

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания по выполнению лабораторных работ
по дисциплине **Методы прикладной математики в нефтегазовом деле**

Направление подготовки
Направленность (профиль)
Форма обучения
Год начала обучения
Реализуется в 5 семестре

21.03.01 Нефтегазовое дело
Бурение нефтяных и газовых скважин
очная, очно-заочная
2026

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа 1 «Определение оптимальной трассы трубопровода» ...	3
Лабораторная работа 2 «Определение оптимальной конструкции ангара»	6
Лабораторная работа 3 «Расчёт оптимальной конструкции резервуара»	8
Лабораторная работа 4 «Решение нелинейного алгебраического (трансцендентного) уравнения методом минимизации невязки»	13
Лабораторная работа 5 «Решение систем линейных и нелинейных уравнений методом Гаусса»	21
Лабораторная работа 6 «Решение систем линейных и нелинейных уравнений методом минимизации невязки»	24
Лабораторная работа 7 «Создание пользовательских функций в Visual Basic for Applications»	28
Лабораторная работа 8 «Явные и неявные методы решения дифференциальных уравнений»	41
Лабораторная работа 9 «Применение метода наименьших квадратов при решении обратных задач»	44

Лабораторная работа 1 «Определение оптимальной трассы трубопровода»

Заданы координаты начальной и конечной точек трубопровода. Между точками имеется n участков шириной w_i , $i=1, \dots, n$ с разными стоимостями прокладки по ним одного метра трубопровода $\lambda_{i,i}$, $i=1, \dots, n$. Требуется определить такую трассу трубопровода, при которой стоимость строительства будет минимальной.

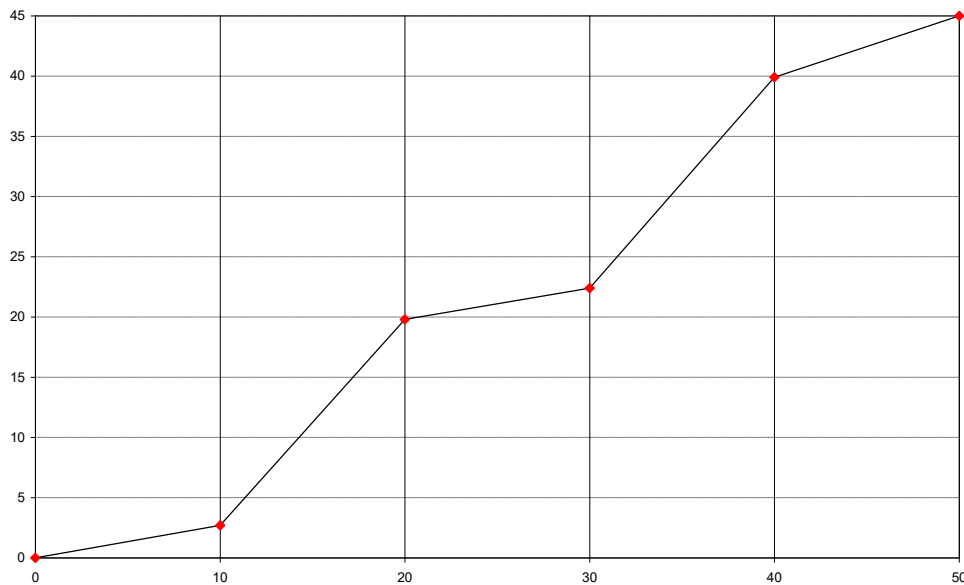


Рисунок –1

Вариант задачи представлен на рисунке 1. Точка А имеет координаты (0,0), точка В имеет координаты (50, 45). По каждой из полос (I) – (V) заданы стоимости прокладки трубопровода. Требуется определить трассу трубопровода, соединяющую точки А и В, имеющую минимальную стоимость. Для решения задачи использовать MS Excel и надстройку «Поиск решения».

Пример начальной трассы приведён на рисунке 2.

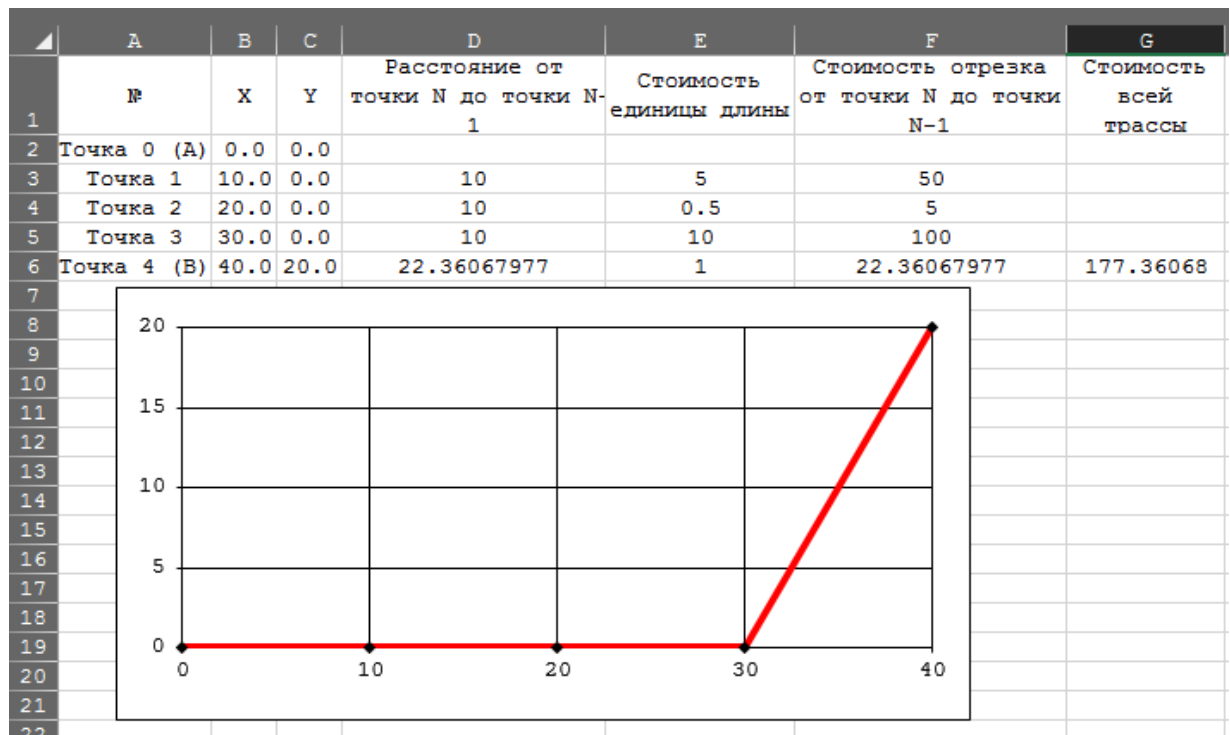


Рисунок 2

Результат расчёта задачи приведён на рисунке 3

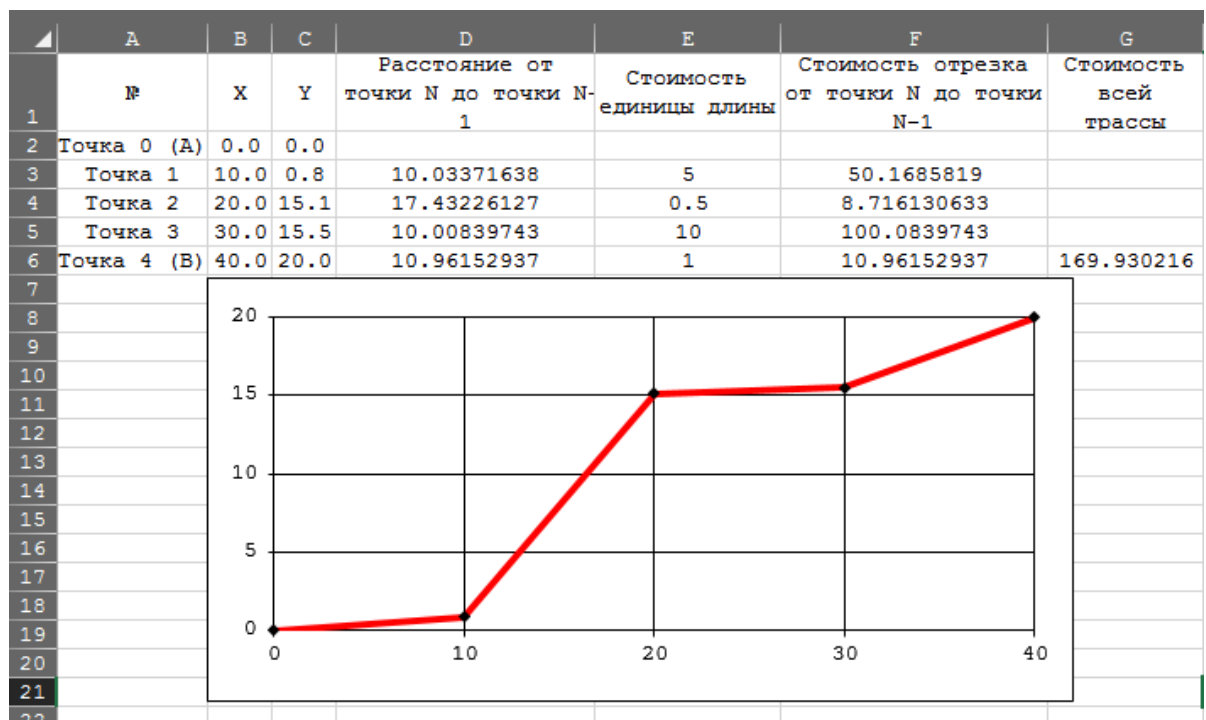


Рисунок 3

Формулы, используемые в ячейках, указаны на рисунке 4.

	A	B	C	D	E	F	G
	№	X	Y	Расстояние от точки N до точки N-1	Стоимость единицы длины	Стоимость отрезка от точки N до	Стоимость всей трассы
1	Точка 0 (A)	0	0				
2	Точка 1	10	0	$=((B2-B3)^2+(C2-C3)^2)^{0.5}$	5	$=E3*D3$	
3	Точка 2	20	0	$=((B3-B4)^2+(C3-C4)^2)^{0.5}$	0.5	$=E4*D4$	
4	Точка 3	30	0	$=((B4-B5)^2+(C4-C5)^2)^{0.5}$	10	$=E5*D5$	
5	Точка 4 (B)	40	20	$=((B5-B6)^2+(C5-C6)^2)^{0.5}$	1	$=E6*D6$	$=F3+F4+F5+F6$

Рисунок 4

Варианты заданий указаны на рисунке 5.

	A=(0,0) B=(60,20) n=6		A=(0,0) B=(50,20) n=5		A=(0,0) B=(30,20) n=3	
lambda1	1	4	1	8	3.5	2
lambda2	1.5	2	2	1	4	0.5
lambda3	2	3	3	5	3	4
lambda4	1	0.5	0.5	2		
lambda5	3	1	4	3		
lambda6	8	5				
w1=w2=...=wn	10	10	10	10	10	10
	вариант1	вариант2	вариант3	вариант4	вариант5	вариант6
	A=(0,0) B=(40,20) n=4		A=(0,0) B=(40,20) n=4			
lambda1	1	4	1	8		
lambda2	1.5	2	2	1		
lambda3	2	3	3	5		
lambda4	1	0.5	0.5	2		
w1=w2=	8	8	15	15		
w3=w4=	12	12	5	5		
	вариант7	вариант8	вариант9	вариант10		
<i>lambda i = удельная стоимость на единицу длины</i>						
<i>w i = ширина i-ого участка</i>						

Рисунок 4

В приведенных вариантах:

A – координата начальной точки, B – координата конечной точки, n – количество участков, $w_i, i=1,...,n$ – ширина участков, $lambda_i$ – стоимость прокладки 1 м трубопровода на i-ом участке.

Решение состоит из следующих шагов.

1. Сформировать таблицу из данных: № точки; x, y координаты точки; расстояние между соседними точками; стоимость единицы длины на участке; стоимость отрезка трубопровода на участке. Начальная трасса может иметь вид, показанный на рисунке 1.
2. Рассчитать стоимость всего трубопровода.
3. Построить диаграмму трассы.
4. Найти оптимальную трассу, используя надстройку «Поиск решения», при этом целевая функция – стоимость всей трассы, изменяемые параметры – y координаты внутренних точек трубопровода.

Лабораторная работа 2 «Определение оптимальной конструкции ангара»

Практическое задание №1 основано на материале лекции №1. Требуется спроектировать прямоугольную конструкцию в форме параллелепипеда с открытой передней стенкой (см. рисунок 1). Конструкция должна иметь объем $A \text{ м}^3$, но периметр ее основания не должен превышать $B \text{ м}$. Глубина не должна быть больше $C \text{ м}$, а ширина — 70 м . Кроме того, ширина не должна превышать утроенной глубины, а высота — $2/3$ ширины. Стоимость гофрированного материала, из которого изготавливаются крыша и три стенки конструкции, составляет 30 руб. за 1 м^2 . Требуется определить размеры конструкции таким образом, чтобы минимизировать стоимость материалов.

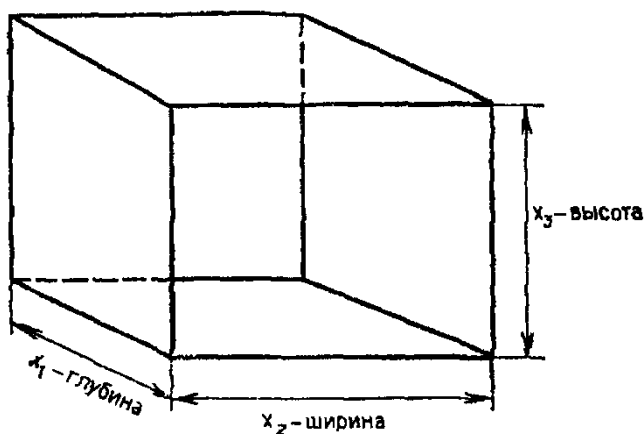


Рисунок 1

Математическая постановка задачи. Введем (рис. 1) переменные: x_1 — глубина (в м), x_2 — ширина (в м), x_3 — высота (в м). Стоимость материала будет включать:

стоимость крыши	$30 x_1 x_2 \text{ руб.}$
стоимость задней стенки	$30 x_2 x_3 \text{ руб.}$
стоимость боковых стенок	$2(30 x_1 x_3) \text{ руб.}$

Таким образом, целевая функция имеет вид

$$f(x) = 30 x_1 x_2 + 30 x_2 x_3 + 60 x_1 x_3$$

Условие на объём конструкции задает ограничение в виде равенства

$$x_1 x_2 x_3 = A \text{ м}^3.$$

Условия на линейные размеры задают ограничения в виде неравенств

$$2(x_1 + x_2) < B \text{ м},$$

$$x_2 \leq 3x_1$$

$$x_3 \leq \frac{2}{3} x_2$$

Границами изменения переменных являются следующие:

$$0 \leq x_1 \leq C \text{ м}$$

$$0 \leq x_2 \leq 70 \text{ м}$$

После некоторых преобразований задача будет иметь вид:

минимизировать $f(x) = 30 x_1 x_2 + 30 x_2 x_3 + 60 x_1 x_3,$

при ограничениях $g_1(x) = x_1 x_2 x_3 - A = 0,$

$$g_2(x) = 0.5B - x_1 - x_2 \geq 0,$$

$$g_3(x) = 3 x_1 - x_2 \geq 0,$$

$$g_4(x) = \frac{2}{3} x_2 - x_3 \geq 0,$$

$$0 \leq x_1 \leq C,$$

$$0 \leq x_2 \leq 70,$$

$$0 \leq x_3 .$$

Для решения задачи использовать пакет «Поиск решения». Сведения по использованию пакета «Поиск решения» приведены в лекции 2.

Лабораторная работа 3 «Расчёт оптимальной конструкции резервуара»

Постановка задачи

Рассмотрим следующую модельную задачу. Имеется резервуар для хранения нефтепродуктов, представленный на рисунке 1.

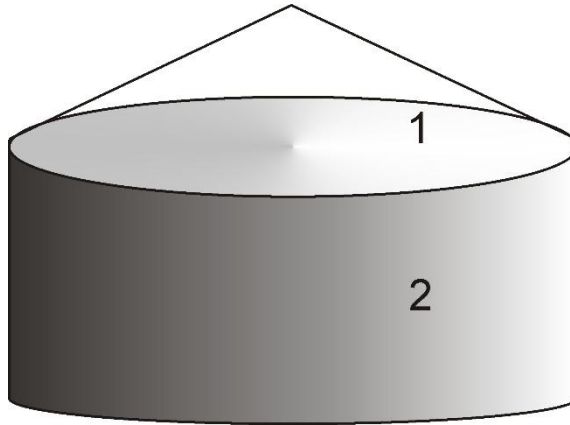


Рисунок 1. Вид резервуара

Как геометрическая фигура резервуар состоит из конуса (1) и цилиндра (2). Пусть высота цилиндра равна h , радиус цилиндра равен r , высота конуса равна h_1 . Пусть стоимость 1 м² стенки цилиндра равна c_s , стоимость 1 м² крыши конуса равна c_k . Пусть требуется, чтобы объём цилиндрической части резервуара был больше или равен A м³, а объём конусообразной части резервуара был больше или равен B м³. Пусть заданы ограничения на угол наклона боковой поверхности цилиндра φ , а именно:

$$0.1 \leq \operatorname{tg} \varphi \leq 0.4.$$

Также пусть площадь участка земли, занимаемого резервуаром не должна превышать S м².

Требуется определить размеры резервуара таким образом, чтобы стоимость резервуара была минимальна.

Дополнительные вопросы повышенной сложности:

1. Проанализировать выполнение ограничений 1 и 2 для оптимального решения.
2. Решить задачу для случая, когда выделяемый под резервуар участок имеет форму прямоугольника.
3. Определить критический размер выделяемого под резервуар участка (т.е. тот размер участка, уменьшение которого начинает влиять на оптимальное решение).
4. Определить влияние уменьшения размера выделяемого под резервуар участка на оптимальную стоимость резервуара

Математическая формулировка

Запишем математическую формулировку рассматриваемой задачи. Очевидно, что параметрами, которые необходимо определить являются величины h , r и h_1 .

Условие, чтобы объём цилиндрической части резервуара был больше или равен $A \text{ м}^3$, может быть записано в виде:

$$\pi r^2 h \geq A. \quad (1)$$

Условие, чтобы объём конусообразной части резервуара был больше или равен $B \text{ м}^3$, может быть записано в виде:

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h_1 \geq B. \quad (2)$$

Ограничение на угол наклона боковой поверхности цилиндра φ вида $0.1 \leq \operatorname{tg} \varphi \leq 0.5$ может быть выражено через параметры r и h_1 следующим образом:

$$0.1 r \leq h_1 \leq 0.4 r. \quad (3)$$

Ограничение на площадь участка земли, занимаемого резервуаром, может быть записано в виде:

$$\pi r^2 \leq C. \quad (4)$$

Найдём выражение для стоимости резервуара. Размер площади боковой поверхности цилиндра определяется по формуле:

$$S_{\text{бок.цил}} = 2\pi r h. \quad (5)$$

Размер площади боковой поверхности конуса определяется по формуле:

$$S_{\text{бок.конуса}} = \pi r^2 / \cos \varphi.$$

Очевидно,

$$\cos \varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h_1^2}}.$$

Тогда для площади боковой поверхности конуса получаем формулу, в которой участвуют параметры оптимизации:

$$S_{\text{бок.конуса}} = \pi r \sqrt{r^2 + h_1^2}. \quad (6)$$

С учётом формул (5) – (6) получаем следующее выражение для стоимости резервуара:

$$F = c_s 2\pi r h + c_k \pi r \sqrt{r^2 + h_1^2}. \quad (7)$$

Таким образом, мы получаем математическую формулировку задачи: найти минимальное значение функции (7) при ограничениях (2) – (4) на параметры h , r и h_1 .

Решение задачи с помощью пакета «Поиск решения»

Перенесём условия задачи в электронный вид на лист MS Excel (см. рисунок 2).

	A	B	C	D	E
1	Параметры			Расчет объемов, площадей, цены	
2	h1=	2		V_цилиндра=	18849.55592
3	r=	20		V_конуса=	837.758041
4	h=	15		tg (fi)=	0.1
5	A=	10000		cos(fi)=	0.99503719
6	B=	1000		S_основания=	1256.637061
7	C=	2000		S_бок_пов_конуса=	1262.904617
8	Cs=	20		S_бок_пов_цилиндра=	1884.955592
9	Ck=	30		F (стоимость)=	75586.25035
10					
11	Ограничения				
12	Ограничение (1)	8849.556			
13	Ограничение (2)	-162.242			
14	Ограничение (3_1)	0			
15	Ограничение (3_2)	6			
16	Ограничение (4)	743.3629			

Рисунок 2. Пример листа MS Excel для решения задачи

Для определения оптимальных значений h , r и h_1 используем надстройку «Поиск решения». Для приведенного на рисунке 2. листа соответствующие параметры надстройки «Поиск решения» будут иметь вид, указанный на рисунке 3.

Рисунок 3. Окно надстройки «Поиск решения»

После запуска на выполнение параметры приобретут оптимальные значения, указанные на рисунке 4. Как видно, значение целевой функции уменьшилось с 75586.25035 до 48054.66633.

	A	B	C	D	E
1	Параметры			Расчет объемов, площадей, цены	
2	h1=	5.238204		V_цилиндра=	10000
3	r=	13.50189		V_конуса=	1000
4	h=	17.46068		tg (fi)=	0.387960846
5	A=	10000		cos(fi)=	0.932296638
6	B=	1000		S_основания=	572.7154012
7	C=	2000		S_бок_пов_конуса=	614.3059813
8	Cs=	20		S_бок_пов_цилиндра=	1481.274344
9	Ck=	30		F (стоимость)=	48054.66633
10					
11	Ограничения				
12	Ограничение (1)	-3E-07			
13	Ограничение (2)	-3E-08			
14	Ограничение (3_1)	3.888015			
15	Ограничение (3_2)	0.162551			
16	Ограничение (4)	1427.285			

Рисунок 4. Пример листа MS Excel с результатами решения задачи

Варианты задания определяются по номеру студента в списке группы. Во всех нижеуказанных вариантах $c_k=30$, $C=1800$.

Варианты задания

$c_s=20$		
	$B = 950$	$B = 1050$
$A = 8000$	Вариант 1	Вариант 6
$A = 9000$	Вариант 2	Вариант 7
$A = 10000$	Вариант 3	Вариант 8
$A = 11000$	Вариант 4	Вариант 9
$A = 12000$	Вариант 5	Вариант 10

$c_s=25$		
	$B = 950$	$B = 1050$
$A = 8000$	Вариант 11	Вариант 16
$A = 9000$	Вариант 12	Вариант 17
$A = 10000$	Вариант 13	Вариант 18
$A = 11000$	Вариант 14	Вариант 19
$A = 12000$	Вариант 15	Вариант 20

$c_s=30$		
	$B = 950$	$B = 1050$
$A = 8000$	Вариант 21	Вариант 26
$A = 9000$	Вариант 22	Вариант 27
$A = 10000$	Вариант 23	Вариант 28
$A = 11000$	Вариант 24	Вариант 29
$A = 12000$	Вариант 25	Вариант 30

Лабораторная работа 4 «Решение нелинейного алгебраического (трансцендентного) уравнения методом минимизации невязки»

Решить заданное нелинейное уравнение, используя следующий алгоритм:

1. Построить графики функций, участвующих в уравнении.
2. Графически определить приближённые значения корней уравнения.
3. Найти точные значения, используя «Поиск решения».

Пример решения уравнения:

$$5 \cos x - 0.7x + 0.4 = 0 \text{ (см. файл "Reshenie_nelinejnyh_uravenij.xlsx").}$$

$$5 \cos x - 0.7x + 0.4 = 0 \Rightarrow 5 \cos x = 0.7x - 0.4 \Rightarrow$$

$$Y1(x) = 5 \cos x, Y2(x) = 0.7x - 0.4.$$

1. Построить таблицу значений $Y1$ и $Y2$.

Пусть A – это начальное значение X и пусть h – шаг по оси X .

- а) Построить ряд значений X (около 100 значений).

Начальная точка $X_0 = A$ (ячейка $A6$), следующая точка $X_1 = X_0 + h$ (ячейка $A7$) и т.д. до X_{100} (ячейка $A106$).

- б) Построить ряд значений $Y1$ и $Y2$.

$$Y1_0 = 5 \cos(X_0) \Rightarrow \text{содержимое ячейки } B6 = 5 * \cos(A6)$$

$$Y2_0 = 0.7 * X_0 - 0.4 \Rightarrow \text{содержимое ячейки } C6 = 0.7 * A6 - 0.4$$

- в) Копировать ячейки $B6$ и $C6$ и вставить (paste) их в интервале $B7:C106$.

Таким образом, таблица значений X , $Y1$, $Y2$ готова.

Для построения функций $Y1$ и $Y2$ выберите интервал $A5:C106$, перейдите «Вставка» => Диаграмма => Точечная диаграмма.

Результат показан на рисунке 1.

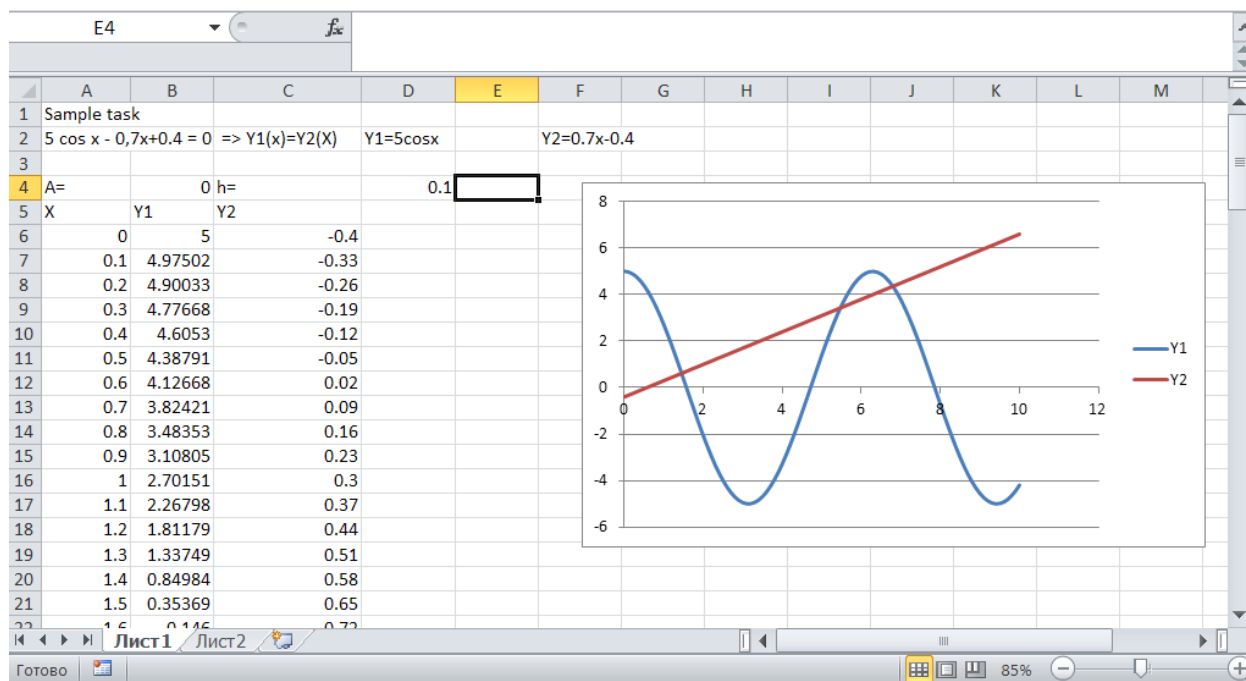


Рисунок 1.

Видно, что уравнение имеет по крайней мере 3 корня. Эти корни соответствуют точкам пересечения кривой $Y1$ и прямой $Y2$.

Также ясно, что имеется ещё несколько корней в отрицательной части оси X .

Для построения графика в отрицательной части оси X , изменим A (начальную точку значений X) и подберём h таким, чтобы получить график, на котором видны все корни. Примерные действия показаны на следующих рисунках.

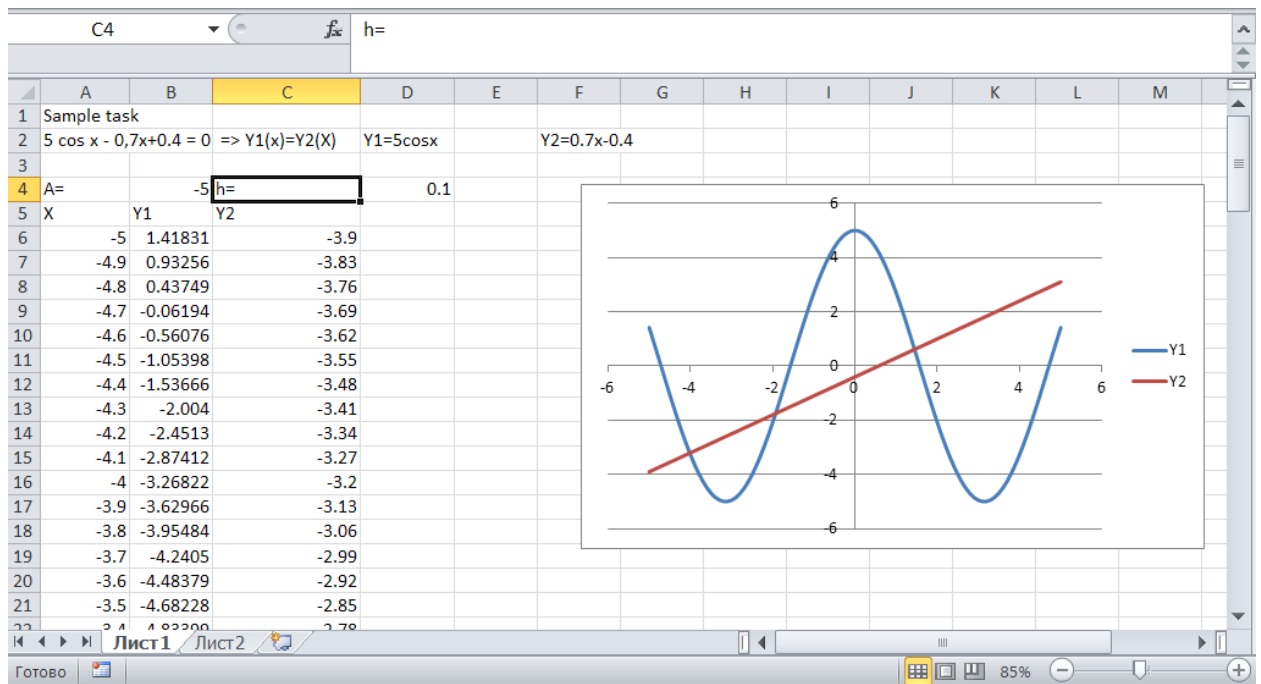


Рисунок 2 ($A \Rightarrow -5$).

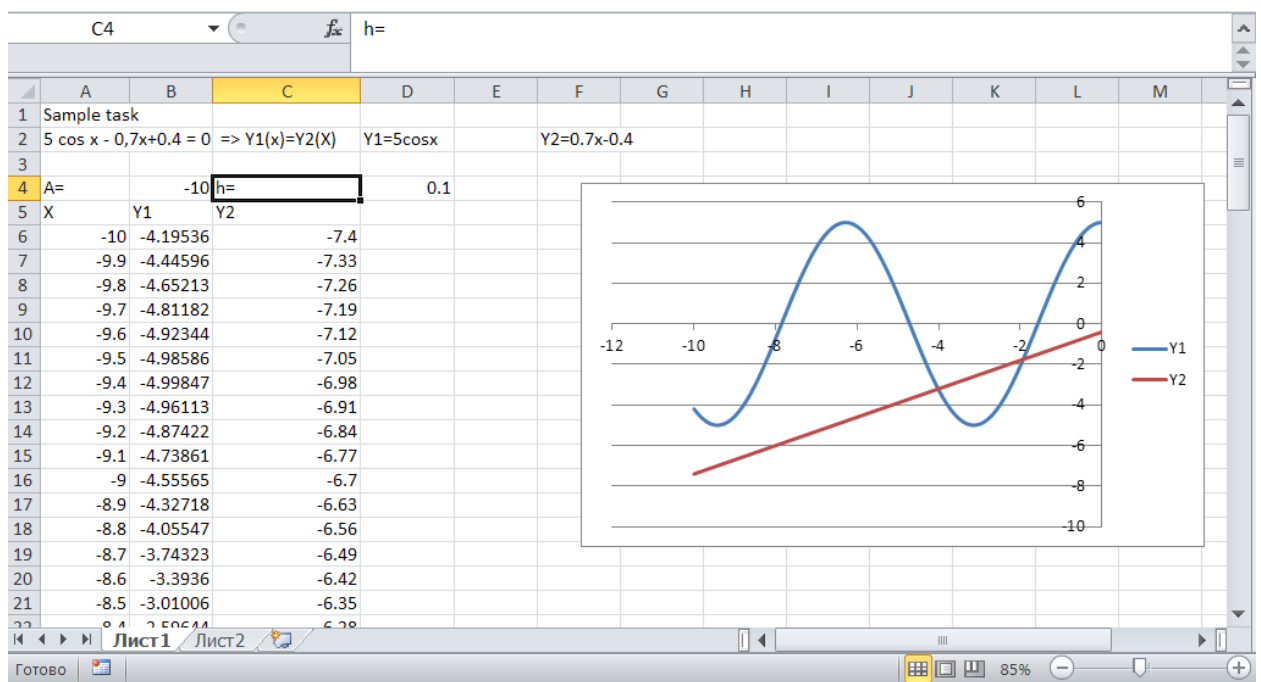


Рисунок 3 ($A \Rightarrow -10$).

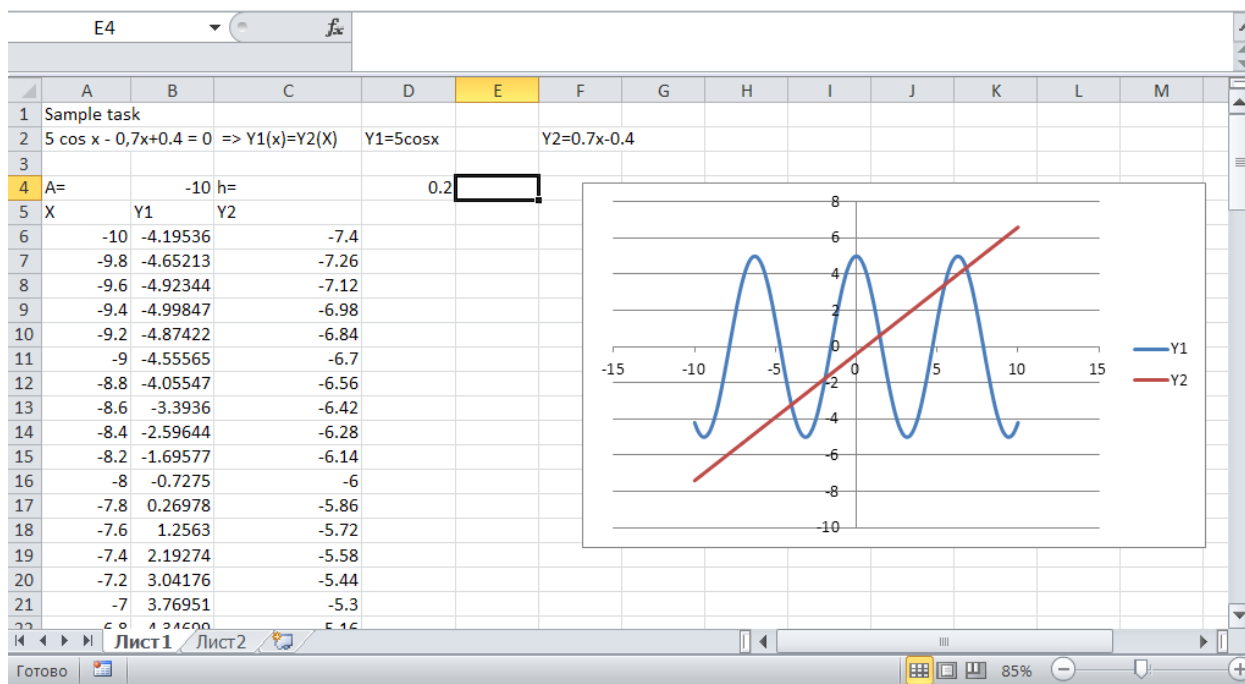


Рисунок 4 ($A=10$, $h \Rightarrow 0.2$).

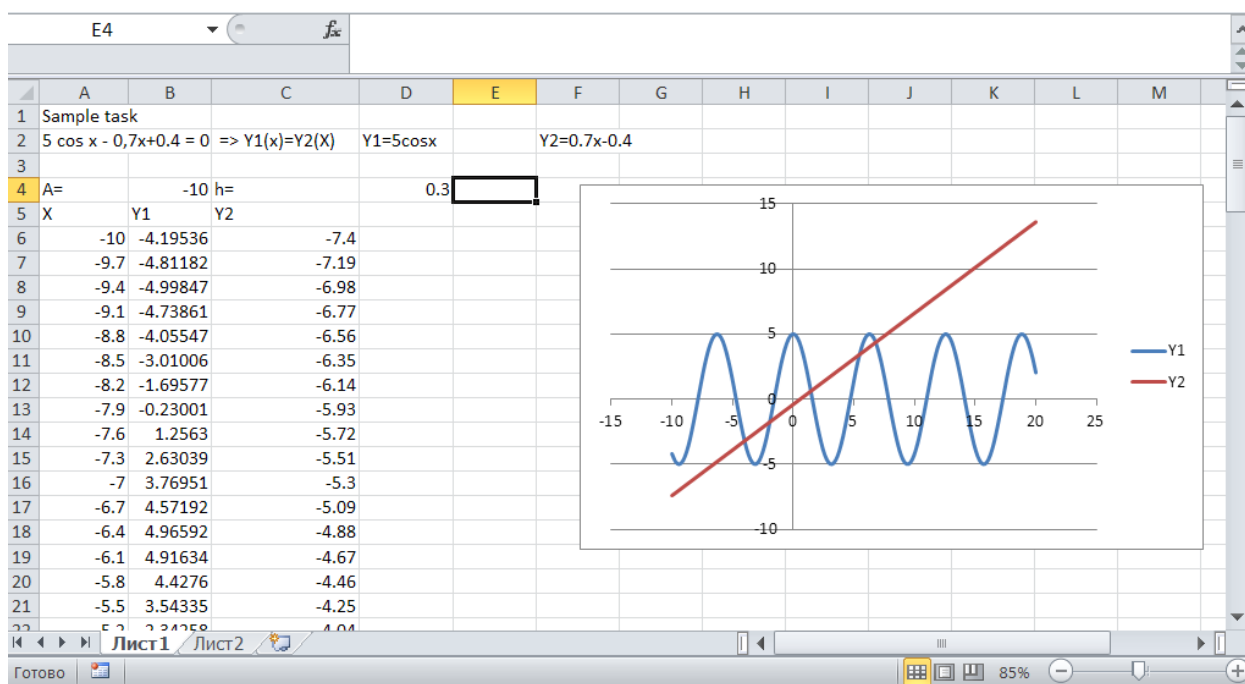


Рисунок 5 ($A=10$, $h \Rightarrow 0.3$).

Теперь видно, что уравнение имеет 5 корней.

2. Графически определить приближённые значения корней

Для определения приближённого значения корня, установите курсор мыши на точку пересечения графиков функций. Высветится текст со значением точки одного из графиков (см. рис. 6).

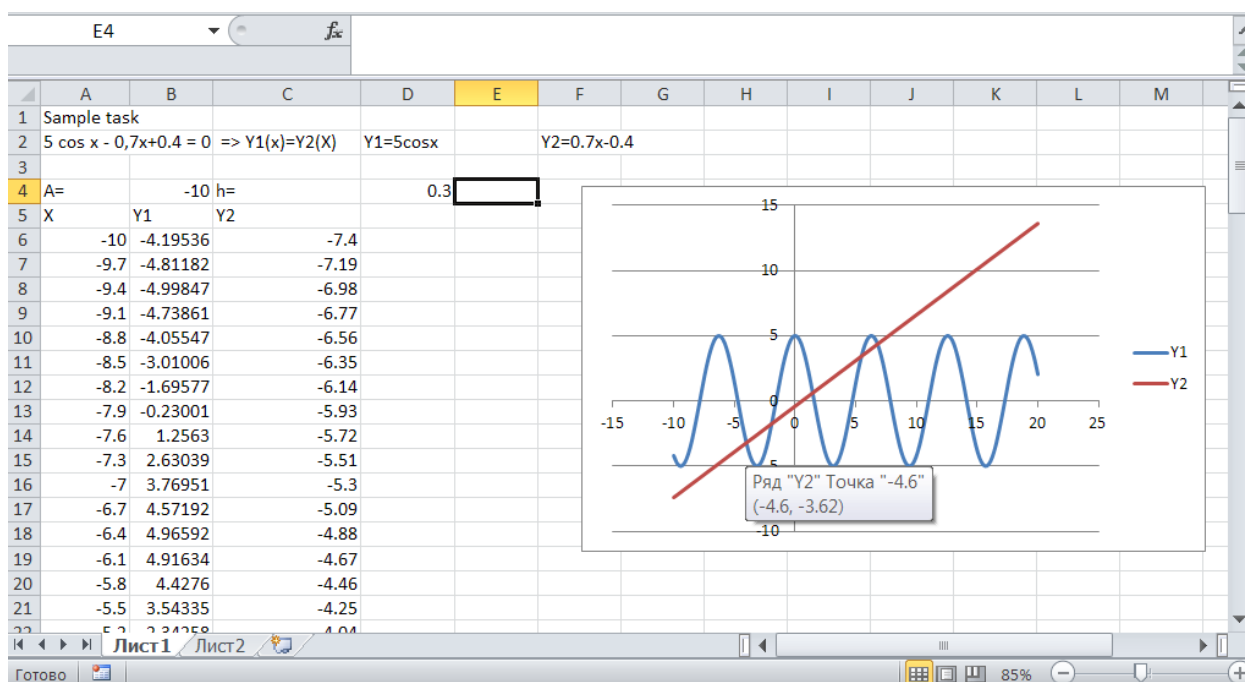


Рисунок 6. Курсор мыши установлен на самой левой точке пересечения графиков (на рисунке курсор не виден!)

Таким образом, приближённое значение самого левого корня равно - 4.6.

Используя эту процедуру, мы можем найти приближённые значения остальных корней: -2.2, 1.1, 5.0, 6.5.

3. Найти точные значения корней, используя «Поиск решения»

Перейти на Лист2. Построить таблицу со следующими столбцами: Приближенное значение корня X_{appr} , значение $Y1$ в точке X_{appr} , значение $Y2$ в точке X_{appr} , значение $(Y1 - Y2)^2$ в точке X_{appr} (см. рисунок 7).

Запишите все приближенные значения корней в столбец X_{appr} .

	B2										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	X appr	Y1	Y2	(Y1-Y2)^2							
2	-4.6										
3	-2.2										
4	1.1										
5	5										
6	6.5										
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											

Рисунок 7.

Напишите формулы для вычисления Y_1 , Y_2 , $(Y_1-Y_2)^2$ для всех значений X_{appr} . Таким образом, мы получаем следующие выражения для приближенного значения корня:

в ячейке B2 значение $=5*\text{COS}(A2)$,

в ячейке C2 значение $=0.4* A2 - 0.4$,

в ячейке D2 значение $=(B2-C2)^2$

Копировать (Сору) интервал ячеек B2:D2, вставить (Paste) его в интервал ячеек B3:D6 (см. рисунок 8).

	E1				
	A	B	C	D	E
1	X appr	Y1	Y2	(Y1-Y2)^2	
2	-4.6	-0.5607626	-3.62	9.358933257	
3	-2.2	-2.9425056	-1.94	1.005017451	
4	1.1	2.26798061	0.37	3.602330385	
5	5	1.41831093	3.1	2.828078137	
6	6.5	4.88293813	4.15	0.5371983	
7					

Рисунок 8

Для нахождения точного значения первого корня запустить «Поиск решения». Задать D2 в качестве «Целевой функции», выбрать опцию поиск

«Минимума», указать A2 в текстовом окне «Изменяя ячейки переменных» и нажать кнопку «Найти решение» (см. рисунок 9).

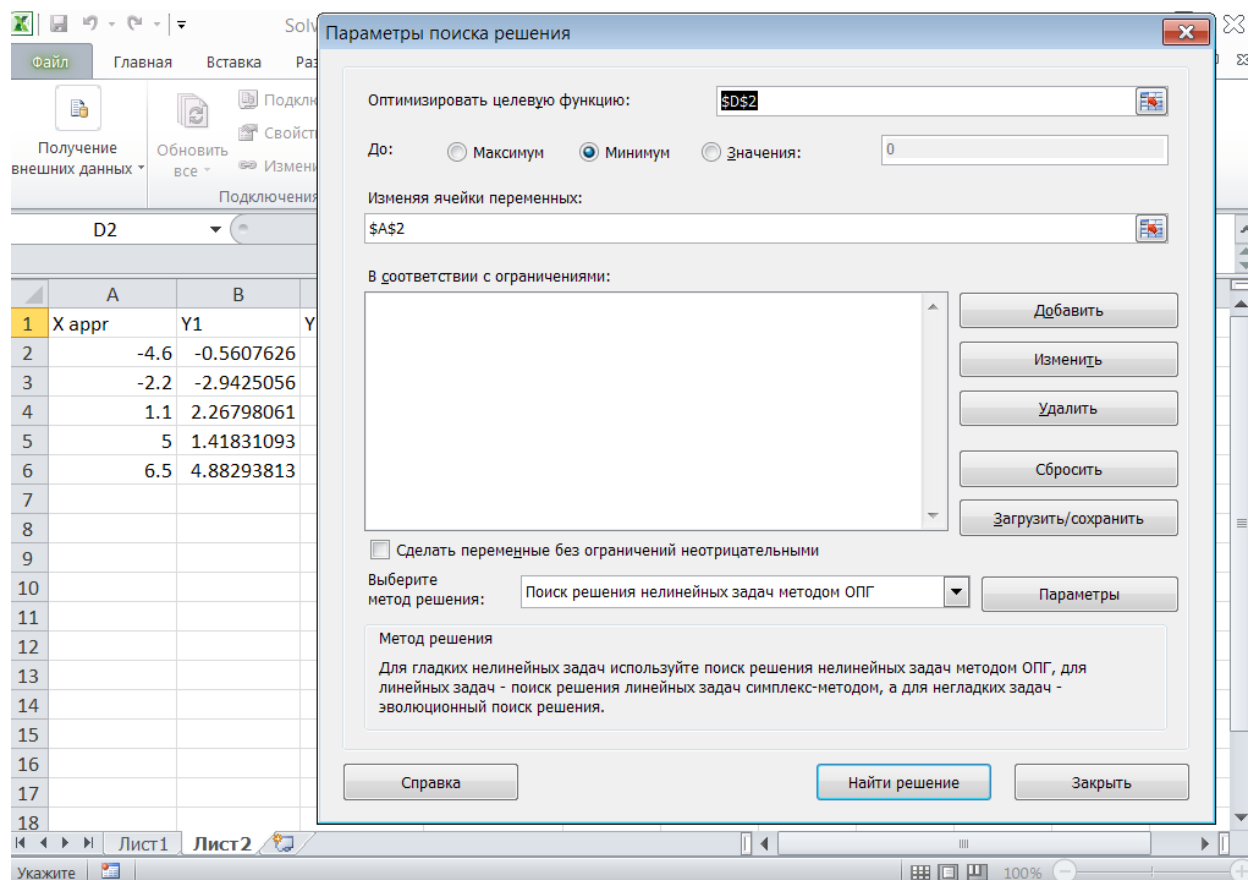


Рисунок 9

После этого будет найдено точное значение первого корня (см. рисунок 10).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	X appr	Y1	Y2	$(Y1 - Y2)^2$							
2	-4.01513069	-3.2105915	-3.2105915	7.88861E-31							
3	-2.2	-2.9425056	-1.94	1.005017451							
4	1.1	2.26798061	0.37	3.602330385							
5	5	1.41831093	3.1	2.828078137							
6	6.5	4.88293813	4.15	0.5371983							

Рисунок 10

Применить такую же процедуру для поиска точных значений остальных корней (см. рисунок 11).

D3		f _ж		=(B3-C3)^2	
	A	B	C	D	E
1	X appr	Y1	Y2	(Y1-Y2)^2	
2	-4.01513069	-3.2105915	-3.2105915	7.88861E-31	
3	-1.92833275	-1.7498376	-1.7498329	2.14392E-11	
4	1.44779509	0.61345658	0.61345656	3.74603E-16	
5	5.46763684	3.42734579	3.42734579	1.97215E-31	
6	6.79588419	4.35711899	4.35711893	3.96459E-15	
7					

Рисунок 11

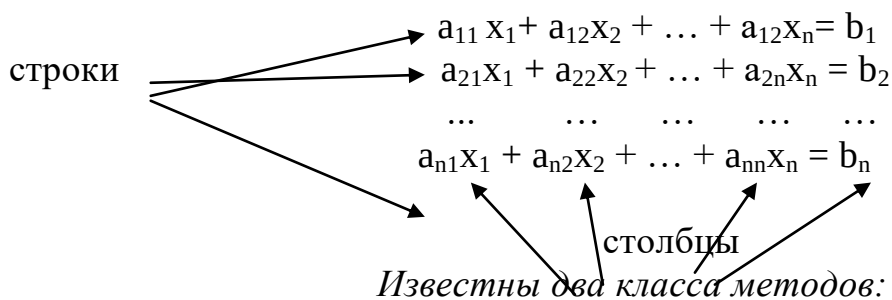
Варианты:

№	Уравнение	Примечание
1	$(0,2x)^3 = \cos x$	—
2	$x - 10\sin x = 0$	—
3	$2^{-x} = \sin x$	для $x < 10$
4	$2^x - 2\cos x = 0$	для $x > -10$
5	$\lg(x + 5) = \cos x$	для $x < 5$
6	$(4x + 7)^{1/2} = 3 \cos x$	—
7	$x \sin x - 1 = 0$	—
8	$8 \cos x - x = 6$	—
9	$\sin x - 0,2x = 0$	—
10	$10\cos x - 0,1x^2 = 0$	—
11	$2 \lg(x + 7) - 5 \sin x = 0$	—
12	$4 \cos x + 0,3x = 0$	—
13	$5 \sin 2x = (1-x)^{1/2}$	—
14	$1,2x^4 + 2x^3 - 24,1 = 13x^2 + 14,2x$	—
15	$2x^2 - 5 = 2^x$	—
16	$2^{-x} = 10 - 0,5x^2$	—
17	$4x^4 - 6,2 = \cos 0,6x$	—
18	$3 \sin 8x = 0,7x - 0,9$	для x из $[-1; 1]$
19	$1,2 - \ln x = 4 \cos 2x$	—
20	$\ln(x + 6,1) = 2\sin(x - 1,4)$	—

Лабораторная работа 5 «Решение систем линейных и нелинейных уравнений методом Гаусса»

Системы линейных алгебраических уравнений.

Количество уравнений по сравнению с количеством неизвестных:
меньше, больше, равно - система неопределенная, переопределенная и замкнутая(n – уравнений, n - неизвестных).



Известны два класса методов:

- 1) точные, из них наиболее практически применяемый метод Гаусса (последовательного исключения неизвестных).
- 2) итерационные методы.

Метод Гаусса применим для замкнутой системы с ненулевым определителем, т.е. матрица невырожденная. Вычисления производятся прямым и обратным ходом.

Прямым ходом система приводится к виду:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}_1 + \alpha_{12}\mathbf{x}_2 + \alpha_{13}\mathbf{x}_3 + \dots + \alpha_{1n}\mathbf{x}_n & = & \beta_1 \\ \mathbf{x}_2 + \alpha_{23}\mathbf{x}_3 + \dots + \alpha_{2n}\mathbf{x}_n & = & \beta_2 \\ \dots & & \dots \\ \mathbf{x}_n & = & \beta_n \end{array}$$

Обратным ходом находятся все неизвестные, начиная с x_n ... и т.д.... x_1 . Так как для больших систем производится много вычислений, то происходит накопление погрешностей.

В библиотеках имеется программа решения системы линейных уравнений методом Гаусса. Перед вызовом программы ей передают коэффициенты системы и свободные члены.

Модификация схемы Гаусса.

В исходной системе могут быть нулевые коэффициенты. Всегда возможна перестановка уравнений.

Для минимизации вычислительных ошибок нужна такая перестановка (преобразование) при которой деление производится на максимальный по модулю элемент, называется главным элементом.

Вопрос: почему схемы Гаусса с выбором главного элемента дают более точный результат, нежели простая схема Гаусса.

Существование единственного решения, обусловленность и некорректность.

Система линейных алгебраических уравнений может иметь или не иметь решения. Если определитель системы с ненулевой правой частью (свободные члены $\neq 0$) равен 0, то решения не существует и наоборот.

В реальности, когда для решения системы используются численные методы, ситуация не столь проста. Представим, что определитель $=0$. Но при вычислениях за счет округлений и арифметических действий с округленными числами компьютер может найти хоть и малое, но ненулевое значение. Тогда получится «решение» системы, у которой его не существует.

Возможна другая ситуация - система имеет решение, но погрешности округлений оказываются того же порядка или даже больше, чем решения. Такие системы называются «плохо обусловленными», или «неустойчивыми».

Системы, не имеющие решения, или неустойчивые называют некорректными. Неустойчивые, некорректные системы при малом изменении коэффициентов (в пределах погрешности округлений) дают совершенно различные «решения». На самом деле решения таких систем не определяется.

Пример: $1.41x + 5.87y = 13.15$

$$2.83x + 11.75y = 26.33$$

решение: $x = 1, y = 2$.

Изменив один коэффициент (вместо 1.41 взять 1.42) получим $x = -0.61, y = 2.388$ Система некорректна. Здесь можно визуально определить некорректность, так как коэффициенты уравнений почти пропорциональные (1:2). Но для больших систем этого можно не заметить. Поэтому надо проверять путем повторного решения с мало измененными коэффициентами.

Вопрос: Какие системы линейных алгебраических уравнений называются некорректными.

Лабораторная работа 6 «Решение систем линейных и нелинейных уравнений методом минимизации невязки»

Решение систем уравнений:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i=1, 2, \dots, n \quad (2)$$

представляет значительно более сложную задачу, чем решение одного уравнения. Мы рассмотрим один метод решения систем уравнений – метод скорейшего спуска. В этом методе решение системы (2) сводится к задаче отыскания минимумов функции $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которую можно построить различными способами, положив, например,

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i^2(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min \quad (3)$$

Если $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ есть некоторое решение системы (3), то $\Phi(a) = 0$. В других точках x $\Phi(x) > 0$. Таким образом, каждый нулевой минимум функции $\Phi(x)$ даст решение системы (2) и отыскание решений системы (2) сводится к отысканию нулевых минимумов вспомогательной функции $\Phi(x)$.

Использование пакета Solver (MS Excel) для решения уравнений и систем уравнений.

Рассмотрим решение линейной системы с помощью пакета «Поиск решения». Сначала построим оптимизационную задачу, решение которой будет совпадать с решением исходной линейной системы, которую перепишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} G * 0,383112 + G_5 * 0,0721955 - 1,4161 &= 0 \\ G * 0,288782 + G_5 * 0,1885890 - 1,0404 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Рассмотрим функцию:

$$F = (0,383112 G + 0,0721955 G_5 - 1,4161)^2 + (0,288782 G + 0,188589 G_5 - 1,0404)^2.$$

Если у исходной системы уравнений есть решение, то введенная функция обращается в ноль в точке решения. С другой стороны, эта функция равна сумме квадратов, очевидно, минимальное возможное

значение этой функции равно 0. Таким образом, если мы будем искать минимум функции F, и найденный минимум будет равен 0, то точки G, G₅, при которых F будет равна 0, будут решением исходной линейной системы.

Для решения задачи создадим лист Excel-я в следующем виде:

	A	B
1	G=	< нач. знач. G >
2	G ₅ =	< нач. знач. G ₅ >
3	F ₁ =	= B1* 0,383112 + B2 * 0,0721955 - 1,4161
4	F ₂ =	= B1* 0,288782 + B2 * 0,1885890 - 1,0404
5	F = (F ₁) ² + (F ₂) ² =	= (B3^2+B4^2)

Далее подключим «Поиск решения», если он не подключён. Для этого выполним следующие действия:

Меню => Сервис => Надстройки => «Поиск решения» (отметить включение)

После этого «Поиск решения» появляется в списке команд «Сервис».

Далее выполним следующие действия:

Меню => Сервис => «Поиск решения».

В диалоговом окне «Поиск решения» укажем значения полей:

1. Задаём оптимизируемую функцию:

«Установить целевую ячейку» => B5 (в этой ячейке записана формула вычисления функции F)

2. Указываем, что мы ищем минимум:

«Равной $\sqrt{\quad}$ минимальному значению
максимальному значению

3. Задаём параметры функции:

«Изменяя ячейки» => \$B\$1:\$B\$2

В ячейки B1, B2 необходимо занести произвольные начальные значения, например, 0, 0. Далее следует нажать кнопку «Выполнить», после чего пакет начнёт поиск решения. После завершения решения в ячейках B1, B2 будут значения G^* , G_5^* и при которых функция F принимает минимальное значение. Если это минимальное значение равно 0, то G^* , G_5^* - искомое решение линейной системы. Для рассматриваемой системы решением являются следующие значения: $G = 0,850727$, $G_5 = 0,689465$.

Решить линейную систему уравнений по вариантам

№	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
1	1	0,21	-0,45	-0,20	1,91
	2	0,30	0,25	0,43	0,32
	3	0,60	-0,35	-0,25	1,83
2	1	-3	0,5	0,5	-56,5
	2	0,5	-6,0	0,5	-100
	3	0,5	0,5	-3	-210
3	1	0,45	-0,94	-0,15	-0,15
	2	-0,01	0,34	0,06	0,31
	3	-0,35	0,05	0,63	0,37
4	1	0,63	0,05	0,15	0,34
	2	0,15	0,10	0,71	0,42
	3	0,03	0,34	0,10	0,32
5	1	-0,20	1,60	-0,10	0,30
	2	-0,30	0,10	-1,50	0,40
	3	1,20	-0,20	0,30	-0,60
6	1	0,30	1,20	-0,20	-0,60
	2	-0,10	-0,20	1,60	0,30
	3	0,05	0,34	0,10	0,32
7	1	0,20	0,44	0,81	0,74
	2	0,58	-0,29	0,05	0,02
	3	0,05	0,34	0,10	0,32
8	1	6,36	11,75	10	-41,40
	2	7,42	19,03	11,75	-49,49
	3	5,77	7,48	6,36	-27,67
9	1	-9,11	1,02	-0,73	-1,25
	2	7,61	6,25	-2,32	2,33
	3	-4,64	1,13	-8,88	-3,75

№	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
10	1	-9,11	-1,06	-0,67	-1,56
	2	7,61	6,35	-2,42	2,33
	3	-4,64	1,23	-8,88	-3,57
11	1	1,02	-0,73	-9,11	-1,25
	2	6,25	-2,32	7,62	2,33
	3	1,13	-8,88	4,64	-3,75
12	1	0,06	0,92	0,03	-0,82
	2	0,99	0,01	0,07	0,66
	3	1,01	0,02	0,99	-0,98
13	1	0,10	-0,07	-0,96	-2,04
	2	0,04	-0,99	-0,85	-3,73
	3	0,91	1,04	0,19	-1,67
14	1	0,62	0,81	0,77	-8,18
	2	0,03	-1,11	-1,08	0,08
	3	0,97	0,02	-1,08	0,06
15	1	0,63	-0,37	1,76	-9,29
	2	0,90	0,99	0,05	0,12
	3	0,13	-0,95	0,69	0,69
16	1	0,98	0,88	-0,24	1,36
	2	0,16	-0,44	-0,88	-1,27
	3	9,74	-10,00	1,71	-5,31
17	1	0,21	-0,94	-0,94	-0,25
	2	0,98	-0,19	0,93	0,23
	3	0,87	0,87	-0,14	0,33
18	1	3,43	4,07	-106,00	46,8
	2	74,4	1,84	-1,85	-26,5
	3	3,34	94,3	1,02	92,3
19	1	0,66	0,44	0,22	-0,58
	2	1,54	0,74	1,54	-0,32
	3	1,42	1,42	0,86	0,83
20	1	0,78	-0,02	-0,12	0,56
	2	0,02	-0,86	0,04	0,77
	3	0,12	0,44	-0,72	1,01

Лабораторная работа 7 «Создание пользовательских функций в Visual Basic for Applications»

Элементы языка VBA

Рассмотрим сначала переменные, используемые в VBA. Описанные в процедурах VBA действия выполняются над переменными или объектами. Переменные VBA аналогичны переменным других языков программирования. *Объекты*, с которыми работают процедуры и функции VBA, представляют собой средство программного управления приложениями Office и созданными с их помощью документами. Как и в других объектно-ориентированных языках программирования, у объектов VBA имеются *свойства*, которые могут принимать различные значения. Эти значения можно использовать в инструкциях VBA в качестве переменных. Использованию переменной обычно предшествует ее объявление – инструкция Dim, в которой указывается как имя переменной, так и тип данных, для хранения которых она предназначена. Имена переменных могут иметь длину до 255 символов (в том числе – символов кириллицы), при этом они не могут также совпадать с ключевыми словами VBA и именами стандартных объектов.

Ниже в листинге 1 приведены примеры описания переменных различного типа с помощью инструкции Dim.

Листинг 1. Описание переменных

```
Dim a, b as Integer
```

```
Dim дата__рождения as Date
```

```
Dim Фамилия as String, Имя As String*25
```

В процедурах и функциях VBA могут использоваться следующие типы данных:

Boolean – логические переменные, принимающие одно из двух значений: ИСТИНА или ЛОЖЬ;

Byte – целое число в диапазоне от 0 до 255;

Currency – переменные для денежных вычислений с фиксированным количеством разрядов после десятичной запятой; позволяют избежать накопления погрешностей округления;

Date – переменные для хранения даты и времени;

Double – переменные для хранения значений с плавающей точкой удвоенной точности;

Integer – целые числа в диапазоне от -32768 до 32767;

Long – целые числа в диапазоне от -2147483648 до 2147483647;

Object – переменные для хранения ссылок на объекты;

Single – переменные для хранения значений одинарной точности с плавающей точкой;

String – переменные для хранения строк длиной от 0 до 64К символов;

Variant – переменные, тип которых определяется типом последнего значения, присвоенного им.

VBA также предоставляет пользователю возможность хранить данные в массивах (группах переменных с общим именем, различаемых по сочетанию индексов). Кроме переменных, типы данных описываются для формальных параметров процедур и функций и для самих функций (тип возвращаемого функцией значения). В листинге 2 приведены примеры описания формальных параметров и возвращаемого значения для процедуры и функции, вычисляющих длину строки, которая получается при соединении фамилии и имени (с разделяющим их пробелом).

Листинг 2. Описания переменных

Sub FIOl (фамилия As String, имя As String, длина_строки As Integer)

Длина_строки = Len(фамилия) + Len (имя) + 1

End Sub

Function FIOlen (фамилия As String, имя As String) As Integer

FIOlen = Len(фамилия) + Len (имя) + 1

End Function

Управляющие конструкции. Управляющими конструкциями языка программирования называются инструкции и группы инструкций, применение которых позволяет изменять по мере необходимости последовательность выполнения остальных инструкций программы. В современных языках программирования управляющие конструкции подразделяются на *ветвления* и *циклы*. Ветвлением называется управляющая конструкция, позволяющая пропускать при выполнении те или иные группы инструкций в зависимости от значения условия. Циклом называется управляющая конструкция, позволяющая многократно повторять выполнение группы инструкций до наступления какого-либо события.

Ветвления. Ветвления работают по общему принципу: вначале проверяется заданное условие, затем, в зависимости от результатов проверки, выполняется та или иная группа инструкций, входящая в конструкцию ветвления. Конструкции ветвления включают в себя три варианта инструкции условного перехода If и инструкцию выбора Select Case.

Конкретный вариант управляющей конструкции с инструкцией If выбирается в зависимости от программного контекста. Если в зависимости от результата проверки сравнительно простого условия следует выполнить или пропустить простую инструкцию, удобнее оказывается однострочный сокращенный вариант, синтаксис и пример которого приведен в листинге 3.

Листинг 3. Однострочный сокращенный вариант инструкции If

```
If <условие> Then <инструкция>
```

```
If пол = "ж" Then пенс_возраст = 55
```

Знаки равенства в записи условия и в инструкции, входящих в состав однострочной конструкции ветвления, обозначают различные операции. В условии это – операция сравнения, вырабатывающая значение ИСТИНА при равенстве значений выражений, стоящих справа и слева от знака ра-

венства. В инструкции это – операция присваивания значения выражения, расположенного справа от знака равенства, переменной (или свойству), имя которой (которого) расположено слева от этого знака.

Условия, применяющиеся в любой форме конструкций ветвления, представляют собой выражения, вычисление которых дает логическое значение. В сокращенном однострочном варианте инструкции If входящая в ее состав инструкция выполняется только тогда, когда это логическое выражение при вычислении дает значение ИСТИНА. Если при соблюдении условия требуется выполнить не одну, а несколько инструкций, удобнее оказывается сокращенный многострочный вариант инструкции If, синтаксис и пример которого приведен в листинге 4.

Листинг 4. Многострочный сокращенный вариант инструкции If

```
If <условие> Then
<инструкция 1>
< инструкция 2>
<инструкция N>
End If

If пол = "ж" Then
пенс_возраст = 55
поздравление_8_марта = True
End If
```

В таком варианте конструкции ветвления при соблюдении условия выполняются все инструкции, записанные между ключевыми словами Then и End If. Полный вариант инструкции If удобен в том случае, когда при соблюдении условия необходимо выполнить одну группу инструкций, а при несоблюдении – другую. Синтаксис и пример этого варианта приведены в листинге 5.

Листинг 5. Полный вариант инструкции If

```
If <условие> Then
<инструкция 1>
```

```

...
<Инструкция N >
Else
<Инструкция 1>
...
<Инструкция N>
End If
If пол = "ж" Then
пенс_возраст = 55
поздравление_8_марта = True
Else
пенс_возраст = 60
поздравление_8_марта . = False
End If

```

v

Если количество альтернативных вариантов исполняемой группы инструкций больше двух, инструкции If приходится вкладывать друг в друга, что усложняет чтение кода программы и ее отладку. Во многих случаях, когда номер выполняемой группы можно вычислить заранее, удобнее использовать инструкцию выбора варианта Select Case, синтаксис и пример которого приведен в листинге 6.

Листинг 6. Многострочный сокращенный вариант инструкции If

```

Select Case <выражение>
Case <список значений 1>
<группа инструкций 1>
Case <список значений 2>
<группа инструкций 2>
Case <список значений N>
Case Else
<группа инструкций N+1>
End Select

```



```
Select Case набрано_баллов
Case 0, 1, 2
Оценка = "неудовлетворительно"
Case 3 To 5
Оценка = "удовлетворительно"
<группа инструкций 2>
Case Is > 8
Оценка = "отлично"
Case Else
Оценка = "хорошо"
End Select
```

Циклы. При создании процедур и функций часто возникают ситуации, когда одни и те же действия требуется повторить несколько раз. Для описания повторного исполнения инструкции или группы инструкций пользуются специальными управляющими конструкциями VBA – циклами. Циклы подразделяются на два типа: с управляющим условием и с управляющим перечислением.

В циклах с управляющим условием инструкция или группа инструкций повторяется до тех пор, пока не будет выполнено управляющее условие. По названию инструкции, составляющей основу этой управляющей конструкции, такие циклы называются *циклами Do*. В зависимости от типа управляющего условия и времени его проверки (относительно выполнения повторяющихся инструкций) различают четыре вида циклов Do. В листинге 7 приведены примеры использования всех четырех видов цикла Do для решения одной и той же задачи: сколько раз подряд из числа 25 можно извлечь квадратный корень, чтобы в результате получилось число, не превышающее единицу более, чем на одну сотую.

Листинг 7. Типы циклов Do

```
Sub Main()
```

```

Dim число As Single
Dim повторения As Integer
повторения = 0
число = 25
' Цикл Do первого типа
Do While число - 1 >= 0.01
число = Sqr(число)
повторения = повторения + 1
Loop
MsgBox (повторения)
повторения = 0
число = 25
' Цикл Do второго типа Do
число = Sqr(число)
повторения = повторения + 1
Loop
While число - 1 >= 0.01
MsgBox (повторения)
повторения = 0
число = 25
' Цикл Do третьего типа
Do Until число - 1 < 0.01
число = Sqr(число)
повторения = повторения + 1
Loop
MsgBox (повторения)
повторения = 0 число = 25
'Цикл Do четвертого типа Do
число = Sqr(число)
повторения = повторения + 1

```

Loop Until число- 1 < 0.01

MsgBox (повторения)

End Sub

В цикле *Do первого типа* условие проверяется *до начала* выполнения повторяющихся инструкций. Если условие оказывается выполненным (при вычислении логического выражения получается значение ИСТИНА), инструкции, заключенные между инструкциями Do и Loop (тело цикла), выполняются однократно, затем управление снова передается на инструкцию Do, и процесс повторяется. Если управляющее условие не выполняется, то повторяющаяся группа инструкций пропускается и выполняется инструкция, следующая непосредственно за инструкцией Loop.

В цикле *Do второго типа* условие проверяется *после* выполнения тела цикла. Цикл повторяется, пока управляющее условие выполняется.

В цикле *Do третьего типа* условие проверяется *до начала* выполнения повторяющихся инструкций, но тело цикла выполняется только в том случае, когда управляющее условие *не выполнено* (при вычислении логического выражения получается значение ЛОЖЬ).

В цикле *Do четвертого типа* условие проверяется *после* выполнения тела цикла. Цикл повторяется, пока управляющее условие не выполняется.

Циклами с управляющим перечислением пользуются в случаях, когда заранее известно количество повторений тела цикла и проверять управляющее условие нет необходимости. Циклы с управляющим перечислением подразделяются на циклы со счетчиком и циклы по совокупности.

В циклах *со счетчиком* используется специальная переменная — *счетчик*, значение которой при каждом повторении тела цикла увеличивается или уменьшается на заданную величину (*шаг цикла*). Цикл завершается после того, как значение счетчика достигнет (или превысит) конечное значение счетчика цикла. Если в процессе выполнения цикла

значения счетчика убывают (отрицательный шаг цикла), цикл завершается, когда значение счетчика станет равным или меньшим конечного значения. В листинге 8 приведен синтаксис цикла со счетчиком и пример процедуры, вычисляющей суммы значений, содержащихся в нечетных ячейках первого столбца первого листа текущей рабочей книги Excel (в пределах первых 10 ячеек).

Листинг 8. Цикл со счетчиком

```
For счетчик = начальное_значение To конечное_значение Step шаг_цикла
    <тело цикла>
Next счетчик
Sub Цикл_For()
    Dim I As Integer
    Dim S As Long
    S = 0
    For I = 1 To 10 Step 2
        S = S + Application.Worksheets(1).Cells(I, 1).Value Next I MsgBox (S)
End Sub
```

В *циклах по совокупности* тело цикла поочередно повторяется для всех однородных объектов, составляющих массив или семейство. В этом случае в роли счетчика выступает объектная переменная. В листинге 9 приведены синтаксис цикла и пример, в котором он используется для вывода на печать имен всех рабочих листов в текущей рабочей книге Excel.

Листинг 9. Цикл по совокупности

```
For Each элемент In совокупность
    <тело цикла>
Next элемент ;
Sub Цикл_по_совокупности()
    Dim S as Worksheet
    For Each S in Application. Worksheets
        Debug. Print S.Name
```

Next S

End Sub

Объект Debug совместно с методом Print позволяет выполнять печать в режиме отладки. При использовании этого метода в процедуре значения аргументов метода выводятся в специальное окно редактора VBA – Immediate. При выполнении программного кода вне среды редактора VBA, когда окно Immediate закрыто, инструкция, содержащая объект Debug, не оказывает никакого влияния на выполнение процедуры.

Основы работы с редактором VBA

Работа с программным кодом VBA ведется с помощью специального редактора. Чтобы начать работу с ним, выберите команду Сервис ► Макрос ► Редактор Visual Basic (Tools ► Macro ► VBA Editor) — откроется окно редактора, представленное на рисунке 2.1.

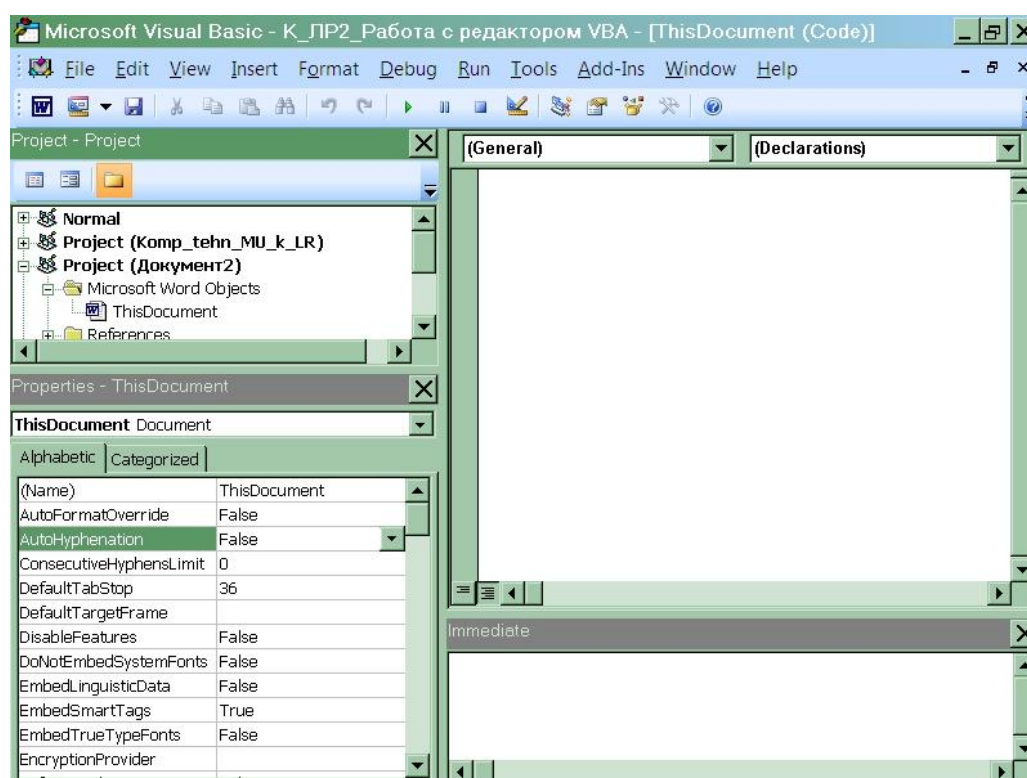


Рисунок 2.1. Редактора Visual Basic для приложений

Содержание этого окна зависит от выбора, сделанного с помощью меню Вид (View), однако главным образом работа ведётся с показанными на рисунке панелями и окнами.

Панель проекта – располагается в левом верхнем углу окна приложения ниже панели инструментов; предназначена для отображения объектов, составляющих проект VBA (стиль отображения соответствует отображению ресурсов в окне Проводника).

Панель свойств – располагается ниже панели проекта (если панель отсутствует на экране, ее можно включить клавишей F4); здесь можно просматривать и по необходимости изменять значения свойств объектов, выбранных в панели проекта (например, имя модуля класса) или окне редактора (например, имя элемента управления в модуле формы).

Окно редактора кода – представляет собой специализированный текстовый процессор для работы с текстами на языке VBA; здесь располагаются вложенные окна документов, содержащие тексты модулей.

В состав дерева объектов проекта, которое отображается на панели проекта, входят модули следующих категорий.

Модули форм – в модулях этого типа содержатся формы VBA.

Если в проекте VBA используются модули из других объектных библиотек, то в состав дерева проектов будут также включены ссылки на эти библиотеки. Если выполнить двойной щелчок на имени модуля в дереве проекта, в окне редактора кода появится раскрытое окно документа с текстом выбранного модуля. Рассмотрим состав этого окна.

В верхней части окна документа расположены два раскрывающихся списка: список разделов (слева) и список процедур (справа). В стандартном модуле есть только один раздел – Общая область (General). Процедур в каждом стандартном модуле может содержаться несколько, и нужную процедуру можно выбрать с помощью раскрывающегося списка. Кроме имен процедур в списке имеется альтернатива Описания (Declarations). После ее выбора в окне отображается часть модуля, в которой содержатся

описания общих переменных модуля, не принадлежащих ни к одной из его процедур, констант и процедур, содержащихся в других модулях или проектах, но использующихся в процедурах этого модуля.

В левом нижнем углу окна располагаются две кнопки, переключающие режимы отображения: режим процедуры и режим модуля. В режиме процедуры в окне отображается текст только одной процедуры, в режиме модуля – всех разделов, входящих в него, и всех процедур.

Создание пользовательских функций

В качестве иллюстрации рассмотрим подпрограмму функцию для расчета забойного давления газовой скважины, работающей по НКТ. Забойное давление рассчитывается по формуле:

$$p_z = \sqrt{p_y^2 e^{2s} + 1.377 \lambda \frac{z_{cp}^2 T_{cp}^2}{d_{vn}^5} (e^{2s} - 1) Q^2}$$

$$S = 0.03415 \frac{\bar{\rho} L}{z_{cp} T_{cp} d_{vn}^5}$$

где

$\bar{\rho}$ – относительная плотность газа по воздуху,

L – глубина, м

p_y – устьевое давление, ата,

p_z – забойное давление, ата,

λ – коэффициент гидравлического сопротивления, для новых труб принимается равным 0.02

Q – расход, тыс.м³/сутки,

D_{vn} – внутренний диаметр, см

Соответствующая функция может быть записана в виде:

Function P_zab_trubki (P_u, Lambda, z_sr, T_sr, d_vn, Q, ro, L)

s = 0.03415 * ro * L / (zsr * T_sr)

p1 = P_u ^ 2 * Exp(s) * Exp(s)

```
p2 = 1.377 * Lambda * z_sr ^ 2 * T_sr ^ 2 * (Exp(s) * Exp(s) -1) * _  
Q ^ 2/(d_vn ^ 5)
```

```
P_zab_trubki = Sqr(pl + p2)
```

```
End Function
```

Задание: Написать подпрограмму – функцию, реализующую одну из формул, используемых в нефтегазовом деле.

Лабораторная работа 8 «Явные и неявные методы решения дифференциальных уравнений»

Рассмотрим уравнение, описывающее статическую составляющую давления газожидкостной смеси в скважине: $dp/dx = \rho_g * g * \varphi + \rho_{ж}g * (1 - \varphi)$.

Здесь плотность газа (ρ_g) и концентрация газа (φ) зависят от давления (P), изменяются вдоль ствола скважины $0 < x < H_{скв}$, где $H_{скв}$ – глубина скважины.

$$\rho_g = \rho_0 * (P / Z(P)) * (T_0 / P_0 * T_{пл}),$$

где ρ_0 – плотность газа в нормальных условиях, $T_{пл}$ – температура на забое скважины, K^0 .

Для газожидкостной смеси известна концентрация газа в нормальных условиях, при коэффициенте аэрации (α):

$$\varphi_0 = Q_{го} / Q_{ж} + Q_{го}, \quad \alpha = Q_{го} / Q_{ж}, \quad \varphi_0 = \alpha / 1 + \alpha.$$

При значении рабочего давления (P) в некотором сечении ствола скважины:

$$Q_g(P) = (Q_{го} * Z(P) * P_0 * T_3) / (P * T_0),$$

$$\varphi(P) = (Q_g(P) / Q_{ж} + Q_g(P)) = Q_{го} / Q_{ж} * (P / Z(P)) * T_0 / (P_0 * T_3) + Q_{го} = \alpha / (P / Z(P)) * T_0 / (P_0 * T_3) + \alpha,$$

$$1 - \varphi(P) = ((P / Z(P)) * (T_0 / P_0 * T_3)) / ((P / Z(P)) * (T_0 / P_0 * T_3) + \alpha).$$

В результате подстановок $\varphi(P)$, $(1 - \varphi(P))$, $\rho_r(P)$ в правую часть дифференциального уравнения получим:

$$\frac{dp}{dx} = g * [\rho_0 * (\alpha * (P / Z(P) * (T_0 / (P_0 * T_3))) / (P / Z(P) * (T_0 / (P_0 * T_3) + \alpha)) + (\rho_{ж} * (P / Z(P) * (T_0 / P_0 * T_3) / (P / Z(P) * (T_0 / P_0 * T_3) + \alpha))] = g * (\rho_0 * \alpha + \rho_{ж}) * ((P / Z(P)) / (P / Z(P)) + \alpha * ((P_0 * T_3) / T_0)).$$

Полагая $Z(P)$ известной функцией от давления, на устье скважины допускаем известное $P = P_y$ при $x = 0$, имеем задачу Коши для уравнения:

$$\frac{dp}{dx} = g * (\rho_0 * \alpha + \rho_{ж}) * (P / (P + \alpha * (P_0 * T_3) / T_0 * Z(P))) = f(P, x),$$

Решить полученное уравнение: 1) методом Эйлера, явным, 2) методом Рунге-Кутты при:

$$\rho_0 = 1,205 \text{ кг/м}^3, \rho_{ж} = 1000 \text{ мз}, T_3 = 320^0\text{К}, P_0 = 0,1 \text{ МПа}, P_y = 5 \text{ МПа}, T_0 = 293^0\text{К}, H_{скв} = 1000 \text{ м}, Z(P) = 1 - 5.3 * P * 10^{-3} + 0.18 * P^2 * 10^{-4}, \text{ для } \alpha = 5, 10, 15, \dots (\text{варианты}).$$

Отрезок $0 < x < 1000$ м с шагом 50 м разбивается на 20 отрезков, т. е. $\Delta x = 50$ м.

Методом Эйлера: $P_i = P_{i-1} + \Delta x * g * (\rho_0 \alpha + \rho_{ж}) * (P_{i-1} / (P_{i-1} + \alpha * (P_0 T_3 / T_0) * Z(P)))$, $i = 1, 2, \dots, 20$

Значение P_{20} соответствует глубине скважины $H_{скв}$

Методом Рунге-Кутты значение давления на новом шаге $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ определяется по формуле $P_{i+1} = P_i + \Delta P_i$, где

$$\Delta y_i = 1/6 (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = \Delta x * f(x_i, P_i),$$

$$K_2 = \Delta x * f(x_i, \Delta x / 2, P_i + K_1 / 2),$$

$$K_3 = \Delta x * f(x_i, \Delta x / 2, P_i + K_2 / 2),$$

$$K_4 = \Delta x * f(x_i + \Delta x, P_i + K_3).$$

Лабораторная работа 9 «Применение метода наименьших квадратов при решении обратных задач»

Предполагается наличие в среднем линейной связи:

$$y = b_0 + b_1 x$$

Для нахождения коэффициентов b_0 и b_1 используется метод наименьших квадратов. Исходные пары (x_i, y_i) образуют исходные условные уравнения:

$$y_i = b_0 + b_1 x_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

n – количество уравнений значительно больше количества искомых коэффициентов. Следовательно, равенства в них невозможны.

Условием для нахождения b_0 и b_1 является минимум суммы квадратов отклонений:

$$\min_{b_0, b_1} \sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2,$$

здесь $F(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2$ – функция b_0, b_1 ;

x_i, y_i – фактические данные замеров.

Экстремум функции $F(b_0, b_1)$ находим из приравнивания к 0 производных:

$$\frac{\partial F}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b_1} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + b_1 \cdot x_i)] \cdot 1 = 0; \quad \sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + b_1 \cdot x_i)] \cdot x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n b_0 + \sum_{i=1}^n b_1 \cdot x_i = \sum_{i=1}^n y_i; \quad \sum_{i=1}^n b_0 \cdot x_i + \sum_{i=1}^n b_1 \cdot x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i$$

$$(n) \cdot b_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b_1 = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \cdot b_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot b_1 = \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i$$

$$\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix} = n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$$

$$\begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum y_i \cdot x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix} = (\sum y_i) \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i) \cdot (\sum y_i \cdot x_i)$$

$$\begin{vmatrix} n & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum y_i \cdot x_i \end{vmatrix} = n \cdot \sum y_i \cdot x_i - \left(\sum x_i\right) \cdot \left(\sum y_i\right)$$

$$b_0 = [(\sum y_i) \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i) \cdot (\sum y_i \cdot x_i)] / \left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \right]$$

$$b_1 = [n \sum x_i \cdot y_i - (\sum x_i) \cdot (\sum y_i)] / \left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \right]$$

$$b_0 = \left[\frac{\sum y_i}{n} \cdot \frac{\sum x_i^2}{n} - \frac{\sum x_i}{n} \cdot \frac{\sum (y_i \cdot x_i)}{n} \right] / \left[\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 \right]$$

$$b_1 = \left[\frac{\sum x_i \cdot y_i}{n} \cdot \frac{\sum x_i^2}{n} - \frac{\sum x_i}{n} \cdot \frac{\sum y_i}{n} \right] / \left[\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 \right]$$

$$Dx = M(X - Mx)^2 = M[X^2 - 2(Mx) \cdot x + (Mx)^2] = MX^2 - 2(Mx)^2 + (Mx)^2 = MX^2 - (Mx)^2$$

$$b_1 = (M(X \cdot Y) - Mx \cdot My) / Dx,$$

b_1 — определяет темп изменения величины Y при изменении величины X , т.е. тангенс угла наклона регрессионной прямой;

b_0 — отрезок, отсекаемый на оси Y при $x=0$;

b_1 – размерный коэффициент, $[Y]/[X]$, поэтому его величина не может характеризовать степень зависимости Y от X . Эту роль выполняет ковариация и коэффициент корреляции.

Ковариацией K_{xy} случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин от их математических ожиданий:

$$K_{xy} = M[(X - Mx) \cdot (Y - My)], \text{ или}$$

$$M[XY - X \cdot My - Y \cdot Mx + Mx \cdot My] = M(XY) - Mx \cdot My - My \cdot Mx + Mx \cdot My = M(XY) - Mx \cdot My$$

Заметим, что $b_1 = \frac{K_{xy}}{Dx}$.

Свойство ковариации: $|K_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$

$$M\left(\frac{x - a_x}{\sigma_x} \pm \frac{y - a_y}{\sigma_y}\right)^2 \geq 0, \text{ или}$$

$$M\left[\left(\frac{x - a_x}{\sigma_x}\right)^2 \pm 2 \frac{(x - a_x)}{\sigma_x} \cdot \frac{(y - a_y)}{\sigma_y} + \left(\frac{y - a_y}{\sigma_y}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma_x^2} \cdot M(x - a_x)^2 \pm 2 \frac{M[(x - a_x) \cdot (y - a_y)]}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{1}{\sigma_y^2} \cdot M(y - a_y)^2 =$$

$$= 2 \pm 2 \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \geq 0 \Rightarrow |K_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y,$$

где $M(x - a_x)^2 = Dx = \sigma_x^2$ $M(y - a_y)^2 = Dy = \sigma_y^2$.

Коэффициент корреляции

$$\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (\sigma_x = \sqrt{Dx}, \sigma_y = \sqrt{Dy}),$$

где $\rho_{xy} < 1$, безразмерная величина.

Найдите методом наименьших квадратов значения коэффициентов линейной зависимости $y = ax + b$ по заданным эмпирическим данным. Используя найденную линейную зависимость, найдите значение y в точке $x = N + 0.55$, где N — номер варианта.

Найти методом наименьших квадратов значения коэффициентов линейной зависимости $y = ax + b$ по заданным эмпирическим данным. Используя найденную линейную зависимость, найти значение y в точке $x = N + 0.55$, где N – номер варианта.

1.

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y	0.686	0.742	0.767	0.646	0.807	0.774	0.97	0.932	0.936	0.978	1.048

2.

x	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
y	2.312	2.251	2.418	2.752	2.459	2.7	3.022	3.079	2.42	2.669	3.241

3.

x	3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4
y	4.615	4.591	5.13	5.481	5.492	5.553	5.471	5.727	5.798	6.11	6.605

4.

x	4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5
y	8.472	8.805	9.096	8.993	9.312	9.465	9.771	9.61	9.722	11.419	10.285

5.

x	5	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6
y	12.36	13.63	13.304	13.148	13.482	14.24	14.516	14.882	15.246	15.369	15.158

6.

x	6	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7
y	17.631	19.747	19.783	18.806	19.886	21.118	20.208	19.481	20.153	20.505	21.29

7.

x	7	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8
y	25.243	25.133	25.669	26.627	26.753	27.234	26.491	26.876	27.228	28.065	27.781

8.

x	8	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9
y	30.528	34.221	34.233	34.114	33.595	34.058	34.498	35.822	35.678	37.442	35.698

9.

x	9	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
y	41.742	42.244	43.884	42.167	43.696	45.042	42.461	45.727	44.056	45.863	44.953

10.

x	10	10.1	10.2	10.3	10.4	10.5	10.6	10.7	10.8	10.9	11
y	49.758	51.924	50.083	52.376	53.413	54.966	52.771	54.115	55.476	55.686	56.196

11.

x	11	11.1	11.2	11.3	11.4	11.5	11.6	11.7	11.8	11.9	12
y	62.173	63.055	63.725	64.237	64.086	63.587	65.412	65.284	65.05	68.876	65.74

12.

x	12	12.1	12.2	12.3	12.4	12.5	12.6	12.7	12.8	12.9	13
y	71.167	74.264	72.658	74.507	76.649	75.517	75.708	76.359	79.316	77.373	77.698

13.

x	13	13.1	13.2	13.3	13.4	13.5	13.6	13.7	13.8	13.9	14
y	86.612	85.491	87.803	88.613	89.075	89.24	89.633	90.761	91.323	91.428	91.712

14.

x	14	14.1	14.2	14.3	14.4	14.5	14.6	14.7	14.8	14.9
y	99.811	100.31	99.492	102.61	103.20	104.36	104.73	105.16	104.65	105.58

15.

x	15	15.1	15.2	15.3	15.4	15.5	15.6	15.7	15.8	15.9	16
y	115.18	115.28	115.18	116.01	117.20	119.04	121.43	119.35	120.84	121.58	124.33

16.

x	16	16,1	16,2	16,3	16,4	16,5	16,6	16,7	16,8
y	33	37	41	45	50	55	60	66	75

17.

x	17	17,1	17,2	17,3	17,4	17,5	17,6	17,7	17,8
y	133	137	141	145	150	155	160	166	175

18.

x	18	18,1	18,2	18,3	18,4	18,5	18,6	18,7	18,8
y	313	317	411	415	510	515	610	616	715

19.

x	19	19,1	19,2	19,3	19,4	19,5	19,6	19,7	19,8
y	3,3	3,7	4,1	4,5	5,0	5,5	6,0	6,6	7,5

20.

x	20	20,1	20,2	20,3	20,4	20,5	20,6	20,7	20,8
y	13	27	31	45	50	65	70	86	95