

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ по выполнению практических работ по дисциплине
Теория систем и системный анализ

Направление подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика»
Профиль «Прикладная информатика в экономике»

Квалификация выпускника
бакалавр

Ставрополь, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	3
2. Требования к уровню освоения содержания дисциплины	4
3. Методические указания для проведения практических занятий	5
3.1 Практическое занятие № 1. Описание сигналов и непрерывных линейных систем с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений.	5
3.2 Практическое занятие № 2. Составление дифференциального уравнения по структурной схеме системы.....	10
3.3 Практическое занятие №3. Исследование динамических и частотных характеристик систем.	13
3.4 Практическое занятие №4. Анализ и синтез систем методом корневого годографа.	28
3.5 Практическое занятие №5. Анализ устойчивости одномерных систем. Переходные процессы.	44
3.6 Практическое занятие №6. Устойчивость многомерных систем.	49
3.7 Практическое занятие №7. Анализ управляемости и наблюдаемости.	52
3.8 Практическое занятие №8. Имитационная модель системы формирования циклов.....	60
4. Учебно-методическое обеспечение дисциплины	67

1. Введение

В научной, технической, производственной и других сферах деятельности выдвинулись новые проблемы, возникли явления, с которыми ранее не приходилось сталкиваться. Коренные изменения в области техники, сопровождаемые почти экспоненциальным ростом сложности и стоимости изделий, а также их многообразие и растущая потребность в исследованиях потребовали обращения особого внимания на технические и экономические системы, так как прошлый опыт в значительной мере потерял свое значение как руководство при управлении ими. Широкий охват разнообразных видов информационных систем и процессов в профессиональной деятельности информатика предусматривает знания общей методологии научных исследований, особенностей методологии системных исследований и главное - принципов и методов системного анализа. Систематизация аналитических проработок, а также знания основ анализа, моделирования и синтеза систем, являются необходимыми в осуществлении практической деятельности специалиста по прикладной информатике в области экономики, работающего в сотрудничестве с органами управления и принятия решений.

Предлагаемое учебно-методическое пособие соответствует государственному стандарту высшего профессионального образования уровню подготовки выпускников, обучающихся по специальности «Прикладная информатика в экономике», и позволяет студентам более углубленно подойти к процессу изучения дисциплины «Теория систем и системный анализ» на основе самостоятельной подготовки к практическим занятиям по рекомендуемой преподавателем литературе.

Дисциплина «Теория систем и системный анализ» основывается на ранее изученных фундаментальных экономических дисциплинах, таких как «Математический анализ», «Статистика», «Линейная алгебра». Курс представляет собой методологическую основу дисциплин: «Информационные системы», «Информационные технологии», «Проектирование информационных систем». Он также имеет тесную связь с экономическими дисциплинами.

Предметом курса является изучение основных этапов системного подхода для формализации экономических процессов циркулирующих в сложных экономических системах.

Цель курса - формирование у студентов системного стиля мышления, направленного на использование в профессиональной деятельности принципов и методов системной методологии.

В ходе изучения курса "Теория систем и системный анализ" ставятся следующие задачи:

- изучить методологию и методы теории систем и системного анализа;
- раскрыть понятия, закономерности теории систем, разнообразные методы и модели описания систем;
- изучить современные принципы и методы системного анализа, методику его применения;

- рассмотреть конкретные примеры системного анализа реальных объектов.

В работе со студентами используются следующие инновационные методы и технологии:

- использование интерактивных форм и методов обучения;
- коммуникативно-диалоговые технологии: диспут, дискуссия, турнир, круглый стол;
- имитационно-игровые технологии: деловые и ролевые игры, профессионально-имитационные игры;
- проблемно-поисковые технологии: видеопрактикум, проблемные задачи.

2. Требования к уровню освоения содержания дисциплины

В ходе изучения дисциплины студенты должны:

а) знать:

- место курса "Теория систем и системный анализ" в структуре экономических и информационных дисциплин;
- историю и основные направления развития системных исследований;
- методологию анализа систем различных типов и видов: системный подход и системный анализ, теорию систем, а также и другие методологические подходы;
- методы описания и моделирования систем;
- модели и методы системного анализа, принятия управленческих решений, методику и организацию исследования систем;
- современные методы и инструментальные средства моделирования бизнес-процессов.

б) уметь:

- представлять объект исследования как систему, давать характеристику системы, опираясь на системный подход;
- проводить структуризацию систем по различным основаниям и категориям, включая цель-функция-проблема-решение;
- разрабатывать методику исследования конкретной системы;
- составлять дифференциальные уравнения по структурным схемам динамических систем;
- составлять структурные схемы систем по дифференциальным уравнениям n -го порядка;
- проводить анализ устойчивости динамических систем;
- оценивать управляемость и наблюдаемость динамических систем;
- ориентироваться в пакетах прикладных программ системного моделирования и выбирать наиболее подходящие для решения поставленных задач.

3. Методические указания для проведения практических занятий

3.1 Практическое занятие № 1. Описание сигналов и непрерывных линейных систем с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений.

Цель занятия:

1. Изучить модели описания сигналов и непрерывных линейных систем с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Изучить алгоритм построения структурной схемы системы по заданному дифференциальному уравнению.

Теоретические сведения

Описание сигналов. Сигналы, действующие в системах управления, во временной области описываются различными функциями, в том числе обобщенными. Выделяют два типовых сигнала: импульсное воздействие, которое описывается дельта-функцией $\delta(t - \tau)$, и единичную ступенчатую функцию $1(t - \tau)$.

Дельта-функция (асимметричная) определяется формулой

$$\int_a^b f(t) \delta(t - \tau) dt = \begin{cases} f(\tau + 0), & \tau \in [a, b), \\ 0, & \tau \in (-\infty, a) \cup [b, +\infty), \end{cases} \quad (1)$$

справедливой для любой кусочно-непрерывной функции $f(t)$. Аналогично определяются производные дельта-функции:

$$\int_a^b f(t) \delta^{(k)}(t - \tau) dt = \begin{cases} (-1)^k f^{(k)}(\tau + 0), & \tau \in [a, b), \\ 0, & \tau \in (-\infty, a) \cup [b, +\infty), \end{cases}$$

где $f(t)$ — любая функция, имеющая кусочно-непрерывную производную соответствующего порядка.

Единичная ступенчатая функция

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau, \\ 0, & t \leq \tau. \end{cases} \quad (2)$$

Момент τ соответствует моменту приложения входного воздействия к системе управления (рис. 1).

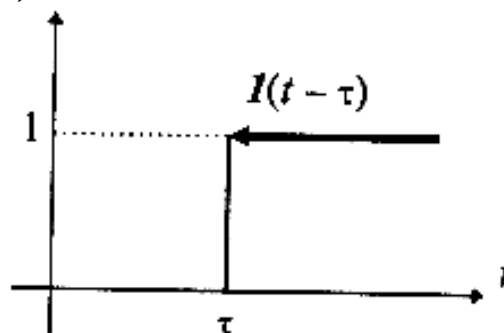


Рисунок 1 – Единичная ступенчатая функция

Типовые сигналы связаны соотношением

$$\int_{-\infty}^t \delta(\eta - \tau) d\eta = 1(t - \tau),$$

то есть дельта-функцию $\delta(t - \tau)$ можно считать производной от единичной ступенчатой функции $1(t - \tau)$.

Описание систем. Непрерывные процессы, протекающие в системах управления, могут быть описаны обыкновенными дифференциальными уравнениями с соответствующими начальными условиями. Тогда, если известен входной сигнал, выходной сигнал определяется в результате решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Одномерная линейная непрерывная нестационарная система управления описывается дифференциальным уравнением

$$a_n(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_0(t)x(t) = b_m(t) \frac{d^m g(t)}{dt^m} + \dots + b_0(t)g(t) \quad (3)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}, \quad (4)$$

где $g(t)$ - входной сигнал; $x(t)$ - выходной сигнал; t - время; $a_n(t), \dots, a_0(t)$, $b_m(t), \dots, b_0(t)$ - коэффициенты левой и правой частей уравнения; n и m - порядки старших производных выходного и входного сигналов соответственно; t_0 - момент начала функционирования системы.

Если коэффициенты уравнения постоянны, система называется линейной стационарной:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m g(t)}{dt^m} + \dots + b_0 g(t). \quad (5)$$

В операторной форме уравнение (3) имеет вид: $D(p, t)x(t) = M(p, t)g(t)$,

где $p = \frac{d}{dt}$ - символ, обозначающий операцию дифференцирования; $D(p, t)$, $M(p, t)$ - дифференциальные операторы левой и правой частей уравнения (3):

$$D(p, t) = a_n(t)p^n + \dots + a_1(t)p + a_0(t), \quad M(p, t) = b_m(t)p^m + \dots + b_1(t)p + b_0(t).$$

Уравнение (5) в операторной форме имеет вид:

$$D(p)x(t) = M(p)g(t),$$

где $D(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0$, $M(p) = b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0$.

Из операторной формы уравнения следует способ изображения стационарной системы на структурных схемах (рис. 2).

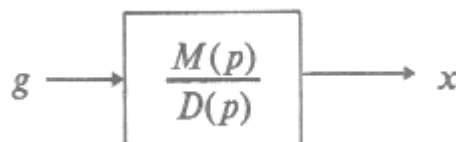


Рисунок 2 - Изображение стационарной системы на структурных схемах

Методический пример

Построение структурной схемы по дифференциальному уравнению

Структурные схемы строятся с помощью элементарных, типовых звеньев и сумматоров, описывающих преобразование сигналов. Они служат одним из языков описания систем управления. По структурным схемам, как правило, находится эквивалентный оператор системы управления, а затем решаются различные задачи анализа.

Алгоритм построения структурной схемы:

1. Выразить член со старшей производной из дифференциального уравнения и представить полученное соотношение с помощью сумматора, дифференцирующих и усилительных звеньев.

2. Все низшие производные получить как сигналы на соответствующих выходах последовательно соединенных интегрирующих звеньев.

3. Начальные условия представить как постоянные во времени воздействия, приложенные на выходах интегрирующих звеньев.

Пример. Построить структурную схему системы, описываемой дифференциальным уравнением $4\ddot{x} - 3\dot{x} + x = 2\dot{g}$ с начальными условиями $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

Выразим из уравнения член со старшей производной:

$$4\ddot{x} = 2\dot{g} + 3\dot{x} - x.$$

Изобразим схему получения сигнала $4\ddot{x}$. С помощью усилительного звена с коэффициентом усиления $1/4$ получим сигнал $\ddot{x}$. Построим прямую цепь схемы, последовательно преобразовывая сигнал $\ddot{x}$ интегрирующими звеньями. Добавляя на выходах интегрирующих звеньев соответствующие начальные условия, получаем часть прямой цепи схемы, в которой присутствуют выходной сигнал x и его производные $\dot{x}$, $\ddot{x}$. Изображаем сумматор, выходным сигналом которого служит $4\ddot{x}$. На этом сумматоре нужно реализовать равенство

$$4\ddot{x} = 2\dot{g} + 3\dot{x} - x.$$

Для этого добавляем к прямой цепи соединение дифференцирующего и усилительного звеньев, которые из входного сигнала g позволяют получить нужный сигнал $2\dot{g}$ на входе сумматора. Сигналы x и $3\dot{x}$ подаем на сумматор с соответствующим знаком, используя обратные связи. Таким образом, получаем структурную схему, соответствующую заданному дифференциальному уравнению (рис 3).

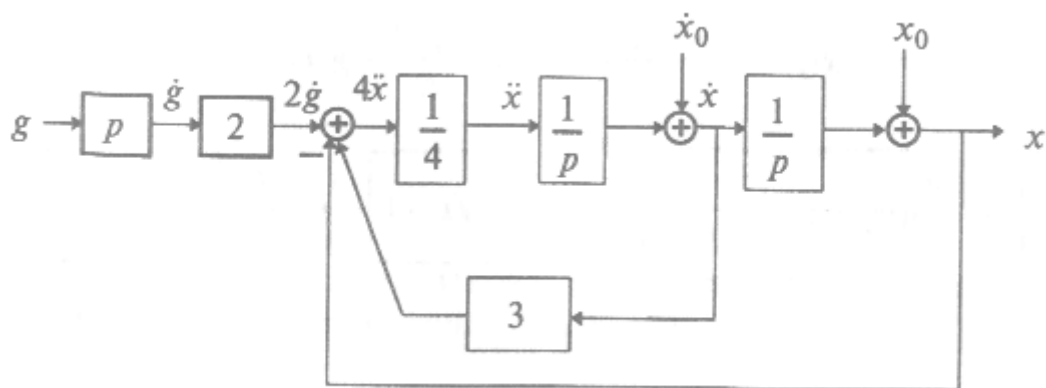


Рисунок 3 – Структурная схема системы

Контрольные вопросы:

1. Как описывается дельта-функция? Охарактеризуйте ее.
2. Дайте характеристику единичной ступенчатой функции.
3. Как описывается дифференциальным уравнением одномерная линейная непрерывная нестационарная система?
4. В чем отличие в описании непрерывной нестационарной системы и линейной стационарной системы?
5. Как изображается стационарная система на структурной схеме?
6. Приведите алгоритм построения структурной схемы по дифференциальному уравнению системы.

Варианты заданий

Построить структурные схемы систем, заданных следующими дифференциальными уравнениями при следующих начальных условиях $x(0) = x_0$.

№ варианта	Уравнение
1.	$2x'' - 3x' + 4x = 3g' + g$
2.	$4x''' - 6x'' + x = 2g' + 3g$
3.	$x' + 2x = 5g$
4.	$3x'' + 4x' + 6x = 2g$
5.	$2x'' + 6x' + x = 3g' + 2g$
6.	$x''' + x' + x = g$
7.	$5x''' + tx'' + t^2x = g' + 2g$
8.	$4x'' - 3x' + x = 2g$
9.	$x'' - 3x' + x = g' + g$
10.	$x'' - 3x' - 4x = 3g' - 3g$
11.	$x'' - x' + 4x = g' + g$
12.	$7x''' + 6x'' + 8x = g' + g$
13.	$x' - 12x = 11g$

14.	$3x''+x'+x = g$
15.	$2x''+x'+3x = 3g'+g$
16.	$x''' + x' + x = g$
17.	$5x''' - tx'' + t^2x = 4g' + 2g$
18.	$3x'' + 2x' + x = 2g$
19.	$x'' - 3x' + x = g' + g$
20.	$x'' - 3x' - 4x = 3g' - 3g$
21.	$2x'' - 3x' + 4x = 3g' + g$
22.	$4x''' - 6x'' + x = 2g' + 3g$
23.	$x' + 2x = 5g$
24.	$3x'' + 4x' + 6x = 2g$
25.	$2x'' + 6x' + x = 3g' + 2g$
26.	$x''' + x' + x = g$
27.	$x''' + tx'' + t^2x = g' + g$
28.	$4x'' + x' + x = g$
29.	$x'' - 3x' + x = g' + g$
30.	$x'' - 3x' - 4x = g' - g$

3.2 Практическое занятие № 2. Составление дифференциального уравнения по структурной схеме системы.

Цель занятия:

Научиться составлять дифференциальное уравнение системы по заданной структурной схеме динамической системы.

Методический пример

Для записи дифференциального уравнения следует:

- обозначить на схеме все промежуточные сигналы;
- записать уравнения для каждого звена и для каждого сумматора;
- из полученной системы дифференциальных и алгебраических уравнений исключить промежуточные переменные кроме входного и выходного сигналов.

Пример 1. Составить дифференциальное уравнение по структурной схеме, изображенной на рисунке 1.

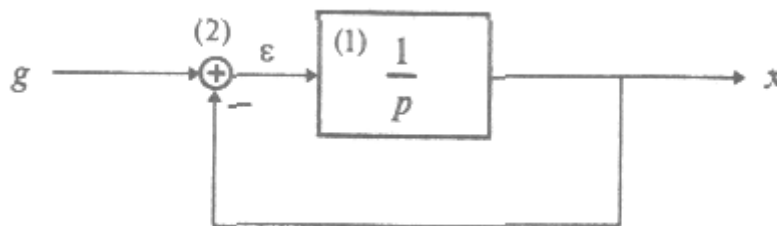


Рисунок 1 - Структурная схема системы

Составим уравнения элементов схемы:

$$1) \quad x = \frac{1}{p} \varepsilon; \quad 2) \quad \varepsilon = g - x. \text{ Отсюда } x = \frac{1}{p}(g - x), \quad px = g - x,$$

$$(p+1)x = g.$$

Следовательно, дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$\dot{x}(t) + x(t) = g(t).$$

Пример 2. Составить дифференциальное уравнение по структурной схеме рисунка 2.

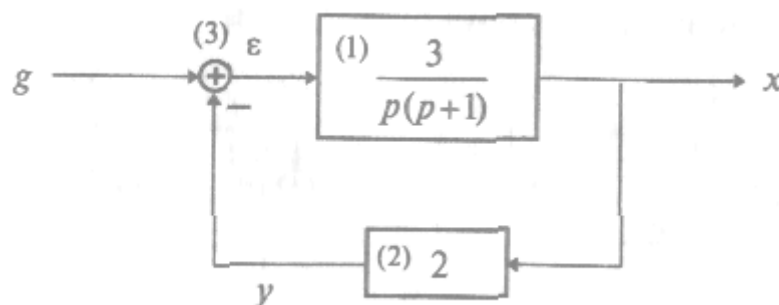


Рисунок 2 - Структурная схема системы

Составим уравнения элементов схемы:

$$1) \ x = \frac{3}{p(p+1)} \varepsilon; \quad 2) \ y = 2x; \quad 3) \ \varepsilon = g - y.$$

$$\text{Отсюда } (p^2 + p)x = 3(g - y) = 3(g - 2x) = 3g - 6x.$$

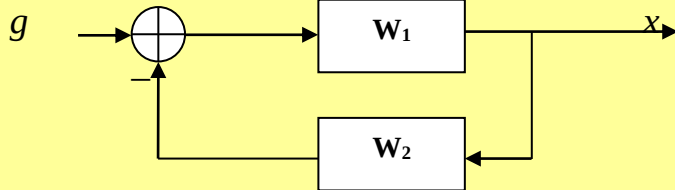
Переходя от операторной формы записи дифференциального уравнения к обычной, получим $\ddot{x} + \dot{x} + 6x = 3g$.

Контрольные вопросы:

1. Как получить описание системы дифференциальным уравнением по заданной структурной схеме?
2. Для чего необходимы промежуточные обозначения сигналов?
3. Что обозначает на схеме символ p ?

Варианты заданий

По заданным структурным схемам определить дифференциальные уравнения систем

	
№ варианта	
1.	$W_1 = \frac{1}{p+2k}, \quad W_2 = 1$
2.	$W_1 = \frac{1}{Tp+1}, \quad W_2 = 3k$
3.	$W_1 = \frac{1}{Tp-1}, \quad W_2 = 2$
4.	$W_1 = \frac{1}{Tp+1}, \quad W_2 = \frac{1}{p}$
5.	$W_1 = \frac{1}{Tp-1}, \quad W_2 = \frac{1}{p}$
6.	$W_1 = \frac{1}{Tp+1}, \quad W_2 = k$
7.	$W_1 = \frac{1}{Tp-1}, \quad W_2 = k$
8.	$W_1 = \frac{1}{p}, \quad W_2 = k$
9.	$W_1 = \frac{k}{p+1}, \quad W_2 = 2k$

10.	$W_1 = \frac{2}{Tp+1}, \quad W_2 = 4k$
11.	$W_1 = \frac{k}{(p^2 + p + 1)}, \quad W_2 = kp$
12.	$W_1 = \frac{k}{p(Tp+1)}, \quad W_2 = 1$
13.	$W_1 = \frac{k}{p(Tp-1)}, \quad W_2 = 3$
14.	$W_1 = \frac{k}{(p^2 + p + 1)}, \quad W_2 = \frac{1}{p}$
15.	$W_1 = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}, \quad W_2 = 1$
16.	$W_1 = \frac{k}{T^2 p^2 - 1}, \quad W_2 = k$
17.	$W_1 = \frac{k}{T^2 p^2 - 1}, \quad W_2 = \frac{1}{p}$
18.	$W_1 = \frac{k}{p^2 - 1}, \quad W_2 = \frac{k}{p}$
19.	$W_1 = \frac{k}{(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)}, \quad W_2 = 1$
20.	$W_1 = \frac{k}{(p^2 - p + 1)}, \quad W_2 = kp$
21.	$W_1 = \frac{k}{(T_2^2 p^2 - T_1 p - 1)}, \quad W_2 = 1$
22.	$W_1 = \frac{k}{(p^2 + 1)}, \quad W_2 = \frac{k}{p}$
23.	$W_1 = \frac{k}{(T_2^2 p^2 - T_1 p + 1)}, \quad W_2 = 1$
24.	$W_1 = \frac{k}{(T_2^2 p^2 - T_1 p - 1)}, \quad W_2 = 1$
25.	$W_1 = kp, \quad W_2 = k$
25.	$W_1 = kp, \quad W_2 = \frac{1}{p}$
27.	$W_1 = kp, \quad W_2 = \frac{k}{p(Tp+1)}$
28.	$W_1 = \frac{1}{p}, \quad W_2 = kp$
29.	$W_1 = \frac{k}{p(Tp-1)}, \quad W_2 = kp$
30.	$W_1 = \frac{1}{p}, \quad W_2 = \frac{k}{p(Tp-1)}$

3.3 Практическое занятие №3. Исследование динамических и частотных характеристик систем.

Цель занятия:

1. Изучить динамические и частотные характеристики систем управления (СУ).
2. Приобрести навыки в получении и исследовании линейных динамических моделей с использованием пакета Control System Toolbox системы Matlab.

Теоретические сведения

В качестве объекта исследования выступают линейные (линеаризованные) динамические стационарные системы управления с одним входом и одним выходом. При этом модель одномерной СУ задана в виде комплексной передаточной функции, записанной как отношение полиномов

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Необходимо получить и исследовать основные динамические и частотные характеристики СУ для своего варианта.

Рассмотрим систему автоматического управления (СУ), описываемую линейным (линеаризованным) дифференциальным уравнением вида:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(t)$ – входной процесс, $y(t)$ – выходной процесс, $a_i, b_j, (i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m})$ – постоянные коэффициенты, n, m ($n \geq m$) – постоянные числа. В операторной форме выражение (1) может быть записано –

$$A(D)y(t) = B(D)u(t).$$

Здесь D – оператор дифференцирования $\left(D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \right)$. Отсюда преобразование

«ВХОД-ВЫХОД» системы –

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{B(D)}{A(D)} = W(D), \quad (2)$$

где $W(D)$ называется операторной передаточной функцией.

Один из способов моделирования систем заключается в представлении преобразования «вход-выход» в виде комплексной передаточной функции:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = W(s), \quad (3)$$

которая получается путем применения преобразования Лапласа к (2) при начальных нулевых условиях. Здесь s -комплексная переменная. Связь между операторной (2) и комплексной (3) передаточными функциями можно записать в виде

$$W(s) = W(D)|_{D=s}.$$

Передаточная функция равна отношению изображений по Лапласу переменных входа и выхода при нулевых начальных условиях, где интегральное преобразование Лапласа определяется так:

$$y(s) = L\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt; \quad u(s) = L\{u(t)\} = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt.$$

Таким образом, зная дифференциальное уравнение системы можно записать ее передаточную функцию, и, наоборот, по передаточной функции можно записать дифференциальное уравнение.

Комплексные числа, являющиеся корнями многочлена $B(s)$, называются нулями передаточной функции, а корни многочлена $A(s)$ – полюсами.

Явный вид связи входа и выхода определяется выражением:

$$y(t) = \int_0^t w(t)v(t-\tau)d\tau, \quad (4)$$

где $w(t)$ – оригинал (т.е. полученный с помощью обратного преобразования Лапласа) комплексной передаточной функции $W(s)$.

Динамические свойства систем характеризуют реакции на входные воздействия специального вида.

Временные характеристики являются одной из форм представления операторов преобразования переменной входного сигнала в переменную выходного сигнала. В частности анализ выхода системы на единичный скачок и δ -функцию (дельта-функцию).

Пусть $u(t) = 1(t)$, то есть на вход системы подается функция Хевисайда (единичный скачок), определяемая

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \leq 0, \\ 1, & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

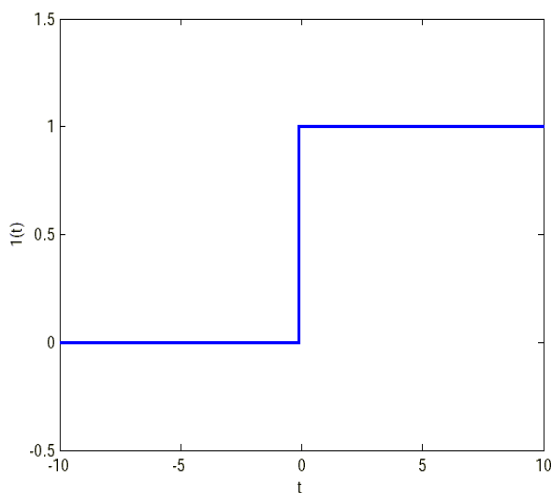


Рисунок 1 - Функция Хевисайда

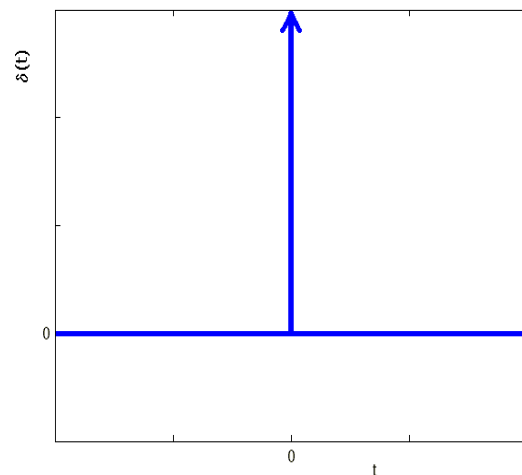


Рисунок 2 - Функция Дирака

График функции Хевисайда приведен на рис. 1. Реакция СУ на единичный скачок называется переходной функцией системы при нулевых начальных условиях и обозначается $h(t)$.

Если $u(t) = \delta(t)$, то есть на вход системы поступает функция Дирака (δ -функция, импульсная функция, рис. 2) определяемая

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t = 0, \\ 0, & \text{при } t \neq 0, \end{cases}$$

то реакция СУ называется импульсной переходной функцией системы и обозначается $w(t)$.

Таким образом, оригинал комплексной передаточной функции можно измерить как реакцию системы на импульс.

Импульсная переходная и переходная функции системы связаны соотношением (из (4)):

$$h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau.$$

Благодаря широкому применению при исследовании устойчивости динамических систем и проектировании регуляторов получили распространение частотные характеристики.

Частотные характеристики элементов и систем представляют собой зависимость параметров установившихся реакций на гармонические сигналы всех частот и единичных амплитуд. В линейных системах форма и частота установившейся реакции совпадают с формой и частотой сигнала на входе.

Пусть на вход системы с передаточной функцией $W(s)$ подается гармонический сигнал

$$u(t) = a_u \cos(\omega t), t > 0. \quad (5)$$

В этих условиях справедлива следующая теорема:

Если звено является устойчивым, то установившаяся реакция $y(t)$ на гармоническое воздействие является функцией той же частоты с амплитудой

$$a_y = a_u |W(i\omega)|,$$

и относительным сдвигом по фазе

$$\psi = \arg W(i\omega).$$

Таким образом, выход определяется гармонической функцией

$$y(t) = a_u |W(i\omega)| \cos(\omega t + \arg W(i\omega)),$$

где i – комплексная единица ($i^2 = -1$), $W(i\omega) = W(s)|_{s=i\omega}$ – частотная характеристика.

Частотной характеристикой $W(i\omega)$ стационарной динамической системы называется преобразование Фурье переходной функции:

$$W(i\omega) = F[h(t, \tau)] = \int_0^{\infty} w(t - \tau) e^{-i\omega(t - \tau)} d\tau,$$

где $w(t - \tau)$ – импульсная переходная функция.

Связь между комплексной передаточной функцией и частотной характеристикой, исходя из свойств преобразований Фурье, можно представить в виде соотношения:

$$W(s)|_{s=i\omega} = W(i\omega).$$

При фиксированном значении ω частотная характеристика является комплексным числом, и, следовательно, может быть представлена в виде

$$W(i\omega) = A(\omega)e^{i\psi(\omega)} = U(\omega) + iV(\omega).$$

Здесь

$A(\omega) = |W(i\omega)|$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ);

$\psi(\omega) = \arg W(i\omega)$ – фазово-частотная характеристика (ФЧХ);

$U(\omega) = \operatorname{Re} W(i\omega)$ – вещественная частотная характеристика (ВЧХ);

$V(\omega) = \operatorname{Im} W(i\omega)$ – мнимая частотная характеристика (МЧХ).

Комплексная частотная характеристика $W(i\omega)$ дает возможность определить амплитуду $A(\omega)$ и фазу $\psi(\omega)$ гармонического сигнала на выходе системы по значению частоты ω . Реальные объекты с повышением частоты хуже пропускают сигналы – ослабляют амплитуду и вносят отрицательный фазовый сдвиг. Таким образом, АЧХ находится как модуль, а ФЧХ – как аргумент комплексной функции действительного аргумента $W(i\omega)$.

Геометрическое место точек $W(i\omega)$ на комплексной плоскости при изменении ω от ω_0 до ω_1 (обычно $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \infty$), называется амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ) или частотным годографом Найквиста.

Частотный годограф Найквиста применяется при анализе таких свойств систем регулирования и управления, как запаса устойчивости по фазе и амплитуде, коэффициента передачи, ширины полосы пропускания, реакции системы на возмущения.

С использованием годографа Николса и наложенной на него диаграммы Николса, анализируются свойства как разомкнутой, так и замкнутой модели. Команда `ngrid` строит линии постоянного уровня амплитуды и фазы, соответствующие следующему преобразованию комплексной плоскости Н:

$$W = \frac{H}{1 + H}.$$

Такая координатная сетка и называется диаграммой Николса. Для одномерных моделей она связывает точки годографа Николса для разомкнутой системы с точками годографа для системы, замкнутой единичной отрицательной обратной связью. Команда `ngrid` строит сетку координат для модуля в диапазоне от -40 до 40 дБ, для фазы – от -360 до 0 град. Диаграмма Николса накладывается на уже существующий годограф Николса.

Имеет широкое практическое значение диаграмма Боде (логарифмическая амплитудная характеристика, ЛАХ), которая определяется как $L = 20 \lg A(\omega)$, измеряется в децибелах и строится как функция от $\lg \omega$. ЛАХ определяет изменение логарифма модуля частотной функции при изменении частоты.

Логарифмические частотные характеристики применяются при анализе таких свойств систем, как запас устойчивости по фазе и амплитуде (модулю), коэффициент передачи, ширина полосы пропускания, реакция системы на возмущения.

Запас устойчивости по фазе – это разность между значением фазовой частотной характеристики и -180 град на частоте среза.

Частота среза – это частота, где значение амплитудной частотной характеристики равно 1.0 , или 0 дБ.

Запас устойчивости по модулю – это значение амплитудной частотной характеристики на частоте, где фазовая частотная характеристика имеет значение -180 град.

Как правило, запас устойчивости по фазе в пределах между 30 и 60 градусами обеспечивает приемлемый компромисс между устойчивостью и полосой пропускания.

В качестве единицы измерения величины $20 \lg A(\omega)$ используют децибел: $1 \text{ дБ} = 0,1 \text{ бел}$. 1 Б соответствует усилению мощности сигнала в 10 раз, 2 Б — в 100 раз, 3 Б — в 1000 раз и т. д. Так как мощность сигнала P пропорциональна квадрату амплитуды, а $\lg A^2 = 2 \lg A$, то усиление в беллах, выраженное через отношение амплитуд A , равно $2 \lg A$ (соответственно в децибелах оно равно $20 \lg A$). При этом значения $A(\omega)$ и $L(\omega)$ связаны между собой следующими соотношениями: знак «+» у $L(\omega)$ соответствует усилению и $A(\omega) > 1$, $L(\omega) > 0$; знак «-» у $L(\omega)$ соответствует ослаблению и $A(\omega) < 1$, $L(\omega) < 0$:

$A(\omega)$		0,001	0,01	0,1	0,316	0,89	1,0	$1,12 = \sqrt[20]{10}$	3,16	10	100	1000
$L, \text{ дБ}$		-60	-40	-20	-10	-1	0	1	10	20	40	60

С применением ЛАХ диапазон изменения коэффициента усиления значительно сужается. ЛФХ строится в полулогарифмических координатах, то есть в виде зависимости $\varphi(\omega)$ от $\lg \omega$; использование логарифмического масштаба на оси ординат не имеет смысла, так как фазовый сдвиг цепочки звеньев (перемножаемых) получается в виде суммы фазовых сдвигов отдельных звеньев.

На оси абсцисс часто указываются значения частоты ω (рад/с). Единицей приращения $\lg \omega$ является декада, соответствующая изменению частоты в 10 раз или октава, соответствующая изменению частоты в два раза (1 октава равна $0,303$ декады, так как $\lg 2 = 0,303$). Наклон ЛАХ соответствует $20 \text{ дБ/дек} \cong 6 \text{ дБ/окт}$ (точнее $6,06 \text{ дБ/окт}$). Кроме ЛАХ и ЛФХ можно построить также ЛАФХ.

Для выполнения занятия используется пакет прикладных программ (ППП) Control System Toolbox, который предназначен для работы с LTI-моделями (Linear Time Invariant Models) систем управления.

В Control System Toolbox имеется тип данных, определяющих динамическую систему в виде комплексной передаточной функции. Синтаксис команды, создающий LTI-систему с одним входом и одним выходом в виде передаточной функции:

$$\text{TF}([b_m, \dots, b_1, b_0], [a_n, \dots, a_1, a_0])$$

$b_m, \dots, b_1$ – значения коэффициентов полинома B в (3), $a_n, \dots, a_1$ – значения коэффициентов полинома A в (3).

Для выполнения работы могут применяться команды, приведенные в таблице 1.

Таблица 1 - Некоторые команды Control System Toolbox

Синтаксис	Описание
pole(<LTI-объект>)	Вычисление полюсов передаточной функции
zero(<LTI-объект>)	Вычисление нулей передаточной функции
K=dcgain(<LTI-объект>)	Вычисляет коэффициент передачи k
step(<LTI-объект>)	Построение графика переходного процесса. Рассчитывает и строит реакцию модели на единичную ступенчатую функцию.
impulse(<LTI-объект>)	Построение графика импульсной переходной функции
Bode(<LTI-объект>)	Построение логарифмических амплитудно-частотной характеристики и фазочастотной характеристики (диаграммы Боде).
nyquist(<LTI-объект>)	Построение частотного годографа Найквиста
nichols(<LTI-объект>)	Построение частотного годографа Николса
Ngrid	Наносит на частотный годограф Николса диаграмму (сетку)
margin	Вычисляет запасы устойчивости по фазе и амплитуде
Norm	Вычисляет максимальное значение амплитуды и соответствующее значение частоты
Zgrid	Наносит сетку постоянных линий коэффициента демпфирования от 0 до 1 с шагом 0,1 и собственных частот от 0 до 10 рад/с с шагом 1 рад/с на комплексной плоскости z
evalfr(sys,f)	Вычисляет значение комплексного коэффициента передачи для одного заданного комплексного значения частоты

Для определения корней полиномов степени k , может применяться команда MATLAB **roots(P)**, которая, в качестве аргумента P , получает матрицу коэффициентов полинома $[p_k, \dots, p_0]$.

Другим вариантом получения графиков динамических характеристик СУ является использование графического интерфейса ППП CST – LTI viewer, вызов которого осуществляется командой **ltiview**, у которой в качестве параметра, указывается имя переменной, содержащей LTI-объект.

Методический пример

Задана передаточная функция СУ

$$W = \frac{s+2}{3s^3 + 4s^2 + 5s + 3}.$$

Найдем ее динамические и частотные характеристики. Будем работать в командном режиме среды MATLAB.

1. Создадим LTI-объект с именем w, для этого выполним:

```
>> w=tf([1 2],[3 4 5 3])
```

Transfer function:

$s + 2$

 $3 s^3 + 4 s^2 + 5 s + 3$

2. Найдем полюса и нули передаточной функции с использованием команд pole, zero.

```
>> pole(w)
```

ans =

```
-0.2639 + 1.0825i  
-0.2639 - 1.0825i  
-0.8055
```

```
>> zero(w)
```

ans =

```
-2
```

Определим на комплексной плоскости расположение полюсов и нулей для заданной передаточной функции, используя команду pzmap (w) рис. 3.

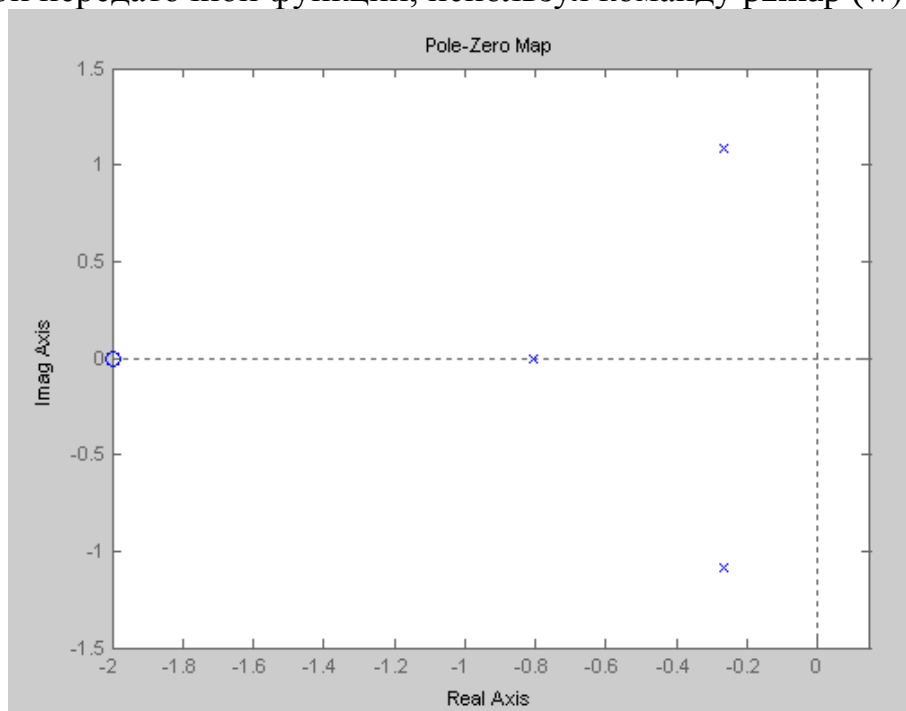


Рисунок 3 – Расположение полюсов и единиц для заданной передаточной функции

Нанесем сетку постоянных линий коэффициента демпфирования и частоты на плоскости z , используя команду `zgrid` рис. 4.

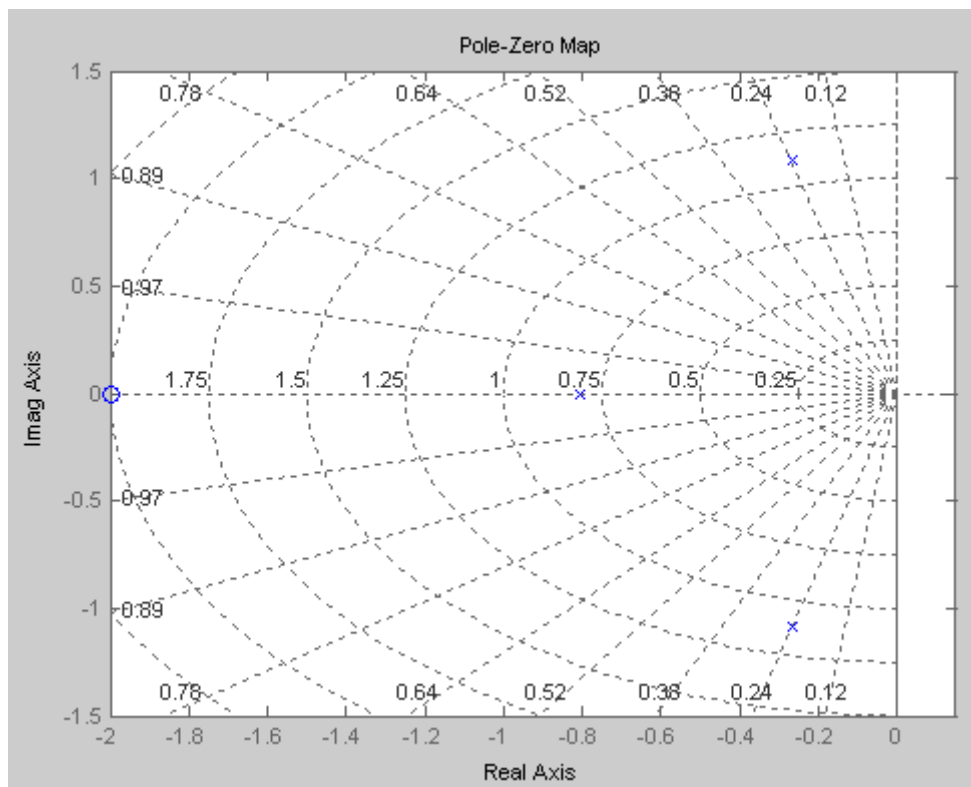


Рисунок 4 – Расположение полюсов и нулей на сетке постоянных линий коэффициента демпфирования и частоты на плоскости z

Вычислим комплексное значение передачи для заданного значения частоты, используя команду `evalfr(w,2)`:

```
>> evalfr(w,2)
```

ans =

0.0755

В данном примере задана частота 2 рад/с. Вычислим коэффициент передачи, используя команду `k=dcgain(w)`:

```
>> k=dcgain(w)
```

k =

0.6667

3. Построим переходную функцию командой `step(w)`. Результат ее выполнения приведен на рис. 3.

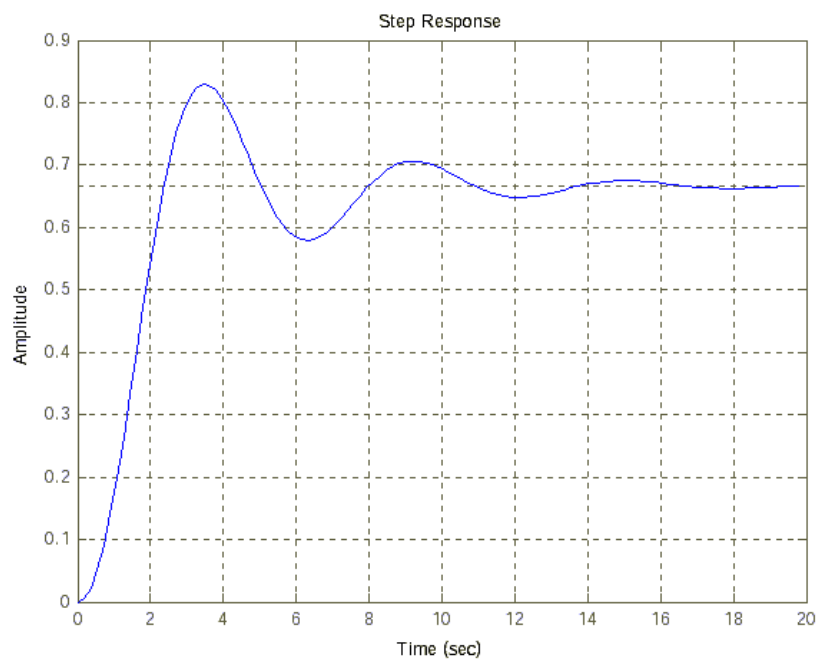


Рисунок 3. - Переходная функция $h(t)$

4. Построим импульсную переходную функцию командой `impzle(w)`.
Результат показан на рис. 4.

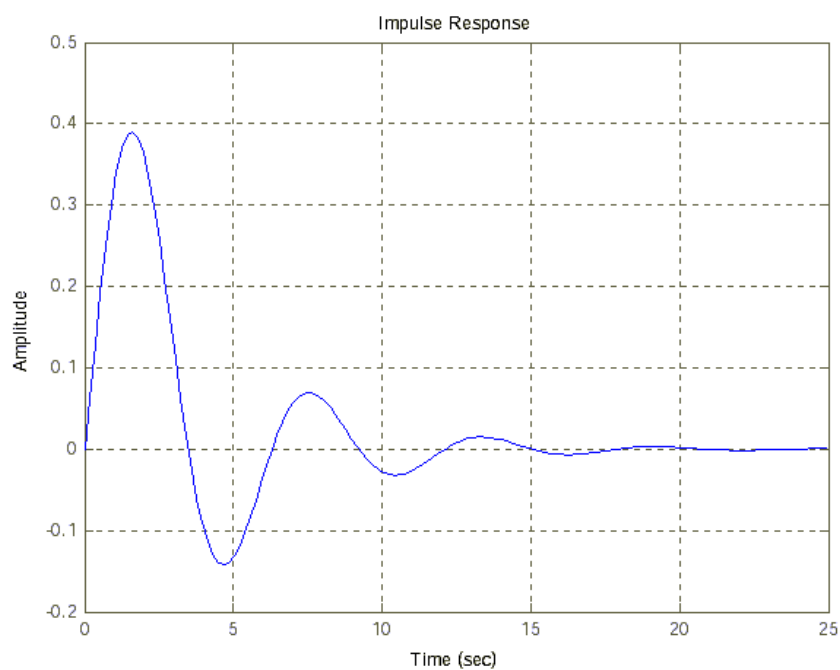


Рисунок 4 - Импульсная переходная функция

5. Диаграмму Боде получим, используя команду `bode(w)` – рис. 5.

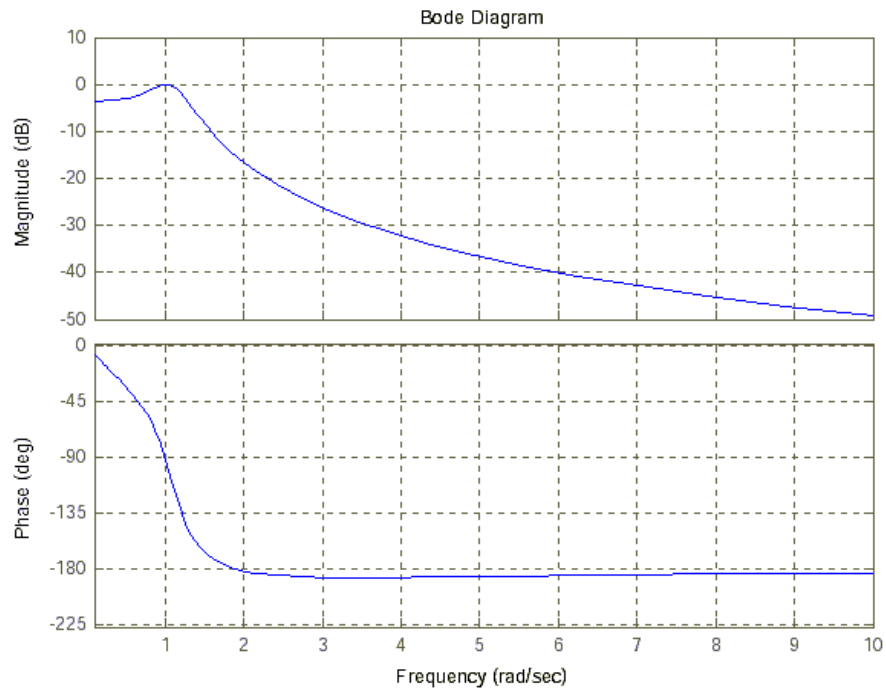


Рисунок 5 - Логарифмические частотные характеристики

6. Определим частотный годограф Найквиста, выполнив команду `nyquist(w)` – рис. 6.

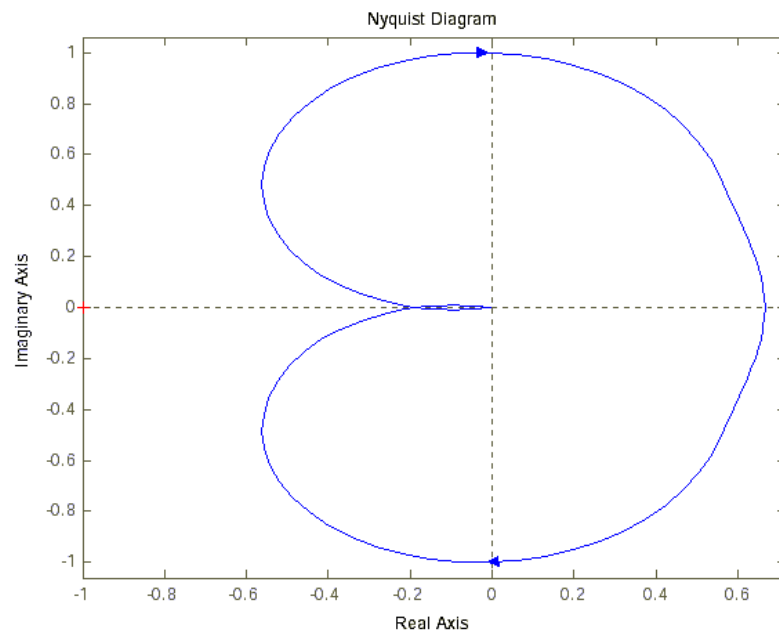


Рисунок 6 - Частотный годограф

Аналогичные результаты (рис. 7) можно получить, используя команду `ltiview(w)`, с соответствующими настройками в меню «Plot Configuration».

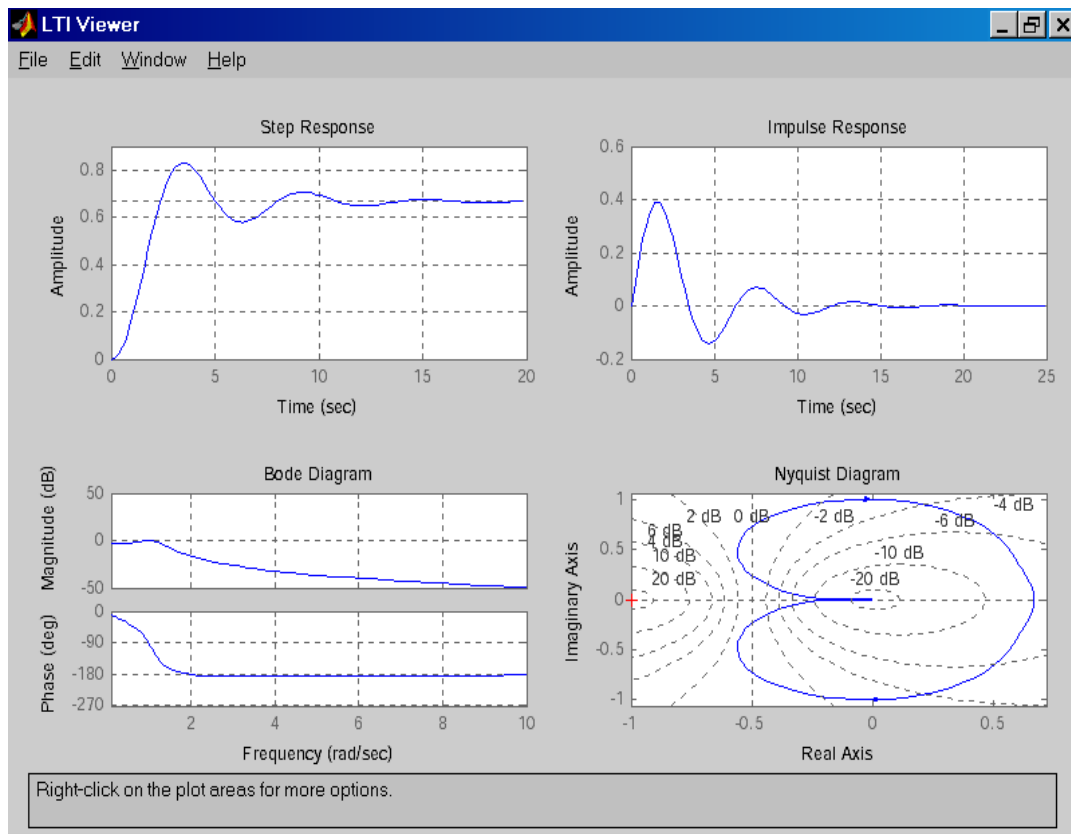


Рисунок 7 - LTI-viewer

7. Определим запас устойчивости системы по фазе и модулю, выполнив команду `margin(w)` рис. 8.

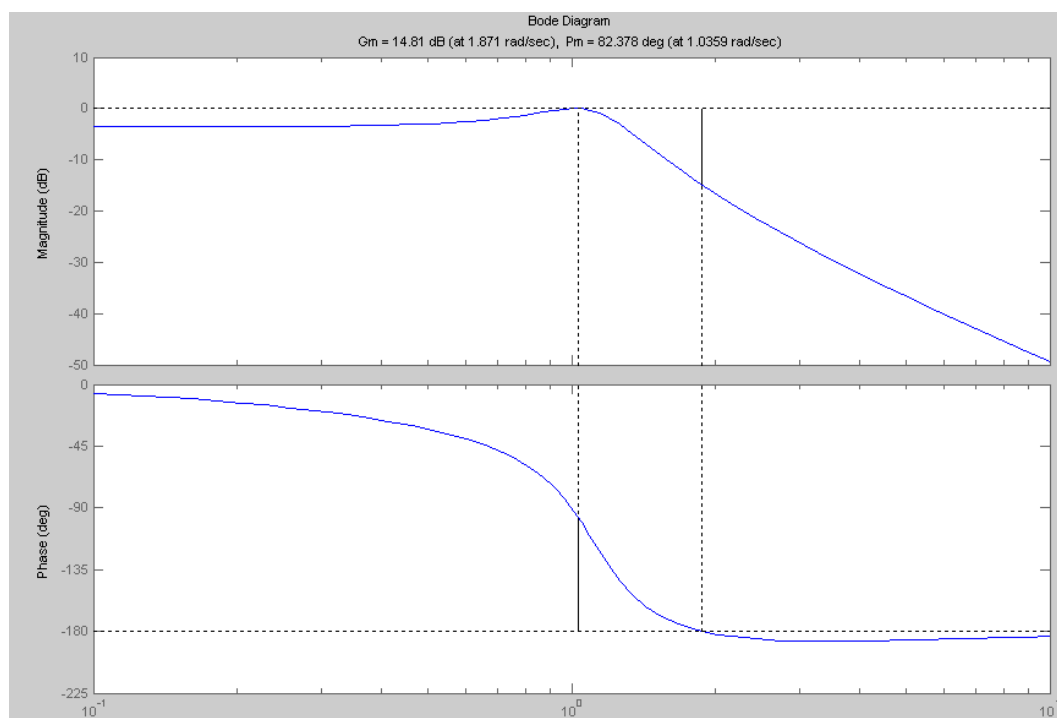


Рисунок 8 – Графики для определения запаса устойчивости системы по фазе и модулю

8. Вычислим максимальное значение амплитуды и соответствующее значение частоты:

```
>> [peak,fprak]=norm(w,inf)
```

```
peak =  
0.9958
```

```
fprak =  
1.0498
```

Построим годограф Николса, выполнив команду `nichols(w)` рис. 9.

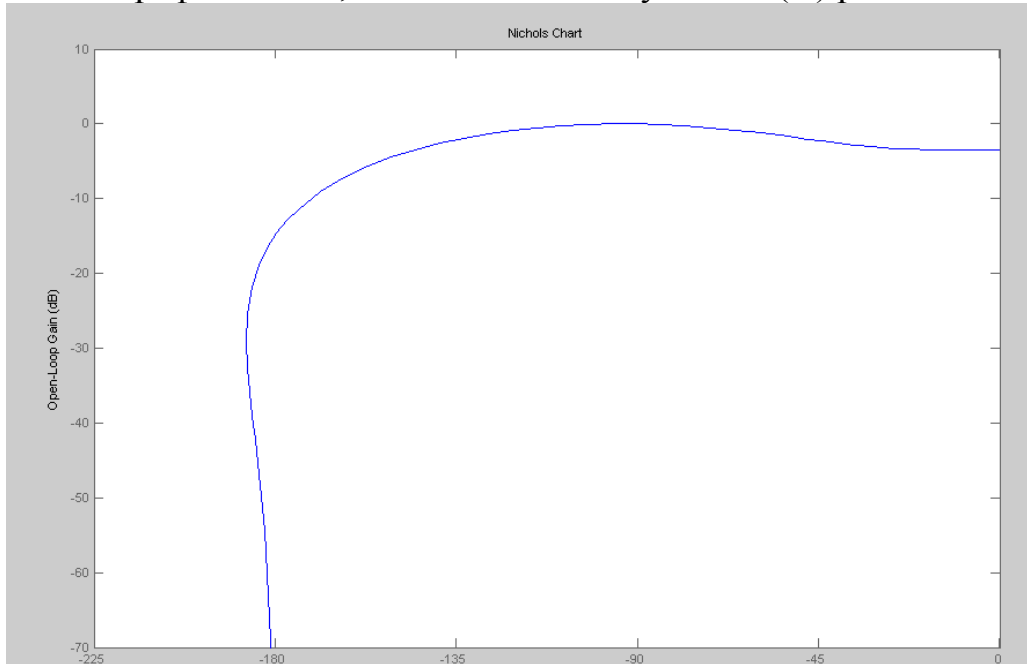


Рисунок 9 Годограф Николса

9. Нанесем на график диаграмму (сетку) Николса, введя команду `ngrid`, рис. 10.

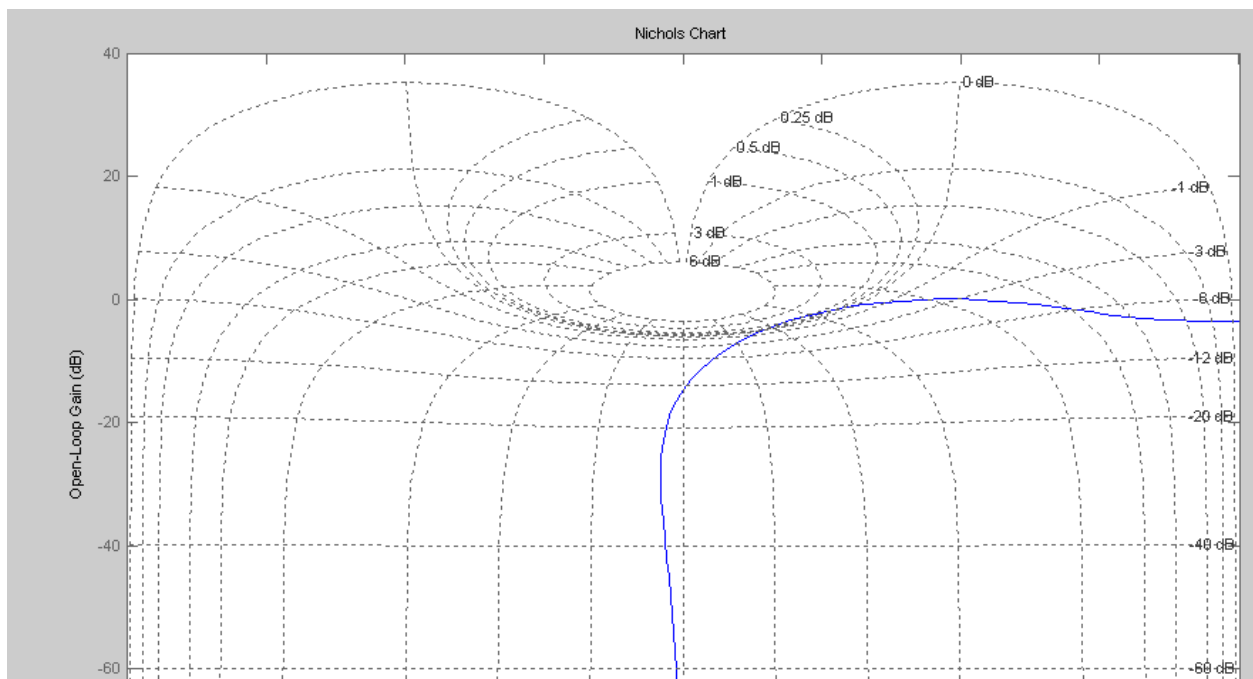


Рисунок 10 – Диаграмма Николса

Каждая из построенных характеристик полностью и однозначно определяет рассматриваемую систему управления.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение комплексной передаточной функции системы.
2. Как определяются нули и полюса передаточной функции?
3. Дайте определение и поясните физический смысл переходной функции.
4. Дайте определение и поясните физический смысл импульсной переходной функции.
5. Каким образом связаны между собой переходная и импульсная переходная функции системы?
6. Дайте определение частотной характеристике стационарной динамической системы.
7. Какая связь между комплексной передаточной функцией и частотной характеристикой системы? Запишите выражения для амплитудно-частотной, фазово-частотной, вещественно-частотной, мнимой частотной характеристик.
8. Дайте определение амплитудно-фазовой характеристике или частотному годографу Найквиста.
9. Как определяются логарифмические частотные характеристики и для чего они используются?
10. Для чего используется частотный годограф и диаграмма Николса?
11. Как определяется запас устойчивости системы по фазе и модулю?

Варианты заданий

Варианты заданий, состоят из двух цифр: первая - номер передаточной функции, вторая – номер набора значений коэффициентов.

№	Вид передаточной функции	№	Коэффициенты полиномов						
			b_0	b_1	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
1.	$W(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$	1.	0	3	1	2	3	0	1
		2.	2	6	4	0	1	5	1
		3.	0	-3	5	2	0	2	1
		4.	4	2	3	4	5	3	1
		5.	0	1	-2	-2	-3	-2	0
			b_0	b_1	b_2	a_0	a_1	a_2	a_3
2.	$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$	1.	0	-3	2	4	2	3	9
		2.	8	0	-3	-4	-6	-4	-1
		3.	-4	6	-2	5	5	0	1
		4.	6	-8	-7	0	-6	-3	-1
		5.	2	-1	-3	-1	0	-7	-2
			b_0	b_1	b_2	a_0	a_1	a_3	a_4
3.	$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_1 p + a_0}$	1.	0	2	8	-3	7	-7	1
		2.	-5	0	3	-8	-2	-1	-6
		3.	-7	1	2	0	5	2	9
		4.	-6	4	-4	1	0	6	3
		5.	2	-2	-1	5	3	0	9
4.	$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$	1.	0	-5	4	3	7	9	1
		2.	7	-6	0	5	8	2	2
		3.	-2	-8	2	0	4	3	3
		4.	-7	-1	6	9	0	4	2
		5.	-3	7	-4	4	5	0	1
			b_2	b_3	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
5.	$W(p) = \frac{b_3 p^3 + b_2 p^2}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$	1.	0	-5	4	3	7	9	1
		2.	7	-6	0	5	8	2	2
		3.	-2	-8	2	0	4	3	3
		4.	-7	-1	6	9	0	4	2
		5.	-3	7	-4	4	5	0	1

Последовательность выполнения работы:

1. Изучить теоретические сведения.
2. Запустить систему MATLAB.
3. Создать tf-объект, в соответствии с заданным вариантом.
4. Используя комплексную передаточную функцию составить дифференциальное уравнение, определяющее функционирование СУ.
5. По дифференциальному уравнению построить структурную схему СУ.
6. Определить полюса передаточной функции $s_j^*, (j = \overline{1, n})$ с использованием команды roots или pole.
7. Определить нули передаточной функции $s_j^0, (j = \overline{1, m})$ с использованием команды roots или zero.
8. На комплексной плоскости получить расположение полюсов и нулей. По расположению корней сделать вывод об устойчивости исследуемой СУ.
9. Вычислить коэффициент передачи, используя команду $k=dcgain(w)$.
10. Вычислить комплексное значение передачи, используя команду $evalfr(w, f)$ для частот 1, 10, 100 рад/с.
11. Изменяется ли комплексное значение передачи при изменении частоты, если изменяется, то почему? Сделайте выводы по полученным результатам.
12. Нанести сетку постоянных линий коэффициента демпфирования и частоты на комплексную плоскость z .
13. Используя LTI-viewer, или соответствующие команды (табл. 1) получить динамические характеристики – переходную функцию $h(t)$, импульсную переходную функцию $w(t)$ и частотные характеристики – диаграмму Боде, частотный годограф Найквиста. Проведите анализ полученных результатов для каждой исследуемой характеристики и сделайте количественные и качественные выводы.
14. Определить запас устойчивости исследуемой системы по фазе и модулю.
15. Вычислить максимальное значение амплитуды и соответствующее значение частоты.
16. Построить годограф Николса и нанести на него диаграмму Николса.
17. Ответить на контрольные вопросы.
18. Оформить отчет.
19. Сдать отчет преподавателю и защитить работу.

3.4 Практическое занятие №4. Анализ и синтез систем методом корневого годографа.

Цель занятия:

Ознакомление с методикой построения корневых годографов для анализа и синтеза линейных (линеаризованных) систем автоматического управления.

Теоретические сведения

Дана модель разомкнутой системы, записанная в виде отношения произведений типовых звеньев:

$$W(s) = \frac{K \cdot s^{\alpha_1} \prod_{j=1}^{\beta_1} (T_j s + 1) \prod_{j=1}^{\gamma_1} (T_j^2 s^2 + 2T_j \zeta_j s + 1)}{s^{\alpha_2} \prod_{i=1}^{\beta_2} (T_i s + 1) \prod_{i=1}^{\gamma_2} (T_i^2 s^2 + 2T_i \zeta_i s + 1)}.$$

Необходимо:

1. Построить корневой годограф.
2. Получить коэффициент усиления $K^{кр}$, при котором система находится на границе устойчивости.
3. Вычислить частоту $\omega^{кр}$, при которой в системе возникают незатухающие колебания.
4. Нанести на ветви корневого годографа значения полюсов замкнутой системы, соответствующие $0.5 \cdot K^{кр}$ и $0.25 \cdot K^{кр}$.
5. Привести выражение для $W_3(s)$ в виде произведения типовых звеньев. Указать значения параметров типовых звеньев.

В ряде случаев, имеющих практическое значение, модель линейной системы управления (СУ) задается в виде структурной схемы, состоящей из типовых звеньев, математическое описание которых задано в операторной форме. Связь между входом и выходом системы задается в виде передаточной функции $W(s)$. В общем виде передаточную функцию $W(s)$ можно представить в виде:

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (1)$$

где s – комплексная переменная, $B(s)$ – полином степени m ; $A(s)$ – полином степени n .

Для физически реализуемых СУ $m \leq n$. Коэффициенты указанных полиномов действительные числа. Применение метода корневого годографа (КГ) обусловлено фундаментальной зависимостью поведения линейной СУ от полюсов и нулей ее передаточной функции. Под полюсами подразумеваются корни полинома – знаменателя $A(s)$, а под нулями – корни полинома числителя $B(s)$. Полином $A(s)$ называется также характеристическим многочленом передаточной функции $W(s)$.

Положение полюсов $W(s)$ на комплексной плоскости определяет

устойчивость СУ, а в совокупности с нулями вид импульсной переходной функции $w(t)$ и переходной функции $h(t)$.

Метод корневого годографа позволяет находить полюса и нули передаточной функции замкнутой системы, располагая полюсами и нулями разомкнутой системы при изменении коэффициента усиления разомкнутой системы k . Метод корневого годографа является также методом проектирования пропорционального устойчивого регулятора.

Передаточную функцию разомкнутой системы $W_p(s)$ представим в виде:

$$W_p(s) = \frac{KC \prod_{j=1}^m (s - s_j^0)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i^*)}, \quad (2)$$

где s_j^0 – нули передаточной функции $W_p(s)$, ($j = \overline{1, m}$); s_i^* – полюса передаточной функции $W_p(s)$, ($i = \overline{1, n}$), n и m – порядки знаменателя и числителя; K – коэффициент усиления разомкнутой системы; C – коэффициент представления.

Передаточная функция разомкнутой системы, как правило, задается в виде отношения произведений передаточных функций стандартных (типовых) звеньев, при описании которых используются выражения трех видов:

$$Ts \quad (3)$$

$$Ts + 1 \quad (4)$$

$$T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1 \quad (5)$$

Здесь T постоянная времени [с].

Если выражения (3), (4), (5) стоят в знаменателе передаточных функций звеньев (в числителе 1), то звенья называются соответственно интегрирующим, апериодическим, колебательным. Для колебательного звена ζ – безразмерный коэффициент затухания ($0 < \zeta < 1$). Если выражения (3), (4), (5) стоят в числителе передаточных функций звеньев (1), то звенья называются соответственно дифференцирующим, форсирующим первого порядка, форсирующим второго порядка.

Для перехода от стандартной формы записи к формуле (2) необходимо вычислить полюса и нули соответствующих типовых звеньев.

Для передаточных функций, использующих выражение (3) –

$$s^{*(0)} = 0, \quad (6)$$

использующих выражение (4) –

$$s^{*(0)} = -\frac{1}{T}, \quad (7)$$

использующих выражение (5) –

$$s_{1,2}^{*(0)} = -\frac{\zeta}{T} \pm \sqrt{\left(\frac{\zeta}{T}\right)^2 - \frac{1}{T^2}}, \quad (8)$$

$$\text{или} \\ s_{1,2}^{*(0)} = -\frac{1}{T}(\zeta \pm i \cos \varphi), \quad (9)$$

где $\varphi = \arcsin \zeta$.

Коэффициент представления C вычисляется по формуле

$$C = \frac{\prod_{j=1}^m T_j^0}{\prod_{i=1}^n T_i^*} \quad (10)$$

Замечание. Для звеньев, использующих выражение (5), соответствующая постоянная времени входит в выражение (10) в квадрате.

При замыкании системы с передаточной функцией $W_p(s)$ единичной обратной связью передаточная функция замкнутой системы $W_3(s)$ принимает вид:

$$W_3(s) = \frac{W_p(s)}{1 \pm W_p(s)}, \quad (11)$$

где знак «+» соответствует отрицательной обратной связи; знак «-» - положительной обратной связи.

Структурная схема системы с обратной связью приведена на рис. 1.

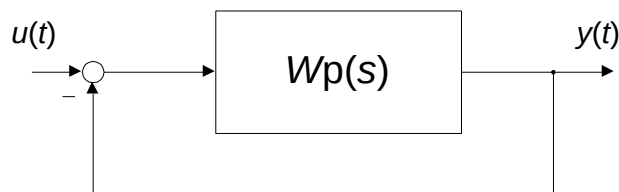


Рисунок 1 - Структурная схема СУ

Из (11) следует, что нули передаточной функции замкнутой системы равны нулям передаточной функции разомкнутой системы.

Задачу можно представить следующим эквивалентным образом. Есть объект управления, определяемый передаточной функцией $W_p(s) = C \prod_{j=1}^m (s - s_j^0) / \prod_{i=1}^n (s - s_i^*)$. Необходимо найти значение параметра пропорционального регулятора (рис. 2.)

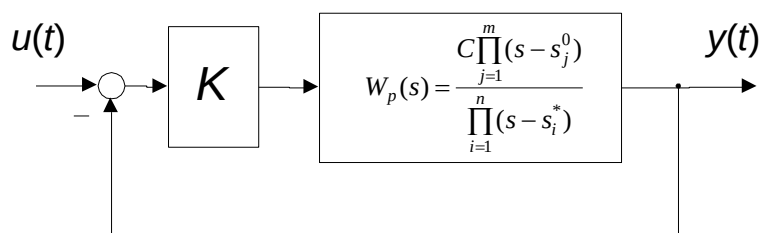


Рисунок 2 - Эквивалентная схема СУ

Для определения полюсов замкнутой системы (рис. 1) необходимо решить уравнение:

$$W_p(s) = -1 \quad (12)$$

Так как $W_p(s)$ является функцией комплексного переменного s , то уравнение (12) распадается на два уравнения:

– уравнение модулей:

$$|W(s)| = 1 \quad (13)$$

– уравнение аргументов:

$$\arg W(s) = \pm(2\nu+1)\pi, \quad \nu=0, 1, 2, \dots \quad (14a)$$

для отрицательной обратной связи и

$$\arg W(s) = \pm 2\pi, \quad \nu=0, 1, 2, \dots \quad (14б)$$

для положительной обратной связи.

Уравнения (14) имеют наглядный геометрический смысл. Если точка s является полюсом замкнутой системы, то, проводя в точку s векторы из всех нулей $W_p(s)$ (обозначим аргументы этих векторов θ_j^0) и векторы из всех полюсов $W_p(s)$ (обозначим аргументы этих векторов θ_i^*), уравнение (14a) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^m \theta_j^0 - \sum_{i=1}^n \theta_i^* = \pm(2\nu+1)\pi, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (15a)$$

а уравнение (14б) в виде:

$$\sum_{j=1}^m \theta_j^0 - \sum_{i=1}^n \theta_i^* = \pm 2\nu\pi, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (15б)$$

Углы θ отсчитываются от положительного направления действительной оси. Знак угла «+» соответствует повороту против часовой стрелки, знак угла «–» соответствует повороту по часовой стрелке.

Геометрическое место точек на комплексной плоскости « s », удовлетворяющее выражениям (15a) и (15б) называется корневым годографом.

Как следует из (15), конфигурация корневого годографа не зависит от коэффициента усиления K , но каждому конкретному значению K однозначно соответствуют точки на корневом годографе.

Для определения этого соответствия достаточно воспользоваться уравнением (13) в следующей интерпретации:

$$\frac{K C \prod_{j=1}^m l_j^0}{\prod_{i=1}^n l_i^*} = 1, \quad (16)$$

где l_j^0 – модуль (длина) вектора, проведенного из j -нуля в точку s КГ; l_i^* – модуль вектора, проведенного из i -полюса в ту же точку s .

Приведем свойства корневых годографов (случай отрицательной обратной связи):

1. Ветви корневого годографа непрерывны и расположены на комплексной плоскости симметрично относительно действительной оси.

2. Число ветвей КГ равно порядку системы n . Ветви начинаются в n полюсах разомкнутой системы при $K = 0$. При возрастании K от 0 до бесконечности полюса замкнутой системы двигаются по ветвям КГ.

3. Отрезки действительной оси, по которым перемещаются действительные полюса замкнутой системы, являются действительными ветвями корневого годографа. Эти ветви находятся в тех частях действительной оси, справа от которых расположено нечетное общее число действительных полюсов и нулей разомкнутой системы.

4. m ветвей КГ при возрастании K от 0 до бесконечности заканчиваются в m нулях $W_p(s)$, а $(n - m)$ ветвей при K , стремящемся к бесконечности, удаляются от полюсов вдоль асимптот.

5. Асимптоты в виде звезды из $(n - m)$ полупрямых выходят из точки с координатой

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^m s_j^0 - \sum_{i=1}^n s_i^*}{n - m}$$

на действительной оси под углами

$$\theta_a = \frac{2\nu + 1}{n - m} \pi, \quad (\nu = \overline{0, n - m - 1})$$

к действительной оси.

6. Угол выхода θ_i^* ветви КГ из полюса s_i^* определяется из уравнения (15а), примененного к данному полюсу. Аналогично определяется угол входа ветви КГ в нуль s_j^0 .

7. При расположении ветвей корневого годографа в левой полуплоскости с СУ устойчива. При пересечении ветвей КГ мнимой оси слева направо СУ становится неустойчивой. Пусть при $K = K^{кр}$ пересечение КГ с мнимой осью произойдет в некоторой точке $i\omega^{кр}$. Назовем это значение коэффициента усиления критическим $K^{кр}$, а величину $\omega^{кр}$ критической угловой частотой, на которой система становится неустойчивой.

Метод КГ позволяет выбрать коэффициент усиления СУ, подобрать расположение полюсов и нулей передаточной функции корректирующих звеньев, определить параметры доминирующих полюсов СУ (ближайших к началу координат плоскости s).

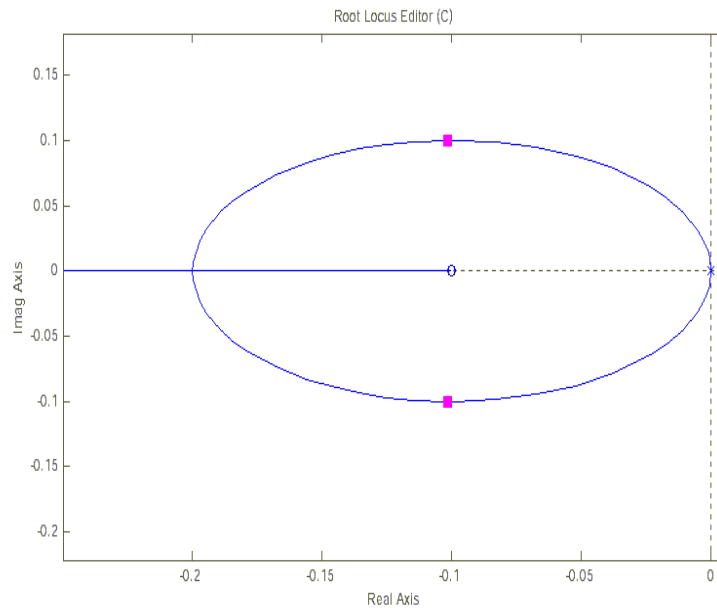
В качестве примеров, приведем КГ для двух систем автоматического управления.

На рисунке 2.3а приведен корневой годограф СУ, передаточная функция разомкнутой системы, которой равна:

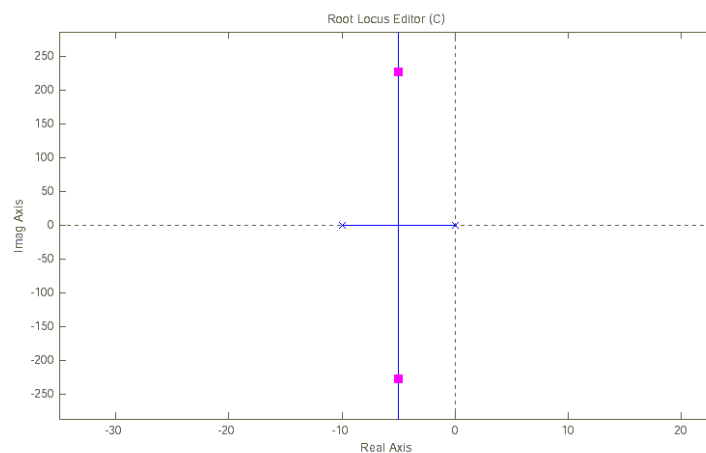
$$W_{p1} = \frac{K(s + 0.1)}{s^2}.$$

Рисунок 2.3б иллюстрирует КГ СУ с передаточной функцией разомкнутой системы вида:

$$W_{p2} = \frac{K}{s(s+10)}.$$



a



б

Рисунок 3 - Примеры корневых годографов

Для выполнения работы используется GUI-интерфейс «SISO-Design Tool» из пакета прикладных программ Control System Toolbox. Графический интерфейс предназначен для анализа и синтеза одномерных линейных (линеаризованных) систем автоматического управления (SISO - Single Input/Single Output).

В Control System Toolbox имеется тип данных, определяющих динамическую систему в виде набора полюсов, нулей и коэффициента усиления передаточной функции. Синтаксис команды, создающий LTI (Linear Time Invariant)-систему в виде объекта ZPK (zero-pole-gain) с одним входом и одним выходом

$$\text{ZPK}([s_1^0, \dots, s_m^0], [s_1^*, \dots, s_n^*], K)$$

$s_1^0, \dots, s_m^0$ – значения нулей системы, $s_1^*, \dots, s_n^*$ – значения полюсов системы, K – коэффициент усиления.

Более естественным является вариант, при котором с помощью функции ZPK создается символьная переменная 's', которая затем используется для определения передаточной функции в виде отношения (2). Например, после выполнения команд

$$s = \text{zpk}('s'); \quad W1 = (s+0.1)/(s^2)$$

произойдет создание переменной W1 типа ZPK, определяющей передаточную функцию вида $W1 = \frac{(s+0.1)}{s^2}$.

Запуск графического интерфейса SISO-Design Tool осуществляется командой Sisotool(W1) или выбором соответствующего пункта в окне «Launch Pad».

Для выполнения заданий необходимо выбрать в меню View пункт Root Locus (корневой годограф), для отображения редактора Root Locus Editor. В правом верхнем углу SISO-Design Tool можно менять тип обратной связи (кнопка «+/-») и структурную схему СУ. В работе предполагается наличие отрицательной обратной связи, и структурной схемы, показанной на рис.1.

Для загрузки данных из рабочего пространства MATLAB необходимо использовать меню «File/Import», в результате которой появляется диалог Import System Data. Необходимо, чтобы в результате импортирования данных получилась рассматриваемая схема СУ (рис. 1). Используя Root Locus Editor и значение коэффициента усиления (здесь C – Current Compensator), выполнить задания работы. Изменение динамических и частотных характеристик замкнутой системы при изменении K можно проследить, используя меню «Tools/Loop Responses».

Методический пример

Пусть необходимо исследовать СУ с передаточной функцией разомкнутой системы:

$$W(s) = \frac{(0.2s+1)}{s(0.1s+1)(0.04s^2 + 2 \cdot 0.2 \cdot 0.3s + 1)}$$

1. Создадим ZPK-объект, найдем полюса и нули разомкнутой системы:

```

>> s = zpk('s'); W = (0.2*s+1)/(s*(0.1*s+1)*(0.2^2*s^2+2*0.2*0.3*s+1))

Zero/pole/gain:
      50 (s+5)
-----
s (s+10) (s^2 + 3s + 25)

>> pole(W)

ans =

      0
 -10.0000
 -1.5000 + 4.7697i
 -1.5000 - 4.7697i

>> zero(W)

ans =

     -5

```

2. Запустим SISO-Design Tool, настроим параметры и импортируем ZPK-объект из рабочего пространства MATLAB (рис. 4). В окне Root Locus Editor интерфейса SISO-Design Tool построится корневой годограф (рис. 5).

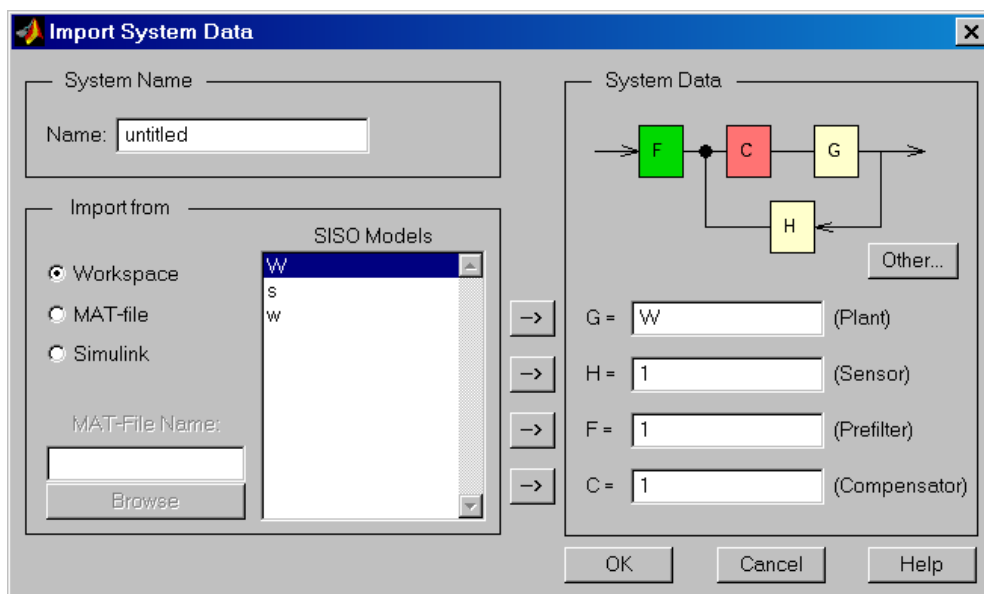


Рисунок 4 - Диалог импортирования данных в SISO-Design Tool

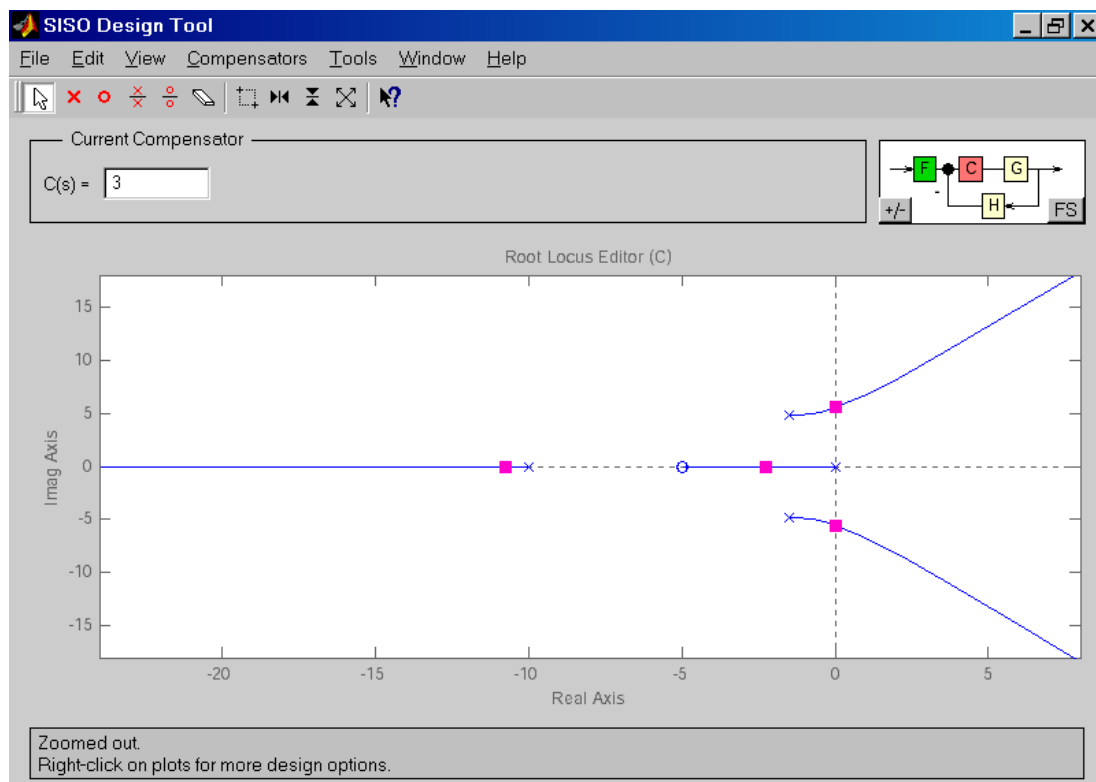


Рисунок 5 - SISO-Design Tool

3. Захватив «мышью», будем передвигать красным курсором по корневому годографу до пересечения ветвей с мнимой осью, определим значение $K^{кр}$ (рис. 6). Передвижение курсора происходит также при вводе значения коэффициента усиления C в соответствующее поле ввода в верхней части GUI-интерфейса.

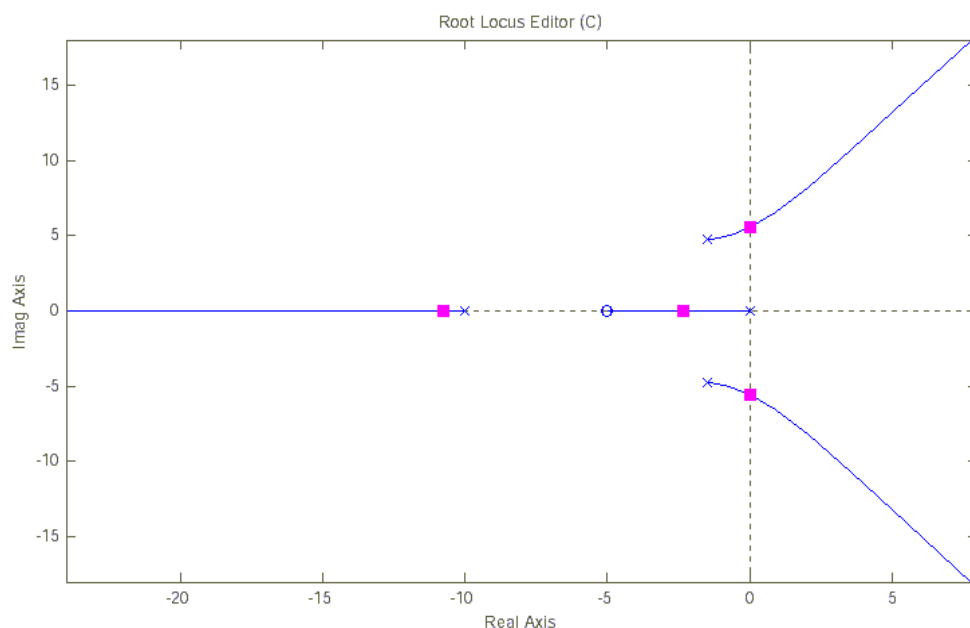


Рисунок 6 - Корневой годограф с нанесенным значением $K^{кр}$

Для рассматриваемого случая $K^{кр} \approx 3$. Значение $\omega^{кр}$ соответствует мнимой координате пересечения КГ мнимой оси. Просмотреть это значение можно в нижней части интерфейса или выбрав меню пункт «View/Closed-Loop Poles» (рис. 7).

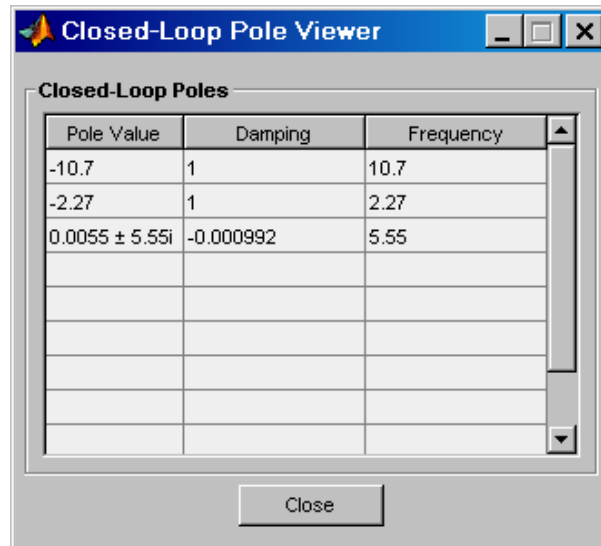
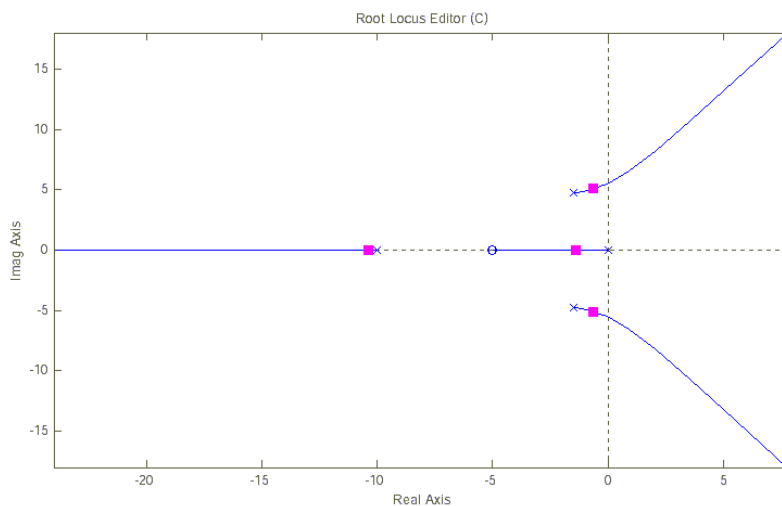
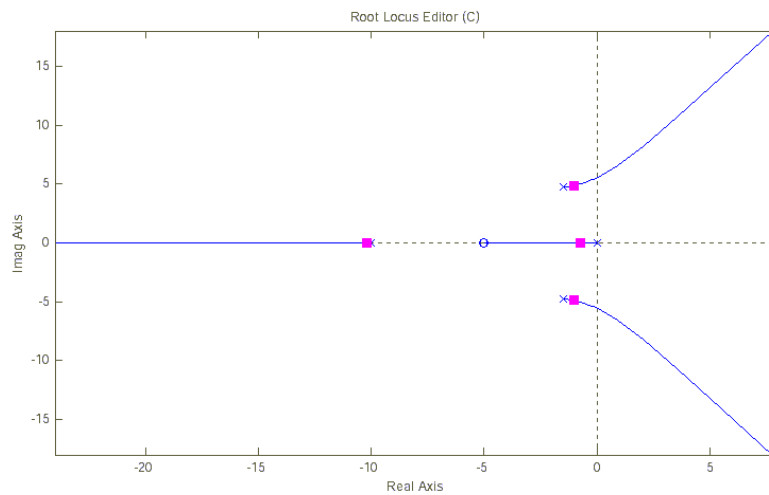


Рисунок 7 - Closed-Loop Poles Viewer

4. Зададим значения $0.5K^{кр}$ и $0.25K^{кр}$ (рис. 8а , 8б) и определим значения полюсов (рис. 2.9а , 2.9б).

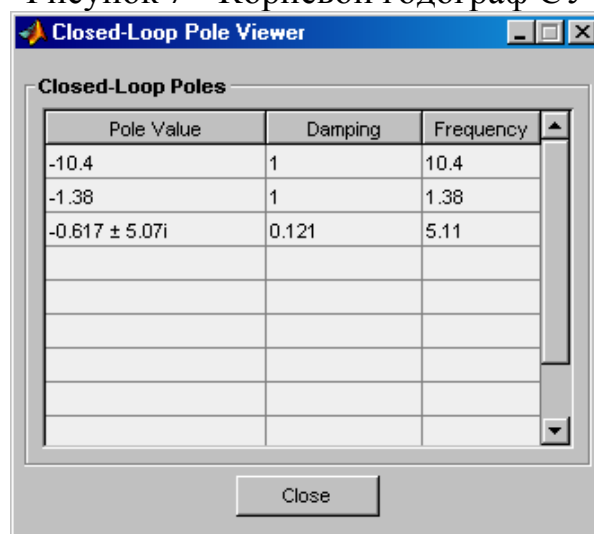


а. $C = 0.5K^{кр}$

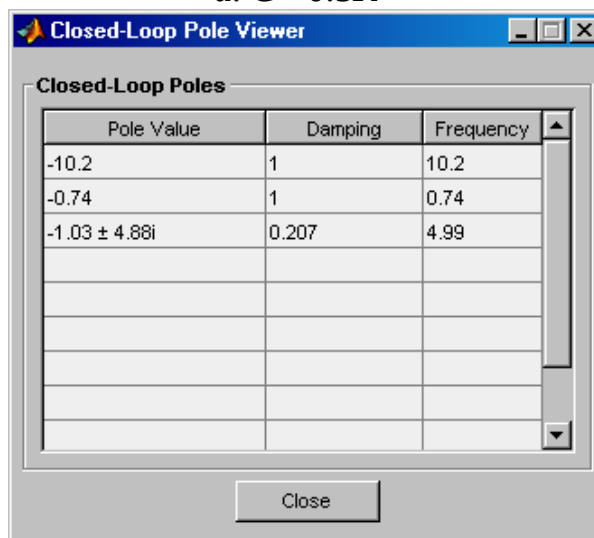


б. $C = 0.25K^{кр}$

Рисунок 7 - Корневой годограф СУ



а. $C = 0.5K^{кр}$



б. $C = 0.25K^{кр}$

Рисунок 9 - Closed-Loop Poles Viewer.

5. Например, для значения $0.5K^{кр}$ построим вид переходной функции замкнутой системы. Для этого необходимо выбрать в меню пункт «Tools/Loop Responses/Plant-Output (Step)». Результат построения переходной функции – рис. 10. Видно, что система устойчива.

Меняя значения C можно увидеть и соответствующее изменение переходной функции или других характеристик системы в динамике. При изменении C происходит автоматическое обновление выбранных характеристик замкнутой системы.

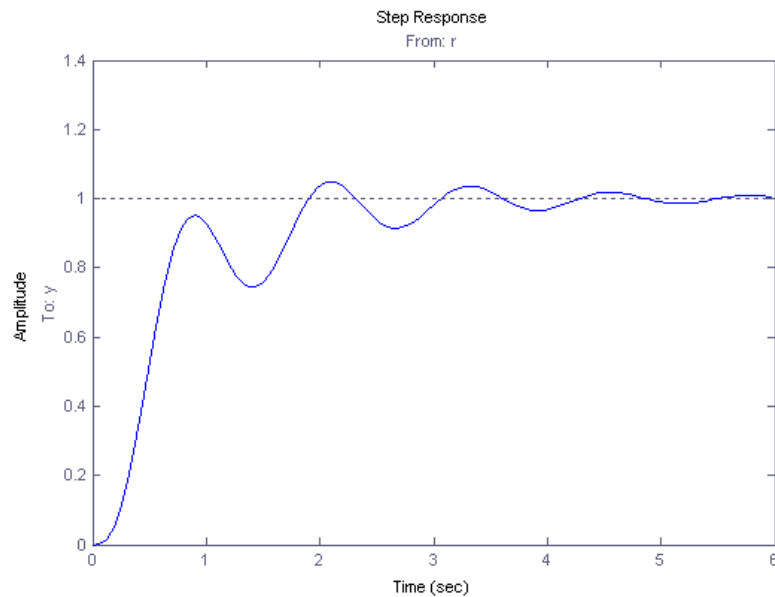


Рисунок 10 - Переходная функция при $C = 0.5K^{кр}$.

6. Расчет и построение корневого годографа можно проводить с использованием команды **rlocus(W)**. Это специальное средство для поддержки процедур проектирования на основе метода корневого годографа подсистемы Root Locus Design GUI. Кроме построения корневого годографа данная подсистема позволяет настраивать параметры корректирующего устройства (компенсатора), контролировать другие динамические характеристики замкнутой системы. В командном окне наберите **rlocus(W)**. Получим

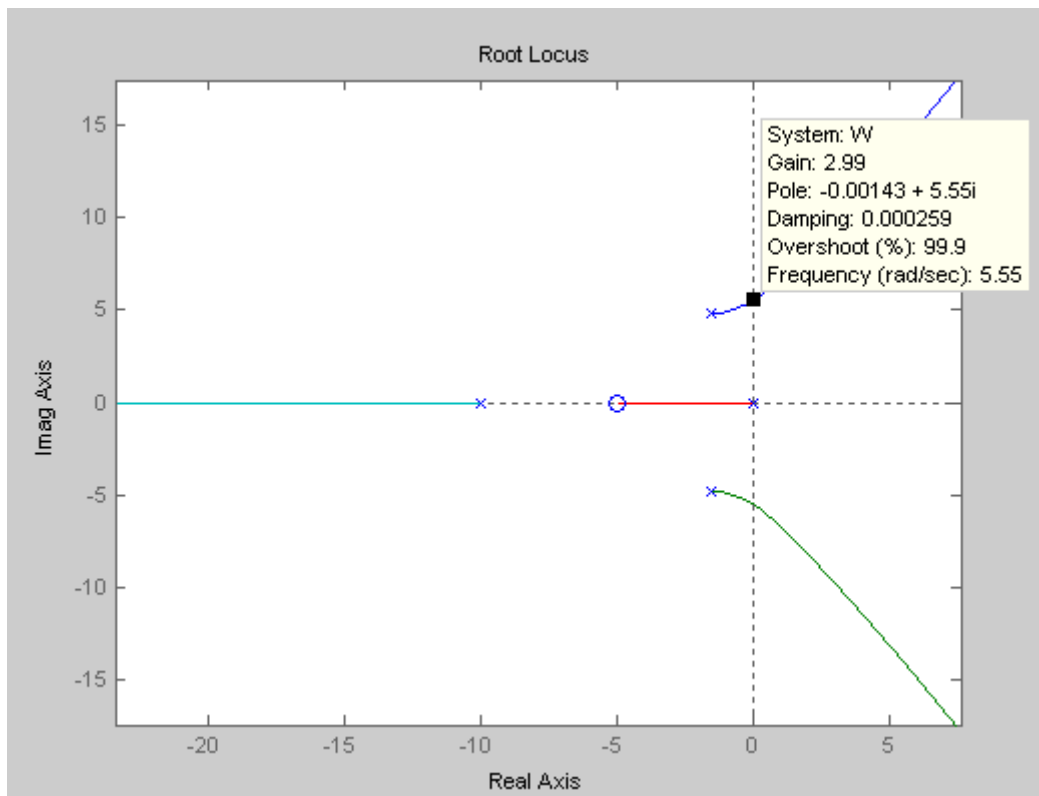


Рисунок 11 - Корневой годограф исследуемой системы

7. Используя команду `glocfind(W)`, возможно выполнить интерактивный выбор коэффициента передачи и указать требуемое расположение полюсов на корневом годографе.

В работе на основе использования метода корневого годографа получены области значений коэффициента усиления, в которых система автоматического управления является устойчивой.

Замечание: Если СУ устойчива (при любом $K > 0$), то ограничиться построением КГ, удаленного от начала координат на удвоенный модуль наиболее удалённого от начала координат полюса разомкнутой системы.

Контрольные вопросы

1. Дать определение передаточной функции, полюсов, нулей, корневого годографа. Назвать типовые звенья СУ. Что такое отрицательная обратная связь?
2. Показать правила построения КГ №№ 1, 2, 3, 5.
3. Показать влияние расположения нуля на поведение ветвей КГ (для примера указанного преподавателем).
4. Показать на конкретном примере, что по мере удаления ветви КГ от начала координат движение ветви в зависимости от K замедляется.
5. Вывести зависимость для малого перемещения ветвей КГ от исходного полюса в зависимости от изменения K .
6. Провести анализ влияния изменения расположения полюса или нуля (по указанию преподавателя) на величины $K^{кр}$ и $\omega^{кр}$.

Варианты заданий

№	Вид передаточной функции	№	Варианты параметров
	$W_p(s)$		Значения T_i [с]
1.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)}$	1.	$T_1 = 0.5, \quad T_2 = 0.1$
		2.	$T_1 = 0.1, \quad T_2 = 0.01$
		3.	$T_1 = 0.1, \quad T_2 = 0.9$
		4.	$T_1 = 0.01, \quad T_2 = 0.1$
		5.	$T_1 = 0.15, \quad T_2 = 0.2$
2.	$\frac{K}{s(T^2s^2 + 2T\zeta s + 1)}$	1.	$T = 0.1, \quad \zeta = 1$
		2.	$T = 0.05, \quad \zeta = 0.707$
		3.	$T = 0.03, \quad \zeta = 0.1$
		4.	$T = 0.08, \quad \zeta = 0.5$
		5.	$T = 0.01, \quad \zeta = 0.15$
3.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)(T_3s + 1)(T_4s + 1)}$	1.	$T_1 = 0.03, \quad T_2 = 0.5,$ $T_3 = 0.1, \quad T_4 = 0.05$
		2.	$T_1 = 0.05, \quad T_2 = 0.4,$ $T_3 = 0.08, \quad T_4 = 0.033$
		3.	$T_1 = 0.2, \quad T_2 = 0.45,$ $T_3 = 0.1, \quad T_4 = 0.05$
		4.	$T_1 = 0.5, \quad T_2 = 0.25,$ $T_3 = 0.1, \quad T_4 = 0.02$
		5.	$T_1 = 0.1, \quad T_2 = 0.25,$ $T_3 = 0.1, \quad T_4 = 0.05$
4.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)(T_3s + 1)(T_4^2s^2 + 2T_4\zeta s + 1)}$	1.	$T_1 = 0.2, \quad T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, \quad T_4 = 0.07, \quad \zeta = 0.5$
		2.	$T_1 = 0.07, \quad T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, \quad T_4 = 0.07, \quad \zeta = 0.5$
		3.	$T_1 = 0.3, \quad T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, \quad T_4 = 0.07, \quad \zeta = 0.5$
		4.	$T_1 = 0.01, \quad T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.1, \quad T_4 = 0.07, \quad \zeta = 0.5$
		5.	$T_1 = 0, \quad T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.1, \quad T_4 = 0.07, \quad \zeta = 0.5$

№	Вид передаточной функции $W_p(s)$	№	Варианты параметров Значения T_i [с]
5.	$\frac{K(T_1^2 s^2 + 2T_1 \zeta_1 s + 1)}{s(T_2^2 s^2 + 2T_2 \zeta_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)^2}$	1.	$T_1 = 0.05, \quad \zeta_1 = 0.3, \quad T_2 = 0.1,$ $\zeta_2 = 0.3, \quad T_3 = T_4 = 0.01$
		2.	$T_1 = 0.05, \quad \zeta_1 = 0.3,$ $T_2 = 0.1, \quad \zeta_2 = 0.3, \quad T_3 = T_4 = 0.05$
		3.	$T_1 = 0.05, \quad \zeta_1 = 0.707,$ $T_2 = 0.07, \quad \zeta_2 = 0.3, \quad T_3 = T_4 = 0.1$
		4.	$T_1 = 0.05, \quad \zeta_1 = 0.707, \quad T_2 = 0.07,$ $\zeta_2 = 0.3, \quad T_3 = T_4 = 0.05$
		5.	$T_1 = 0.05, \quad \zeta_1 = 0.3, \quad T_2 = 0.05,$ $\zeta_2 = 0.3, \quad T_3 = T_4 = 0.1$

Последовательность выполнения работы:

1. Ознакомиться с основными элементами теории метода корневого годографа.
2. В соответствии с заданным вариантом нарисовать структурную схему СУ.
3. Запустить систему MATLAB.
4. Создать zpk-объект, в соответствии с заданным вариантом.
5. Определить значения полюсов и нулей разомкнутой системы $W_p(s)$.
6. Получить динамические характеристики – переходную функцию $h(t)$, импульсную переходную функцию $w(t)$ разомкнутой системы.
7. Запустить SISO-Design Tool и построить КГ.
8. В соответствии с теорией проанализировать расположение ветвей корневого годографа. Объяснить, почему получено именно это количество ветвей КГ, а не другое.
9. Определить условия неустойчивости замкнутой СУ. Определить $K^{кр}$ и $\omega^{кр}$.
10. Определить значения полюсов, соответствующие $0.75K^{кр}$, $0.5K^{кр}$, $0.25K^{кр}$.
11. Найти область значений коэффициента усиления, в которых система автоматического управления является устойчивой.

12. Проанализировать влияние удаленных полюсов и нулей на величины $K^{кр}$ и $\omega^{кр}$.
13. Определить доминирующие полюса корневого годографа.
14. Меняя значения коэффициента усиления, проведите качественный анализ изменения переходных функций, значений ЛАХ и ЛФХ системы.
15. Провести анализ влияния изменения расположения полюса или нуля на величины $K^{кр}$ и $\omega^{кр}$.
16. Выберите наилучшее расположение полюсов для системы Вашего варианта. Обоснуйте свой выбор.
17. Меняя знак обратной связи замкнутой системы на «+» проведите качественный анализ устойчивости системы.
18. При $K=1$ привести выражение для $W_3(s)$ в виде произведения типовых звеньев. Указать значения параметров типовых звеньев.
19. Оформить отчет. Отчет оформляется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению в вузе, и должен содержать:
 - 1) Титульный лист.
 - 2) Наименование и цель работы.
 - 3) Исходные данные варианта задания и структурную схему СУ.
 - 4) Чертежи комплексной плоскости и КГ. Нанести на все ветви значения $K^{кр}$, $0.75K^{кр}$, $0.5K^{кр}$ и $0.25K^{кр}$.
 - 5) Выражение для $W_3(s)$ запишите в виде произведения типовых звеньев с указанными значениями параметров типовых звеньев.
 - 6) Проведите анализ результатов построения КГ.
 - 7) Выводы.

3.5 Практическое занятие №5. Анализ устойчивости одномерных систем. Переходные процессы.

Цель работы:

Используя различные критерии, научиться определять устойчивость одномерных систем.

Теоретические сведения

При изучении различных форм математического описания систем управления большое внимание уделяется алгоритмам решения основной задачи анализа - задачи анализа выходных процессов, т.е. получению количественных характеристик процессов, происходящих в системах, системные характеристики которых используются для выяснения качественных особенностей поведения систем управления.

Рассмотрим одномерную стационарную систему управления, поведение которой описывается дифференциальным уравнением

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_0 x(t) = b_m g^{(m)}(t) + \dots + b_0 g(t) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0', \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$$

где: $g(t)$ и $x(t)$ - входной и выходной сигналы; t_0 - начальный момент времени.

В соответствии с представлением выходного сигнала системы в виде суммы свободного и вынужденного движений: $x(t) = x_c(t) + x_{вын}(t)$ введем следующие понятия устойчивости системы.

Система управления называется устойчивой по начальным данным (асимптотически устойчивой), если при ненулевых ограниченных начальных условиях свободное движение $x_c(t)$ ограничено при всех $t \in [t_0, +\infty)$ и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_c(t) = 0$$

$$t \rightarrow +\infty$$

Система управления называется устойчивой по входу, если при любом ограниченном воздействии $g(t)$ реакция системы $x_{вын}(t)$ является ограниченной в любой момент времени $t \in [t_0, +\infty)$.

Более краткий термин - устойчивая система управления - употребляется, если система устойчива и по входу, и по начальным данным.

Требуется определить, является ли система устойчивой.

1. Для устойчивости системы (1) по начальным данным необходимо и достаточно, чтобы корни λ_i характеристического уравнения

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (2)$$

имели отрицательные действительные части: $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = 1, \dots, n$, то есть располагались в левой полуплоскости комплексной плоскости (рис. 1).

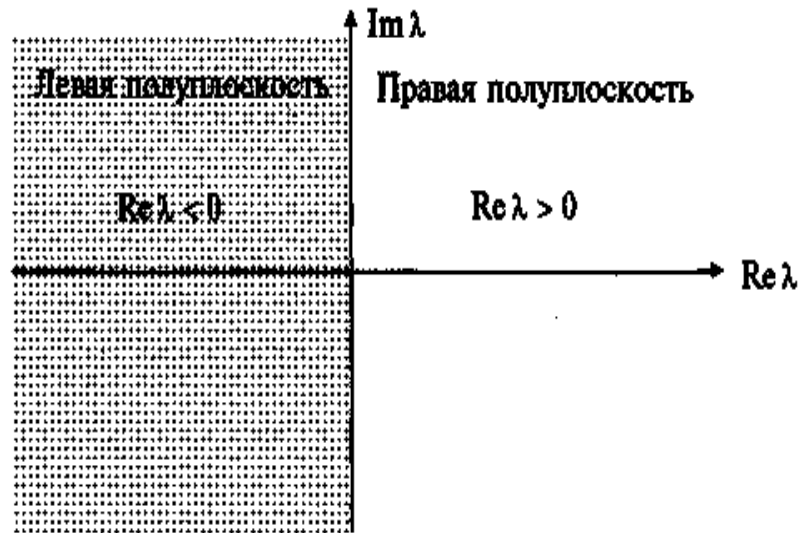


Рисунок 1 – Комплексная плоскость расположения корней характеристического уравнения

2. Для проверки отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения (2) можно использовать критерий Рауса - Гурвица.

Для устойчивости системы (1) по начальным данным необходимо и достаточно, чтобы при $a_n > 0$ угловые миноры Δ_i – матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

были положительны: $\Delta_i > 0, i = 1, \dots, n$, где $\Delta_1 = a_{n-1}$, $\Delta_2 = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{pmatrix}$ и т.д.

При заполнении квадратной порядка n матрицы отсутствующие в уравнении коэффициенты a_{n-i} и a_i при $i > n$ заменяются нулями.

3. Если система устойчива по начальным данным и порядок m дифференциального оператора $M(p) = b_m p^m + \dots + b_0$ правой части уравнения (1) не больше порядка n дифференциального оператора $D(p) = a_n p^n + \dots + a_0$ левой части, то есть $m \leq n$, то система (1) устойчива по входу.

Необходимое условие устойчивости. Если система (1) устойчива, то все коэффициенты характеристического уравнения (1) имеют одинаковые знаки.

З а м е ч а н и я .

1. Первый критерий устойчивости называется прямым, а второй - косвенным, так как в этом случае процедура анализа устойчивости не требует нахождения корней уравнения (1).

2. Коэффициент a_n в уравнении (1) всегда можно сделать положительным, например, умножая уравнение на (-1).

3. Анализ устойчивости элементарных и типовых звеньев систем управления можно также выполнить, пользуясь определениями и сформулированными критериями. Устойчивыми являются усилительное, апериодическое (при $T > 0$) и колебательное (при $T > 0$, $0 < \xi < 1$) звенья. Дифференцирующее звено не устойчиво по входу, а интегрирующее звено не устойчиво и по входу, и по начальным данным.

4. Критерий асимптотической устойчивости является результатом анализа выражения, определяющего свободное движение системы.

Пример 1. Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальным уравнением (апериодическое звено)

$$3x' + x = g.$$

□ Характеристическое уравнение $3\lambda + 1 = 0$ имеет отрицательный корень $\lambda = -\frac{1}{3}$. Кроме того, порядок ($m = 0$) правой части уравнения меньше порядка ($n = 1$) левой части. Согласно первому и третьему критериям система устойчива.

Пример 2. Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$4x' - x = g.$$

□ Характеристическое уравнение $4\lambda - 1 = 0$ имеет положительный корень $\lambda = \frac{1}{4}$.

Согласно первому критерию система не является устойчивой.

Пример 3. Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальным уравнением (колебательное звено)

$$x'' + 2x' + x = g.$$

□ Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ имеет отрицательный (кратный) корень $\lambda = -1$. Кроме того, порядок ($m = 0$) правой части уравнения меньше порядка ($n = 2$) левой части. Согласно первому и третьему критериям система устойчива.

Пример 4. Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$x'' + 2x' - x = g.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$ имеет два корня: $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2} > 0$, $\lambda_2 = -1 - \sqrt{2} < 0$, один из которых положительный. Согласно первому критерию система не является устойчивой.

Пример 5. Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$x''' + 2x'' + 3x' + 4x = g.$$

Здесь $a_3 = 1$, $a_2 = 2$, $a_1 = 3$, $a_0 = 4$. Необходимое условие устойчивости выполняется. Составим матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычислим угловые миноры:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_4 = 8 > 0.$$

Они положительны, следовательно, по второму критерию заключаем, что система является устойчивой по начальным данным. Кроме того, порядок ($m = 0$) правой части уравнения меньше порядка ($n = 3$) левой части. Согласно третьему критерию система устойчива и по входу, т.е. является устойчивой.

Пример 5. При каких значениях параметра k система, описываемая дифференциальным уравнением $x'''' + 4x''' + 2x'' + 3x' + kx = g$, будет устойчивой.

Здесь $a_4 = 1$, $a_3 = 4$, $a_2 = 2$, $a_1 = 3$, $a_0 = k$. Необходимое условие устойчивости выполняется, если $k > 0$. Составим матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

Для удовлетворения всех условий критерия Рауса - Гурвица должны выполняться следующие неравенства:

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 16k > 0,$$

$\Delta_4 = k$, $\Delta_3 > 0$. Отсюда $0 < k < \frac{15}{16}$. Кроме того, порядок ($m = 0$) правой части уравнения меньше порядка ($n = 4$) левой части. Согласно второму и третьему критериям система устойчива при $0 < k < \frac{15}{16}$.

Пример 6. Найти все положительные значения коэффициента усиления k , при которых система, заданная структурной схемой (рис. 2), будет устойчивой

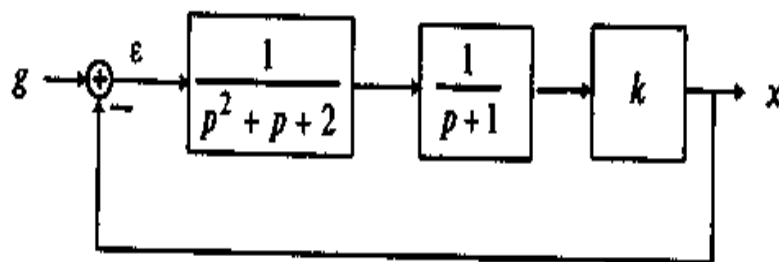


Рисунок 2 – Структурная схема исследуемой системы

По структурной схеме составляем дифференциальное уравнение. Уравнения элементов системы в операторной форме имеют вид

$$x = \frac{k}{(p+1)(p^2 + p + 2)} \varepsilon, \quad \varepsilon = g - x.$$

Исключая ε , получаем уравнение

$$x''' + 2x'' + 3x' + (k+2)x = kg.$$

Составляем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & k+2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & k+2 \end{pmatrix}$$

и вычисляем ее угловые миноры:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = 4 - k, \quad \Delta_3 = \Delta_2(k+2)$$

Из условия их положительности заключаем, что при всех $k \in (0, 4)$ система будет устойчива по начальным данным. Так как порядок ($n = 3$) дифференциального оператора левой части больше порядка ($m = 0$) дифференциального оператора правой части, то при $k \in (0, 4)$ система будет устойчива и по входу.

Варианты заданий

Исследовать устойчивость систем представленных в заданиях первого и второго практических занятиях.

3.6 Практическое занятие №6. Устойчивость многомерных систем.

Цель занятия:

Аналогично одномерным системам рассмотреть качественное поведение многомерных систем, описываемых уравнениями состояния.

Теоретические сведения

Рассматривается линейная многомерная стационарная система, описываемая уравнением состояния:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B g(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

где x — n -мерный вектор состояния; g — r -мерный вектор входных воздействий; t - время; начальный момент времени $t_0 = 0$; x_0 - начальное состояние; A, B - матрицы размера $(n \times n)$, $(n \times r)$ соответственно.

Система (1) называется асимптотически устойчивой, если ее свободное движение $x_c(t)$ (при $g(t) = 0$) ограничено при ограниченных начальных состояниях x_0 и выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_c(t)\| = 0 \quad (2)$$

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

1. Для асимптотической устойчивости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы корни λ_i - характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (3)$$

имели отрицательные действительные части: $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$, т.е. располагались в левой полуплоскости комплексной плоскости.

2. Для проверки отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения (3), можно использовать критерий Рауса-Гурвица.

Необходимое условие устойчивости. Если система (3) асимптотически устойчива, то все коэффициенты характеристического уравнения (3) имеют одинаковые знаки.

Пример 1. Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + 3x_2 + g_1 \end{aligned}$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ имеет действительные корни разных знаков: $\lambda_1 = 5 > 0$, $\lambda_2 = -1 < 0$.

Согласно первому критерию система не является устойчивой.

Пример 2. Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + g_1.$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ имеет отрицательный корень (кратности 2): $\lambda_{1,2} = -1$. Согласно первому критерию система является устойчивой.

Пример 3. Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1 = -x_2 + g_1,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + g_2.$$

Перепишем уравнения системы в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

Найдем корни характеристического уравнения. Получим

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

Отсюда $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Действительная часть корней равна нулю. Согласно первому критерию система не является устойчивой.

Пример 4. При каких положительных значениях параметра a система, описываемая дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + g_1,$$

$$\dot{x}_2 = (a-2)x_2 + g_1 + g_2,$$

$$\dot{x}_3 = -x_2 - 2ax_3 - g_2$$

будет устойчивой?

Составляем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & a-2 \\ 0 & -1 & -2a-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + a)(\lambda^2 + 2a\lambda + a - 2) =$$

$$= -\lambda^3 - 3a\lambda^2 + (-2a^2 - a + 2)\lambda - a^2 + 2a = 0$$

$$\text{Его корни: } \lambda_1 = -a, \quad \lambda_2 = -a - \sqrt{a^2 - a + 2}, \quad \lambda_3 = -a + \sqrt{a^2 - a + 2}$$

действительные.

При $a > 0$ корни λ_1 и λ_2 отрицательны. Из неравенства $\lambda_3 < 0$ находим, что $a > 2$. Следовательно, рассматриваемая система устойчива при $a > 2$.

Проверим этот вывод при $a = 3$, используя критерий Рауса-Гурвица. Характеристическое уравнение имеет вид $-\lambda^3 - 9\lambda^2 - 19\lambda - 3 = 0$. Умножая его на (-1) , получаем коэффициенты: $a_3 = 1$, $a_2 = 9$, $a_1 = 19$, $a_0 = 3$. Составляем матрицу:

$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 1 & 19 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. Затем вычисляем ее угловые миноры: $\Delta_1 = 9 > 0$, $\Delta_2 = 168 > 0$, $\Delta_3 = 504$

> 0 . Согласно второму критерию система устойчива.

Проверим результат при $a = 1$. Характеристическое уравнение имеет вид $-\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Так как коэффициенты этого уравнения имеют разные знаки, то согласно необходимому условию система не является устойчивой.

Варианты заданий

Исследовать на устойчивость представленные в таблице многомерные системы.

№ варианта	Уравнения состояния систем
1	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$,
2	$\dot{x}_1 = -5x_1 + 2x_2 + 3u$ $\dot{x}_2 = 4x_1 + u$,
3	$\dot{x}_1 = 7x_1 - x_2 + 2u$ $\dot{x}_2 = -7x_1 - 2u$,
4	$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 - 5u$ $\dot{x}_2 = -7x_1 - 2u$,
5	$\dot{x}_1 = x_2 + u$, $\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - u$ $y_1 = x_1$,
6	$\dot{x}_1 = 7x_2 - 3u$, $\dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2 + 5u$ $y_1 = x_2$,
7	$\dot{x}_1 = -x_2 + 6u$, $\dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 - 8u$ $y_1 = 3x_1 - 5x_2$,
8	$\dot{x}_1 = x_2 - u$, $\dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_3 + u$ $\dot{x}_3 = -2x_1 - 2x_3 - u$,
9	$\dot{x}_1 = x_1 + 3x_2 - 3u$, $\dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_3 + 2u$ $\dot{x}_3 = -5x_1 + 3x_3 - 4u$,
10	$\dot{x}_1 = -x_1 - 5x_2 + 7u$, $\dot{x}_2 = x_1 - 2x_3 - 9u$ $\dot{x}_3 = x_1 + x_3 - u$,

3.7 Практическое занятие №7. Анализ управляемости и наблюдаемости.

Цель работы:

Исследование критериев управляемости и наблюдаемости динамических систем.

Теоретические сведения

Дана линейная многомерная стационарная система управления, поведение которой описывается уравнениями состояния и выхода:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) &= x_0, \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{1}$$

где x – n -мерный вектор состояния; u – r -мерный вектор управления, $u \in R^r$; t – время, $t \in [t_0, t_1]$ – промежуток времени функционирования системы; y – k -мерный вектор выхода; A , B , C – матрицы размера $(n \times n)$, $(n \times r)$, $(k \times n)$ соответственно; x_0 – начальное состояние.

Система (1) называется вполне **управляемой по состоянию**, если выбором управляющего воздействия $u(t)$ на промежутке времени $[t_0, t_1]$ можно перевести систему из любого начального состояния $x(t_0)$ в произвольное заранее заданное конечное состояние $x(t_1)$.

Система (1) называется **вполне управляемой по выходу**, если выбором управляющего воздействия $u(t)$ на промежутке времени $[t_0, t_1]$ можно перевести систему из любого начального состояния $x(t_0)$ в такое конечное состояние, при котором обеспечивается заранее заданное произвольное значение выхода $y(t_1)$.

Система (1) называется **вполне наблюдаемой**, если по реакции $y(t)$ на выходе системы, на промежутке времени $[t_0, t_1]$ при заданном управляющем воздействии $u(t)$ можно определить начальное состояние $x(t_0)$.

Рангом матрицы A называется наибольший из порядков миноров матрицы A , отличных от нуля. Ранг нулевой матрицы считается равным нулю. Ранг матрицы равен максимальному числу ее строк, образующих линейно независимую систему.

Постановка задачи формулируется следующим образом:

Пусть известны матрицы A, B, C , системы (1). Требуется определить, является ли система вполне управляемой и наблюдаемой.

Критерий управляемости по состоянию. Для того чтобы система (1) была вполне управляемой по состоянию, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости по состоянию $W = (B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B)$ равнялся размерности вектора состояния: $\text{rang} W = n$.

Критерий управляемости по выходу. Для того чтобы система (1) была вполне управляемой по выходу, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости по выходу $P = (CB \ CAB \ CA^2B \ \dots \ CA^{n-1}B)$ равнялся размерности вектора выхода $\text{rang} P = k$.

Критерий наблюдаемости. Для того чтобы система (1) была вполне наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы наблюдаемости $Q = (C^T \ A^T C^T \ (A^T)^2 C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T)$ равнялся размерности вектора состояния $\text{rang} Q = n$.

Алгоритм решения задачи

1. В уравнениях состояния и выхода выделить матрицы A, B, C .
2. Составить матрицу W управляемости по состоянию, матрицу P управляемости по выходу и матрицу наблюдаемости Q .
3. Подсчитать ранги матриц и сделать вывод об управляемости и наблюдаемости на основе соответствующего критерия.

Умножение матриц: Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Функция Грамма. Функция `gram` позволяет вычислить функции Грамма для оценки управляемости и наблюдаемости системы, называемые соответственно грамианами управляемости и наблюдаемости. Грамианы применяются для исследования свойств управляемости и наблюдаемости моделей систем, заданных в пространстве состояний, а также для построения их минимальных реализаций. Они более удобны для вычислений, чем матрицы управляемости и наблюдаемости (матрица A модели должна быть устойчивой).

$$G_C = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

Для непрерывной ss-модели грамиан управляемости определяется интегралом, а грамиан наблюдаемости — интегралом

$$G_0 = \int_0^{\infty} e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} d\tau$$

Для дискретных моделей аналогами грамианов управляемости и наблюдаемости служат выражения

$$G_C = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B B^T (A^T)^k$$

Грамиан управляемости положительно определен тогда и только тогда, когда пара матриц $\{A, B\}$ является управляемой. Аналогично грамиан наблюдаемости положительно определен тогда и только тогда, когда пара матриц $\{A, C\}$ является наблюдаемой.

$$G_0 = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k C^T C A^k$$

Функция $G_C = \text{gram}(\text{sys}, 'c')$ вычисляет грамиан управляемости для непрерывной или дискретной ss-модели.

Функция $G_0 = \text{gram}(\text{sys}, 'o')$ вычисляет грамиан наблюдаемости для

непрерывной или дискретной ss-модели.

Функция `obsv` формирует матрицу наблюдаемости для модели в пространстве состояний:

$$Ob = \text{obsv}(A, C)$$

Система является наблюдаемой, если матрица наблюдаемости имеет полный ранг. Возвращаемая величина `Ob` — матрица наблюдаемости, имеющая p строк (p — количество выходов) и n столбцов и описываемая соотношением

$$Ob = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Каноническая форма наблюдаемости. Если матрица наблюдаемости для пары $\{A, C\}$ имеет ранг $r < n$, где n — порядок матрицы A , то существует преобразование подобия вида

$$\bar{A} = TAT^T, \bar{B} = TB, \bar{C} = CT^T,$$

где T — унитарная матрица, при котором преобразованная система имеет блочно-треугольную форму с ненаблюдаемыми модами, расположенными в верхнем левом углу:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{no} & A_{12} \\ 0 & A_0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B_{no} \\ B_0 \end{bmatrix}, \bar{C} = [0 \quad C_0].$$

Такая форма называется канонической формой наблюдаемости. Пара матриц $\{A, C\}$ является наблюдаемой, так что справедливо соотношение

$$C_0(pI - A_0)^{-1}B_0 = C(pI - A)^{-1}B,$$

то есть передаточная функция всей системы совпадает с передаточной функцией ее наблюдаемой части, а все моды, соответствующие собственным значениям матрицы A являются ненаблюдаемыми.

Функция `[Abar, Bbar, Cbar, T, k]=ctrbf(A,B,C)` преобразует ss-модель, описываемую тройкой матриц (A, B, C) , в каноническую форму наблюдаемости $[Abar, Bbar, Cbar]$. Матрица T описывает преобразование подобия, а элементы вектора k указывают количество наблюдаемых мод, выделенных на каждом шаге расчета матрицы преобразования. Число ненулевых элементов вектора k

показывает, сколько итераций потребовалось для расчета матрицы T , а величина $\text{sum}(k)$ указывает число канонических переменных состояния, соответствующих наблюдаемой части матрицы A_{bar} . Используемые функции и их описание представлены в таблице:

Функции	Описание
$\text{Ctrb}(A,B)$	Формирует матрицу управляемости для модели в пространстве состояний
$[A_{\text{bar}}, B_{\text{bar}}, C_{\text{bar}}] = \text{Ctrbf}(A,B,C)$	Формирует каноническую форму управляемости
$\text{Gram}(\text{sys}, 'c')$	Вычисляет грамиан управляемости для непрерывной или дискретной ss-модели
$\text{Gram}(\text{sys}, 'o')$	Вычисляет грамиан наблюдаемости для непрерывной или дискретной ss-модели
$\text{obsv}(A, C)$	Формирует матрицу наблюдаемости для модели в пространстве состояний
$\text{obsvf}(A, C)$	Формирует каноническую форму матрицы наблюдаемости для модели в пространстве состояний
$\text{Rank}(A)$	Формирует ранг матрицы A

Методический пример

Исследовать управляемость и наблюдаемость системы:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -3x_1 + 5x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 2u, \quad y = x_1 - x_2\end{aligned}$$

1. В уравнениях состояния и выхода выделим матрицы A , B , C :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ -1),$$

у которых ранги соответственно равны: $n = 2$, $r = 1$, $k = 1$.

2. Составляем матрицы управляемости и наблюдаемости:

$$\begin{aligned}W &= (B \ AB) = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \\ P &= (CB \ CAB) = \begin{pmatrix} -1 & 5 \end{pmatrix}, \\ Q &= \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. Определяем ранги матриц: $\text{rang } W = 2 = n$, $\text{rang } P = 1 = k$, $\text{rang } Q = 1 \neq n$. Согласно критериям управляемости и наблюдаемости система вполне

управляема по состоянию и по выходу, но не является вполне наблюдаемой.

Матрица A – коэффициенты при x_1 и x_2 в уравнении $\dot{x}_1$ – строка 1, коэффициенты при x_1 и x_2 в уравнении $\dot{x}_2$ – строка 2. Т.к. размерность 2×2 , значит $n = 2$

Матрица B – коэффициенты при U в уравнении $\dot{x}_1$ – строка 1, – коэффициенты при U в уравнении $\dot{x}_2$ – строка 2. Т.к. размерность 1×1 , значит $r = 1$.

Матрица C – коэффициенты при x_1 и x_2 в уравнении Y . Т.к. размерность 1×1 , значит $k = 1$.

1. Зададим матрицы A , B , C в среде MatLab:

```
>> A=[-3 5;2 0]
```

```
A =
```

```
    -3     5  
     2     0
```

```
>> B=[1;2]
```

```
B =
```

```
     1  
     2
```

```
>> C=[1 -1]
```

```
C =
```

```
     1    -1
```

```
>>
```

2. Критерий управляемости по состоянию. Задаем в MatLab $W = (B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B)$ и находим ранг получившейся матрицы:


```
>> Co=ctrb(A,B)
```

```
Co =
```

```
    1    7  
    2    2
```

```
>> rank(Co)
```

```
ans =
```

```
    2
```

3. Критерий управляемости по выходу. Задаем в MatLab $P = (CB \quad CAB \quad CA^2B \quad \dots \quad CA^{n-1}B)$ и находим ранг получившейся матрицы:

```
>> [Abar, Bbar, Cbar, T, r]=ctrbf(A,B,C)
```

```
Abar =
```

```
   -5.2000    2.4000  
   -0.6000    2.2000
```

```
Bbar =
```

```
    0.0000  
   -2.2361
```

```
Cbar =
```

```
   -1.3416    0.4472
```

```
T =
```

```
    -0.8944    0.4472  
    -0.4472   -0.8944
```

```
r =
```

```
    1    1
```

Смотрим размерность r , она равна 1×1 , т.е. $\text{rang } P = 1$.

3. Критерий наблюдаемости. Задаем в MatLab $Q = (C^T \ A^T C^T \ (A^T)^2 C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T)$ и находим ранг получившейся матрицы:

```
>> Ob=obsv(A,C)
```

```
Ob =
```

```
    1    -1  
   -5     5
```

```
>> rank(Ob)
```

```
ans =
```

```
    1
```

Выводы:

Так как $\text{rang } W = n$, система управляема по состоянию. Ввиду того, что $\text{rang } P = k$, система управляема по выходу. $\text{Rang } Q \neq n$, поэтому система не наблюдаема.

Контрольные вопросы

1. Какая система называется вполне управляемой по состоянию?
2. Определение вполне управляемой по входу системы.
3. Какая система называется вполне наблюдаемой?
4. Критерии управляемости системы по состоянию и по входу.
5. Аналитическая запись матрицы наблюдаемости.
6. Основные этапы решения задачи по оценки управляемости системы.
7. Определение грамиана управляемости и его расчет с использованием функций MatLab.
8. Каноническая форма наблюдаемости.

Варианты заданий

Определить управляемость и наблюдаемость систем, используя критерии управляемости и наблюдаемости (аналитическим способом), а также используя среду Matlab.

№ варианта	Уравнения состояния и выхода
1	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u, \quad y = x_1$
2	$\dot{x}_1 = -5x_1 + 2x_2 + 3u$ $\dot{x}_2 = 4x_1 + u, \quad y = 5x_1 - 3x_2$
3	$\dot{x}_1 = 7x_1 - x_2 + 2u$ $\dot{x}_2 = -7x_1 - 2u, \quad y = -x_1 + 5x_2$
4	$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 - 5u$ $\dot{x}_2 = -7x_1 - 2u, \quad y = -x_1 + 5x_2$
5	$\dot{x}_1 = x_2 + u, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - u$ $y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1 + x_2$
6	$\dot{x}_1 = 7x_2 - 3u, \quad \dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2 + 5u$ $y_1 = x_2, \quad y_2 = 3x_1 + 2x_2$
7	$\dot{x}_1 = -x_2 + 6u, \quad \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 - 8u$ $y_1 = 3x_1 - 5x_2, \quad y_2 = x_1 + 8x_2$
8	$\dot{x}_1 = x_2 - u, \quad \dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_3 + u$ $\dot{x}_3 = -2x_1 - 2x_3 - u, \quad y = -2x_1 + x_2$
9	$\dot{x}_1 = x_1 + 3x_2 - 3u, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_3 + 2u$ $\dot{x}_3 = -5x_1 + 3x_3 - 4u, \quad y = -7x_1 - 2x_2$
10	$\dot{x}_1 = -x_1 - 5x_2 + 7u, \quad \dot{x}_2 = x_1 - 2x_3 - 9u$ $\dot{x}_3 = x_1 + x_3 - u, \quad y = -6x_1 + x_2$

3.8 Практическое занятие №8. Имитационная модель системы формирования циклов.

Цель занятия:

Исследовать причинно-следственный механизм возникновения циклов и кризисов перепроизводства в экономической системе.

Теоретические сведения

Мировую экономику и экономику отдельных стран периодически потрясают кризисы или циклы роста и падений. В учебниках обычно дается описание характеристик и показателей циклов. Фиксируются события, подтолкнувшие к кризису, но причины кризисов остаются не раскрытыми.

Марксизм-ленинизм утверждал, что причина кризисов в капиталистической конкуренции и хаосе. Утверждалось, что с переходом власти в руки рабочих и крестьян кризисы исчезнут. Но кризисы перепроизводства в отраслях не исчезли – они покрывались государством скрытием информации и большими затратами на периодическое уничтожение и восстановление предприятий.

Например, в 1962 году выпускали шесть миллионов швейных машин, а через год только один миллион. Шесть заводов уничтожили из-за перепроизводства. То же было с комбайнами, литейным оборудованием и др. Даже по очковым линзам, где мода и технология не менялись 300 лет, каждые 10 лет создавались и уничтожались заводы и цеха. На этих заводах менялся только привод станков для шлифовки линз: ручной, ножной, конский, водяной, паровой, электрический.

Причина циклов и кризисов остается во многом не ясной. В этом проблема. Имея Simulink с типовыми библиотечными блоками, мы можем не выписывать математическую модель – каждая элементарная модель уже имеет программу, привязанную к соответствующему блоку. Мы работаем с блоками, а экономисты-аналитики могут по нашей схеме составить уравнения для аналитических решений и вручную или в системе Control System Toolbox оценить, например, запасы устойчивости или необходимые параметры и алгоритмы стабилизации экономической системы.

Методический пример

Математическая модель. Блок-схемная имитационная модель Simulink представлена на рисунке 1. Предположим, что промышленность выпускает оборудование в виде автомобилей.

Модель потребности в парке оборудования на схеме задается слева сверху блоком констант и интегратором. Константа задает начальное значение необходимого количества автомобилей. Блок интегратора необходим для имитации процесса постоянного роста потребности в автомобилях. На выходе блоков линейная во времени переменная потребности населения в парке оборудования (автомобилей) с именем NeedPrk (необходимый парк). Ниже потребностей расположены четыре блока, отражающие движение парка

оборудования: поступление оборудования в эксплуатацию от производителей (переменная Prdct), накопление их в парке интегратором с выходной переменной InPrk (в парке). Блоки срока службы и выбытие задают переменную OutPrk (поток выбытия оборудования по ветхости, износу или моральному старению).

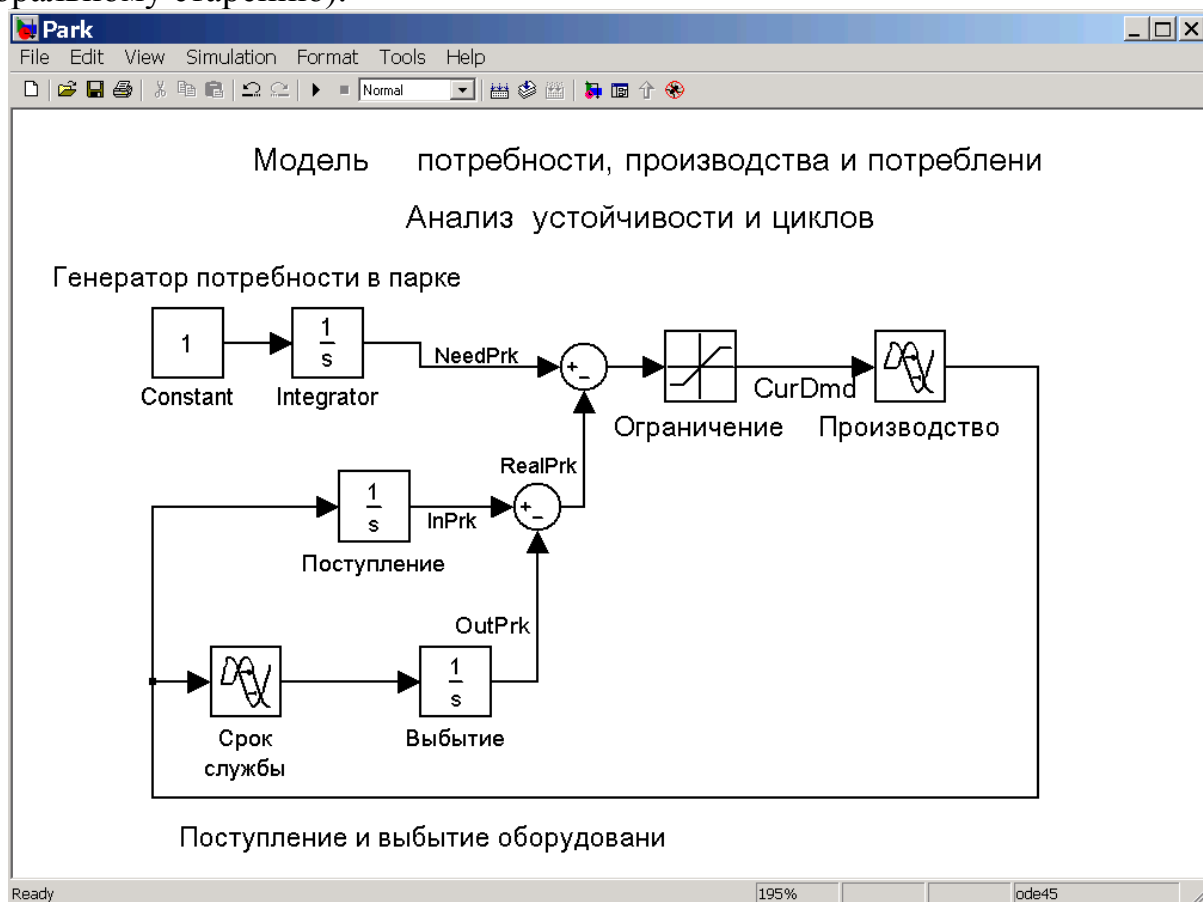


Рисунок 1 - Модель для анализа циклов перепроизводства

Таблица 1 – Краткие характеристики модели.

Переменные и блоки модели	Название	Значение	Пояснения
Constant	Начальное значение генератора потребности в парке	1	Одна тыс. автомобилей
NeedPrk	Необходимый парк машин	Динамич	Текущее значение потребности в автомобилях
Prdct	Продукт	Динамич	Поступление автомобилей в эксплуатацию от производителей
InPrk	Накопление автомобилей	Динамич	
OutPrk	Выбытие автомобилей	Динамич	
RealPrk	Реальное количество автомобилей	Динамич	
CurDmd	Текущий спрос	≥ 0	
Производство	Блок создания временного лага	1	Лаг между производством и поступлением оборудования в

			эксплуатацию
Срок службы	Блок установки срока службы	6	

Нижний круглый блок вычитает из поступившего в парк оборудование выбывшее, создавая переменную RealPrk (реальное количество товаров, находящихся в эксплуатации). Верхний круглый блок сумматора вычитает из необходимого парка наличный парк, создавая переменную текущего спроса CurDmd. Блоком Saturation (ограничитель) она обрезается снизу, реализуя традиционную для экономических задач неотрицательность переменных.

Блок производства с его системой управления задаем в виде грубейшей модели. Производство выполняет заказ полностью, но с фиксированным сроком исполнения, задаваемым блоком задержки (лаг исполнения заказа).

Для управления экспериментами модель насыщается блоками Scope отображения информации о показателях процессов и линиями, питающими блоки информацией. Эта инфраструктура эксперимента затуманивает модель, затрудняет мышление экономиста, но приходится терпеть. Полная схема модели представлена на рисунке 2.

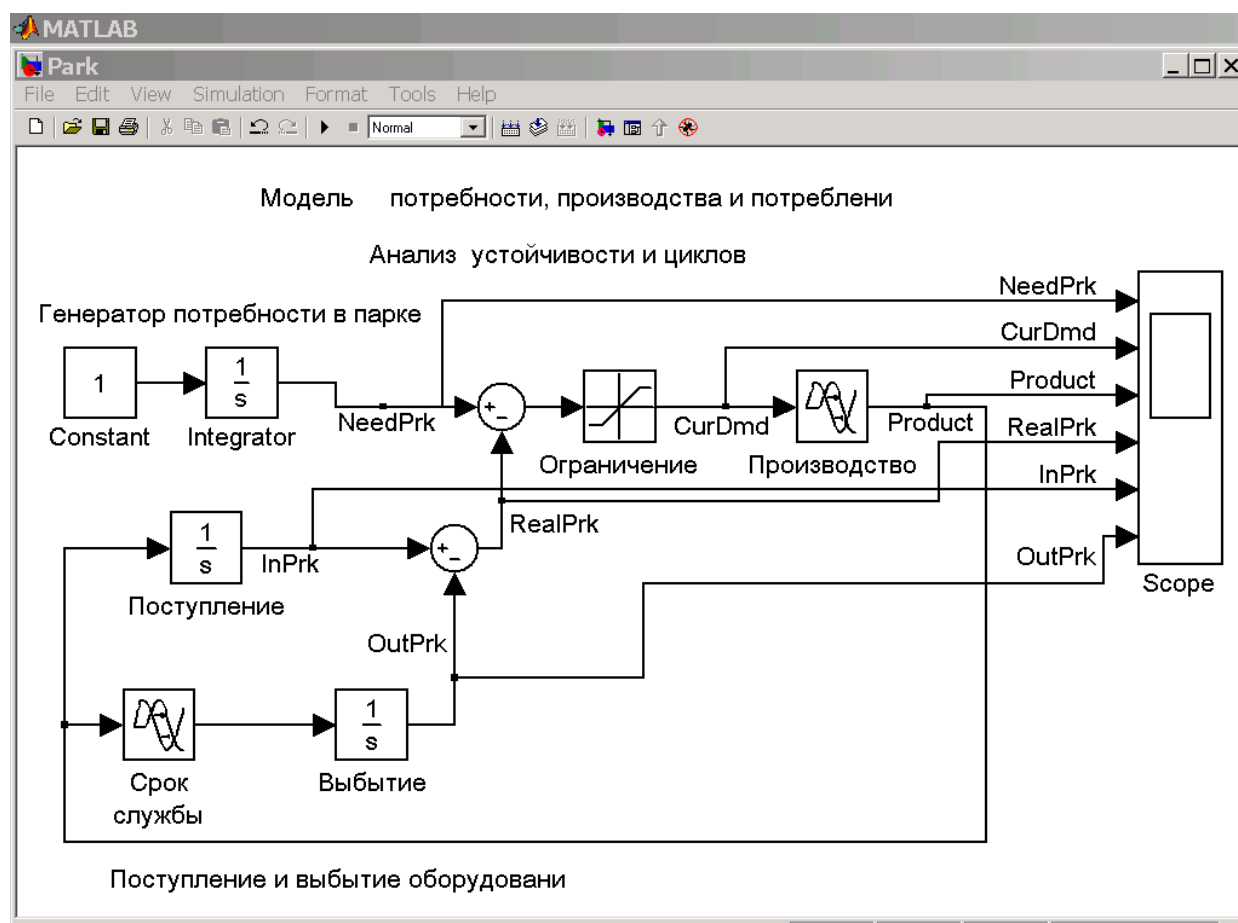


Рисунок 2 - Simulink модель анализа циклов и кризисов с блоками графопостроителей Scope

Динамика основных переменных модели представлена на рисунке 3. Потребность в автомобилях постоянно увеличивается, по линейному закону, что отражено на графике рисунка 3 переменной NeedPrk. Отчетливо на

графиках видны лаги производства и срока службы оборудования, которые в конечном итоге приводят к возникновению колебаний в конечной продукции, информация о которой содержится в переменной Product.

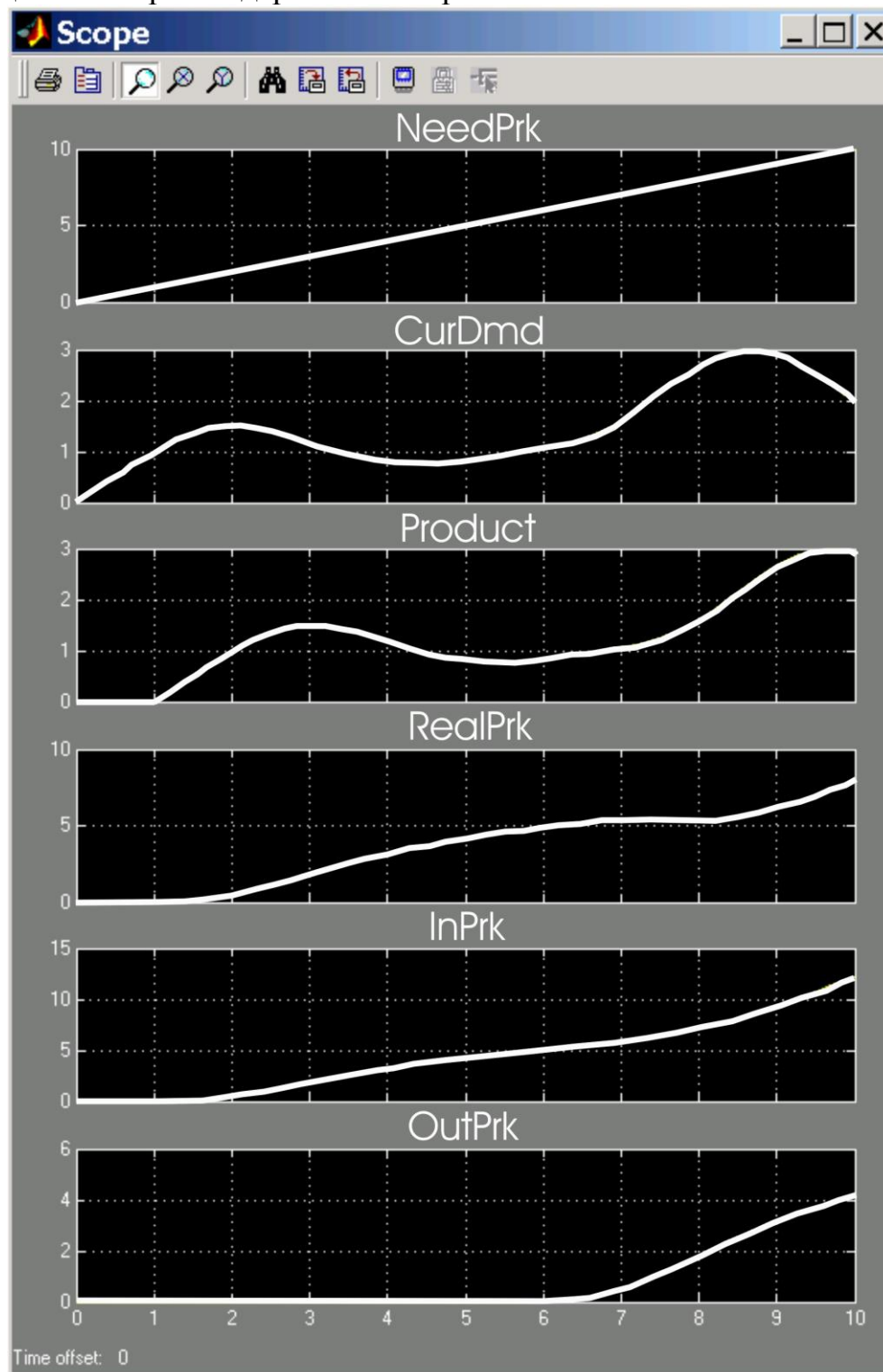


Рисунок 3 - Результат имитационного моделирования

В данной модели смена параметров блоков производится вручную. Диалоговое окно настройки параметров вызывается двойным щелчком мыши на блоке.

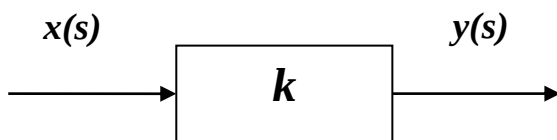
Контрольные вопросы

1. Роль математического аппарата в экономических исследованиях.
2. Имитационное моделирование как средство разрешения конфликта между математиком и экономистом.
3. Информативность имитационной модели.
4. Взаимодействие заказчика и разработчика имитационной модели.
5. Достоинства и недостатки имитационных моделей.
6. Этапы процесса получения оптимального управленческого решения методами адаптивно-имитационного моделирования.
7. Возможности адаптивно-имитационных моделей.
8. Языки программирования имитационных процессов.
9. Классообразующие признаки специализированных языков имитационного моделирования.
10. Программный комплекс MATLAB/Simulink.

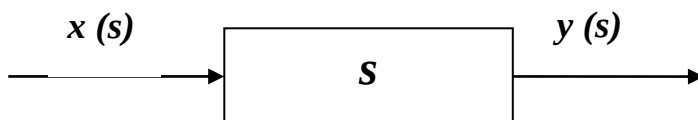
Варианты заданий

Построить с использованием Simulink и провести исследование следующих объектов имитационного моделирования:

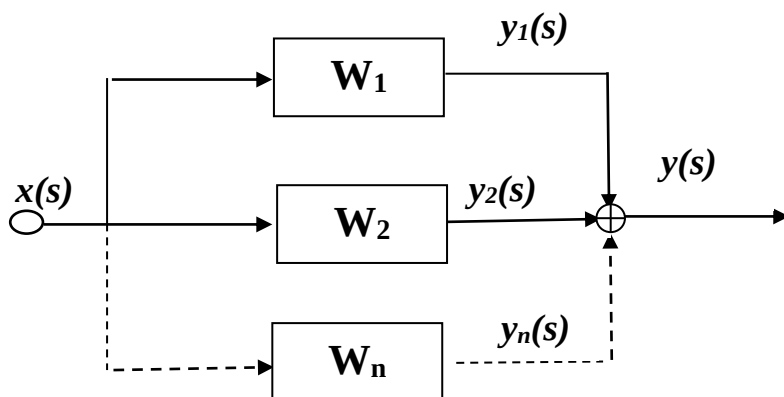
1. Блок – схема пропорционального звена.



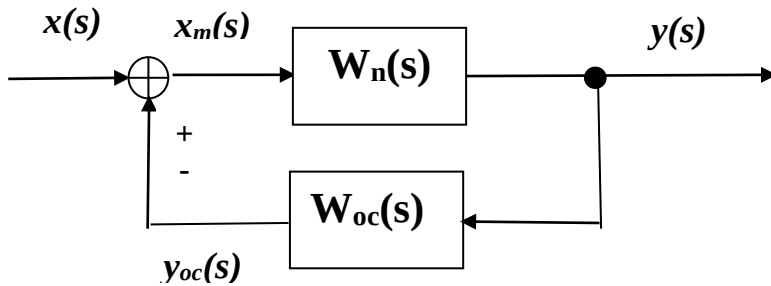
2. Блок – схема операции дифференцирования.



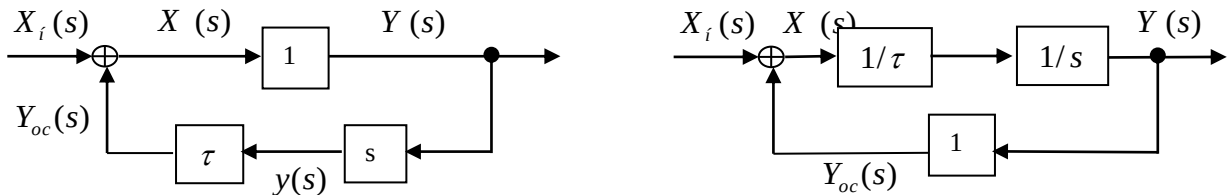
3. Блок – схема с параллельным соединением операторов.



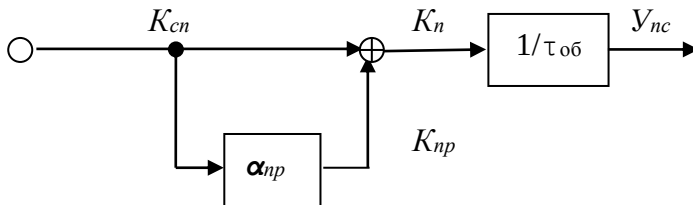
4. Блок – схема с обратной связью выхода с входом.



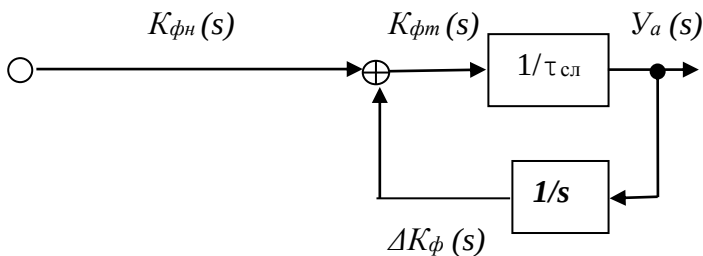
5. Блок-схемы операции с непрерывным запаздыванием.



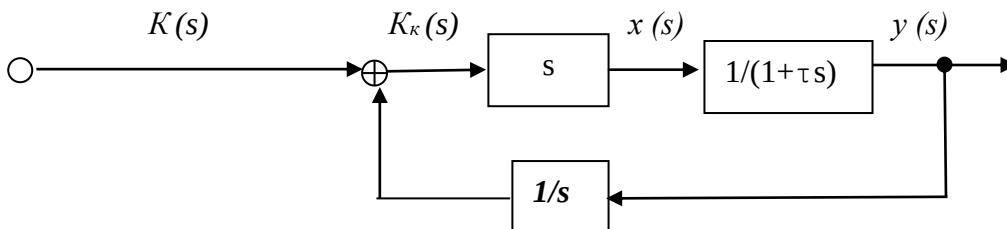
6. Блок-схема преобразования капитала предприятия в поток перенесенной стоимости y_{nc} .



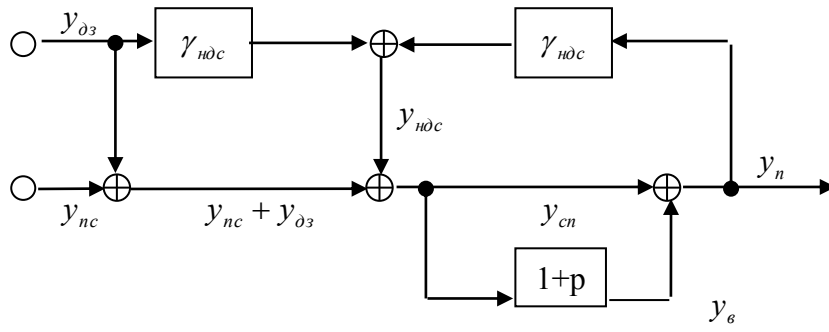
7. Блок-схема амортизации пропорционально начальной величине основного капитала.



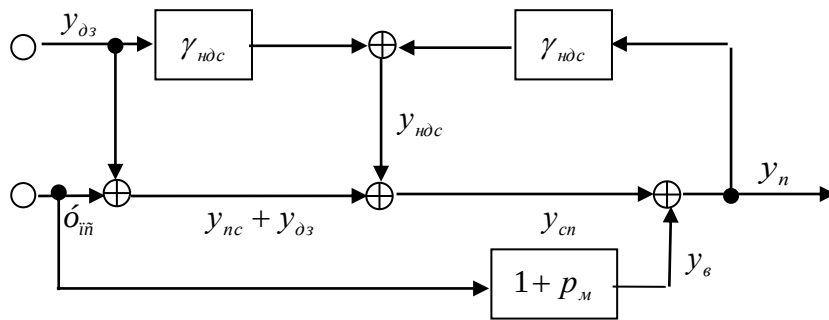
8. Блок-схема оборачиваемости капитала.



9. Модель налогообложения с рентабельностью затрат.



10. Модель налогообложения с маржинальной рентабельностью.



4. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

1. Волкова В.Н., Денисов А.А Основы теории систем и системный анализ. – СпБ.: ГТУ, 2006. -505с.
2. Анфилатов В.С., Емельянов А.А., Кукушкин А.А. Системный анализ в управлении. Учеб. Пособие, -М.: Финансы и статистика, 2007. -368 с.
3. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления: Учеб. для вузов. –М.: Высш. шк., 2005. -614с.