интеграл представляет из себя простейшую дробь III типа. Решая этот пример, нужно выделить в числителе производную знаменателя, т.е.

$$\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx=\int \frac{\frac{5}{2}(2x+2)-7}{x^2+2x+10}dx=\frac{5}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x-10}dx-7\int \frac{dx}{(x-1)^2+9}=$$

$$=\frac{5}{2}ln|x^2+2x+10|-arctg\frac{x+1}{3}+C$$

Задача 2. Вычислить интеграл: $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$

Решение:

Разложим знаменатель под интегральной дроби на простые множители:

$\frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)}$ и представим эту правильную дробь как сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами $\frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$

Подберем коэффициенты A,B,C так, чтобы сумма дробей была равна исходной дроби, для этого приведем к общему знаменателю правую часть выражения и учитывая, что дроби равны, знаменатели равны, приравняем числители дробей:

$3x^2+2x-3=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$

Для нахождения A,B,C применим **метод частных значений**:

пусть $x=0;\quad -3=-A$, откуда $A=3$

пусть $x=1;\quad 2=2B,\quad$ откуда $B=1$

пусть $x=-1;\quad -2=2C$, откуда $C=-1$

Данный интеграл можно теперь представить в виде суммы трех интегралов от простейших дробей, имеем:

$$\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx=3\int \frac{dx}{x}+\int \frac{dx}{x-1}-\int \frac{dx}{x+1}=$$

$$=3ln|x|+ln|x-1|-ln|x-1|+lnC=ln\frac{Cx^3(x-1)}{x-1}$$

Замечание: C - произвольная постоянная, поэтому в качестве C можно взять lnC - что тоже является произвольной постоянной. Воспользовавшись свойством логарифма, ответ можно записать компактнее.

Задача 3. Вычислим интеграл: $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}$

Решение:

Группируя члены в знаменателе, разложим его на простые множители $x^2(x+1)+4(x+1)=(x+1)(x^2+4)$.

Второй множитель второй степени не имеет действительных корней и на линейные множители не разлагается.

Имеем: $\frac{2x^2+x+4}{(x+1)(x^2+4)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x^2+4}$

$$2x^2+x+4=A(x^2+4)+(Bx+C)(x+1) \qquad (*)$$

Для нахождения A, B, C применим **метод неопределенных коэффициентов**, т.е. условие того, что, если многочлены равны, то равны коэффициенты при одинаковых степенях переменного. Приравняем коэффициенты при $x^2,\ x,\ x^0$ справа и слева в выражении $(*)$

$$\begin{aligned} x^2 \quad & 2=A+B \\ x \quad & 1=B+C \\ x^0 \quad & 4=4A+C \end{aligned}$$

Получили систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными, решив ее, получим значения коэффициентов A, B, C.

Наиболее удобен **комбинированный метод**, т.е. частных значений и неопределенных коэффициентов. Если в равенстве $(*)$ положить $x=-1$ получим $5=5A$, $A=1$. Подставляя $A=1$ в систему уравнений, получим $B=1,\ C=0$.

Используя значения A, B, C, имеем

$$\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}dx=\int \frac{dx}{x+1}+\int \frac{x}{x^2+4}dx=ln|x+1|+\int \frac{xdx}{x^2+4}=$$

$$=ln|x+1|+\frac{1}{2}ln|x^2+4|+ln C=ln C|x+1|\sqrt{x^2+4}$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Интегрирование рациональных функций».

1) Вычислить интеграл: $\int \frac{7x-15}{x^3-2x+5x}dx$

Ответ: $3ln\frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|}+2arctg\frac{x-1}{2}+C$

2) Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{x^3+8}$

Ответ: $\frac{1}{24} ln \frac{(x+2)^2}{x^2 - 2x + 4} + \frac{1}{4\sqrt{3}} arctg \frac{x-1}{\sqrt{3}} + c$

3) Вычислить интеграл: $\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2 (x^2+1)} dx$

Ответ: $ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} - \frac{1}{x+1} - arctg\, x + C$

4) Вычислить интеграл: $\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

Ответ: $ln\, Cx(x-1) + \frac{2}{x-1}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №17

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

Цель: изучить понятие первообразной функции и определенного интеграла
Знать: основные правила интегрирования определенного интеграла, формулу Ньютона-Лейбница.
Уметь: интегрировать с помощью формул и простейших приемов.
Владеть: навыками интегрирования.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение навыками интегрирования.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Геометрический и физический смысл определенного интеграла.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Оценки определенного интеграла. Теорема о среднем.
4. Определенный интеграл как функция верхнего предела.
5. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
6. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
7. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
8. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Примеры решения задач

Задача 1. Вычислить:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\, 4x\, dx$.

Решение:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4}\left(-1-1\right) = \frac{1}{2}.$$

2. $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+tg^2 x}{\left(1+tgx\right)^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 x\,dx}{\left(1+tgx\right)^2} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1+tgx\right)^{-2} d\left(1+tgx\right) = -\frac{1}{1+tgx}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}-2}{2\left(1+\sqrt{3}\right)} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,d\left(\cos x\right) = -\frac{\cos^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}\left(0^3 - 1^3\right) = \frac{1}{3}.$$

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\, 2\sin x\cos x\,dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\,d\left(\cos x\right) =$$

$$= -2\frac{\cos^7 x}{7}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{7}\left(0^7 - 1^7\right) = \frac{2}{7}.$$

Задача 2. Вычислить подстановкой:

1)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = \left|\begin{array}{ll} tg\frac{x}{2} = t & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} & t_1 = -1;\ t_2 = 1 \end{array}\right| = \int_{-1}^{1} \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2+1-t^2} = 2\int_{-1}^{1} \frac{dt}{2} = \int_{-1}^{1} dt = t\Big|_{-1}^{1} = 1+1 = 2.$$

2). $$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{ll} x = \sin t & 1-x^2 = \cos^2 t \\ dx = \cos t & t_1 = 0;\quad t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t\cos t\right)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \frac{1}{8}\left(t + \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}0 - 0 - 0\right) = \frac{\pi}{16}.$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Методы интегрирования в определённом интеграле».

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$$

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1} \qquad \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №18

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА.

Цель: изучить понятие первообразной функции и определенного интеграла
Знать: основные правила интегрирования определенного интеграла, формулу Ньютона-Лейбница.
Уметь: интегрировать с помощью формул и простейших приемов.
Владеть: навыками интегрирования.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение навыками интегрирования.

Теоретическая часть

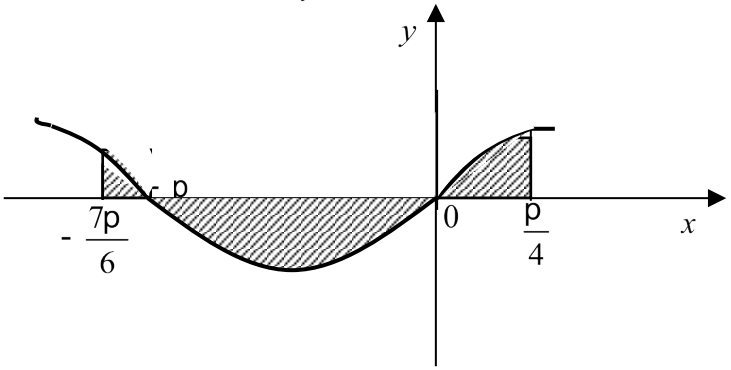
Ответить на контрольные вопросы:

1. Геометрический и физический смысл определенного интеграла.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Оценки определенного интеграла. Теорема о среднем.
4. Определенный интеграл как функция верхнего предела.
5. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
6. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
7. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
8. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sin x$, прямыми $x = -\frac{7\pi}{6}, \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad y = 0.$

Решение. Функция $y = \sin x$ знакопеременна на интервале $\left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$.



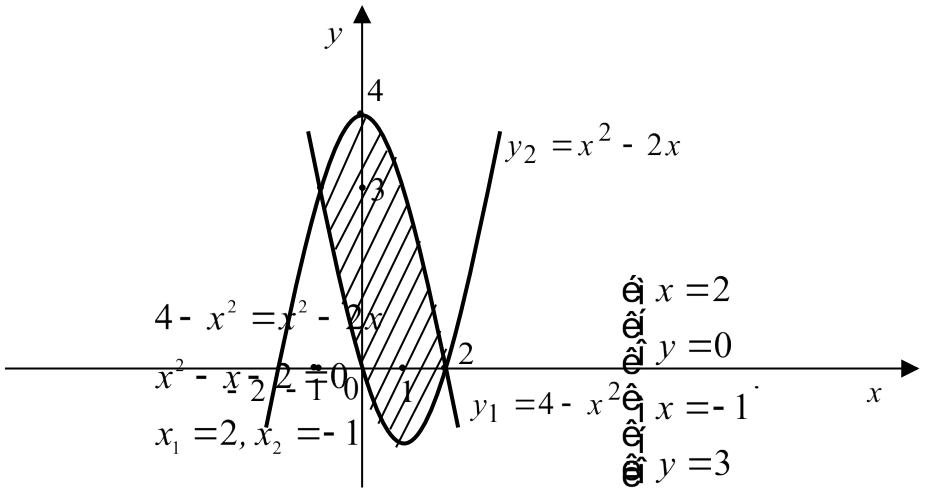
Поэтому для вычисления площади фигуры воспользуемся формулой: $S=\int_a^b |f(x)|dx.$

$$S=\int_{-\frac{7\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin x|dx=\int_{-\frac{7\pi}{6}}^{-\pi} \sin x dx-\int_{-\pi}^{0} \sin x dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx=$$

$$=-\cos x\Big|_{-\frac{7\pi}{6}}^{-\pi}+\cos x\Big|_{-\pi}^{0}-\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}+2-\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{8-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y=4-x^2,\quad y=x^2-2x.$

Решение. Найдём точки пересечения парабол. Для этого решим систему уравнений $\begin{cases} y=4-x^2 \\ y=x^2-2x. \end{cases}$



Получили две точки $A(2;0), B(-1;3).$

Найдём площадь фигуры:

$$S=\int_a^b (y_1-y_2)dx=\int_{-1}^{2}(4-x^2-x^2+2x)dx=2\int_{-1}^{2}(2-x^2+x)dx=$$

$$=2\left(2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2}=10.$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1 вариант

1. $\int \frac{dx}{x^2-3}$ 2. $\int \frac{x^2dx}{x^3+1}$ 3. $\int (x-2)\cos 5xdx$

4. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=6x-x^2$ *и осью* $OX.$

2 вариант

1. $\int \frac{dx}{x^2+3}$ 2. $\int (x^2+1)^4 x dx$ 3. $\int (3x-2)e^{2x} dx$

4. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$y = \frac{1}{2}x^2 + 2,\ y = 0, x = 1, x = 3$

3 вариант

1. $\int e^{3x+1} dx$ 2. $\int \frac{x\ dx}{x^2+4}$ 3. $\int (4x+1)\sin 3x dx$

4. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$y = -x^2 + 4$ и $y = 0.$

4 вариант

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$ 2. $\int (x^2+1)^6 x dx$ 3. $\int (3x+1)\cos 2x dx$

4. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$y = x^2$ и $y = 2x.$

5 вариант

1. $\int (2x+1)^7 dx$ 2. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ 3. $\int (2x-3)e^{3x} dx$

4. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$y = x + 1$ и $y = 4 + 3x - x^2.$

Вариант для бонусных баллов

1. $\int \frac{dx}{1-10x}$ 2. $\int \frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}} dx$ 3. $\int e^{x^4} x^3 dx$ 3. $\int e^x \sin x\, dx$

4. Найти площадь фигуры, ограниченную линиями $y^2 = x^3,\ y = 8,\ x = 0.$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №19

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Цель: изучить понятие функции нескольких переменных
Знать: основные правила дифференцирования функции нескольких переменных
Уметь: уметь находить область определения, линии и поверхности уровня, предел, исследовать на непрерывность функции нескольких переменных.
Владеть: методами дифференцирования функции нескольких переменных.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:

ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение методами дифференцирования функции нескольких переменных.

Теоретическая часть
Ответить на контрольные вопросы:

1. Функции нескольких переменных.
2. Функции двух, трех переменных и области их определения.
3. Линии уровня.
4. Предел функции нескольких переменных.
5. Непрерывность функции нескольких переменных.
6. Частные приращения и частные производные функции нескольких переменных.
7. Полное приращение функции.
8. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
9. Производная сложной функции нескольких переменных.
10. Полная производная.

Примеры решения задач

1) Вычислить частные значения функции:

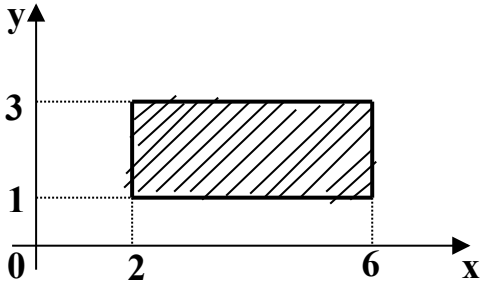
а) $f(x,\ y)=\sqrt{x^2 - y^2}$ при $x=5,\ y=-3.$ Ответ: $f(5,\ -3)=4.$

б) $U=ln\dfrac{x+z}{2y-z}$ в точке $A(6,\ 2,\ -1).$ Ответ: $U(A)=0$

2) Построить область ***Д*** изменения переменных ***Х*** и ***У***, заданную следующими неравенствами:

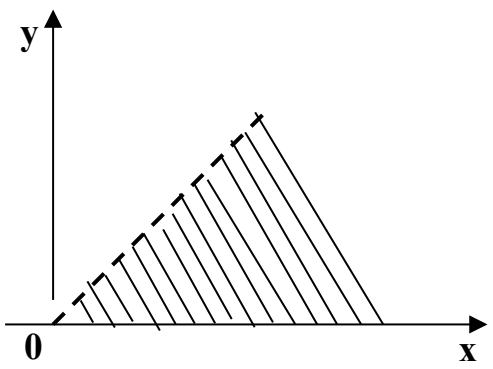
а) $2 \le x \le 6,$
$1 \le y \le 3.$

Ответ:



б) $0 < y < x.$

Ответ:



Резерв. в) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1.$ г) $4 \le x^2 + y^2 \le 9.$

3) Найти область определения следующих функций:

а) $z = 4 - x - 2y, \quad D(z) = \{x, y \in R\}.$

б) $P = \frac{3}{x^2 + y^2}, \quad D(z) = \{x. y \in R / x \neq 0 \ \ u \ \ y \neq 0\}.$

в) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \ D(z) = \{x, y \in R / x^2 + y^2 \le 1\}.$

г) $u = ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$ - часть пространства заключается внутри двуполостного гиперболоида.

Резерв.

д) $g = \frac{1}{\sqrt{xy}},$ в) $u = \frac{x^2 y}{2x + y},$ ж) $u = arc\sin(x + y),$ з) $u = \frac{1}{ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}.$

4) Найти линии уровня функций:

а) $u = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = c$ - концентрические окружности с центром в начале координат.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №20

Дифференцирование функции нескольких переменных

Цель: изучить понятие функции нескольких переменных
Знать: основные правила дифференцирования функции нескольких переменных
Уметь: уметь находить область определения, линии и поверхности уровня, предел, исследовать на непрерывность функции нескольких переменных.
Владеть: методами дифференцирования функции нескольких переменных.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение методами дифференцирования функции нескольких переменных.

Теоретическая часть
Ответить на контрольные вопросы:

1. Функции нескольких переменных.
2. Функции двух, трех переменных и области их определения.
3. Линии уровня.
4. Предел функции нескольких переменных.
5. Непрерывность функции нескольких переменных.
6. Частные приращения и частные производные функции нескольких переменных.
7. Полное приращение функции.
8. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
9. Производная сложной функции нескольких переменных.
10. Полная производная.

Примеры решения задач

1). Найти частные производные функции:

а) $z = x^3 + 5xy^2 - y^3$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 5y^2; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 10xy - 3y^2.$$

б) $z = e^{-xy}$ в точке $P(0; 1)$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{-xy}\right)_x' = e^{-xy}\left(-xy\right)_x' = e^{-xy}\left(-y\right) = -ye^{-xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big/_{P(0;1)} = -1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{-xy}\right)_y' = e^{-xy}\left(-xy\right)_y' = e^{-xy}\left(-x\right) = -xe^{-xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big/_{P(0;1)} = 0.$$

в) $z = e^{x^2+y^2}$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}.$$

г) $r = u^4 \cos^2 f$.

Ответ: $\frac{\partial r}{\partial u} = 4u^3 \cos^2 f$,

$$\frac{\partial r}{\partial f} = -u^4 \sin 2f.$$

д) $u = arc\,tg\frac{y}{xz}$. Найти $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(arc\,tg\frac{y}{xz}\right)'_z = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{xz}\right)^2} \times \left(\frac{y}{xz}\right)'_z = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2z^2}} \times \frac{y}{x} \times \left(\frac{1}{z}\right)'_z =$$

$$= \frac{x^2z^2}{x^2z^2+y^2} \times \frac{y}{x} \times \left(-\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{xy}{x^2z^2+y^2}.$$

2.Дана функция $z = x^2y^2$. Найти d^2z.

Решение

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Воспользуемся этой формулой, для чего определим все частные производные входящие в нее:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 4xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2.$$

Подставляя вторые производные в формулу, получим, что

$$d^2z = 2y^2dx^2 + 8xy\,dy\,dx + 2x^2dy^2.$$

3. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$.

Решение

Прежде всего определим $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$: $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 36x$.

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases},$$ которая в нашем случае записывается так:

$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2 - 6y = 0 \\ y^2 - 6x = 0 \end{cases}$, $y = \frac{x^2}{6}$, $\frac{x^4}{36} - 6x = 0$ или

$x^4 - 216x = 0,\quad x(x^3 - 216) = 0,$

откуда $x(x-6)(x^2+6x+36) = 0,\quad x_1 = 0,\quad x_2 = 6.$

Уравнение $(x^2 + 6x + 36 = 0)$ имеет лишь комплексные корни $y_1 = 0;\quad y_2 = 6.$

1) $x = 0;\quad y = 0.$ 2) $x = 6;\quad y = 6.$

Теперь определим число Δ, для чего найдем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Получаем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x;\quad \frac{\partial^2 x}{\partial x\,\partial y} = -36;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y.$$

Определим ***A, B*** и ***C***, Δ.

Для первой пары решений:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{x=0;\ y=0} = 0;\quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)_{x=0;\ y=0} = -36;\quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{x=0;\ y=0} = 0;$$

а потому число $\Delta = AC - B^2 = -36.$

Так как $\Delta < 0$, то при $x = 0;\quad y = 0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума.

Для второй пары решений: $\Delta = AC - b^2 = 72 \times 72 - 36^2 = 3888,$

так как $A > 0$, то в точке $x = 6;\quad y = 6$ и получим $z_{min} = -2.$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Найти экстремум функции.

В-1 $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

В-2 $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$

В-3 $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

В-4 $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$

В-5 $z = 3x^2y - x^3 - y^4$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №21

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Цель: изучить понятие числового ряда
Знать: определение числового ряда; необходимый признак сходимости рядов; признак сравнения Даламбера, Коши и интегральный.
Уметь: проверить выполнимость необходимого признака сходимости для рядов; исследовать на сходимость ряды, используя признаки Даламбера, Коши, сравнения.
Владеть: признаками сходимости рядов.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение признаками сходимости рядов.

Теоретическая часть
Ответить на контрольные вопросы:

1. Основные понятия числового ряда.
2. Ряд геометрической прогрессии.
3. Основные свойства сходящихся рядов. Остаток ряда.
4. Необходимый признак сходимости числового ряда.
5. Гармонический ряд.
6. Критерий сходимости рядов с положительными членами.
7. Признаки сравнения рядов.
8. Признаки Даламбера и Коши.
9. Интегральный признак сходимости

Решение типовых задач

Задача 1. Найти простейшую форму n - го члена рядов:

1) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$ $\quad a_n = n$

2) $2 + 3 + 4 + \ldots$ $\quad a_n = n + 1$

3) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots$ $\quad a_n = 2n$

4) $1 + 3 + 5 + \ldots$ $\quad a_n = 2n - 1$

Когда: $a_n = 2n + 1$?

5) $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots$ $\quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$

6) $\frac{3}{5} + \frac{9}{8} + \frac{27}{11} + \frac{81}{14} + \ldots$ $\quad a_n = \frac{3^n}{3n+2}$

Задача 2. Проверить выполнимость необходимого признака сходимости для рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n}$.

Решение.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin 1/n}{1/n} = 1 \neq 0$ - ряд расходится по необходимому признаку.

2) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \ldots \qquad a_n = \frac{2n}{3^n}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3^n} = \{по\ Лопиталю\} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3^n \ln 3} = 0.$$

Вывод: ряд по необходимому признаку может сходиться, а может и расходиться.

Необходимо применить один из достаточных признаков.

Например, попытаемся применить к предыдущему примеру признак Даламбера признак Даламбера. Запишите его. Получим:

$$a_n = \frac{2n}{3^n}, \quad a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3^{n+1}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot 2n} = \frac{1}{3} < 1$ - ряд сходится.

Задача 3. Исследовать на сходимость ряды:

1) $\frac{1}{3(3+1)} + \frac{1}{3^2(3^2+1)} + \frac{1}{3^3(3^3+1)} + \ldots + \frac{1}{3^n(3^n+1)} + \ldots$

Решение.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n(3^n+1)} = 0$ - может сходиться.

б) Разберемся, каким признаком удобнее всего воспользоваться для исследования на сходимость нашего ряда.

1. Применим признак Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n(3^n+1)}{3^{n+1}(3^{n+1}+1)} = \frac{1}{3} < 1$ - ряд сходится.

2. Применим признак сравнения

$a_n = \frac{1}{3^n(3^{n+1})} < b_n = \frac{1}{3^n \cdot 3^n} = \frac{1}{3^{2n}} = \frac{1}{9^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}$ - ряд сходящейся геометрической прогрессии (ряд с большими членами).

Следовательно, по признаку сравнения наш ряд сходится.

3. Применим признак Коши:

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3^n \left(3^{n+1}\right)} \right)^{1/n}$ - громоздко.

4. Применим интегральный признак Коши:

а) члены ряда убывают;

б) $f\left(x\right) = \frac{1}{3^x \left(3^x + 1\right)}$;

в) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{3^x \left(3x + 1\right)}$ - вычислить трудно.

Итак, проще всего применить признак Даламбера или сравнения.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Числовые ряды».

1. Исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \left(n - 1\right)!}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n!\right)^2}{2^{n^2}}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} \left(n^3 + 1\right)}{\left(n+1\right)!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{\left(2n\right)!}$.

2. Исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{n^2 + 1} \right)^{n^2}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n + 5} \right)^n$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №22

ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ.

Цель: изучить понятие знакочередующегося и знакопеременного ряда

Знать: определение числового ряда; необходимый признак сходимости рядов; признак сравнения Даламбера, Коши и интегральный, знакочередующегося и знакопеременного ряда.
Уметь: исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды, используя признак Лейбница
Владеть: признаками сходимости рядов.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение признаками сходимости рядов.

Теоретическая часть
Ответить на контрольные вопросы:

1. Основные понятия числового ряда.
2. Ряд геометрической прогрессии.
3. Основные свойства сходящихся рядов. Остаток ряда.
4. Необходимый признак сходимости числового ряда.
5. Гармонический ряд.
6. Критерий сходимости рядов с положительными членами.
7. Признаки сравнения рядов.
8. Признаки Даламбера и Коши.
9. Интегральный признак сходимости
10. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды.
11. Теорема Лейбница.

Решение типовых задач

Задача 1. *Исследовать сходимость ряда*

$$1)\ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \ldots$$

Решение.

а) ряд знакочередующийся, члены ряда убывают по абсолютной величине, значит можно использовать признак Лейбница: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ -

Вывод: по Лейбницу ряд сходится.

б) как сходится: абсолютно или условно?

Составляем ряд из абсолютных величин

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots$$

и исследуем его сходимость. По интегральному признаку он расходится.

Ответ: знакопеременный ряд сходится условно.

Задача 2. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\frac{27}{8}-\frac{64}{16}+\ldots+\left(-1\right)^{n+1}\frac{n^3}{2n}+\ldots$

Решение.

Т.к. члены ряда не убывают и теорему Лейбница применять нельзя, то сразу составляем ряд из абсолютных величин и исследуем его на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$.

По Даламберу он сходится, следовательно, знакочередующийся ряд абсолютно сходится.

Задание 3. Исследовать сходимость ряда $3-\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{3}\right)^3-\ldots+\frac{\left(-1\right)^{n+1}\left(2n+1\right)^n}{n^n}+\ldots$

Решение.

Сразу применим абсолютный признак сходимости Коши:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2>1$ - расходится, т.е. знакочередующийся ряд расходится.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Знакочередующиеся ряды».

Исследовать сходимость рядов:

а) $1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\ldots+\frac{\left(-1\right)^{n-1}\times n}{6n-5}+\ldots$ б) $\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n^2}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{2n-1}{n\left(n+1\right)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n\left(n+1\right)}}$; е)

$\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3-\ldots$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №23

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Цель: изучить степенные ряды.
Знать: определение интервала сходимости степенного ряда, радиуса сходимости.
Уметь: находить интервал сходимости степенного ряда, радиуса сходимости.
Владеть: методом разложение функции в степенной ряд.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.

Решение типовых задач

Задача 1. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$.

Решение. Все коэффициенты ряда отличны от нуля, поэтому радиус сходимости можно определить по одной из формул: $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$; $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

$$R = \lim_{n\to n} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(a+1)3^{n+1}}{3^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 3.$$

Значит, данный ряд сходится при значениях $x: -3 \le x \le 3$. Исследуем теперь поведение ряда на концах промежутка.

Подставим в данный ряд вместо x число -3, получим числовой ряд, знакопеременный $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, который сходится условно.

При $x = 3$ получим гармонический ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

Ответ: интервал сходимости представляет собой полузакрытый промежуток $[-3;3)$; $R = 3$.

Задача 2. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n^2}$.

Решение. Использовать формулы $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ нельзя, так как, бесконечное множество коэффициентов ряда равно нулю ($a_{2n-1} = 0$), поэтому воспользуемся признаком Даламбера $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = (x-3)^2$.

При $|x-3| < 1$ ряд сходится, при $|x-3| > 1$ ряд расходится.

$R = 1$;

$|x-3|<1 \cup \ 2<x<4$;

При $x=4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится.

При $x=2$ получаем то же самое.

Ответ: $[2;4]$ – интервал сходимости ряда; $R=1$.

Задача 3. Разложить в степенной ряд функцию $f(x)=e^{x^3}$.

Решение. Воспользуемся разложениями для e^t:

$$e^t = 1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots \qquad \left(-\infty<t<+\infty\right)$$

Положим $t=x^3$, получим разложение: $e^{x^3}=1+x^3+\frac{x^6}{2!}+\frac{x^9}{3!}+\ldots$

Задача 4. Найти разложение в степенной ряд функции $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$.

Решение. Данная функция является производной функции $\varphi(x)=-\frac{1}{1+x}$,

для которой при $|x|<1$: $-\frac{1}{1+x}=-1+x-x^2+x^3-\ldots+(-1)^{n+1}x^n+\ldots$

Почленно дифференцируя этот ряд, получим:

$$\left(-\frac{1}{1+x}\right)'_x=\left[-1+x-x^2+x^3-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots\right]'_x \Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1},$$

$\forall x: |x|<1$.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Функциональные ряды».

1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.
2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{n}$

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Разложение функции в степенной ряд».

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=e_{n}\frac{1+x}{1-x}$.

2. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)=sin\frac{px}{4}$ по степеням x.

3. Вычислить приближенно с точностью до 0,001 определенный интеграл

$$\int_{0}^{0,5}cos\frac{x^{2}}{4}dx.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №24

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

Цель: дифференциальные уравнения первого порядка.
Знать: простейшие типы обыкновенных дифференциальных уравнений.
Уметь: решать простейшие типы дифференциальных уравнений
с разделяющимися переменными, линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.
Владеть: методами решения простейшие дифференциальных уравнений .

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение методами решения простейшие дифференциальных уравнений.

Теоретическая часть
Ответить на контрольные вопросы:

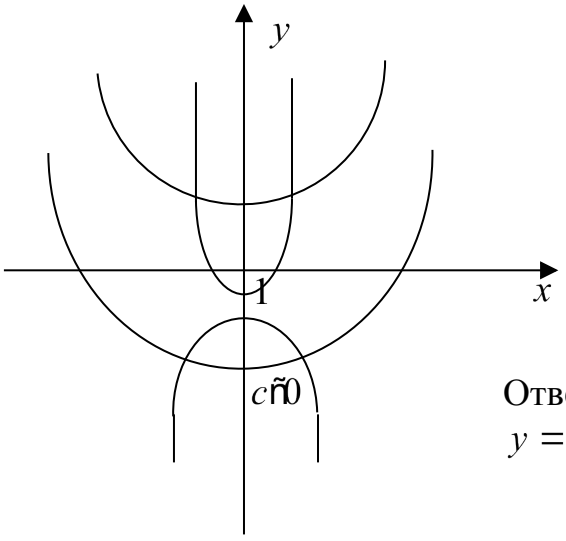
1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
2. Решение однородных дифференциальных уравнений.

Решение типовых задач

Задача № 1. Найти общий интеграл уравнения

$$\left(x^{2}-1\right)dy=2xydx$$

Изобразить геометрически. Выделить кривую, проходящую через точку $A\left(2,3\right)$.



Ответ:
$y=c\left(x^{2}-1\right),\quad c=1,\quad y=x^{2}-1$

Методические указания:

1. С целью получения более удобной форму записи решения брать не C, а $\ln C$, что не нарушает общности рассуждений.
2. Здесь и всюду при интегрировании выражений $\int \frac{du}{u}$ будем опускать знак модуля, что в следствии произвольности C не изменит результат интегрирования.

Задача № 2. Изолированному проводнику сообщен заряд. В следствии несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в данный момент пропорциональна наличному заряду Q проводника.

Какой заряд останется в проводнике по истечению времени t?

Решение:

Необходимо составить закон измерения величины заряда в зависимости от времени.

$$-\frac{dQ}{dt} = kQ$$

Решаем получившееся уравнения с разделяющимися переменными.

$\int \frac{dQ}{Q} = -\int k dt, \quad \ln Q = -kt + \ln C$ - закон протекающего процесса.

$\ln Q = \ln e^{-kt} + \ln C \quad \Rightarrow \quad Q = Ce^{-kt}$

1. Зная, какой заряд сообщен проводнику, можно используя эту формулу определить какой заряд останется в проводнике по истечению времени, например $t = 10$ мин.
2. При составлении закона взяли ($-\frac{dQ}{dt}$, т.к. $Q(t)$ - функция отрицательная).

Задача № 3. Решить уравнение методом подстановки $y' + \frac{y}{x} = x^2$.

Решение. Положим $y = uv, \quad y' = u'v + uv'$, подставим y и y' в уравнение:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = x^2, \qquad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = x^2. \qquad (1)$$

Положим $v' + \frac{v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = \frac{1}{x}.$

При $v = \frac{1}{x}$ равенство (1) примет вид $u'\frac{1}{x} = x^2, \quad u' = x^3, \quad \frac{du}{dx} = x^3, \quad du = x^3 dx,$

$u = \frac{x^4}{4} + C$. Общим решением будет уравнение $y = uv = \frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4} + C\right) = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}.$

Задача № 4. Решить уравнение методом подстановки $y' - y = \frac{e^x}{x}$.

Решение. Положим $y = uv,\ y' = u'v + uv',\ u'v + uv' - uv = \frac{e^x}{x}.$

$$u'v + u(v' - v) = \frac{e^x}{x}, \qquad (2)$$

Положим $v' - v = 0, \quad \frac{dv}{dx} = v, \quad \frac{dv}{v} = dx, \quad \ln|v| = x, \quad v = e^x.$

При $v = e^x$ равенство (2) примет вид $u'e^x = \frac{e^x}{x}, \quad u' = \frac{1}{x}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x},$

$du = \frac{dx}{x}, \quad u = \ln|x| + \ln|C|, \quad u = \ln|xC|.$ Общим решением будет уравнение $y = uv = e^x \ln|xC|.$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка».

Решить дифференциальные уравнения (найти общее решение)

а) $y' + y\ln x = 0$ **в)** $(xy^2 + x)dx + (y + x^2 y)dy = 0$

б) $\sqrt{4 - y^2}\, y' = tgx$ г) $y' + (x^2 - 1)e^y = 0$

Типовой вариант самостоятельной работы по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка».

Решить уравнения методом подстановки:

а) $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$ б) $y' - y = e^x$

в) $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x$ г) $xy' - y = x^2\cos x$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №25

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО И БОЛЕЕ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА.

Цель: изучить дифференциальные уравнения высших порядков, допускающих понижение порядка.

Знать: типы дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения высших порядков, допускающих понижение порядка.

Уметь: решать дифференциальные уравнения высших порядков, допускающих понижение порядка.

Владеть: методами решения дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение методами решения простейшие дифференциальных уравнений.

Решение типовых задач

Задача № 1.

Кривая удовлетворяет уравнению $y' = x + 3$.

Найти ее уравнение, если известно, что она проходит через точку $(2,4)$ и имеет в этой точке угловой коэффициент касательной равный 3.

Решение:

$y = \frac{x^2}{2} + 3x + c_1, \qquad y = \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x^2 + c_1 x + c_2$ - семейство кривых.

Используя начальные условия $x = 2,\ y = 4,\quad k = y' = 3$ подставив в последнее и предпоследнее равенства, найдем c_1 и c_2.

Получаем: $c_1 = -5, \quad c_2 = \frac{20}{3}$

Тогда искомое уравнение кривой $y = \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{20}{3}$

Задача № 2

Найти общий интеграл уравнения $x^3 y'' + x^2 y' = 1$

Решение:

Подстановка $y' = p, \qquad y'' = \frac{dp}{dx}$

$x^3 p' + x^2 p = 1$ - линейное относительно p и p'

$$p = u \cdot w, \qquad p' = u'u + uu'$$
$$x^3 u'u + \left(x^3 uu' + x^2 uu\right) = 1$$
$$x^3 u'u + x^2 u\left(xu' + u\right) = 1$$

1) $xu' + u = 0$

$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$

$\ln w = -\ln x$

$u = \frac{1}{x}$

2) $x^3 u'u = 1$

$x^2 u' \cdot \frac{1}{x} = 1$

$du = \frac{dx}{x^2}$

$u = -\frac{1}{x} + c_1$

Тогда $p = \frac{1}{x}\left(c_1 - \frac{1}{x}\right)$ заменим $p = y'$

$y\text{¢}=\frac{c_1}{x}-\frac{1}{x^2}$ проинтегрируем

$y=c_1\,ln|x|+\frac{1}{x}+c_2$ общее решение.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №26

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Цель: дифференциальные уравнения второго порядка.
Знать: виды дифференциальных уравнений второго порядка.
Уметь: решать простейшие типы дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.
Владеть: методами решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-1. Способен изучать, анализировать, использовать биологические объекты и процессы, основываясь на законах и закономерностях математических, физических, химических и биологических наук и их взаимосвязях
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение методами решения простейшие дифференциальных уравнений.

Теоретическая часть
Ответить на контрольные вопросы:

1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия.
3. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения.
4. Уравнения с разделяющимися переменными.
5. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
7. Уравнения, допускающие понижение порядка.
8. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решение типовых задач

Задача № 1.

Кривая удовлетворяет уравнению $y\text{¢}=x+3$.

Найти ее уравнение, если известно, что она проходит через точку $(2,4)$ и имеет в этой точке угловой коэффициент касательной равный 3.

Решение:

$y\text{¢}=\frac{x^2}{2}+3x+c_1,\qquad y=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{2}x^2+c_1x+c_2$ - семейство кривых.

Используя начальные условия $x=2,\ y=4,\quad k=y\text{¢}=3$ подставив в последнее и предпоследнее равенства, найдем c_1 и c_2.

Получаем: $c_1=-5,\quad c_2=\frac{20}{3}$

Тогда искомое уравнение кривой $y = \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{20}{3}$

Задача № 2

Найти общий интеграл уравнения $x^3 y'' + x^2 y' = 1$

Решение:

Подстановка $y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx}$

$x^3 p' + x^2 p = 1$ - линейное относительно p и p'

$$p = u \cdot v, \qquad p' = u'v + uv'$$
$$x^3 u'v + x^3 uv' + x^2 uv = 1$$
$$x^3 u'v + x^2 u(xv' + v) = 1$$

1) $xv' + v = 0$

$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$

$\ln v = -\ln x$

$v = \frac{1}{x}$

2) $x^3 u'v = 1$

$x^2 u' \cdot \frac{1}{x} = 1$

$du = \frac{dx}{x^2}$

$u = -\frac{1}{x} + c_1$

Тогда $p = \left(\frac{1}{x}\right)\left(c_1 - \frac{1}{x}\right)$ заменим $p = y'$

$y' = \frac{c_1}{x} - \frac{1}{x^2}$ проинтегрируем

$y = c_1 \ln|x| + \frac{1}{x} + c_2$ общее решение.

Задача № 3. Решить уравнение

$y'' - 4y' + 4y = 0$

$k^2 - 4k + 4 = 0; \quad (k-2)^2 = 0; \quad k_1 = k_2 = 2$

Корни характеристического уравнения действительные кратные, поэтому решение запишем в виде:

$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$

Задача № 4. Решить уравнение

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$
$$k^2 + 2k + 5 = 0;$$
$$k_{1,2} = -1 \pm 2i$$

Корни характеристического уравнения комплексные, поэтому решение имеет вид:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Дифференциальные уравнения высших порядков».

1. Решить дифференциальные уравнения

а) $y''=(2x+1)\cdot\sin 3x$.

б). $2xy'y''=(y')^2-1$.

2. Найти частное решение уравнения $(x-3)y''+y'=0$ удовлетворяющее начальным условиям $M(4,1)$, $y'(4)=2$.

3.Найти общее решение уравнений:

$y''+2y'+2y=0$

$y''+7y'+12y=0$

$y''+6y'+9y=0$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №27

Основные понятия и теоремы теории вероятностей.

Цель: изучить основные понятия и теоремы теории вероятностей.

Знать: основные понятия и теоремы теории вероятностей.
Уметь: решать задачи с применением формул комбинаторики и теоремы теории вероятностей.
Владеть: методами решения задач с применением формул комбинаторики и теоремы теории вероятностей.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение методами решения задач с применением формул комбинаторики и теоремы теории вероятностей.

Теоретическая часть
Ответить на контрольные вопросы:

1. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности.
2. Относительная частота. Устойчивость относительной частоты. Статистическое определение вероятности.
3. Правило суммы и правило произведения.
4. Основные формулы комбинаторики.
5. Алгебра событий.
6. Теоремы сложения вероятностей.
7. Теоремы умножения вероятностей.
8. Следствия теорем сложения и умножения.
9. Вероятность появления хотя бы одного события
10. Полная вероятность. Формулы Байеса.

.

Решение типовых задач

Задача 1. В урне 5 черных и 3 белых шара. Берут наудачу 2 шара. Сколькими способами их можно взять, чтобы они оказались разного цвета?

Ответ: $m \times n = 3 \times 5$

Задача 2. Имеется 4 первых блюда и 3 вторых. Сколькими способами можно составить из низ обед?

Решение: $4 \times 3 = 12$

Задача 3. Случайным образом вынимается одна карта из колоды в 36 карт. Колода предварительно перемешивается. Найти вероятность вынуть: 1) туз; 2) бубновый туз; 3) бубновую карту?

Ответы: $1) \frac{4}{36}; \quad 2) \frac{1}{36}; \quad 3) \frac{9}{36}$.

Задача 4. Найти вероятность того, что при бросании двух монет, хотя бы на одной из них выпадет герб.

Решение: n =4 (Г Ц, Ц Г, Ц Ц, Г Г) ; m = 3 (Г Ц, Г Г, Ц Г); $P(A) = \frac{3}{4}$

Задача 5. Участники жеребьевки тянут жетоны от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

Решение: событие А – жетон не содержит цифры 5; n = 100; $m_1 = 19$ - число неблагоприятных исходов (5,15,25,35,45,50,51,52,53,54,

55,56,57,58,59,65,75,85,95); $m_2 = n - m_1 = 100 - 19 = 81$. Тогда $P(A) = \frac{81}{100} = 0{,}81$

Задача 6. В барабане 7 гнезд, из которых в 5 заложены патроны, а 2 – пустые.

1) Найти вероятность того, что после нажатия спускового крючка дважды, оба раза выстрела не будет,

2) Найти вероятность того, что оба выстрела произойдут.

Решение.

1) Так как любой гнездо при первом выстреле может сочетаться с любым гнездом при втором выстреле, то $n = 7 \times 7 = 49$.

Число благоприятствующих исходов равно числу комбинаций пустых гнезд: $m = 2 \times 2 = 4$, тогда $P(A) = \frac{4}{49}$.

2) Так как и в первом случае $n = 7 \times 7 = 49$.

Число благоприятствующих исходов $m = 5 \times 4 = 20$, т.к. при первом выстреле гнездо с патронами можно выбрать 5 способами, а при втором –4. Тогда $P(A) = \frac{20}{49}$.

Задача 7. В вазе стоят 9 красных и 7 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из нее:

1) 3 гвоздики;
2) 6 гвоздик одного цвета;
3) 4 красных и 3 розовых гвоздики?

Ответ: 1) 560; 2) 91; 3) 4410.

Задача 8. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым?

Ответ:0,4.

Задача 9. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что:

4) сумма выпавших очков не превосходит 7;
5) на обеих костях выпадет одинаковое число очков.

Ответ: 1) 7/12; 2) 1/6.

Задача 10. На полке находится 12книг по математике и 10 книг по экономике. Наудачу извлекается книга. Какова вероятность того, что она окажется по экономике?

Решение.

А – событие, состоящее в том, что книга окажется по экономике.

По условию: $n = 12 + 10 = 22, \quad m = 10$. Тогда искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{22} = 0{,}455$$

Задача 11. Из 500 взятых наудачу деталей оказалось 8 бракованных. Найти частоту бракованных деталей.

Решение.

А – деталь бракованная Т.к. в данном случае *m=8*, *n=500* , то в соответствии с формулой находим $W(A) = \frac{m}{n} = \frac{8}{500} = 0.016$.

Задача 12. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

Решение.

Т.к. все пассажиры должны ехать в разных вагонах, требуется отобрать 4 вагона из 9 с учетом порядка (вагоны отличаются №), эти выборки – размещения из n различных элементов по m элементов, где n = 9, m = 4. Число таких размещений находим по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = 3024$$

Задача 13. В организации имеется две вакансии на должность сотрудника, одна вакансия на должность помощника сотрудника и две вакансии на должность секретаря. Сколько существует вариантов распределения должностей, если имеется 5 кандидатов?

Решение.

Так как всего имеется 5 вакансий и кандидатов тоже 5, то состав не важен, а соединения будут отличаться только по порядку расположения элементов. Следовательно, для решения задачи необходимо найти число перестановок из 5 элементов с повторениями:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots n_m) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!}$$

По условию задачи: $n_1 = 2, \quad n_2 = 1, \quad n_3 = 2, \quad n = 5$, тогда

$$P_5(2,1,2) = P_n(2;1;2) = \frac{5!}{2_1! \cdot 1! \cdot 2!} = 30$$

Задача 14. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение.

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов $\left(C_{10}^6\right)$.

Определяем число исходов, благоприятствующих событию *A* – «среди 6 взятых деталей 4 стандартных». Четыре стандартные детали из семи стандартных можно взять C_7^4 способами, при этом остальные 6–4=2 детали должны быть нестандартными; взять

же 2 нестандартные детали из 10–7=3 нестандартных деталей можно C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятных исходов равно $C_7^4 \cdot C_3^2$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{\frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!}}{\frac{10!}{6! \cdot 4!}} = \frac{7! \cdot 3! \cdot 6! \cdot 4!}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 10!} = 0,5$$

Задача 15. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

Решение.

В одной игре участвуют 2 человека, следовательно, нужно вычислить, сколькими способами можно отобрать 2-х человек из 15, причем порядок в таких парах не важен. Воспользуемся формулой для нахождения числа сочетаний (выборок, отличающихся только составом) из nразличных элементов по m элементов

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n - m)!}$$

По условию: n=15, m=2. Следовательно число сочетаний из 15 элементов по 2 без повторения равно $C_{15}^2 = \frac{15!}{2! \cdot (15 - 2)!} = 105$

Задача №9. На каждой из 6 одинаковых карточек написана одна из следующих букв: З,А,К,В,Б,У. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной и расположенных в одну линию карточках можно прочесть слово «ЗВУК».

Ответ: $\frac{1}{A_6^4} \approx 0.28$

Задача 16 В партии из 500 радиодеталей содержится 10 бракованных. Выбирают наудачу две детали. Какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными? Одна из них бракованная?

Решение: 1) $P(A) = \frac{C_{10}^2}{C_{500}^2}$; 2) $P(B) = \frac{10 \cdot 490}{C_{500}^2} \approx 0,28$.

Задача 17. В лотерее 100 билетов, из низ 40 выигрышных. Какова вероятность того, что: 1) ровно один из трех взятых наудачу билетов окажется выигрышным; 2) все три окажутся выигрышными.

Решение: 1) $n = C_{100}^3$; $m = 40 \cdot C_{60}^2$; $P(A) = \frac{40 \cdot C_{60}^2}{C_{100}^3}$.

2) $n = C_{100}^3$; $m = C_{60}^3$; $P(B) = \frac{C_{60}^3}{C_{100}^3}$.

Задача 18. В урне 3 белых и 2 черных шара. Шары тщательно перемешаны. Берут два шара. Какова вероятность событий:

1) оба шара черные;
2) оба шара белые;
3) шары разного цвета.

Ответы: 1) $p = \frac{1}{C_5^2}$; 2) $p = \frac{C_3^2}{C_5^2}$; 3) $p = \frac{3 \cdot 2}{C_5^2}$.

Задача 19. Найти вероятность того, что в наудачу набранном телефонном номере состоящим из трех цифр все цифры окажутся различными.

Решение

$$P\left(A\right)=\frac{A_{10}^{3}}{10^{3}}=\frac{720}{1000}=0,72$$

Задача 20. Подбрасывается игральный кубик. Событие А – выпадение 6 очков; В – выпадение 3 очков, С – выпадение четного числа очков; М – выпадение числа очков, кратных трем. Что означают события: $\overline{A}BC$, $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$, $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

Задача 21. В городе объявлен розыск трех преступников. Событие Р – обнаружен преступник Рыков; У – обнаружен преступник Угрюмов;
событие Ф – обнаружен преступник Фомин.

1) Расшифруйте следующие события: У+Ф; УТ; $\overline{\Phi T}$; $У\overline{\Phi}$; $УТ\Phi\overline{P}$; $УТ\Phi$; УТ(Ф+Р).

Задача 22. В сессию студент должен был сдать два экзамена и один зачет. Событие А состоит в том, что студент сдал экзамен по философии; событие В – студент сдал экзамен по английскому языку; событие С – студент получил зачет по физкультуре.
Запишите с помощью обозначений следующие события:
1) студент не получил зачета;
2) сдал два экзамена;
3) сдал по крайней мере один экзамен;
4) сдал только один экзамен и не получил зачета;
5) не сдал ничего;
6) сдал все.

Задача 23. В ящике имеется 18 деталей, среди которых 12 стандартных. Сборщик наугад вынимает две детали. Найти вероятность того, чтообе извлеченные детали окажутся стандартными.

Решение.

А-событие, состоящее в том, что обе извлеченные детали окажутся стандартными. Для нахождения вероятности события будем использовать формулу: $P(A)=\frac{m}{n}$ где $m=C_{12}^{2}$ - число способов извлечь из 12 стандартных деталей три; $n=C_{18}^{2}$ – число способов извлечь 2 детали из 18.

$$P(A)=\frac{C_{12}^{2}}{C_{18}^{2}}=\frac{\frac{12!}{2!\times(12-2)!}}{\frac{18!}{2!\times(18-2)!}}=\frac{12!\times 2!\times 16!}{2!\times 10!\times 18!}=\frac{11\times 12}{17\times 18}=0,431$$

Данный результат можно получить, если использовать теорему умножения для зависимых событий: $P\left(A\right)=P\left(A_1\times A_2\right)=P\left(A_1\right)\times P_{A_1}\left(A_2\right)$

где A_1 – событие, состоящее в том, что первая извлеченная деталь окажется стандартной $P\left(A_1\right)=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$; A_2 – событие, состоящее в том, что вторая извлеченная деталь окажется стандартной, тогда условная вероятность того, что вторая деталь

окажется стандартной, при условии, что первая деталь была стандартной, равна $P_{A_1}\left(A_2\right)=\frac{11}{17}$

Искомая вероятность равна:

$$P\left(A\right)=P\left(A_1\times A_2\right)=P\left(A_1\right)\times P_{A_1}\left(A_2\right)=\frac{2}{3}\times\frac{11}{17}=0,431$$

Задача 24. Вероятность получения на экзамене оценки «отлично» равна 0,2, получения оценки «хорошо» - 0,4, «удовлетворительно» - 0,3, а «неудовлетворительно» - 0,1. Какова вероятность, что на экзамене студент получит не ниже оценки «хорошо»?

Решение.

А – на экзамене будет получена оценка «отлично»,

В – на экзамене будет получена оценка «хорошо».

Выражение «не ниже оценки «хорошо»» означает, что оценка будет или «хорошо» или «отлично», следовательно воспользуемся теоремой сложения для несовместных событий: $P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)=0,2+0,4=0,6$

Задача 7. В магазине имеется 8 телевизоров, из которых 3 неисправных. Найти вероятность того, что среди наугад взятых трех телевизоров будет хотя бы один неисправный.

Решение.

А – среди наугад взятых трех телевизоров будет хотя бы один неисправный.

Обозначим A_1 – первый телевизор неисправный, A_2 – второй телевизор неисправный. Тогда $\overline{A_1}$ – первый телевизор исправный, $\overline{A_2}$ – второй телевизор исправный.

Искомую вероятность найдем, используя формулу вероятности появления хотя бы одного события:

$$P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A_1}\times\overline{A_2}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\right)\times P_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right)=1-\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{9}{14}$$

Задача 25. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартная.

Решение.

Обозначим через *A* событие «извлеченная деталь стандартна».

Деталь может быть извлечена либо из первого набора (событиеB_1), либо из второго (событиеB_2).

Вероятность того, что деталь вынута из первого набора, $P(B_1)=1/2$.

Вероятность того, что деталь, извлечена из второго набора, $P(B_2)=1/2$.

Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь, $P_{B_1}(A)=0,8$.

Условная вероятность того, что из -второго набора будет извлечена стандартная деталь, $P_{B_2}(A)=0,9$.

Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь — стандартная, по формуле полной вероятности равна

$$P\left(A\right)=P\left(B_1\right)P_{B_1}\left(A\right)+P\left(B_2\right)P_{B_2}\left(A\right)=0,5\cdot0,8+0,5\cdot0,9=0,85.$$

Задача 26. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке – 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

Решение.

Обозначим через А событие «из первой коробки извлечена стандартная лампа».

Из второй коробки могла быть извлечена либо стандартная лампа (событие B_1), либо нестандартная (событие B_2).

Вероятность того, что из второй коробки извлечена стандартная лампа, $P(B_1)=9/10$.

Вероятность того, что из второй коробки извлечена нестандартная лампа, $P(B_2)=1/10$.

Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная лампа, при условии, что из второй коробки в первую была переложена стандартная лампа, равна $P_{B_1}(A)$ =19/21.

Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная лампа, при условии, что из второй коробки в первую была переложена нестандартная лампа, равна $P_{B_2}(A)$=18/21.

Искомая вероятность того, что из первой коробки будет извлечена стандартная лампа, по формуле полной вероятности равна

$$P\left(A\right)=P\left(B_1\right)P_{B_1}\left(A\right)+P\left(B_2\right)P_{B_2}\left(A\right)=0{,}9\cdot 19/21+0{,}1\cdot 18/21=0{,}9$$

Задача 27. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,8, а вторым — 0,9. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение.

Обозначим через *A* событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер (гипотеза B_1);
2) деталь проверил второй контролер (гипотеза B_1).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Бейеса: $P_A\left(B_1\right)=\dfrac{P\left(B_1\right)P_{B_1}\left(A\right)}{P(B_1)\times P_{B_1}(A)+P(B_2)\times P_{B_2}(A)}$

По условию задачи имеем:

$P(B_1)$ = 0,6 (вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру);

$P(B_2)$ = 0,4 (вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру);

$P_{B_1}\left(A\right)$ = 0,8 (вероятность того, что годная деталь будет признана первым контролером стандартной);

$P_{B_2}\left(A\right)$ = 0,9 (вероятность того, что годная деталь будет признана вторым контролером стандартной). Искомая вероятность $P_A\left(B_1\right)=\dfrac{0.6\times 0.8}{0.6\times 0.8+0.4\times 0.9}$

Как видно, до испытания вероятность гипотезы B_1равнялась 0,6, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы (точнее, условная вероятность) изменилась и стала равной 0,59. Таким образом, использование формулы Бейеса позволило переоценить вероятность гипотезы.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Основные понятия теории вероятностей»

1. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.
2. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 15 нестандартных деталей. Чему равна вероятность извлечения стандартной детали?
3. *Игральная кость брошена 4 раза. Найти вероятность того, что каждый раз выпадет цифра 1.*
4. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.
5. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,8. Найти число промахов, если всего было произведено 150 выстрелов.
6. *Из двух колод по 52 карты извлекли наудачу одну карту. Какова вероятность того, что эта карта окажется шестеркой или картой красной масти?*
7. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная из ящика деталь (после перевозки) оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.
8. На 6 одинаковых карточках написаны буквы А, В, К, М, О, С. Карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово МОСКВА?
9. Из 40 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 30. Найти вероятность того, что среди трех наугад выбранных вопросов студент знает: а) 3 вопроса; б) 2 вопроса; в) 1 вопрос.
10. Код домофона состоит из 8 цифр, которые могут повторяться. Какова вероятность того, что, случайно набирая цифры, можно угадать нужный код?

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Алгебра событий»

1. Один студент выучил 20 из 25 вопросов программы, а второй – только 15. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что правильно ответят: а) оба студента; б) только первый студент; в) только один из них; г) хотя бы один из студентов.

2. Вероятность своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равна 0.5, 0.6 и 0.7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним предприятием.

3. На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25%, второй - 35%, а третий 40% всех замков. Брак составляет соответственно 5%, 4% и 2%.
а) Найти вероятность того, что случайно выбранный замок является дефектным.
б) Случайно выбранный замок является дефектным. Какова вероятность того, что он был изготовлен в первом, втором, третьем цехе?

4. Монету бросают пять раз. Найти вероятность выпадения одной из сторон менее двух раз.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №28

ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ.

Цель: изучить повторные независимые испытания

Знать: схему Бернулли, локальную теорему Муавра-Лапласа, формулу Пуассона, интегральную теорему Лапласа

.
Уметь: решать задачи на применение формулы Бернулли, локальной теорему Муавра-Лапласа, формулы Пуассона, интегральной теоремы Лапласа.
Владеть: методами решения задач на применение формулы Бернулли, локальной теорему Муавра-Лапласа, формулы Пуассона, интегральной теоремы Лапласа.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение методами решения задач на применение законов дискретных и непрерывных случайных величин.

Теоретическая часть
Ответить на контрольные вопросы:

1. Формула Бернулли.
2. Локальная теорема Муавра-Лапласа
3. Формула Пуассона.
4. Интегральная теорема Лапласа
5. Наивероятнейшее число появления события.

Решение типовых задач

Задача 1. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна p = 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Решение.

Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжение каждых из 6 суток постоянна и равна p=0,75. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна q=1—p=1—0,75=0,25.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^{6-4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} 0.75^6 0.25^{6-4} = 0.3$$

Задача 2. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна $0{,}75$. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах стрелок поразит мишень 80 раз.

Решение: Т. к. $n = 100, \quad p = 0{,}75, \quad k = 80, \quad q = 0{,}25$, то $x = \frac{80 - 100 \times 0{,}75}{\sqrt{100 \times 0{,}75 \times 0{,}25}} \approx 1{,}15$.

Тогда $P_9(100) \approx \frac{1}{\sqrt{100 \times 0{,}75 \times 0{,}25}} \varphi(1{,}15) \approx 0{,}0476$.

При этом вычисления по формуле Бернулли приводят к значению $\approx 0{,}0493$. Такие значительные расхождения связаны с недостаточно большим значением n.

Задача 3Завод отправил в торговую сеть 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0.002. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено три изделия.
Решение: В данном случае формула Бернулли не применима, т. к. придется возводить 0. 002 в 500-ю степень.

$np = 0.002 \times 500 = 1$; $P_{500}(3) = \frac{1^3}{3!} e^{-1} \approx 0.06$.

Задача 4 Вероятность того, что деталь не пройдет проверку качества, равна $0{,}2$. Найти вероятность того, что из 400 проверенных деталей бракованными окажутся не более 70, но не менее 100 деталей.

Решение: Т. к. $x¢ = \frac{70 - 400 \times 0{,}2}{\sqrt{400 \times 0{,}2 \times 0{,}8}} = -1{,}25$, $x¢ = \frac{100 - 400 \times 0{,}2}{\sqrt{400 \times 0{,}2 \times 0{,}8}} = 2{,}5$, то

$P_{400}(70 < k < 100) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882$.

Задача 5. В результате обследования были выделены семьи, имеющие по четыре ребенка. Считая вероятность появления мальчика в семье равной 0.515 найти наивероятнейшее число появления мальчиков в семье с четырьмя детьми.

Решение: Т. к. $n = 4$, $p = 0.515$, $q = 0.485$, то $1.575 £ k_0 £ 2.575$. Т. е. вероятнее всего, что мальчиков будет два. Проверим это. Найдем вероятности того, что мальчиков будет 0,1,3,4.

$P_4(0) = C_4^0 (0.515)^0 (0.485)^4 \approx 0.06$

$P_4(1) = C_4^1 (0.515)^1 (0.485)^3 \approx 0.24$

$P_4(2) = C_4^2 (0.515)^2 (0.485)^2 \approx 0.37$

$P_4(3) = C_4^3 (0.515)^3 (0.485)^1 \approx 0.27$

$P_4(4) = C_4^4 (0.515)^4 (0.485)^0 \approx 0.07$

Следовательно, вероятнее всего появление двух мальчиков.

Задача 6. Работают четыре магазина по продаже стиральных машин. Вероятность отказа покупателю в магазинах равна 0,1. Считая, что ассортимент товара в каждом магазине формируется независимо от других, определить вероятность того, что покупатель получит отказ в двух магазинах.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Повторение испытаний»

1. Что вероятнее выиграть у равносильного противника в шахматы: три партии из четырех или пять из восьми?

2. Каждый вариант контрольной работы по теории вероятностей содержит 5 задач. Студент Петров очень плохо подготовился, поэтому вероятность правильного решения для каждой задачи, равна 0,3. Петров получит положительную оценку если решит не меньше трех задач. Найти вероятность того, что он получит положительную оценку.

3. Из-за перегруженности сети вечером сотовая связь не всегда обеспечивает соединение. Вероятность сбоя при каждом звонке, равна 0,2. За вечер молодой человек делает 5 звонков. Найти вероятность того, что не менее чем при трех вызовах произошел сбой.

4. Во время испытаний на полигоне было выпущено 15 ракет. Вероятность достижения цели для каждой ракеты составляет 0,7. Найти вероятность того, что цели достигнут не менее 3-х ракет.

5. При игре в гольф вероятность попадания в лунку для неопытного игрока составляет 0,3. Было сделано 5 попыток. Найти вероятность того, что хотя бы 1 из них была удачной.

6. Обувной магазин продал 200 пар обуви. Вероятность того, что в магазин будет возвращена бракованная пара, равна 0,01. Найти вероятность того, что из проданных пар обуви будет возвращено 2 пары.

7. При одном бросании монетки в игральный автомат вероятность выигрыша составляет 0,001. Азартный игрок потратил 1000 монеток. Найти вероятность того, что он выиграл хотя бы один раз.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №29

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

Цель: дискретные случайные величины.

Знать: основные характеристики и законы дискретных случайных величин.
Уметь: решать задачи на применение законов дискретных случайных величин.
Владеть: методами решения задач на применение законов дискретных случайных величин.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-1. Способен изучать, анализировать, использовать биологические объекты и процессы, основываясь на законах и закономерностях математических, физических, химических и биологических наук и их взаимосвязях
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение методами решения задач на применение законов дискретных и непрерывных случайных величин.

Теоретическая часть
Ответить на контрольные вопросы:

6. Формула Бернулли.
7. Локальная теорема Муавра-Лапласа
8. Формула Пуассона.
9. Интегральная теорема Лапласа
10. Наивероятнейшее число появления события.
11. Биномиальное распределение
12. Пуассоновское распределение
13. Геометрическое распределение
14. Гипергеометрическое распределение

Решение типовых задач

Задача 1. Баскетболист делает три штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна $0{,}7$. Составить закон распределения числа попаданий мяча в корзину.

Решение:

X	0	1	2	3
P	0.189	0.441	0.343	0.027

$p_2 = P_3(1) = C_3^1 (0.7)^1 (0.3)^2 = 0.189$

$p_3 = P_3(2) = C_3^2 (0.7)^2 (0.3)^1 = 0.441$

$p_4 = P_3(3) = C_3^3 (0.7)^3 (0.3)^0 = 0.343$

$p_1 = P_3(0) = C_3^0 (0.7)^0 (0.3)^3 = 0.027$

Контроль: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 0.027 + 0.189 + 0.441 + 0.343 = 1$

Задача 2. Завод отправил на базу 2 000 изделий. Вероятность повреждения в пути равна 0,0003.Найти вероятность того, что будет повреждено 0, 1, 2, 3, 4 изделий. Найти математическое ожидание; дисперсию; среднее квадратическое отклонение этой случайной величины. Определить вероятность того, что будет повреждено хотя бы одно изделие.

Решение.

СВ X – число поврежденных изделий, распределена по закону Пуассона. Найдем параметр распределения: $\lambda = np = 2000 \times 0{,}0003 = 0{,}6$

Найдем искомые вероятности:

$$P(0) = \frac{0{,}6^{\,0}}{0!} e^{-0{,}6} = 0{,}5488 \quad P(1) = \frac{0{,}6^{\,1}}{1!} e^{-0{,}6} = 0{,}3293$$

$$P(2) = \frac{0{,}6^{\,2}}{2!} e^{-0{,}6} = 0{,}0988 \quad P(3) = \frac{0{,}6^{\,3}}{3!} e^{-0{,}6} = 0{,}0198$$

$$P(4) = \frac{0{,}6^{\,4}}{4!} e^{-0{,}6} = 0{,}0029$$

Запишем полученные значения, однако, полученная таблица не является законом распределения, т.к. значения СВ X=k=0, …, 4 не образуют полную группу.

X	0	1	2	3	4	…
P	0,5488	0,3293	0,0988	0,0198	0,0029	…

Задача 3. Игральная кость подбрасывается до первого выпадения цифры шесть. Составить закон распределения числа подбрасываний игральной кости до первого выпадения цифры шесть.

Решение: $p = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{5}{6}.$

$$p_1 = \left(\frac{5}{6}\right)^{1-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}, \quad p_2 = \left(\frac{5}{6}\right)^{2-1} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}, \quad p_3 = \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}, \ldots\ldots$$

X	1	2	3	.....
P	1/6	5/36	25/216	.....

Задача 4. Гражданин приобрел случайным образом 5 акций двадцати АО. Через год 6 из 20-ти АО разорились. Составить закон распределения и построить многоугольник распределения возможного числа акций банкротов среди купленных гражданином акций.
Решение:

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1001}{7752}$	$\frac{3003}{7752}$	$\frac{2730}{7752}$	$\frac{910}{7752}$	$\frac{105}{7752}$	$\frac{3}{7752}$

$$p_1 = P(X=0) = \frac{C_6^0 C_{14}^5}{C_{20}^5} = \frac{1001}{7752} \qquad p_2 = P(X=1) = \frac{C_6^1 C_{14}^4}{C_{20}^5} = \frac{3003}{7752}$$

$$p_3 = P(X=2) = \frac{C_6^2 C_{14}^3}{C_{20}^5} = \frac{2730}{7752} \qquad p_4 = P(X=3) = \frac{C_6^3 C_{14}^2}{C_{20}^5} = \frac{910}{7752}$$

$$p_5 = P(X=4) = \frac{C_6^4 C_{14}^1}{C_{20}^5} = \frac{105}{7752} \qquad p_6 = P(X=5) = \frac{C_6^5 C_{14}^0}{C_{20}^5} = \frac{3}{7752}$$

Контроль: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Виды случайных величин. Законы распределения ДСВ.»

1. Монета бросается три раза. Составить закон распределения числа выпадения герба.
2. Производится залп двумя ракетами по цели. Вероятность попадания первой 0,7 , второй-0,8. Найти ряд распределения F(x), M(x), Д(x) - числа попадания в цель.
3. В партии из 8 деталей имеется 5 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.
4. Каждая из трех ракет направлена в свою цель. Вероятность поражения каждой цели 0,6. Найти закон распределения (ряд) числа пораженных целей.
5. В партии 10 деталей , из них 3 третьего сорта. Наудачу отобраны две детали. Составить ряд распределения числа деталей второго сорта среди отобранных.
6. В урне 7 красных шаров и 3 черных. Наудачу берут два шара. Составить ряд распределения числа черных шаров среди отобранных
7. В пункте А принимают три сигнала. Вероятность того, что сигнал будет искажен равна 0,3. Составить ряд распределения числа правильно принятых знаков .
8. Четыре ракеты направлены в свою цель. Вероятность поражения ракетой 0,8. Составить закон распределения числа поражений целей.
9. Преподаватель задает курсанту два вопроса. Вероятность ответа на каждый из заданных вопросов соответственно 0,6 и 0,4. Найти ряд распределения числа ответов на заданные.
10. В партии из 15 деталей 5 бракованных. Наудачу отобраны две детали. Составить ряд распределения числа набракованных среди отобранных.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №30

Непрерывные случайные величины.

Цель: непрерывные случайные величины.

Знать: основные характеристики и законы непрерывных случайных величин.
Уметь: решать задачи на применение законов непрерывных случайных величин.
Владеть: методами решения задач на применение законов непрерывных случайных величин.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение методами решения задач на применение законов непрерывных случайных величин.

Теоретическая часть
Ответить на контрольные вопросы:

1. Формула Бернулли.
2. Локальная теорема Муавра-Лапласа
3. Формула Пуассона.
4. Интегральная теорема Лапласа
5. Наивероятнейшее число появления события.
6. Биномиальное распределение
7. Пуассоновское распределение
8. Геометрическое распределение
9. Гипергеометрическое распределение
10. Функции распределения НСВ.
11. График функции распределения.
12. Плотность распределения.
13. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал.
14. Равномерное распределение.
15. Показательное распределение

Решение типовых задач

Задача 1. НСВ X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ \sin x, & \text{если} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если} \quad x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей и построить графики $F(x)$ и $f(x)$. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение из интервала $\left(-1,\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение:

при $x \le 0$: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0$;

при $0 < x \le \frac{\pi}{2}$: $F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx = 0 + (-\cos x)\Big|_0^x = -\cos x - (-\cos 0) = -\cos x + 1$;

при $x > \frac{\pi}{2}$: $F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi/2} f(x)dx + \int_{\pi/2}^{x} f(x)dx = 0 + (-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0) + 0 = 1$;

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ -\cos x + 1, & \text{если} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{если} \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$P\left(-1 < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int_{-1}^{\pi/4} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi/4} f(x)dx = 0 + (-\cos x)\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \approx 0{,}3.$$

Задача 2. Найти функцию распределения по заданной плотности распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ,\text{при} \quad x < 0 \\ \cos x & ,\text{при } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & ,\text{при} \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Решение.

1) Если $x < 0$, то $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$.

2) Если $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, то

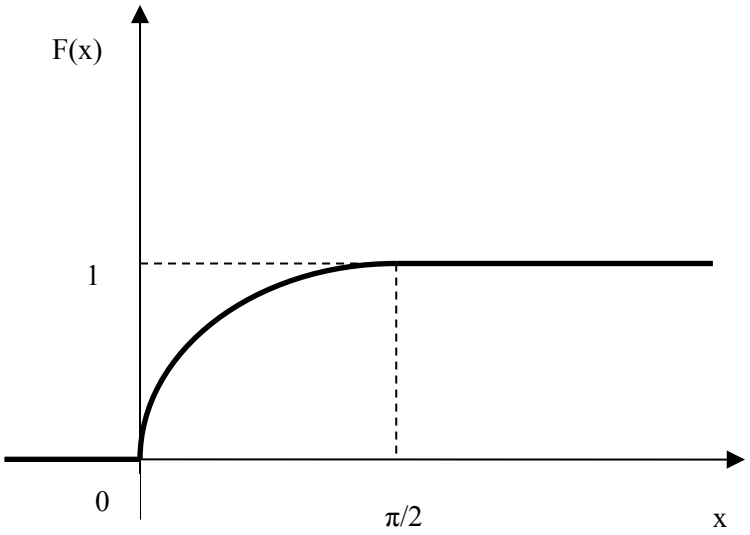
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx = 0 + \int_{0}^{x} \cos x dx = \sin x\Big|_0^x = \sin x.$$

3) Если $x > \frac{\pi}{2}$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(x)dx = 0 + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + 0 = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Таким образом, интегральная функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ \sin x, & \text{при } 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ 1, & \text{при } x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$



Задача 3. НСВ X задана плотностью распределения вероятностей $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-6$ в интервале $(2,4)$. Вне этого интервала $f(x)=0$. Найти все числовые характеристики НСВ X.

Решение:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{2}x\cdot 0\,dx+\int_{2}^{4}x\left(-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-6\right)dx+\int_{4}^{+\infty}x\cdot 0\,dx=\int_{2}^{4}\left(-\frac{3}{4}x^3+\frac{9}{2}x^2-6x\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{3}{16}x^4+\frac{3}{2}x^3-3x^2\right)\Big|_{2}^{4}=\left(-\frac{768}{16}+\frac{192}{2}-48\right)-\left(-3+12-12\right)=0+3=3;$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{2}x^2\cdot 0\,dx+\int_{2}^{4}x^2\left(-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-6\right)dx+\int_{4}^{+\infty}x^2\cdot 0\,dx-3^2=\int_{2}^{4}\left(-\frac{3}{4}x^4+\frac{9}{2}x^3-6x^2\right)dx-3^2=$$

$$=\left(-\frac{3}{20}x^5+\frac{9}{8}x^4-2x^3\right)\Big|_{2}^{4}-3^2=6.4+2.8-9=0.2;$$

$\sigma_X=\sqrt{0.2}\approx 0.45$ $\quad f'(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2};\quad -\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}=0;\quad x=3;\quad M_o(X)=3;$

Т. к. кривая распределения – парабола симметричная относительно прямой $x=3$, то $M_e(X)=3$.

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{b - a}.$$

Задача 4. Автобусы подходят к остановке с интервалом в 5 минут. Считая, что НСВ X - время ожидания автобуса - распределена равномерно, найти среднее время ожидания (математическое ожидание), среднее квадратическое отклонение. Какова вероятность того, случайно подошедший на остановку пассажир будет ожидать автобус не более 4 минут, но и не менее 2 минут.

Решение: $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ \frac{1}{5}, & \text{если} \quad 0 < x \le 5, \\ 0, & \text{если} \quad x > 5. \end{cases}$$

$$M_X = \frac{5}{2} = 2{,}5; \quad D_X = \frac{25}{12}, \quad \sigma_X = \frac{5}{2\sqrt{3}} \approx 1{,}43;$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ \frac{x}{5}, & \text{если} \quad 0 < x \le 5, \\ 1, & \text{если} \quad x > 5. \end{cases}$$

$$P(2 < X < 4) = F(4) - F(2) = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Задача 5. Время X безотказной работы элемента распределено по показательному закону с параметром $\lambda = 0{,}2$ (интенсивность отказов). Найти среднее время безотказной работы элемента, среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно не менее 4 лет, но не более 10.

Решение: $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ 0{,}2e^{-0{,}2x}, & \text{если} \quad x \ge 0. \end{cases}$$

$$M_X = \frac{1}{0{,}2} = 5, \quad D_X = \frac{1}{0{,}2^2} = 25, \quad \sigma_X = \frac{1}{0{,}2} = 5;$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-0{,}2x}, & \text{если} \quad x \ge 0. \end{cases}$$

$$P(4 < X < 10) = F(10) - F(4) = e^{-0{,}2\cdot 4} - e^{-0{,}2\cdot 10} = e^{-0{,}8} - e^{-2} = \frac{1}{\sqrt[5]{e^4}} - \frac{1}{e^2} \approx 0{,}45 - 0{,}16 = 0{,}29.$$

Задача 6. Средний вес пойманной рыбы составляет 375 г., а среднее квадратическое отклонение 25 г. Считая вес пойманной рыбы НСВ X - распределенной по нормальному закону, найти вероятность того, что вес очередной пойманной рыбы будет не менее 300, но и не более 420 граммов. Найти вероятность того, что вес очередной пойманной рыбы будет отличаться от среднего веса не более чем на 0,3.

Решение:

$$P(300 < X < 420) = \Phi\left(\frac{420 - 375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300 - 375}{25}\right) = \Phi(1{,}8) + \Phi(3) = 0{,}4641 + 0{,}49865 = 0{,}96275$$

$$P(|X - 375| < 0{,}3) = 2\Phi\left(\frac{0{,}3}{25}\right) = 0{,}008.$$

Задача 7. Нормально распределенная случайная величина задана дифференциальной функцией $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$.

Найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

$M(X)=1;\ 2\sigma^2=50 \Rightarrow \sigma^2=25$, тогда $\sigma=5$.

Задача 3. Даны $M(x)=3,\ D(x)=4$ случайной величины, распределенной по нормальному закону. Написать $f(x)$ и найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(5,20)$, т.е. найти $P(5<x<20)$.

Решение:

1. $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ т.к. $M(x)=a=3$, а $\sigma=\sqrt{D(x)}=\sqrt{4}=2$, то

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$$

2. $P(\alpha<x<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа

(значения находят из таблицы приложения, учитывая, что $\Phi(+\infty)=\frac{1}{2},\quad \Phi(-\infty)=-\frac{1}{2}$.

Дано $\alpha=5,\quad \beta=20,\quad a=3,\quad \sigma=2$, тогда

$$P(5<x<20)=\Phi\left(\frac{20-3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{5-3}{2}\right)=\Phi\left(\frac{17}{2}\right)-\Phi(1)=0{,}5-0{,}3413=0{,}1587\approx 0{,}2$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Законы распределения НСВ»

1. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ a\cos x, & 0\le x\le\pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$$

Требуется найти:

   a) плотность вероятности f(x);
   b) коэффициент a;
   c) вероятность попадания случайной величины X в интервал (π/4; π/3).

2. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le\pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей F(x) и построить ее график.

3. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3.\\ 1, & x>3\end{cases}$$

Найти:

1) вероятности того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее 2,5, и не меньшее 3;
2) вероятности попадания случайной величины X в интервал (2,5; 3,5) и полуинтервал [1; 2,5);
3) плотность распределения f(x).

Построить графики функций F(x) и f(x).

4. Паром для перевозки автомашин через залив подходит к причалу через каждые два часа. Считая, что время прибытия автомашин – случайная величина X – распределена равномерно, найти: а) плотность вероятности f(x); б) функцию распределения F(x); в) среднее время ожидания автомашиной прихода парома; г) дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания.

5. Случайная величина X, имеющая показательное распределение, задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-0,4x}, & x>0.\end{cases}$ Найти: а) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X; б) вероятность попадания случайной величины X в интервал (2;5).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №31

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

Цель: изучить основы математической статистики.

Знать: понятие вариационного ряда, статистической функции распределения, полигона и гистограммы.
Уметь: решать задачи на нахождение генеральной и выборочной средней, генеральной и выборочной дисперсии, доверительных интервалов.
Владеть: методами решения задач на применение основных правил и законов математической статистики.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение методами решения задач на применение основных правил и законов математической статистики.

.

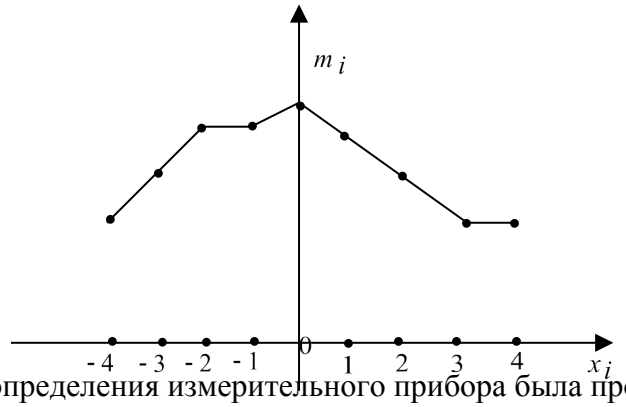
Решение типовых задач

Задача 1. Произведено 20 наблюдений случайной величины (отклонение длины детали от проектной) и получен ряд значений, записанных в порядке наблюдения: 0, 1, -1, 2, 1, 0, -1, -2, 0, -3, -2, -1, 3, -4, 2, -2, -3, 4.
Составить вариационный ряд распределения частот, относительных частот, построить полигон признака.

Решение:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
ь1	2	3	3	4	3	2	1	1
$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

Полигон:



Задача 2. Для определения измерительного прибора была проведена серия независимых измерений эталонной величины. Получен первоначальный ряд признака.

16,7	21,2	17,5	12,0	16,1
20,8	16,9	14,8	12,5	17,4
20,9	18,2	16,8	13,0	16,8
14,5	20,0	17,9	14,1	15,8

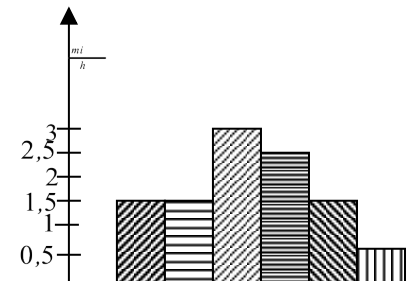
Сопоставить ряд распределения частот, относительных частот. Построить гистограмму частот.

Решение:

x_{i-1} , x_i	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 22
mi	3	3	6	4	3	1
$\frac{mi}{n} = P_i^x$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

Плотность частоты:

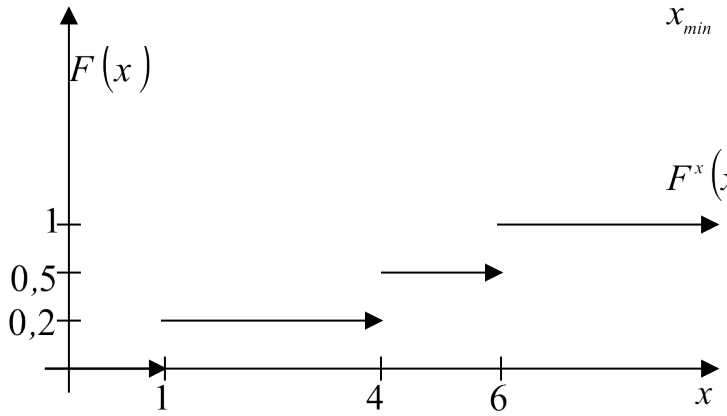
x_{i-1} , x_i	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 22
mi/h	3/2	3/2	6/2	4/2	3/2	1/2



Задача 3. Найти функцию распределения по данному распределению выборки.

x_i	1	4	6
m_i	10	15	25

Решение: найдем $n = 10 + 15 + 25 = 50$,



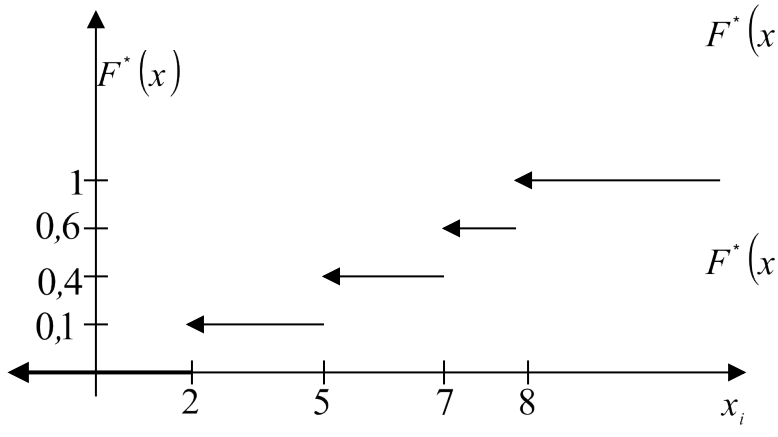
$$x_{min} = 1, \quad F^x(x) = 0, \quad x < 1$$

$$F^x(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{10}{50}, & 1 \le x < 4, \\ \frac{25}{50}, & 4 \le x < 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Задача 4. Найти эмпирическую функцию распределения выборки. Построить график. Найти среднее значение и дисперсию статистического распределения.

x_i	2	5	7	8
m_i	1	3	2	4

Решение:



$$F^*(x)=\frac{m_i}{n} \qquad n=V_в=10$$

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \frac{1}{10}, & 2<x\le 5\\ \frac{4}{10}, & 5<x\le 7\\ \frac{6}{10}, & 7<x\le 8\\ 1, & x>8\end{cases}$$

$$M_в=\bar{x}_в=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{n}=\frac{2\cdot 1+5\cdot 3+7\cdot 2+8\cdot 4}{10}=6{,}3$$

$$D_в=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_в)^2 m_i}{n}=M_в(x^2)-[M_в(x)]^2=43{,}3-39{,}69\approx 3{,}6$$

Задача 5. Пусть генеральная совокупность задана таблицей. Найти генеральную среднюю и генеральную дисперсию.

x_i	1	3	5
n_i	10	20	10

Решение:

$$n=10+20+10=40. \qquad \bar{x}_г=\frac{10+60+50}{40}=3; \qquad D_г=\frac{(1-3)^2\cdot 10+(3-3)^2\cdot 20+(5-3)^2\cdot 10}{40}=2$$

Задача 6. Найти методом произведений выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объема n=100

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4

Решение:

Для нахождения S_1 и S_2 надо составить следующую расчетную таблицу. Выберем a= x_3=16, т. к. частота у этого числа наибольшая.

$\Delta x=h=2$ (т. е. 14-12, 16-14, и т. д.)

x_i	n_i	a_i	$a_i n_i$	$a_i^2 n_i$
12	5	-2	-10	20
14	15	-1	-15	15
16	50	0	0	0
18	16	1	16	16
20	10	2	20	40
22	4	3	12	36

n=100 S_1=23; S_2=127

$$\bar{x}=\frac{h}{n}\cdot S_1+a=\frac{2}{100}\cdot 23+16\approx 16.46$$

$$\sigma = \frac{h}{n}\sqrt{S_2 - \frac{S_1^2}{n}} = \frac{2}{100}\sqrt{127 - \frac{529}{100}} = \frac{2}{100}\sqrt{127 - \frac{529}{100}} = \frac{2}{100} \times 11{,}05 \approx 0{,}221$$

В ряде задач требуется не только находить $\bar{x}_в, D_в, D_г, \sigma_в, \sigma_г$, но определять точность и надежность полученной оценки. Точность определяется доверительным интервалом, а надежность доверительной вероятностью.

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Основные понятия математической статистики»

1. По данным выборки построить эмпирическую функцию распределения и полигон относительных частот

x_i	23	25	26	28
n_i	8	7	6	9

2. По данным выборки построить эмпирическую функцию распределения и гистограмму относительных частот

$x_i < X \le x_{i+1}$	$(2,4)$	$(4,6)$	$(6,8)$	$(8,10)$	$(10,12)$
n_i	5	8	16	12	9

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №32

ТОЧЕЧНАЯ И ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКИ, ТОЧНОСТЬ И НАДЕЖНОСТЬ ОЦЕНКИ, ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ.

Цель: изучить основы математической статистики.

Знать: понятия точечная и интервальная оценки, точность и надежность оценки, доверительный интервал.
Уметь: решать задачи на нахождение точечной и интервальной оценок, точности и надежности оценки, доверительного интервала.
Владеть: методами решения задач на применение основных правил и законов математической статистики.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение методами решения задач на применение основных правил и законов математической статистики.

Решение типовых задач

Задача 1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0{,}95$ неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X

генеральной совокупности, если даны генеральное среднее $\sigma = 25$, выборочная средняя $\bar{x}_в = 14$ и ее объем выборки $n = 25$.

Решение:

Воспользуемся формулой: $\bar{x}_в - t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \varepsilon$ - точность оценки, n- объем выборки, t- значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$

Найдем t. $2\Phi(t) = \gamma$; $\Phi(t) = 0{,}475$; *по таблице* $t = 1{,}96$

$$14 - 1{,}96 \times \frac{5}{5} < a < 14 + 1{,}96 \times \frac{5}{5}$$

$$12{,}04 < a < 15{,}96;$$

Задача 2. Дана таблица, состоящая из 100 значений. Составить ряд распределения, определит доверительные интервалы ряда. $\gamma = 0{,}95$

89	79	94	95	86	81	83	88	84	94
91	74	96	86	67	89	73	92	85	82
90	92	85	82	83	93	89	82	85	81
64	88	82	90	76	70	91	92	87	90
80	75	96	94	63	95	87	74	95	91
90	80	80	79	84	86	93	87	83	92
92	76	81	85	87	83	71	86	94	86
74	81	78	91	77	75	92	80	78	83
90	78	79	90	79	85	86	94	86	91
73	80	86	93	77	82	77	103	96	97

Решение:

Найдем $x_{\min} = 63$; $x_{\max} = 103$, размах выборки $R = x_{\max} - x_{\min} = 103 - 63 = 40$

$K \le 5\lg n \le 5\lg 100 \le 7$; $K = 7$

$h = \frac{40}{7} \approx 5{,}71 \approx 6$ - *шаг выборки*

$a_н = 63 - \frac{h}{2} = 63 - 3 = 60$ - *начало*

$b_к = 103 + \frac{h}{2} = 103 + 3 = 106$ - *конец*

x_{i-1}, x	60÷66	66÷72	72÷78	78÷84	84÷90	90÷96	96÷102
n_i	2	3	15	24	28	26	2

Найдем $\bar{x}_в$ - среднее значение интервала

$$\bar{x}_в = \frac{\sum \bar{x}_i n_i}{n} = \frac{63 \times 2 + 69 \times 3 + 75 \times 15 + 81 \times 24 + 87 \times 28 + 93 \times 26 + 99 \times 2}{100} = \frac{8454}{100} = 84{,}54 \approx 85$$

$$D_в = \frac{\sum n_i (\bar{x}_i - \bar{x}_в)^2}{n} = \frac{2\times(63-85)^2 + 3\times(69-85)^2 + 15\times(75-85)^2 + 24\times(81-85)^2 + 28\times(93-85)^2}{100} +$$

$$+ \frac{26\times(93-85)^2 + 2\times(99-85)}{100} = \frac{5788}{100} = 57{,}88$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} \approx 7{,}6 \approx 8$$

Определим доверительные интервалы

$$\bar{x}_в - t\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}};$$

Найдем t. $2\Phi(t) = \gamma$; $\Phi(t) = 0{,}475$; *по таблице* $t = 1{,}96$

$$85 - 1{,}96\times\frac{8}{10} < a < 85 + 1{,}96\times\frac{8}{10}$$

$$85 - 1{,}568 < a < 85 + 1{,}568$$

$$83{,}432 < a < 86{,}568$$

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Основные понятия математической статистики»

1. Найти несмещенную оценку математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности по данным выборки

x_i	-6	-2	3	6
n_i	12	14	16	8

2. По данным выборки определить доверительный интервал (с надежностью $\gamma = 0{,}95$) математического ожидания. Считать распределение параметра нормальным, а σ - неизвестным

0,67;0,33;0,40;0,30;0,40;0,60;0,11;0,40;0,50;0,30;0,01;
0,30;0,22;0,60;0,40;0,77;0,70;0,70;0,60;0,43;0,40;0,33;
0,40;0,14;0,63;0,20;0,60;0,40;0,60;0,44.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №33

ЛИНЕЙНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ.

Цель: изучить основы теории линейной корреляции.
Знать: понятие выборочный коэффициент корреляции, выборочное уравнение регрессии.
Уметь: решать задачи на нахождение выборочный коэффициент корреляции, выборочное уравнение регрессии.
Владеть: методами решения задач с применением корреляционной таблицы.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.
Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение методами решения задач на применение основных правил и законов математической статистики.

Решение типовых задач

Задача 1. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным пяти наблюдений

x_i	1	1,5	3	4,5	5
y_i	1,25	1,4	1,5	1,75	2,25

Решение:

1) Составим расчетную таблицу

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	1,25	1	1,25	1,5625
1,5	1,4	2,25	2,1	1,96
3	1,5	9	4,5	2,25
4,5	1,75	20,25	7,875	3,0625
5	2,25	25	11,25	5,0625
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 8{,}15$	$\sum x_i^2 = 57{,}50$	$\sum x_i y_i = 26{,}975$	$\sum y_i^2 = 13{,}8975$

2) Найдем выборочный коэффициент корреляции

Так как пары значений $(x_i; y_i)$ встречаются по одному разу, то формулу для коэффициента корреляции можно упростить

$$r_B = \frac{\sum xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_{Bx}\sigma_{By}}; \qquad \overline{x} = \frac{15}{5} = 3; \qquad \overline{y} = \frac{8{,}15}{5} = 1{,}63;$$

$$\overline{x^2} = \frac{57{,}50}{5} = 11{,}5; \qquad \overline{y^2} = \frac{13{,}8975}{5} = 2{,}7795;$$

$$\sigma_{Bx} = \sqrt{11{,}5 - (3)^2} = 1{,}58; \qquad \sigma_{By} = \sqrt{2{,}7795 - (1{,}63)^2} = 0{,}35;$$

$$r_B = \frac{26{,}975 - 5 \cdot 3 \cdot 1{,}63}{5 \cdot 1{,}58 \cdot 0{,}35} = 0{,}9132.$$

3) Найдем уравнение прямой линии регрессии

$$\overline{y}_x - 1{,}63 = 0{,}9132\,\frac{0{,}35}{1{,}58}(x - 3),$$

$$\overline{y}_x = 0{,}202x + 1{,}023$$

Задача 2. Выборка представлена в виде корреляционной таблицы. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным корреляционной

	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	-	7	-	-	10
120	4	-	2	-	-	3	9
140	-	5	-	10	5	2	22
160	-	-	3	1	2	3	9
n_x	6	6	5	18	7	8	50

Замечание 1. Если данные наблюдений над признаками X и Y заданы в виде корреляционной таблицы с равноотстоящими вариантами, то удобнее перейти к условным вариантам:

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1};$$

$$u_j = \frac{y_j - C_2}{h_2},$$

где C_1 и C_2 - ложные нули вариант X и Y соответственно;

h_1 и h_2 - шаги, т.е. разности между двумя соседними вариантами X и Y соответственно.

Замечание 2. В случае если был осуществлен переход к условным вариантам, выборочный коэффициент корреляции примет вид

$$r_B = \frac{\sum n_{uu} u u - n\bar{u}\bar{u}}{n s_{Bu} s_{Bu}},$$

где величины $\bar{u}, \bar{u}, s_{Bu}, s_{Bu}$ могут быть найдены либо методом произведений (при большом числе данных), либо непосредственно по формулам выборочного среднего и выборочного среднего квадратического отклонения.

Замечание 3. Зная величины $\bar{u}, \bar{u}, s_{Bu}, s_{Bu}$ можно определить входящие в уравнения регрессии величины по формулам

$$\bar{x} = \bar{u} h_1 + C_1,$$

$$\bar{y} = \bar{u} h_2 + C_2,$$

$$s_x = s_u h_1,$$

$$s_y = s_u h_2.$$

Решение:

1) Составим корреляционную таблицу в условных вариантах, с учетом того, что $C_1 = 30$, $C_2 = 120$, $h_1 = 5$, $h_2 = 20$

	-3	-2	-1	0	1	2	n_{u_j}
-1	2	1	-	7	-	-	10
0	4	-	2	-	-	3	9
1	-	5	-	10	5	2	22
2	-	-	3	1	2	3	9
n_{u_i}	6	6	5	18	7	8	$n = 50$

2) Составим расчетную таблицу для нахождения суммы $\sum n_{uu} u u$ следующим образом:

1. В каждой клетке, в которой частота $n_{uu} \neq 0$, запишем в правом верхнем углу произведение частоты n_{uu} на варианту u.
2. Сложим все числа, записанные в правых верхних углах клеток одной строки и их сумму запишем в клетку этой же строки столбца U.
3. Умножим варианту u на U и полученное произведение запишем в последнюю клетку той же строки, в клетку столбца uU.
4. Сложим все все числа столбца uU и получим сумму $\sum uU$, которая равна искомой сумме.
5. Для контроля аналогичные вычисления проведем по столбцам.

	-3	-2	-1	0	1	2	V_j	$\sum u_j V_j$
-1	2	1	-	7	-	-	-8	8
0	4	-	2	-	-	3	-8	0
1	-	5	-	10	5	2	-1	-1
2	-	-	3	1	2	3	5	10
U_i	-2	4	6	5	9	8	-	$\sum = 17$
$u_i U_i$	6	-8	-6	0	9	16	$\sum = 17$	

Контроль: $\sum u_i U_i = \sum u_j V_j = 17$

3) Найдем $\overline{u}, \overline{u}$

$$\overline{u} = \frac{-3 \times 6 - 2 \times 6 - 1 \times 5 + 1 \times 7 + 2 \times 8}{50} = -0,24$$

$$\overline{u} = \frac{-1 \times 10 + 1 \times 22 + 2 \times 9}{50} = 0,6$$

4) Найдем $\overline{u^2}, \overline{u^2}$

$$\overline{u^2} = \frac{9 \times 6 + 4 \times 6 + 1 \times 5 + 1 \times 7 + 4 \times 8}{50} = 2,44$$

$$\overline{u^2} = \frac{1 \times 10 + 1 \times 22 + 4 \times 9}{50} = 1,36$$

5) Найдем s_u, s_u

$$s_u = \sqrt{2,44 - (-0,24)^2} = 1,54$$

$$s_u = \sqrt{1,36 - (0,6)^2} = 1$$

6) Вычислим r_B

$$r_B = \frac{17 - 50 \times (-0,24) \times 0,6}{50 \times 1,54 \times 1} = 0,314$$

7) Выполним переход к исходным вариантам

$$\overline{x} = 5 \times (-0,24) + 30 = 28,8$$

$$\overline{y} = 20 \times 0,6 + 120 = 132$$

$$s_{Bx} = 5 \times 1,54 = 7,7$$

$$s_{By} = 20 \times 1 = 20$$

8) Найдем уравнение регрессии Y на X

$$\overline{y_x} - 132 = 0,314 \frac{20}{7,7} (x - 28,8)$$

$\overline{y_x} = 0{,}8x + 108$

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Линейная корреляция»

1. Найти и построить выборочное уравнение линейной регрессии Y на X и выборочный коэффициент корреляции по данным выборки

X	10	15	20	25	30	30
Y	5	15	25	28	30	31

2. Найти выборочное уравнение линейной регрессии Y на X на основании корреляционной таблицы

	10	15	20	25	30	35
15	6	4	-	-	-	-
25	-	6	8	-	-	-
35	-	-	-	21	2	5
45	-	-	-	4	12	6
55	-	-	-	-	1	5

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №34

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ.

Цель: изучить методику проверки статистических гипотез.
Знать: понятие дисперсий нормальных генеральных совокупностей, исправленной выборочной дисперсии, гипотетической генеральной дисперсии нормальной совокупности.
Уметь: решать задачи на нахождение генеральной и выборочной средней, генеральной и выборочной дисперсии, доверительных интервалов.
Владеть: методами сравнения двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей и сравнения исправленной выборочной дисперсии и гипотетической генеральной дисперсии нормальной совокупности.

.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.**Актуальность:** для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение методами решения задач на применение основных правил и законов математической статистики.

Решение типовых задач

1.Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

На практике необходимость сравнения дисперсий возникает, если требуется сравнить точность приборов, инструментов, методов измерений.
Пусть по независимым выборкам, объемы которых n_1 и n_2, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии S_X^2 и S_Y^2.

Требуется по исправленным выборочным дисперсиям при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$H_0 : D(X) = D(Y).$$

В этом случае в качестве статистического критерия выбирается величина

$$F_{набл} = \frac{S_Б^2}{S_M^2}.$$

Значения этого критерия находятся по таблице распределения Фишера – Снедекора. Рассуждения строятся в зависимости от того, какой вид имеет конкурирующая гипотеза.

Правило 1. Пусть конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) > D(Y)$, если $S_X^2 > S_Y^2$ или $H_1 : D(X) < D(Y)$, если $S_Y^2 > S_X^2$.

1) Вычисляется $F_{набл}$.

2) По таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора, по заданному уровню значимости α и числам степеней свободы $k_1 = n_1 - 1, k_2 = n_2 - 1$ (n_1 - объем выборки с большей исправленной выборочной дисперсией, а n_2 - с меньшей) находится критическая точка $F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$.

3) Если $K_{набл} < K_{кр}$ - нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

4) Если $K_{набл} > K_{кр}$ - нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. Пусть конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

Тогда все вычисления и выводы аналогичны правилу 1, с той лишь разницей, критическую точку $F_{кр}\left(\frac{\alpha}{2}; k_1; k_2\right)$ ищут по уровню значимости вдвое меньшему заданного, т.е. $\frac{\alpha}{2}$.

Задача 1. Срок хранения продукции, изготовленной по технологии A, составил

Срок хранения	x_i	5	6	7
Число единиц продукции	n_i	2	4	4

а изготовленной по технологии B

Срок хранения	y_i	5	6	7	8
Число единиц продукции	m_i	1	8	7	1

Предположительно случайные величины распределены по нормальному закону. Проверить нулевую гипотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ при уровне значимости $0{,}1$.

Решение:

I. Пусть конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

1) Найдем $F_{набл}$

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 4}{10} = 6{,}2$$

$$\overline{x^2} = \frac{25 \cdot 2 + 36 \cdot 4 + 49 \cdot 4}{10} = 39$$

$$\overline{y} = \frac{5 \cdot 1 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 1}{17} = 6{,}5$$

$$\overline{y^2} = \frac{25 \cdot 1 + 36 \cdot 8 + 49 \cdot 7 + 64 \cdot 1}{17} = 42{,}35$$

$$\overline{S_X^2} = \frac{10}{9}\left(39 - (6{,}2)^2\right) = 0{,}62$$

$$\overline{S_Y^2} = \frac{17}{16}\left(42{,}35 - (6{,}5)^2\right) = 0{,}11$$

$$F_{набл} = \frac{0{,}62}{0{,}11} = 5{,}64$$

2) Найдем $F_{кр}\left(\frac{\alpha}{2}; k_1; k_2\right)$

$\alpha = 0{,}1$

$k_1 = 10 - 1 = 9$

$k_2 = 17 - 1 = 16$

$F_{кр}(0{,}05;9;16) = 2{,}54$

3) Так как $F_{набл} > F_{кр}$, то нулевую гипотезу отвергаем, принимаем конкурирующую.

II. Так как $S_X^2 > S_Y^2$, то в качестве конкурирующей гипотезы может быть принята $H_1 : D(X) > D(Y)$

1) Найдем $F_{набл} = 5{,}64$

2) Найдем $F_{кр}(0{,}1;9;16) = 2{,}06$

3) Так как $F_{набл} > F_{кр}$, то нулевую гипотезу отвергаем, принимаем конкурирующую.

2. Сравнение исправленной выборочной дисперсии и гипотетической генеральной дисперсии нормальной совокупности.

По выборке объема n найдена исправленная выборочная дисперсия S^2.

Требуется по исправленной выборочной дисперсии при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что неизвестная генеральная $D(X)$ дисперсия равна гипотетическому (предполагаемому) значению D_0:

$$H_0 : D(X) = D_0 .$$

В этом случае в качестве статистического критерия выбирается величина

$$\chi^2_{набл} = \frac{(n-1)S^2}{D_0} .$$

Значения этого критерия находятся по таблице распределения χ^2.

Рассуждения строятся в зависимости от того, какой вид имеет конкурирующая гипотеза.

Правило 1. Пусть конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) > D_0$.

1) Вычисляется $\chi^2_{набл}$.

2) По таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числе степеней свободы $k = n - 1$ находится критическая точка $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$.

3) Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ - нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

4) Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ - нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. Пусть конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) \neq D_0$.

1) Находится левая критическая точка $\chi^2_{лев.кр}\left(1-\frac{\alpha}{2};k\right)$.

2) Находится правая критическая точка $\chi^2_{прав.кр}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)$.

3) Если $\chi^2_{лев.кр} < \chi^2_{набл} < \chi^2_{прав.кр}$ - нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

4) Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{лев.кр}$ или $\chi^2_{набл} > \chi^2_{прав.кр}$ - нулевую гипотезу отвергают.

Правило 3. Пусть конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) < D_0$.

1) Вычисляется $\chi^2_{набл}$.

2) Находится критическая точка $\chi^2_{кр}(1-\alpha;k)$.

3) Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ - нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

4) Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ - нулевую гипотезу отвергают.

Задача 2.. Точность работы станка-автомата проверяется по дисперсии контролируемого размера изделий, которая не должна превышать 0,1. Взята проба 25 случайных отобранных изделий, причем получены следующие результаты измерений

Размер изделий пробы	x_i	3	3,5	3,8	4,4	4,5
частота	n_i	2	6	9	7	1

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить, обеспечивает ли станок требуемую точность.

Решение: Нулевая гипотеза имеет вид $H_0 : D(X) = D_0 = 0{,}1$.

Пусть конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) > D_0 = 0{,}1$.

1) Найдем $\chi^2_{набл}$

$$\bar{x} = \frac{3\cdot 2 + 3{,}5\cdot 6 + 3{,}8\cdot 9 + 4{,}4\cdot 7 + 4{,}5\cdot 1}{25} = 3{,}9$$

$u_i = 10x_i - 39$

u_i	-9	-4	-1	5	6
n_i	2	6	9	7	1

$\sum n_i u_i^2 = 478$

$\sum n_i u_i = -10$

$$S_u^2 = \frac{478 - \frac{(-10)^2}{25}}{24} = 19{,}75$$

$$S_X^2 = \frac{19{,}75}{10^2} = 0{,}1975 \approx 0{,}2$$

$$\chi^2_{набл} = \frac{(25-1)0{,}2}{0{,}1} = 48$$

2) Найдем $\chi^2_{кр}(\alpha;k)$

$\chi^2_{кр}(0{,}05;24) = 36{,}4$

3) Так как $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ - нулевую гипотезу отвергаем и принимаем конкурирующую гипотезу.

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Проверка статистических гипотез»

1. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух нормально распределенных случайных величин X и Y на основе данных выборки при альтернативной гипотезе $H_1 : D(X) \neq D(Y)$

x_i	37	38	40	41	42
n_i	2	1	4	3	6

y_i	**38**	**39**	**40**	**41**	**43**
m_i	4	3	2	2	3

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Перечень основной литературы:

1.Баврин, И. И. Математическая обработка информации / И.И. Баврин. - Москва : Прометей, 2016.

2.Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - Москва : Юрайт, 2016. - 480 с.

3.Шипачев, В. С. Высшая математика. Полный курс : учебник для академического бакалавриата : для студентов высших учебных заведений, обучающихся по всем направлениям и специальностям / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова. - 4-е изд., испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2015. - 608 с.

Перечень дополнительной литературы:

1.Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для прикладного бакалавриата : для студентов вузов / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - Москва : Юрайт, 2014. - 405 с.

2. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд., испр. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2015. - 816 с

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

1 Методические рекомендации для проведения практических занятий по дисциплине "Математика": Направление 19.03.03 Продукты питания животного происхождения. Очная форма обучения.

2 Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов по дисциплине "Математика": Направление 19.03.03 Продукты питания животного происхождения. Очная форма обучения.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1 . http://www.allmath.ru/ Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

2. http://www.exponenta.ru/ Образовательный математический сайт.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
по дисциплине

Математика

Направление подготовки 19.03.03 Продукты питания животного происхождения
Направленность (профиль) Биоинженерия и технологии
Форма обучения очная
Год начала обучения 2026
Реализуется в 1-2 семестрах

Ставрополь, 2026

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1. Цель и задачи освоения дисциплины (модуля)

Цель освоения дисциплины: «Математика» является формирование соответствующих компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 19.03.03 Продукты питания животного происхождения.

Задачи освоения дисциплины:

- формирование математической культуры бакалавров;
- получение базовых знаний по высшей математике;
- овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач в профессиональной деятельности.

2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина «Математика» входит в блок обязательной части дисциплин. Ее освоение происходит в 1-2 семестрах.

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности	ИД-1 ОПК-2. Применяет законы и методы научного исследования для решения задач профессиональной деятельности.	Способен применять законы и методы алгебры, геометрии, математического анализа, теории вероятности и математической статистики для решения задач профессиональной деятельности.
	ИД-2 ОПК-2. Объясняет, описывает и интерпретирует решение учебных и профессиональных задач на основе имеющихся научных знаний, умеет прогнозировать характер протекания технологических процессов на основе имеющихся научных данных.	Владеет математическими методами для описания и объяснения технологических процессов и прогнозирования характера их протекания на основе имеющихся научных данных.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа как важнейшая форма учебного процесса.

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования - "подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности".

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:

- изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;
- подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ;
- участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.

Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.

Цели и основные задачи СРС

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой специалиста и бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3. Виды самостоятельной работы

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации, содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.):

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателей являются:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание рефератов;
- подготовка к семинарам и лабораторным работам, их оформление;

- составление аннотированного списка статей из соответствующих журналов по отраслям знаний (педагогических, психологических, методических и др.);
- подготовка рецензий на статью, пособие;
- выполнение микроисследований;
- подготовка практических разработок;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов.

(В зависимости от особенностей факультета перечисленные виды работ могут быть расширены, заменены на специфические).

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

- текущие консультации;
- коллоквиум как форма контроля освоения теоретического содержания дисциплин: (в часы консультаций, предусмотренных учебным планом);
- прием и разбор домашних заданий (в часы практических занятий);
- прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р);
- выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин (руководство, консультирование и защита курсовых работ (в часы, предусмотренные учебным планом);
- выполнение учебно-исследовательской работы (руководство, консультирование и защита УИРС);
- прохождение и оформление результатов практик (руководство и оценка уровня сформированности профессиональных умений и навыков);
- выполнение выпускной квалификационной работы (руководство, консультирование и защита выпускных квалификационных работ) и др.

Организация СРС

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Организацию самостоятельной работы студентов обеспечивают: факультет, кафедра, учебный и методический отделы, преподаватель, библиотека, ТСО, ИВТ, издательство и др.

Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя студент должен:

- освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем в соответствии с Государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования (ГОС ВПО/ГОС СПО) по данной дисциплине.
- планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем.
- самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя.
- выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

студент может:

сверх предложенного преподавателем (при обосновании и согласовании с ним) и минимума обязательного содержания, определяемого ФГОС ВО по данной дисциплине:

- самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;
- предлагать дополнительные темы и вопросы для самостоятельной проработки;
- в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;
- предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;
- использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;
- использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего специалиста, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий.

Общие рекомендации по организации самостоятельной работы

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы зияний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;

б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли.

Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы – это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления исследователя и специалиста

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не только к моральным, нравственным свойствам человека, но и в особенности, постоянно возрастающие требования в области образования – обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной мыслью и языком науки является необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для реализации этой задачи. Ибо во время учебы в вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этом пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения (лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контролирования за их деятельностью. Отметим, что нельзя ограничиваться только приобретением знаний предусмотренных программой изучаемой дисциплины, надо постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т.е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность методов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать его, чтобы изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебе с будущей профессиональной деятельности

Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы.

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно – выучу!»), а когда приходит пора экзаменов, материала, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться в оставшийся промежуток времени.

Работа с книгой.

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги. Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода). При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;
2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;
3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;
4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;
5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;
2. Выделите главное, составьте план;
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;
4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

Практические занятия.

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка.

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые

самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ТЕМА 1. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Матрицы и действия над ними. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы. Определители, их свойства и вычисление. Обратная матрица. Системы линейных уравнений и методы их решения: метод Гаусса, метод Крамера, матричный метод.

В рамках темы 1 предусмотрено проведение двух самостоятельных работ, выполнение двух индивидуальных домашних заданий и сдача коллоквиума.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

1.Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}5 & 7 & 4\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 7 & -1\\ 3 & -2 & 4\\ 0 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 10\end{pmatrix}$ Найти $-3A^T+4B^T$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}-1 & 3 & 1 & 2\\ -5 & 8 & 2 & 7\\ 4 & -5 & 3 & -2\\ -7 & 8 & 4 & 5\end{vmatrix}$.

Типовой вариант самостоятельной работы №2

Решить систему линейных уравнений матричным методом и по формулам Крамера:

$$\begin{cases}2x_1-3x_2-x_3+6=0,\\ 3x_1+4x_2+3x_3+5=0,\\ x_1+x_2+x_3+2=0.\end{cases}$$

Индивидуальное домашнее задание №1 (примерный вариант)

Задание №1. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13\\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21\\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2\\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10\end{pmatrix}$

Задание №2.Найти произведение матриц A и B, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 4 & -3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 3\\ -2 & 4 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

Задание №3.Дана матрица $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ 5 & 3 & -2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$. Найти A^{-1} и установить, что $AA^{-1}=E$.

Задание №4. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2 & -2\\ 0 & 4 & 2 & 5\end{pmatrix}$

Индивидуальное домашнее задание №2 (примерный вариант)

Решить данную систему уравнений $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3+x_4=0,\\ 7x_1+6x_2+7x_3+4x_4=-2,\\ 14x_1+13x_2+16x_3+10x_4=-5,\\ 25x_1+24x_2+30x_3+20x_4=-9. \end{cases}$ тремя методами:

1) по формулам Крамера; 2) с помощью обратной матрицы; 3)методом Гаусса.

Вопросы для подготовки к коллоквиуму

1. Понятие матрицы. Виды матриц.
2. Операции над матрицами и их свойства.
3. Элементарные преобразования матриц.
4. Ранг матрицы. Ступенчатый вид матрицы.
5. Определители малых порядков и их вычисление.
6. Свойства определителей.
7. Миноры и алгебраические дополнения.
8. Разложение определителя по строке или столбцу.
9. Обратная матрица. Критерий обратимости матрицы.
10. Способы вычисления обратной матрицы.
11. Основные понятия и определения систем линейных уравнений.
12. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
13. Теорема Крамера.
14. Теорема Кронекера-Капелли и следствия из нее.
15. Метод Гаусса.

Задачи для самостоятельного решения

4. Найти произведение матриц ABC, где $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$
5. Вычислить матрицу P = ABC - 3E, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\end{pmatrix}$, E- единичная матрица соответствующего порядка.
6. Найти ранги матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

7. Вычислить определитель по правилу треугольников: $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

8. Вычислить определитель, разлагая его по элементам третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 6 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 8 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

10. Найти обратную матрицу A^{-1}: а) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

11. Решить системы линейных уравнений матричным методом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0; \end{cases}$ *в)* $\begin{cases} 5x + 2y + 5z = 4, \\ 3x + 5y - 3z = -1, \\ -2x - 4y + 3z = 1. \end{cases}$

12. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 6x_5 = 3. \end{cases}$

ТЕМА 2 ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Векторы. Линейные операции над векторами Координаты вектора. Проекция вектора на ось. Системы координат. Скалярное произведение векторов. Векторное и смешанное произведение векторов. Виды уравнений прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Виды уравнений плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей. Виды уравнений прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Линии второго порядка. Окружность, эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения.

В рамках темы 2 предусмотрено проведение трех самостоятельных работ, выполнение трех индивидуальных домашних заданий, проведение контрольной работы и сдача коллоквиума.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

Найти вектор $\bar{x}$, зная, что $\bar{x}\,\hat{}\,\bar{a}, \bar{a} = (1,0,1)$, $\bar{x}\,\hat{}\,\bar{b}$, $\bar{b} = (0,2,-1)$, проекция вектора $\bar{x}$ на вектор $\bar{c}$=(1,2,2) равна 1.

Типовой вариант самостоятельной работы №2

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$ и $8x + 4y + 9 = 0$ параллельно прямой $x + 3y = 0$.
2. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что он проходит через точку $M(-4, \sqrt{21})$ и имеет эксцентриситет $e = 3/4$. Построить эллипс.

Типовой вариант самостоятельной работы №3

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(2,3,4) и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки a =1 и b = −1.
2. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку M(1,3,−2) и образующей с осями Ox, Oy и Oz углы 120^0, 60^0 и 45^0 соответственно.

Типовой вариант контрольной работы № 1 (темы 2 и 3)

1. Даны стороны треугольника: $x - y + 2 = 0\ (AB)$, $x = 2\ (BC)$, $x + y - 2 = 0\ (AC)$. Составить прямой, проходящей через вершину B и через точку на стороне AC, делящую ее, считая от вершины A, в отношении $1:3$.

2. Решить систему по формулам Крамера и методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 2x + y - z = 0 \\ 4x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

3. Решить систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Индивидуальное домашнее задание №3 (примерный вариант)

Задание №1. Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{c} = 5\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$. Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение трех векторов $\bar{a}, 3\bar{b}, \bar{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\bar{a}, 2\bar{c}$;

в) вычислить скалярное произведение двух векторов $\bar{b}, -4\bar{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\bar{a}, \bar{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $\bar{a}, 2\bar{b}, 3\bar{c}$.

Задание № 2. Вершины пирамиды находятся в точкахA(3,4,5), B(1,2,1), C(–2,–3,6), D(3,–6,–3). Вычислить:

а) площадь граниACD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AB и две вершины пирамидыC и D;

в) объем пирамиды ABCD.

Индивидуальное домашнее задание №4 (примерный вариант)

Даны вершины треугольника ABC:A(–2, 4), B(3,1), C(10,7). Найти:

1) уравнение стороны AB;
2) уравнение высоты CH;
3) уравнение медианы AM;
4) точку P пересечения медианы AM и высоты CH;
5) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;
6) расстояние от точки C до прямой AB.

Индивидуальное домашнее задание №5 (примерный вариант)

Даны четыре точки: $A_1(3,1,4)$, $A_2(-1,6,1)$, $A_3(-1,1,6)$, $A_4(0,4,-1)$.
Составить уравнения:

1) плоскости $A_1A_2A_3$;
2) прямой A_1A_2;
3) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;
4) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2;
5) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.

Вычислить:

1) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
2) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Вопросы для подготовки к коллоквиуму

1. Основные понятия векторной алгебры.
2. Линейные операции над векторами и их свойства.
3. Линейная зависимость векторов.
4. Линейная зависимость векторов на плоскости и в пространстве.
5. Понятие базиса. Координаты вектора.
6. Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме.
7. Проекция вектора на ось. Основные свойства проекций.
8. Аффинная система координат.
9. Прямоугольная декартова система координат.
10. Скалярное произведение векторов и его свойства.
11. Выражение скалярного произведения векторов в координатах.
12. Длина вектора и направляющие косинусы.
13. Векторное произведение векторов и его свойства.
14. Выражение векторного произведения векторов в координатах.
15. Приложения векторного произведения векторов.
16. Смешанное произведение векторов и его геометрический смысл.
17. Свойства смешанного произведения векторов и его выражение в координатах.
18. Приложения смешанного произведения векторов
19. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору.
20. Общее уравнение прямой. Неполные уравнения прямой.
21. Уравнение прямой в отрезках.
22. Каноническое и параметрические уравнения прямой на плоскости.
23. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки.

24. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
25. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
26. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору.
27. Общее уравнение плоскости. Неполные уравнения плоскости.
28. Уравнение плоскости в отрезках.
29. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.
30. Взаимное расположение двух плоскостей.
31. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве.
32. Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки.
33. Общие уравнения прямой в пространстве. Переход от общих уравнений прямой к каноническим.
34. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
35. Взаимное расположение прямой и плоскости.
36. Пересечение прямой и плоскости.
37. Окружность.
38. Эллипс. Исследование формы и расположения эллипса по его каноническому уравнению.
39. Гипербола. Исследование формы и расположения гиперболы по ее каноническому уравнению.
40. Равносторонняя и сопряженная гиперболы.
41. Парабола. Исследование формы и расположения параболы по ее каноническому уравнению.
42. Виды парабол.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти длину вектора $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 6\bar{k}$ и его направляющие косинусы.
2. Даны модули векторов $|\bar{a}| = 11, |\bar{b}| = 23, |\bar{a} - \bar{b}| = 30$. Найти $|\bar{a} + \bar{b}|$.
3. На плоскости даны три вектора $\bar{a} = 2\bar{i}, \bar{b} = 3\bar{i} + 3\bar{j}, \bar{c} = 2\bar{i} + 6\bar{j}$. Разложить вектор $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.
4. Даны четыре вектора $\bar{a}$ =(2,1,0), $\bar{b}$ =(1,-1,2), $\bar{c}$=(2,2,-1), $\bar{d}$ =(3,7,-7). Разложить вектор $\bar{d}$ по векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.
5. Дано: $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 1, \varphi = (\bar{a}\hat{\ }\bar{b}) = \pi/3$. Найти модуль вектора $\bar{c} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$.
6. Найти длины сторон и углы треугольника с вершинами A(-1,-2,4), B(-4,-2,0), C(3,-2,1).
7. Дано: $|\bar{a}| = 1, |\bar{b}| = 2, \varphi = (\bar{a}\hat{\ }\bar{b}) = 2\pi/3$. Найти: $|\bar{a}' \bar{b}|, |(\bar{a} + 2\bar{b})' (-\bar{a} + 3\bar{b})|$.
8. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ =(8,4,1) и $\bar{b}$ =(2,-2,1).
9. При каком значении l векторы $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + l\,\bar{k}, \bar{b} = (0,1,0)$ и $\bar{c} = (3,0,1)$ компланарны?
10. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$ =(1,-2,1), $\bar{b}$ =(3,2,1), $\bar{c}$=(1,0,-1).
11. Составить уравнение множества точек, сумма расстояний каждой из которых от точек F_1(2.0) и F_2(-2,0) равна $2\sqrt{5}$.
12. Дано общее уравнение прямой: 12x- 5y- 65=0. Написать:1)уравнение с угловым коэффициентом; 2)уравнение в «отрезках».
13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(2,3) под углом 60^0 к оси Ox. Построить данную прямую.
14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(2,5) и отсекающей на оси ординат отрезок b=7.
15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых 2x- 3y+5=0 и 3x+y-7=0 перпендикулярно к прямой y=2x.
16. Составить уравнение прямой, проходящей через центр окружности $x^2+y^2+4x+12y+15=0$ параллельно прямой x+y=0.
17. Эллипс проходит через точку M(-4, $\sqrt{21}$) и имеет эксцентриситет ε=3/4. Написать уравнение эллипса. Найти его полуоси и координаты фокусов.

18. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точки A(2,1) и B(-4, $\sqrt{7}$).
19. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если известно, что парабола проходит через точки пересечения прямой x+y=0 и окружности $x^2+y^2+4y=0$ и симметрична относительно оси Oy.
20. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(4,-4,2)$ и параллельной плоскости Oxz.
21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5,4,3)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.
22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2,-3,1)$, параллельно векторам $\bar{a} = (-3,2,1)$ и $\bar{b} = (1,2,3)$.
23. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0,2,0)$, $M_2(2,0,0)$ и образующей угол 60^0 с плоскостью x=0.
24. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(7,6,7)$, $M_2(5,10,5)$ и $M_3(-1,8,9)$.
25. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1,-5,3)$ и образующей с осями координат углы $\alpha=\pi/4$, $\beta=\pi/3$ и $\gamma=2\pi/3$.
26. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(3,-2,4)$ перпендикулярно плоскости 5x+3y-7z+1=0.
27. Даны вершины треугольника A(-3,2,8), B(-7,0,3), C(3,4,5). Составить параметрические уравнения медианы, проведенной из вершины A.
28. Найти угол между прямыми $\frac{x}{-1} = \frac{y+30}{5} = \frac{z-2.5}{4}$ и $\frac{x+1}{6} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+4}{-1}$.
29. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2,3,4)$ и перпендикулярной прямым $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}$.
30. При каком значении m прямая $\frac{x+10}{m} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+2}{-6}$ параллельна плоскости 5x-3y+4z-1=0?

ТЕМА 3. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Определение и способы задания функции. Область определения, область значения, график функции. Предел функции. Односторонние и бесконечные пределы. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции. Непрерывные функции и их свойства. Точки разрыва и их классификация.

В рамках темы 3 предусмотрено проведение одной самостоятельной работы.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

Задание №1. Найти область определения функции $y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2^x(x-6)} + \ln(x+10)$.

Задание №2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 5x}{4x^2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2+2}{4x^2-1}\right)^{5x^2}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 5} \frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$;

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти области определения функций:

а) $y=\dfrac{\log_5(x^2+4x)}{\sqrt{25-x^2}}$; б) $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt[3]{x+2}$; в) $y=\sqrt{4-5x}+3\arccos\dfrac{2x+3}{6x}$.

2. Найти области значений функций:

а) $y=\dfrac{1}{x}+4$; б) $y=\dfrac{3}{(\sin x+\cos x)^2+2}$; в) $y=3^{x^2+4x-12}$.

3. Выяснить четность (нечетность) функций:

а) $y=\dfrac{\lg(1-x^2)}{\sqrt[3]{\cos x}}\cdot e^{-x^2}$; б) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}+x+tgx$; в) $y=\dfrac{x^3\cos x}{2^{x^2}}+\sin^2 x$.

4. Найти наименьший период функций:

а) $y=4\cos(\dfrac{p}{2}+3x)$; б) $y=\sin 3x\cos 3x$; в) $y=\sin\dfrac{x}{2}-ctgx$.

5. С помощью преобразований построить графики функций:

а) $y=(x-5)^2-5(x-5)+6$; б) $y=2\log_2(x+1)$; в) $y=2\sin(-3x-p)+1$.

6. Найти пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-n^2}{3-n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+5n^2-1}{10n^3-3n+2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{3+n}$.

7. Найти пределы функций при $x\to x_0$:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

8. Найти пределы функций при [illegible].

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+2x^3-1}{3x^2-2x^4+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+4^{\frac{1}{x}})$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{4x-2}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{16x^2-x}}$.

9. Вычислить пределы с помощью первого замечательного предела:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)\sin(\dfrac{1}{x-5})$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot tg2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

10. Вычислить пределы с помощью второго замечательного предела:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x^2})^{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+5}{x^2-5})^{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+1}{x^2-3})^{x^3-5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{1+x})^{\frac{1}{2x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln x-\ln 4}{2x-8}$.

11. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{3}{4-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{3}{4-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{4-2x}$.

12. Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{e^{5x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 3x}$.

13. Пользуясь определением непрерывности функции, доказать непрерывность следующих функций в произвольной точке $x_0\in R$:

а) $y=4x^2+3$; б) $y=\cos x$.

14. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функций. Указать характер разрыва:

а) $y = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$; б) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x - 2}$; в) $y = \begin{cases} x - 2, x < 2, \\ x + 2, x \geq 2. \end{cases}$

ТЕМА 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Понятие производной и ее геометрический и механический смысл. Производная сложной функции. Правила дифференцирования. Таблица основных производных. Дифференциал функции. Производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Возрастание и убывание функции, необходимое и достаточные условия. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба: определение, необходимые и достаточные условия. Асимптоты плоских кривых. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

В рамках темы 4 предусмотрено проведение двух самостоятельных работ, выполнение одного индивидуального домашнего задания, проведение контрольной работы и сдача коллоквиума.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

Пользуясь определением, найти производную функции $y = 6x^3 + 4x - 1$.

Типовой вариант самостоятельной работы №2

Найти производные функций:

а) $y = \dfrac{x \ln x}{1 + x}$; **б)** $y = \left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^4$; в) $y = \ln \sqrt[3]{\left(\dfrac{1 - 3x}{1 + 3x}\right)^2}$;

Индивидуальное домашнее задание №6 (примерный вариант)

Задание №1. Применяя правило Лопиталя, вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \arcsin x}{\sin^2 x}$; **б)** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x - 1}\right)$

Задание № 2. Исследовать функции и построить их графики.

а) $y = \dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 1}$; **б)** $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 4x.$

Типовой вариант контрольной работы № 2 (темы 4 и 5)

1. Найти область определения функции $y = \sqrt{x - 5} + \sqrt{2 - x}$.
2. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sin 2x}$.
3. Используя определение, найти производную функции $y = 5x^3$ в точке x.
4. Найти производную y'', если $y = 5x^4 + 2^x$.
5. Найти дифференциал функции $y = 3x\,arctg\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{9 + x^2}$.
6. Показать, что функция $y = x + \sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y'' + 4y = 4x$.

Вопросы для подготовки к коллоквиуму (темы 4 и 5)

1. Понятие функции, способы задания функции.
2. Основные характеристики функции.
3. Сложная и обратная функции.
4. Основные элементарные функции и их графики.
5. Предел функции в точке и на бесконечности.
6. Односторонние пределы.
7. Основные теоремы о пределах. Признаки существования пределов.
8. Замечательные пределы.
9. Бесконечно большие функции и их свойства.
10. Бесконечно малые функции и их свойства.
11. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные функции.
12. Непрерывность функции в точке, интервале и на отрезке.
13. Классификация точек разрыва.
14. Основные теоремы о непрерывных функциях.
15. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
16. Определение производной. Общее правило дифференцирования.
17. Геометрический, физический и химический смысл производной.
18. Понятие дифференцируемости функции. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности.
19. Правила дифференцирования.
20. Производные сложной и обратной функций.
21. Производные основных элементарных функций. Таблица производных.
22. Производные высших порядков.
23. Определение дифференциала функции. Основные теоремы о дифференциалах.
24. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
25. Дифференциалы высших порядков.
26. Основные теоремы дифференциального исчисления.
27. Правило Лопиталя.
28. Признаки монотонности функции.
29. Экстремумы функции. Необходимое условие экстремума.
30. Достаточные условия существования экстремума.
31. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
32. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.
33. Асимптоты графика функции.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь определением, найти производные функций:

   а) $y = 6x^3 + 4x - 1$; б) $y = \sqrt{x}$.

2. Найти производные функций:

а) $y = x^7 - 2x^5 + 5 - \frac{8}{x^3} + \frac{5}{6}x\sqrt[5]{x}$; б) $y = \frac{x \ln x}{1+x}$; в) $y = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4$;

г) $y = \ln\sqrt[3]{\left(\frac{1-3x}{1+3x}\right)^2}$; д) $y = \frac{arcctgx}{\sqrt{1+x^2}}$; е) $y = \arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

3. Дана кривая $y = x^2 - 2x$. Составить уравнения касательных:
   а) в точке пересечения ее с прямой $3x + y - 2 = 0$;
   б) параллельной и перпендикулярной этой прямой;
   в) проходящей через точку М(1,-5).
4. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{4t+3}{t+4}$, где s измеряется в метрах, а t- в секундах. Найти его скорость и ускорение в момент $t = 6$.
5. Найти производные указанных порядков для следующих функций:
   а) $y = \ln\cos x, y''' = ?$ б) $y = xe^x, y^{(5)} = ?$ в) $y = \cos\varphi, y^{IV} = ?$
6. Показать, что функция $y = x^3$ удовлетворяет уравнению
$$y^V + y^{IV} + y''' + y'' + y' + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 6.$$
7. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 - 3x + 1$ в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0.1$.
8. Найти дифференциалы первого порядка функций:
   а) $y = arctge^{2x}$; б) $y = \frac{1}{2}\sqrt{49 - x^2} + \frac{49}{2}\arcsin\frac{x}{7}$.
9. Найти дифференциалы указанных порядков:
   а) $y = \cos(4x+1), d^3y = ?$ б) $y = \sqrt[3]{x+2}, d^4y = ?$
10. Вычислить приближенно: а) $\ln 1.02$; б) $tg\,44^0$.
11. Найти пределы, используя правила Лопиталя:
   а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - e^{-x^2} - 2}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{\ln(e^{x^2}+1)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - ctg^2 x\right)$;
   г) $\lim\limits_{x\to 0}(tgx \cdot \ln x)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi - 2x)^{\cos x}$.
12. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 4)$.
13. Найти экстремумы функций:
   а) $y = x^3 - 9x^2 + 15x$; б) $y = \frac{\ln x}{x}$; в) $y = \frac{e^{2x}}{1+x}$.
14. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 2x\sqrt{x} + x - 4$ на отрезке [0;4].
15. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графиков функций:
   а) $y = 0.5x^3 + 3x^2 - 18x + 20$; б) $y = xe^x$; в) $y = x - \ln x$.

16. Найти асимптоты графиков функций:

а) $y = \frac{3x^5}{2 + x^4}$; б) $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 9}$; в) $y = xe^x$.

17. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = \frac{x^3}{4 - x^2}$; б) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$; в) $y = (x - 1)e^x$; г) $y = x \ln x$.

ТЕМА 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Первообразная функция, неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных интегралов. Методы интегрирования: непосредственное, метод замены переменной, интегрирование по частям. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования, интегралы от неограниченных функций.

В рамках темы 5 предусмотрено проведение двух самостоятельных работ, выполнение одного индивидуального домашнего задания и сдача коллоквиума.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

Задание №1. Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

а) $\int \frac{\left(2\sqrt[3]{x} + 1\right)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$; **б)** $\int \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} dx$; **в)** $\int \frac{x^5 + x^3 - 1}{x^2 + 1} dx$.

Задание №2. Применяя метод подстановки (метод замены переменной), найти интегралы:

а) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx$; **б)** $\int \sqrt[3]{2 + \cos 3x} \cdot \sin 3x \, dx$.

Типовой вариант самостоятельной работы №2

Задание №1. Преобразуя дифференциал, вычислить определенные интегралы:

а) $\int_2^5 \frac{dx}{2x - 3}$; **б)** $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

Задание №2. Используя метод интегрирования по частям, найти определенные интегралы:

а) $\int_1^e x^2 \cdot \ln x \, dx$; **б)** $\int_0^2 (3 - 2x) \cdot e^{-3x} \, dx$.

Индивидуальное домашнее задание №7 (примерный вариант)

Задание №1. Преобразуя дифференциал, вычислить интегралы:

а) $\int \frac{dx}{(4x + 3)^5}$; **б)** $\int \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$.

Задание №2. Используя метод интегрирования по частям найти интегралы:

а) $\int x^3 \cdot e^{2x}\,dx;$ **б)** $\int x^2 \cdot \operatorname{arctg} 3x\,dx$

Задание №3. Найти интегралы от рациональных функций:

а) $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}\,dx;$ **б)** $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx.$

Задание №4. Используя непосредственное интегрирование, вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^2 \frac{3x^4-5x^2+7}{x}\,dx;$ **б)** $\int_0^1 \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\,dx.$

Задание №5.Используя подстановку, найти определенные интегралы:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}};$ **б)** $\int_0^{p/3} \frac{\sin x\,dx}{\cos^4 x}.$

Вопросы для подготовки к коллоквиуму

7. Первообразная функция. Теорема об общем виде первообразной.
8. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.
9. Таблица основных интегралов.
10. Метод непосредственного интегрирования.
11. Внесение под знак дифференциала.
12. Метод интегрирования подстановкой.
13. Метод интегрирования по частям.
14. Правильные и неправильные рациональные дроби.
15. Интегрирование рациональных дробей.
16. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций.
17. Определенный интеграл как предел интегральной суммы.
18. Необходимое и достаточное условие существования определенного интеграла. Классы интегрируемых функций.
19. Геометрический, физический и химический смысл определенного интеграла.
20. Свойства определенного интеграла.
21. Оценки определенного интеграла. Теорема о среднем.
22. Определенный интеграл как функция верхнего предела.
23. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
24. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
25. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
26. Несобственные интегралы от неограниченных функций.
27. Геометрические приложения определенного интеграла.

Задачи для самостоятельного решения

1. Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

а) $\int \left(2\sin x - 3^{x+2} + 5\right)dx;$ **б)** $\int \frac{\left(2\sqrt[3]{x}+1\right)^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx;$ **в)** $\int \frac{x^5+x^3-1}{x^2+1}\,dx;$

г) $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx;$ **д)** $\int \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,dx.$

2. Преобразуя дифференциал, вычислить интегралы:

а) $\int \frac{dx}{(4x+3)^5}$; **б)** $\int \frac{x^2}{x^6+1}dx$; **в)** $\int x\sin\left(1-x^2\right)dx$; **г)** $\int \sin^3 6x\cos 6x\,dx$.

3. Применяя метод подстановки (метод замены переменной), найти интегралы:

а) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$; **б)** $\int \sqrt[3]{2+\cos 3x}\sin 3x\,dx$; **в)** $\int \frac{e^{-x}}{1-e^{-2x}}dx$.

4. Используя метод интегрирования по частям найти интегралы:

а) $\int x^3 e^{2x}dx$; **б)** $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x\,dx$; **в)** $\int e^{3x}\sin 2x\,dx$.

5. Найти интегралы от рациональных функций:

а) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$; **б)** $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$; **в)** $\int \frac{x+2}{x^2+5x-6}dx$; **г)** $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$.

6. Найти интегралы от тригонометрических функций:

а) $\int \sin^3 x\,dx$; **б)** $\int \cos^4 x\sin^3 x\,dx$; **в)** $\int \sin x\sin 3x\,dx$; **г)** $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$.

7. Найти интегралы с помощью тригонометрических подстановок:

а) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$; **б)** $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$.

8. Найти интегралы от иррациональных функций:

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$; **б)** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$; **в)** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$; **г)** $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-10x+29}}$.

9. Используя непосредственное интегрирование, вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^2 \frac{3x^4-5x^2+7}{x}dx$; **б)** $\int_0^1 \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}dx$.

10. Преобразуя дифференциал, вычислить определенные интегралы:

а) $\int_2^5 \frac{dx}{2x-3}$; **б)** $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

11. Используя подстановку, найти определенные интегралы:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$; **б)** $\int_0^{p/3} \frac{\sin x\,dx}{\cos^4 x}$.

12. Используя метод интегрирования по частям, найти определенные интегралы:

а) $\int_1^e x^2\ln x\,dx$; **б)** $\int_0^2 (3-2x)e^{-3x}dx$.

13. Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

а) $y=\ln x$, x=e, y=0;

б) $x^2+y^2=16$;

в) $y=x^3$, $y=-2x^2+3x$ (фигура расположена в первой четверти);

г) xy=1, $y=x^2$, x=3, y=0.

14. Найти длину дуги кривой $y=2\sqrt{x}$ от x=0 до x=1.

15. Найти площадь поверхности вращения, полученной при вращении вокруг оси Ox кривой $y=x^3$, где $x\in\left[0;\sqrt[4]{1/3}\right]$.

16. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг осей Ox и Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, y=0, где $x \in [0; \pi]$.

17. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 9}$; **б)** $\int_{-\infty}^{0} \sin 3x\, dx$; **в)** $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$; **г)** $\int_0^1 \ln x\, dx$; **д)** $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

ТЕМА 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные первого и более высоких порядков. Полный дифференциал. Производная сложной функции. Экстремум функции двух переменных. Двойной интеграл: определение, свойства, вычисление, замена переменных, переход к полярной системе координат. Тройной интеграл: определения, свойства, вычисление.

В рамках темы 6 предусмотрено проведение трех самостоятельных работ, выполнение одного индивидуального домашнего задания, проведение контрольной работы и сдача коллоквиума.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

Задание №1. Найти предел функции $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.

Задание №2. Найти полный дифференциал функции $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Типовой вариант самостоятельной работы №2

Задание №1. Найти d^2z, если $z = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

Задание №2. Найти экстремумы функции $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$.

Типовой вариант самостоятельной работы №3

Задание №1. Вычислить $\int_1^2 dx \int_x^{x^2} (2x - y)\, dy$.

Задание №2. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint_D (x^2 + y^2)\, dx dy$, где D – круг $x^2 + y^2 \le 4$.

Задание №3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $4y = x^2$, x =2, x= –2.

Типовой вариант контрольной работы №3

1. Найти и построить линии уровня функции $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

2. Используя определение непрерывности, показать, что функция $z = xy^2$ непрерывна в любой точке плоскости.

3. Найти y ¢от неявной функции, заданной уравнением $x^3 + y^3 = 3xy$.

4. Найти экстремумы функции $z = 2x^2 + 5y^2 + 6xy - x + 4y + 5$.

5. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint_D \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) dxdy$, где D– круг $x^2 + y^2 \le p^2$.

Индивидуальное домашнее задание №8 (примерный вариант)

Задание №1. Найти область определения, сделать чертеж $z = \arcsin(2x - y)$.

Задание №2. Найти двойной предел $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$.

Задание №3.Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой

$$f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ M_0(0, -1, 1).$$

Задание №4.Найти вторые частные производные функции $z = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Задание №5.Проверить, удовлетворяет ли уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{4y^2}{x^2 + y^2}\frac{\partial u}{\partial x}$ функция $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

Задание №6.Исследовать на локальный экстремум функцию $z = xy(x + y - 2)$.

Вопросы для подготовки к коллоквиуму

11. Функции нескольких переменных.
12. Функции двух, трех переменных и области их определения.
13. Линии уровня.
14. Понятие области. Открытая и замкнутая область.
15. Предел функции нескольких переменных.
16. Непрерывность функции нескольких переменных.
17. Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области.
18. Частные приращения и частные производные функции нескольких переменных.
19. Полное приращение функции.
20. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
21. Полный дифференциал. Инвариантность полного дифференциала.
22. Производная сложной функции нескольких переменных.
23. Полная производная.
24. Задача, приводящая к понятию двойного интеграла.
25. Понятие двойного интеграла как предела интегральных сумм.
26. Свойства двойного интеграла.
27. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
28. Замена переменных в двойном интеграле.
29. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
30. Приложения двойного интеграла к геометрии.
31. Приложения двойного интеграла к физике.
32. Задача, приводящая к понятию тройного интеграла.
33. Понятие тройного интеграла и его свойства.
34. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
35. Замена переменных в тройном интеграле.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти области определения данных функций:

а) $z=\frac{1}{x+y}$; б) $z=\frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$; в) $z=\sqrt{xy}$; г) $z=\arcsin x+\arccos x$.

2. Найти уравнения и построить линии уровня следующих функций:

а) $z=xy$; б) $z=\frac{x}{y}$; в) $z=e^{xy}$; г) $z=(1+x+y)^2$.

3. Вычислить пределы, полагая, что независимые переменные произвольно стремятся к своим предельным значениям:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\frac{x^2+4y}{2xy-1}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(2xy)}{xy}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\left(1+xy^2\right)^{y/\left(x^2y+xy^2\right)}$.

4. Показать, что функция $z=\frac{x-y}{x+y}$ не имеет в точке O(0,0) предела.

5. Используя определение непрерывности, показать, что функция $z=x^2y$ непрерывна в любой точке плоскости.

6. Найти точки разрыва следующих функций:

а) $z=\frac{\sin x\sin y}{xy}$; б) $z=\sin\frac{1}{x+y}$; в) $z=\cos\frac{1}{x^2+y^2-4}$; г) $z=\frac{x}{|y|}$.

7. Найти частные производные следующих функций:

а) $z=x^3+3x^2y-y^3$; б) $z=\frac{5x+3y}{9x-2y}$; в) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; г) $u=e^{\frac{z}{xy}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y+z}\right)$

8. Показать, что функция $z=\sqrt{x}\cos\frac{x}{y}$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{2}$.

9. Найти полные дифференциалы следующих функций:

а) $z=x\,e^{-xy}$; б) $z=\sqrt{\operatorname{tg}^3x+3e^y}$.

10. Найти z'_t, если $z=\frac{y}{x}$; $x=e^t$; $y=1-e^{2t}$.

11. Используя формулу полной производной, найти $\frac{dz}{dx}$, если $z=x^2y$; $y=\cos x$.

12. Найти z'_u и z'_v, если $z=\ln(x^2+y^2)$; $x=uv$; $y=\frac{u}{v}$.

13. Найти y' от неявной функции, заданной уравнением $\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}=5$.

14. Найти z'_x и z'_y от неявной функции, заданной уравнением $z^3-3xyz=16$.

15. Найти частные производные второго порядка от функций:

а) $z=x^3-4x^2y+5y^2$; б) $z=e^{-y/x}$.

16. Для функции $z=xy\ln(x+y)$ проверить, что $z'''_{yx^2}=z'''_{xyx}$.

17. Найти дифференциалы второго порядка от следующих функций:

а) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; б) $z = \sin x \sin y$.

18. Найти d^3z, если $z = x^2 y$.

Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$;

б) $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;

в) $z = 3x + 6y - xy - x^2 + y^2$.

20. Вычислить повторные интегралы:

а) $\int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x + \sin^2 y)dy$; б) $\int_1^3 dx \int_{x^3}^{x} (x - y)dy$.

21. Вычислить двойные интегралы по указанным прямоугольникам D:

а) $\iint_D xy^2 dxdy$, где D: $2 \le x \le 4$, $0 \le y \le 1$;

б) $\iint_D \frac{3y^2}{1+x^2} dxdy$, где D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

22. Вычислить двойные интегралы по областям D, ограниченным указанными линиями:

а) $\iint_D (x + y)dxdy$, где D: $0 \le x \le \sin y$, $0 \le y \le \pi$;

б) $\iint_D \frac{x}{y^2 + x^2} dxdy$, где D – область, ограниченная параболой $y = \frac{1}{2}x^2$ и прямой y = x;

в) $\iint_D (\cos 2x + \sin y)dxdy$, где D – область, ограниченная линиями x =0, y = 0, 4x + 4y – π = 0.

23. Переходя к полярным координатам, вычислить интегралы:

а) $\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$, где D – круг $x^2 + y^2 \le 1$;

б) $\iint_D (x^2 + y^2)^2 dxdy$, где D – круг $x^2 + y^2 \le 4$.

24. С помощью двойных интегралов найти площади плоских фигур, ограниченных заданными линиями:

а) $y = x^2$, $4y = x^2$, x = 2, x = -2; б) окружностью $x^2 + y^2 = y$

25. С помощью двойного интеграла найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

а) x + y + z =1, x = 0, y = 0, z = 0; б) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, z = 0

26. Вычислить тройные интегралы по областям V, ограниченным указанными линиями:

а) $\iiint_V (x + y)dxdydz$, где V: x =1, y = 1, z =1, x = 0, y = 0, z = 0;

б) $\iiint_V xydxdydz$, где V: $x^2 + y^2 = 1$, z =1, z = 0 ($x \ge 0$, $y \ge 0$).

27. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл $\iiint_V z\,dxdydz$, где область V ограничена поверхностями: $x^2 + y^2 = 1$, z = a (a > 0), z = 0.

ТЕМА 7. РЯДЫ

Числовые ряды: основные понятия, необходимые условия сходимости ряда. Остаток ряда. Ряды с положительными членами и признаки их сходимости: признаки сравнения, Даламбера, Коши. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница. Ряды с членами любых знаков, абсолютная и условная сходимость.

В рамках темы 7 предусмотрено проведение одной самостоятельных работ и выполнение одного индивидуального домашнего задания.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

Задание №1. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

Задание №2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти формулу общего члена ряда:

а) $1+\frac{4}{2}+\frac{9}{6}+\frac{16}{24}+\frac{25}{120}+\ldots;$ б) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$

2. Выяснить вопрос о сходимости и найти суммы рядов:

а) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots;$ б) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots;$

в) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\ldots$

3. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости для рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$

4. Показать, что ряд $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{n+10}\ldots$ расходится.

5. Используя признаки сравнения, исследовать сходимость следующих рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n(n+1)}}.$

6. Используя признаки Даламбера или Коши, исследовать сходимость следующих рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(3n)^n};$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}.$

7. Пользуясь интегральным признаком, исследовать сходимость следующих рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln^2 n};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}.$

8. Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n};$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n}{n!}.$

ТЕМА 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение дифференциального уравнения, его порядка, общего и частного решений дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, сводящиеся к однородным, линейные, в полных дифференциалах. Дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков, случаи понижения порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка: однородные и неоднородные, структура их общих решений. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение, построение общего решения.

В рамках темы 8 предусмотрено проведение двух самостоятельных работ, выполнение одного индивидуального домашнего задания и сдача коллоквиума.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

Задание №1. Решить уравнение $(1+y)dx-(1-x)dy=0$.

Задание №2. Решить уравнение $(x+2y)dx-xdy=0$.

Типовой вариант самостоятельной работы №2

Задание №1. Решить уравнение $y''+2y=e^{-x}$.

Задание №2. Решить уравнение $y''+3y'=18x+9$.

Индивидуальное домашнее задание №10 (примерный вариант)

Задание №1. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

а) $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$; **б)** $e^y\left(1+x^2\right)dy-2x\left(1+e^y\right)dx=0$.

Задание №2. Решить однородные дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $x\left(x+2y\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy=0$; **б)** $2xyy'=x^2+y^2$.

Задание №3. Решить линейные дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $xy'-2y=x^3\cos x$; **б)** $y'-2xy=2xe^{x^2}$.

Задание №4. Решить дифференциальные уравнения высших порядков. Найти частное решение, если заданы начальные условия:

а) $y''=\frac{1}{1+x^2}+x-\sin x$; **б)** $y''-y'\operatorname{tg}x=2x\sin x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Задание №5. Решить однородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка:

а) $y''-y'-2y=0$; **б)** $y''+24y'+144y=0$; **в)** $y''-4y'+20y=0$.

Задание №6. Решить неоднородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка:

а) $y''-9y=2-x$; **б)** $y''+3y'+2y=3e^{2x}$; **в)** $y''+100y=\sin 2x$.

Вопросы для подготовки к коллоквиуму

9. Общие сведения о дифференциальных уравнениях.
10. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия.
11. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения.

12. Уравнения с разделяющимися переменными.
13. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
14. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
15. Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия.
16. Уравнения, допускающие понижение порядка.
17. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.
18. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений.
19. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
20. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что заданная функция является решением данного дифференциального уравнения:

а) $y=(x+C)\cdot e^{x},\ y'-y=e^{x}$; **б)** $y=-\frac{2}{x^{2}},\ xy^{2}dx-dy=0$.

2. Составить дифференциальное уравнение семейства линий:

а) $Cy=x^{2}+y^{2}$; **б)** $y=C\cdot e^{2x}$.

3. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

а) $x\sqrt{1+y^{2}}+yy'\sqrt{1+x^{2}}=0$; **б)** $e^{y}(1+x^{2})dy-2x(1+e^{y})dx=0$.

4. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'\sin x-y\ln y=0$, удовлетворяющее заданному начальному условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

5. Решить однородные дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $(xy+y^{2})dx-x^{2}dy=0$; **б)** $2xyy'=x^{2}+y^{2}$.

6. Решить линейные дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $xy'-2y=x^{3}\cos x$; **б)** $y'-2xy=2xe^{x^{2}}$.

7. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения:

$x^{2}+xy'=y,\ y(1)=0.$

8. Решить уравнения Бернулли**:**

а) $xy'+y=\frac{y^{2}}{2}\ln x$; **б)** $y'-\frac{1}{x}y=-y^{2},\ y(1)=-1.$

9. Решить дифференциальные уравнения высших порядков. Найти частное решение, если заданы начальные условия:

а) $y''=\frac{1}{1+x^{2}}+x-\sin x$; **б)** $y''-y'\operatorname{tg}x=2x\sin x,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$;

в) $y''\operatorname{tg}y=2(y')^{2}$.

10. Решить однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка:

а) $y''-y'-2y=0$; **б)** $y''+24y'+144y=0$; **в)** $y''-4y'+20y=0$.

11. Решить неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка:

а) $y''-9y=2-x$; **б)** $y''+3y'+2y=3e^{2x}$; **в)** $y''+100y=\sin 2x$.

ТЕМА 9. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Основные понятия теории вероятностей. Классификация событий. Элементы комбинаторики. Определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формулы Бейеса. Повторение испытаний: формула Бернулли, локальная и интегральная теоремы Лапласа.

Виды случайных величин и законы их распределения. Биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое распределение. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Непрерывная случайная величина. Функция и плотность распределения. Числовые характеристики. Равномерное распределение. Нормальное распределение. Показательное распределение. Задачи математической статистики, ее связь с теорией вероятностей. Генеральная и выборочная совокупность. Виды выборок. Вариационный ряд. Статистическая функция распределения. Полигон и гистограмма. Генеральная и выборочная средняя, генеральная и выборочная дисперсии. Оценка параметров генеральной совокупности по случайной выборке. Точечная и интервальная оценки, точность и надежность оценки, доверительный интервал. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Линейная регрессия. Коэффициент корреляции. Среднеквадратическая регрессия. Выборочные уравнения регрессии. Корреляционная таблица. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по несгруппированным и сгруппированным данным. Выборочный коэффициент корреляции. Проверка статистических гипотез. Статистический критерий, уровень его значимости. Статистическая гипотеза, общая схема ее проверки. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности, критерий Пирсона.

В рамках темы 9 предусмотрено проведение трех самостоятельных работ, выполнение двух индивидуальных домашних заданий, проведение контрольной работы и сдача коллоквиума.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

1.Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной оценки?

2. Группу из 20 студентов нужно разбить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую- 5 и в третью- 12. Сколькими способами это можно сделать?

Типовой вариант самостоятельной работы №2

1. В двух корзинах находятся яблоки. В первой 20 шт., из них 5 поврежденных; во второй – 30 шт., из них 6 поврежденных. Из наудачу выбранной корзины взяли одно яблоко. Яблоко оказалось не поврежденным. Какова вероятность того, что яблоко взято из первой корзины?

2. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная из ящика деталь (после перевозки) оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

Типовой вариант самостоятельной работы №3

Независимые случайные величины X и У заданы следующими законами распределения:

X	2	4	5
p	0,1	0,3	0,6

и

У	7	9
p	0,8	0,2

.

Найти D (X+У) и M (XУ).

Индивидуальное домашнее задание №11 (примерный вариант)

Задание №1. Сколькими способами можно переставить буквы в словах: а) «математика», 2) «абракадабра», чтобы получились всевозможные различные наборы букв?

Задание №2. Группа туристов из 12 юношей и 7 девушек выбирает по жребию 5 человек для приготовления ужина. Сколько существует способов выбора, при которых в эту «пятерку» попадут: а) одни девушки; б) 3 юноши и 2 девушки; в) 1 юноша и 4 девушки; г) 5 юношей?

Задание №3. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная из ящика деталь (после перевозки) оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

Задание №4. Из 40 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 30. Найти вероятность того, что среди трех наугад выбранных вопросов студент знает: а) 3 вопроса; б) 2 вопроса; в) 1 вопрос.

Задание №5. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

Задание №6. Один студент выучил 20 из 25 вопросов программы, а второй – только 15. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что правильно ответят: а) оба студента; б) только первый студент; в) только один из них; г) хотя бы один из студентов.

Задание №7. Вероятность своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равна 0.5, 0.6 и 0.7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним предприятием. *(Ответ: 0,94)*

Задание №8. В торговую фирму поставляются телевизоры тремя фирмами в соотношении 5:2:3. Телевизоры, поступающие от этих фирм, не требуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 96%, 92% и 94% случаев.
а) Найти вероятность того, что наудачу купленный телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.
б) Купленный телевизор не потребовал ремонта в течение гарантийного срока. Какая фирма вероятнее всего поставила данный телевизор?

Задание №9. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее восьми машин, а всего имеется их десять. Вероятность невыхода каждой автомашины на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы автобазы на ближайший день.

Индивидуальное домашнее задание №12 (примерный вариант)

Задание №1.Наблюдается число выигрышей в мгновенной лотерее. В результате наблюдения получены следующие значения выигрышей (тыс. руб.): 0, 1, 0, 0, 5, 0, 10, 0, 1, 0, 0, 1, 5, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 5, 0, 0, 1, 1, 1, 5, 10, 0, 1, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0.

- Составить статистическое распределение частот случайной величины X – выигрыша в мгновенной лотерее.
- Составить статистическое распределение относительных частот случайной величины X.
- Построить полигон частот.
- Построить полигон относительных частот.
- Найти эмпирическую функцию распределения.

Задание №2.Найти выборочную и исправленную дисперсии по данному распределению выборки

x_i	1	5	6	8
n_i	5	15	20	10

.

Задание №3.Выручка в магазине от продажи обуви составила соответственно по месяцам следующие значения (млн. руб.):

месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
выручка	0,2	0,5	0,4	0,2	0,4	0,5	0,2	0,2	0,4	0,5	0,4	0,2

.

Найти выборочную среднюю, выборочную и исправленную дисперсии.

Задание №4.Найти доверительный интервал с надежностью 0,95 для оценки математического ожидания нормально распределенной случайной величины X, если известны ее среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$, выборочная средняя $\overline{x_в} = 16$ и объем выборки
$n = 16$.

Задание №5. В нескольких мелких магазинах проведена проверка качества 100 изделий, после чего осуществлена обработка полученных данных. В результате получено несмещенное значение выборочного

среднего квадратического отклонения s = 4. Считая распределение качественных изделий нормальным, найти с надежностью γ = 0,95 доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения.

Типовой вариант контрольной работы №4

Задание №1. В коробке лежат 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Найти вероятность того, что из пяти взятых наугад шаров будет 4 белых.

Задание №2.В городе 3 коммерческих банка, оценка надежности которых – 0.95, 0.9 и 0.85 соответственно. В связи с определением хозяйственных перспектив развития города администрацию интересуют ответы на следующие вопросы: а) какова вероятность того, что в течение года обанкротятся все три банка; б) что обанкротится хотя бы один банк.

Задание №3.Монету бросают пять раз. Найти вероятность выпадения одной из сторон менее двух раз.

Задание №4.Среди 10 лотерейных билетов имеется 4 билета с выигрышем. Наудачу покупают 2 билета. Составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа выигрышных билетов среди купленных.

Задание №5.Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

X	-4	0	4
p	0,1	0,5	0,4

и

Y	2	4
p	0,5	0,5

.

Найти M (Z) и D (Z), если Z = (X+Y)/2.

Задание №6. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

Найти плотность вероятности f(x) и числовые характеристики случайной величины X.

Вопросы для подготовки к коллоквиуму

1. Основные понятия комбинаторики. Виды соединений.
2. Основные понятия теории вероятностей. События и их классификация.
3. Классическое и статистическое определения вероятности. Свойства вероятности.
4. Алгебра событий. Теоремы сложения вероятностей.
5. Алгебра событий. Теоремы умножения вероятностей.
6. Полная вероятность. Формулы Байеса.
7. Повторение испытаний. Формула Бернулли.
8. Понятие случайной величины. Дискретные случайные величины и их числовые характеристики.
9. Законы распределения дискретной случайной величины.
10. Интегральная и дифференциальная функции распределения непрерывной случайной величины.
11. Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики.
12. Равномерное и показательное распределение непрерывной случайной величины.
13. Нормальное распределение непрерывной случайной величины. Центральная предельная теорема.
14. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева.
15. Математическая статистика и ее основные задачи. Выборочная и генеральная совокупности. Типы выборок.
16. Статистическое распределение выборки и его геометрическое изображение.
17. Статистические оценки параметров распределения.
18. Генеральная и выборочная средние. Генеральная и выборочная дисперсии.
19. Интервальные оценки. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.
20. Статистические гипотезы. Статистический критерий, уровень его значимости. Статистическая гипотеза, общая схема ее проверки.
21. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности, критерий Пирсона.
22. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
23. Линейная регрессия. Коэффициент корреляции. Среднеквадратическая регрессия. Выборочные уравнения регрессии. Корреляционная таблица. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии. Выборочный коэффициент корреляции.

Задачи для самостоятельного решения

1.Менеджер рассматривает кандидатуры 8 человек, подавших заявления о приеме на работу. Сколько существует способов приглашения кандидатов на собеседование в случайном порядке?

2.Сколькими способами можно переставить буквы в словах: а) «математика», 2) «абракадабра», чтобы получились всевозможные различные наборы букв?

3.Участниками акционерного общества закрытого типа являются 15 человек. Из их среды нужно выбрать председателя правления, двух его заместителей и председателя ревизионной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

4.Для доступа в компьютерную сеть оператору необходимо набрать пароль из 4 цифр. Оператор забыл или не знает необходимого кода. Сколько всевозможных комбинаций он может составить для набора пароля: а)если цифры в пароле не повторяются; б)если повторяются?

5.По сведениям геологоразведки 1 из 15 участков земли по всей вероятности содержит нефть. Однако компания имеет средства для бурения только 8 скважин. Сколько способов отбора 8 различных скважин у компании?

6.Сколькими способами можно выбрать 6 конфет из 11 различных сортов конфет?

7.Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько можно составить различных букетов?

8.При перевозке ящика, в котором содержалось 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная из ящика деталь(после перевозки) оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

9.Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

10.В магазин поступило 30 холодильников, 5 из них имеют заводской дефект. Случайным образом выбираются 3 холодильника. Какова вероятность того, что два из отобранных холодильников будут без дефекта?

11.Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число кратно 5?

12.Отдел технического контроля обнаружил пять бракованных книг в партии из случайно отобранных 100 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг.

13.На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

14.Контролер проверяет изделия на соответствие стандарту. Известно, что вероятность соответствия изделия стандарту равна 0.9.

а) Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий оба будут стандартными, если события появления стандартных изделий независимы?

б) Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное?

15.В районе 100 поселков. В 5 из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобраны два поселка. Какова вероятность того, что в них окажутся пункты проката?

16.Вероятность своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равна 0.5, 0.6 и 0.7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним предприятием.

17.На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25, второй 35, а третий 40% всех замков. Брак составляет соответственно 5, 4 и 2%.

а) Найти вероятность того, что случайно выбранный замок является дефектным.

б) Случайно выбранный замок является дефектным. Какова вероятность того, что он был изготовлен в первом, втором, третьем цехе?

18.Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил 40 изделий, второй – 35, третий – 25. Вероятность брака у первого рабочего 0.03, у второго – 0.02, у третьего – 0.01. Взятое наугад изделие оказалось бракованным. Определить вероятность того, что это изделие сделал второй рабочий.

19.В среднем из каждых 100 клиентов отделения банка 60 обслуживаются первым операционистом и 40 – вторым операционистом. Вероятность того, что клиент будет обслужен без помощи заведующего отделением, только самим операционистом, составляет 0.9 и 0.75 соответственно для первого и второго служащих банка. Найти вероятность полного обслуживания клиента первым операционистом.

20.Монету подбрасывают 8 раз. Какова вероятность того, что 6 раз она упадет гербом вверх?

21.Вероятность появления события А равна 0.4. Найти вероятность того, что при 4 испытаниях событие А появится: а) не более 3 раз; б) не менее 3 раз; в) менее 3 раз; г) более 3 раз.

22.Среди 10 лотерейных билетов имеется 4 билета с выигрышем. Наудачу покупают 2 билета. Составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа выигрышных билетов среди купленных.

23.Вероятность того, что при составлении бухгалтерского баланса допущена ошибка, равна 0.3. Аудитору на заключение представлено 3 баланса предприятия. Составить закон распределения и найти числовые характеристики числа положительных заключений на проверяемые балансы.

24.На базу отправлено 10000 изделий. Вероятность того, что изделие в пути получит повреждение, равна 0.0003. Найти вероятность того, что на базу прибудут 4 поврежденных изделия. Составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа поврежденных изделий.

25.Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ -a\cos x, & 0\le x\le\pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$$

Требуется: а) найти плотность вероятности f(x); б) коэффициент a; в) числовые характеристики X; г) вероятность попадания случайной величины X в интервал ($\pi/4$; $\pi/3$).

26.Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le\pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей и построить ее график.

27.Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [0;4]. Найти функцию распределения, плотность вероятности и числовые характеристики случайной величины X.

28.Найти числовые характеристики и вероятность попадания случайной величины T, имеющей показательное распределение

$$f(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ 0.2e^{-0.2t}, & t>0\end{cases}$$

в интервал (5;10).

29.Один из методов, позволяющих добиться успешных экономических прогнозов, состоит в применении согласованных подходов к решению конкретной проблемы. Обычно прогнозом занимается большое число аналитиков. Средний результат таких индивидуальных прогнозов представляет собой общий согласованный

прогноз. Пусть этот прогноз относительно величины банковской процентной ставки в текущем году подчиняется нормальному закону со средним значением a=9% и стандартным отклонением s=2.6%. Из группы аналитиков случайным образом отбирается один человек. Найдите вероятность того, что согласно прогнозу этого аналитика уровень процентной ставки: а) превысит 11%; б) окажется менее 14%; в) будет в пределах от 12 до 15%.

30.Вес товаров, помещаемых в контейнер определенного размера, - нормально распределенная случайная величина. Известно, что 65% контейнеров имеют чистый вес больше, чем 4.9 т. и 25% - имеют вес, меньший, чем 4.2 т. Найдите ожидаемый средний вес и среднее квадратическое отклонение чистого веса контейнера.

31.Дано: P(çX – M(X)ç<e) ³ 0.9; D(X)= 0.004. Используя неравенство Чебышева, найти e.

32. Наблюдается число выигрышей в мгновенной лотерее. В результате наблюдения получены следующие значения выигрышей (тыс. руб.): 0, 1, 0, 0, 5, 0, 10, 0, 1, 0, 0, 1, 5, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 5, 0, 0, 1, 1, 1, 5, 10, 0, 1, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0.

1) Составить статистическое распределение частот случайной величины X – выигрыша в мгновенной лотерее.
2) Составить статистическое распределение относительных частот случайной величины X.
3) Построить полигон частот.
4) Построить полигон относительных частот.
5) Найти эмпирическую функцию распределения.

33. В таблице приведена выборка результатов измерений роста 105 студентов (юношей). Измерения проводились с точностью до 1 см.

1) Составить интервальный вариационный ряд с числом интервалов, равным 10.
2) Построить гистограмму частот.
3) Построить гистограмму относительных частот.

155	170	185	180	188	152	173	178	178	168	185
173	170	183	175	173	170	183	175	180	175	193
178	183	180	197	178	181	187	168	174	179	184
183	178	180	178	163	166	178	175	182	190	167
170	178	183	170	178	181	173	168	185	175	170
155	169	186	179	189	155	174	179	176	169	186
174	171	184	175	193	178	184	180	196	175	181
188	168	179	178	183	184	178	181	177	163	166
178	175	183	190	167	170	178	183	170	178	182
173	168	186	176	171	188					

34. Найти выборочную и исправленную дисперсии по данному распределению выборки

x_i	1	5	6	8
n_i	5	15	20	10

.

35. Ниже приведены результаты измерения роста (в см) случайно отобранных 100 студентов:

рост	154- 158	158- 162	162- 166	166- 170	170- 174	174- 178	178- 182
числостудентов	10	14	26	28	12	8	2

.

Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию роста обследованных студентов.
Указание: найти середины интервалов и принять их в качестве вариант.

36. Выручка в магазине от продажи обуви составила соответственно по месяцам следующие значения (млн. руб.):

месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
выручка	0,2	0,5	0,4	0,2	0,4	0,5	0,2	0,2	0,4	0,5	0,4	0,2

.

Найти выборочную среднюю, выборочную и исправленную дисперсии.

37. Найти несмещенную и смещенную оценки дисперсии генеральной совокупности по данному распределению выборки:

x_i	0,002	0,005	0,006
n_i	9	6	5

38. Найти доверительный интервал с надежностью 0,95 для оценки математического ожидания нормально распределенной случайной величины X, если известны ее среднее квадратическое отклонение σ = 4, выборочная средняя $\overline{x_B} = 16$ и объем выборки n = 16.

39. Станок – автомат штампует валики. По выборке объема n = 100 вычислена выборочная средняя диаметров изготовленных валиков. Найти с надежностью 0,95 точность δ, с которой выборочная средняя оценивает математическое ожидание диаметров изготовляемых валиков, зная, что их среднее квадратическое отклонение σ = 2 мм. Предполагается, что диаметры валиков распределены нормально.

40. В нескольких мелких магазинах проведена проверка качества 100 изделий, после чего осуществлена обработка полученных данных. В результате получено несмещенное значение выборочного среднего квадратического отклонения s = 4. Считая распределение качественных изделий нормальным, найти с надежностью γ = 0,95 доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ

Контрольные работы, коллоквиумы, самостоятельные работы, индивидуальные задания оцениваются по пятибалльной системе. На практических занятиях контроль осуществляется при ответе у доски и при проверке выполнения домашних заданий.

Содержание и объем материала, подлежащего проверке на экзамене, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты, прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

Экзаменационный билет состоит из теоретических вопросов и задачи.

Оценка "отлично" выставляется, когда студент показывает глубокое и всестороннее знание предмета, обязательной и дополнительной литературы; аргументировано и логически стройно излагает материал, пользуясь математической символикой; может применять знания для анализа конкретных ситуаций, свободно ориентируется в межпредметных связях.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях предмета, обязательной литературы, знакомстве с дополнительной литературой, аргументированном изложении материала, умении применять знания для анализа конкретных ситуаций, профессиональных проблем. Студент незначительно нарушает последовательность изложения материала, дает недостаточно полное, хотя и верное определение понятий.

Оценка «удовлетворительно» ставится, когда студент в основном знает предмет, обязательную литературу, может практически применять свои знания, но программный материал излагает фрагментарно и непоследовательно, допускает отдельные ошибки и погрешности при доказательстве теорем и решении задач, применении математической символики и понятий, слабо ориентируется в межпредметных связях.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, когда студент не усвоил основного содержания предмета и слабо знает рекомендованную литературу, обнаруживает незнание большей части учебного материала, допускает грубые ошибки при формулировании и доказательстве теорем, в определении понятий, неправильно использует математическую символику.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Перечень основной литературы:

1.Баврин, И. И. Математическая обработка информации / И.И. Баврин. - Москва : Прометей, 2016.

2.Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - Москва : Юрайт, 2016. - 480 с.

3.Шипачев, В. С. Высшая математика. Полный курс : учебник для академического бакалавриата : для студентов высших учебных заведений, обучающихся по всем направлениям и специальностям / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова. - 4-е изд., испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2015. - 608 с.

Перечень дополнительной литературы:

1.Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для прикладного бакалавриата : для студентов вузов / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - Москва : Юрайт, 2014. - 405 с.
2. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд., испр. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2015. - 816 с

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

1 Методические рекомендации для проведения практических занятий по дисциплине "Математика": Направление 19.03.03 Продукты питания животного происхождения.

2 Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов по дисциплине "Математика": Направление 19.03.03 Продукты питания животного происхождения. Очная форма обучения.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)