

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Методические указания к практическим занятиям по дисциплине
«Основы теории нечетких множеств и нечеткой логики»**

Направление подготовки

01.03.02 – Прикладная математики и информатика

Ставрополь 2026

Содержание

1. Введение	3
2. Лабораторная работа 1	4
3. Лабораторноеработа 2	8
4. Лабораторноеработа 3	11
5. Лабораторноеработа 4	15
6. Лабораторноеработа 5	19
7. Лабораторноеработа 6	21
8. Лабораторноеработа 7	24
9. Лабораторноеработа 8	28

Введение

Лабораторные занятия - это целенаправленная форма организации педагогического процесса, направленная на углубление научно-теоретических знаний и овладение определенными методами работы, в процессе которых вырабатываются умения и навыки выполнения тех или иных исследовательских действий в данной сфере науки.

Данные методические указания к лабораторным занятиям разработаны в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Нечёткая логика и её приложения» для студентов направления подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки».

Лабораторная работа № 1

Тема занятия «Характеристические параметры нечётких множеств»

Теоретическая часть

Определение 1. Пусть X – универсальное множество, множество A – подмножество X ($A \subseteq X$). *Нечетким множеством* A называется совокупность упорядоченных пар вида: $\langle x, \mu_A(x) \rangle$, где $x \in X$, а $\mu_A(x)$ – функция принадлежности, которая ставит в соответствие каждому элементу $x \in X$ некоторое действительное число из отрезка $[0,1]$.

Определение. Величина $h = \sup_x \mu_A(x)$ называется *высотой* нечеткого множества A .

Определение. Нечеткое множество A *нормально*, если его высота равна 1, т. е. $\sup_x \mu_A(x) = 1$.

Определение. Если $\sup_x \mu_A(x) < 1$, то нечеткое множество называется *субнормальным*.

Непустое субнормальное множество можно нормализовать по формуле

$$\mu'_A = \frac{\mu_A(x)}{\sup_x \mu_A(x)}.$$

Определение. Нечеткое множество A *унимодально*, если $\mu_A(x) = 1$ только на одном элементе $x \in X$. Этот элемент x называют *модальным значением* или *модой* нечёткого множества.

Определение. *Носителем нечеткого множества* A является обычное подмножество A_s множества X , которое содержит те и только те элементы X , для которых значения функции принадлежности нечёткого множества A не равны 0, т. е. $A_s = \{x | x \in X, \mu_A(x) > 0\}$.

Определение. Нечёткое множество называется *конечным*, если его носитель конечное множество. В противном случае множество называется бесконечным.

Определение. Множество T_A , состоящее из элементов $x \in X$, для которых $\mu_A(x) = 0,5$, называется *точками перехода* нечёткого множества A , т. е. $T_A = \{x | x \in X, \mu_A(x) = 0,5\}$.

Определение. *Границами* G_A нечёткого множества A называются такие элементы универсума X , для которых значения функции принадлежности $\mu_A(x)$ отличны от 0 и 1, т. е. $G_A = \{x | x \in X, 0 < \mu_A(x) < 1\}$.

Определение. *Ядром* нечёткого множества A называют обычное множество A_1 , элементы которого удовлетворяют условию $A_1 = \{x | x \in X, \mu_A(x) = 1\}$.

Определение. *Множеством уровня α (α -срезом)* нечеткого множества A называется четкое подмножество универсального множества X , определяемое по формуле $A_\alpha = \{x | x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha\}$, где $\alpha \in [0,1]$. Множество строгого α -уровня определяется в виде $A_\alpha = \{x | x \in X, \mu_A(x) > \alpha\}$.

Определение. Четкое множество A^* , *ближайшее к* нечеткому множеству A , состоит из тех элементов универсума, для которых значения функции принадлежности $\mu_A(x) > 0,5$, а элементы, у которых

$\mu_A(x)=0,5$, могут принадлежать или могут не принадлежать множеству A^* , то есть характеристическая функция множества A^* определяется следующим образом:

$$\mu_{A^*}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_A(x) < 0,5 \\ 1, & \text{если } \mu_A(x) > 0,5 \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } \mu_A(x) = 0,5 \end{cases}$$

Содержание отчёта.

1. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями.
2. Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Пусть $E = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ и соответствует понятию «Возраст», тогда нечеткое множество «Молодой» может быть определено с помощью

$$\mu_{\text{Молодой}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1, 25], \\ \frac{1}{1 + ((x - 25)/5)^2}, & x > 25. \end{cases}$$

Нечеткое множество «Молодой» на универсальном множестве $E' = \{\text{ИВАНОВ, ПЕТРОВ, СИДОРОВ, ...}\}$ задается с помощью функции принадлежности $\mu_{\text{Молодой}}(x)$ на $E = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ (возраст), называемой по отношению к E' функцией совместимости, при этом:

$$\mu_{\text{Молодой}}(\text{СИДОРОВ}) := \mu_{\text{Молодой}}(x),$$

где x — возраст СИДОРОВА.

Вычислите значения функции принадлежности с интервалом 5 лет. Постройте график функции принадлежности. Определите характеристики нечёткого множества.

2. Задайте следующие нечёткие множества:

а) «описание лица знакомого человека», используя таблицу

Элемент множества X	Признак	Полярное значение, соответствующее значению функции принадлежности	
		0	1
x_1	Высота лба	низкий	широкий
x_2	Профиль носа	курносый	горбатый
x_3	Длина носа	короткий	длинный
x_4	Разрез глаз	узкие	широкие
x_5	Цвет глаз	светлые	темные
x_6	Форма подбородка	остроконечный	квадратный
x_7	Толщина губ	тонкие	толстые
x_8	Цвет лица	темный	светлый
x_9	Очертание лица	овальное	квадратное

b) «средняя скорость автомобиля»;

c) «горячий напиток»;

d) «высокий уровень доходов».

3. Найдите основные характеристики множеств из упражнения 2.

4. Для каждого нечёткого множества из упражнения 2 постройте множества уровня 0,4.

5. Приведите 5 примеров нечётких множеств, обладающих следующими характеристиками:

a) A1 субнормально;

b) A2 унимодально и бесконечно;

c) A3 не содержит точек перехода и нормальное;

d) A4 конечно и не содержит ядро;

e) A5 бесконечно и не содержит границы.

Задания для самостоятельной работы дома

1. С помощью нечетких множеств формализовать неточное определение понятия «подходящая температура для купания в Балтийском море». Определите его характеристики: *высота, носитель, точки перехода*

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями (контрольные вопросы)

1. В чём принципиальная разница между обычным множеством и нечётким множеством?
2. Можно ли задать обычное множество как нечёткое?
3. В чём разница между описанием конечного и бесконечного нечёткого множества?
4. Какие характеристики нечётких множеств имеют смысл для обычных множеств? Ответ аргументируйте.

Лабораторная работа № 2

Тема занятия «Функции принадлежности нечётких множеств»

Теоретическая часть

Функция принадлежности ставит в соответствие каждому значению x заданной переменной некоторое число из интервала $[0,1]$:

$$\mu_a(x): X \rightarrow [0,1], \quad x \in X$$

Это число называется **степенью принадлежности**, характеризует степень, с которой элемент x принадлежит нечеткому множеству A .

Нелинейные функции принадлежности

Симметричная гауссова функция

Гауссова функция описывается выражением

$$\mu(x) = \exp \left[- \left(\frac{x - b}{a} \right)^2 \right]$$

Асимметричная гауссова функция

Данная функция сочетает в себе преимущество гауссовой функции, связанное с бесконечной дифференцируемостью, с отсутствием недостатка выражающегося в ее симметричности.

Если ввести вспомогательную логическую переменную

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } -\infty < x \leq m, \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases}$$

То асимметричная гауссова функция задается в следующем виде:

$$\mu(x) = w \cdot \exp \left[- \left(\frac{x - m}{a_1} \right)^2 \right] + (1 - w) \cdot \exp \left[- \left(\frac{x - m}{a_2} \right)^2 \right]$$

где m – ее модальное (среднее) значение

Сигмоидальная функция принадлежности

Правая сигмоидальная функция задается с помощью выражения:

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \exp[-a \cdot (x - b)]}$$

Параметр b задает координату точки k , принадлежащей нечеткому множеству со степенью 0,5. Коэффициент a определяет наклон функции в точке перегиба k – с увеличением его значения растет величина наклона. Коэффициент наклона a можно вычислить на основе экспертной оценки значения $x_{0.99}$, т.е. наименьшего значения переменной x , которое может с практически полной уверенностью считаться принадлежащим нечеткому множеству, задаваемому сигмоидальной функцией.

Левая сигмоидальная функция задается выражением:

$$\mu(x) = 1 - \frac{1}{1 + \exp[-a \cdot (x - b)]} = \frac{\exp[-a \cdot (x - b)]}{1 + \exp[-a \cdot (x - b)]}$$

Гармоническая функция принадлежности

Выражение для внутренней гармонической функции имеет вид:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0.5 \cdot \left[1 + \cos \left(\pi \frac{x-b}{a} \right) \right] & \text{для } (b-a) \leq x \leq (b+a) \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases}$$

Внутренняя полиномиальная функция принадлежности **второго порядка**, которая определяется выражением

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x-b}{a} \right)^2, & \text{если } (b-a) \leq x \leq (b+a), \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Правая внешняя полиномиальная функция принадлежности второго порядка определяется по формуле:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < (b-a), \\ 1 - \left(\frac{x-b}{a} \right)^2, & \text{если } (b-a) \leq x \leq (b+a) \\ 1, & \text{если } x > b \end{cases}$$

Левая внешняя полиномиальная функция принадлежности второго порядка определяется по формуле:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < b, \\ 1 - \left(\frac{x-b}{a} \right)^2, & \text{если } b \leq x \leq (b+a) \\ 1, & \text{если } x > (b+a) \end{cases}$$

Содержание отчёта.

1. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями.
2. Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Постройте графики функций принадлежности, задав конкретные значения параметров. Придумайте примеры, которые могли бы описываться этими функциями.

$$s(x, a, b, c) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq a, \\ 2 \left(\frac{x-a}{c-a} \right)^2 & \text{для } a \leq x \leq b, \\ 1 - 2 \left(\frac{x-c}{c-a} \right)^2 & \text{для } b \leq x \leq c, \\ 1 & \text{для } x \geq c. \end{cases}$$

$$l(x, a, b) = \exp \left[- \left(\frac{x-b}{a} \right)^2 \right]$$

2. Задайте нечёткие множества, характеризующиеся неопределённостью типа:

- а) «отличное качество»; «высокий уровень доходов и цен»; «высокая норма прибыли»;
- б) «приблизительно равно»; «расположен в интервале»; «средний уровень доходов и цен»;
- с) «низкое качество»; «незначительная величина»; «низкий уровень доходов».

Для чего выберите 3 функции (по одной из блоков а, б, с). Задайте формулы функций принадлежности из рассмотренных в теоретической части, постройте графики, задав конкретные значения параметров функций принадлежности.

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями (контрольные вопросы)

1. Как изменятся формулы и графики кусочно-линейных функций принадлежности, если их рассматривать на множестве N натуральных чисел? на множестве Z целых чисел?
2. К какому виду принадлежит график функции принадлежности универсума? пустого множества?
3. Приведите примеры нечёткого множества, функции принадлежности которых не относятся к треугольным, трапециевидным, S-образным и Z-образным функциям принадлежности.

Лабораторная работа № 3

Тема занятия «Операции над нечёткими множествами»

Теоретическая часть

Определение. Говорят, что A содержится в B , если для всех элементов $x \in X$ выполняется условие $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$. Обозначение: $A \subset B$. Иногда используют термин «доминирование», т. е. в случае когда $A \subset B$, говорят, что B доминирует A .

Определение. A и B равны, если для всех элементов $x \in X$ выполняется условие $\mu_A(x) = \mu_B(x)$. Обозначение: $A = B$.

Определение. Множество $\bar{A}$ является дополнением множества A , если для всех элементов $x \in X$ выполняется условие $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Определение. Объединением нечётких множеств A и B называется нечёткое множество $A \cup B$, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ (максимное объединение).

Определение. Пересечением нечётких множеств A и B называется нечёткое множество $A \cap B$, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ (максимное пересечение).

Определение. Разностью нечётких множеств A и B называется нечёткое множество $A \setminus B$, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu_{A \setminus B}(x) = \min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$

Определение. Симметрической разностью нечётких множеств A и B называется нечёткое множество $A \oplus B$, функция принадлежности которого имеет вид:

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \max\{\min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}; \min\{\mu_B(x), 1 - \mu_A(x)\}\}$$

Пусть A, B, C – нечеткие множества, заданные на универсуме X .

Тогда выполняются следующие свойства (законы и аксиомы):

1) коммутативный закон

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = A \cap B$$

2) ассоциативный закон

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C; \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

3) дистрибутивный закон

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4) Законы поглощения

$$A \cup (A \cap B) = A \quad A \cap (A \cup B) = A$$

5) Законы идемпотентности

$$A \cup A = A \quad A \cap A = A$$

6) Законы де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

7) Универсальная верхняя и нижняя границы операций объединения и пересечения $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap X = A$, $A \cup X = X$

8) Двойное дополнение нечёткого множества $\bar{\bar{A}} = A$

Особенность рассматриваемых операций над нечёткими множествами состоит в том, что для них не выполняются $A \cup \bar{A} \neq X$, $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$.

Определение. *Алгебраическим объединением* нечётких множеств A и B называется нечёткое множество $D = A + B$, заданное на том же универсуме X , функция принадлежности которого имеет вид:
 $\mu_D(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \mu_B(x)$.

Определение. *Алгебраическим пересечением* нечётких множеств A и B называется нечёткое множество $C = A \cdot B$, заданное на том же универсуме X , функция принадлежности которого имеет вид:
 $\mu_C(x) = \mu_A(x) \mu_B(x)$.

Определение. *Граничным объединением* нечётких множеств A и B называется нечёткое множество $D = A \oplus B$, заданное на том же универсуме X , функция принадлежности которого имеет вид:
 $\mu_D(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$.

Определение. *Граничным пересечением* нечётких множеств A и B называется нечёткое множество $C = A \otimes B$, заданное на том же универсуме X , функция принадлежности которого имеет вид:
 $\mu_C(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$.

Содержание отчёта.

3. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями.
4. Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. На множестве $X = [10; 60]$ заданы бесконечные нечёткие множества A , B , C . Функции принадлежности множеств заданы следующими выражениями:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq 20 \\ \frac{25-x}{5}, & \text{если } 20 < x < 25 \\ 0, & \text{если } x \geq 25 \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 20 \\ \frac{x-20}{10}, & \text{если } 20 < x < 30 \\ 1, & \text{если } 30 \leq x \leq 40 \\ \frac{45-x}{5}, & \text{если } 40 < x < 45 \\ 0, & \text{если } x \geq 45 \end{cases}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 35 \\ \frac{x - 35}{15}, & \text{если } 35 < x < 50 \\ 1, & \text{если } x \geq 50 \end{cases}$$

Найдите:

- 1) максиминное объединение множеств: $A \cup B$, $A \cup C$, $C \cup B$;
- 2) максиминное пересечение множеств: $A \cap B$, $A \cap C$, $C \cap B$;
- 3) дополнение множеств: $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$;
- 4) разность множеств: $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $C \setminus B$, $B \setminus C$;
- 5) симметрическую разность множеств: $A \oplus B$, $C \oplus B$, $A \oplus C$;

На интервале $[10; 60]$ равномерно задать по 11 значений для множеств A , B , и C для которых выполнить операции:

- 6) алгебраическое объединение множеств: $A+B$, $C+B$, $A+C$;
- 7) алгебраическое пересечение множеств: $A \cdot B$, $C \cdot B$, $A \cdot C$;
- 8) граничное объединение множеств: $A \oplus B$, $C \oplus B$, $A \oplus C$;
- 9) граничное пересечение множеств: $A \otimes B$, $C \otimes B$, $A \otimes C$;
- 10) A^2 , $A^{0,5}$;
- 11) $0,5A + 0,3B + 0,1C$.

Доказательство законов и аксиом для нечётких множеств:

- 12) Докажите свойства 1–8 операций $\cup$ и $\cap$ нечётких множеств.
- 13) Докажите, что для максиминных операций объединения и пересечения в общем случае не выполняются закон исключённого третьего и закон тождества: $A \cup \bar{A} \neq X$, $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$.
- 14) Докажите законы коммутативности, ассоциативности де Моргана операций алгебраического объединения и пересечения нечётких множеств.
- 15) Докажите, что для алгебраических операций объединения и пересечения в общем случае не выполняются законы идемпотентности, дистрибутивности, поглощения, исключённого третьего тождества.
- 16) Докажите, что для граничных операций объединения и пересечения в общем случае не выполняются свойства идемпотентности и дистрибутивности.

Задания для самостоятельной работы

2. На множестве $X = [0; 45]$ задайте бесконечные нечёткие множества A : «высокая температура воздуха», B : «нормальная температура воздуха», C : «низкая температура воздуха».

Найдите:

- 1) максиминное объединение множеств: $A \cup B$, $A \cup C$, $C \cup B$;
- 2) максиминное пересечение множеств: $A \cap B$, $A \cap C$, $C \cap B$;
- 3) дополнение множеств: $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$;
- 4) разность множеств: $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $C \setminus B$, $B \setminus C$;
- 5) симметрическую разность множеств: $A \oplus B$, $C \oplus B$, $A \oplus C$;

На интервале $[0; 45]$ равномерно задать не менее 10 значений для множеств A , B , и C для которых выполнить операции:

- 6) алгебраическое объединение множеств: $A+B$, $A+C$, $C+B$;
- 7) алгебраическое пересечение множеств: $A \cdot B$, $C \cdot B$, $A \cdot C$;
- 8) граничное объединение множеств: $A \oplus B$, $C \oplus B$, $A \oplus C$;
- 9) граничное пересечение множеств: $A \otimes B$, $C \otimes B$, $A \otimes C$;

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями (контрольные вопросы)

- 1. Как изменятся формулы и графики кусочно-линейных функций принадлежности, если их рассматривать на множестве N натуральных чисел? на множестве Z целых чисел?
- 2. К какому виду принадлежит график функции принадлежности универсума? пустого множества?
- 3. Приведите примеры нечёткого множества, функции принадлежности которых не относятся к треугольным, трапециевидным, S -образным и Z -образным функциям принадлежности.

Лабораторная работа № 4

Тема занятия «Операции над нечёткими величинами и интервалами»

Теоретическая часть

Определение. *Нечёткой величиной* называется произвольное нечёткое множество A , заданное на множестве действительных чисел R , т. е. для которого универсумом X служит всё множество R .

Если в качестве универсума взять подмножество неотрицательных действительных чисел R^+ , то получим определение *неотрицательной нечёткой величины*.

Определение. *Нечётким числом* называется нечёткая величина, функция принадлежности которой является выпуклой и унимодальной.

Определение. *Нечётким интервалом* называется нечёткая величина с выпуклой функцией принадлежности.

Определение. *Треугольным нечётким числом* (ТНЧ) называется нечёткое число A_Δ , функция принадлежности которого имеет треугольный вид $f_\Delta(x; a, b, c)$. ТНЧ удобно представить в виде упорядоченного множества $A_\Delta = \langle d, \alpha, \beta \rangle$, где d – модальное значение ТНЧ; α – левый коэффициент нечёткости и β – правый коэффициент нечёткости: $d = b$, $\alpha = b - a$, $\beta = c - b$.

Определение. *Трапецевидным нечётким интервалом* (ТНИ) называется нечёткий интервал A_T с трапецевидной функцией принадлежности f_T . ТНИ удобно представлять в виде упорядоченного множества $A_T = \langle a, b, \alpha, \beta \rangle$, где a и b соответственно верхнее и нижнее модальное значение ТНИ, α – левый коэффициент нечёткости и β – правый коэффициент нечёткости ТНИ.

Определение. *Сложение:* операция сложения нечётких чисел обозначается через $A_\Delta + B_\Delta = C_\Delta$, нечёткое число $C_\Delta = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ имеет параметры a , α и β , которые определяются отдельным суммированием характеристик нечёткого числа: $a = a_1 + a_2$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$

Определение. *Вычитание:* операция вычитания нечётких чисел обозначается через $A_\Delta - B_\Delta = C_\Delta$, нечёткое число $C_\Delta = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ имеет параметры a , α и β , которые определяются следующим образом:
 $a = a_1 - a_2$, $\alpha = \alpha_1 + \beta_2$, $\beta = \beta_1 + \alpha_2$.

Определение. *Умножение положительных нечётких чисел* A_Δ и B_Δ , носители которых есть подмножества R^+ , модальные значения $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Операция умножения таких нечётких чисел обозначается через

$A_\Delta \cdot B_\Delta = C_\Delta$, нечёткое число $C_\Delta = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ имеет параметры a , α и β , которые определяются следующим образом:

$$a = a_1 a_2, \alpha = a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1, \beta = a_1 \beta_2 + a_2 \beta_1$$

Определение. *Умножение нечётких чисел* A_Δ и B_Δ , для которых модальные значения имеют разные знаки: $a_1 < 0$ и $a_2 > 0$. Операция

умножения таких нечётких чисел обозначается через $A\Delta \cdot B\Delta = C\Delta$, нечёткое число $C\Delta = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ имеет параметры a, α и β , которые определяются следующим образом:

$$a = a_1 a_2, \alpha = a_2 \alpha_1 - a_1 \beta_2, \beta = a_2 \beta_1 - a_1 \alpha_2.$$

Определение. Умножение нечётких чисел $A\Delta$ и $B\Delta$, для которых модальные значения имеют отрицательные знаки: $a_1 < 0, a_2 < 0$.

Операция умножения таких нечётких чисел обозначается через

$A\Delta \cdot B\Delta = C\Delta$, нечёткое число $C\Delta = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ имеет параметры a, α и β , которые определяются следующим образом:

$$a = a_1 a_2, \alpha = -a_2 \beta_1 - a_1 \beta_2, \beta = -a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2.$$

Определение. Деление положительных нечётких чисел $A\Delta$ и $B\Delta$, носители которых есть подмножества R^+ , модальные значения $a_1 > 0, a_2 > 0$. Операция деления таких нечётких чисел обозначается через $A\Delta \div B\Delta = C\Delta$, нечёткое число $C\Delta = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ имеет параметры a, α и β , которые определяются следующим образом:

$$a = \frac{a_1}{a_2}, \alpha = \frac{a_1 \beta_2 + a_2 \alpha_1}{(a_2)^2}, \beta = \frac{a_1 \alpha_2 + a_2 \beta_1}{(a_2)^2}.$$

Определение. Обратное нечёткое число: для положительного нечёткого числа $A\Delta$ (носитель которого есть подмножества R^+ модальное значение $a_1 > 0$) обратное число обозначается через $A\Delta^{-1} = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ и имеет параметры a, α и β , которые определяются следующим образом:

$$a = \frac{1}{a_1}, \alpha = \frac{\beta_1}{(a_1)^2}, \beta = \frac{\alpha_1}{(a_1)^2}$$

Определение. Сложение: операция сложения нечётких интервалов обозначается через $A_T + B_T = C_T$, нечёткий интервал $C_m = \langle a, v, \alpha, \beta \rangle$ имеет параметры a, v, α, β , которые определяются следующим образом:

$$a = a_1 + a_2, v = v_1 + v_2, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2.$$

Определение. Вычитание: операция вычитания ТНИ обозначается через $A_T - B_T = C_T$, нечёткое число $C_T = \langle a, v, \alpha, \beta \rangle$ имеет параметры a, v, α и β , которые определяются следующим образом:

$$a = a_1 - a_2, v = v_1 - v_2, \alpha = \alpha_1 + \beta_2, \beta = \beta_1 + \alpha_2.$$

Определение. Рассмотрим умножение положительных ТНИ A_T и B_T , т. е. тех, носители которых есть подмножества R^+ , а все модальные значения положительны. Операция умножения таких ТНИ обозначается через $A_T \cdot B_T = C_T = \langle a, v, \alpha, \beta \rangle$ и имеет параметры a, v, α, β , которые определяются следующим образом:

$$a = a_1 a_2, v = v_1 v_2, \alpha = a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1, \beta = v_1 \beta_2 + v_2 \beta_1.$$

Определение. Деление положительных ТНИ A_T и B_T , т. е. носители которых есть подмножества R^+ , модальные значения $a_1 > 0, a_2 > 0$.

Операция деления таких ТНИ обозначается через $AT \div BT = CT$, нечёткое число $CT = \langle a, b, \alpha, \beta \rangle$ имеет параметры a, b, α, β , которые определяются следующим образом:

$$a = \frac{a_1}{b_2}, b = \frac{b_1}{a_2}, \alpha = \frac{a_1\beta_2 + b_2\alpha_1}{(b_2)^2}, \beta = \frac{b_1a_2 + a_2\beta_1}{(a_2)^2}.$$

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Задайте в виде нечётких чисел или нечётких интервалов следующие величины:
 - а) «примерное время выполнения домашней работы»;
 - б) «молодой человек»;
 - в) «ожидаемый доход»;
 - г) «возможные расходы»;
 - д) «предполагаемая температура».

2. Заданы ТНЧ $A = \langle 5, 2, 3 \rangle$ и $B = \langle 10, 4, 3 \rangle$. Выполните операции $A+B, B-A, A*B, B/A, A^{-1}, B^{-1}$. Выполните $A*B$ для ТНЧ $A = \langle -5, 2, 3 \rangle$ и $B = \langle 7, 2, 1 \rangle$; $A = \langle -5, 2, 3 \rangle$ и $B = \langle -7, 2, 1 \rangle$.
 Заданы ТНИ $A = \langle 15, 20, 4, 6 \rangle$ и $B = \langle 5, 10, 2, 3 \rangle$. Выполните операции $A+B, A-B, A*B, B/A$.
 Изобразите числа и результаты операций на числовой оси.

3. Проверьте выполнение следующих свойств операций над ТНЧ и ТНИ:
 - а) коммутативность операций сложения и умножения;
 - б) дистрибутивность умножения относительно сложения и вычитания.

4. Требуется рассчитать возможную стоимость материалов для заливки бетоном площадки, имеющей прямоугольную форму со сторонами, примерно равными A , м и B , м, приблизительная глубина заливки H , м.
 Бетон состоит из песка и цемента в пропорции 3 к 1. Смесь песка с цементом разводится водой: на 1 часть цемента берётся 0,5 частей воды (считается, что вода не увеличивает объём бетона). Цена 1 м³ песка примерно равна N руб., 1 м³ цемента – M руб. Величины A, B, H, N, M заданы нечёткими треугольными числами:
 $A = \langle 4, 0.1, 0.1 \rangle, B = \langle 5, 0.1, 0.1 \rangle, H = \langle 2, 0.1, 0.1 \rangle,$
 $N = \langle 100, 10, 10 \rangle, M = \langle 400, 10, 10 \rangle.$

5. На одном и том же полутонном грузовике проверенный опытом водитель имеет норму расхода бензина $A = \langle 16, 1, 1 \rangle$ литров на 100 км, а молодой, менее опытный водитель $B = \langle 19, 1, 2 \rangle$ литров на 100 км. За день водитель проезжает $C = \langle 1000, 50, 50 \rangle$ км, стоимость бензина равна $D =$

$\langle 50, 1, 1 \rangle$ руб. Какова разница в стоимости за бензин за день у опытного и менее опытного водителя?

Контрольные вопросы

1. Какими особенностями должно обладать нечёткое множество, чтобы его можно было назвать нечёткой величиной?
2. Приведите пример нечёткого множества, которое не является нечёткой величиной.
3. Поясните, почему нечёткий интервал является нечётким числом. Верно ли обратное утверждение?
4. Можно ли обычное число представить как нечёткое число, а обычный числовой интервал – как нечёткий интервал?
5. Приведите примеры из жизни, где мы используем нечёткие числа и интервалы для описания приблизительных числовых величин.

Лабораторная работа № 5

Тема занятия «Операции над нечёткими отношениями»

Теоретическая часть

Пусть имеется некоторое бинарное отношение R на множествах A и B . Обратным отношением для отношения R будет множество $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$, т.е. множество тех же упорядоченных пар, в которых координаты поменялись местами. Следовательно, область определения обратного отношения – это область значений прямого отношения R , а множество его значений – область определения R . Если бинарное отношение R представлено матрицей, то обратное отношение может быть представлено путем транспонирования исходной матрицы.

Пусть Q и R – конечные или бесконечные нечёткие отношения, причём нечёткое отношение $Q = \{ \langle (x_i, x_j), \mu_Q(x_i, x_j) \rangle \mid x_i \in X_1, x_j \in X_2, \mu \in [0, 1] \}$ задано на декартовом произведении универсумов $X_1 \times X_2$, а нечёткое отношение $R = \{ \langle (x_j, x_k), \mu_R(x_j, x_k) \rangle \mid x_j \in X_2, x_k \in X_3, \mu_R \in [0, 1] \}$ – на декартовом произведении универсумов $X_2 \times X_3$.

Определение. Композицией двух бинарных нечётких отношений Q и R называется нечёткое отношение $Q \circ R$, заданное на множестве $X_1 \times X_3$, функция принадлежности которого $\forall (x_i, x_k) \in X_1 \times X_3$ определяется формулой

$$\mu_{Q \circ R}(x_i, x_k) = \max_{x_j \in X_2} \{ \min \{ \mu_Q(x_i, x_j), \mu_R(x_j, x_k) \} \}.$$

Определённую таким образом композицию нечётких отношений называют *max-min композицией* или *максиминной свёрткой* нечётких отношений.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Нечёткая модель «Выбор профессии». Рассмотрим типичную ситуацию, связанную с подбором персонала в области выбора профессии для последующего обучения и получения специальности. С этой целью построим нечёткую модель, основанную на двух бинарных нечётких отношениях S и G .

На множествах X и Y задано нечёткое отношение S , на множествах Y и Z задано нечёткое отношение G . X – множество специальностей, по которым проводится набор на обучение, Y – множество психофизиологических характеристик специальностей. Отношение S содержательно описывает психофизиологическое профилирование специальностей. Z – множество кандидатов на обучение.

Отношение G содержательно описывает психофизиологическое профилирование кандидатов на обучение.

Пусть множество $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, где x_1 – «менеджер»; x_2 – «программист»; x_3 – «водитель»; x_4 – «секретарь-референт»; x_5 – «переводчик».

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}\}$, где y_1 – «быстрота и гибкость мышления»; y_2 – «умение быстро принимать решение»; y_3 – «устойчивость и концентрация внимания»; y_4 – «зрительная память»; y_5 – «быстрая реакция»; y_6 – «двигательная память»; y_7 – «физическая выносливость»; y_8 – «координация движений»; y_9 – «эмоциональная устойчивость»; y_{10} – «ответственность».

$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$, где элементы множества Z – хорошо известные вам люди, например ваши друзья.

Отношение S задано матрицей M_s .

$$M_s := \begin{pmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.8 & 0.4 & 0.5 & 0.3 & 0.6 & 0.2 & 0.9 & 0.8 \\ 0.8 & 0.5 & 0.9 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.9 & 0.6 & 0.5 & 0.9 & 0.8 & 0.9 & 0.8 & 0.6 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.9 & 0.8 \\ 0.7 & 0.8 & 0.8 & 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- 1) Самостоятельно задайте нечёткое отношение G в виде матрицы M_g .
- 2) Постройте $\max$ - $\min$ композицию $S \circ G$ нечётких отношений S и G на множествах X и Z .
- 3) Сделайте вывод о предпочтительном выборе специальностей из множества X кандидатами на обучение из множества Z .
- 4) Составьте обратные отношения S^{-1} и G^{-1} (можно в виде матриц), дайте словесную формулировку данных обратных отношений.

Контрольные вопросы

1. Какие условия должны быть выполнены для осуществления операции композиции между нечёткими отношениями P и Q ?
2. Объясните смысл операции композиции между нечёткими отношениями P и Q .

Лабораторная работа № 6
Тема занятия «Свойства нечётких отношений»
Теоретическая часть

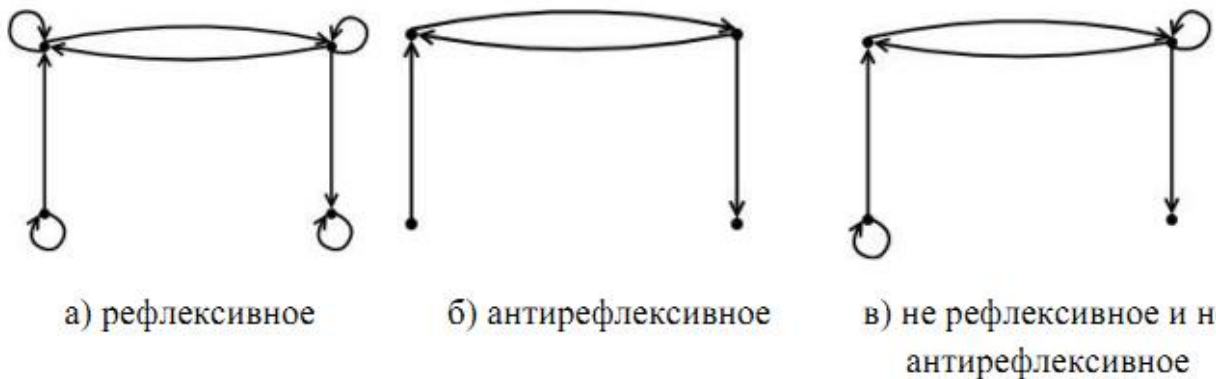
Пусть на универсуме $X \times X$ определено нечёткое отношение Q с функцией принадлежности $\mu_Q(x_i, x_j)$.

Определение. Рефлексивность. Бинарное нечёткое отношение Q называется рефлексивным, если $\forall (x_i, x_i) \in X \times X$ выполняется равенство $\mu_Q(x_i, x_i) = 1$.

Пример. Нечёткое отношение Q « x_i приблизительно равен x_j », заданное на множестве $X \times X$, где X – любое числовое множество, является рефлексивным.

Определение. Антирефлексивность. Бинарное нечёткое отношение Q называется антирефлексивным, если $\forall (x_i, x_i) \in X \times X$ выполняется равенство $\mu_Q(x_i, x_i) = 0$.

Пример. Нечёткое отношение Q « x_i намного больше x_j », заданное на множестве $X \times X$, где X – любое числовое множество, является антирефлексивным.



Определение. Симметричность. Бинарное нечёткое отношение Q называется симметричным, если $\forall (x_i, x_j) \in X \times X$ выполняется равенство $\mu_Q(x_i, x_j) = \mu_Q(x_j, x_i)$.

Нечёткое бинарное отношение « x_i приблизительно равен x_j », является симметричным.

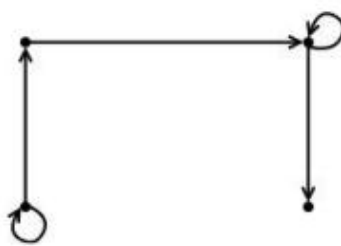
Определение. Антисимметричность. Бинарное нечёткое отношение Q называется антисимметричным, если $\forall (x_i, x_j) \in X \times X$, причём $x_i \neq x_j$, выполняется условие

$$\min\{\mu_Q(x_i, x_j), \mu_Q(x_j, x_i)\} = 0.$$

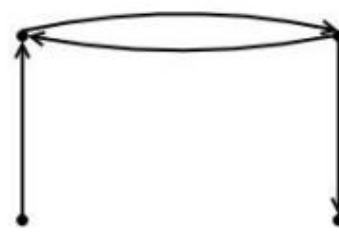
Нечёткое отношение « x_i намного больше x_j » является антисимметричным.



а) симметричное



б) антисимметричное



в) не симметричное и не
антисимметричное

Определение. *Транзитивность.* Бинарное нечёткое отношение Q называется транзитивным, если $\forall x_i, x_j, x_k \in X$, выполняется условие $\mu_Q(x_i, x_k) \geq \max_{x_i \in X} \{ \min \{ \mu_Q(x_i, x_j), \mu_Q(x_j, x_k) \} \}$.
Нечёткое отношение «намного больше» является транзитивным.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями *Задания, решаемые в аудитории*

1. Самостоятельно задайте на множестве студентов вашей группы и других групп (где это надо) отношения. Представьте отношения матрицами размером 8×8 .

- а) нечёткое отношение Q « x_i хорошо дружит с x_j », заданное на множестве $X \times X$, где X – множество студентов вашей группы;
 - б) нечёткое отношение Q « x_i учится в одной группе с x_j », заданное на множестве $X \times X$, где X – множество студентов факультета;
 - в) нечёткое отношение Q « x_i симпатизирует x_j », заданное на множестве $X \times X$, где X – множество студентов вашей группы;
 - г) нечёткое отношение Q « x_i сидит на занятиях недалеко от x_j », заданное на множестве $X \times X$, где X – множество студентов вашей группы;
 - д) нечёткое отношение Q « x_i бежит намного быстрее, чем x_j », заданное на множестве $X \times X$, где X – множество студентов вашей группы;
- Определите, какими свойствами обладают данные бинарные отношения.

2. Задайте в виде матрицы нечёткие отношения на указанных множествах:

- а) нечёткое отношение Q « x_i и x_j расположены недалеко от 5», заданное на множестве $X \times X$, где $X = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$.
- б) нечёткое отношение Q «небольшое расстояние между x_i и x_j », заданное на множестве $X \times X$, где $X = \{-10, -8, \dots, 0, 2, \dots, 10\}$.
- в) нечёткое отношение Q « x_i немного меньше x_j », заданное на множестве $X \times X$, где $X = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$.

Определите свойства данных отношений по матричному представлению.

3. Приведите по 2 примера нечётких отношений из окружающей жизни, областей техники, информатики и т.п., заданных на множестве X , обладающих свойствами:

- а) рефлексивности, симметричности, транзитивности;
- б) антирефлексивности, симметричности;
- в) рефлексивности, симметричности.

При защите работы Вы должны уметь объяснить почему они обладают данными свойствами.

Контрольные вопросы

1. Какими особенностями обладает граф, матрица рефлексивного отношения? антирефлексивного отношения?
2. Какими особенностями обладает граф, матрица симметричного отношения? антисимметричного отношения?
3. Какими особенностями обладает граф, матрица транзитивного отношения?

Лабораторная работа № 7
Тема занятия «Операции нечёткой логики»

Теоретическая часть

Определение. *Нечётким высказыванием* A называется любое утверждение, о котором имеет смысл судить, истинно оно или ложно в той или иной степени.

Каждому нечёткому высказыванию A поставим в соответствие функцию истинности $\lambda(A)$, принимающую любые значения на отрезке $[0; 1]$. Значение функции истинности нечёткого высказывания A будем также называть степенью истинности нечёткого высказывания. 0 и 1 – предельные значения функции истинности, совпадающие со значениями ложь и истина для чётких высказываний.

Нечёткое высказывание, принимающее значение истинности 0,5, называется *индифферентностью*, поскольку оно истинно в той же мере, что и ложно.

Определение. *Отрицанием* нечёткого высказывания A называется нечёткое высказывание $\bar{A}$, степень истинности которого определяется выражением $\lambda(\bar{A}) = 1 - \lambda(A)$.

Определение. *Конъюнкцией* нечётких высказываний A и B называется нечёткое высказывание $A \wedge B$, степень истинности которого совпадает со степенью истинности наименее истинного высказывания:

$$\lambda(A \wedge B) = \min \{ \lambda(A); \lambda(B) \}.$$

Определение. *Дизъюнкцией* нечётких высказываний A и B называется нечёткое высказывание $A \vee B$, степень истинности которого совпадает со степенью истинности наиболее истинного высказывания:

$$\lambda(A \vee B) = \max \{ \lambda(A); \lambda(B) \}.$$

Определение. *Импликацией* нечётких высказываний A и B называется нечёткое высказывание $A \rightarrow B$, степень истинности которого определяется выражением: $\lambda(A \rightarrow B) = \max \{ 1 - \lambda(A); \lambda(B) \}$.

Степень истинности импликации не меньше, чем степень ложности её посылки или степень истинности её следствия.

Определение. *Эквиваленцией* нечётких высказываний А и В называется нечёткое высказывание $A \leftrightarrow B$, степень истинности которого определяется выражением:

$$\lambda(A \leftrightarrow B) = \min \{ \max \{ 1 - \lambda(A); \lambda(B) \}; \max \{ 1 - \lambda(B); \lambda(A) \} \}.$$

Порядок выполнения операций над нечёткими высказываниями следующий: скобки, отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, затем импликация и эквиваленция в порядке следования.

Определение. *Нечёткой высказывательной переменной* называется любая переменная x , вместо которой имеет смысл подставить нечёткое высказывание.

Определение. Степень равносильности формул определяется выражением

$$d(F_1(x_1, x_2, \dots, x_n); F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \bigwedge (F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

где операция $\bigwedge$ берётся по всем определённым наборам степеней истинности высказывательных переменных.

Определение. Если при всех определённых наборах значений переменных $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает значение истинности больше или равное 0,5, то формула называется *нечётко истинной* на данных наборах значений переменных и обозначается Иили 1. Если при всех определённых наборах значений переменных формула $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает значение истинности меньше или равное 0,5, то формула называется *нечётко ложной* на данных наборах значений переменных и обозначается Лили 0.

Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями
Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите степень истинности следующих высказываний:
 - а) $((A \wedge C) \rightarrow B) \rightarrow \bar{C}$, где $\lambda(A)=0,9$, $\lambda(B)=0,3$, $\lambda(C)=0,6$;
 - б) $\overline{A \wedge C} \rightarrow B \leftrightarrow \bar{C}$, где $\lambda(A)=0,2$, $\lambda(B)=0,6$, $\lambda(C)=0,8$;
 - в) $((A \rightarrow C) \rightarrow B) \rightarrow A$, где $\lambda(A)=0,7$, $\lambda(B)=0,6$, $\lambda(C)=0,5$.
2. Докажите, что все определения логических операций над нечёткими высказываниями в задании 1 не противоречат логическим операциям над чёткими высказываниями.
3. Найдите степень равносильности следующих нечётких формул:
 - а) $F(x, y) = x \wedge y$ и $G(x, y) = \overline{x \rightarrow y}$, где $x \in \{0,1; 0,5\}$, $y \in \{0,4; 0,7; 0,8\}$;
 - б) $F(x, y) = x \leftrightarrow y$ и $G(x, y) = \overline{x \rightarrow y}$, где $x \in \{0,7; 0,9\}$, $y \in \{0,5; 0,8\}$;
 - в) $F(x, y) = \bar{x} \wedge y$ и $G(x, y) = x \vee y$, где $x \in \{0,1; 0,3; 0,9\}$, $y \in \{0,2; 0,8\}$.Какие из данных формул являются нечётко близкими на заданных наборах значений переменных?
4. Выясните, какие из следующих формул являются нечётко истинными, а какие нечётко ложными на заданных наборах значений переменных:
 - а) $F(x, y) = (x \rightarrow y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$, где $x \in \{0,1, 0,2\}$, $y \in \{0,4, 0,7\}$;
 - б) $F(x, y) = x \wedge (\overline{x \rightarrow y})$, где $x \in \{0,7, 0,9\}$, $y \in \{0,5\}$;
 - в) $G(x, y) = (\bar{x} \wedge y) \rightarrow (x \vee y)$, где $x \in \{0,1\}$, $y \in \{0,2, 0,8\}$.
5. Докажите нечёткую ложность формул:
 - а) $F(x, y) = (x \rightarrow y) \wedge (\overline{x \rightarrow y})$
 - б) $F(x, y) = (x \sim y) \wedge (\overline{x \sim y})$
6. Докажите нечёткую истинность формул
 - а) $F(x, y) = (x \rightarrow y) \vee (\overline{x \rightarrow y})$
 - б) $F(x, y) = (x \sim y) \vee (\overline{x \sim y})$

Контрольные вопросы

1. В чем принципиальное отличие нечёткого от обычного высказывания?
2. Как соотносятся между собой нечёткие и обычные высказывания?
3. Приведите пример утверждения, которое не является высказыванием.

4. В чём принципиальное отличие определения нечёткой логической формулы от обычной логической формулы?
5. Почему при изучении нечётких логических формул не вводятся в рассмотрение таблицы истинности формул?
5. Какие логические законы, имеющие место для обычных логических формул, не выполняются на множестве нечётких логических формул?
6. Какие значения будет принимать степень равносильности обычных формул?

Лабораторная работа № 8
Тема занятия «Моделирование систем нечёткого вывода»
Теоретическая часть

Механизм нечёткого вывода включает следующие этапы:

- 1) формирование базы нечётких правил, связывающих входные и выходные переменные;
- 2) фаззификация входных переменных;
- 3) агрегирование условий в нечётких правилах;
- 4) активация подзаключений в нечётких правилах;
- 5) аккумулялирование заключений нечётких правил;
- 6) дефаззификация.

1. *Правила систем нечёткого вывода* предназначены для формального представления эмпирических знаний или знаний экспертов в той или иной проблемной области. Правила формулируются в виде импликации, то есть с использованием связки «Если..., то...». Условия и заключения правил формулируются в терминах нечётких лингвистических высказываний.

База правил представляет собой конечное множество правил, согласованных относительно используемых в них лингвистических переменных. Наиболее часто база правил представляется в виде структурированного текста

ПРАВИЛО 1: ЕСЛИ «Условие 1», ТО «Заключение 1» (F_1)

ПРАВИЛО 2: ЕСЛИ «Условие 2», ТО «Заключение 2» (F_2)

...

ПРАВИЛО n : ЕСЛИ «Условие n », ТО «Заключение n » (F_n)

Здесь через F_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) обозначены коэффициенты определённости или весовые коэффициенты соответствующих правил.

Эти коэффициенты могут принимать значения из интервала $[0; 1]$.

Весовые коэффициенты показывают степень важности каждого правила относительно других правил: чем ближе значение коэффициента к 1, тем значимее это правило. В случае если весовые коэффициенты отсутствуют, считается, что их значения равны 1.

Условия, входящие в правила, могут быть простыми и составными. Простое условие имеет вид « β есть α », где β – нечёткая лингвистическая переменная, а α – одно из возможных значений лингвистической переменной. Составное условие представляет собой конъюнкцию или дизъюнкцию простых условий, например:

« β_1 есть α_1 » И « β_2 есть α_2 » или « β_1 есть α_1 » ИЛИ « β_2 есть α_2 ».

Заключения нечётких правил также могут быть простыми, то есть иметь вид « ω есть γ », где ω – нечёткая лингвистическая переменная, а γ – одно из возможных значений лингвистической переменной, или составными, то есть иметь вид:

« ω_1 есть γ_1 » И « ω_2 есть γ_2 » или « ω_1 есть γ_1 » ИЛИ « ω_2 есть γ_2 ».

В системах нечёткого вывода лингвистические переменные, которые используются в нечётких высказываниях условий правил, называют *входными лингвистическими переменными*, а переменные, которые используются в нечётких высказываниях заключений правил, называют *выходными лингвистическими переменными*.

Таким образом, при моделировании системы нечёткого вывода задаётся база правил, для которой необходимо определить:

- 1) множество правил $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$;
- 2) множество входных лингвистических переменных $V = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$;
- 3) для каждой лингвистической переменной β_i : универсум X_i , терм-множество $T_{\beta_i} = \{\alpha_i^1, \alpha_i^2, \dots, \alpha_i^t\}$, процедуры G и M , графики функций принадлежности для всех термов;
- 4) множество выходных лингвистических переменных $W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$;
- 5) для каждой выходной лингвистической переменной ω_j универсум Y_j , терм-множество $T_{\omega_j} = \{\gamma_j^1, \gamma_j^2, \dots, \gamma_j^r\}$, процедуры G и M , графики функции принадлежности для всех термов.

В качестве функций принадлежности термов чаще всего используются кусочно-линейные функции принадлежности.

2. Целью этапа *фаззификации* (введение нечёткости) является установление соответствия между конкретным (обычно численным) значением x_i из универсума X_i каждой входной лингвистической переменной β_i системы нечёткого вывода и значением функций принадлежности термов входной лингвистической переменной.

После завершения этого этапа для всех входных переменных должны быть определены конкретные значения функций принадлежности по каждому из лингвистических термов, которые используются в условиях (подусловиях) базы правил системы нечёткого вывода.

3. *Агрегирование условий* представляет собой процедуру определения степени истинности условий по каждому из правил системы нечёткого вывода. Если условие правила является простым, то степень истинности такого условия уже найдена на предыдущем этапе. Если условие составное, то согласно определению операций

«конъюнкция» и «дизъюнкция» находится степень истинности составного условия.

4. *Активация* в системах нечёткого вывода представляет собой процесс нахождения степени истинности каждого из подзаключений правил нечёткого вывода и определения функции принадлежности всех подзаключений для каждого правила в базе нечётких правил.

Если заключение нечёткого правила является простым, то степень истинности заключения λ равна произведению степени истинности μ условия данного правила на весовой коэффициент F правила: $\lambda = \mu \cdot F$.

Если заключение составное, то есть представляет собой конъюнкцию или дизъюнкцию двух или более подзаключений, то степень истинности каждого из подзаключений находится как произведение степени истинности условия данного правила на весовой коэффициент этого правила. В результате имеем множество C значений истинности каждого подзаключения базы правил $C = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$, где p – общее количество подзаключений в базе правил.

5. *Аккумуляция* (или аккумуляция) заключений в системах нечёткого вывода представляет собой процедуру нахождения функции принадлежности для каждой из выходных лингвистических переменных. Цель аккумуляции заключается в объединении (аккумуляции) всех степеней истинности заключений (подзаключений) для получения функции принадлежности каждой из выходных переменных ω_j . Результат аккумуляции для выходной лингвистической переменной ω_j находится в

виде графика функции принадлежности множества $C = \bigcup_k C_j^k$.

6. *Дефаззификация* в системах нечёткого вывода представляет собой процедуру нахождения обычного (не нечёткого) значения для каждой из выходных лингвистических переменных $W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$.

Цель дефаззификации заключается в том, чтобы, используя результаты аккумуляции всех выходных переменных, получить обычное количественное значение каждой из выходных переменных, которое может быть использовано специальными устройствами, внешними по отношению к системе нечёткого вывода. Дефаззификацию называют приведением к чёткости.

Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями
Задания, решаемые в аудитории

Составить систему нечеткого логического вывода для представленных в задачах ситуациях и найти нечеткое решение.

Задание 1. *Отбор игрока в баскетбольную команду.* Требуется оценить шансы игрока быть отобранным в баскетбольную команду на основе оценки техники игры и роста игрока. Техника игры оценивается в баллах от 0 до 100 в соответствии с табл. 1. Рост игрока измеряется в сантиметрах и оценивается по табл. 2. Уверенность игрока быть зачисленным в команду определяется из табл. 3. Для некоторого игрока известно: техника игры оценивается в 47 баллов, а его рост равен 206 см. Зависимость уверенности игрока быть зачисленным в команду от его роста и техники игры представлена в табл. 4.

Таблица 1 - Характеристика оценки техники игры

<i>Техника игры</i>	<i>Нижнее значение</i>	<i>Верхнее значение</i>
Отличная	85	100
Очень хорошая	60	90
Хорошая	45	70
Не очень плохая	25	50
Плохая	10	35

Таблица 2 - Характеристика оценки роста игроков

<i>Рост</i>	<i>Нижнее значение</i>	<i>Верхнее значение</i>
Очень высокий	220	230
Высокий	205	223
Не очень высокий	190	210
Низкий	180	195

Таблица 3 - Характеристика уверенности отбора в команду