

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические указания по выполнению практических работ

Направление подготовки 03.03.02 Физика

Направленность (профиль)

«Медицинская физика»

Ставрополь
2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ТЕМА 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ.....	4
ТЕМА 2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО	6
ТЕМА 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.....	9
ТЕМА 4. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО	11
ТЕМА 5. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ РЯДЫ	12
ТЕМА 6. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА	15
ТЕМА 7. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ.....	17
ТЕМА 8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ.....	18
ТЕМА 9. ПРИЛОЖЕНИЕ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ	20
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ	23

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины является формирование общепрофессиональных компетенций будущего академического бакалавра по направлению подготовки 03.03.02 – Физика.

Реализация цели определяет следующие задачи освоения дисциплины: формирование систематизированных знаний в области комплексного анализа; расширение на комплексную область основных понятий, используемых в действительном анализе: функция, предел, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость; ознакомить студентов с практическими приложениями методов комплексного анализа в различных разделах математики.

Дисциплина является базовой в первом блоке дисциплин. Ее освоение происходит в 4 семестре.

Для освоения дисциплины «Теория функций комплексного переменного» студент должен владеть основными понятиями математического анализа (предел, непрерывность функций, производная, интеграл Римана, функциональные последовательности и ряды), основными понятиями алгебры и геометрии.

ПЛАНЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

ТЕМА 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Цель: закрепить основные понятия комплексных чисел и отрабатывать навыки действий над комплексными числами.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы:

1. Основные понятия комплексного числа.
2. Формы записи комплексных чисел.
3. Действия над комплексными числами.

При изучении данной темы необходимо обратить внимание на следующие моменты.

Комплексным числом называется упорядоченная пара действительных чисел $z = (x, y)$. Первая компонента x этой пары называется действительной частью, а вторая компонента y - мнимой частью (или коэффициентом при мнимой части) комплексного числа z , и для них приняты обозначения: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

При $y = 0$ комплексное число $z = (x, 0)$ отождествляется с действительным числом x . При $x = 0$ комплексное число $z = (0, y)$ называется мнимым. Числа $(0, 0) = 0$, $(1, 0) = 1$ и $(0, 1) = i$ называются нулём, единицей и мнимой единицей соответственно.

По определению, комплексные числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ равны, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, а их *произведением* - комплексное число $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Непосредственная проверка показывает, что введённые операции коммутативны: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 z_2 = z_2 z_1$. Для произвольных трёх комплексных чисел z_1, z_2, z_3 справедливы равенства $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$, т.е. выполняется закон ассоциативности соответственно по отношению к сложению и умножению. Операции подчинены закону дистрибутивности: $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

Из определений операций сложения и умножения следуют равенства $z + 0 = z$, $z \cdot 0 = 0$, $z \cdot 1 = z$, $i \cdot i = i^2 = -1$.

На основе легко проверяемого равенства $(0, 1) \cdot (y, 0) = (0, y)$ заключаем, что комплексное число $z = (x, y)$ может быть представлено в декартовой (алгебраической) форме $z = x + iy$. В самом деле,

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy.$$

Вычитание определяется как операция, обратная сложению, т.е. разностью $z_1 - z_2$ называется комплексное число z_3 , обладающее свойством $z_2 + z_3 = z_1$. Если $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, то $z_1 - z_2 = z_3 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

Комплексное число $x - iy$ называется *сопряжённым* комплексным числом $z = x + iy$, и для него принято обозначение $\bar{z}$. Переход от данного комплексного числа к сопряжённому называется операцией сопряжения. Очевидно, что

$$\overline{(\bar{z})} = z, \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, z + \bar{z} = 2x, z - \bar{z} = 2iy.$$

Делением комплексное число, отличное от нуля, определяется как операция, обратная умножению, т.е. под числом $\frac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$, понимается комплексное число

z_4 , обладающее свойством $z_2 \cdot z_4 = z_1$. Для представления z_4 в виде $x_4 + iy_4$ следует провести простое вычисление

$$\begin{aligned} z_4 &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись связью декартовых и полярных координат

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi,$$

получим так называемую *тригонометрическую форму* записи комплексного числа $z = x + iy$:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1)$$

При этом ρ обычно называют модулем, а φ - аргументом комплексного числа и обозначают $\rho = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Используя известную формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

и равенство (1), получим так называемую *показательную форму* записи комплексного числа

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Контрольные вопросы и задания:

Дайте определение комплексного числа

Какое комплексное число называется сопряжённым с комплексным числом $z = x + iy$?

Какие из следующих равенств являются справедливыми

$$\overline{(\bar{z})} = z, \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, z + \bar{z} = 2xi, z - \bar{z} = 2y ?$$

Запишите в показательной форме комплексное число $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

1. Докажите: если комплексное число z допускает представление

$$z = r(\cos \psi + i \sin \psi) \quad (r > 0, \psi \text{ — действительное число}), \text{ то}$$

$r = |z|$, а ψ — одно из значений аргумента z .

2. Считая $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, докажите:

$$\arg z = \arctg(y/x) \text{ при } x > 0;$$

$$\arg z = \arctg(y/x) + \pi \text{ при } x < 0, y \geq 0;$$

$$\arg z = \arctg(y/x) - \pi \text{ при } x < 0, y < 0.$$

3. Выполните указанные действия:

а) $(2 - 3i) - (i - 2);$

б) $(2 - i)(i + 1) - (1,5i + 1)4i;$

в) $\frac{1}{1+2i} + \frac{i}{2-i};$

г) $\frac{2}{1+i} - \frac{1-i}{1+2i}(2-i);$

д) $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2.$

ТЕМА 2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Цель: закрепить основные определения функции комплексного переменного и отработать нахождение предела функции комплексного переменного.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы:

1. Основные определения функции комплексного переменного.

2. Предел и непрерывность функции комплексного переменного.

При изучении данной темы необходимо обратить внимание на следующие моменты.

Пусть $D \subset C$. Введём понятие предельной точки множества D .

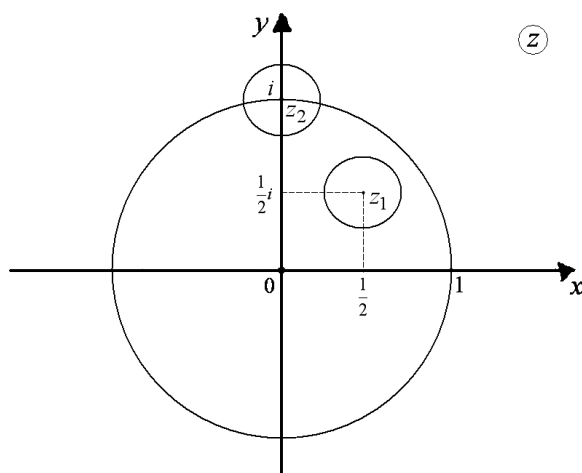
Определение. Точка $z_0 \in C$ называется *предельной точкой* множества D , если в любой её сколь угодно малой δ -окрестности найдётся точка $z \in D$, отличная от точки z_0 .

Множество может иметь предельные точки, принадлежащие этому множеству, и предельные точки, не принадлежащие ему.

Например, пусть $D = \{z \in C : |z| < 1\}$ – открытый круг с центром в точке $z = 0$

радиуса $R = 1$. Тогда $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = i$ – предельные точки множества D , при этом

$$z_1 \in D, \quad z_2 \notin D.$$



Замкнутое множество содержит все свои предельные точки. Множество комплексных чисел называется ограниченным, если оно целиком содержится в некотором круге $|z| < R$.

Пусть задана однозначная функция $w = f(z)$, $z \in D$ и z_0 – предельная точка множества D .

Определение. Комплексное число A называется пределом комплексной функции $f(z)$ в точке z_0 , (или при z , стремящемся к z_0), если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое что для любого $z \in D$ из условия $0 < |z - z_0| < \delta$ следует, что $|f(z) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall z \in D : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Другими словами, для всех точек z из круга с центром z_0 и радиуса δ ($z \neq z_0$) точки функции $f(z)$ находятся в круге с центром A и радиуса ε .

Теорема (признак существования предела функции комплексного переменного в точке). Существование предела $A = \alpha + \beta i$ функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ равносильно существованию предела α её действительной части $u(x, y)$ и предела β её мнимой части $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0) .

Для функций комплексного переменного $f(z)$ и $g(z)$ справедливы следующие свойства:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}; \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0.$$

Определение. Функция $f(z)$ называется *бесконечно малой величиной* (б.м.в.) в точке z_0 (или при $z \rightarrow z_0$), если её предел в этой точке равен нулю: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$,

т.е. по определению предела,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall z \in D : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| < \varepsilon.$$

Это условие означает, что $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0$. Таким образом,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0.$$

Определение. Несобственное комплексное число ∞ называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0 (или при $z \rightarrow z_0$), если для любого сколь угодно большого положительного числа E найдётся положительное число δ , определяемое в зависимости от взятого числа E , такое что для любого $z \in D$, не равного z_0 и отличного от z_0 по модулю на величину, меньшую δ , модуль соответствующего значения функции $f(z)$ больше взятого числа E .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists \delta = \delta(E) \mid \forall z \in D: 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > E.$$

Такую функцию называют *бесконечно большой величиной* (б.б.в.) при $z \rightarrow z_0$.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Если $f(z)$ – б.м.в. в точке z_0 , то $1/f(z)$ – б.б.в. в этой точке (и обратно).

Определение. Функция $w = f(z)$ называется **непрерывной** в точке z_0 , если существует предел этой функции в точке z_0 , равный её значению в данной точке:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Пусть функция $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0 , т.е. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ или

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - f(z_0)| = 0.$$

Положим $\Delta z = z - z_0$, $\Delta w = w - w_0 = f(z) - f(z_0)$. Комплексное число Δz называется *приращением независимого переменного z в точке z_0* , а комплексное число Δw – *приращением функции $w = f(z)$ в точке z_0* , соответствующим приращению Δz . В этих обозначениях предыдущее равенство принимает вид

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0.$$

и определение непрерывности функции в точке можно сформулировать следующим образом.

Определение. Функция $w = f(z)$ называется *непрерывной в точке z_0* , если приращение Δw этой функции в данной точке, соответствующее приращению Δz независимого переменного z , является б.м.в. при $\Delta z \rightarrow 0$.

Функция $w = f(z)$ называется *непрерывной на множестве*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Если функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0 , то функция $|f(z)|$ тоже непрерывна в точке z_0 .

Теорема (признак непрерывности функции комплексного переменного в точке). Непрерывность функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ равносильна непрерывности её действительной и мнимой частей в точке (x_0, y_0) .

Контрольные вопросы и задания:

Что называют комплексной переменной?

Что называют комплексной плоскостью?

Что понимают под функцией комплексной переменной?

Как определяется предел функции $w = f(z)$?

Какая функция называется непрерывной в области?

Найти значения $\sqrt[n]{Z}$ если:

1) $Z = -1, n = 3,$

2) $Z = 8i, n = 3,$

3) $Z = 1, n = 5,$

4) $Z = 1 + i, n = 8.$

Решить уравнения:

- 1) $Z^3 = 1 + i$,
- 2) $Z^4 + 1 = 0$,
- 3) $Z^5 = 1 + \sqrt{3}i$,
- 4) $Z^6 + 64 = 0$,
- 5) $Z^2 = \bar{Z}^3$.

ТЕМА 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Цель: закрепить определение производной функции комплексного переменного и отрабатывать условия, при которых функция является аналитической.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы:

1. Производная функции комплексной переменной.
2. Критерий дифференцируемости в точке.
3. Гармонические функции.

При изучении данной темы необходимо обратить внимание на следующие моменты.

Определение 1. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой или моногенной в точке z_0 , если при любом достаточно малом $|\Delta z|$, её приращение в точке z_0 допускает представление

$$\Delta f(z_0) = A\Delta z + \eta\Delta z,$$

где число $A, A \neq \infty$, не зависит от $\Delta z, \eta \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$; A называется производной функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначается $f'(z_0), \frac{df(z_0)}{dz}, f'$.

Определение 1 эквивалентно следующему определению.

Определение 2. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой или моногенной в точке z_0 , если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = A.$$

Функция $f(z)$ называется дифференцируемой или моногенной в области $D \subset C_z (\bar{C}_z)$, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Дифференциалом $f(z)$ в точке z называется линейная относительно Δz часть $f'(z)\Delta z$ приращения $\Delta f(z)$ функции в точке z и обозначается $df(z)$:

$$df(z) = f'(z)\Delta z.$$

Теорема (Коши, Риман). Пусть функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy,$$

определена в области $D, D \subset C_z$. Для дифференцируемости (моногенности) $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции двух вещественных переменных x, y и чтобы, кроме того, в этой точке выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1)$$

При этом производная $f'(z_0)$ может быть вычислена по одной из формул

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Замечание 1. Равенства (1) называют условиями Коши-Римана или условиями Даламбера-Эйлера, или условиями КРЭДа.

Функция $f(z)$ называется *аналитической* в точке z_0 , если она дифференцируема в окрестности $\cup(z_0)$ этой точки и называется *аналитической в области*, если она аналитична в каждой точке этой области.

Решение типовых задач

Пример. Найти все точки, в которых дифференцируемы функции:

1) $f(z) = \operatorname{Re} z$.

Решение. $f(z) = \operatorname{Re} z = x, \Rightarrow u = x, \quad v = 0$.

Найдём частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Ответ: нигде не дифференцируема.

2) $f(z) = x^2 + iy^2, \quad z = x + iy$.

Решение. $u = x^2; v = y^2$.

Найдём частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y.$$

$$\begin{cases} x = y \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = x.$$

Ответ: функция дифференцируема на прямой $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$.

Контрольные вопросы задания:

1. Дайте определение дифференцируемой функции в точке z_0 .
2. Запишите условия Коши-Римана.
3. Сформулируйте теорему Коши-Римана.
4. Какая функция называется *аналитической* в точке, в области?

Задание 1. Выделить вещественную и мнимую части данной функции. Найти значение функции в заданной точке.

$$w = \frac{1}{z} + \frac{2i}{z-1}; \quad w(2).$$

Задание 2. Найти точки, в которых функция дифференцируема. Вычислить производную в заданной точке.

$$w = z^2 + i|z|^2; \quad w'(1+i).$$

Задание 3. Восстановить аналитическую функцию по заданным условиям.

$$v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y.$$

ТЕМА 4. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Цель: отрабатывать навыки нахождения интеграла от функции комплексного переменного, теорему Коши.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы:

1. Определение интеграла от функции комплексного переменного. Основные свойства интеграла .

2. Теорема Коши.

При изучении данной темы необходимо обратить внимание на следующие моменты.

Пусть на Γ задана комплексная дуга $f(z)$. Выберем на каждой дуге γ_k произвольно по одной точке $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ и рассмотрим сумму

$$S_\Gamma = S_\Gamma(f, T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k).$$

Эту сумму называют интегральной суммой, для функции $f(z)$ по кривой Γ , соответствующей ее разбиению T .

Определение. Функция $f(z)$ называется *интегрируемой по кривой Γ* , если существует число $I \in \mathbb{C}$, обладающее следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что при каждом разбиении T кривой Γ с диаметром $\alpha(T) < \delta$ выполняется неравенство:

$$|I - S_\Gamma(f, T)| < \varepsilon.$$

Число I называется при этом *интегралом* от функции $f(z)$ вдоль кривой Γ и обозначается

$$\int_{\Gamma} f(z) dz.$$

Теорема. Если функция $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, $z = x + i y$, непрерывна на спрямляемой кривой Γ , причем справедливо равенство

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} v dx + u dy, \quad (1)$$

где в правой части равенства (1) есть криволинейные интегралы (II-рода, по координатам).

Непосредственно по определению интеграла проверяются следующие свойства интегралов:

$$a) \int_{-\Gamma} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz;$$

$$б) \int_{\Gamma} c f(z) dz = c \int_{\Gamma} f(z) dz, \quad c = const;$$

$$в) \int_{\bigcup_{j=1}^m \Gamma_j} f(z) dz = \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} f(z) dz.$$

Пусть Γ -гладкая кривая с уравнением $z = z(t) = x(t) + i y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt.$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} z^2 dz$, где Γ – радиус-вектор точки $z = 2 + i$.

Решение. Подынтегральная функция имеет вид

$$f(z) = z^2 = x^2 + i2xy - y^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Построим прямую $y = \frac{1}{2}x$.

Воспользуемся формулой (1), получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z^2 dz &= \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{4} - 2x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) dx + i \int_0^2 \left[2x \cdot \frac{x}{2} + \left(x^2 - \frac{x^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} \right] dx = \\ &= \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \right) dx + i \int_0^2 \left(x^2 + \frac{3x^2}{8} \right) dx = \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx + i \int_0^2 \frac{11x^2}{8} dx = \left. \frac{x^3}{12} \right|_0^2 + i \left. \frac{11x^3}{24} \right|_0^2 = \\ &= \frac{8}{12} + i \frac{11}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2}{3} + i \frac{11}{3} = \frac{1}{3}(2 + 11i). \end{aligned}$$

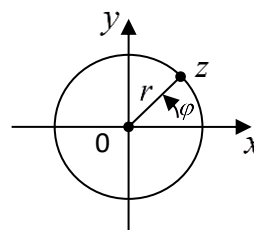
Ответ: $\frac{1}{3}(2 + 11i)$.



Пример 2. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$, где Γ – окружность $|z| = r$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int_{\Gamma} \frac{dz}{z} &= \int_{\Gamma} \frac{dx + i dy}{x + iy} = \int_0^{2\pi} \frac{-r \sin \varphi + i r \cos \varphi}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{r(-\sin \varphi + i \cos \varphi)}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} d\varphi = i \int_0^{2\pi} d\varphi = i\varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i. \end{aligned}$$

Ответ: $2\pi i$.



Контрольные вопросы задачи:

1. Дайте определение интеграла по комплексному переменному.
2. Запишите формулу, устанавливающую связь между интегралом по комплексному переменному и криволинейными интегралами.
3. Перечислите основные свойства интеграла по комплексному переменному.
4. Запишите формулу для вычисления интеграла по гладкой кривой.

Вычислить интеграл по кривой

а) $\int_L z \operatorname{Im} z dz$, $L: |z| = 2$;

б) $\int_L \operatorname{Re} z dz$, $L: (2 + i)t$, $0 \leq t \leq 1$.

ТЕМА 5. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ РЯДЫ

Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots, \quad (1)$$

где $z_n = x_n + iy_n$ – комплексные числа, называется числовым комплексным рядом (рядом в комплексной области).

Числовые ряды с комплексными членами обладают свойствами аналогичными многим свойствам числовых рядов с действительными членами.

Частичные суммы ряда:

$$S_1 = z_1; \quad S_2 = z_1 + z_2; \quad \dots; \quad S_n = z_1 + \dots + z_n; \quad \dots$$

образуют числовую комплексную последовательность $\{S_n\}$.

Определение 1. Ряд (1) называется сходящимся, если соответствующая ему последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ сходится, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S. \quad (2)$$

Число S называется суммой данного ряда. Если предел (2) не существует или бесконечен, то ряд (1) называется *расходящимся*.

Теорема 1. Для того, чтобы ряд (1) был сходящимся и чтобы его суммой было число $S = S' + iS''$ необходимо и достаточно, чтобы числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ были сходящимися и чтобы их суммами были соответственно S', S'' . При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n = S' + iS'' = S.$$

С помощью этой теоремы многие важные свойства и утверждения, справедливые для рядов с действительными членами, сразу переносятся на ряды с комплексными членами. Перечислим некоторые из этих свойств:

1°. *Необходимый признак сходимости*. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$

(Обратное утверждение неверно: из того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$, не следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится).

Отсюда следует, что если общий член ряда (1) не стремится к нулю, то ряд расходится (*достаточное условие расходимости*).

2°. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ с комплексными членами сходятся и их суммы равны S и Q соответственно. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n)$ тоже сходится и его сумма равна $S \pm Q$.

3°. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится и его сумма равна S . Тогда при любом комплексном λ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda z_n$ тоже сходится и его сумма равна λS .

4°. Если отбросить или добавить к сходящемуся ряду конечное число членов, то получится также сходящийся ряд.

Наряду с рядом (1) рассмотрим ряд, составленный из модулей его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots, \quad (3)$$

который является числовым рядом с действительными членами.

Теорема 2. Если сходится ряд (3), то сходится и ряд (1), который в этом случае называется *абсолютно сходящимся*.

Сходящиеся, но не абсолютно ряды называются *условно сходящимися*.

Замечание 1. Если ряды сходятся абсолютно, то при любой перестановке его членов новый ряд так же будет абсолютно сходящимся, причем к той же сумме.

Замечание 2. Исследование сходимости ряда (3) как положительного числового ряда можно проводить с помощью известных достаточных признаков Даламбера, Коши и т.д.:

1) Признак Даламбера. Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при $l < 1$ – ряд сходится, а при $l > 1$ – расходится.

2) Признак Коши. Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то при $l < 1$ – ряд сходится, а при $l > 1$ – расходится.

3) Предельный признак сравнения. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – ряды с положительными членами и существует конечный предел отношения их общих членов: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$, то ряды сходятся или расходятся одновременно. (В качестве

эталонного ряда часто берут обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, который при $\alpha > 1$ – сходится, а при $\alpha \leq 1$ – расходится).

Контрольные вопросы

1. Дать понятие числового ряда с комплексными числами.
2. Какой ряд называется сходящимся (расходящимся)?
3. Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда с комплексными числами.
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условие сходимости числового ряда с комплексными числами.
5. Перечислите основные свойства сходящихся рядов.
6. Дать понятие абсолютно сходящегося числового ряда с комплексными числами. Перечислите их основные свойства.

ТЕМА 6. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА

Цель: отрабатывать навыки разложения функций в ряд Тейлора.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы:

Понятие степенного ряда.

Теорема Абеля.

Определение радиуса сходимости степенного ряда.

Теорема Тейлора о разложении голоморфной функции в степенной ряд.

При изучении данной темы необходимо обратить внимание на следующие моменты.

Определение. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta - \zeta_0)^n, \quad (1)$$

где $\zeta_0, a_0, a_1, \dots$ - заданные комплексные числа, ζ - комплексное переменное, называется *степенным рядом*.

Вводя обозначение $\zeta - \zeta_0 = z$, перепишем ряд (1) в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (2)$$

Теорема (Абель). Если степенной ряд (2) сходится в точке $z_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится в круге

$$K_0 = \{z: |z| < |z_0|\},$$

а в круге

$$K_1 = \{z: |z| \leq \rho\}, \text{ где } 0 < \rho < |z_0|,$$

этот ряд сходится равномерно.

Следствие. Для каждого степенного ряда (2) существует число $R > 0$ такое при $|z| < R$ ($z = 0$ при $R = 0$) ряд сходится, а при $|z| > R$ - расходится.

Число R называется радиусом сходимости ряда (2), а круг $\{z: |z| < R\}$ - называется кругом сходимости этого ряда.

Теорема (Коши-Адамара). Радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

находится по формуле

$$R = \frac{1}{l}, \text{ где } l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

причём подразумевается, что $R = 0$ при $l = +\infty$ и $R = +\infty$ при $l = 0$.

Теорема (о разложении голоморфной функции в степенной ряд; Тейлор).

Голоморфная в области $D \subset C_z$ функция $f(z)$ в окрестности каждой точки $z_0 \in D$ представима в виде суммы степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (3)$$

сходящегося в круге $\cup(z_0, d) = \{z : |z - z_0| < d\}$ с радиусом d , равным расстоянию от точки z_0 до границы ∂D области D . Коэффициенты a_n ряда (3) выражаются формулами

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где γ_ρ - произвольная окружность $\{\zeta : |\zeta - z_0| = \rho\}$, $0 < \rho < d$.

Ряды Тейлора приспособлены для представления голоморфных функций в круге. Теперь мы рассмотрим более общие ряды по положительным и отрицательным степеням $(z - a)$. Такие ряды представляют голоморфные функции в концентрических кольцах

$$V = \{z \in C_z : r < |z - a| < R\}, \quad r \geq 0, R \leq \infty.$$

Особенно важны разложения в кольцах с нулевым внутренним радиусом ($r = 0$), т.е. в проколотых окрестностях точек, где функции теряют голоморфность (особых точек).

Теорема (Лоран). Любую функцию $f(z)$, голоморфную в кольце

$V = \{r < |z - a| < R\}$, можно в этом кольце представить как сумму сходящегося ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (1)$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где $r < \rho < R$.

Определение. Ряд (1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (2), называется *рядом Лорана* функции $f(z)$ в кольце V . Совокупность членов этого ряда с неотрицательными степенями $(z - a)$ называется *правильной частью*, а совокупность членов с отрицательными степенями $(z - a)$ - *главной частью*:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=-1}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Пример 1. Разложить функцию $f(z) = z^3 \cdot e^{1/z}$ в ряд Лорана в кольце $0 < |z| < \infty$.

Решение.
$$z^3 \cdot e^{1/z} = z^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = z^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n \cdot n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n-3} \cdot n!}.$$

Пример 2. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{(z-i)(z+3)}$ в ряд Лорана в кольце

$$1 < |z| < 3.$$

Решение.

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z\left(1-\frac{i}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}}; |z| > 1.$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{3}\right)^n \cdot (-1)^n; |z| < 3.$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{z}{(z-i)(z+3)} = \frac{z}{3+i} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^n}{3^{n+1}} \right).$$

Контрольные вопросы задания:

Какой функциональный ряд называется степенным рядом?

Сформулируйте теорему Абеля.

Каким может быть множество сходимости степенного ряда?

Запишите формулу Коши-Адамара для определения радиуса сходимости степенного ряда.

Сформулируйте теорему Тейлора о разложении голоморфной функции в степенной ряд.

Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$.

Найти круг сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n.$$

ТЕМА 7. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Цель: отрабатывать навыки нахождения нулей функций и определения их порядка, исследовать особые точки функции.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы:

Классификация изолированных особых точек аналитических функций; ряд

Лорана в окрестности особой точки; теорема Сохоцкого; бесконечно удалённая изолированная особая точка.

При изучении данной темы необходимо обратить внимание на следующие моменты.

Определение 1. Точка $a \in \overline{C}$ называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует такая проколота окрестность этой точки (т.е. множество $\{0 < |z-a| < R\}$, если точка a конечна, или множество $\{R < |z| < \infty\}$, если $a = \infty$), в которой функция $f(z)$ голоморфна.

В зависимости от поведения $f(z)$ при приближении к такой точке различают три типа особых точек.

Определение 2. Изолированная особая точка a функции $f(z)$ называется

(I) *устранимой* точкой, если существует конечный
 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \neq \infty$;

(II) *полюсом*, если существует
 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$;

(III) *существенно особой* точкой, если $f(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z \rightarrow a$.

Теорема. *Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$ является устранимой в том и только в том случае, если лорановское разложение $f(z)$ в окрестности a не содержит главной части:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Теорема. *Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$ является полюсом в том и только в том случае, если главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки a содержит лишь конечное (и положительное) число отличных от нуля членов:*

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z-a)^n = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \frac{c_{-N+1}}{(z-a)^{N-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, c_{-N} \neq 0. \quad (1)$$

Определение 3. Номер N старшего члена главной части лорановского разложения (1) функции $f(z)$ в проколотой окрестности полюса называется *порядком полюса*.

Теорема. *Изолированная особая точка a функции $f(z)$ является существенно особой в том и только в том случае, если главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки a содержит бесконечно много отличных от нуля членов.*

Контрольные вопросы и задания:

1. Дайте определение изолированной особой точки аналитической функции.
2. Какая изолированная особая точка называется устранимой точкой, полюсом, существенно-особой точкой?
3. Запишите разложение функции в ряд Лорана в окрестности полюса.
4. Запишите разложение функции в ряд Лорана в окрестности существенно-особой точкой.

ТЕМА 8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ

Цель: отрабатывать навыки нахождения вычетов функций.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы:

Определение вычета; теорема Коши о вычетах, вычисление вычетов

При изучении данной темы необходимо обратить внимание на следующие моменты.

Определение. Вычетом функции $f(z)$ в конечной точке a называется величина $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz$, где γ_ρ - окружность с центром в точке a достаточно малого радиуса ρ (столь малого, чтобы внутри окружности γ_ρ не было других особых точек $f(z)$, кроме a).

Вычет обозначается одним из следующих символов:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z),$$

$$\operatorname{Re s}_{z=a} f(z),$$

$$[f(z); a].$$

Мы будем писать

$$\operatorname{Re s}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz.$$

Теорема (Коши, о вычетах или основная теорема о вычетах). Пусть функция $f(z)$ голоморфна всюду в области D , за исключением не более чем счетного множества изолированных особых точек. И пусть область G , лежащая в D вместе со своей границей ∂G , не содержащей особых точек, тогда

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a_v \in G} \operatorname{Re s}_{z=a_v} f(z),$$

где a_v - особые точки $f(z)$, лежащие в G (их конечное число).

Теорема. Вычет функции f изолированной особой точке $a \in \mathbb{C}$ равен коэффициенту при минус первой степени $(z-a)$ в её лорановском разложении в окрестности a :

$$\operatorname{res}_a f(z) = c_{-1}.$$

Определение. Пусть функция f имеет бесконечность своей изолированной особой точкой; её вычетом в бесконечности называется величина

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} f(z) dz,$$

где γ_R^- - окружность $\{|z| = R\}$ достаточно большого радиуса, проходимая по часовой стрелке.

Теорема (о полной сумме вычетов). Пусть функция f голоморфна всюду в плоскости $\mathbb{C}_z$, за исключением конечного числа точек a_v ($v=1, \dots, n$); тогда сумма её вычетов во всех конечных особых точках и вычета в бесконечности равна нулю:

$$\sum_{v=1}^n \operatorname{res}_{a_v} f(z) + \operatorname{res}_\infty f(z) = 0.$$

Пример. Вычислить вычеты функции $f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^3 - z}$ относительно каждой из их особых точек.

Решение. Преобразуем функцию

$$f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^3 - z} = \frac{z^2 + z - 1}{z(z-1)(z+1)}.$$

Воспользуемся формулой

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z).$$

Имеем

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{z^2 + z - 1}{z(z-1)(z+1)} = \frac{-1}{-1} = 1;$$

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{z^2 + z - 1}{z(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \cdot \frac{z^2 + z - 1}{z(z-1)(z+1)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{Res} f(z) = 1; \operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{2}; \operatorname{Res} f(z) = -\frac{1}{2}.$$

Контрольные вопросы задания:

1. Дайте определение вычета в конечной изолированной особой точке.
2. Сформулируйте теорему Коши о вычетах.
3. Чему равен вычет функции в устранимой особой точке?
4. Дайте определение вычета в бесконечности.
5. Сформулируйте теорему о полной сумме вычетов.

ТЕМА 9. ПРИЛОЖЕНИЕ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

Цель: отрабатывать навыки приложения вычетов к вычислению интегралов.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы:

методология вычисления несобственных интегралов с помощью вычетов.

При изучении данной темы необходимо обратить внимание на следующие моменты.

Теорема. Пусть $R(x, y)$ - такая рациональная функция переменных x, y , что рациональная функция

$$R_1(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

не имеет полюсов на единичной окружности $\{z : |z| = 1\}$. Тогда значения интеграла

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi \text{ являются числом}$$

$$I = 2\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} R_1(z),$$

где $z_1, \dots, z_n, n \in \mathbb{N}$ - все полюсы функции $R_1(z)$ в круге $E = \{z : |z| < 1\}$.

Пусть функция $f(x)$ определена на вещественной оси и интегрируема по Риману (или по Лебегу) на любом промежутке $[a, b]$, $a < b$. Тогда, как известно из курса математического анализа, предел

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

называется несобственным интегралом от $f(x)$. Здесь a и b независимо друг от друга стремятся к своим предельным значениям.

Если $a = -R, b = R, (R > 0)$, то предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

называется несобственным интегралом от $f(x)$ в смысле главного значения.

Из существования несобственного интеграла следует существование интеграла в смысле главного значения и, очевидно, имеет место равенство интегралов.

Интеграл от $f(x)$ в смысле главного значения может существовать для расходящихся несобственных интегралов.

Через Π^+ и Π^- обозначим соответственно верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексной плоскости C :

$$\Pi^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}, \Pi^- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Теорема. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в Π^+ , за исключением множества $V = \{z_1, \dots, z_n\}, n \in N$, точек $z_k \in \Pi^+$, и непрерывна в $\overline{\Pi^+} \setminus V$. Если $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \Pi^+}} [zf(z)] = 0$, то

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Следствие. Пусть

$$f(z) = \frac{P_l(z)}{Q_s(z)} = \frac{a_l z^l + \dots + a_0}{b_s z^s + \dots + b_0}, a_l \neq 0, b_s \neq 0, -$$

рациональная функция, знаменатель которой не имеет действительных корней, а его степень хотя бы на две единицы выше степени числителя, то есть $S \geq l + 2$. Тогда

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_l(x)}{Q_s(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{P_l(z)}{Q_s(z)},$$

где $z_1, \dots, z_n, n \leq s$ - попарно различные нули функции $Q_s(z)$, лежащие в Π^+ .

Теорема. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в полуплоскости Π^+ , за исключением конечного множества $V = \{z_1, \dots, z_n\}, n \in N$, точек $z_k \in \Pi^+$ и непрерывна в $\overline{\Pi^+} \setminus V$.

Если $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \Pi^+}} f(z) = 0$ и $\alpha > 0$, то

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} \{f(z) e^{i\alpha z}\}.$$

Функция f , голоморфная в C_z , за исключением точек, в которых f имеет полюсы, называется *мероморфной*.

К числу мероморфных функций относятся постоянная и целые функции (вообще не имеющие особых точек в C_z), рациональные функции, частное от деления целой функции на целую функцию, Произведение конечного числа мероморфных функций — также мероморфная функция.

Обозначим полюсы мероморфной функции f , отличные от $z = 0$ через $a_1, a_2, \dots$

При этом если полюсов бесконечное множество, то их нумерацию выполним в порядке неубывания модулей: $0 < |a_k| < |a_{k+1}|, k \in \mathbb{N}$. Через $T_k = T_k(z, a_k)$

будем обозначать главную часть разложения f в ряд Лорана в проколотой окрестности точки a_k . Если f имеет в точке $z = 0$ полюс с главной частью $T_0(z, 0)$, то $g = f - T_0$ есть мероморфная функция, для которой $z = 0$ —

устраняемая особенность. Это замечание позволяет в ряде случаев для удобства записи рассматривать мероморфные функции, не имеющие полюса в начале.

Т е о р е м а. Мероморфная функция f с конечным числом полюсов в C_z является рациональной функцией.

Обозначим через T главную часть разложения f в ряд Лорана в бесконечности ($T = 0$, если бесконечность — устраняемая особенность). Учитывая все полюсы $a_0, a_1, \dots, a_n$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) в C_n рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = f(z) - T(z) - \sum_{k=0}^n T_k(z, a_k), \text{ голоморфную в } C_z. \text{ Согласно теореме}$$

Лиувилля она постоянна: $\varphi = c_0$ ($c_0 \in \mathbb{C}$). Таким образом,

$$f(z) = c_0 + T(z) + \sum_{k=0}^n T_k(z, a_k)$$

Полученное представление f дает разложение рациональной функции на простейшие дроби; сумма $c_0 + T(z)$ представляет собой целую часть f . С

помощью этой же формулы решается обратная задача о нахождении рациональной функции по произвольно заданным главным частям ее разложения.

Пример. Вычислить указанные интегралы:

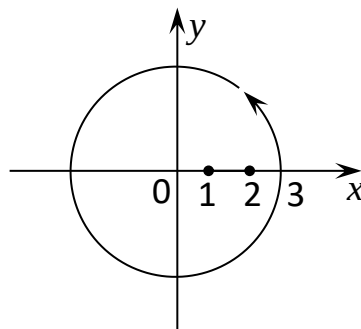
$$1) \int_{|z|=3} \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}.$$

Решение. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2};$

$z = 1$ — полюс 1-го порядка

$z = 2$ — полюс 2-го порядка

По теореме Коши о вычетах, имеем:



$$I = \int_{|z|=3} \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=2} f(z) \right).$$

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} = 1.$$

$$\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} \left[(z-2)^2 \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow 2} \left(\frac{z}{z-1} \right)' = -\lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{(z-1)^2} = -1;$$

$$I = 2\pi i(1-1) = 0.$$

Ответ: 0.

Контрольные вопросы задания:

1. Запишите формулу для вычисления интеграла $\int_0^{2\pi} R(\cos \phi, \sin \phi) d\phi$ с помощью

вычетов.

2. Разъясните методологию вычисления несобственных интегралов с помощью вычетов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы:

- 1 Минькова, Р. М. Функции комплексного переменного в примерах и задачах / Р.М. Минькова. - Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2014. - 57 с. - ISBN 978-5-7996-1216-0
- 2 Синкевич, Г.И. Функции комплексной переменной. Теория и практика Электронный ресурс : учебник / Г.И. Синкевич. - Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2016. - 184 с. - Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks. - ISBN 978-5-9227-0595-0

Перечень дополнительной литературы:

- 1 Практикум по математике. Учебно-методические материалы практических занятий по теме "Элементы теории функций комплексного переменного" : Направление подготовки 11.03.04 Электроника и нанoeлектроника. Профиль - Микроэлектроника и твердотельная электроника. - Ставрополь : СКФУ, 2013. - 78 с.
- 2 Попов, В. Н. Прикладные вопросы теории функций комплексного переменного / В.Н. Попов. - Архангельск : ИПЦ САФУ, 2013. - 164 с. - ISBN 978-5-261-00850-7
- 3 Спецглавы геометрической теории функций комплексного переменного : учеб. пособие : (спец. 010101 - Математика) / авт.-сост. С. В. Никитин ; Федеральное агентство по образованию, ГОУ ВПО "Ставроп. гос. ун-т". - Ставрополь : Изд-во СГУ, 2009. - 64 с. - Библиогр.: с. 62

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

- 1 Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. - Изд. 6-е, стер. - М. : Лань, 2002. - 688с. - (Учебники для

вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 681-684. - Предм. указ.: с. 685-688. - ISBN 5-9511-0014-3

**Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»,
необходимых для освоения дисциплины (модуля):**

- 1 1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
- 2 2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**Методические указания для обучающихся по организации и проведению
самостоятельной работы**

Направление подготовки 03.03.02 Физика
Направленность (профиль)
«Фундаментальная и прикладная физика»

**Ставрополь
2026**

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	2
План-график выполнения самостоятельной работы	4
Методические рекомендации по изучению теоретического материала, подготовке к практическим занятиям	5

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины является формирование общепрофессиональных компетенций будущего академического бакалавра по направлению подготовки 03.03.02 – Физика.

Реализация цели определяет следующие задачи освоения дисциплины: формирование систематизированных знаний в области комплексного анализа; расширение на комплексную область основных понятий, используемых в действительном анализе: функция, предел, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость; ознакомить студентов с практическими приложениями методов комплексного анализа в различных разделах математики.

Дисциплина является базовой в первом блоке дисциплин. Ее освоение происходит в 4 семестре.

Для освоения дисциплины «Теория функций комплексного переменного» студент должен владеть основными понятиями математического анализа (предел, непрерывность функций, производная, интеграл Римана, функциональные последовательности и ряды), основными понятиями алгебры и геометрии.

КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Индекс	Формулировка:
ИД-Зопк-1	Способен сформулировать и решить задачу в своей профессиональной деятельности, опираясь на свои знания в области физико-математических и естественных наук.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

основные положения комплексной арифметики, свойства основных элементарных функций комплексного переменного;

основные теоремы и свойства дифференцирования и интегрирования в комплексной области;

основные положения теории функциональных рядов с комплексной переменной и теории вычетов.

Уметь:

решать основные задачи комплексной арифметики, на вычисление пределов функции комплексного переменного, их дифференцирование и интегрирование, на разложение функции комплексного переменного в ряды Тейлора и Лорана;

находить вычеты и с их помощью вычислять интегралы;

определять возможности применения теоретических положений и методов комплексного анализа для постановки и решения конкретных прикладных задач.

Владеть:

навыками решения задач комплексной арифметики; вычисления пределов функции комплексного переменного, их дифференцирования и интегрирования, и разложения в ряды;

методами комплексного анализа и готов их применять к решению прикладных задач.

На первом этапе необходимо ознакомиться с рабочей программой дисциплины, в которой рассмотрено содержание тем практических занятий, темы и виды самостоятельной работы. По каждому виду самостоятельной работы предусмотрены определённые формы отчетности

Для успешного освоения дисциплины, необходимо выполнить следующие виды самостоятельной работы, используя рекомендуемые источники информации

1. Самостоятельная работа как важнейшая форма учебного процесса.

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования - "подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности".

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному выпускнику общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание

курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:

- изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;
- решение практических заданий, подготовку к практическим занятиям, коллоквиуму;
- подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ;
- участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.

Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.

2. Цели и основные задачи СРС

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой бакалавра. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является формирование определенных компетенций, овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов

способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам.

3. Виды самостоятельной работы

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации, содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.):

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателей являются:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание рефератов;
- подготовка к практическим и лабораторным работам, их оформление;
- выполнение микроисследований;
- подготовка практических разработок;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов.

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

- текущие консультации;
- коллоквиум как форма контроля освоения теоретического содержания дисциплин: (в часы консультаций, предусмотренных учебным планом);
- прием и разбор домашних заданий (в часы практических занятий);
- прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р);

- выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин (руководство, консультирование и защита курсовых работ (в часы, предусмотренные учебным планом));
- выполнение учебно-исследовательской работы (руководство, консультирование и защита УИРС);
- прохождение и оформление результатов практик (руководство и оценка уровня сформированности профессиональных умений и навыков);
- выполнение выпускной квалификационной работы (руководство, консультирование и защита выпускных квалификационных работ) и др.

4. Организация СРС

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Организацию самостоятельной работы студентов обеспечивают: факультет, кафедра, учебный и методический отделы, преподаватель, библиотека, ТСО, ИВТ, издательство и др.

Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя

студент должен:

– освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем по данной дисциплине.

– планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем.

– самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя.

– выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

студент может:

сверх предложенного преподавателем по данной дисциплине:

– самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;

– предлагать дополнительные темы и вопросы для самостоятельной проработки;

- в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;

- предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;

- использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;

- использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего специалиста, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий.

5. Общие рекомендации по организации самостоятельной работы

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;

б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое

эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность - способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;
- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;
- привычная последовательность и систематичность деятельности;
- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является *утреннее время* (с 8 до 14 часов), причем максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* - (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1-1,5 часа нужны перерывы по 10 - 15 мин, через 3 - 4 часа работы отдых должен быть продолжительным - около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Физически здоровый молодой человек, обладающий хорошей подготовкой и нормальными способностями, должен, будучи студентом, отдавать *учению 9-10*

часов в день (из них 6 часов в вузе и 3 - 4 часа дома). Любой предмет нельзя изучить за несколько дней перед о.м. Если студент в году работает систематически, то он быстро все вспомнит, восстановит забытое. Если же подготовка шла аврально, то у студента не будет даже общего представления о предмете, он забудет все сданное.

Следует взять за правило: *учиться ежедневно, начиная с первого дня семестра.*

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя.

Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы – это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой

внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

6. Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления бакалавра

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не только к моральным, нравственным свойствам человека, но и в особенности, постоянно возрастающие требования в области образования – обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной мыслью и языком науки является необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что

он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для реализации этой задачи. Ибо во время учебы в вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этого пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения (лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контролирования за их деятельностью. Отметим, что нельзя ограничиваться только приобретением знаний предусмотренных программой изучаемой дисциплины, надо постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что

создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т.е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность методов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать его, чтобы изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебы с будущей профессиональной деятельности

7. Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы.

С первых же сентябрьских дней на студента обрушивается громадный объем информации, которую необходимо усвоить. Нужный материал содержится не только в лекциях (запомнить его – это только малая часть задачи), но и в учебниках, книгах, статьях. Порой возникает необходимость привлекать информационные ресурсы Интернет.

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых

соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно – выучу!»), а когда приходит пора овладения материалом, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться в оставшийся промежуток времени.

Работа с книгой.

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Различают два вида чтения; первичное и вторичное. *Первичное* - это внимательное, неторопливое чтение, при котором можно остановиться на трудных местах. После него не должно остаться ни одного непонятого слова. Содержание не всегда может быть понятно после первичного чтения.

Задача *вторичного* чтения - полное усвоение смысла целого (по счету это чтение может быть и не вторым, а третьим или четвертым).

Правила самостоятельной работы с литературой.

Как уже отмечалось, самостоятельная работа с учебниками и книгами (а также самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях) – это важнейшее условие формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

- Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать» (Селье, 1987. С. 325).

- Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для оценок, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

- Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).
- Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.

- При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...

- Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

- Если книга – Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора (это очень хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).

- Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать), и это может занять немалое время (у кого-то – до нескольких недель и даже месяцев); опыт показывает, что после этого студент каким-то «чудом» начинает буквально заглатывать книги и чуть ли не видеть «сквозь обложку», стоящая это работа или нет...

- «Либо читайте, либо перелистывайте материал, но не пытайтесь читать быстро... Если текст меня интересует, то чтение, размышление и даже

фантазирование по этому поводу сливаются в единый процесс, в то время как вынужденное скорочтение не только не способствует качеству чтения, но и не приносит чувства удовлетворения, которое мы получаем, размышляя о прочитанном», – советует Г. Селье (Селье, 1987. – С. 325-326).

- Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент (или молодой ученый) будет как бы искать аргументы «за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Проблема лишь в том, как найти «свою» идею...

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют *четыре основные установки в чтении научного текста*:

1. информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)
2. усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)
3. аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)
4. творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких **видов чтения**:

1. библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;

2. просмотрное – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;

3. ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;

4. изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

5. аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении

данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;
2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;
3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;
4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;
5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;
2. Выделите главное, составьте план;
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;

4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

Практические занятия.

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка.

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному

материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

Подготовка к ам и зачетам.

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается ом. Подготовка к у способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к у, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На е студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

ационная сессия - это серия ов, установленных учебным планом. Между ами интервал 3-4 дня. Не следует думать, что 3-4 дня достаточно для успешной подготовки к ам.

В эти 3-4 дня нужно систематизировать уже имеющиеся знания. На консультации перед ом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к ам те же, что и при занятиях в течение семестра, но соблюдаться они должны более строго. Во-первых, очень

важно соблюдение режима дня; сон не менее 8 часов в сутки, занятия заканчиваются не позднее, чем за 2-3 часа до сна. Оптимальное время занятий, особенно по математике - утренние и дневные часы. В перерывах между занятиями рекомендуются прогулки на свежем воздухе, неустойчивые занятия спортом. Во-вторых, наличие хороших собственных конспектов лекций. Даже в том случае, если была пропущена какая-либо лекция, необходимо во время ее восстановить (переписать ее на кафедре), обдумать, снять возникшие вопросы для того, чтобы запоминание материала было осознанным. В-третьих, при подготовке к ам у студента должен быть хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время ационной сессии для систематизации знаний.

Правила подготовки к зачетам и ам:

- Лучше сразу сориентироваться во всем материале и обязательно расположить весь материал согласно ационным вопросам (или вопросам, обсуждаемым на семинарах), эта работа может занять много времени, но все остальное – это уже технические детали (главное – это ориентировка в материале!).
- Сама подготовка связана не только с «запоминанием». Подготовка также предполагает и переосмысление материала, и даже рассмотрение альтернативных идей.

- Готовить «шпаргалки» полезно, но пользоваться ими рискованно. Главный смысл подготовки «шпаргалок» – это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету, что само по себе прекрасно – это очень сложная и важная для студента работа, более сложная и важная, чем простое поглощение массы учебной информации. Если студент самостоятельно подготовил такие «шпаргалки», то, скорее всего, он и сдавать будет более уверенно, так как у него уже сформирована общая ориентировка в сложном материале.

- Как это ни парадоксально, но использование «шпаргалок» часто позволяет отвечающему студенту лучше демонстрировать свои познания (точнее – ориентировку в знаниях, что намного важнее знания «запомненного» и «тут же забытого» после сдачи а).

- Сначала студент должен продемонстрировать, что он «усвоил» все, что требуется по программе обучения (или по программе данного преподавателя), и лишь после этого он вправе высказать иные, желательно аргументированные точки зрения.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для
освоения дисциплины

Перечень основной литературы:

- 1 Минькова, Р. М. Функции комплексного переменного в примерах и задачах / Р.М. Минькова. - Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2014. - 57 с. - ISBN 978-5-7996-1216-0
- 2 Синкевич, Г.И. Функции комплексной переменной. Теория и практика Электронный ресурс : учебник / Г.И. Синкевич. - Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2016. - 184 с. - Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks. - ISBN 978-5-9227-0595-0

Перечень дополнительной литературы:

- 1 Практикум по математике. Учебно-методические материалы практических занятий по теме "Элементы теории функций комплексного переменного" : Направление подготовки 11.03.04 Электроника и микроэлектроника. Профиль - Микроэлектроника и твердотельная электроника. - Ставрополь : СКФУ, 2013. - 78 с.

- 2 Попов, В. Н. Прикладные вопросы теории функций комплексного переменного / В.Н. Попов. - Архангельск : ИПЦ САФУ, 2013. - 164 с. - ISBN 978-5-261-00850-7
- 3 Спецглавы геометрической теории функций комплексного переменного : учеб. пособие : (спец. 010101 - Математика) / авт.-сост. С. В. Никитин ; Федеральное агентство по образованию, ГОУ ВПО "Ставроп. гос. ун-т". - Ставрополь : Изд-во СГУ, 2009. - 64 с. - Библиогр.: с. 62

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

- 1 Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. - Изд. 6-е, стер. - М. : Лань, 2002. - 688с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 681-684. - Предм. указ.: с. 685-688. - ISBN 5-9511-0014-3

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля):

- 1 1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика — высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
- 2 2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.