

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «МАТЕМАТИКА»
для студентов специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность»
(специализация "Экономико-правовое обеспечение экономической
безопасности")

Ставрополь, 2026

Методические указания по дисциплине «Математика» содержат задания для студентов, необходимые для проведения практических занятий.

Проработка практических заданий позволит студентам приобрести необходимые знания в области организации научных исследований и систематизировать знания, полученные на лекциях.

Предназначены для студентов направления для студентов специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность», специализация "Экономико-правовое обеспечение экономической безопасности".

Содержание

Тема 1 Основы линейной и векторной алгебры, элементы аналитической геометрии.

Практическое занятие № 1 «Действия над матрицами. Вычисление определителей»	9
Практическое занятие № 2 «Скалярные и векторные величины»	15
Практическое занятие № 3 «Ранг матрицы и методы его нахождения»	22
Практическое занятие № 4 «Методы нахождения обратной матрицы»	26
Практические занятия № 5-6 «Системы линейных уравнений. Методы решения»	34
Практическое занятие № 7 «Линейный оператор и его матрица. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора»	41
Практическое занятие № 8 «Контрольное занятие»	47
Практическое занятие № 9 «Системы координат на плоскости и в пространстве»	51
Практическое занятие № 10 «Определение и способы задания функции. Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований»	57
Практическое занятие № 11 «Прямая линия на плоскости»	64
Практическое занятие № 12 «Канонические уравнения линий второго порядка»	70
Практическое занятие № 13 «Предел функции. Основные теоремы о пределах»	75
Практическое занятие № 14 «Замечательные пределы. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции»	81
Практическое занятие № 15 «Непрерывные функции и их свойства. Точки разрыва и их классификация»	88
Тема 2 Дифференциальное исчисление функции одной переменной.	94
Дифференциальное исчисление функции одной переменной.	100
Практическое занятие № 16 «Понятие производной. Правила дифференцирования»	109
Практическое занятие № 17 «Дифференцирование сложной функции»	
Практическое занятие № 18 «Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Функции заданные неявно и параметрически и их дифференцирование»	115
Практическое занятие № 19 «Дифференциал функции, применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков»	120
Практическое занятие № 20 «Приложения производной: уравнение касательной и нормали к плоской кривой, правила Лопиталя, формула Тейлора»	127
Практическое занятие № 21 «Применение производной к исследованию функций. Построение графиков функций»	

Практическое занятие № 22 «Контрольное занятие»	142
Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	155

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целями освоения дисциплины «Математика» являются:

- понимание и восприятие основных понятий математики;
- формирование математической культуры студентов: умения логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения практических задач;
- освоение основ современного математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач, связанных с применением математических методов в практической деятельности;
- создание условий для развития профессионального творчества и опыта самостоятельной деятельности по усвоению содержания математического образования.

К числу задач освоения курса можно отнести:

- формирование минимума фундаментальных математических знаний в области линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления, обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, теории разложения функций в ряд;
- применение основных понятий, идей и методов фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач;
- применение численных методов решения базовых математических задач в практической деятельности;
- умение находить, анализировать и контекстно обрабатывать научно-техническую информацию.

Дисциплина «Математика» относится к числу базовых дисциплин *Математического и естественнонаучного цикла*. Материал курса излагается в такой последовательности, чтобы одни из математических разделов являлись основой для изучения других. Изучение дисциплины основывается на знаниях студентами курса математики общеобразовательной школы.

В результате изучения дисциплины «Математика» студент должен обладать следующими компетенциями:

- Способен использовать знания и методы экономической науки, применять статистико-математический инструментарий, строить экономико-математические модели, необходимые для решения профессиональных задач, анализировать и интерпретировать полученные результаты (ОПК-1);

ИД-2 ОПК-1. Применяет статистико-математический инструментарий, строит экономико-математические модели, необходимые для решения профессиональных задач, анализирует и интерпретирует полученные результаты

Математическое образование предполагает формирование у будущих специалистов таких компетенций профессиональной деятельности как умение

- сформулировать гипотезу и проверить ее в дальнейшем;
- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- ставить новые вопросы и видеть проблемы в традиционных ситуациях;
- владеть основными методиками решения учебно-исследовательских задач;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- стимулировать фантазию;
- систематизировать результаты наблюдений и экспериментов;
- применять основные понятия, идеи и методы фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач;
- применять численные методы решения базовых математических задач в практической деятельности;
- планировать самостоятельную работу;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат.

Данное учебно-методическое пособие представляет собой учебно-методические материалы по организации практических занятий по математике для студентов. Пособие подготовлено в соответствии со

стандартами третьего поколения указанного направления и согласно с учебным планом содержит 18 занятий по следующим разделам: «Основы линейной и векторной алгебры», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Интегральное исчисление функции одной переменной», «Числовые и функциональные ряды», «Функции нескольких переменных», «Дифференциальные уравнения». Для каждого занятия указаны цель занятия; предложены вопросы, выносимые на обсуждение; даны методические рекомендации по подготовке и проведению каждого занятия. Подготовка к каждому занятию предполагает изучение рекомендуемой литературы по вопросам, выносимым на обсуждение. Список литературы с указанием пунктов и параграфов для изучения приводится к каждому занятию. Здесь можно рекомендовать воспользоваться одним – двумя источниками, в зависимости от имеющихся в наличии. Для эффективной подготовки к занятиям рекомендуется найти ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями, а также изучить разобранные в пособии примеры решения типовых задач. Формирование практических умений и навыков происходит при решении практических заданий для развития и контроля владения компетенциями, которые в пособии разделены на две части: задания, решаемые в аудитории, и задания для самостоятельной работы дома.

Данное пособие может служить также основой для организации самостоятельной работы студентов. В нем содержатся предусмотренные программой дисциплины индивидуальные домашние задания в тридцати вариантах, примерные варианты контрольных работ, вопросы к коллоквиумам, а также примерная тематика проектов по курсу.

Хочется надеяться, что работа студентов с данным пособием позволит им освоить дисциплину «Математика» на хорошем уровне и научиться применять математические методы в своей профессиональной деятельности.

РАЗРАБОТКИ ЗАНЯТИЙ

Тема 1 Основы линейной и векторной алгебры, элементы аналитической геометрии

Практическое занятие № 1

Тема занятия «Действия над матрицами. Вычисление определителей»

Цель занятия: Введение основных понятий линейной алгебры, формирование умений выполнять действия над матрицами и вычислять определители.

Организационная форма занятия: практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

При формировании названных компетенций на занятии специалист должен знать основные понятия линейной алгебры, уметь вычислять определители, выполнять действия над матрицами, применять решение этих задач при решении задач математического анализа и задач предметной области.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Линейные действия над матрицами.
2. Определители второго и третьего порядков.
3. Теорема о вычислении определителя.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.

Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Получите индивидуальное задание у преподавателя по подготовке проекта по курсу, по приведенным темам в конце этого учебно-методического пособия. Защита этого проекта будет проходить в течении года по графику, указанному преподавателем.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома. Подготовьтесь к самостоятельной работе №1 по теме «Действия над матрицами. Вычисление определителей». Примерный вариант этой работы Вы можете найти в программе дисциплины.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 3 п. 3.1.
- [2] часть 1 глава I § 5; глава III §§ 1 – 2.
- [3] часть 1 глава 2 §§ 8 – 9.
- [4] часть I занятие 15.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Рекомендуется рассмотреть в [2] часть 1 разобранные задания 399-401 - на действия над матрицами, 217 - на вычисление определителей второго и третьего порядков, 218, 383, 384 – на применение теоремы о вычислении определителя путем разложения по элементам строки (столбца) и на свойства определителя.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение матрицы, элементов матрицы; расскажите, как матрицы обозначаются, приведите примеры.

2. Введите понятия квадратной, диагональной, единичной, нулевой, ступенчатой, транспонированной, симметрической матриц, матрицы-строки и матрицы-столбца. Приведите примеры.
3. Когда говорят о размерах, а когда о размерности матрицы? Приведите примеры и введите соответствующие обозначения.
4. Дайте определение суммы двух матриц. Какие матрицы можно складывать? Приведите примеры.
5. Как умножить матрицу на число? Приведите пример.
6. Для каких двух матриц можно определить операцию произведения? Введите эту операцию, проиллюстрируйте ее на примере. Коммутативно ли умножение двух матриц?
7. Приведите пример использования матриц в области Вашей предметной деятельности.
8. Какие задачи приводят к понятиям определителей второго и третьего порядков. Как обозначаются определители?
9. Расскажите о правилах вычисления определителей второго и третьего порядков. Как называют правило вычисления определителей третьего порядков?
10. Введите понятия члена определителя, перестановки, транспозиции. Как определить четность перестановки?
11. Дайте определение определителя n -го порядка? Докажите, что правило «треугольника» является частным случаем этого определения.
12. Сформулируйте основные свойства определителей.
13. Введите понятия минора и алгебраического дополнения элемента определителя.
14. Сформулируйте теорему о вычислении определителя и следствие из нее.

Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями
Задания, решаемые в аудитории

1. Выполните действия над матрицами:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T;$$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

б)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

в)

б) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. Найдите произведения матриц A и B , если они существуют:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

3. Вычислите определители второго порядка:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix};$ б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix};$ в) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix};$ г) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix};$ д) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \end{vmatrix}$

4. По правилу «треугольника» вычислите определители третьего порядка:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix};$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix};$ в) $\begin{vmatrix} x & y & x & y \\ y & x & y & x \\ x & y & x & y \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

5. Найдите сумму корней уравнения: $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

6. Найдите определители, используя их свойства:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 3 \\ 1 & 12 & 15 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1354 & 13647 \\ 7 & 28523 \\ 2842 & 3 \end{vmatrix}$.

7. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, разложив его

а) по элементам первой строки;

б) по элементам третьего столбца

8. Вычислите определитель, предварительно получив максимально возможное число нулей в каком-либо столбце или какой-либо строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Выполните действия над матрицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}$$

а) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 9 \end{pmatrix}$; б) $A = A^T$, где

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2$$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$

2. Найдите произведения матриц A и $B = A$, если они существуют:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

 1 0

~ 7 

 5 8 ~ 2  $B \bullet$  4 5 2 

 1 ~ 4 5  $(3$ 4 ~ 4 

a)

Ⓟ

 ~ 2 
 1 ~ 1 
 4 ~ 4 
 $A \bullet$  3

6)  $\sim$ $\textcircled{P}$ 3  $B \bullet 2 \sim 1$ 5 ~ 3 ;
 4 ,

 1 4 8  2 3 5 ~ 2 

$A \bullet$  $\textcircled{P} 0 2 \sim 4$  $B \bullet$  $\textcircled{P} 2 4 \sim 1$ 3  .
 B)

3. Вычислите определители второго порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} a & b \\ \tilde{a} & b \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}; \text{ г) } \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{5} \end{vmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{vmatrix}, \text{ где } \varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}.$$

3

4. Вычислите определители третьего порядков по правилу «треугольника»:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 12 & 5 & 2 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}, \text{ где } \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

5. Решите неравенство:

3

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x & 2 \\ 1 & 1 & x & x \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geq 2.$$

6. Найдите определители, используя их свойства:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ 342 & 721 & 621 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 5 & 25 & 125 \\ 3 & 9 & 27 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 18 & 24 & 48 \\ 36 & 12 & 192 \\ 42 & 6 & 288 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

7. Вычислите определитель, разложив его

а) по элементам второй строки;

б) по элементам четвертого столбца.

8. Вычислите определитель, предварительно получив максимально возможное число нулей в каком-либо столбце или какой-либо строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Практическое занятие № 2

Тема занятия «Скалярные и векторные величины»

Цель занятия: Введение основных понятий векторной алгебры, имеющих большое значение для механики, электротехники и других технических дисциплин.

Организационная форма занятия: практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

Формирование на занятии у будущих специалистов этих компетенций предполагает обучение студентов

- анализировать ситуации и делать выводы;
- видеть проблемы в традиционных ситуациях;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- применение основных понятий, идей и методов математики для решения базовых задач.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Линейные операции над векторами.
2. Скалярное произведение векторов.
3. Векторное произведение векторов.
4. Смешанное произведение векторов.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.

5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Решите предложенный вариант самостоятельной работы №1 по теме «Действия над матрицами. Вычисление определителей».

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 2.
- [2] часть 1 глава 2 §§ 2 – 3.
- [4] часть 1 занятие 16.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие величины относятся к скалярным, а какие к векторным величинам? Приведите примеры.
2. Дайте определение вектора, модуля вектора. Как обозначают эти величины.
3. Введите понятие единичного вектора, нулевого вектора, коллинеарных, сонаправленных и противоположно направленных векторов, равных векторов, компланарных векторов.
4. Расскажите, какие операции над векторами относят к числу линейных операций.

5. Объясните правила построения суммы двух векторов (правило треугольника, правило параллелограмма), суммы конечного числа векторов (правило ломанной).
6. Дайте определение разности двух векторов и постройте разность двух векторов.
7. Как найти произведение вектора на действительное число?
8. Перечислите основные свойства линейных операций над векторами.
9. Введите понятие линейной комбинации системы векторов, линейно зависимой и линейно независимой системы векторов. Сколько векторов на плоскости и в пространстве могут быть линейно независимы?
10. Дайте определение базиса и ранга системы векторов, координат вектора.
11. Как определяются линейные операции над векторами в координатной форме?
12. Дайте определение скалярного произведения двух геометрических векторов и сформулируйте его основные свойства и геометрическую интерпретацию.
13. Как определить угол между векторами и длину векторами и длину вектора? Запишите формулы в координатной форме.
14. Расскажите о компланарных векторах и о направляющих косинусах.
15. Сформулируйте определение векторного произведения, расскажите о его геометрических приложениях. Перечислите основные свойства векторного произведения.
16. Дайте определение смешанного произведения векторов. Сформулируйте основные свойства смешанного произведения, расскажите о его геометрических приложениях

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Рекомендуется рассмотреть в [2] часть 1 разобранные задания 240, 241 на линейные действия над векторами, 257 - 259 на скалярное произведение и его приложения, 260 – 262 на векторное произведение и его приложения, 264

– 266 на смешанное произведение векторов и его приложения; в [3] часть 1, глава 1, §3 задание 7 на применение скалярного произведения в производственной сфере.

Задания практикума

- Даны точки A и B . Найдите:
 - координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$;
 - длину вектора $\overrightarrow{AB}$;
 - направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{BA}$.
- Вектор $\vec{a}$ составляет с осями Oy и Oz углы $\gamma \cdot 120^\circ$. Какой угол он составит с осью Ox ?
- Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол ϕ , причем $|\vec{a}| \cdot 5$, $|\vec{b}| \cdot 8$. Определите $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$.
- В прямоугольнике $OACB$ M и N – середины сторон BC и AC . Разложите вектор $\vec{c} \cdot \overrightarrow{OC}$ по векторам $\vec{a} \cdot \overrightarrow{ON}$ и $\vec{b} \cdot \overrightarrow{BM}$.
- Определите угол между векторами $\vec{a} \cdot \vec{2; 4; 4}$ и $\vec{AC}$.
- Даны векторы $\vec{a} \cdot \vec{4; 2; 4}$, $\vec{b} \cdot \vec{6; 3; 2}$. Вычислите: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $2\vec{a} \cdot 3\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot 2\vec{b}$; в) $\vec{a} \cdot \vec{b}^2$.
- Дан вектор $\vec{a} \cdot \vec{3; 4}$ и точка $A(1; 1)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если известно, что точка B принадлежит оси Oy и скалярное произведение $\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot 5$.
- Даны векторы $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{a}$ и $\vec{b} \cdot \vec{1; 2; 1}$. Найдите:

$$\text{а) } \vec{a} \times \vec{b}; \quad \text{б) } 2\vec{a} \times \vec{b}; \quad \text{в) } 2\vec{a} \times 2\vec{b}$$

9. Постройте треугольник с вершинами A, B, C . Вычислите его площадь и высоту BD .

10. Найдите смешанное произведение векторов $\overrightarrow{BC} \bullet \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, где $\vec{a} = (1, 3, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 4)$, $\vec{c} = (1, 1, 4)$.

11. Найдите объем пирамиды с вершинами в точках A , B , C , $D(2;3;8)$ и

вычислите ее высоту, опущенную на грань ABC .

Данные для заданий выберите из таблицы согласно своему варианту:

Вариант	$A(x_1; y_1; z_1)$	$B(x_2; y_2; z_2)$	$C(x_3; y_3; z_3)$	α
1	$\tilde{1;3;2}$	$\tilde{1;1;5}$	$\tilde{4;2;4}$	30^0
2	$\tilde{2;3;1}$	$\tilde{1;2;4}$	$\tilde{4;4;5}$	45^0
3	$\tilde{3;3;5}$	$\tilde{1;4;2}$	$\tilde{5;1;4}$	60^0
4	$\tilde{4;3;2}$	$\tilde{2;1;2}$	$\tilde{5;2;3}$	120^0
5	$\tilde{5;3;1}$	$\tilde{2;2;5}$	$\tilde{5;4;4}$	135^0
6	$\tilde{1;1;5}$	$\tilde{2;4;3}$	$\tilde{1;3;1}$	150^0
7	$\tilde{1;2;3}$	$\tilde{3;1;4}$	$\tilde{2;3;5}$	30^0
8	$\tilde{1;4;1}$	$\tilde{3;2;1}$	$\tilde{3;3;7}$	45^0
9	$\tilde{2;1;1}$	$\tilde{3;4;2}$	$\tilde{4;3;2}$	60^0
10	$\tilde{2;2;4}$	$\tilde{4;1;2}$	$\tilde{5;3;6}$	120^0
11	$\tilde{2;4;1}$	$\tilde{4;2;5}$	$\tilde{1;1;7}$	135^0
12	$\tilde{3;1;1}$	$\tilde{4;4;2}$	$\tilde{1;2;6}$	150^0
13	$\tilde{3;2;3}$	$\tilde{5;1;2}$	$\tilde{3;2;6}$	30^0
14	$\tilde{3;4;2}$	$\tilde{5;2;3}$	$\tilde{3;4;5}$	45^0
15	$\tilde{4;1;2}$	$\tilde{5;4;2}$	$\tilde{4;1;6}$	60^0
16	$\tilde{4;2;4}$	$\tilde{1;1;3}$	$\tilde{4;2;5}$	120^0
17	$\tilde{4;4;5}$	$\tilde{1;2;7}$	$\tilde{4;4;1}$	135^0
18	$\tilde{5;1;4}$	$\tilde{1;4;2}$	$\tilde{5;1;6}$	150^0
19	$\tilde{5;2;3}$	$\tilde{2;1;2}$	$\tilde{5;2;2}$	30^0
20	$\tilde{5;4;4}$	$\tilde{2;2;3}$	$\tilde{5;4;2}$	45^0
21	$\tilde{1;3;1}$	$\tilde{2;4;3}$	$\tilde{1;1;5}$	60^0
22	$\tilde{2;3;5}$	$\tilde{3;1;2}$	$\tilde{1;2;4}$	120^0
23	$\tilde{3;3;7}$	$\tilde{3;2;6}$	$\tilde{1;4;2}$	135^0
24	$\tilde{4;3;2}$	$\tilde{3;4;5}$	$\tilde{2;1;2}$	150^0
25	$\tilde{5;3;6}$	$\tilde{4;1;6}$	$\tilde{2;2;5}$	30^0
26	$\tilde{1;1;7}$	$\tilde{4;2;5}$	$\tilde{2;4;3}$	45^0
27	$\tilde{1;2;6}$	$\tilde{4;4;1}$	$\tilde{3;1;4}$	60^0
28	$\tilde{1;4;2}$	$\tilde{5;1;6}$	$\tilde{3;4;2}$	120^0
29	$\tilde{2;1;5}$	$\tilde{5;2;2}$	$\tilde{4;1;2}$	135^0
30	$\tilde{2;2;6}$	$\tilde{5;4;2}$	$\tilde{4;2;4}$	150^0

Задания для самостоятельной работы дома

1. Даны точки $A(3; 1; 2)$ и $B(1; 2; 1)$. Найдите:

а) координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{BA}$;

б) длину вектора $\vec{AB}$;

в) направляющие косинусы вектора $\vec{BA}$.

2. Вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$.

. Вычислите его координаты при условии, что $|\vec{a}| = 2$.

3. Даны: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Вычислите $|\vec{a} + \vec{b}|$.

4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 120^\circ$, причем $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определите $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

5. На плоскости Oxy постройте векторы $\vec{OA} = a + 2i$, $\vec{OB} = b + 3i + 3j$ и $\vec{OC} = c + 2i + 6j$. Разложите вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Определите, при каких значениях α и β векторы $\vec{a}(3; \alpha; 1)$ и $\vec{b}(4; 1; \beta)$ компланарны.

7. Определите угол между векторами $\vec{a}(1; 2; 3)$ и $\vec{b}(6; 4; 2)$.

8. Вычислите: а) $\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{a}^2 - \vec{b}^2$; в) $3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{a} - 2\vec{b}$.
б)

9. Даны вектор $\vec{a}(2; 9; 1)$ и точка $A(3; 0; 1)$. Найдите длину вектора $\vec{AB}$,

перпендикулярного вектору $\vec{a}$, если известно, что точка B принадлежит оси OZ .

10. Даны точки $A(2; 1; 2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(3; 2; 1)$. Найдите:

а) $\vec{AB} \times \vec{BC}$; б)

$$\text{в) } \vec{BC} \times \vec{CA} \times \vec{CB} = \vec{CA} \times \vec{CB} \times \vec{CA}.$$

11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

12. Найдите смешанное произведение векторов $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$, если

$$A(2; 2; 2), \quad B(4; 3; 3), \quad C(4; 5; 4), \quad D(5; 5; 6).$$

13. Найдите объем пирамиды с вершинами в точках

$O(0;0;0)$, $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$ и вычислите площадь грани ABC и высоту

пирамиды, опущенную на эту грань.

14. Проверьте компланарность векторов $\vec{a}(2;3;1)$, $\vec{b}(1;3;1)$, $\vec{c}(1;9;11)$.

15. Объем тетраэдра равен $\frac{5}{6}$, три его вершины находятся в точках

$A(2;1;1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;1;3)$. Найдите координаты четвертой вершины D ,

если известно, что она лежит на оси Oy .

Практическое занятие № 3

Тема занятия «Ранг матрицы и методы его нахождения»

Цель занятия: Формирование умений находить ранг матрицы.

Организационная форма занятия: вычислительный практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

При формировании на занятии названных компетенций специалист должен освоить понятие ранга матрицы, уметь применять основные методы вычисления ранга матрицы при исследовании систем линейных уравнений, применять решение этих задач при решении задач математического анализа и задач предметной области.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Определение ранга матрицы.
2. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
3. Метод окаймляющих миноров нахождения ранга матрицы.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.

4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.

Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Рекомендуемая литература

[1] глава 3 пп. 3.1. – 3.2.

[2] часть 1 глава IV § 4.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Найдите ранг матрицы с помощью элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 15 & 4 \\ 5 & 5 & 16 & 7 \\ 11 & 19 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Сводим матрицу к ступенчатому виду:

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -20 & -9 \\ 0 & 9 & 18 & 9 \\ 0 & 9 & 18 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -20 & -9 \\ 0 & 9 & 18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -20 & -9 \\ 0 & 9 & 18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1  1  2 1 1 
 $\sim$ 0  9 $\sim$ 20 $\sim$ 9  $\sim$ 0  9 $\sim$ 20 $\sim$ 9  .
  9 $\sim$ 18 $\sim$ 9   0 2 0  .

Таким образом, $\text{rang } A = 3$.

2. С помощью метода окаймленных миноров найдите ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Находим ненулевой минор 1-го порядка. Начнем с левого верхнего угла: $M_1 = 1$.

Окаймляем его, добавляя 2-ю строку и 2-ой столбец:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = -7 \neq 0.$$

Находим другое окаймление минора 1-го порядка. Например, добавим 2-ю строку и 3-й столбец:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = -10 \neq 0.$$

Окаймляем минор M_{21} . Добавим 3-ю строку и 4-й столбец:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 4 \cdot 2 = 6 - 12 = -6 \neq 0.$$

Составляем другое окаймление M_{21} , добавляем 3-ю строку и 2-ой столбец:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 2 - 12 - 16 = -26 \neq 0.$$

Так как все окаймляющие миноры 3-го порядка равны нулю, то наивысший порядок отличных от нуля миноров равен 2. Следовательно, $\text{rang } A = 2$.

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какая матрица называется матрицей ступенчатого вида?
2. Дайте определение ранга матрицы.
3. Перечислите элементарные преобразования матрицы.

4. Как вычислить ранг матрицы с помощью элементарных преобразований?
5. Введите понятия линейно зависимых и линейно независимых строк (столбцов) матрицы. Какое еще можно дать определение ранга матрицы?
6. Изложите метод окаймляющих миноров для нахождения ранга матрицы. На каких свойствах этот метод основан?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. С помощью элементарных преобразований вычислите ранги следующих матриц:

$$\begin{array}{l}
 \text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 & 3 \\ 10 & 18 & 22 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 7 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
 \text{б) } A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 & 7 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

2. Методом окаймляющих миноров найдите ранги следующих матриц:

$$\begin{array}{l}
 \text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 32 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 7 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
 \text{б) } A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. С помощью элементарных преобразований вычислите ранги следующих матриц:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 \begin{array}{c} \odot \\ 3 \end{array} & 2 & 1 & 5 & \begin{array}{c} \odot \\ 4 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \odot \\ 6 \end{array} & 4 & \sim 2 & 3 & \begin{array}{c} \odot \\ 1 \end{array} \\
 A \bullet \begin{array}{c} \odot \\ 3 \end{array} 2 & \sim 3 & \sim 2 & & \\
 \begin{array}{c} \odot \\ 6 \end{array} & & & &
 \end{array}
 &
 \begin{array}{ccccc}
 \begin{array}{c} \odot \\ 1 \end{array} & 0 & 2 & \sim 1 & 2 & 3 \\
 \begin{array}{c} \odot \\ 3 \end{array} & 1 & 1 & \sim 2 & \sim 1 & 2 \\
 B \bullet \begin{array}{c} \odot \\ 7 \end{array} 2 & 7 & \sim 5 & \sim 1 & 3 \\
 \begin{array}{c} \odot \\ 6 \end{array} & & & &
 \end{array}
 \\
 \\
 \begin{array}{ccccc}
 \begin{array}{c} \odot \\ 9 \end{array} 6 & \sim 1 & 1 & & \\
 \begin{array}{c} \odot \\ 2 \end{array} & & & & \\
 \begin{array}{c} \odot \\ 4 \end{array} 5 & 2 & & &
 \end{array}
 &
 \begin{array}{ccccc}
 \begin{array}{c} \odot \\ 6 \end{array} \sim 1 & \sim 9 & 3 & 1 & 3 \\
 \begin{array}{c} \odot \\ 2 \end{array} 0 & & & & 4 \\
 \begin{array}{c} \odot \\ 3 \end{array} & \sim 3 & 0 & 1 &
 \end{array}
 \end{array}$$

a) б)

2. Методом окаймляющих миноров найдите ранги следующих матриц:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 \begin{array}{c} \odot \\ 1 \end{array} & 1 & 1 & 1 & \begin{array}{c} \odot \\ 4 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \odot \\ 1 \end{array} & 1 & \sim 1 & \sim 1 & \\
 A \bullet \begin{array}{c} \odot \\ 1 \end{array} & 1 & 1 & \sim 1 & \\
 \begin{array}{c} \odot \\ 1 \end{array} & & & &
 \end{array}
 &
 \begin{array}{ccccc}
 \begin{array}{c} \odot \\ 1 \end{array} 2 & 1 & 3 & 4 & \begin{array}{c} \odot \\ 4 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \odot \\ 3 \end{array} 4 & 2 & 6 & 8 & \\
 B \bullet \begin{array}{c} \odot \\ 3 \end{array} & & & & \\
 \begin{array}{c} \odot \\ 1 \end{array} & 2 & 1 & \sim 3 & \sim 4
 \end{array}
 \\
 \\
 \begin{array}{ccccc}
 \begin{array}{c} \odot \\ 1 \end{array} \sim 1 & \sim 1 & 1 & & \\
 \begin{array}{c} \odot \\ 1 \end{array} & 2 & 1 & &
 \end{array}
 &
 \begin{array}{ccccc}
 \begin{array}{c} \odot \\ 1 \end{array} & 2 & 1 & &
 \end{array}
 \end{array}$$

a) б)

Практическое занятие № 4

Тема занятия «Методы нахождения обратной матрицы»

Цель занятия: Сформировать умение находить обратную матрицу.

Организационная форма занятия: практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

При формировании на занятии названных компетенций специалист должен освоить понятие обратной матрицы, условия ее существования и методы ее нахождения, уметь применять обратные матрицы при решении матричных уравнений, решении задач о межотраслевом балансе, применять решение этих задач при решении задач предметной области.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Обратная матрица и условия ее существования.
2. Нахождение обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
3. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
4. Приложения обратных матриц.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома. Подготовьтесь к самостоятельной работе № 2 по теме «Ранг матрицы. Обратная матрица». Примерный вариант работы Вы можете найти в программе дисциплины.

Рекомендуемая литература

[1] глава 3 п. 2.

[2] глава IV § 2.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Рекомендуется рассмотреть в [2] часть 1 разобранное задание 405 или в [3] часть 1 § 3 пример 8, а также следующие примеры:

1. Найдите матрицу, обратную матрице алгебраических дополнений.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ с помощью}$$

Решение.

1. Убедимся, что данная матрица невырожденная, для этого вычислим ее

определитель:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (12 - 2) + 1 \cdot (3 - 0) = -1 - 20 + 3 = -18 \neq 0$$

2. Вычислим алгебраические дополнения для каждого элемента определителя матрицы:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, & A_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 14; \\
 A_{21} &= -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \\
 A_{31} &= \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5.
 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем матрицу из алгебраических дополнений

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 14 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Транспонируем полученную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 14 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

4. Записываем обратную матрицу:

5. Можно сделать проверку, получив $A \cdot A^{-1} = E$ и $A^{-1} \cdot A = E$ (проверьте самостоятельно).

2. Для матрицы A из примера 1 найдите обратную матрицу с помощью элементарных преобразований.

Решение. К данной матрице справа приписываем единичную матрицу того же порядка. Далее с помощью элементарных преобразований получаем слева единичную матрицу. Тогда матрица, которая окажется справа, и будет

обратной для данной матрицы.

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & \sim 1 & 1 & 0 & 0 \\
 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \sim 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \xrightarrow{\sim} \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & \sim 1 & 1 & 0 & 0 \\
 5 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
 8 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc|ccc}
 \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 2 & \sim 1 & 3 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 0 & 1 & 0 \\
 \sim \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 0 & 1 & \sim & 0 & \sim \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 0 & \tilde{1}
 \end{array} & \begin{array}{ccc|ccc}
 \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 0 & 1 & 0 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 0 & 1 & 0 \\
 \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 0 & 1 & \sim 3 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 0 & 1 & 0 \\
 \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 0 & 0 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 1 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 0 & 0 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 1
 \end{array} & \begin{array}{ccc|ccc}
 \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 0 & 0 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 1 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 0 & 0 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 1 \\
 \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 0 & 0 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 1 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 0 & 0 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 1 \\
 \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 0 & 0 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 1 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 0 & 0 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 1
 \end{array}
 \end{array}$$

Таким образом,

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 1 & 2 & 1 \\
 \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 9 & 9 & 9
 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 1 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 1 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 1 \\
 \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 1 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 3 & \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 3
 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 3 & & \\
 \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 14 & 8 & \sim 5 \\
 \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☀} \end{array} 9 & 9 & 9
 \end{array}
 \end{array}$$

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Определите понятия обратимая матрица, обратная матрица, вырожденная и невырожденная матрицы.
2. В каком случае определитель матрицы равен нулю?
3. Назовите условия обратимости матрицы.
4. Дайте определение минора и алгебраического дополнения.
5. Выведите формулу нахождения обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
6. Сформулируйте алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.

7. Назовите элементарные преобразования матрицы.
8. Расскажите, как найти обратную матрицу с помощью элементарных преобразований путем присоединения единичной матрицы.
9. Как решается вопрос об обратимости матрицы при применении метода элементарных преобразований для ее отыскания?
10. Как проверить правильность нахождения обратной матрицы?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите обратные матрицы для данных матриц с помощью алгебраических дополнений:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Р³

2. Путем присоединения единичной матрицы найдите обратные матрицы для данных матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Решите матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите обратные матрицы для данных матриц с помощью алгебраических дополнений:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Р¹

2. Путем присоединения единичной матрицы найдите обратные матрицы для данных матриц:

а)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

б)
$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в)
$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ⓟ

3. Решите матричное уравнение:

Практические занятия № 5-6

Тема занятия «Системы линейных уравнений. Методы решения»

Цель занятия: Сформировать умения и навыки решения систем линейных уравнений, овладение критериями исследования систем линейных уравнений.

Организационная форма занятия: практикум

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

Формирование на занятии у будущих специалистов этих компетенций предполагает обучение студентов

- сформулировать гипотезу и проверить ее в дальнейшем;
- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- применять основные понятия, идеи и методы фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач;
- планировать самостоятельную работу;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Системы линейных уравнений. Основные определения.
2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
3. Критерий совместности систем линейных уравнений.
4. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
5. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.
6. Однородная система линейных уравнений, условие существования ненулевых решений

Методические рекомендации

Для подготовки дома к занятию № 5

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

Для подготовки дома к занятию № 6 подготовьтесь к самостоятельной работе №3 по теме «Методы решения систем линейных уравнений».

Примерный вариант этой работы Вы можете найти в программе дисциплины. На занятии по указанию преподавателя.

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. На занятии № 5 решите предложенный преподавателем вариант самостоятельной работы №2.
4. На занятии № 6 решите предложенный преподавателем вариант самостоятельной работы №3.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома. В тетради для индивидуальных домашних заданий выполните ИДЗ №1 по теме «Методы решения систем линейных уравнений» и сдайте на следующем занятии его на проверку

преподавателю. Индивидуальные задания выполняются по вариантам определенным для Вас преподавателем.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 3 п. 3.4.
- [2] часть 1 глава I §5, глава IV §§ 5 – 7.
- [3] часть 1 глава 2 § 8.
- [4] часть 1 занятие 15.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Решите систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу и сводим ее к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 & -3 & 2 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -7 & 7 & -2 & -1 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 & -3 & 2 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & -5 & 9 & 4 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 & -3 & 2 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

Матрица свелась к треугольному виду, следовательно, система имеет единственное решение.

Восстанавливаем систему и решаем её снизу вверх.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, & x_1 = 2 + 2x_2 + x_3, & x_1 = 2 + 2 \cdot 1 + 1, & x_1 = 5 \\ x_2 - x_3 = 1, & x_2 = 1 + x_3, & x_2 = 1 + 1, & x_2 = 2 \\ x_3 = 1, & x_3 = 1, & x_3 = 1, & x_3 = 1 \end{cases}$$

2. Решите систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу и сводим её к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

Данная система не совместна, так как последняя строка матрицы соответствует уравнению $0 = x_1 + 0 = x_2 + 0 = x_3 = 5$, которое решения не имеет.

3. Решите систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу и сводим ее к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Матрица свелась к трапециoidalному виду, следовательно, система является неопределенной:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть x_3 - свободная неизвестная. Тогда получаем общее решение системы:

$$x_1 = 1 - x_3$$

$$x_2 \neq 0.$$

4. Исследуйте системы из примеров 1-3 согласно критерию совместности.

Решение. Для примера 1. $\text{rang } A = \text{rang } B = 3$ и число неизвестных $n=3$, т.е. система определенная.

Для примера 2. $\text{rang } A = 3, \text{rang } B = 4$, поэтому система несовместна.

Для примера 3. $\text{rang } A = \text{rang } B = 2$, число неизвестных $n=3$, поэтому система является неопределенной.

5. Решите систему в матричной форме:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Найдем A^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☒} \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 5 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} \sim 2 & & 0 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \text{☒} \end{array} \\
 \sim \begin{array}{c} \text{☒} \\ \text{☒} \end{array} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} & 1 & 0 \end{array} \begin{array}{c} \sim 1 \\ \text{☒} \end{array} \sim \\
 \text{☒} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \end{array} \left| \begin{array}{ccc} \sim 5/11 & \sim 1/11 & 7/11 \end{array} \begin{array}{c} \text{☒} \\ \text{☒} \end{array} \\
 \textcircled{P} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{☀} \\ \text{☒} \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 3/11 & 5/11 & \sim 2 \ 1/1 \end{array} \begin{array}{c} \text{☒} \\ \text{☒} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{☒} \\ \text{☒} \end{array} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1/11 & \sim 2 \ 1/1 & 3/11 \end{array} \begin{array}{c} \text{☒} \\ \text{☒} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{☒} \\ \text{☒} \end{array} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 5 \ 1/1 & \sim 1 \ 1/1 & 7/11 \end{array} \begin{array}{c} \text{☒} \\ \text{☒} \end{array} \\
 \textcircled{P} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \end{array}
 \end{array}
 .$$

$$A^1 \bullet \begin{pmatrix} 3/11 & 5/11 & 2/11 \\ 1/11 & 2/11 & 3/11 \\ 5/11 & 1/11 & 7/11 \end{pmatrix}$$

Отсюда

Получаем решение системы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/11 \\ 5/11 \\ 2/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/11 \\ 3/11 \\ 1/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5/11 \\ 4/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X \bullet \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/11 & 2/11 \\ 3/11 & 1/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/11 \\ 5/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/11 \\ 2/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 \\ 3/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/11 \\ 2/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 \\ 3/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $x_1 \bullet 1, x_2 \bullet 0, x_3 \bullet 1$.

Замечание. Матричный метод решения систем линейных уравнений применим только тогда, когда число уравнений системы равно числу неизвестных и матрица A является невырожденной.

6. Решите систему из примера 5 методом Крамера.

Решение. Вычисляем основной определитель системы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 3 = 11 \neq 0.$$

Вычисляем определители Δ_i :

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (15 - 4) = 11.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & \bullet & 2 & 3 & 3 & \bullet & 0. \\ & & 1 & & 1 & 2 & 2 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{3} \\ \text{2} \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ & 1 & 3 \\ & 2 & 2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} \sim 7 \\ \sim 1 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 3 & & \\ & \sim 14 & 3 \\ & & \sim 11. \end{array} \right.$$

Получаем

[illegible]

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определения системы линейных уравнений, однородной и неоднородной систем, решения системы.
2. Какая система называется совместной, а какая несовместной?
3. Дайте определение определенной и неопределенной систем.
4. Сформулируйте критерий совместности систем линейных уравнений.
5. Расскажите о методе Гаусса. Перечислите элементарные преобразования матрицы.
6. Когда, решая систему методом Гаусса, делаем вывод
 - о несовместности системы;
 - об определенности системы;
 - о неопределенности системы?
7. Как найти общее решение системы, приведенной к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса?
8. В чем особенность применения метода Гаусса при решении однородной системы?
9. Как записать систему линейных уравнений в матричной форме?
10. Вспомните условия существования обратной матрицы и методы ее нахождения.
11. Изложите матричный метод решения систем линейных уравнений. Какие системы можно решать этим методом.
12. Расскажите о методе Крамера решения систем линейных уравнений. Каковы границы его применения?
13. Какие выводы можно сделать о числе решений однородной системы линейных уравнений.
14. Сделайте сравнительный анализ рассмотренных методов решения систем линейных уравнений.

Задания практикума

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 9, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

2. Решите систему линейных уравнений матричным методом, методом Крамера и методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 13x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

3. Исследуйте и решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$$

4. Найдите фундаментальную систему решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы дома

Выполните ИДЗ по теме «Методы решения систем линейных уравнений»

1. Исследовать систему на совместность и число решений системы.
2. Изменить систему таким образом, чтобы она была совместной (определенной и неопределенной), несовместной.
3. Решить систему методом Гаусса.

Для определенной системы

4. Решить систему методом Крамера.

5. Решить систему матричным методом.

Системы к индивидуальным домашним заданиям.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 18,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 5,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 10,$$

$$1. \begin{pmatrix} 7 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 2.$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 48.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 7,$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 27,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 12,$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & x & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 40,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 17,$$

$$3. \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 41.$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 6,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 4,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x & x \end{pmatrix} = 8,$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & x \end{pmatrix} = 5,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 7,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 1,$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & x_3 & 2 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4.$$

$$6. \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 7,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 3,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 3,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 8,$$

$$7. \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 9.$$

$$8. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 9.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 27,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 3,$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 9,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = 6,$$

$$6,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = 4x.$$

- $5x$ $\sim 3x$ $\bullet 5$,
9. $\begin{matrix} \geq 1 & 2 & 3 & 4 \\ \text{''} \geq & \sim & & \end{matrix} 3x_3 \bullet \sim 4$
- $2x_1$
- $\begin{matrix} \text{''} \geq 1 & 2 & 3 & 4 \\ \text{''} \geq & \sim & & \end{matrix} 2x_1 \cdot x_2 \cdot 3x_3 \cdot x_4 \bullet 2$,
- $\begin{matrix} \geq \\ \text{''} \geq \end{matrix} x \cdot 2x \cdot 4x \cdot 3x \bullet 6$,
- $\begin{matrix} \geq \\ \text{''} \geq \end{matrix} 3x \cdot x^2 \cdot 5x \cdot x^4 \bullet 9$,
- $\begin{matrix} \geq 1 & 2 & 3 & 4 \\ \text{''} \geq & & & \end{matrix}$
11. $\begin{matrix} \text{''} \\ \text{''} \end{matrix} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 3x_4 \bullet 7$.
- $\begin{matrix} \geq 1 & 2 & 3 & 4 \\ \text{''} \geq & & & \end{matrix} 7x_1 \cdot 8x_2 \cdot x_3 \cdot 5x_4 \bullet 40$.
- $\begin{matrix} \geq \\ \text{''} \geq \end{matrix} x_1 \cdot 2x_2 \cdot 3x_3 \cdot 4x_4 \bullet 3$,
- $\begin{matrix} \geq \\ \text{''} \geq \end{matrix} 4x \cdot 7x \cdot 10x \cdot 13x \bullet 11$,
- $\begin{matrix} \geq \\ \text{''} \geq \end{matrix} x \cdot 4x^2 \cdot 5x^3 \cdot 2x^4 \bullet 9$,
- $\begin{matrix} \geq 1 & 2 & 3 & 4 \\ \text{''} \geq & & & \end{matrix} 3x_1 \cdot 14x_2 \cdot 9x_3 \cdot 8x_4 \bullet 13$.
- $\begin{matrix} \geq 1 & 2 & 3 & 4 \\ \text{''} \geq & & & \end{matrix} 2x_1 \cdot 2x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \bullet 8$.

$$\Rightarrow x_1, 4x_2, 5x_3, 2x_4 \bullet 9,$$

$$\Rightarrow 3x_1, 14x_2, 9x_3, 8x_4 \bullet 13,$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4 \bullet 3, \\ &\Rightarrow x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4 \bullet 3, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1, 6x_2, 5x_3, 6x_4 \bullet 5,$$

$$\Rightarrow 3x_1, x_2, x_3, x_4 \bullet 2,$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x_1, 9x_2, 5x_3, 5x_4 \bullet 9, \\ &\Rightarrow x_1, 9x_2, 5x_3, 5x_4 \bullet 9, \end{aligned}$$

$$15. \Rightarrow x_1, x_2, x_3, x_4 \bullet 2.$$

$$16. \Rightarrow x_1, x_2, 4x_3, x_4 \bullet 6.$$

$$\Rightarrow 3x_1, x_2, 4x_3, x_4 \bullet 2,$$

$$\Rightarrow x_1, 5x_2, 4x_3, 4x_4 \bullet 3,$$

$$\Rightarrow x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4 \bullet 3,$$

$$17. \Rightarrow x_1, 6x_2, 5x_3, 6x_4 \bullet 5.$$

$$\Rightarrow 2x_1, x_2, 3x_3, x_4 \bullet 8, 9,$$

$$\Rightarrow x_1, x_2, 2x_3, 2x_4 \bullet 4,$$

$$\Rightarrow 3x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4 \bullet 4,$$

$$18. \Rightarrow 2x_1, x_2, 3x_3, x_4 \bullet 2.$$

$$\Rightarrow 3x_1, x_2, 5x_3, x_4 \bullet 9,$$

$$\Rightarrow x_1, x_2, x_3, 3x_4 \bullet 7,$$

$$\Rightarrow 2x_1, x_2, 3x_3, x_4 \bullet 2,$$

$$19. \Rightarrow 3x_1, x_2, x_3, 2x_4 \bullet 4.$$

$$\Rightarrow x_1, 4x_2, 9x_3, 16x_4 \bullet 0,$$

$$\Rightarrow x_1, 6x_2, 21x_3, 52x_4 \bullet 8,$$

$$\Rightarrow x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4 \bullet 2,$$

$$20. \Rightarrow x_1, 16x_2, 81x_3, 256x_4 \bullet 48.$$

$$\Rightarrow x_1, 16x_2, 81x_3, 265x_4 \bullet 48,$$

$$\Rightarrow 4x_1, 18x_2, 48x_3 \bullet 10,$$

$$\Rightarrow x_1, 4x_2, 9x_3, 16x_4 \bullet 0,$$

$$21. \Rightarrow x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4 \bullet 2.$$

$$\Rightarrow 2x_1, 5x_2, 5x_3, 2x_4 \bullet 29,$$

$$\Rightarrow 3x_1, 7x_2, 8x_3, x_4 \bullet 41,$$

$$\Rightarrow 3x_1, 6x_2, 4x_3, x_4 \bullet 30,$$

$$22. \Rightarrow 2x_1, 3x_2, 4x_3 \bullet 19.$$

$$\Rightarrow 2x_1, 3x_2, 4x_3 \bullet 19,$$

$$\Rightarrow 2x_1, 5x_2, 5x_3, 2x_4 \bullet 29,$$

$$\Rightarrow x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4 \bullet 2,$$

$$\Rightarrow 3x_1, 4x_2, x_3, 3x_4 \bullet 3,$$

$$\Rightarrow 3x_1, 4x_2, 3x_3, 2x_4 \bullet 4,$$

$$\Rightarrow 3x_1, 3x_2, 4x_3, x_4 \bullet 19,$$

● 12,

$$\begin{array}{c} 2 \quad 3 \quad 4 \\ 9x_2, \quad 4 \quad x_4 \\ x_3 \end{array} \bullet \sim 1,$$

23. $\begin{array}{c} x_1, x_2 \\ x_3, x_4 \end{array} \bullet 1.$

24. $4x_1, 6x_2, 3x_3, x_4 \bullet 2.$

$\begin{array}{c} 4x_1, 6x_2 \\ 3x_3, x_4 \end{array} \bullet 2,$

$2x_1, 2x_2, 5x_4 \bullet 11,$

$\begin{array}{c} 3x_1, 4x_2 \\ 5x_3, x_4 \end{array} \bullet 5,$

$\begin{array}{c} 3x_1, 4x_2 \\ x_3, 4x_4 \end{array} \bullet 14,$

$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ 3x_1, 4x_2, x_3, 3x_4 \end{array} \bullet 5,$

$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ 2x_1, 3x_2, 2x_3, 3x_4 \end{array} \bullet 7,$

25. $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ 5x_1, 9x_2, 4x_3, x_4 \end{array} \bullet \sim 1.$

26. $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ 2x_1, 5x_2, 2x_3, 2x_4 \end{array} \bullet 16.$

$\begin{array}{c} 2x_1, 5x_2 \\ 2x_3, 2x_4 \end{array} \bullet 16,$

$3x_1, 3x_2, 4x_3, 5x_4 \bullet 9,$

$\begin{array}{c} 2x_1, 3x_2 \\ 2x_3, 3x_4 \end{array} \bullet 7,$

$\begin{array}{c} x_1, 12x_2, 15x_3 \\ 5x_4 \end{array} \bullet 23,$

$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ x_1, 2x_2, x_3, 4x_4 \end{array} \bullet 5,$

$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ 4x_1, 5x_2, 7x_3, 3x_4 \end{array} \bullet \sim 5,$

27. $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ 2x_1, 2x_2, 5x_3, x_4 \end{array} \bullet 11.$

28. $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ 7x_1, 3x_2, 3x_3, 4x_4 \end{array} \bullet \sim 2.$

$\begin{array}{c} x_1, 4x_2 \\ 6x_3, 2x_4 \end{array} \bullet \sim 1,$

$4x_1, 4x_2, 7x_3, 5x_4 \bullet 25,$

$\begin{array}{c} 6x_1, 4x_2 \\ 5x_3, 3x_4 \end{array} \bullet 41,$

$\begin{array}{c} 2x_1, x_2 \\ x_3, x_4 \end{array} \bullet 6,$

$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ 4x_1, 2x_2, 5x_3, 3x_4 \end{array} \bullet 27,$

$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ 5x_1, 3x_2, 4x_3, 3x_4 \end{array} \bullet 19,$

29. $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ 3x_1, 5x_2, 3x_3, 2x_4 \end{array} \bullet 12.$

30. $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ x_1, 2x_2, x_3, x_4 \end{array} \bullet 8.$

Практическое занятие № 7

Тема занятия «Линейный оператор и его матрица. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора»

Цель занятия: Формирование понятий линейного оператора, собственных векторов и собственных значений линейного оператора; овладение методами проверки операторов на линейность; формирование умений находить матрицу линейного оператора, собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Организационная форма занятия: практикум - тренинг.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

Формирование на занятии у будущих специалистов этих компетенций предполагает обучение студентов

- анализировать ситуации и делать выводы;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- применение основных понятий, идей и методов математики для решения базовых задач предметной области.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Определение линейного оператора.
2. Матрица линейного оператора.
3. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Методические рекомендации

Для подготовки дома к занятию.

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.

5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.
6. Подготовьтесь к самостоятельной работе №4 по теме «Линейный оператор». Примерный вариант Вы можете найти в программе дисциплины.

На занятии по указанию преподавателя.

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. На занятии решите предложенный преподавателем вариант самостоятельной работы №4.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Рекомендуемая литература

[2] часть 1 глава 5 § 4.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Проверьте, что заданный в пространстве T_3 оператор

$$\varphi(x) = [\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3] \quad \forall x = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \in T_3 \text{ является линейным.}$$

Найти матрицу этого оператора в базисе $e_1 = [1, 0, 1]$, $e_2 = [1, -1, 1]$, $e_3 = [0, 1, 1]$.

Решение. Проверим условия (17.1) и (17.2):

$$\forall x = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \in T_3 \text{ и } \forall y = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] \in T_3 : x + y = [\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3],$$

тогда

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= [(\alpha_1 + \beta_1) - (\alpha_2 + \beta_2), \alpha_3 + \beta_3, (\alpha_2 + \beta_2) + 2(\alpha_3 + \beta_3)] = \\ &= [(\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2), \alpha_3 + \beta_3, (\alpha_2 + 2\alpha_3) + (\beta_2 + 2\beta_3)] = \\ &= [\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3] + [\beta_1 - \beta_2, \beta_3, \beta_2 + 2\beta_3] = \varphi(x) + \varphi(y). \end{aligned}$$

$$\forall x = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \in T_3 \text{ и } \forall \lambda \in P : \lambda x = [\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \lambda \alpha_3].$$

$$\text{Тогда } \varphi(\lambda x) = [\lambda \alpha_1 - \lambda \alpha_2, \lambda \alpha_3, \lambda \alpha_2 + 2\lambda \alpha_3] = \lambda \varphi(x).$$

Следовательно, данный оператор является линейным.

Найдём образы базисных векторов:

$$\varphi(e_1) = [1-0, 1, 0+2] = [1, 1, 2],$$

$$\varphi(e_2) = [1+1, 1, -1+2] = [2, 1, 1],$$

$$\varphi(e_3) = [0-1, 1, 1+2] = [-1, 1, 3].$$

Разлагаем образы базисных векторов по векторам базиса:

$$\varphi(e_1) = [1, 1, 2] = a_{11}[1, 0, 1] + a_{12}[1, -1, 1] + a_{13}[0, 1, 1],$$

$$\varphi(e_2) = [2, 1, 1] = a_{21}[1, 0, 1] + a_{22}[1, -1, 1] + a_{23}[0, 1, 1],$$

$$\varphi(e_3) = [-1, 1, 3] = a_{31}[1, 0, 1] + a_{32}[1, -1, 1] + a_{33}[0, 1, 1].$$

Для определения элементов матрицы линейного оператора получаем системы:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

С учетом, что матрица из коэффициентов при неизвестных во всех полученных системах одинаковая, эти системы лучше решать матричным способом.

Запишем системы в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{откуда } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{откуда } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{откуда } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу:

Находим обратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Таким образом, данный оператор в указанном базисе имеет матрицу:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Линейный оператор задан матрицей

Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$-(1-\lambda)-2=0,$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0,$$

отсюда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ – собственные значения линейного оператора.

Находим собственные векторы.

Для собственного значения $\lambda_1 = 2$ получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2\beta_1 - 2\beta_2 = 0 \\ -\beta_1 + \beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = \beta_2.$$

Таким образом, $X_{\lambda 1} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, принадлежащий

собственному значению $\lambda_1 = 2$, где $\beta_1 \neq 0$ – любое действительное число.

Для собственного значения $\lambda_2 = -1$ получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ 2\beta_1 + \beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_2 = -\beta_1.$$

Тогда $X_{\lambda 2} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -\beta_1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, принадлежащий

собственному значению $\lambda_2 = -1$, где $\beta_1 \neq 0$ – любое действительное число.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение линейного оператора.
2. Какие условия необходимо проверить, чтобы доказать линейность оператора?
3. Введите понятие матрицы линейного оператора.
4. Зависит ли матрица линейного оператора от выбора базиса?
5. Каким методом удобнее решать системы линейных уравнений для

нахождения матрицы линейного оператора?

6. Введите понятия собственного вектора и собственного значения линейного оператора.

7. Запишите, как выглядит характеристическое уравнение для нахождения собственных значений линейного оператора?

8. Как найти собственные векторы линейного оператора?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Операторы ψ и ϕ заданы так, что для любого вектора $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$
- $$\psi x = 2\alpha_1 e_1 + \alpha_3 e_2 + \alpha_1 e_3 \quad \text{и} \quad \phi x = 2\alpha_3 e_1 + \alpha_2 e_2 + 2\alpha_1 e_3.$$
- Установите,

какой из операторов является линейным, и найдите матрицу линейного оператора в базисе $B = \{e_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$

2. Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей

$$B_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- а) $\lambda = 2, 3$; $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
- б)

Задания для самостоятельной работы дома

1. Операторы ψ и ϕ заданы так, что для любого вектора $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$

$$\psi x = 3\alpha_1 e_1 + 2\alpha_3 e_2 + \alpha_2 e_3 \quad \text{и} \quad \phi x = 2\alpha_3 e_1 + 3\alpha_2 e_2 + 2\alpha_1 e_3.$$

Установите,

какой из операторов является линейным, и найдите матрицу линейного оператора в базисе $B = \{e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$

2. Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

а) $\lambda = 2, 3$; $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1_→; 6)

φ
4
4
0
→

Q

2_→

2

1

→

Практическое занятие № 8

Тема занятия «Контрольное занятие»

Цель занятия: Проверка практических умений и навыков по разделу «Основы линейной и векторной алгебры».

Организационная форма занятия: контрольная работа.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

Формирование на занятии у будущих специалистов этих компетенций предполагает обучение студентов

- сформулировать гипотезу и проверить ее в дальнейшем;
- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- владеть основными методиками решения учебно-исследовательских задач;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- планировать самостоятельную работу;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Базис и ранг системы векторов.
2. Обратная матрица, методы ее нахождения.
3. Критерий совместности системы линейных уравнений.
4. Методы решения систем линейных уравнений.
5. Фундаментальная система решений системы линейных уравнений.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Подготовьтесь к контрольной работе, используя теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями.
2. Просмотрите решенные ранее задания по разделу «Основы линейной и векторной алгебры», обратите особое внимание на разобранные примеры решения типовых задач.

3. Изучите еще раз выполненные задания индивидуальных домашних заданий, обратите внимание на сделанные замечания преподавателя при их проверке и сделайте работу над ошибками.
4. Прорешайте примерный вариант контрольной работы, приведенный ниже.

На занятии по указанию преподавателя решите предложенный Вам вариант контрольной работы.

Дома

1. Подготовьтесь к коллоквиуму по вопросам приведенным ниже.
2. Пройдите предварительное компьютерное тестирование в указанное преподавателем время.
3. Сдайте коллоквиум по графику, предложенному преподавателем.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 2, глава 3.
- [2] часть 1 глава I § 5, глава IV.
- [3] часть I глава 2 §§ 8 – 9.
- [4] часть I занятия 15 – 16.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

I. Вопросы для подготовки к контрольной работе

1. Линейные операции над векторами.
2. Скалярное произведение векторов и его приложения.
3. Векторное произведение векторов и его приложения.
4. Смешанное произведение векторов и его приложения.
5. Определение линейной зависимости и линейной независимости системы векторов.
6. Базис и ранг системы векторов.
7. Координаты вектора в выбранном базисе.
8. Обратная матрица, условия ее существования.
9. Методы отыскания обратной матрицы.
10. Операции над матрицами.

11. Критерий совместности системы линейных уравнений.
12. Методы решения систем линейных уравнений.
13. Нахождение фундаментальной системы решений системы линейных уравнений.

II. Вопросы для подготовки к коллоквиуму №1

Тема «Основы линейной и векторной алгебры»

1. Методы математики и ее значение для прикладных наук. Основные разделы современной математики.
2. Матрицы, основные определения.
3. Действия над матрицами: сумма, произведение матрицы на число, произведение матрицы на матрицу.
4. Определение определителя квадратной матрицы. Определители второго и третьего порядков.
5. Свойства определителей.
6. Миноры и алгебраические дополнения.
7. Вычисление определителя n -го порядка.
8. Скаляры и векторы, основные определения. Линейные действия над векторами: сумма, разность, произведение вектора на число.
9. Линейная зависимость системы векторов, базис и ранг системы векторов, координаты вектора.
10. Скалярное произведение двух векторов, длина вектора, угол между векторами, условие ортогональности векторов.
11. Векторное произведение векторов: определение, свойства, вычисление, приложения.
12. Смешанное произведение векторов: определение, свойства, вычисление, приложения.
13. Ранг матрицы, его вычисление с помощью элементарных преобразований.
14. Вычисление ранга матрицы методом окаймления миноров.
15. Обратная матрица. Нахождение обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
16. Вычисление обратной матрицы путем присоединения единичной.
17. Системы линейных уравнений. Основные определения.
18. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

19. Критерий совместности систем линейных уравнений.
20. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
21. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.
22. Однородная система линейных уравнений, условие существования ненулевых решений.
23. Линейные пространства. Понятие n -мерного вектора. Примеры векторных пространств.
24. Определение линейного оператора, примеры.
25. Матрица линейного оператора, определение и нахождение.
26. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, их нахождение.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Примерный вариант контрольной работы № 1

1. Найдите угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, если $A(0;3;6)$, $B(12;3;3)$, $C(9;3;6)$.
2. Найдите какой-нибудь базис и ранг системы векторов $a_1 = (0, 4, 10, 1)$,
 $a_2 = (4, 8, 17, 7)$, $a_3 = (10, 18, 40, 17)$, $a_4 = (1, 7, 17, 3)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Решите матричное уравнение

Ⓟ

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 3x_2 & 5x_3 & 7x_4 \\ 4x_1 & 8x_2 & 2x_3 & 3x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4. Исследуйте и решите систему уравнений

5. Решите систему линейных уравнений методом Крамера и матричным способом

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & x_2 & x_3 \\ 3x_2 & 4x_3 \\ x_1 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Найдите фундаментальную систему решений системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Практическое занятие № 9

Тема занятия «Системы координат на плоскости и в пространстве»

Цель занятия: Изучение способов изображения геометрических объектов на плоскости и в пространстве.

Организационная форма занятия: практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

Формирование на занятии у будущих специалистов этих компетенций предполагает обучение студентов

- анализировать ситуации и делать выводы;
- видеть проблемы в традиционных ситуациях;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- применение основных понятий, идей и методов математики для решения базовых задач.

При формировании на занятии названных компетенций специалист должен освоить понятие ранга матрицы, уметь применять основные методы вычисления ранга матрицы при исследовании систем линейных уравнений, применять решение этих задач при решении задач математического анализа и задач предметной области.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве.
2. Основные задачи в прямоугольной декартовой системе координат.
3. Преобразования прямоугольной декартовой системы координат.
4. Полярная система координат на плоскости, ее связь с прямоугольной.
5. Цилиндрическая и сферическая системы координат.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 1.
- [2] часть 1 глава I § 1, § 4.
- [3] часть 1 глава 1 § 3, § 5.
- [4] часть 1 занятия 1, 2, 7, 12, 13.
- [6] глава 1 § 3, глава 3 §§ 1 – 4.
- [7] глава 2 §1.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Рекомендуется рассмотреть в [2] часть 1 разобранные задания 2, 10, 14, 27, 28.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Расскажите о координатной прямой и о прямоугольной декартовой системе координат на плоскости и в пространстве.
2. Раскройте сущность метода координат.
3. Выведите формулу расстояния между двумя точками плоскости или двумя точками пространства по их прямоугольным декартовым координатам.
4. Докажите формулу деления отрезка в заданном отношении (на плоскости и в пространстве). Как будет выглядеть формула при делении отрезка пополам?
5. Какие виды преобразования прямоугольной декартовой системы координат на плоскости Вы знаете?
6. Расскажите о параллельном переносе прямоугольной декартовой системы координат и о зеркальном отображении осей координат.
7. Выведите формулы поворота прямоугольной декартовой системы координат.
8. Дайте определение полярной системы координат.
9. Установите связь между полярной и прямоугольной системой координат на плоскости.
10. Какие системы координат в пространстве помимо прямоугольной декартовой системы Вы знаете? Расскажите о цилиндрической и сферической системах координат. Установите взаимосвязь этих систем с прямоугольной декартовой системой координат.

Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Постройте на числовой прямой точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

а) $|x| = 5$; б) $|x-1| = 3$; в) $|2x-3| = |x|$; г) $|x-3| = |3x-1|$

2. Постройте на числовой прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам

а) $2x-3 \leq 0$; б) $x^2-16 > 0$; в) $x^2-8x+15 \leq 0$; г) $|2x-3| \leq 3$.

3. Постройте точки по их прямоугольным координатам

$A(3; 5)$; $B(1; 3)$; $C(0; 2)$;

Найдите координаты точек, симметричных относительно

- а) оси Ox ; б) начала координат; в) биссектрисы первого и третьего координатных углов.

4. Даны точки $A(3; 2)$; $B(2; 5)$; $C(2; 3)$. Определите длины сторон

треугольника, вычислите его площадь.

5. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках $A(3; 4)$; $B(1; 2)$;

$C(-1; 1)$; $D(3; 2)$.

$A(2; \frac{\pi}{4})$; $B(3; \frac{3\pi}{4})$

6. Постройте точки, заданные полярными координатами

$(4; \frac{\pi}{4})$; $(2; \frac{\pi}{2})$;

и

$C(1; \frac{5\pi}{4})$

$(3; \frac{\pi}{3})$.

Найдите координаты этих точек в прямоугольной декартовой системе координат.

7. Даны точки в прямоугольной декартовой системе координат $A(2; 2)$;

$\sqrt{}$

$\tilde{B}(3;1)$, $C(0;4)$, $\tilde{D}(5;0)$. Найдите полярные координаты этих точек.

8. Даны точки в полярной системе координат а) $A(3; \frac{\pi}{6})$ и $B(5; \frac{2\pi}{3})$; $A(\rho; \varphi)$ и $B(\rho_2; \varphi_2)$ б) $A(6; \frac{\pi}{3})$ и $B(3; \frac{\pi}{6})$; $A(\rho; \varphi)$ и $B(\rho_2; \varphi_2)$.

$B(\rho_2; \varphi_2)$. Найдите расстояние d между ними.

9. Одна из вершин треугольника OAB находится в полюсе, две другие – точки

$$A(5; \frac{\pi}{4}), B(4; \frac{\pi}{4})$$

$$12$$

и

и

10. Найдите координаты точек, симметричных точке $A(5; 1; 4)$ относительно

- а) плоскости Oxy ; б) плоскости Oxz ; в) плоскости Oyz ; г) оси абсцисс; д) оси ординат; е) оси аппликат; ж) начала координат.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Постройте на числовой прямой точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

а) $|x| = 2$; б) $|2x - 5| = 2$; в) $|5x - 6| = 2x$; г) $|4 - 2x| = |4 - 2x|$.

2. Постройте на числовой прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам

а) $14 - 7x > 0$; б) $x^2 - 25 \leq 0$; в) $x^2 - 6x + 5 \leq 0$; г) $|5 - 3x| \leq 1$.

3. Постройте точки по их прямоугольным координатам

$$\tilde{A}(1; 3); \tilde{B}(2; 0); \tilde{C}(1; 4)$$

Найдите координаты точек, симметричных относительно

- а) оси Oy ; б) точки $\tilde{B}(2; 0)$; в) биссектрисы второго и четвертого

координатных углов.

4. Даны точки $\tilde{A}(2; 3)$; $\tilde{B}(4; 5)$; $\tilde{C}(3; 4)$. Определите длины сторон

треугольника, вычислите его площадь.

5. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках $\tilde{A}(2; 3)$;

$$\tilde{B}(0; 4); \tilde{C}(7; 3); \tilde{D}(1; 6)$$

6. Постройте точки, заданные полярными координатами $A(3; \frac{\pi}{3})$; $B(4; \frac{\pi}{4})$;

$$\tilde{C}(2; \frac{5\pi}{4})$$

№ 6. Найдите координаты этих точек в прямоугольной декартовой системе координат.

7. Даны точки в прямоугольной декартовой системе координат $A(3;3)$,

$B(2; 2\sqrt{3})$, $C(0; 3)$, $D(4;0)$. Найдите полярные координаты этих точек.

8. Найдите площадь треугольника, вершина которого точки $A(3; \frac{\pi}{8})$; $B(8; \frac{7\pi}{24})$; $C(6; \frac{5\pi}{8})$.

9. Даны точки $A(2; 3; 7)$; $\tilde{B}(2; 3; 1)$; $C(4; 2; 0)$; $D(3; 0; 0)$. Найдите координаты их проекций на

а) плоскость Oxy ; б) плоскость Oxz ; в) плоскость Oyz ; г) ось абсцисс; д) ось ординат; е) ось аппликат.

10. Найдите координаты точек, симметричных точке $\tilde{B}(2; 3; 4)$ относительно

а) плоскости Oxy ; б) плоскости Oxz ; в) плоскости Oyz ; г) оси абсцисс; д) оси ординат; е) оси аппликат; ж) начала координат.

Практическое занятие № 10

Тема занятия «Определение и способы задания функции. Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований»

Цель занятия: Введение понятия функции, проведение классификации функций, повторение свойств и графиков основных элементарных функций, известных из школьного курса.

Организационная форма занятия: тематический семинар.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

Формирование у будущих специалистов этой компетенций на занятии предполагает обучение студентов

- анализировать ситуации и делать выводы;
- видеть проблемы в традиционных ситуациях;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- применение основных понятий, идей и методов математического анализа для решения базовых задач.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Определение и способы задания функции.
2. Классификация функций.
3. Основные элементарные функции, их свойства и графики.
4. Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.

4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома. Подготовьтесь к самостоятельной работе №5 по теме «Функции одной переменной, основные определения». Примерный вариант работы Вы можете найти в программе дисциплины.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 7 пп. 7.1 – 7.2.
- [2] часть 1 глава IV §§ 2 - 3.
- [3] часть 1 глава 4 §§ 13 - 15.
- [4] часть II занятия 2 – 4, 9.
- [5] глава 1 § 1.1.
- [6] глава 4 § 1.
- [7] глава IV § 1.
- [8] глава 4 § 1.

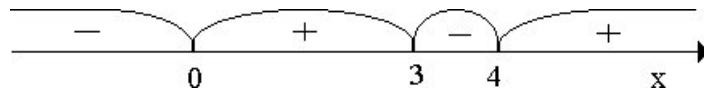
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x^3 - 7x^2 - 12x}$;

$$б) y = \arcsin(3x - 5).$$

Решение. а) Область определения функции $y = \sqrt{f(x)}$ удовлетворяет условию $f(x) \geq 0$, поэтому $x^3 - 7x^2 + 12x \geq 0$. Отсюда, решая методом интервалов, имеем:



$$D(y) = [0; 3] \cup [4; +\infty).$$

б) Область определения функции $y = \arcsin f(x)$ отвечает условию:

$$-1 \leq f(x) \leq 1, \text{ поэтому } D(y) = [-3; 5] \cap [-6; 3x - 4] \cap [-2; x - 4/3] = [-2; -4/3].$$

2. Найдите область изменения функции $f(x) = \ln(x-3)(2-x)$.

Решение. $D(f(x)) = (2; 3)$, так как только при этих значениях аргумента существует $\ln(x-3)(2-x)$.

Таким образом, для нахождения области значений функции $f(x)$ нужно знать область значений функции $f_1(x) = (x-3)(2-x) = -x^2 + 5x - 6$ при

$2 < x < 3$. При указанных значениях аргумента функция $f_1(x)$ достигает

наибольшего значения при $x = \frac{5}{2(1)} = \frac{5}{2}$.

Отсюда, очевидно, что $E(f_1(x)) = (0; f_1(\frac{5}{2})) = [0; \frac{1}{4}]$.

Найдем $f_1(\frac{5}{2}) = (\frac{5}{2} - 3)(2 - \frac{5}{2}) = \frac{5}{2} - (\frac{5}{2})^2 = -\frac{1}{4}$. Значит, $E(f_1(x)) = (0; \frac{1}{4}]$.

Следовательно, $E(f(x)) = (-\frac{1}{4}; \ln \frac{1}{4}] \cup (-\frac{1}{4}; 2\ln 2]$.

3. Исследуйте функции на четность:

$$\text{a) } f(x) \bullet x^5 - 2x;$$

$$\text{б) } f(x) \bullet \frac{1}{x^2 - 4x}.$$

Решение. а) $D(f)=\mathbb{R}$ - область определения функции симметрична относительно начала координат и так как

$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -f(x), \text{ то данная функция}$$

является нечетной.

$$b) D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 4) \cup (4; \infty).$$

Область определения функции несимметрична относительно начала координат, следовательно данная функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Определите нули и промежутки знакопостоянства функции:

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x^3 - x)^2}.$$

Решение. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

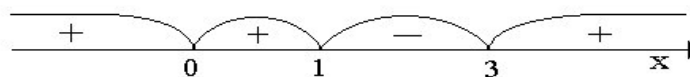
Найдем нули функции, т.е. точки, в которых значение функции равно 0:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{(x^3 - x)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x^3 - x)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 - x \neq 0$$

Отсюда $x=1$ или $x=3$.

Нули функции разбивают область определения функции на промежутки знакопостоянства. С помощью метода интервалов определяем знак функции на каждом промежутке:



$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x^3 - x)^2}$$

$$(-\infty; 0)$$

$$(0; 1) \quad (1; 3) \quad (3; \infty)$$

Функция положительна при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (3; \infty)$,

отрицательна при $x \in (1; 3)$; нули функции $x=1$ и $x=3$.

5. Выделите промежутки, на которых существуют обратные функции для функции $y = x^2 - 6x + 2$ и найдите их.

Решение. По свойствам квадратичной функции данная функция убывает на промежутке $(-\infty; 3]$ и возрастает на $[3; +\infty)$. Поэтому на каждом из этих промежутков существует обратная функция для функции $y = x^2 - 6x + 2$.

Найдем их:

$$y = x^2 - 6x + 2 = (x - 3)^2 - 7, \text{ откуда } y + 7 = (x - 3)^2.$$

$$\text{Тогда при } x \in (-\infty; 3) \text{ получаем } x - 3 = -\sqrt{y + 7}, \text{ или } x = 3 - \sqrt{y + 7}.$$

Уступая традиции, переобозначим переменные и получим функцию $x = 3 - \sqrt{y + 7}$, которая является обратной для данной функции при

$x \in (-\infty; 3)$. Аналогично, $x = 3 + \sqrt{y + 7}$ обратная для данной функции

функции при $x \in [3; +\infty)$.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение функции.
2. Что называется областью определения функции?
3. Что называется областью значений функции?
4. Дайте определение графика функции $y=f(x)$.
5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции.
6. Определите функцию обратную по отношению к функции $y=f(x)$.
7. Дайте определение возрастающей и убывающей функции.
8. Какая функция называется монотонной?
9. Дайте определение четной и нечетной функции.
10. Какая функция называется периодической?
11. Определите нули функции.
12. Что называется промежутком знакопостоянства функции?
13. Какая функция называется ограниченной?
14. Какие Вы знаете способы задания функций?
15. Определите целую рациональную функцию.

16. Какая функция называется линейной? Что является ее графиком?
17. Какая функция называется квадратичной? Что является ее графиком?
18. Определите дробно-рациональную функцию.
19. Какую функцию называют степенной? Графики каких степенных функций Вы можете построить?
20. Определите показательную функцию. Постройте в тетради графики функций $y = 2^x$, $y = (1/2)^x$.
21. Какую функцию называют логарифмической? Постройте в тетради графики функций $y = \log_2 x$, $y = \lg x$, $y = \log_{1/2} x$.
22. Какие тригонометрические функции Вы знаете? Постройте графики основных тригонометрических функций в тетради.
23. Назовите обратные тригонометрические функции. Постройте их графики в рабочей тетради.
24. Вспомните основные преобразования графиков функций (параллельный перенос на вектор, растяжение или сжатие от координатных осей), приведите примеры.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите область определения функции:

а) $y = \ln \frac{1}{(x^2 - 4x - 3)(\tilde{x} - 2)^2}$; б) $y = \sqrt{e^{\tilde{x}^2} - 2}$.

2. Найдите область изменения функции

а) $y = \sin(2x - 1)$; б) $y = 5\cos(3\tilde{x} - 2)$; в) $y = e^{x^2} - 1$.

3. Исследуйте функции на четность:

а) $y = x^4 \cdot x^2 - 1$; б) $y = \tilde{x} \cdot \lg 3x$; в) $y = \tilde{x}^5 \cdot x^5$; г) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

4. Определите нули и промежутки знакопостоянства функции:

а) $y \bullet \frac{2x^2 - 3}{x - 4}$; б) $y \bullet e^{x^2 - 2x^2}$; в) $y \bullet \lg(\tilde{x} - 3) \lg(x - 2)$.

5. Выделите промежутки, на которых существуют обратные функции для функции и найдите их

а) $f(x) \bullet 2x - 6$; б) $f(x) \bullet x^4 - 2x^2$.

6. С помощью геометрических преобразований постройте график функции $y \bullet \left| \sin\left(4\tilde{x} - \frac{2\pi}{3}\right) \right|$ исходя из графика функции $y \bullet \sin x$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите области определения функций:

а) $y \bullet \frac{1}{x^2 - 5x - 6}$; б) $y \bullet \cos(3\tilde{x} - 1) e^{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$;
в) $y \bullet \sqrt{\ln(x^2 - 12x - 11)}$.

2. Найдите области значения функций:

а) $y \bullet x^2 - 6x + 5$; б) $y \bullet \lg(x^2 - 5x - 6)$.

3. Исследуйте данные функции на четность:

а) $y \bullet \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x}$; б) $y \bullet x^4 - 40x + 5$; в) $y \bullet x^2 - 1 \cos 2x$.

4. Определите промежутки знакопостоянства функций:

а) $y \bullet x^2 - 5x + 4$; б) $y \bullet \sqrt{(x^2 - \tilde{x} - 2)}$.

5. Найдите функции обратные функциям:

а) $f(x) \bullet x^2 - 4x + 5, x \in [2; \infty)$; б) $f(x) \bullet x^2 - 4x + 5, x \in (-\infty; 2]$.

6. С помощью геометрических преобразований постройте график функции

$y \bullet 2 \log_2 \tilde{x} - 4$ исходя из графика функции $y \bullet \log_2 x$.

Практическое занятие № 11

Тема занятия «Прямая линия на плоскости»

Цель занятия: Формирование умений составлять различные уравнения прямой и исследовать их взаимное расположение.

Организационная форма занятия: компьютерный тренинг.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

При формировании названных компетенций на занятии специалист должен знать способы задания прямой на плоскости; уметь составлять уравнения прямой, определять их взаимное расположение, применять решение этих задач при решении задач математического анализа и задач предметной области; владеть математическим аппаратом аналитической геометрии, аналитическими методами исследования геометрических объектов, основными методиками решения учебно-исследовательских задач.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2. Общее уравнение прямой.
3. Уравнение прямой в отрезках.
4. Нормальное уравнение прямой.
5. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
6. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.

4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. Пройдите тестирование по теме этого занятия. Просмотрите протокол выполненных заданий.
3. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории. Обратите внимание на задания, в которых Вы допустили ошибки при компьютерном тестировании.
4. Решите, предложенный преподавателем, вариант самостоятельной работы №5 по теме «Функции одной переменной, основные определения».

Дома

1. Закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.
2. Выполните в тетради для индивидуальных домашних заданий ИДЗ №2 по теме «Прямая на плоскости» и сдайте выполненную работу на проверку преподавателю.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 1 п.1.4.
- [2] часть 1 глава I § 2.
- [3] часть 1 глава 2 § 6.
- [4] часть I занятия 3 – 5.
- [6] глава 3 § 5.
- [7] глава 2 § 3.
- [8] глава III § 6.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Рекомендуется рассмотреть в [2] часть 1 разобранные задания 65, 82, 87, 92 – на составление различных уравнений прямой; 66 – на построение прямой; 78 – на определение угла между прямыми; 79, 80, 83 – на взаимное расположение прямых; 85 – на определение расстояния от точки до прямой.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение уравнения линии. К линиям какого порядка относят прямую?
2. Выведите уравнение прямой с угловыми коэффициентами. Назовите геометрический смысл углового коэффициента. Любая ли прямая может быть задана уравнением с угловым коэффициентом?
3. Расскажите об общем уравнении прямой и о её расположении относительно координатных осей в зависимости от коэффициентов уравнения.
4. Выведите уравнение прямой в отрезках; назовите геометрический смысл его коэффициентов.
5. Расскажите о нормальном уравнении прямой.
6. Определите угол между прямыми. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
7. Выведите формулу расстояния между точкой и прямой.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Составьте уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b \in (0, 3)$ и образующий с осью Ox угол:
а) 45° , б) 90° , в) 120° .
2. Уравнение прямой $\frac{2x}{6} + \frac{3x}{3} = 1$ приведите к виду «в отрезках» на осях.
3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и

составляющей с осью
 Ox угол и построить её.
 60°

4. Найдите точку пересечения двух прямых $3\tilde{x} - 4\tilde{y} - 29 = 0$, $2x - 5y - 19 = 0$.
5. Напишите уравнения двух прямых, проходящих через точку $A^3(4)$, так, чтобы одна была параллельна оси Ox , другая параллельна оси Oy .
6. Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $A^1(1)$ под углом 45° к прямой $2x - 3y = 6$.
7. Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A^6(2)$ на прямую $\tilde{x} - 4\tilde{y} - 7 = 0$.
8. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A^5(4)$ и составляющей с осью Ox тот же угол, что и прямая $5x - 2\tilde{y} - 3 = 0$.
9. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $2\tilde{x} - 3\tilde{y} - 5 = 0$ и $3x - \tilde{y} - 7 = 0$ перпендикулярной к прямой $y = 2x$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Составьте уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b = 3$ и образующий с осью Ox угол:
 - а) 60° , б) 135° .
2. Уравнение прямой $3\tilde{x} - 2\tilde{y} - 4 = 0$ приведите к виду «в отрезках» на осях.
3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A^2(3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) 45° , б) 135° и построить её.
4. Стороны AB , BC и AC треугольника ABC даны соответственно уравнениями $AB: 4x - 3y - 5 = 0$, $BC: 2x - 3y - 5 = 0$, $AC: 4x - 3y - 5 = 0$, его верш

$$\tilde{x} - 3y - 10 = 0,$$

$$\tilde{x} - 2 = 0.$$

Определите
е
координаты

5. Напишите уравнение прямой, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Ox

отрезок, равный: а) 6, б) $\frac{1}{2}$, в) 0.

6. Напишите уравнение прямой, если точка $A(2;3)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

7. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;3)$ и параллельной другой прямой $x - 2y - 3 = 0$.

8. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения
 прямых $2\tilde{x} - 3\tilde{y} - 1 = 0$ и $3\tilde{x} - \tilde{y} - 2 = 0$ перпендикулярно прямой $y = x - 1$.

9. В треугольнике $\triangle ABC$ даны: 1) уравнение стороны $AB: 3x - 2y = 12$;

2) уравнение высоты $BM: x - 2y = 4$; 3) уравнение высоты $AM: 4x - y = 6$, где

M — точка пересечения высот. Напишите уравнения сторон AC , BC и высоты CM .

10. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения

прямых $5\tilde{x} - y - 10 = 0$ и $8\tilde{x} - 4\tilde{y} - 9 = 0$ и параллельной прямой $x - 3y = 0$.

11. Выполните ИДЗ №2 по теме «Прямая на плоскости»:

1. Составить уравнение прямой

а) проходящей через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$;

б) проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ параллельно прямой $l: Ax + By + C = 0$;

в) проходящей через точку $B(x_2; y_2)$ перпендикулярно прямой $l: Ax + By + C = 0$;

г) проходящей через точку $B(x_2; y_2)$ и параллельной оси Ox ;

д) проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ и параллельной оси Oy ;

е) проходящей через точку $B(x_2; y_2)$ и перпендикулярной оси Ox ;

ж) проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ и перпендикулярной оси Oy ;

з) с угловым коэффициентом k и проходящей через точку $A(x_1; y_1)$;

и) проходящей через точку $B(x_2; y_2)$ и составляющей с осью Ox угол α ;

к) проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ и образующей с прямой $l: Ax + By + C = 0$ угол α .

2. Построить все прямые из задания 1.

3. Для каждой из прямой из задания 1 записать (если это возможно)

а) общее уравнение прямой;

б) уравнение прямой с угловым коэффициентом;

в) уравнение прямой в отрезках;

г) нормальное уравнение прямой.

4. Определить угол между прямой AB и прямой $l: Ax + By + C = 0$.
5. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой AB , концы которого лежат на осях координат.
6. Записать уравнения диагоналей квадрата из задания 5 и определить их длину.
7. Определить координаты всех вершин квадрата из задания 5 и координаты точки O - точки пересечения его диагоналей.
8. Определить расстояние от точки O из задания 7 до прямой $l: Ax + By + C = 0$.
9. Найти координаты такой точки C , что треугольник ABC будет равносторонним.

Данные для заданий выберите из таблицы согласно своему варианту:

Вариант	$Ax_1; y_1$	$Bx_2; y_2$	$l: Ax By C \bullet 0$	k	α
1	$\tilde{1;3}$	$\cdot 1;1$	$2x \ 3y \ 1 \bullet 0$	-1	30^0
2	$\tilde{2;3}$	$\cdot 1;2$	$x \ 2y \ 1 \bullet 0$	-2	45^0
3	$\tilde{3;3}$	$\cdot 1;4$	$2x \ 3y \ 1 \bullet 0$	-3	60^0
4	$\tilde{4;3}$	$\cdot 2;1$	$5x \ 3y \ 10 \bullet 0$	-4	120^0
5	$\tilde{5;3}$	$\cdot 2;2$	$x \ 2y \ 10 \bullet 0$	-5	135^0
6	$\tilde{1;1}$	$\cdot 2;4$	$x \ 4y \ 5 \bullet 0$	-6	150^0
7	$\tilde{1;2}$	$\cdot 3;1$	$5x \ y \ 7 \bullet 0$	6	30^0
8	$\tilde{1;4}$	$\cdot 3;2$	$2x \ 5y \ 1 \bullet 0$	5	45^0
9	$\tilde{2;1}$	$\cdot 3;4$	$2x \ 3y \ 1 \bullet 0$	4	60^0
10	$\tilde{2;2}$	$\cdot 4;1$	$x \ 2y \ 1 \bullet 0$	3	120^0
11	$\tilde{2;4}$	$\cdot 4;2$	$2x \ 3y \ 1 \bullet 0$	2	135^0
12	$\tilde{3;1}$	$\cdot 4;4$	$5x \ 3y \ 10 \bullet 0$	1	150^0
13	$\tilde{3;2}$	$\cdot 5;1$	$x \ 2y \ 10 \bullet 0$	8	30^0
14	$\tilde{3;4}$	$\cdot 5;2$	$x \ 4y \ 5 \bullet 0$	10	45^0
15	$\tilde{4;1}$	$\cdot 5;4$	$5x \ y \ 7 \bullet 0$	-9	60^0
16	$\tilde{4;2}$	$\cdot 1;1$	$2x \ 5y \ 1 \bullet 0$	-1	120^0
17	$\tilde{4;4}$	$\cdot 1;2$	$4x \ 3y \ 1 \bullet 0$	-2	135^0
18	$\tilde{5;1}$	$\cdot 1;4$	$x \ 2y \ 7 \bullet 0$	-3	150^0
19	$\tilde{5;2}$	$\cdot 2;1$	$2x \ 5y \ 1 \bullet 0$	-4	30^0
20	$\tilde{5;4}$	$\cdot 2;2$	$5x \ y \ 10 \bullet 0$	-5	45^0
21	$\cdot 1;3$	$\cdot 2;4$	$x \ 8y \ 10 \bullet 0$	-6	60^0
22	$\cdot 2;3$	$\cdot 3;1$	$7x \ 4y \ 5 \bullet 0$	6	120^0
23	$\cdot 3;3$	$\cdot 3;2$	$6x \ y \ 7 \bullet 0$	5	135^0
24	$\cdot 4;3$	$\cdot 3;4$	$2x \ 9y \ 1 \bullet 0$	4	150^0
25	$\cdot 5;3$	$\cdot 4;1$	$4x \ 3y \ 1 \bullet 0$	3	30^0
26	$\cdot 1;1$	$\cdot 4;2$	$x \ 3y \ 8 \bullet 0$	2	45^0
27	$\cdot 1;2$	$\cdot 4;4$	$x \ 9y \ 1 \bullet 0$	1	60^0
28	$\cdot 1;4$	$\cdot 5;1$	$x \ 3y \ 5 \bullet 0$	8	120^0
29	$\cdot 2;1$	$\cdot 5;2$	$x \ 4y \ 1 \bullet 0$	10	135^0
30	$\cdot 2;2$	$\cdot 5;4$	$3x \ 4y \ 5 \bullet 0$	-9	150^0

Практическое занятие № 12

Тема занятия «Канонические уравнения линий второго порядка»

Цель занятия: Формирование умений составлять канонические уравнения кривых второго порядка.

Организационная форма занятия: практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

При формировании названных компетенций на занятии специалист должен уметь:

- сформулировать гипотезу и проверить ее в дальнейшем;
- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- ставить новые вопросы и видеть проблемы в традиционных ситуациях;
- владеть основными методиками решения учебно-исследовательских задач;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- применять основные понятия, идеи и методы фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Каноническое уравнение окружности.
2. Эллипс, вывод его канонического уравнения.
3. Гипербола, составление ее канонического уравнения.
4. Парабола, определение и каноническое уравнение.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия.
Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.

3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 5.
- [2] часть 1 глава I § 3.
- [3] часть 1 глава 3 § 10.
- [4] часть I занятия 10 – 11.
- [6] глава 3 § 7.
- [7] глава 2 § 4.
- [8] глава III § 7.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Рекомендуется рассмотреть в [2] часть 1 разобранные задания 128, 130 – на составление уравнения окружности; 141 – на составление канонического уравнения эллипса; 152, 154 – на составление канонического уравнения гиперболы; 168 – на составление канонического уравнения параболы.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение окружности. Выведите уравнение окружности с центром в заданной точке. Запишите каноническое уравнение окружности.
2. В каком случае уравнение вида $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ на плоскости задает окружность?
3. Сформулируйте определение эллипса. Определите следующие понятия: центр эллипса, фокусное расстояние, полуфокусное расстояние, диаметр эллипса, большая и малая оси (полуоси) эллипса, эксцентриситет эллипса.
4. Укажите способы построения эллипса. Нарисуйте эллипс и покажите на нем все понятия, определенные выше.
5. Выведите каноническое уравнение эллипса.
6. Дайте определение гиперболы. Нарисуйте эту линию. Введите понятия центра гиперболы, фокусного и полуфокусного расстояний, диаметра гиперболы, действительной оси (полуоси), мнимой оси гиперболы, вершин и асимптот гиперболы. Покажите введенные понятия на рисунке. Определите эксцентриситет гиперболы.
7. Выведите каноническое уравнение гиперболы.
8. Расскажите о равнобочной гиперболе.
9. Сформулируйте определение параболы и постройте ее. Покажите фокус и директрису параболы, вершину параболы.
10. Выведите каноническое уравнение параболы.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Постройте эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найдите: 1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет.
2. Напишите каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

1) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b = 3$; 2) расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет $e = 3/5$; 3) расстояние между фокусами равно $2\sqrt{13}$, а $a \cdot b = 1$.

3. Напишите каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1(2; 3)$ и $M_2(1; 3 - \sqrt{5}/2)$.

4. Постройте гиперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$.

Найдите: 1) действительную и мнимую полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.

5. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:

1) расстояние между фокусами $2c = 10$, а между вершинами $2a = 8$;

2) расстояние между фокусами $2c = 6$, а эксцентриситет $e = 3/2$.

6. Напишите уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы

– в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.

7. Постройте параболу $y^2 = 6x$. Найдите: 1) координаты фокуса; 2) уравнение директрисы.

8. Напишите уравнение параболы, проходящей через точки $O(0; 0)$ и $A(1; 3)$ и симметричной относительно оси Ox .

Задания для самостоятельной работы дома

1. Постройте эллипс $3x^2 + 16y^2 = 192$. Найдите 1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет.

2. Напишите каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

1) большая полуось $a = 6$, а эксцентриситет $e = 0,5$; 2) расстояние между фокусами равно 6, а $a \cdot b = 9$.

3. Напишите каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки:

1) $M_1(4; 9/5)$ и $M_2(5; \sqrt{5}/3)$; 2) $M_1(2; 0)$ и $M_2(1; 2)$.

4. На эллипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$ найдите точку, расстояние которой от правого

фокуса в четыре раза больше расстояния ее от левого фокуса.

5. Постройте гиперболу $3x^2 - 4y^2 = 12$. Найдите 1) действительную и мнимую полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.

6. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:

1) действительная полуось $a = \sqrt{5}$, а эксцентриситет $e = \sqrt{1,2}$;

$$y = \frac{4}{3}x$$

2) расстояние между фокусами $2c = 20$, а уравнение асимптот $y = \pm 3x$;

3) мнимая полуось $b = 4$, а расстояние между фокусами $2c = 10$.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

7. Найдите расстояние фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ от ее асимптот и угол между асимптотами.

8. Напишите уравнение гиперболы, проходящей через точки $(0;0)$ и $(2; 4)$, и симметричной относительно оси Oy .

9. Напишите уравнение параболы и ее директрисы, если известно, что парабола проходит через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 - 4y = 0$, и симметрична относительно оси Oy .

10. Определите, пересекает ли заданная прямая L данный эллипс E , касается его или проходит вне его:

$$L: 2\tilde{x} - \tilde{y} - 3 = 0, \quad E: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;

2) $L: 2\tilde{x} - \tilde{y} - 10 = 0, \quad E: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$;

3) $L: 3\tilde{x} - 2\tilde{y} - 20 = 0, \quad E: \frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{10} = 1$.

Практическое занятие № 13

Тема занятия «Предел функции. Основные теоремы о пределах»

Цель занятия: Введение понятия предел функции, формирование навыков вычисления пределов.

Организационная форма занятия: практикум-тренинг.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

При формировании на занятии названных компетенций специалист должен знать основополагающее понятие математического анализа предела функции; уметь использовать это понятие в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания; владеть техникой вычисления пределов.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Определение предела функции.
2. Основные теоремы о пределах.
3. Предел функции на бесконечности.
4. Односторонние пределы.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома. Подготовьтесь к самостоятельной работе №6 по теме «Предел функции», примерный вариант самостоятельной работы вы можете найти в программе дисциплины.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 7 пп. 7.3. - 7.5.
- [2] глава VI §§ 4 – 5 .
- [3] глава 4 § 18.
- [4] часть II занятия 14 – 17.
- [5] глава 1 § 1.2.
- [6] глава 4 §§ 2 – 6.
- [7] глава IV §§ 2 – 6.
- [8] глава 4 §§ 2 – 6.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Найдите пределы:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 - 2x}{x^2 - x - 6}.$$

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x - 6) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x^2 - 2x) = 0$, то мы

имеем неопределенность 0/0. Раскроем ее, разложив числитель и знаменатель на множители и упростив дробь:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 - 2x}{x^2 - x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-1)}{x+3} = \frac{2(2-1)}{2+3} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{2x-1}-3) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 4} (x-4) = 0$$

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{2x-1}-3) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 4} (x-4) = 0$, то имеем

неопределенность $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное числителю:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{2x-1}+3)}{(x-4)(\sqrt{2x-1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-1-9}{(x-4)(\sqrt{2x-1}+3)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{2x-1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{2x-1}+3} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 4-1}+3} = \frac{1}{\sqrt{7}+3}.$$

$$3. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4-1}{x^3-5x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-1}{x^4-1}.$$

Решение. В каждом из пределов имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия числитель и знаменатель разделим на старшую степень знаменателя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{5-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4-1}{x^3-5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 \cdot \frac{1}{x^4}}{x^3 \cdot \frac{1}{x^3} - 5x \cdot \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^3}-\frac{5}{x^2}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^4} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-1}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}}{1} = 0.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^4} = 1$$

Замечание. Если числитель и знаменатель дроби есть многочлен, то предел дроби при $x \rightarrow \infty$ равен:

а) отношению коэффициентов при старших степенях, если старшая степень числителя равна старшей степени знаменателя;

б) бесконечности, если старшая степень числителя выше старшей степени знаменателя;

в) нулю, если старшая степень числителя меньше старшей степени знаменателя.

4. Вычислите односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x-3}; \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x-3}.$$

Решение. а) Если $x \rightarrow 3-0$, то $(x-3) \rightarrow 0^-$, а следовательно $\frac{1}{x-3} \rightarrow -\infty$, или

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x-3} = -\infty.$$

б) Если $x \rightarrow 3+0$, то $(x-3) \rightarrow 0^+$, следовательно $\frac{1}{x-3} \rightarrow +\infty$, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x-3} = +\infty.$$

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Что называется пределом функции в точке?
2. Определите предел функции на бесконечности.
3. Дайте определение предела функции слева (справа).
4. Может ли функция $f(x)$ иметь два различных предела при $x \rightarrow a$?
5. Чему равен предел постоянной величины?
6. Чему равен предел: а) суммы; б) разности; в) произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$?
7. Чему равен предел частного функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$?
8. Как можно избавиться от неопределенности вида $\frac{0}{0}$, если числитель и знаменатель дроби содержат многочлены?
9. Как разложить квадратный трехчлен на линейные множители?
10. Сформулируйте теорему Виета.

11. Как можно избавиться от неопределенности $\frac{0}{0}$, если числитель и (или) знаменатель содержат иррациональные выражения?
12. Запишите формулы сокращенного умножения, помогающие определить сопряженные выражения для данных.
13. Сформулируйте правила вычисления пределов дроби при $x \rightarrow \infty$, если числитель и знаменатель содержат многочлены.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите пределы

а) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x)$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 8x + 20}{x^3 - 3x^2 + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 3x^2}{x^3 - 2x^2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$; д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x^3 - 1}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x-1}}$; з) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}}{\sqrt[3]{2x-1}}$; и) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1}-2)^3 (x-5)}{5^3}$;

к) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-x^2}}{\sqrt{9-2x-x^2}}$.

2. Найдите пределы функций при $x \rightarrow \infty$:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^7}{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3x^2 - x^4}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 1}{x^3 - 5x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$.

3. Вычислите пределы функции при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow 0$, если

$f(x) = \frac{1}{x^3}$, $(x \neq 1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{4x - 15}, (x \neq 1)$$

4. Найдите односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{20 - 4x}$$

а) $x \rightarrow 0^-$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{20 - 4x}$$

б) $x \rightarrow 0^+$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{20 - 4x}$$

в) $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x^{\frac{1}{2}}$$

г) $x \rightarrow 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x^{\frac{1}{2}}$$

д) $x \rightarrow 0$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x^2 - 5x + 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 - 2x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 - 2x}{x^2 - 4}$; д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 4}$; е) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{(x - 2)(x^2 - x + 1)}$; з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$;

и) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$; к) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3x^2 + 1} - 1}{x^2 - x^3}$; л) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x + 4}$;

м) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x}}$; н) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{3x - 2}}{\sqrt{4x - 1} - \sqrt{5x - 1}}$.

2. Найдите пределы функций при $x \rightarrow \infty$:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2}{2x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 - 1}{3x^4 + 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + x + 4}$.

5. Найдите односторонние пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 30} \frac{1}{x - 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 30} \frac{1}{x - 3}$;
в) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{1}{3!x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{1}{3!x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3x - 1}$.

Практическое занятие № 14

Тема занятия «Замечательные пределы. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции»

Цель занятия: Формирование умений вычислять пределы функций с помощью замечательных пределов.

Организационная форма занятия: практический тренинг.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

При формировании на занятии названных компетенций специалист должен знать основополагающее понятие математического анализа предела функции; уметь использовать это понятие в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания; владеть техникой вычисления пределов, в том числе с помощью замечательных пределов и следствий из них.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Первый замечательный предел и следствия из него.
2. Второй замечательный предел и следствия из него.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Решите, предложенный преподавателем, вариант самостоятельной работы №6 по теме «Предел функции» и сдайте выполненную работу на проверку.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома. В тетради для индивидуальных домашних заданий выполните ИДЗ №4 по теме «Пределы функций» и сдайте на следующем занятии его на проверку преподавателю.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 7 пп. 7.3. - 7.5.
- [2] глава VI §§ 4 – 5 .
- [3] глава 4 § 18.
- [4] часть II занятия 14 – 17.
- [5] глава 1 § 1.2.
- [6] глава 4 §§ 2 – 6.
- [7] глава IV §§ 2 – 6.
- [8] глава 4 §§ 2 – 6.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. С помощью первого замечательного предела вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

Решение. Для решения примера воспользуемся первым замечательным

пределом $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

Положим $-2x=y$, тогда при $x \rightarrow 0$ имеем, что

$y \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{2x^x} = \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt[5]{\frac{10}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^{\frac{1}{5}}} = e^{10}.$$

Можно и не проводить замену переменной. Тогда решение примера имеет

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{2x^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{2x}^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{2x}^{\frac{1}{x}} = e^{10}.$$

Вид:

4. Определите, какие из функций при $x \rightarrow 0$ будут бесконечно малыми (б.м) одного порядка малости, высшего порядка, низшего порядка по сравнению с бесконечно малой $\beta(x) = x$:

а) $\alpha(x) = \sqrt[3]{\sin x}$; б) $\alpha(x) = \sqrt{1-2x}$; в) $\alpha(x) = \sqrt[3]{1-x}$; г) $\alpha(x) = \operatorname{tg} x \sin x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x)$$

Решение. Чтобы решить поставленную задачу, найдем $\lim_{x \rightarrow 0} \beta(x)$ в каждом из случаев:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}} = \sqrt[3]{1 \cdot \infty} = \infty$,

следовательно $\alpha(x)$ (б.м.) более низкого порядка, чем $\beta(x)$.

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-2x)\sqrt{1+x}}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x}{1-x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} = 1 \cdot 1 = 1$.

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{1-2x}} = \frac{3}{\sqrt{1-0}} = 3$, таким образом, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка

малости.

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$, следовательно $\alpha(x)$ б.м

более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Запишите первый замечательный предел и следствия из него.
2. Запишите второй замечательный предел и следствия из него.
3. Определите число e . Укажите его приближенное значение с точностью до одного десятичного знака.

4. Какая показательная функция называется экспоненциальной? Постройте ее график.
5. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \infty$?

6. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \infty$?
7. Какова простейшая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?
8. Какова простейшая связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой величиной?
9. Что значит сравнить две бесконечно малые величины?
10. Какие две бесконечно малые величины называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных величин.
11. Как эквивалентные бесконечно малые величины могут быть использованы при вычислении пределов функции?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Вычислите пределы с помощью первого замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

а) $x \rightarrow 0$ $\tan x$; б) $x \rightarrow 0$ x ; в) $x \rightarrow 0$ $3x$; г) $x \rightarrow 0$ x^2 .

2. Вычислите пределы с помощью второго замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}$$

а) $x \rightarrow \infty$ x ; б) $x \rightarrow \infty$ x ; в) $x \rightarrow \infty$ $2x$; г) $x \rightarrow \infty$ x .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

г) $x \rightarrow 0$ x .

3. Определите порядок малости нижеследующих б.м функций относительно б.м функции $\beta(x) \sim x^{-1}$, если $x \rightarrow 1$:

а) $\alpha(x) \sim x^3$; б) $\alpha(x) \sim \sqrt{1-x}$; в) $\alpha(x) \sim \sqrt{x-1}$.

4. Пройдите компьютерное тестирование по теме «Пределы функции»

Задания для самостоятельной работы дома

1. Вычислите пределы с помощью первого замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin \pi z}{\pi z}$$

а) $x \rightarrow 0$; б) $x \rightarrow 0$; в) $z \rightarrow 1$ 2 .

2. Вычислите пределы с помощью второго замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{5x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x}$$

а) ; б) ; в) $x \rightarrow 0$.

Ⓟ

3. Выполните ИДЗ №4 по теме «Пределы функций»

Вычислить пределы функций путем алгебраических образований и применения замечательных пределов;

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + px + q}{bx^2} ; 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + px + q}{ax^2} ;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + b + ax^2}{px + q} ; 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + px + q}{x^2} ;$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + px + q}{b} ; 6. \lim_{x \rightarrow k} \frac{ax^2 + px + q}{x^2} ;$$

$$7. \lim_{x \rightarrow m} \frac{x^3 + b + x^2}{px + q} ; 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin px}{px} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2ax}{2ax}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin qx}{qx} ; 10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} ;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y} ; 12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$$

Для выполнения заданий коэффициенты a, b, k, m, p, q выбираются из таблицы в соответствии с номером варианта.

ВАРИАНТ	a	b	k	m	p	q
1	4	-1	2	1	-3	2
2	9	-1	3	1	-4	3
3	16	-1	4	1	-5	4
4	25	-1	5	1	-6	5
5	4	1	2	-1	-1	-2
6	9	1	3	-1	-2	-3
7	16	1	4	-1	-3	-4
8	25	1	5	-1	-4	-5
9	4	-27	2	3	-5	6
10	64	-8	8	2	-10	16
11	16	-8	4	2	-6	8
12	25	-8	5	2	-7	10
13	9	8	3	-2	-1	-6
14	16	8	4	-2	-2	-8
15	25	8	5	-2	-3	-10
16	4	27	2	-3	1	-6
17	16	-27	4	3	-7	12
18	16	27	4	-3	-1	-12
19	25	-27	5	3	-8	15
20	25	27	5	-3	-2	-15
21	25	-64	5	4	-9	20
22	25	64	5	-4	-1	-20
23	4	1	-2	-1	3	2
24	9	8	-3	-2	5	6
25	16	27	-4	-3	7	12
26	25	64	-5	-4	9	20
27	9	64	-3	-4	7	12
28	9	125	-3	-5	8	15
29	4	64	-2	-4	6	8
30	4	125	-2	-5	7	10

Практическое занятие № 15

Тема занятия «Непрерывные функции и их свойства. Точки разрыва и их классификация»

Цель занятия: Введение понятия непрерывность функции, исследование функций на непрерывность.

Организационная форма занятия: семинар - практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

При формировании на занятии названных компетенций специалист должен знать основополагающее понятие математического анализа непрерывной функции; уметь использовать это понятие в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания; владеть техникой исследования функций на наличие точек разрыва.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Непрерывность функции в точке.
2. Непрерывность функции на отрезке.
3. Точки разрыва и их классификация.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Решите, предложенный преподавателем, вариант самостоятельной работы №6 по теме «Предел функции» и сдайте выполненную работу на проверку.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 7 п. 7.6.
- [2] глава VI § 6.
- [3] глава 4 § 19.
- [4] часть II занятие 20.
- [5] глава 1 § 1.3.
- [6] глава 4 §§ 7 – 10.
- [7] глава IV §§ 8 – 13.
- [8] глава 4 §§ 7 – 10.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Для функции $y = 2x^2 - 1$ найдите приращение функции Δy в точке $x_0 = 1$, если приращение аргумента $\Delta x = 0,2$.

Решение. По определению приращения функции имеем:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = y(1,2) - y(1) = 3,88 - 3 = 0,88.$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

2. Будет ли непрерывной функция $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ в точках 1; 2; 0?

Решение. Так как $D(f(x)) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$, то по теореме о

непрерывности элементарной функции данная функция в точках $x=0$ и $x=1$ терпит разрыв.

Покажем, что эта функция непрерывна в точке $x=2$. Вспомним, что функция непрерывна в точке, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta y = 0.$$

Зададим в точке $x_0 = 2$ приращение Δx . Найдем приращение функции

$$\Delta f(x) = f(2 + \Delta x) - f(2); \quad f(2) = 3/2; \quad f(2 + \Delta x) = \frac{2(\Delta x + 2)^2}{(\Delta x + 2)^2 - 3(\Delta x + 2)} = \frac{2(\Delta x^2 + 4\Delta x + 4)}{\Delta x^2 + \Delta x - 2}.$$

Тогда

$$\Delta f(x) = \frac{2(\Delta x^2 + 4\Delta x + 4)}{\Delta x^2 + \Delta x - 2} - \frac{3}{2} = \frac{4\Delta x^2 + 8\Delta x + 8 - 3\Delta x^2 - 3\Delta x + 6}{2(\Delta x^2 + \Delta x - 2)} = \frac{\Delta x^2 + 5\Delta x + 14}{2(\Delta x^2 + \Delta x - 2)}.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 + 5\Delta x + 14}{2(\Delta x^2 + \Delta x - 2)} = 0.$$

Найдем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 + 5\Delta x + 14}{2(\Delta x^2 + \Delta x - 2)} = 0.$

Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \neq 1), \\ 5 & (x = 2). \end{cases}$$

3. Определите точки разрыва функции

Решение. Функция определена на всей числовой прямой, однако элементарной она не является. Исходя из задания функции, в качестве точек разрыва могут выступать лишь точки $x=-1$ и $x=2$. Здесь удобно проверить следующее условие непрерывности функции в точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Имеем, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2) = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 5 = 5.$$

$$x^2 \bullet \tilde{f}(1)^2 \bullet 1$$

$$\tilde{f}(1) \bullet \tilde{f}(1)^2 \bullet 1.$$

Таким образом $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \tilde{f}(1)$, следовательно,

функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=-1$.

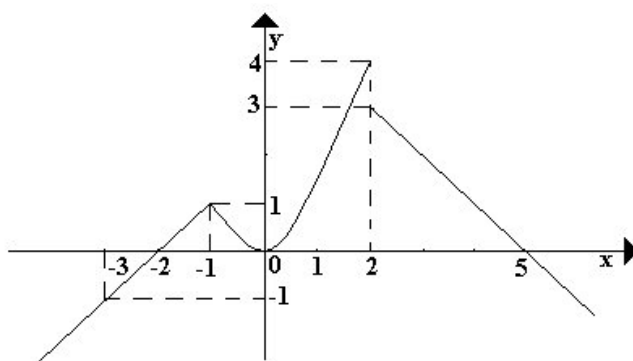
Проверим условие непрерывности функции в точке $x=2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2} (5x) = 5 \cdot 2 = 10.$$

Так как уже $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, то функция $f(x)$ разрывна в точке $x=2$.

Нетрудно построить график этой функции, показывающий поведение функции в точках $x=-1$ и $x=2$.



4. Для следующих функций определите характер точек разрыва:

$$a) y = \begin{cases} \tilde{x} & (x \in 1) \\ \frac{2}{x-1} & (x \neq 1) \end{cases}, \quad б) y = \frac{4}{x^2 - 2x + 1}.$$

Решение. а) Данная функция может иметь разрыв только в точке $x=-1$.

Исследуем эту точку:

$$\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \tilde{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow -1} y \neq \lim_{x \rightarrow -1} y$ и оба предела конечные, то в точке

$x = -1$ функция имеет разрыв 1-го рода.

б) Так как $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$, то $x=1$ - точка разрыва. Определим ее характер:

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 2x + 1}{(x - 1)^2} \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 2x + 1}{(x - 1)^2} \quad \bullet \quad \text{[scribble]} \text{[box]}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{x^{10} x^2 - 2x - 1}$$

, следовательно, в точке $x=1$ функция терпит разрыв 2-го рода.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Что называется приращением аргумента?
2. Что называется приращением функции?
3. Какая функция называется непрерывной в точке x_0 ?
4. Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке. Что можно сказать о непрерывности этой функции в точке x_0 ?
5. Какая функция называется непрерывной на интервале?
6. Что называется точкой разрыва функции?
7. Какая точка называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$?
8. Какая точка называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$?
9. Сформулируйте теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями.
10. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции, составленной из непрерывных функций.
11. Сформулируйте теорему о непрерывности основных элементарных функций.
12. Сформулируйте свойства функции, непрерывной на замкнутом интервале.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

$$y = \frac{1}{x^2}$$

1. Дана функция $y = \frac{1}{x^2}$, найдите:

а) x и y , $x_0 = 4$ и $x = 0,2$;

б) y и x , если $x = 2$ и

$$x_0 \in 2,3;$$

в) y , если $x = 1$ $x \in 0,5$.
и

2. Определите точки разрыва функций и исследуйте ее характер:

а) $y = \frac{x^2}{x^2 - 2x - 3}$;

$y = 2/x \quad (x \neq 2)$

$f(x) = \sqrt{x-1} \quad (2 \leq x \leq 1)$

б) $y = \frac{1}{x-1} \quad (x \neq 1)$.

3. Будет ли непрерывной функция $f(x)$ в точках 1; 2; -1; 0, если

а) $f(x) = 2x^2 - 2$;

б) $f(x) = \frac{x}{x^2}$.

$y = 5 \cdot \frac{1}{3^x}$

4. Испытайте функцию $y = 5 \cdot \frac{1}{3^x}$ на непрерывность в точке $x = 0$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Определите точки разрыва функций и исследуйте ее характер:

а) $y = \frac{x^3}{x^2 - 3x - 5}$; б) $y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$.

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

2. Будет ли непрерывной функция $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ в точках 1; 2; -1; 0 ?

3. Приведите примеры функций непрерывных:

- а) в любой точке числовой прямой;
- б) при всех значениях x , кроме $x = 5$;
- в) при всех значениях x , кроме $x = -3$; 3 и 8.

4. Какого рода разрыв в точке $x = 0$ имеет функция

$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$? Докажите

это.

Тема 2 Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Практическое занятие № 16

Тема занятия «Понятие производной. Правила дифференцирования»

Цель занятия: Введение понятия производной функции с помощью операции предельного перехода, отработка навыков в вычислении производных.

Организационная форма занятия: практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

При формировании названных компетенций в результате изучения дисциплины «Математика» специалист должен знать основные правила дифференцирования; уметь дифференцировать с помощью формул и простейших приемов; владеть методами нахождения производных функций. Формирование у будущих специалистов этой компетенций на занятии предполагает обучение студентов

- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Определение производной, ее механический и геометрический смысл.
2. Правила вычисления производной.
3. Таблица производных основных элементарных функций.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения. Выучите основные правила дифференцирования и таблицу производных основных элементарных функций.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.

3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Выучите наизусть правила дифференцирования и таблицу основных производных.
6. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Пройдите тестирование на знание правил дифференцирования и таблицы основных производных.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 8 пп. 8.1. – 8.2.
- [2] глава VII § 1.
- [3] глава 6 § 24.
- [4] ч II занятия 21 – 23.
- [5] глава 2 § 2.1.
- [6] глава 5 §§ 1 – 8.
- [7] глава V §§ 1 – 8.
- [8] глава 5 §§ 1 – 8.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Пользуясь определением производной найдите производные функций:

$$\text{а) } y = x^2 - 5x + 1 \quad ; \quad \text{б) } y = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Решение. а) По определению производной

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

Поэтому для нахождения производной по определению можно воспользоваться следующим общим правилом.

1. Придаем аргументу x произвольное приращение Δx и находим приращенное значение функции:

$$y(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 1 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 5x - 5\Delta x + 1.$$

2. Находим приращение функции:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 5x - 5\Delta x + 1) - (x^2 - 5x + 1) = 2x\Delta x + \Delta x^2 - 5\Delta x.$$

3. Находим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 - 5\Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x - 5.$$

4. Ищем предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x - 5) = 2x - 5.$$

Таким образом, $y'(x) = (x^2 - 5x + 1)' = 2x - 5$.

б) Руководствуясь указанным общим правилом для нахождения

производной по определению, для функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ последовательно находим:

$$1. \quad y(x + \Delta x) = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x}}.$$

2.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \bullet \frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \bullet \frac{\tilde{x}}{\sqrt{x}} \frac{x}{\sqrt{x}}.$$

$$3. \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{x}}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{x}}}.$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{x}}.$$

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

2. Дана функция $\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Существует ли производная в

точке $x=0$? Будет ли эта функция в точке $x=0$ непрерывной?

Решение. Воспользуемся общим правилом для нахождения производной в точке $x=0$ по определению:

$$1) \alpha'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x) - \alpha(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}}{x}.$$

$$2) \alpha'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x) - \alpha(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}}{x}.$$

$$3) \alpha'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x) - \alpha(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}}{x}.$$

$$4) \alpha'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x) - \alpha(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}}{x}.$$

Этот предел не существует. Таким образом, функция $\alpha(x)$ в точке $x=0$ не имеет производной.

Исследуем данную функцию на непрерывность в точке $x=0$:

Так как бесконечно малому приращению аргумента соответствует

бесконечно малое приращение функции, то данная функция непрерывна в точке $x=0$.

Таким образом, данная функция непрерывна в точке $x=0$, но не имеет производной в этой точке.

3. Применяя правила дифференцирования и таблицу производных, найдите производную функции $y = \sqrt[3]{(1-2x)^2}$.

Решение. Преобразуем данную функцию, переходя к дробным показателям, и воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции:

$$y = \sqrt[3]{(1-2x)^2} = (1-2x)^{\frac{2}{3}} \quad \sim \quad \frac{2}{3} \cdot (1-2x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (-2) = -\frac{4}{3\sqrt[3]{1-2x}}$$

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

- Какие задачи, приводящие к понятию производной, Вам известны?
- Дайте определение производной функции в точке.
- Как найти производную функции $y=f(x)$ по определению?
- В чем состоит механический смысл производной?
- Дайте определение непрерывной функции в точке и на отрезке. Сформулируйте свойства непрерывных функций.
- Как связаны между собой дифференцируемость функции в некоторой точке с непрерывностью функции в этой точке?
- Приведите пример непрерывной функции, не имеющей производной в некоторой точке.
- Чему равна производная:
 - постоянной;
 - алгебраической суммы дифференцируемых функций;
 - произведения двух дифференцируемых функций;
 - дроби;
 - сложной функции;
 - обратной функции?
- Запишите формулы для нахождения производных основных элементарных функций.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Пользуясь определением производной, найдите производные от следующих функций:

а) $y = 3x^2 - 4x$; б) $y = \frac{1}{x^2}$; в) $y = \sqrt{4x+1}$; г) $y = \sin(3x+1)$.

д) $f(x) = x^2 \sin x \quad (x \neq 0)$

2. Дана функция: $y = x^3 \sin x \quad (x \neq 0)$. Найдите производную этой функции в точке $x = 0$.

3. Найдите производные следующих функций:

а) $y = x^4 - 3x^2 - 6$; б) $y = \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{x^3}} - \frac{4}{\sqrt{x}} - 5$; в) $y = (x^2 - 2x + 1)(4x^2 + 1)$;

г) $y = \frac{x}{(1-x)^2(1-x)^3}$; д) $y = \sqrt[3]{(1-2x)^2}$; е) $y = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1-x^3}}$; ж) $y = x^2 - \frac{3}{x^4}$;

з) $y = 2x \sin 3x \cos 4x$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Пользуясь определением производной, найдите производные от следующих функций:

$y = 2x$; $y = (2x+1)^2$; $y = \sqrt{x}$.

2. Найдите производные следующих функций:

а) $y = 6x^3 - x^2$; б) $y = x^2 - \sqrt{x}$; в) $y = \sqrt{x}^2 - 2$; г) $y = x^3(1-3x)$;

$$\text{д) } y \bullet (x^3 - 3x^2 + 1) = \sqrt{x^5} \quad ; \text{ е) } y \bullet \frac{2x}{1 - x^2} \quad ; \text{ ж) } y \bullet \frac{1 - 2x}{1 - 3x} ;$$

$$y \bullet \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} ; \text{ и) } y \bullet x^2 \sin 5x ; \quad y \bullet 3x \operatorname{tg} 2x .$$

к)

Практическое занятие № 17

Тема занятия «Дифференцирование сложной функции»

Цель занятия: Формирование навыков вычисления производной сложной функции.

Организационная форма занятия: компьютерный тренинг.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

При формировании на занятии названных компетенций специалист должен знать основополагающее понятие математического анализа производной функции; уметь использовать это понятие в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания; владеть техникой вычисления производных.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Основные правила дифференцирования.
2. Таблица производных основных элементарных функций.
3. Дифференцирование сложной функции.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.
6. Повторите таблицу основных производных.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Пройдите тестирование на компьютере по теме «Производная функции».

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома. В тетради для индивидуальных домашних заданий выполните задания 1-3 ИДЗ №5 по теме «Вычисление производных». Подготовьтесь к самостоятельной работе №7 по теме «Производная функции», примерный вариант самостоятельной работы вы можете найти в программе дисциплины.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 8 пп. 8.1. – 8.2.
- [2] глава VII § 1.
- [3] глава 6 § 24.
- [4] ч II занятия 24 – 25.
- [5] глава 2 § 2.1.
- [6] глава 5 § 8.
- [7] глава V § 8.
- [8] глава 5 § 8.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Применяя правила дифференцирования и таблицу производных, найдите

производные следующих функций:

$$y = \ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{1 - e^{3x}}}$$

Решение. I способ. Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции: сначала находим производную логарифмической функции, затем корня и наконец производную дроби:

$$\begin{aligned}
 y &= \ln \sqrt[3]{\frac{e^{3x}}{1-e^{3x}}} \\
 &= \ln \left(\frac{e^{3x}}{1-e^{3x}} \right)^{\frac{1}{3}} \\
 &= \frac{1}{3} \ln \frac{e^{3x}}{1-e^{3x}} \\
 &= \frac{1}{3} (\ln e^{3x} - \ln (1-e^{3x})) \\
 &= \frac{1}{3} (3x - \ln (1-e^{3x})) \\
 &= x - \frac{1}{3} \ln (1-e^{3x})
 \end{aligned}$$

II способ. Чтобы упростить дифференцирование, сначала преобразуем функцию на основании свойств логарифмов:

$$\begin{aligned}
 y &= \ln \sqrt[3]{\frac{e^{3x}}{1-e^{3x}}} \\
 &= \frac{1}{3} \ln \frac{e^{3x}}{1-e^{3x}} \\
 &= \frac{1}{3} (\ln e^{3x} - \ln (1-e^{3x})) \\
 &= \frac{1}{3} (3x - \ln (1-e^{3x})) \\
 &= x - \frac{1}{3} \ln (1-e^{3x})
 \end{aligned}$$

Тогда

Замечание. Вообще, если под знаком подлежащей дифференцированию логарифмической функции содержится выражение, поддающееся логарифмированию (произведение, частное, степень, корень), то полезно сначала выполнить логарифмирование.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение производной функции в точке.
2. Назовите основные правила дифференцирования функций.
3. Запишите таблицу производных основных элементарных функций.
4. Дайте определение сложной функции. Приведите примеры.
5. Сформулируйте теорему для нахождения производной сложной функции.

6. Составьте таблицу нахождения производных для функций вида $f \circ u$,
где f - одна из элементарных функций, $u \in \mathbb{R}$.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите производные следующих функций:

а) $y = e^{x^2}$; б) $y = \frac{1}{4} \ln(1+x^2)$; в) $y = \frac{\sin x \cdot x \cos x}{\cos x \cdot x \sin x}$;

г) $y = \ln(e^{x^2} \cdot xe^x)$; д) $y = \arccos(e^{x^2})$; е) $y = \operatorname{tg}^x \operatorname{ctg}^2 x$;

ж) $y = 2 \sin^2 2x - \operatorname{ctg}^3 2x$; з) $y = \arcsin \sqrt{\sin x}$;

и) $y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; к) $y = \sqrt{1-e^{2x}} \cdot (\arccos e^{2x})$;

л) $y = \frac{1}{\ln} \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; м) $y = \frac{1}{\ln} \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;

н) $y = \frac{1}{\ln} \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; о) $y = \frac{1}{\ln} \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;

2. Вычислите $\frac{d}{dx} \ln(e^{x^2} \cdot xe^x)$, если $x = 2$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите производные следующих функций:

а) $y = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$; б) $y = 3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2+1}}$; в) $y = \tilde{x} \cdot \operatorname{arctg} 2x$;

г) $y = \frac{1}{\ln} x^{2-1}$; д) $y = e^{2x} (1 - \operatorname{ctg}^2 x)$;

г) $\frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 5^{2x}}$; д) $\frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 5^{2x}}$; е) $\frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 5^{2x}}$;

ж) $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$; з) $y = \frac{\sqrt{e^{12x}}}{x}$.

$u = x \sqrt{4x^2 + 4} \arcsin \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 4}}$

2. Вычислите $u'(0)$, если $y = \frac{1}{\sin 2x} \cdot e^{\sin x}$.

$y = \frac{1}{\sin 2x} \cdot e^{\sin x}$

3. Покажите, что $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sin 2x} \cdot e^{\sin x} \right) = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x$.

4. В тетради для индивидуальных домашних заданий выполните задания 1-3 из ИДЗ №5 по теме «Вычисление производных» в соответствии с Вашим вариантом. В заданиях 1-3 вычислите производные функций с помощью правил дифференцирования. В задании 4 найти производную с помощью логарифмического дифференцирования; в задании 5 найти производную y'_x для функции заданной неявно.

Вариант 1 1. $y = \frac{5}{\cos^2 2x} \sqrt[3]{e^{3x}}$; 2. $y = \frac{\sqrt{x}}{\arcsin x}$; 3. $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2}}$; 4. $y = \frac{\sqrt[4]{4x^3 - 5x^2}}{\sqrt[3]{2x^4 - 7x}}$; 5. $5\tilde{x} - 2y - 3x^2\tilde{y} - x^2y^2 - 7y^2 = 0$.	Вариант 2 1. $y = \frac{4}{\sqrt{1-x}} e^{\frac{x}{9}} \frac{12}{x^2} - 16x^2$; 2. $y = \frac{\sqrt{x}}{\arccos \sqrt{x}}$; 3. $y = \frac{\sqrt{x}}{\arccos \sqrt{x}}$; 4. $y = \frac{\sqrt[4]{6x^3 - 1x^4}}{\sqrt[3]{4x^4 - 5x^2}}$; 5. $x - 6\tilde{y} - 3x^2y - x^3y^2 - 5y^2 = 0$.
Вариант 3 1. $y = \frac{3\cos 6x}{\sqrt[5]{x}} - \frac{2}{x^2} - 4$; 2. $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\arctg \sqrt[3]{x}}$; 3. $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x^2}}{\sqrt[4]{4x^6 - 1x^3}}$; 5. $2\tilde{x} - 3y - x^3\tilde{y} - x^2y^2 - 4y^2 = 0$.	Вариант 4 1. $y = \frac{4}{\sqrt[5]{9x^2}} \sin 2x - \frac{3}{x} \sqrt{x}$; 2. $y = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3}}$; 3. $y = \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[4]{4x^3 - 5x^2}}$; 4. $y = \frac{x - 5x^2 - 6\tilde{x} - 7^4}{\sqrt[4]{4x^3 - 2x^3 - 5}}$; 5. $2x - 4\tilde{y} - x^2y - x^2y^2 - 8y^3 = 0$.

Вариант 5 1. $y \bullet e^{4\tilde{x}} 3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}}$; 2. $y \bullet \frac{2\tilde{x}^3}{\sqrt{2}}$; 3. $y \bullet \log_2 \frac{2\tilde{x}^3}{\sqrt{2}}$; 4. $y \bullet \frac{7\tilde{x}^2 \cdot \tilde{x}^3}{\sqrt{4}}$; 5. $4\tilde{x} - 2y - x^2\tilde{y} - 3x^2y^2 - 4y^2 \bullet 0$.	Вариант 6 1. $y \bullet \frac{2\tilde{x}^2}{\sqrt{2}}$; 2. $y \bullet \cos \frac{2\tilde{x}^2}{\sqrt{2}}$; 3. $y \bullet \frac{\tilde{x}^4 \cdot 3\tilde{x}^5}{\sqrt[5]{1} 2\tilde{x}^2 \cdot 3 4\tilde{x}^3}$; 4. $6\tilde{x} - \tilde{y} - 5x^2y - 3x^3y^4 - y^2 \bullet 0$.
Вариант 7 1. $y \bullet 4 \operatorname{ctg} 2\tilde{x} \frac{3}{\sqrt{4}}$; 2. $y \bullet \frac{\sqrt{x} \cdot 2^3 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{4}}$; 3. $y \bullet \ln \frac{\sqrt{x} \cdot 2^3 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{4}}$; 4. $y \bullet \frac{7\tilde{x}^2 \cdot \tilde{x}^7}{\sqrt{4}}$; 5. $7\tilde{x} - 4y - x^2\tilde{y} - 4x^2y^3 - 7y^4 \bullet 0$.	Вариант 8 1. $y \bullet 8 \cos 4\tilde{x} \frac{6}{\sqrt{5}}$; 2. $y \bullet \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2}}$; 3. $y \bullet \sin \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2}}$; 4. $y \bullet \frac{8\tilde{x}^7 \cdot \tilde{x}^3}{\sqrt{4}}$; 5. $\tilde{x} - 6\tilde{y} - x^5y - x^3y^4 - 8y^2 \bullet 0$.
Вариант 9 1. $y \bullet 4 \operatorname{tg} 2\tilde{x} \frac{5}{x^2 \sqrt{25}}$; 2. $y \bullet \frac{1\tilde{x}^2}{\sqrt{2}}$; 3. $y \bullet \arcsin \frac{1\tilde{x}^2}{\sqrt{2}}$; 4. $y \bullet \frac{5\tilde{x}^2 \cdot 2\tilde{x}^4}{\sqrt{4}}$; 5. $3\tilde{x} - 5y - 4x^5\tilde{y} - x^3y^3 - 5y^6 \bullet 0$.	Вариант 10 1. $y \bullet 3 \cos 9\tilde{x} \frac{6}{9x^2} \operatorname{tg} x$; 2. $y \bullet \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2}}$; 3. $y \bullet \arccos \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2}}$; 4. $y \bullet \frac{5\tilde{x}^3 \cdot \tilde{x}^3}{\sqrt[3]{4}}$; 5. $\tilde{x} - 4\tilde{y} - 4x^2y - x^2y^2 - 6y^3 \bullet 0$.
Вариант 11 1. $y \bullet 3 \operatorname{ctg} 2\tilde{x} - 7 \sin 6\tilde{x} \sqrt{x}$; 2. $y \bullet \frac{3\tilde{x}^2}{\sqrt{4}}$; 3. $y \bullet \log_4 \frac{3\tilde{x}^2}{\sqrt{4}}$; 4. $y \bullet \frac{5\tilde{x}^7 \cdot 3\tilde{x}^2}{\sqrt{4}}$; 5. $5\tilde{x} - 6y - 4x^3\tilde{y} - 3x^3y^3 - 4y^6 \bullet 0$.	Вариант 12 1. $y \bullet 2^{3\tilde{x}} \frac{7}{4x^2} 4 \operatorname{tg} 2x$; 2. $y \bullet \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3}}$; 3. $y \bullet \arcsin \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3}}$; 4. $y \bullet \frac{3\tilde{x}^2 \cdot 2\tilde{x}^5}{\sqrt[3]{4}}$; 5. $\tilde{x} - 5\tilde{y} - 5x^3y - 2x^3y^2 - y^2 \bullet 0$.

Вариант 13 1. $y \bullet \frac{4 \sin 8x}{\cos^3 6x} \cdot \frac{2^4 \sqrt[3]{x}}{\cos^3 6x}$; 2. $y \bullet \frac{\sqrt[3]{6x^2}}{\sqrt[3]{x}}$; 3. $y \bullet \frac{\arctg \sqrt[3]{6x^2}}{\sqrt[3]{x}}$;	Вариант 14 1. $y \bullet \frac{5 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{4 \sin 2x}{x^2 \cdot 1}$; 2. $y \bullet \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x}}$; 3. $y \bullet \frac{\arctg \sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x}}$;
4. $y \bullet \frac{8x \cdot 1^2 \cdot 4x \cdot 3^5}{\sqrt[6]{4 \cdot 2x \cdot 5x \cdot 3}}$; 5. $10x \cdot 6y \cdot x^3 y \cdot x^4 y^2 \cdot y^2 \bullet 0$.	4. $y \bullet \frac{3x \cdot 4^3 \cdot 5 \cdot x^2}{\sqrt[4]{4 \cdot 3x \cdot 4^5 \cdot 2x \cdot 3^4}}$; 5. $x \cdot 5y \cdot x^2 y \cdot 3x^2 y^5 \cdot 5y^2 \bullet 0$.
Вариант 15 1. $y \bullet \frac{6}{\cos^2 2x} \cdot \frac{5x^2}{x^2 \cdot 9}$; 2. $y \bullet \frac{(3 \cdot 2x)^2}{\sqrt{x}}$; 3. $y \bullet \sin \frac{(3 \cdot 2x)^2}{\sqrt{3}}$; 4. $y \bullet \frac{9 \cdot 5x^3 \cdot 4 \cdot 6x^2}{\sqrt[5]{4 \cdot 3x^4 \cdot 5x \cdot 3^4}}$; 5. $8x \cdot y \cdot 6x^2 y \cdot x^2 y^3 \cdot 4y^7 \bullet 0$.	Вариант 16 1. $y \bullet 3 \cos 8x \cdot 4 \ctg 3x$; 2. $y \bullet \frac{\sqrt{x^2}}{x^2}$; 3. $y \bullet \frac{\sqrt{x^2}}{y} \cdot \log_5 x^2$; 4. $y \bullet \frac{8x \cdot 5^3 \cdot x \cdot 5^6}{\sqrt[6]{4 \cdot 3x \cdot 7 \cdot 6x \cdot 3}}$; 5. $8x \cdot 9y \cdot x^3 y \cdot x^2 y^5 \cdot 7y^2 \bullet 0$.
Вариант 17 1. $y \bullet 8 \ctg 2x \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{7}{x^2 \cdot 9}$; 2. $y \bullet \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{x^2}$; 3. $y \bullet \cos \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{x^2}$; 4. $y \bullet \frac{8x \cdot 4^3 \cdot x \cdot 4^5}{\sqrt[3]{4 \cdot 2x^3 \cdot 3x \cdot 6^2}}$; 5. $x \cdot 7y \cdot x^4 y \cdot 2x^2 y^2 \cdot 7y^3 \bullet 0$.	Вариант 18 1. $y \bullet 3 \tg 10x \cdot 7^{2x} \cdot \frac{5}{\sqrt{81 x^2}}$; 2. $y \bullet \frac{\sqrt[3]{4x^2}}{x}$; 3. $y \bullet \ctg \frac{\sqrt[3]{4x^2}}{x}$; 4. $y \bullet \frac{\sqrt[3]{4x^2 \cdot 3x \cdot 4^4}}{\sqrt[3]{4 \cdot 3x \cdot 5^7 \cdot 6x \cdot 2^5}}$; 5. $5x \cdot 6y \cdot x^3 y \cdot 2x^3 y^2 \cdot 7y^3 \bullet 0$.

Вариант 19 1. $y = 4^{3x} \cdot 3 \cos x - \frac{2}{2 + 4x^2}$; 2. $y = \frac{(2x-3)^2}{\sqrt{2x-3}}$; 3. $y = \frac{(2x-3)^2}{\sqrt{3}}$; 4. $y = \frac{2x^9 - 6 \cdot 3x^2}{\sqrt[3]{3x^5 - 3 \cdot 7x^3}}$; 5. $8x - 7y - 12x^2y - 8x^4y^3 - 5y^2 = 0$.	Вариант 20 1. $y = 4x^7 \cdot 5 \cos 3x - 2x \ln 2x$; 2. $y = \frac{2x^5}{\sqrt{x-1}}$; 3. $y = \arcsin \frac{2x^5}{\sqrt{3}}$; 4. $y = \frac{3x^4 - 4x^7}{\sqrt[4]{4x^7 - 2x^5 - 1}} \cdot 3x$; 5. $9x - 4y - x^3y - 3x^2y^6 - 7y^2 = 0$.
Вариант 21 1. $y = 9^{4x} \cdot 3 \cos x - 13^5 x \sqrt[5]{\ln 5x}$; 2. $y = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x-3}}$;	Вариант 22 1. $y = \frac{7}{x} \cdot 4 \operatorname{tg} 2x - 4x \sqrt[4]{6^{3x}}$; 2. $y = \frac{(x-8)^2}{\sqrt{x}}$;
3. $y = \ln \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x-3}}$; 4. $y = \frac{2x^3 - 4x^4}{\sqrt{4x^3 - 6x^5 - 2x^3}}$; 5. $6x - 3y - 3x^3y - 4x^2y^2 - 9y^3 = 0$.	3. $y = \arccos \frac{(x-8)^2}{\sqrt{x}}$; 4. $y = \frac{4x^2 - 4 \cdot 3x^4}{\sqrt[5]{4x^2 - 12x - 3x^4}}$; 5. $7x - 8y - 9x^2y - x^2y^4 - 3y^5 = 0$.
Вариант 23 1. $y = 9^{4x} \cdot 3 \cos x - 13^5 x \sqrt{x}$; 2. $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x-4}}$; 3. $y = \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$; 4. $y = \frac{7x^3 - x^2}{\sqrt[4]{4x^3 - 3x^2 - 2 \cdot 3x^4}}$; 5. $7x - 4y - x^5y - 12x^3y^2 - 3y^2 = 0$.	Вариант 24 1. $y = 2x^3 - \frac{4}{x^2} - 2 \operatorname{tg} x - \frac{1}{x^2} - 3$; 2. $y = \frac{(2x-1)^2}{x^3}$; 3. $y = \operatorname{arctg} \frac{(2x-1)^2}{x^3}$; 4. $y = \frac{x^3 - 4x^5}{\sqrt[3]{4x^4 - 7 \cdot 2x^5 - 8x^3}}$; 5. $5x - 6y - 3x^3y - 4x^3y^6 - 2y^2 = 0$.
Вариант 25 1. $y = \frac{4}{x^2} \cdot \cos x - 5^{3x}$; 2. $y = \frac{(3-4x)^2}{x}$; 3. $y = \log \frac{(3-4x)^2}{x}$; 4. $y = \frac{x^7 - 2x^5}{\sqrt[4]{4x^5 - 7x^2 - 4x^3}}$; 5. $x - 6y - 5x^3y - x^3y^3 - 6y^2 = 0$.	Вариант 26 1. $y = 5x - 3 \operatorname{ctg} 6x - 4^{2x}$; 2. $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$; 3. $y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{3}}$; 4. $y = \frac{x^4 - 2x^6}{\sqrt{4x^6 - 4x^3 - 3x^5}}$; 5. $6x - y - 8x^2y - 3x^3y^2 - y^2 = 0$.

Вариант 27 1. $y \bullet \frac{5}{\cos^2 x} \cdot 2^x \cdot 16 \cos 4x$; 2. $y \bullet \frac{(\tilde{1} \ 3x)^2}{\sqrt{\quad}} \cdot x$; 3. $y \bullet \arccos \frac{(\tilde{1} \ 3x)^2}{\sqrt{\quad}} \cdot x$; 4. $y \bullet \frac{6\tilde{x} \ 5^4 \cdot \tilde{2} \ x^3}{\sqrt[3]{4 \cdot \tilde{1} \ 3x \ 4 \cdot \tilde{4} \ 2x}}$; 5. $\tilde{x} \ 2y \ x^4 \tilde{y} \ 2x^2 y^2 \cdot 8y^5 \bullet 0$.	Вариант 28 1. $y \bullet 5x^{\tilde{4}} \cdot \frac{4}{\sqrt{\quad}} \cdot 6^{4x} \tilde{1} \ x^2$; 2. $y \bullet \frac{(\tilde{1} \ 7x)^2}{\sqrt{\quad}} \cdot x$; 3. $y \bullet \arcsin \frac{(\tilde{2} 7x)}{2} \cdot x$; 4. $y \bullet \frac{3 \cdot \sqrt{\quad} \cdot x}{\sqrt[3]{4 \cdot \tilde{1} \ 3x^2 \cdot \tilde{2} \ x \ 5^5}}$; 5. $5x \ 6\tilde{y} \ 7x^2 y \cdot 3x^2 y^5 \cdot 6y^3 \bullet 0$.
Вариант 29 1. $y \bullet \sqrt{\quad} \cdot 4 \cos 2\tilde{x} \cdot x \cdot 6^{3x}$;	Вариант 30 1. $y \bullet 7x^{\tilde{6}} \cdot 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{7} \cdot 4^{5x}$;
2. $y \bullet \frac{(\tilde{1} \ 3x)^2}{\sqrt{\quad}} \cdot x^4$; 3. $y \bullet \operatorname{arccotg} \frac{(\tilde{1} \ 3x)^2}{\sqrt{\quad}} \cdot x^4$; 4. $y \bullet \frac{6\tilde{x} \ 4^3 \cdot \tilde{4} \ x^5}{\sqrt[5]{4 \cdot \tilde{1} \ 3x \ 4 \cdot \tilde{8} \ x \ 5}}$; 5. $9\tilde{x} \ 6y \ 4x^2 \tilde{y} \ 2x^3 y^4 \cdot 2y^5 \bullet 0$.	2. $y \bullet \frac{1 \ 3x}{\sqrt{\quad}} \cdot x \ 1$; 3. $y \bullet \operatorname{arctg} \frac{\tilde{1} \ 3x}{\sqrt{\quad}} \cdot x \ 1$; 4. $y \bullet \frac{6\tilde{x} \ 4^3 \cdot \tilde{3} \ 2x^6}{\sqrt[5]{4 \cdot \tilde{1} \ 3x \ 4 \cdot \tilde{8} \ x \ 6}}$; 5. $6x \ 8\tilde{y} \ 4x^5 y \cdot 2x^5 y^2 \cdot 5y^3 \bullet 0$.

Практическое занятие № 18

Тема занятия «Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Функции заданные неявно и параметрически и их дифференцирование»

Цель занятия: Формирование умений и навыков нахождения производных неявно заданных и параметрически заданных функций, применения логарифмического дифференцирования.

Организационная форма занятия: практикум-тренинг.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

Формирование у будущих специалистов этой компетенций на занятии предполагает обучение студентов

- анализировать ситуации и делать выводы;
- видеть проблемы в традиционных ситуациях;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- применение основных понятий, идей и методов математического анализа для решения базовых задач.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Логарифмическое дифференцирование.
2. Производные высших порядков.
3. Неявно заданные функции и их дифференцирование.
4. Нахождение производной параметрически заданной функции.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.

4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.
6. Подготовьтесь к самостоятельной работе №7 по теме «Производная функции», просмотрев решение основных типов задач, предложенных в примерном варианте самостоятельной работы.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Решите, предложенный преподавателем, вариант самостоятельной работы №7 по теме «Производная функции» и сдайте выполненную работу на проверку.

Дома

1. Закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.
2. В тетради для индивидуальных домашних заданий закончите выполнение ИДЗ №5 по теме «Вычисление производных» в соответствии с Вашим вариантом. Решите задания 4 и 5. В задании 4 найдите производную функции с помощью логарифмического дифференцирования; в задании 5 найдите производную y' для функции заданной неявно. Сдайте тетрадь на проверку преподавателю.
3. Подготовьтесь к самостоятельной работе №8 по теме «Дифференцирование неявно заданных и параметрически заданных функций», примерный вариант самостоятельной работы вы можете найти в программе дисциплины.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 8 пп. 8.4. - 8.5.
- [2] глава VII § 1.
- [3] глава 6 § 29.
- [4] часть II занятия 25 – 27.
- [5] глава 2 § 2.1.
- [6] глава 5 §§ 9 – 11.
- [7] глава V §§ 9 – 11.
- [8] глава 5 §§ 9 – 11.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные следующих функций:

$$\text{a) } y \bullet \sqrt[5]{\frac{xx^2 \cdot 1}{1 \cdot x^2}}, \quad \text{б) } y \bullet xe^x.$$

Решение. а) Производную функции найдем по следующему плану:

1) Прологарифмируем данную функцию:

$$\ln y \bullet \ln \sqrt[5]{\frac{xx^2 \cdot 1}{\tilde{1} x^2}} \bullet \frac{1}{5} \ln x \cdot \ln x^2 \cdot \tilde{1} \cdot 2 \ln \tilde{1} x.$$

2) Найдем производную от $\ln y$:

2) Найдем производную от $\ln y$:

$$\ln y = \ln(x^2 + 1) = 2 \ln(x^2 + 1)$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (2 \ln(x^2 + 1)) = 2 \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

Определим производную данной функции

$$\frac{y_{\square} \bullet y_{\ln} \bullet \sqrt[5]{\frac{xx^2 \cdot 1}{\tilde{1} x^2}} \cdot \frac{\tilde{x}^3 \cdot 3x^2 \cdot x \cdot 1}{5xx^2 \cdot 1 \tilde{1} x}}{\frac{\tilde{x}^3 \cdot 3x^2 \cdot x \cdot 1}{5\sqrt[5]{1 x^7 x^4 x^2 \cdot 1^4}}}.$$

б) Производную функции с помощью логарифмического дифференцирования находим по указанному плану:

$$1) \ln y \bullet \ln x^{e^x} \bullet e^x \ln x.$$

$$2) \quad \ln x \bullet e^{\ln x} \bullet e^{\ln x} e^{\ln x} \bullet \frac{\bullet}{x \quad x}.$$

$$y' = y \ln y \quad \bullet \quad \frac{e^x x \ln x - 1}{x} \quad \bullet \quad x^{e^x} e^x$$

3)

2. Для функции $y = \operatorname{tg} x$ найдите производные второго и третьего порядков.

Решение. По определению производных высших порядков имеем:

$y'' = (y')'$, т.е. производная второго порядка есть производная от y' и

производной первого порядка, а производная 3-го порядка есть производная от производной 2-го порядка. Поэтому последовательно находим:

$$y = \operatorname{tg} x; \quad y' = y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 2 \cos^{-1} x \sin x = 2 \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x$$

3. Для данных неявных функций найдите производные первого порядка:

а) $5x^2 + 3xy - 2y^2 = 0$; б) $x^y = y^x$.

Решение. а) Дифференцируем по x обе части равенства, считая, что y есть функция от x , получим:

$$10x + 3y - 4y' = 0, \quad \text{отсюда } y' = \frac{10x + 3y}{4y}$$

б) Логарифмируем обе части данного уравнения, затем дифференцируем по x , рассматривая y как функцию от x :

$$y \ln x = x \ln y \quad \Rightarrow \quad y' \ln x + y \cdot \frac{1}{x} = x' \ln y + x \cdot \frac{1}{y} y' \quad \Rightarrow \quad y' \ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y} y'$$

отсюда

4. Для функции, заданной параметрически, найдите производную:

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

Решение. Учитывая, что $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, найдем $\frac{dx}{dt} = -\sin t$ и $\frac{dy}{dt} = \cos t$.

Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctgt}$.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Запишите формулу логарифмического дифференцирования.

2. Когда применяется формула логарифмического дифференцирования?
3. Расскажите о дифференцировании показательно-степенной функции.
4. Дайте определение производной второго порядка, производной n-го порядка.
5. Дайте определение неявного задания функции. Приведите примеры.
6. Как от неявного задания перейти к явному заданию функции? Всегда ли это можно сделать. Приведите примеры.
7. Как проводят дифференцирование неявной функции?
8. Расскажите о нахождении производных высших порядков от неявно заданных функций.
9. Дайте определение параметрически заданной функции. Приведите примеры.
10. Расскажите как от параметрического задания функции перейти к явному заданию функции.
11. Запишите формулы для нахождения производных первого и второго порядков от параметрически заданной функции.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные следующих функций:
 а) $y = x^5 \ln 3x^3 - 2x^2$; б) $y = \frac{x^{1/4} \sqrt{x} \sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt[5]{x} \cdot 3^2}$; в) $y = \sqrt[3]{\frac{x \ln x^2}{1 \cdot x^2}}$;
 г) $y = \sin x^x$; д) $y = \sqrt{x}$.
2. Найдите производные высших порядков для следующих функций:
 а) $y = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 1$; $y' = ?$; б) $y = \cos 2x$; $y'' = ?$;
3. Для данных неявных функций найдите производные первого порядка y' :
 а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; б) $y = \operatorname{tg} x^x$.

4. Для функций, заданных параметрически, найдите производные первого и второго порядков

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 - 1; \end{cases} & \quad \text{б) } \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases} \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные следующих функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= \frac{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{4}{3}}}; & \text{б) } y &= \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^2}{\sqrt{1-x^2}}; & \text{в) } y &= \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^3}}; \\ \text{г) } y &= \cos x^{\sin 2x}. \end{aligned}$$

2. Найдите производные высших порядков для следующих функций:

$$\text{а) } y = 3x^5 - 5x^2, \quad x; \quad y' = ? \quad \text{б) } y = e^x, \quad 2x; \quad y^{IV} = ?$$

3. Для данной неявной функции найдите производные первого и второго порядков $e^y \sin x = e^x \cos y$.

4. Для функций, заданных параметрически, найдите производные первого и второго порядков

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{3t}; \end{cases} & \quad \text{б) } \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases} \end{aligned}$$

Практическое занятие № 19

Тема занятия «Дифференциал функции, применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков»

Цель занятия: Введение понятия дифференциал функции, изучение способа применения дифференциала функции в приближенных вычислениях.

Организационная форма занятия: практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

При формировании на занятии названных компетенций специалист должен знать основополагающее понятие математического анализа дифференциала функции; уметь использовать это понятие в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания, в том числе уметь применять дифференциалы в приближенных вычислениях значений функций.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Определение дифференциала функции и его геометрический смысл.
2. Правила вычисления дифференциалов.
3. Определение и вычисление дифференциалов высших порядков.
4. Применение дифференциалов в приближенных вычислениях.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.

5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Решите, предложенный преподавателем, вариант самостоятельной работы №8 по теме «Дифференцирование неявно заданных и параметрически заданных функций» и сдайте выполненную работу на проверку.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 8 пп. 8.3. - 8.4.
- [2] глава VII § 1.
- [3] глава 6 § 26.
- [4] часть II занятие 28.
- [5] глава 2 § 2.2.
- [6] глава 5 § 3.
- [7] глава V § 3.
- [8] глава 5 § 3.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Найдите дифференциал функции $y = \int_1^x \ln \sin x \sin x.$

Решение. Находим производную данной функции и, умножив ее на дифференциал независимой переменной, получим исходный дифференциал данной функции:

$$dy = y' dx = \left(\frac{1}{\sin x} \ln \sin x \sin x - \frac{\cos x}{\sin x} \ln \sin x \cos x \right) dx =$$

$$= \cos x \cos x - \cos x \ln \sin x dx = \cos x \ln \sin x dx.$$

2. Вычислите с точностью до 0,01 дифференциал функции

$$y = \frac{2 \sin 2x - 3 \cos 2x}{e^{3x}} \quad \text{при } x = 0 \quad dx = 0,03.$$

и

Решение. Найдем дифференциал данной функции:

$$y' = \frac{(2 \sin 2x - 3 \cos 2x)' \cdot e^{3x} - (2 \sin 2x - 3 \cos 2x) \cdot (e^{3x})'}{e^{6x}} =$$

$$\frac{(4 \cos 2x + 6 \sin 2x) e^{3x} - (2 \sin 2x - 3 \cos 2x) \cdot 3e^{3x}}{e^{6x}} dx =$$

$$\frac{e^{3x} (4 \cos 2x + 6 \sin 2x - 6 \sin 2x + 9 \cos 2x)}{e^{6x}} dx = \frac{13 \cos 2x}{e^{3x}} dx.$$

Полагая $x = 0 \quad dx = 0,03$, получаем

$$dy = \frac{13 \cos 0}{e^0} \cdot 0,03 = 13 \cdot 0,03 = 0,39.$$

и

3. С помощью дифференциала найдите приближенные значения:

а) $\sqrt[4]{80}$; б) $\arctg 1,05$.

Решение.

а) Для нахождения приближенного значения функции $f(x)$ по ее значению $f(x)$ решается с помощью замены приращения функции ее

дифференциалом. Воспользуемся формулой приближенных вычислений:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x.$$

Взяв функцию $f(x) = \sqrt[4]{x}$, имеем $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[3]{x^3}}$.

Теперь полагая $x = 81$, $\Delta x = 1$ получаем:

$$\sqrt[4]{80} \approx \sqrt[4]{81} + \frac{1}{4 \cdot 27} \cdot 1 \approx 3 - \frac{1}{108} \approx 2,991.$$

$$\sqrt[4]{81^3}$$

б) Воспользуемся формулой приближенных вычислений. Полагая, $f(x) = \arctg x$

, имеем $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. В качестве x возьмем $x = 1$, $\Delta x = 0,05$. Подставляя тогда

все эти значения в формулу приближенных вычислений, получим:

$$\arctg 1,05 \approx \arctg 1 + \frac{1}{1+1^2} \cdot 0,05 = \frac{\pi}{4} + 0,025 \approx 0,810.$$

4. Для функции $y = \arctg x$ найдите дифференциалы второго и третьего порядков.

Решение. По определению дифференциалов высших порядков:

$$d^2 y \bullet y' x dx^2, d^3 y \bullet y' x^2 dx^3.$$

Таким образом, имеем: $d^2 y \bullet 2 \operatorname{tg} x dx^2, d^3 y \bullet \frac{2}{\cos^2 x} dx^3.$

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение дифференциала функции.
2. Запишите формулу для вычисления дифференциала первого и последующих порядков.
3. Сформулируйте основные свойства дифференциалов.
4. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала? Дифференциалы каких порядков обладают указанным свойством?
5. Расскажите о геометрическом смысле дифференциала первого порядка.
6. Как используется дифференциал в приближенных вычислениях?
7. Выведите формулу приближенного вычисления значений функций. Как определить погрешность приближения?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите дифференциалы следующих функций:

а) $y \bullet \frac{x^3}{1-x}$; б) $y \bullet e^{x^2-2x} \cdot 1$; в) $y \bullet \arccos^2 3x$; г) $y \bullet \frac{2 \sin 2x - 3 \cos 2x}{e^{3x}}$

2. Вычислите с точностью до 0,01 дифференциал функции

$y \bullet x^{\sqrt{\pi}}$ при $x \bullet \frac{\pi}{4}$ и $dx \bullet 0,2$.

3. С помощью дифференциала найдите приближенные значения для данных выражений:

а) $\sqrt[3]{1,02}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{120}$; г) $\sqrt[3]{9}$; д) $\sin 29^\circ$; е) $\arctg 0,98$; ж) $\ln 1,01$;

з) $\log_2 1,98$.

4. Для данных функций найдите дифференциалы высших порядков:

$$\text{а) } y \bullet \ln 2x; d^3x \bullet ? \quad \text{б) } y \bullet \sqrt{x, d^4x \bullet ?}$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите дифференциалы следующих функций:

$$y \bullet \sqrt[3]{x^2}; \quad y \bullet \sin^2 \frac{x}{2}; \quad y \bullet e^x \cdot 2x^2$$

$$\text{а) } y \bullet 3^x; \quad \text{б) } y \bullet 3^x; \quad \text{в) } y \bullet 3^x; \quad \text{г) } y \bullet 3^x$$

2. Вычислите с точностью до 0,01 дифференциалы функций:

$$\text{а) } y \bullet x! \cdot x^{\frac{1}{2}} \text{ при } x \bullet 10 \text{ и } dx \bullet 0,1;$$

$$\text{б) } y \bullet \sqrt{x^2 + 5} \text{ при } x \bullet 2 \text{ и } dx \bullet \frac{1}{5}.$$

3. С помощью дифференциала найдите приближенные значения для данных выражений:

$$\text{а) } \sqrt[3]{1,1}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{26,81}; \quad \text{в) } \sqrt{34}; \quad \text{г) } \sqrt[4]{17}; \quad \text{д) } \sqrt[10]{1000}; \quad \text{е) } \cos 151^\circ; \quad \text{ж) } \arccos 0,4993;$$

$$\text{з) } \lg 44^{0,56}; \quad \text{и) } \lg 11.$$

4. Для данной функций найдите дифференциалы высших порядков:

$$y \bullet e^{2x}, d^n y \bullet ?$$

Практическое занятие № 20

Тема занятия «Приложения производной: уравнение касательной и нормали к плоской кривой, правила Лопиталя, формула Тейлора»

Цель занятия: изучение приложений производной функции.

Организационная форма занятия: семинар-практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

При формировании на занятии названных компетенций специалист должен уметь применять аппарат дифференциального исчисления для решения различных практических задач; в частности, у студента должны быть сформированы умения составлять уравнения касательной и нормали к плоской кривой; развиты навыки раскрытия неопределенностей при вычислении пределов с помощью применения правил Лопиталя; сформированы навыки разложения функции по формуле Тейлора для приближенных вычислений.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Составление уравнений касательной и нормали к плоской кривой.
2. Применение правил Лопиталя при вычислении пределов функции.
3. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.

5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Обсудите вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 8 п. 8.6., п. 8.9.
- [2] глава VII § 1.
- [3] глава 6 § 25.
- [4] часть II занятия 30, 36.
- [5] глава 2 § 2.3.
- [6] глава 6 §§ 1-3.
- [7] глава VI §§ 1-3.
- [8] глава 5 §§ 13-14.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Составьте уравнения касательной и нормали к параболе $y = x^2$ в точке $A(2;4)$.

Решение. Так как надо составить уравнения касательной и нормали в точке $A(2;4)$, то $x_0 = 2, y_0 = 4$.

Тогда уравнение касательной в точке $A(2;4)$ будет иметь вид:

$$y = 4 + 4x - 2, \quad \text{или} \quad y = 4x - 4.$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 2 \quad y = \frac{1}{4}x^2 - 9$$

А уравнение нормали: $4x - y - 4 = 0$ или $4x - y - 2 = 0$.

2. С помощью правила Лопиталя найдите пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \operatorname{tg} 5x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x x^2.$$

а) б) в) г)

Решение. а) В данном пределе имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. По правилу

Лопиталя заменим отношение этих величин отношением их производных:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 4x}{2x - 3} = \frac{4 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 3} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Замечание. Аналогично можно раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

б) В данном пределе имеем неопределенность $0 \cdot \infty$. Сведем эту

0

неопределенность к виду $\frac{0}{0}$, а затем применим правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \operatorname{tg} 5x &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{1}{\operatorname{tg} 5x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 5x} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 5x}{\cos^2 5x} \\ &= \frac{1 \cdot \operatorname{tg}^2 5 \cdot \frac{\pi}{2}}{\sin^2 5 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{2}}{\sin^2 \frac{5\pi}{2}} = \frac{1 \cdot 1}{0} = \infty. \end{aligned}$$

в) В данном пределе имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Преобразуем функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tilde{x} \operatorname{tg} x}{\tilde{x} \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1.$$

$$x \rightarrow 0 \text{ (P)}$$

$$x \rightarrow 0 \text{ (P)}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow 0 \quad x \operatorname{tg} x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{0} = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 0 \cdot 1$$

г) В данном пределе имеем неопределенность вида 1^∞ . Заметим сразу, что таким образом можно раскрыть неопределенности вида ∞^0 и 0^0 . Эти случаи

) следующим путем: функция логарифмируется и сначала находится предел ее логарифма, а затем по найденному пределу логарифма находится и

Логарифмируем функцию и находим предел ее логарифма:

Здесь нахождение предела свелось к случаю $\bar{0}$. Применяя правило

Применим правило Лопиталья 2-й раз:

Теперь по найденному пределу логарифма функции находим искомый

Таким образом: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Решение. Найдем значение многочлена и его производных при

$$P \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} x \bullet 3x^2 \tilde{12x} \tilde{11}, P \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} 2 \bullet 12 \tilde{24} \tilde{11} \bullet 47,$$

$x \bullet 2:$

$P'(x) = 6, P''(x) = 6; P'''(x) = 0$ и все последующие производные равны 0.

Тогда для разложения многочлена по степеням x^2 по формуле Тейлора имеем:

$$P(x) = P(2) + \frac{P'(2)}{1!} (x-2) + \frac{P''(2)}{2!} (x-2)^2 + \frac{P'''(2)}{3!} (x-2)^3, \quad \text{т.е.}$$

$$P(x) = 60 + 47(x-2) + \frac{24}{2!} (x-2)^2 + \frac{6}{3!} (x-2)^3 =$$

$$= 60 + 47x - 94 + 12x^2 - 48x + 24 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 + 12x^2 - 47x + 60.$$

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Сформулируйте геометрический смысл производной функции.
2. Выведите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
3. Какая прямая называется нормалью к кривой? Какой вид имеет уравнение нормали?
4. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов функции.
5. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов функции.
6. Сколько раз подряд можно применять правило Лопиталя и когда это правило неприменимо?
7. Как можно раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ при вычислении предела функции?
8. Что нужно сделать при вычислении предела функции, если он

содержит неопределенность вида $\frac{0}{0}$?

9. Какой прием применяют для применения правил Лопиталя, если предел функции содержит неопределенность вида 0^0 , или ∞^0 , или 1^∞ ?

10. Расскажите о формуле Тейлора и формуле Маклорена. Для чего эти формулы могут использоваться?

11. Разложите по формуле Тейлора (Маклорена) функции $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Составьте уравнение касательной и нормали

а) к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке с абсциссой $x = 1$;

б) к кривой $y = \ln x$ в точке с абсциссой $x = 1$.

2. Используя правило Лопиталя, найдите следующие пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x}{x^3 - 12x + 16}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tilde{x} - 1}{x^2 - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x$;

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\tilde{x}} - 2}{1 - \cos 2x}$; ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 5x}$; з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin \frac{x}{2} - 1}$; и) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \ln x$;

к) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 7}{x^2 - 1}$; л) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; м) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x^{tg x}$;

н) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sin x}$; о) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin x}$.

3. По формуле Тейлора разложите многочлен $P(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 4x + 4$

по степеням $x - 1$.

4. Закон зависимости массы вещества, вступившего в химическую реакцию, в зависимости от времени, выражается формулой: $m = e^{\frac{1}{2}t^2} - 1$, где t - время в

минутах, m - масса в граммах. Сколько вещества вступит в реакцию через 66 секунд?

Задания для самостоятельной работы дома

1. Составьте уравнение касательной и нормали

а) к окружности $x^2 + y^2 = 25$ в точке $A(3; 4)$,

б) к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ в точке $A(1; 1)$.

2. Используя правило Лопиталя, найдите следующие пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x};$$

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 5x^3 - 6x^2 + 16}{x^2 - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 11x$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln e^{\tilde{x}} - e^2}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} 2x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x;$$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \tilde{x}^2$; ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin 5x$; з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln x - e^x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\tilde{x}}}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{1 - 2 \ln x}.$$

и) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln x}$; к) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tilde{x}^2 - 1}{\ln x}$; л) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln x}$; м) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln x}$

3. По формуле Тейлора разложите многочлен:

а) $P(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$ по степеням $\tilde{x}^2$;

б) $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ по степеням $\tilde{x}^1$.

Практическое занятие № 22.

Тема занятия «Применение производной к исследованию функций.

Построение графиков функций»

Цель занятия: Показать возможность применения аппарата дифференциального исчисления к исследованию функций и построения их графиков.

Организационная форма занятия: практикум с применением возможностей интерактивной доски.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

При формировании этих компетенций в результате изучения дисциплины «Математический анализ» специалист должен уметь решать задачи математического анализа: исследовать функции, опираясь на аппарат дифференциального исчисления, и строить их графики. Формирование у будущих специалистов этих компетенций на занятии предполагает обучение студентов

- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Исследование функции на возрастание и убывание.
2. Экстремум функции.
3. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба.
4. Асимптоты к графику функции.
5. Построение графика функции.
6. Исследование функций на наибольшее и наименьшее значения.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома. В тетради для индивидуальных домашних заданий выполните ИДЗ №6 по теме «Исследование функций и построение их графиков» и сдайте на следующем занятии его на проверку преподавателю. Подготовьтесь к контрольной работе №2 по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной». Пройдите предварительное тестирование по указанной теме.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 8 пп. 8.7. - 8.8.
- [2] глава VII § 2.
- [3] глава 7 § 34, § 38.
- [4] часть II занятия 32 – 35.
- [5] глава 2 §§ 2.3. – 2.4.
- [6] глава 6 § 4.
- [7] глава VI § 4.
- [8] глава 5 § 15.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Найдите интервалы возрастания и убывания функции $y = x^2 \ln x$.

Решение. Функция y определена в интервале $(0; e^{-2})$. Ее производная

$$y'(x) = x^2 \ln x + 2x, \quad \text{причем } y'(x) < 0 \text{ при } x \in (0; e^{-2}) \quad \text{и} \quad y'(x) > 0 \text{ при } x \in (e^{-2}; e^{-1}).$$

Отсюда следует, что функция $y = x^2 \ln x$ убывает в интервале $(0; e^{-2})$ и

возрастает в интервале $(e^{-2}; e^{-1})$.

2. Найдите экстремум функций:

а) $y = \frac{2x^4}{x^2 + 1}$; б) $y = x^5 - 3x^2 + 5$.

Решение. Согласно правилу исследования функции на экстремум:

1) находим производную: $y' = \frac{2x^2 + 2x^4}{x^2 + 1} - \frac{2x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$.

2) находим критические точки, т.е. внутренние точки области определения функции, в которых $y' = 0$ или не

существует. Полагая,

$$y = 0,$$

получим, $x_1 = 2$, $x_2 = 2$. 3. Производная y не существует в точках

$x_3 = 1$ и $x_4 = 1$. Однако критическими точками являются только точки x_1 и x_2

: они лежат внутри области определения функции

$$D_y = \{x \in \mathbb{R}^n; 1 \leq x_1 \leq 1, 1 \leq x_2 \leq 1, x_3 \leq 1, x_4 \leq 1\}$$

$D_x \bullet \frac{1}{3}; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1$, и в них эта функция непрерывна. Точки x_3 и x_4

не являются критическими, т.к. не лежат внутри области определения функции;

3) исследуем критические точки, определяя знак y' слева и справа от

каждой критической точки. Для сокращения вычислений и для наглядности это исследование удобно записывать в виде следующей таблицы.

x	$-\frac{1}{3}; 2 - \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}; 1$	$1; 2 - \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}; 1$	$1; 1$
y'	-	0	+	+	0	-	-
y	$\nearrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$

Область определения критическими точками разбиваем на промежутки и заносим эти промежутки и критические точки в первую строку таблицы. Во второй строке помещены знаки производной на каждом из промежутков, которые определяем с помощью любой точки из исследуемого промежутка или применяя метод интервалов. В третьей строке – заключение о поведении функции.

а) Исследуемая функция имеет две точки экстремума:

точку минимума, $x = 2 - \sqrt{3}$, где $y_{\min} = \frac{1}{3} \cdot (2 - \sqrt{3})^2 = \frac{1}{3} \cdot 2$.

точку максимума $x = 2 + \sqrt{3}$, где $y_{\max} = \frac{1}{3} \cdot (2 + \sqrt{3})^2 = \frac{1}{3} \cdot 2$.

Исследование на экстремум можно было бы провести и с помощью второй производной.

б) Проведем исследование на экстремум с помощью второй производной.

Для этого найдем вторую производную и определим ее знак в критических точках: $y'' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, отсюда следует, что $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ - критические точки.

$$y' = 6x - 6 = 6x - 6.$$

Находим, $y'(x_1) = y'(0) = -6$, следовательно, $x = 0$ - точка максимума, где

$$y_{\max} = y(0) = 5.$$

$y'(x_2) = y'(2) = 6$, следовательно, $x = \frac{x}{2}$ — точка минимума, где $y_{\min} = y(2) = 1$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^2 \ln x$ на отрезке $[1; e]$.

Решение.

1. Найдём критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[1; e]$:
 $y' = x^2 \cdot \frac{1}{x} = x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin [1; e]$, y' не существует при $x = 0$, но $0 \notin D_y$.

Таким образом, данная функция имеет одну критическую точку $x = 2$, и эта точка лежит внутри отрезка $[1; e]$.

2. Вычислим значение функции в критической точке и на концах отрезка $[1; e]$:

$$y_2 = 2^2 \ln 2 \approx 0,614,$$

$$y_1 = 1^2 \ln 1 = 0,$$

$$y_e = e^2 \ln e = e^2 \approx 7,389.$$

3. Сравнивая все вычисленные значения, выбираем наибольшее и наименьшее:

$$\max_{x \in [1; e]} y(x) = y_1 = 0, \min_{x \in [1; e]} y(x) = y_2 = 2^2 \ln 2 \approx 0,614.$$

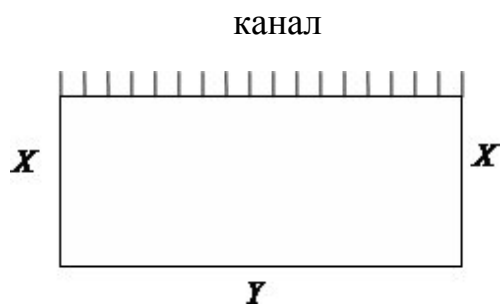
4. Одна сторона прямоугольного участка земли примыкает к берегу канала, а три другие огораживаются забором. Каковы должны быть размеры этого участка, чтобы его площадь равнялась 800 м^2 , а длина забора была наименьшей?

Решение. Для решения такой задачи следует, исходя из ее условия, выбрать переменную и выразить исследуемую величину через эту переменную, а затем найти искомое наименьшее значение полученной функции.

Пусть ширина участка - x м, длина - y м, длина забора $l = 2x + y$ м.

Выберем за независимую переменную x - ширину участка. Так как площадь участка 800 м^2 , т.е. $xy = 800$, то $y = 800/x$. Выразим l , как функция отсюда

$x \cdot Lx \bullet 2x \cdot 800/x$, где $x \in (0; 800]$.



Найдем наименьшее значение l_x на интервале $[0; 20]$. Найдем критические точки:

$$l'_x = 2 \cdot \frac{800}{x^2} - \frac{2x^2 - 400}{x^2} = \frac{2x - 20x - 20}{x^2} \quad l'_x = 0 \text{ в точках } x = 0 \text{ и } x = 20, \text{ но}$$

только $x = 20 \notin [0; 20]$ и других критических точек в этом интервале нет, т.к. ее производная l'_x существует во всем этом интервале. Исследуем найденную критическую точку по знаку второй производной в этой точке:

$$l''_x = \frac{800}{x^3} - \frac{1600}{x^3} = \frac{1600}{x^3} \quad x = 20 \quad ; \quad l''_{20} = \frac{1600}{20^3} = 0,5 > 0,$$

отсюда следует, что критическая точка $x = 20$ есть точка минимума.

Функция l_x непрерывна в интервале $[0; 20]$. Поэтому по свойству непрерывных функций единственный минимум функции l_x в интервале $[0; 20]$ совпадает с ее наименьшим значением в этом интервале, т.е.

$$\min_{x \in [0; 20]} l_x = l_{20} = 2 \cdot 20 \cdot 800 / 200 = 40 \cdot 40 = 80.$$

Следовательно, длина забора будет наименьшей при ширине участка $x = 20$ и длине участка $y = 800 / 200 = 40$.

5. Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости функции $y = x^2 - 3x^5 \cdot \sqrt{\dots}$

Решение. 1. Ищем точки x , в которых $y'' = 0$ или не существует, и которые

лежат в области определения функции: $y \in \left[\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}; y' = \frac{10}{9}x^{\frac{1}{3}} \right] \sim \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$

y'_0 ни при каких x ; y'' не существует при $x = 0$ Dy .

2. Исследуем точку $x = 0$ на перегиб, определяя знак y'' слева и справа от нее.

Запишем это исследование в таблицу:

x	$-\infty; 0$	0	$0; +\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	$\cup$	2 перегиб	$\cap$

Таким образом, $x = 0$ - абсцисса точки перегиба $y_0 = 2$. Эта кривая в кривой:

интервале $-\infty; 0$ вогнута, а в интервале $0; +\infty$ - выпукла.

6. Найдите асимптоты следующих функций:

а) $y = \frac{x}{2x-1}$; б) $y = xe^x$.

$$Dy = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Решение. а) Область определения данной функции:

$$x \neq \frac{1}{2}$$

Отсюда следует, что $x = \frac{1}{2}$ - вертикальная асимптота, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{x}{2x-1} = \frac{\frac{1}{2}}{0^-} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x}{2x-1} = \frac{\frac{1}{2}}{0^+} = +\infty$$

$$x \rightarrow 0 \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad x \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Наклонные (невертикальные) асимптоты определяем из условий:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} y - ax;$$

$$y = \frac{x}{2x-1}, \quad \text{где} \quad x \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad x \rightarrow -\infty$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2x-1} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - (2x-1)x}{2(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + x}{2(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 2x}{2(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + x}{2x-1} = -\frac{1}{2}$$

Таким образом, $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ - наклонная асимптота.

б) $Dy = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$, следовательно, $x = 0$ - вертикальная асимптота, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x e^x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-x^2} = -\infty$$

Ⓟ

Ⓟ

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$b \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\tilde{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{1}{e^{-\tilde{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-\tilde{x}}} = 1.$$

Следовательно, $y = x + 1$ - наклонная асимптота.

7. Исследуйте функцию $y = \frac{x}{\tilde{x}^3 \sqrt[3]{\tilde{x} + 1}}$ и постройте ее график.

Решение.

1. Найдем область определения: $D_y = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

2. Исследуем функцию на четность: так как область определения функции не симметрична относительно начала координат, то данная функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Исследуем функцию на периодичность: $y(x + T) = \frac{x + T}{(\tilde{x} + T)^3 \sqrt[3]{\tilde{x} + T + 1}} \neq y(x)$ ни для какого T , кроме $T = 0$, следовательно, функция не является периодической.

4. Точки разрыва: $x = -1$.

Определим поведение функции вблизи точки разрыва слева и справа:

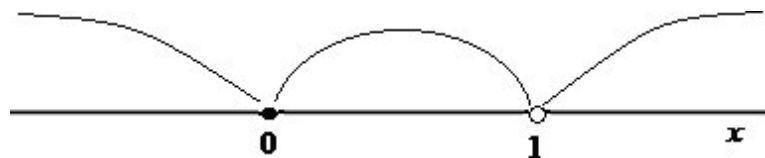
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{\tilde{x}^3 \sqrt[3]{\tilde{x} + 1}} = -\infty$$

$$\text{и } \lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{\tilde{x}^3 \sqrt[3]{\tilde{x} + 1}} = \infty.$$

5. Найдем точки пересечения с осями координат:

С осью Oy : полагаем $x = 0$, тогда $y = 0$, имеем точку $(0; 0)$.

С осью Ox : полагаем $y = 0$, тогда $\frac{x}{\tilde{x}^3 \sqrt[3]{\tilde{x} + 1}} = 0$, т.е. $x = 0$, имеем точку $(0; 0)$.



6. Разбиваем область определения функции точкой пересечения с осью Ox на промежутки. Определим интервалы знакопостоянства функции. Результаты занесем в таблицу:

x	$-\infty; 0$	0	$0; 1$	$1; +\infty$
y	$-$	0	$+$	$+$

7. Исследуем поведение функции на бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^3 \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^3 \sqrt{x-1}} = 0.$$

8. Найдем асимптоты графика функции:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{\sqrt{x-1}} = +\infty.$$

$x = 1$ - вертикальная асимптота, так как

Наклонную асимптоту ищем в виде $y = ax + b$, где

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^3 \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{x-1}} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^3 \sqrt{x-1}} - 0 \right) = 0.$$

Таким образом, наклонная асимптота превратилась в горизонтальную $y = 0$.

9. Исследуем функцию на возрастание – убывание и экстремумы.

Найдем первую производную:

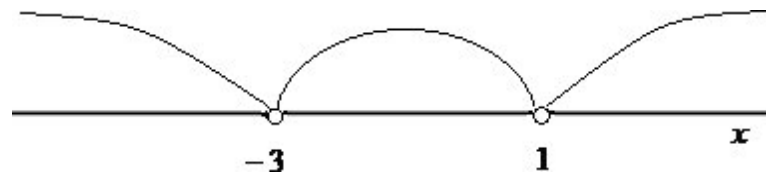
$$y' = \frac{3x^4 - 4x^3}{x^{\frac{8}{3}} \sqrt{x-1}} = \frac{3x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}}{3x^{\frac{8}{3}} \sqrt{x-1}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}(3x - 4)}{3x^{\frac{8}{3}} \sqrt{x-1}}.$$

Далее ищем критические точки: так как производная данной функции существует везде в области определения функции, то критические точки

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^{\frac{1}{3}}(3x - 4)}{3x^{\frac{8}{3}} \sqrt{x-1}} = 0, x = \frac{4}{3}$$

определяются только из условия $3x - 4 = 0$ - критическая точка.

Критическая точка разбивает область определения функции на промежутки:



Определяем знак производной на каждом из промежутков, результаты заносим в таблицу и делаем вывод о поведении функции и существовании экстремумов.

x	$-\infty; -3$	-3	$-3; 1$	$1; +\infty$
y'	-	0	+	-
y		min		

$$y_{\min} = y(-3) = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} \approx -0,49.$$

$$-\infty; 1; +\infty$$

10. Исследуем функцию на выпуклость-вогнутость и перегибы. Найдем вторую производную:

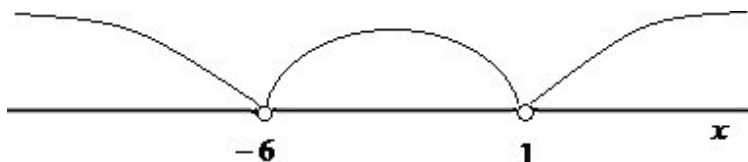
$$y' = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^3}{14} + \frac{4x^3}{10} = \frac{3x^3}{10} - \frac{x^3}{2} + \frac{2x^3}{5} = \frac{3x^3 - 5x^3 + 4x^3}{10} = \frac{2x^3}{10} = \frac{x^3}{5}$$

$$y'' = \frac{3x^2}{5} - \frac{3x^2}{5} + \frac{12x^2}{10} = \frac{6x^2}{5}$$

Ищем точки, принадлежащие области определения, в которых $y' = 0$ или не существует. Так как вторая производная существует везде в области определения, то учитываем только условие

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{5} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Эта точка разбивает область определения на промежутки:



Определяем знак второй производной на каждом промежутке, результаты заносим в таблицу. Делаем выводы о выпуклости-вогнутости функции в точках перегиба:

x	$-\infty; -6$	-6	$6; 1$	$1; +\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$
y''	$\cap$	перегиб	$\cup$	$\cup$

$-\infty \bullet \xrightarrow{-6} \bullet \xrightarrow{1} +\infty$
 $\quad \quad \quad \frac{4}{3} \quad \quad \quad \frac{4}{-}$
 $\quad \quad \quad \sqrt[3]{-6} \quad \quad \quad \sqrt[3]{1}$

11. С помощью проведенного исследования по полученным данным строим

график данной функции $y = \frac{x}{x^3 + 1}$. Сделайте рисунок самостоятельно в тетради.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на некотором промежутке.
2. Как найти интервалы монотонности функции?
3. Дайте определения экстремумов функции.
4. Определите наибольшее и наименьшее значения функции.
5. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
6. Какие точки называются критическими?
7. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.
8. Как ведется исследование функции на экстремум с помощью второй производной?
9. Укажите порядок исследования функции на возрастание и убывание и экстремумы.
10. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции? Укажите порядок решения этой задачи.
11. Определите понятия выпуклость и вогнутость графика функции.
12. Какую точку называют точкой перегиба?

13. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции?

14. Как определить точки перегиба?

15. Что называется асимптотой кривой $y = f(x)$?

16. Как найти асимптоту $y = ax^b$ кривой $y = f(x)$, т.е. как найти a и b ?

17. По какой схеме следует проводить исследование функции и построение ее графика?

18. Для решения каких вопросов исследования функции и построения ее графика:

а) не нужны теория пределов и дифференциальное исчисление?

б) необходимо уметь вычислять пределы?

в) нужна первая производная?

г) нужна вторая производная?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите интервалы возрастания и убывания следующих функций:

а) $y = 3x^2 - 3x$; б) $y = \frac{2x}{1+x^2}$; в) $y = \cos x$.

2. Исследуйте на экстремум следующие функции:

а) $y = x^2 x$; б) $y = e^x \sin x$; в) $y = \frac{x}{\ln x}$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения следующих функций:

а) $y = x^2 - 4x + 6$ на отрезке $[3; 10]$;

б) $y = \sqrt{5 - 4x}$ на отрезке $[1; 1]$.

в) Реакции организма на два лекарства как функции t (время выражается в часах) составляют $f(t) = te^t$ и $g(t) = t^2 e^t$. У какого из лекарств выше

2

максимальная реакция?

4. Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости следующих

кривых:

а) $y = 3x^5 - 5x^4$; б) $y = 3 \sqrt[5]{x - 2^7}$; в) $y = 1 - \ln x^2$.

5. Найдите асимптоты следующих функций:

а) $y = \frac{2x}{\tilde{x} - 1}$;

б) $y = \frac{1}{2x^2 \cdot \tilde{x} - 1}$.

6. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $y = \frac{x!^2}{\tilde{x} - 2}$; б) $y = \tilde{x}^3 - x \cdot \sqrt{\quad}$

7. Закон перехода некоторого вещества в раствор в зависимости от времени t задается формулой: $x(t) = 2\tilde{t} e^{5t}$. Исследуйте эту функцию и постройте график этой зависимости.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Решите вариант самостоятельной работы № 9 по теме «Приложения производной функции» в соответствии с последней цифрой Вашей зачетки.

Вариант 1 1. Вычислить предел, используя $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \operatorname{ctg}^2 x \right)$ правило Лопиталя 2. Вычислите приближенно $\sqrt[24]{24,98}$. 3. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \frac{2x^2}{1 - x^2}$.	Вариант 2 1. Вычислить предел, используя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^3}$ правило Лопиталя 2. Вычислите приближенно $\sqrt[4]{6,01}$. 3. Определить промежутки выпуклости и вогнутости графика функции $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.
Вариант 3 1. Вычислить предел, используя $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\tilde{x} - 1} \right)$ правило Лопиталя 2. Вычислите приближенно $\sqrt[3]{3,98}$. 3. Найти экстремумы функции $f(x) = 3\sqrt[2]{x}$.	Вариант 4 1. Вычислить предел, используя $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x \ln x}{1 - \sqrt{2\tilde{x} - x^2}}$ правило Лопиталя 2. Вычислите приближенно $\sqrt[3]{7,99}$. 3. Определить точки экстремума функции $f(x) = x^3 - x^2$.
Вариант 5	Вариант 6

1. Вычислить предел, используя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg} \pi x}$ 2. Вычислите приближенно $\ln 0,98$ 3. Найти точки перегиба графика функции $f(x) = x^4 - 4x^3$	1. Вычислить предел, используя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x - \operatorname{ctg} x)$ 2. Вычислите приближенно $\sqrt[3]{63,8}$ 3. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 2x^3 - x^4$
Вариант 7 1. Вычислить предел, используя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow 0} ((1 - \cos x) \operatorname{ctg} x)$ 2. Вычислите приближенно $\sqrt[4]{64,02}$ 3. Определить промежутки выпуклости и вогнутости графика функции $f(x) = x^7 - x^6$	Вариант 8 1. Вычислить предел, используя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{2 \ln \sin x}$ 2. Вычислите приближенно $\sqrt[4]{624,75}$ 3. Найти экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - x^3$
Вариант 9 1. Вычислить предел, используя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{x}$ 2. Вычислите приближенно $\ln 1,02$ 3. Определить точки экстремума функции $f(x) = x^2 - \ln x$	Вариант 10 1. Вычислить предел, используя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow \infty} (x e^{5x})$ 2. Вычислите приближенно $\sqrt[3]{27,01}$ 3. Найти точки перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 12x^2 + x$

2. Выполните ИДЗ №6 по теме «Исследование функций и построение их графиков».

Исследовать функцию и построить ее график.

Вариант 1 $y = 2 - \frac{12}{x^2 - 4}$	Вариант 2 $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$
Вариант 3 $y = x - \frac{4}{x^2}$	Вариант 4 $y = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}$
Вариант 7 $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^3}$	Вариант 8 $y = \frac{1}{x^2 x^4}$

Вариант 9 $y \bullet \frac{1}{x\tilde{x} \cdot 1}$	Вариант 10 $y \bullet x \cdot \frac{x}{3\tilde{x} \cdot 1}$
Вариант 11 $y \bullet \frac{x^3}{x^2 \cdot 1}$	Вариант 12 $y \bullet \frac{x^3}{2\tilde{x} \cdot 1^2}$
Вариант 13 $y \bullet \frac{4}{2 \cdot x} \cdot x$	Вариант 14 $y \bullet 1 \cdot \frac{3}{x^2 \cdot 1}$
Вариант 15 $y \bullet \frac{x^3}{2\tilde{x} \cdot 1^2}$	Вариант 16 $y \bullet \frac{3}{4x^2 \cdot 1} \cdot 1$
Вариант 17 $y \bullet \frac{6x^2}{3\tilde{x} \cdot 1}$	Вариант 18 $y \bullet \frac{x^3 \cdot x^2 \cdot 1}{x^2 \cdot 1}$
Вариант 19 $y \bullet \tilde{x} \cdot \frac{x}{3\tilde{x} \cdot 1}$	Вариант 20 $y \bullet \frac{x^4 \cdot x^3 \cdot 1}{x^3 \cdot 1}$
Вариант 21 $y \bullet \frac{1}{x\tilde{x} \cdot 1}$	Вариант 22 $y \bullet \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{4x^3}$
Вариант 23 $y \bullet \frac{x^3}{4x^2 \cdot 1}$	Вариант 24 $y \bullet x \cdot \frac{x}{6\tilde{x} \cdot 1}$
Вариант 25 $y \bullet \frac{x^2 \cdot 3\tilde{x} \cdot 6}{\tilde{x} \cdot 2}$	Вариант 26 $y \bullet \frac{x^4}{1 \cdot x^3}$
Вариант 27 $y \bullet \frac{x^3}{x^2 \cdot 4}$	Вариант 28 $y \bullet \frac{1}{x^4} \cdot \frac{2}{x^2}$
Вариант 29 $y \bullet \frac{2x^2 \cdot 1}{x^2 \cdot 1}$	Вариант 30 $y \bullet \frac{x^3}{1 \cdot 4x^2} \cdot 1$

Практическое занятие № 22

Тема занятия «Контрольное занятие»

Цель занятия: Проверка теоретических знаний, практических умений и навыков по разделу «Дифференциальное исчисление функции одной переменной».

Организационная форма занятия: коллоквиум.

Компетенции, формируемые на занятии: ОПК-1.

Формирование на занятии у будущих специалистов этих компетенций предполагает обучение студентов

- сформулировать гипотезу и проверить ее в дальнейшем;
- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- владеть основными методиками решения учебно-исследовательских задач;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- планировать самостоятельную работу;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Системы координат.
2. Прямая линия на плоскости.
3. Кривые второго порядка.
4. Функции, их свойства и графики.
5. Предел функции.
6. Непрерывность функции.
7. Производная функции и ее приложения.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Подготовьтесь к коллоквиуму по вопросам приведенным ниже.
2. Повторите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциям к занятиям по указанному разделу.
3. Обратите внимание на основополагающие понятия этого раздела: функция, предел функции, непрерывность функции, производная и дифференциал функции.
4. Повторите свойства основных элементарных функций, постройте их графики и расскажите о свойствах, используя только графики.
5. Повторите план исследования функции и продумайте, как каждый пункт исследования отражается при построении графика функции. Для исследования каких свойств функции необходимы производные?
6. Повторите, какие практические приложения дифференциального исчисления Вы знаете.

7. Пройдите предварительное компьютерное тестирование в указанное преподавателем время.

На занятии сдайте коллоквиум по предложенным Вам вопросам.

Рекомендуемая литература

- [1] главы 4-5, 7-8.
- [2] главы I, VI, VII.
- [3] глава 2 §6, глава 3 §10, главы 4, 6-7.
- [5] глава 1, глава 5, главы 7, 8.
- [6] главы 2-6.
- [7] главы II-VI.
- [8] глава 2-5.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциям

Вопросы для подготовки к коллоквиуму №2 по

***теме «Элементы аналитической геометрии. Дифференциальное
исчисление функции одной переменной»***

1. Метод координат. Определение положения точки на прямой. Прямоугольные декартовы координаты на плоскости и в пространстве.
2. Основные задачи на прямоугольные координаты: расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении.
3. Преобразования прямоугольной системы координат: параллельный перенос, поворот и зеркальное отображение осей координат.
4. Полярная система координат, ее связь с прямоугольной.
5. Пространственные системы координат: прямоугольная, декартова, цилиндрическая, сферическая и связь между ними.
6. Определение и способы задания функции. Область определения, область значения, график функции. Обратная функция. Сложная функция.
7. Основные элементарные функции, элементарные функции (линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические), их свойства, графики.
8. Построение графиков функций с помощью геометрических

преобразований.

9. Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Вывод уравнения. Геометрический смысл углового коэффициента.

10. Общее уравнение прямой на плоскости. Расположение прямой в зависимости от коэффициентов общего уравнения прямой. Параллельность и перпендикулярность прямой координатным осям.

11. Уравнение прямой в отрезках, его вывод. Геометрический смысл коэффициентов уравнения.

12. Нормальное уравнение прямой, его вывод. Геометрический смысл параметров уравнения. Нахождение расстояния от точки до прямой.

13. Уравнение прямой проходящей через две точки. Составление уравнений прямой параллельной данной; перпендикулярной данной.

14. Угол между прямыми и его нахождение. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

15. Кривые второго порядка. Общее уравнение линии второго порядка, классификация кривых второго порядка.

16. Окружность. Каноническое уравнение окружности, его вывод.

17. Эллипс, его каноническое уравнение (с выводом), способы построения.

18. Гипербола, каноническое уравнение (с выводом), асимптоты гиперболы.

19. Парабола, вывод канонического уравнения.

20. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

21. Полярное уравнение эллипса, гиперболы, параболы.

22. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Число e . Натуральные логарифмы.

23. Предел функции. Односторонние и бесконечные пределы. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы.

24. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции.

Сравнение бесконечно малых функций.

25. Непрерывные функции и их свойства. Непрерывность сложной функции.

26. Точки разрыва и их классификация. Непрерывность элементарных функций.

27. Понятие производной и ее геометрический и механический смысл. Производная сложной функции. Связь дифференцируемости с непрерывностью.

28. Правила дифференцирования. Таблица основных производных. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой.

29. Функции заданные неявно и параметрически и их дифференцирование.

30. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.

31. Дифференциал функции. Инвариантность формы первого дифференциала, применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков.

32. Правило Лопиталя. Формула Тейлора.

33. Возрастание и убывание функции, необходимое и достаточные условия.

34. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Экстремумы функции, необходимое и достаточные условия существования точек экстремума.

35. Выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба: определение, необходимые и достаточные условия.

36. Асимптоты плоских кривых, их виды.

37. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

Примерная тематика проектов по курсу.

1. Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
2. Симплекс метод решения задач линейного программирования.
3. Транспортная задача линейного программирования: ее модель и методы решения.
4. Поверхности вращения второго порядка: исследование их формы, построение, вычисление объема и площади поверхности.
5. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши, их геометрический смысл.
6. Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований.
7. Применение производных к решению текстовых задач на экстремум.
8. Геометрические приложения определенного интеграла.
9. Физические и химические приложения определенного интеграла.
10. Приложения определенного интеграла в медицине и фармации.
11. Приложения определенного интеграла в биологии и экологии.
12. Приложения определенного интеграла в географии.
13. Ряды Фурье для четных и нечетных периодических функций.
14. Решение задач на условный экстремум.
15. Криволинейные интегралы и их приложения.
16. Поверхностные интегралы первого и второго рода, их вычисление.
17. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов.
18. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка: однородные и неоднородные, структура их общих решений.
19. Системы дифференциальных уравнений, методы их решения.
20. Дифференциальные уравнения с частными производными.
21. Применение операционного исчисления для решения линейных дифференциальных уравнений и систем.
22. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений: методы Эйлера, Рунге – Кутте.
23. Численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.
24. Приближенное вычисление определенных интегралов.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Лобкова, Н. И. Высшая математика для экономистов и менеджеров : учебное пособие / Н. И. Лобкова, Ю. Д. Максимов, Ю. А. Хватов. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 520 с. — ISBN 978-5-8114-3293-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/213176>

2. Первадчук, В. П. Высшая математика для экономистов : учебное пособие / В. П. Первадчук, С. Н. Трегубова, Д. Б. Шумкова. — Пермь : ПНИПУ, 2007. — 450 с. — ISBN 978-5-88151-850-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/160853>

Дополнительная

1. Павлов, О. И. Конспект лекций по высшей математике : учебное пособие / О. И. Павлов, О. Ю. Павлова. — Москва : Российский университет дружбы народов, 2017. — 76 с. — ISBN 978-5-209-08099-2. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/91013.html>

Интернетресурсы

4. Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика: <http://www.allmath.ru/>

5. Общероссийский математический портал Math- Net.ru: <http://Math-Net.ru/>

6. <http://www.mnr.gov.ru/> - Сайт Министерства природных ресурсов и экологии РФ.

7. <http://mpr.stavkrai.ru/> - Сайт Министерства природных ресурсов и охраны окружающей среды Ставропольского края.

8. <http://rpn.gov.ru/> - Сайт Федеральной службы по надзору в сфере природопользования.

9. <http://www.rosleshoz.gov.ru/> - Сайт Федерального агентства лесного хозяйства.

10. <http://www.rosnedra.gov.ru/> - Сайт Федерального агентства по недропользованию.

11. <http://voda.mnr.gov.ru/> - Сайт Федерального агентства водных ресурсов.

12. <http://fish.gov.ru/> - Сайт Федерального агентства по рыболовству.