

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
для проведения практических занятий
по дисциплине «Алгебра».

Направление подготовки 09.03.04 – Программная инженерия.
Профиль подготовки – Разработка и сопровождение программного обеспечения.
Квалификация выпускника - бакалавр.
Очная форма обучения.
Учебный план 2026 г.

Ставрополь
2026

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Тема 1. ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ.

Практическое занятие № 1. Бинарные алгебраические операции и их основные свойства.

Практическое занятие № 2. Группы.

Практическое занятие № 3. Кольца и поля.

Практическое занятие № 4. Алгебраическая форма комплексного числа и действия над комплексными числами в алгебраической форме. Геометрическое представление и тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

Практическое занятие № 5. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Извлечение корня n -ой степени из комплексного числа.

Тема 2. КОЛЬЦО МАТРИЦ НАД КОЛЬЦОМ. МАТРИЦЫ НАД ПОЛЕМ.

Практическое занятие № 6. Матрицы над кольцом и операции над ними.

Практическое занятие № 7. Определение и свойства определителя квадратной матрицы n -го порядка

Практическое занятие № 8. Миноры и алгебраические дополнения. Вычисление определителя n -го порядка.

Практическое занятие № 9. Обратная матрица и её вычисление.

Практическое занятие № 10. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы и его вычисление.

Практическое занятие № 11. Арифметические n -мерные векторы.

Практическое занятие № 12. Итоговое занятие по темам «Основные алгебраические структуры» и «Кольцо матриц над кольцом. Матрицы над полем»

Тема 3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НАД ПОЛЕМ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ.

Практическое занятие № 13. Основные понятия теории решения систем линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений в матричной форме.

Практическое занятие № 14. Теорема Крамера о системе n линейных уравнений с n неизвестными.

Практическое занятие № 15. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Практическое занятие № 16. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений.

Практическое занятие № 17. Неоднородные системы линейных уравнений

Практическое занятие № 18. Итоговое занятие по теме «Системы линейных уравнений над полем. Системы линейных неравенств»

ВВЕДЕНИЕ

Целью практических занятий по дисциплине «Алгебра» является формирование общепрофессиональной компетенции ОПК-1 будущего бакалавра по направлению подготовки 09.03.04 Программная инженерия.

К числу задач освоения дисциплины можно отнести:

- обеспечение фундаментальной подготовки в одной из важнейших областей современной математики;
- ознакомление с основами классической алгебры;
- обучение основным алгебраическим методам решения задач.

Дисциплина «Алгебра» относится к дисциплинам обязательной части и изучается в 1 семестре.

В процессе изучения дисциплины у обучающихся формируется следующая компетенция (в соответствии с образовательным стандартом):

ОПК-1- Способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности.

В методических указаниях по выполнению практических работ по дисциплине «Алгебра» описана последовательность и основное содержание практических занятий по дисциплине. Для каждого практического занятия даны теоретические задания, практические задания, решаемые в аудитории, и практические задания для самостоятельной работы дома.

Тема 1. Основные алгебраические структуры.

Практическое занятие №1.

Бинарные алгебраические операции и их основные свойства.

Цель занятия: изучение бинарных алгебраических операций и их основных свойств.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенции ОПК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

1. Теоретические вопросы к практическому занятию:

- Определение алгебраической операции.
- Примеры алгебраических операций.
- Понятие алгебры как множества с операциями.
- Примеры алгебр.
- Определение бинарной алгебраической операции.
- Основные свойства бинарных алгебраических операций.

1. Практические задания, решаемые в аудитории:

Задача 1. Определены ли на множествах $N, Z, Q, 2Z, 2Z+1, R, R^+$ следующие операции:

а) $(a, b) \otimes ab$,

б) $(a, b) \otimes \frac{a}{b}$,

в) $(a, b) \otimes \frac{a+b}{2}$,

г) $(a, b) \otimes \min\{a, b\}$?

Задача 2. Какие из операций из упражнения 1 обладают свойством коммутативности?

Задача 3. Какие из операций из упражнения 1 обладают свойством ассоциативности?

Задача 4. Для операций из упражнения 1, определённых на множестве R , выяснить, существует ли нейтральный элемент. Если существует, то указать все симметризуемые элементы.

3. Домашнее задание:

Задача 1. Определены ли на множествах $N, Z, Q, 2Z, 2Z+1, R, R^+$ следующие операции:

$$а)(a, b) \circledast a + b,$$

$$б)(a, b) \circledast a - b,$$

$$в)(a, b) \circledast \sqrt{ab},$$

$$г)(a, b) \circledast ab - ba,$$

$$д)(a, b) \circledast \max\{a, b\}?$$

Задача 2. Какие из операций из упражнения 1 обладают свойством коммутативности?

Задача 3. Какие из операций из упражнения 1 обладают свойством ассоциативности?

Задача 4. Для операций из упражнения 1, определённых на множестве $\mathbb{R}$, выяснить, существует ли нейтральный элемент. Если существует, то указать все симметризуемые элементы.

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон. текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>

Практическое занятие №2.

Группы.

Цель занятия: Определение группы, основные свойства групп.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенции ОПК-1 ; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности .

1. Теоретические вопросы к практическому занятию:

- Определение группы.
- Примеры групп.
- Аддитивные группы.
- Мультипликативные группы.
- Основные свойства групп.
- Определение подгруппы.

2. Практические задания, решаемые в аудитории:

Задача 1. Какие из указанных ниже совокупностей отображений множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$ в себя образует группу относительно умножения:

- а) множество всех отображений;
- б) множество всех инъективных отображений;
- в) множество всех сюръективных отображений;
- г) множество всех биективных отображений;
- д) множество всех четных перестановок;
- е) множество всех нечетных перестановок.

Задача 2. Доказать, что множество функций вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc \neq 0$, является группой относительно операции композиции функций.

3. Домашнее задание:

Задача 1. Какие из указанных ниже совокупностей отображений множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$ в себя образует группу относительно умножения:

- а) множество всех биективных отображений;
- б) множество всех четных перестановок;
- в) множество всех нечетных перестановок.

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>

Практическое занятие №3.

Кольца и поля.

Цель занятия: определение кольца, основные свойства колец. Понятие поля, основные свойства полей.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенции ОПК-1, ; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности .

1. Теоретические вопросы к практическому занятию:

- Определение кольца.
- Примеры колец.
- Основные свойства колец.
- Делители нуля.
- Мультипликативная группа кольца с единицей.
- Понятие поля.

- Примеры полей.
- Основные свойства полей.

2. Практические задания, решаемые в аудитории:

Задача 1. Какие из следующих числовых множеств образуют кольцо относительно обычных операций сложения и умножения:

- а) множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt{2}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$;
- б) множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt[3]{2}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$;
- в) множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$, где $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Задача 2. Какие из колец в задачах 1 являются полями ?

3. Домашнее задание:

Задача 1. Какие из следующих числовых множеств образуют кольцо относительно обычных операций сложения и умножения:

- а) множество $\mathbb{Z}$;
- б) множество $n\mathbb{Z} (n > 1)$;
- в) множество неотрицательных целых чисел;
- г) множество $\mathbb{Q}$.

Задача 2. Какие из колец в задачах 1 являются полями ?

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>

Практическое занятие №4.

Алгебраическая форма комплексного числа и действия над комплексными числами в алгебраической форме. Геометрическое представление и тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

Цель занятия: представление комплексных чисел в алгебраической форме, действия над комплексными числами в алгебраической форме; Геометрическое представление и тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенции ОПК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

1. Теоретические вопросы к практическому занятию:

- Представление комплексных чисел в алгебраической форме.
- Сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме.
- Сопряжённые комплексные числа.
- Деление комплексных чисел в алгебраической форме.
- Извлечение квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме.
- Геометрическое представление комплексных чисел.
- Геометрическое представление действий над комплексными числами.
- Определение модуля комплексного числа.
- Определение аргумента комплексного числа.
- Тригонометрическая форма комплексного числа.

2. Практические задания, решаемые в аудитории:

Задача 1. Вычислить выражения:

а) $(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i)$;

б) $\frac{(1 + 3i)(8 - i)}{(2 + i)^2}$;

в) $\frac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3}$.

Задача 2. Вычислить $i^{77}, i^{98}, i^{-57}, i^n$, где n – целое число.

Задача 3. Решить уравнения:

а) $z^2 = 5 - 12i$; б) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$.

Задача 4. Изобразить на плоскости точки, соответствующие числам $5, -2, -3i, \pm 1 \pm i\sqrt{3}$.

Задача 5. Указать геометрический смысл выражения $|z_1 - z_2|$, где z_1 и z_2 - заданные комплексные числа.

Задача 6. Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам z , удовлетворяющим условиям:

а) $\arg z = \frac{\pi}{3}$; б) $|z| \leq 2$; в) $|z - 1 - i| < 1$; г) $1 \leq |z - 2i| < 2$.

Задача 7. Решить уравнение $|z| + z = 8 + 4i$.

Задача 8. Найти тригонометрическую форму числа:

а) -2 ; б) $-3i$; в) $1 - i$; г) $1 + i\sqrt{3}$; д) $-1 + i\sqrt{3}$; е) $-1 - i\sqrt{3}$;
ж) $1 + \cos j + i \sin j$.

3. Домашнее задание:

Задача 1. Вычислить выражения:

а) $(2 + i)(3 + 7i) - (1 + 2i)(5 + 3i)$; б) $(3 + i)^3 - (3 - i)^3$;
в) $\frac{(2 + i)(4 + i)}{1 + i}$.

Задача 2. Решить уравнения:

а) $z^2 = 3 - 4i$; б) $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$; в) $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$.

Задача 3. Найти все комплексные числа, сопряженные своему квадрату.

Задача 4. Найти комплексные числа, соответствующие вершинам квадрата с центром в начале координат, со сторонами длины 1, параллельными осями координат.

Задача 5. Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам z , удовлетворяющим условиям:

а) $|z| = 1$; б) $|z + 3 + 4i| \leq 5$; в) $2 < |z| < 3$.

Задача 6. Решить уравнение $|z| - z = 8 + 12i$.

Задача 7. Найти тригонометрическую форму числа:

а) 5 ; б) i ; в) $1 + i$; г) $1 - i\sqrt{3}$; д) $-\sqrt{3} + i$; е) $-\sqrt{3} - i$; ж) $\cos a - i \sin a$.

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>

Практическое занятие №5.

Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Извлечение корня n -ой степени из комплексного числа.

Цель занятия: действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенции ; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности .

1.Теоретические вопросы к практическому занятию :

- Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме.
- Деление комплексных чисел в тригонометрической форме
- Формула Муавра.
- Извлечение корня n -ой степени из комплексного числа.
- Геометрическое представление корней n -ой степени из комплексного числа.
- Извлечение корня n -ой степени из единицы.
- Первообразные корни n -ой степени из единицы.
- Мультипликативная группа корней n -ой степени из единицы.

2. Практические задания, решаемые в аудитории:

Задача 1. Вычислить выражения:

а) $(1+i)^{1000}$; б) $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

Задача 2. При $n \in \mathbb{Z}$ вычислить выражения:

а) $\frac{e^{itga} - itga}{1 + itga}$; б) $(1 + \cos j + i \sin j)^n$.

Задача 3. Представить в виде многочленов от $\sin x$ и $\cos x$ функции:

а) $\sin 5x$; б) $\cos 5x$.

$n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. Вычислить:

а) $\sqrt[6]{i}$; б) $\sqrt[8]{2\sqrt{2}(1-i)}$; в) $\sqrt[4]{-72(1-i\sqrt{3})}$;
г) $\sqrt[4]{\frac{7-2i}{1+i\sqrt{2}} + \frac{4+14i}{\sqrt{2}+2i}} - (8-2i)$.

Задача 5. Решить уравнение: $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$.

Задача 6. Вычислить:

а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[4]{1}$; в) $\sqrt[6]{1}$.

Задача 7. Найти все первообразные корни n -ой степени из единицы, если а) $n=2$, б) $n=3$, в) $n=4$, г) $n=6$.

3. Домашнее задание:

Задача 1. Вычислить выражения:

а) $(1+i\sqrt{3})^{30}$; б) $(\sqrt{3}+i)^{30}$; в) $\frac{e^{\sqrt{3}+i} - 1}{1-i}$.

Задача 2. При $n \in \mathbb{Z}$ вычислить выражения:

а) $(1+i)^n$; б) $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Задача 3. Представить в виде многочленов от $\sin x$ и $\cos x$ функции:

а) $\sin 4x$; б) $\cos 4x$.

Задача 4. Доказать равенства

а) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, (x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$;
б) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, (x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$.

Задача 5. Вычислить:

а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt[4]{-4}$; в) $\sqrt[6]{64}$; г) $\sqrt[4]{8\sqrt{3i-8}}$;
д) $\sqrt[3]{\frac{1-5i}{1+i} - 5\frac{1+2i}{2-i}} + 2$.

Задача 6. Решить уравнение: $(z+i)^n + (z-i)^n = 0$

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>

Тема 2. Кольцо матриц над кольцом. Матрицы над полем.

Практическое занятие №6.

Матрицы над кольцом и операции над ними.

Цель занятия: операции над матрицами и их основные свойства.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенции ОПК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

1. Теоретические вопросы к практическому занятию:

- Понятие матрицы.
- Прямоугольные и квадратные матрицы.
- Сложение однотипных матриц.
- Умножение матриц на число.
- Умножение матриц.
- Основные свойства операций над матрицами.

2. Практические задания, решаемые в аудитории:

Задача 1. Перемножить матрицы:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{pmatrix} \text{æ} & -4 & 5 \\ \text{ç} & -3 & 1 \\ \text{è} & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{æ} & 29 \\ \text{ç} & 18 \\ \text{è} & -3 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \text{æ} & 2 & 1 \\ \text{ç} & 3 & 1 \\ \text{è} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{æ} & 3 & 1 \\ \text{ç} & 2 & 2 \\ \text{è} & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{в) } \begin{pmatrix} \text{æ} & 2 & 0 \\ \text{ç} & 1 & 0 \\ \text{è} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 1 & 0 \\ \text{è} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} \text{æ} & 2 & 0 \\ \text{ç} & 2 & 1 \\ \text{è} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 2 \\ \text{ç} & -2 & -1 \\ \text{è} & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{д) } \begin{pmatrix} \text{æ} & -4 & 6 \\ \text{ç} & 2 & -5 \\ \text{è} & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 2 & -2 \\ \text{è} & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{е) } \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 0 & 2 \\ \text{è} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 1 & 0 \\ \text{è} & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Задача 2. Выполнить действия:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{pmatrix} \text{æ} & 0 & 2 \\ \text{ç} & 1 & 3 \\ \text{è} & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 2 \\ \text{ç} & -2 & -1 \\ \text{è} & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \text{æ} & -4 & 6 \\ \text{ç} & 2 & -5 \\ \text{è} & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 2 & -2 \\ \text{è} & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 0 & 2 \\ \text{è} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 1 & 0 \\ \text{è} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{г) } \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 0 & 2 \\ \text{è} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 1 & 0 \\ \text{è} & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Задача 3. Вычислить:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{pmatrix} \text{æ} & 2 & 2 \\ \text{ç} & 1 & -2 \\ \text{è} & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 0 & 2 \\ \text{è} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Задача 4. Вычислить значение многочлена $f(x)$ от матрицы A :

$$f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 1 \\ \text{ç} & 1 & 2 \\ \text{è} & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 5. Решить систему матричных уравнений:

$$2X - Y = \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 \\ \text{ç} & -1 \\ \text{è} & 0 \end{pmatrix}, \quad -4X + 2Y = \begin{pmatrix} \text{æ} & -2 \\ \text{ç} & 0 \\ \text{è} & 0 \end{pmatrix}$$

3. Домашнее задание:

Задача 1. Перемножить матрицы:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{pmatrix} \text{æ} & 5 & 3 \\ \text{ç} & -3 & 1 \\ \text{è} & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{æ} & -3 & 5 \\ \text{ç} & -1 & 4 \\ \text{è} & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \text{æ} & -1 & 3 \\ \text{ç} & -1 & 1 \\ \text{è} & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{æ} & 5 & 2 \\ \text{ç} & 3 & -1 \\ \text{è} & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 2 & 0 \\ \text{è} & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 3 & 0 \\ \text{è} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{г) } \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 2 & 0 \\ \text{è} & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 3 & 0 \\ \text{è} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{д) } \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 2 & 0 \\ \text{è} & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 3 & 0 \\ \text{è} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{е) } \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 2 & 0 \\ \text{è} & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{æ} & 1 & 0 \\ \text{ç} & 3 & 0 \\ \text{è} & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Задача 2. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Задача 3. Вычислить:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{б) } & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Задача 4. Вычислить значение многочлена $f(x)$ от матрицы A :

$$f(x) = x^3 - 2x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 5. Решить систему матричных уравнений:

$$X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>

Практическое занятие № 7.

Определение и свойства определителя квадратной матрицы n-го порядка.

Цель занятия: применение определения и свойств определителя квадратной матрицы n-го порядка для его вычисления.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенции ОПК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

1. Теоретические вопросы к практическому занятию:

- Перестановки конечного множества.
- Чётность перестановки.
- Подстановки.
- Чётность подстановки.
- Определение определителя квадратной матрицы n-го порядка.
- Вычисление определителей 2-го порядка.
- Вычисление определителей 3-го порядка.
- Преобразования определителя квадратной матрицы n-го порядка, не изменяющие его.
- Равноправность строк и столбцов определителя.
- Преобразования определителя квадратной матрицы n-го порядка, обращающие его в 0.
- Самый общий случай равенства нулю определителя.
- Преобразования определителя квадратной матрицы n-го порядка, подвергаящие его легко отслеживаемым изменениям.

2. Практические задания, решаемые в аудитории:

№ 1. Определить число инверсий в перестановках (за исходное расположение всегда, если нет особых указаний, принимается расположение $1, 2, 3, \dots$ в возрастающем порядке):

- а) $2, 3, 5, 4, 1$.
- б) $1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8$
- в) $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, 2, 4, 6, 8, \dots, 2n$.

№ 2. Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

- а) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$; б) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$; в) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$.

№ 3. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

№ 4. Найти члены определителя 4-го порядка, содержащие элемент a_{32} и входящие в определитель со знаком плюс.

№ 6. Вычислить определители 2-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$.

№ 7. Вычислить определители 3-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$.

Задача 8. Вычислить определители, используя свойства и определение:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

3. Домашнее задание :

№ 1. Определить число инверсий в перестановках (за исходное расположение всегда, если нет особых указаний, принимается расположение $1, 2, 3, \dots$ в возрастающем порядке):

- а) 6, 3, 1, 2, 5, 4;
 б) 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2;
 в) $2, 4, 6, \dots, 2n, 1, 3, 5, \dots, 2n-1$.

№ 2. Выяснить, какие из следующих произведений входят в развёрнутое выражение определителей соответствующих порядков и с какими знаками:

- а) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$; б) $a_{31}a_{13}a_{52}a_{45}a_{24}$; в) $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$

№ 3. Выбрать значения i, j, k так, чтобы произведение $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$

входило в развёрнутое выражение шестого порядка со знаком минус.

№ 4. Пользуясь определением, вычислить следующие определители:

а) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

№ 5. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} ab & ac \\ bd & cd \end{vmatrix}$.

№ 6. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Задача 7. Вычислить определители, используя свойства и определение.:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix} \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{в) } \begin{vmatrix} -5 & -7 & -2 & 2 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 6 & -1 & 15 & -5 \\ 5 & -4 & 10 & 1 & 14 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>

Практическое занятие №8.

Миноры и алгебраические дополнения. Вычисление определителя n-го порядка.

Цель занятия: вычисление определителя n-го порядка с помощью разложения по элементам строки или столбца.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенции ОПК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

1. Теоретические вопросы к практическому занятию:

- Миноры.
- Алгебраическое дополнение элемента определителя.
- Теорема о произведении $a_{ij}A_{ij}$.
- Разложение определителя по элементам строки или столбца.
- Вычисление определителя n-го порядка.

2. Практические задания, решаемые в аудитории:

Задача 1. Разлагая по третьей строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Задача 2. Вычислить определители:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}, & \text{б)} \begin{vmatrix} -5 & -7 & -2 & 2 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 6 & -1 & 15 & -5 \\ 5 & -4 & 10 & 1 & 14 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}, & \text{в)} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{vmatrix} \\ \\ \text{г)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & -3 & -7 \\ -3 & 4 & 2 & 9 \end{vmatrix}, & \text{д)} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & -3 & -7 \\ -3 & 4 & 2 & 9 \end{vmatrix}, & \text{е)} \begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}. \end{array}$$

3. Домашнее задание :

Задача 1. Разлагая по второму столбцу, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Задача 2. Вычислить определители:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}, & \text{б)} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}, & \text{в)} \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}, \end{array}$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{д)} \begin{vmatrix} 14 & 13 & 3 & -13 \\ -7 & -4 & 2 & 10 \\ 21 & 23 & 0 & -23 \\ 7 & 12 & -2 & -6 \end{vmatrix}, \quad \text{е)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & -5 \\ 1 & 6 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>

Практическое занятие №9.

Обратная матрица и её вычисление.

Цель занятия: вычисление обратной матрицы по формуле для вычисления обратной матрицы.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенции ОПК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

1. Теоретические вопросы к практическому занятию:

- Обратная матрица.

- Единственность обратной матрицы.

- Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
- Формула для вычисления обратной матрицы.
- Условия существования обратной матрицы.
- Невырожденные матрицы.

2. Практические задания, решаемые в аудитории:

Задача 1. Найти с помощью присоединенной матрицы обратную к матрице:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{б)} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} & \text{в)} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} & \text{г)} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} & \text{д)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Задача 2. Решить матричные уравнения:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Домашнее задание:

Задача 1. Найти с помощью присоединенной матрицы обратную к матрице:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{б)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{в)} \begin{pmatrix} -4 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} & \text{г)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Задача 2. Решить матричные уравнения:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} & \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{в)} X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{г)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

Практическое занятие №10.

Ранг матрицы и его вычисление.

Цель занятия: приведение матриц к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований; вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенции ОПК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности .

1.Теоретические вопросы к практическому занятию:

- Ранг матрицы.
- Ранг ступенчатой матрицы
- Элементарные преобразования матриц.
- Эквивалентные матрицы.
- Приведение матрицы к ступенчатому виду. .
- Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

2. Практические задания, решаемые в аудитории:

1. Привести матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$a) \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$б) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$в) \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 & -1 & 6 \\ -5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$г) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & 9 & 8 & -7 & 3 \\ -12 & -5 & -8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Найти ранг следующих матриц с помощью элементарных преобразований

$$a) \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \\ 7 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$б) \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$$

$$в) \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$$

3. Найти значения λ , при которых матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 \\ 1 & 7 & 17 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

имеет наименьший

ранг. Чему равен ранг при найденных λ и чему он равен при других значениях λ ?

3. Домашнее задание :

1. Привести матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$б) \begin{pmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$в) \begin{pmatrix} 7 & 32 & 6 & 5 & 3 \\ 32 & 14 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$г) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Найти ранг следующих матриц с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{array}{l}
 \text{а) } \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 \\ 4 & 3 & -8 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddots \\ \ddots \\ \ddots \\ \ddots \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 47 & -67 & 32 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddots \\ \ddots \\ \ddots \\ \ddots \\ \ddots \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddots \\ \ddots \\ \ddots \\ \ddots \\ \ddots \end{pmatrix} \\
 \text{в) } \begin{pmatrix} 7 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddots \\ \ddots \\ \ddots \\ \ddots \\ \ddots \end{pmatrix}
 \end{array}$$

3. Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}$ при различных значениях l ?

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.

Практическое занятие №11.

Арифметические n-мерные векторы.

Цель занятия: действия над арифметическими n-мерными векторами, линейная зависимость системы арифметических n – мерных векторов, нахождение базиса и ранга системы арифметических n – мерных векторов.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенции ОПК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности .

1. Теоретические вопросы к практическому занятию

- Арифметические n-мерные векторы .
- Действия над арифметическими n-мерными векторами.
- Линейная зависимость системы арифметических n – мерных векторов.
- Базис и ранг системы арифметических n – мерных векторов.

2. Практические задания, решаемые в аудитории:

1. Найти вектор x из уравнения:

$$4a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4x = 0, \text{ где } a_1 = (5, -8, -1, 2), a_2 = (2, -1, 4, -3), a_3 = (-3, 2, -5, 4).$$

2. Пусть задана линейно независимая система векторов $a_1, \dots, a_k$. Выяснить, является ли линейно зависимой система векторов

$$b_1 = 3a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4, b_2 = 2a_1 + 5a_2 + 3a_3 + 2a_4, b_3 = 3a_1 + 4a_2 + 2a_3 + 3a_4.$$

3. Найти все базисы системы векторов:

$$a_1 = (1, 2, 0, 0), a_2 = (1, 2, 3, 4), a_3 = (3, 6, 0, 0).$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов

$$a_1 = (5, 2, -3, 1), a_2 = (4, 1, -2, 3), a_3 = (1, 1, -1, -2), a_4 = (3, 4, -1, 2), a_5 = (7, -6, -7, 0) \text{ и выразить через этот базис остальные векторы системы.}$$

3. Домашнее задание:

1). 1. Найти вектор x из уравнения:

$$3(a_1 - x) + 2(a_2 + x) = 5(a_3 + x), \text{ где } a_1 = (2, 5, 1, 3), a_2 = (10, 1, 5, 10), a_3 = (4, 1, -1, 1).$$

2. Пусть задана линейно независимая система векторов $a_1, \dots, a_k$. Выяснить, является ли линейно зависимой система векторов

$$b_1 = 3a_1 + 4a_2 - 5a_3 - 2a_4 + 4a_5, \quad b_2 = 8a_1 + 7a_2 - 2a_3 + 5a_4 - 10a_5, \quad b_3 = 2a_1 - a_2 + 8a_3 - a_4 + 2a_5.$$

3. Найти все базисы системы векторов:

$$a_1 = (4, -1, 3, -2), \quad a_2 = (8, -2, 6, -4), \quad a_3 = (3, -1, 4, -2), \quad a_4 = (6, -2, 8, -4).$$

4. Найдите какой-нибудь базис системы векторов и выразить через этот базис остальные векторы системы:

а) $a_1 = (2, -1, 3, 5), \quad a_2 = (4, -3, 1, 3), \quad a_3 = (3, -2, 3, 4), \quad a_4 = (4, -1, -15, 17);$

б) $a_1 = (2, 3, -4, -1), \quad a_2 = (1, -2, 1, 3), \quad a_3 = (5, -3, -1, 8), \quad a_4 = (3, 8, -9, -5);$

в) $a_1 = (2, 2, 7, -1), \quad a_2 = (3, -1, 2, 4), \quad a_3 = (1, 1, 3, 1).$

2). Подготовьтесь к собеседованию по темам «Основные алгебраические структуры» и «Кольцо матриц над кольцом. Матрицы над полем» по следующим вопросам :

Тема 1. Основные алгебраические структуры

1. Алгебраическая операция (определение, примеры).
2. Основные свойства бинарных алгебраических операций .
3. Понятие алгебры как множества с алгебраическими операциями. Примеры алгебр.
4. Понятие группы (определение, примеры). Подгруппа. Основные свойства групп.
5. Понятие кольца (определение, примеры). Основные свойства колец.
6. Обратимые элементы кольца с единицей. Мультипликативная группа кольца.
7. Понятие поля. Поле рациональных и поле действительных чисел.
8. Поле комплексных чисел (построение).
9. Алгебраическая форма комплексного числа и действия над комплексными числами в алгебраической форме.
10. Геометрическое представление комплексных чисел и действий над ними.
11. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.
12. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
13. Извлечение корней n-степени из комплексного числа.
14. Группа корней n-степени из единицы.

Тема 2. Кольцо матриц над кольцом. Матрицы над полем.

1. Матрицы однотипные, равные, квадратные. Нулевая матрица. Сложение матриц и его свойства.
2. Аддитивная группа однотипных действительных матриц.
3. Умножение матрицы на число. Произведение матриц. Свойства этих операций.
4. Кольцо квадратных действительных матриц n-го порядка.
5. Перестановки. Четность перестановки.
6. Подстановки. Четность подстановки.

7. Определитель квадратной матрицы n -го порядка. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядка.
8. Свойства определителей квадратной матрицы n -го порядка.
9. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Теорема о произведении $a_{ij} A_{ij}$.
10. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Вычисление определителя n -го порядка.
11. Обратная матрица. Единственность обратной матрицы.
12. Формула для вычисления обратной матрицы. Условия существования обратной матрицы.
13. Группа квадратных невырожденных матриц n -го порядка.
14. Ранг матрицы. Ранг ступенчатой матрицы
15. Элементарные преобразования матриц. Эквивалентные матрицы.
16. Приведение матрицы к ступенчатому виду. .
17. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
18. Арифметические n -мерные векторы .
19. Действия над арифметическими n -мерными векторами.
20. Линейная зависимость системы арифметических n – мерных векторов.
21. Базис и ранг системы арифметических n – мерных векторов.

3). Подготовьтесь к собеседованию по выполненным домашним заданиям по темам «Основные алгебраические структуры» и «Кольцо матриц над кольцом. Матрицы над полем»

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. – Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>

Практическое занятие № 12.

Итоговое занятие по темам «Основные алгебраические структуры» и «Кольцо матриц над кольцом. Матрицы над полем».

Цель занятия: проверка знаний, умений и навыков по темам «Основные алгебраические структуры» и «Кольцо матриц над кольцом. Матрицы над полем»

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов проверяется уровень формирования компетенции ОПК-1; знаний, умений и навыков по темам «Основные алгебраические структуры» и «Кольцо матриц над кольцом. Матрицы над полем», которые станут основой их профессиональной деятельности.

На занятии студенты проходят:

1. Собеседование по темам «Основные алгебраические структуры» и «Кольцо матриц над кольцом. Матрицы над полем» по теоретическим вопросам.
2. Собеседование по выполненным домашним заданиям по темам «Основные алгебраические структуры» и «Кольцо матриц над кольцом. Матрицы над полем»

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

Тема 3. Системы линейных уравнений над полем. Системы линейных неравенств.

Практическое занятие № 13.

Основные понятия теории решения систем линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений в матричной форме.

Цель занятия: решение систем линейных уравнений в матричной форме.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенция ОПК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

1. Теоретические вопросы к практическому занятию:

- Основные понятия теории решения систем линейных уравнений
- Теорема Кронекера-Капелли.
- Критерий определённости системы линейных уравнений.
- Запись систем линейных уравнений в матричной форме.
- Решение систем линейных уравнений в матричной форме.
- Условия, при которых можно решить систему линейных уравнений в матричной форме.

2. Практические задания, решаемые в аудитории:

Решить системы линейных уравнений в матричной форме:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 2x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0. \end{cases} & \text{в) } \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{Г)} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Д)} \begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 6 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \end{array}$$

3. Домашнее задание:

Решить системы линейных уравнений в матричной форме:

$$\text{а)} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0, \\ 9x - u + 4z - t - 13 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0, \\ 3x - 9y + 2t - 11 = 0. \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1, \\ x + 3y - 6z + 2t = 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8, \\ 2x - y + 2z = 4. \end{cases}$$

$$\text{д)} \begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 5, \\ 3x - 7y + 3z - t = -1, \\ 5x - 9y + 6z + 4t = 7, \\ 4x - 6y + 3z + t = 8. \end{cases}$$

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>

Практическое занятие № 14.

Теорема Крамера о системе n линейных уравнений с n неизвестными.

Цель занятия: применение теоремы Крамера для решения определённых систем n линейных уравнений с n неизвестными.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенция ОПК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

1. Теоретические вопросы к практическому занятию:

- Теорема Крамера о системах n линейных уравнений с n неизвестными.
- Условия, при которых применяется теорема Крамера.

2. Практические задания, решаемые в аудитории:

Решить систему уравнений по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0. \end{cases}$	в) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$
г) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$	д) $\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 6 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$	

3. Домашнее задание:

Решить систему уравнений по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$	б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$	
в) $\begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0, \\ 9x - u + 4z - t - 13 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0, \\ 3x - 9y + 2t - 11 = 0. \end{cases}$	г) $\begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1, \\ x + 3y - 6z + 2t = 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8, \\ 2x - y + 2z = 4. \end{cases}$	д) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 5, \\ 3x - 7y + 3z - t = -1, \\ 5x - 9y + 6z + 4t = 7, \\ 4x - 6y + 3z + t = 8. \end{cases}$

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>

Практическое занятие № 15.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель занятия: решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенция ОПК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

1. Теоретические вопросы к практическому занятию:

- Элементарные преобразования систем линейных уравнений.
- Равносильные системы линейных уравнений.
- Метод Гаусса.

2. Практические задания, решаемые в аудитории:

Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 + -4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Домашнее задание :

Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3, \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>

Практическое занятие № 16.

Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений.

Цель занятия: нахождение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенция ОПК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

1. Теоретические вопросы к практическому занятию

- Ненулевые решения однородной системы линейных уравнений.
- Свойства решений однородной системы линейных уравнений.
- Базис множества решений однородной системы линейных уравнений.
- Нахождение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.
- Выражение общего решения системы однородных линейных уравнений через фундаментальную систему решений.

2. Практические задания, решаемые в аудитории:

Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений и выразить общее решение системы однородных линейных уравнений через фундаментальную систему решений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

3. Домашнее задание :

Найти общее решение и фундаментальную систему решений системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 - x_6 = 0; \end{cases}$$

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>

Практическое занятие №17.

Неоднородные системы линейных уравнений.

Цель занятия: нахождение общего решения неоднородной системы линейных уравнений с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенция ОПК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

1. Теоретические вопросы к практическому занятию

- Ассоциированные системы линейных уравнений.
- Свойства решений неоднородной системы линейных уравнений.
- Нахождение общего решения неоднородной системы линейных уравнений с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

2. Практические задания, решаемые в аудитории:

Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы :

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18. \end{cases}$$

3. Домашнее задание :

1). Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 + -4x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

2). Подготовьтесь к собеседованию по теме « Системы линейных уравнений над полем. Системы линейных неравенств ».

по следующим вопросам:

Тема 3. Системы линейных уравнений над полем. Системы линейных неравенств.

1. Основные понятия теории решения систем линейных уравнений
2. Теорема Кронекера-Капелли.
3. Критерий определённости системы линейных уравнений.
4. Запись и решение систем линейных уравнений в матричной форме.
5. Условия, при которых можно решить систему линейных уравнений в матричной форме.
6. Теорема Крамера о системах n линейных уравнений с n неизвестными.
7. Условия, при которых применяется теорема Крамера.
8. Элементарные преобразования систем линейных уравнений.
9. Теорема о равносильных системах линейных уравнений.
10. Метод Гаусса.
11. Свойства решений однородной системы линейных уравнений.
12. Базис множества решений однородной системы линейных уравнений.
13. Нахождение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.
14. Выражение общего решения системы однородных линейных уравнений через фундаментальную систему решений.
15. Ассоциированные системы линейных уравнений.
16. Свойства решений неоднородной системы линейных уравнений.
17. Нахождение общего решения неоднородной системы линейных уравнений с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.
18. Основные понятия теории решения систем линейных неравенств.
19. Неотрицательные решения совместной системы линейных уравнений над полем действительных чисел.
20. Следствие из системы линейных неравенств.
21. Теорема Минковского
22. Критерий совместности системы линейных неравенств.

3) Подготовьтесь к собеседованию по выполненным домашним заданиям по теме « Системы линейных уравнений над полем. Системы линейных неравенств » .

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. – Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра.- 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>

Практическое занятие №18.

Итоговое занятие по теме «Системы линейных уравнений над полем. Системы линейных неравенств » .

Цель занятия: Проверка теоретических знаний и практических умений и навыков по теме « Системы линейных уравнений над полем. Системы линейных неравенств » .

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов проверяется уровень формирования компетенции ОПК-1; знаний, умений и навыков по теме « Системы линейных уравнений над полем. Системы линейных неравенств », которые станут основой их профессиональной деятельности.

На занятии студенты проходят:

1.Собеседование по теме « Системы линейных уравнений над полем. Системы линейных неравенств » по теоретическим вопросам.

2.Собеседование по выполненным домашним заданиям по теме « Системы линейных уравнений над полем. Системы линейных неравенств ».

Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по организации самостоятельной работы студентов
по дисциплине «Алгебра».

Направление подготовки 09.03.02 - Информационные системы и технологии.
Профиль подготовки - Прикладное программирование в интеллектуальных информационных системах.
Квалификация выпускника - бакалавр.
Очная форма обучения.
Учебный план 2025 г.

Ставрополь
2025

Оглавление.

Введение

1. План-график выполнения самостоятельной работы.
2. Методические рекомендации по изучению теоретического материала, подготовке к практическим занятиям.
3. Вопросы для собеседования.
4. Методические рекомендации по подготовке к экзамену.
5. Вопросы к экзамену.
6. Задачи для подготовки к экзамену.
7. Рекомендуемая литература.

Введение.

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студента).

Самостоятельная работа студента является важным видом учебной деятельности студента. Федеральным государственным образовательным стандартом предусматривается значительный объем времени из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу. В связи с этим, обучение включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому самостоятельная работа должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования – подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности.

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом.

Самостоятельная работа студента предполагает, прежде всего, его практическую деятельность, поскольку именно этот вид учебной работы в первую очередь готовит к самостоятельному выполнению профессиональных задач. Конечной целью самостоятельной работы является организация самостоятельной познавательной деятельности, формирование умения самостоятельно анализировать информацию, выделять главное и второстепенное.

Основными формами самостоятельной работы студентов по дисциплине «Алгебра» являются:

- подготовка к лекциям;
- подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к экзамену.

В процессе изучения дисциплины у обучающихся формируется следующая компетенция (в соответствии с образовательным стандартом):

ОПК-1- Способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности.

1. План- график выполнения самостоятельной работы.

Вид деятельности студентов	Итоговый продукт самостоятельной работы	Средства и технологии оценки	Время сдачи
Подготовка к лекциям по теме «Основные алгебраические структуры»	Конспект	Собеседование.	Практическое занятие № 12
Подготовка к практическим занятиям по теме «Основные алгебраические структуры»	Выполнение письменных заданий для самостоятельной работы дома.	Собеседование.	Практическое занятие № 12
Подготовка к лекциям по теме «Матрицы над кольцом. Матрицы над полем»	Конспект	Собеседование.	Практическое занятие № 12.
Подготовка к практическим занятиям по теме «Матрицы над кольцом. Матрицы над полем»	Выполнение письменных заданий для самостоятельной работы дома.	Собеседование.	Практическое занятие № 12
Подготовка к лекциям по теме «Системы линейных уравнений над полем. Системы линейных неравенств».	Конспект	Собеседование.	Практическое занятие № 18
Подготовка к практическим занятиям по теме «Системы линейных уравнений над полем. Системы линейных неравенств».	Выполнение письменных заданий для самостоятельной работы дома.	Собеседование.	Практическое занятие № 18
Подготовка к экзамену.	Ответ на экзамене.	Оценка на экзамене	Экзамен

2. Методические рекомендации по изучению теоретического материала, подготовке к практическим занятиям.

Для подготовки к текущему практическому занятию

Дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения и теоремы.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.

4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной проблеме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии

6. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий и в рабочей тетради решите практические задания из заданий, решаемых в аудитории.

Дома

7. Закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания из заданий для самостоятельной работы дома.

Для подготовки к итоговому практическому занятию по теме

Дома:

1. Подготовьтесь к собеседованию по теме по указанным теоретическим вопросам базового и повышенного уровня.
2. Подготовьтесь к собеседованию по выполненным домашним заданиям по теме.

3. Вопросы для собеседований.

Тема 1. Основные алгебраические структуры

1. Алгебраическая операция (определение, примеры).
2. Основные свойства бинарных алгебраических операций.
3. Понятие алгебры как множества с алгебраическими операциями. Примеры алгебр.
4. Понятие группы (определение, примеры). Подгруппа. Основные свойства групп.
5. Понятие кольца (определение, примеры). Основные свойства колец.
6. Обратимые элементы кольца с единицей. Мультипликативная группа кольца.
7. Понятие поля. Поле рациональных и поле действительных чисел.
8. Поле комплексных чисел (построение).
9. Алгебраическая форма комплексного числа и действия над комплексными числами в алгебраической форме.
10. Геометрическое представление комплексных чисел и действий над ними.
11. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.
12. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
13. Извлечение корней n -степени из комплексного числа.
14. Группа корней n -степени из единицы.

Тема 2. Кольцо матриц над кольцом. Матрицы над полем.

1. Матрицы однотипные, равные, квадратные. Нулевая матрица. Сложение матриц и его свойства.
2. Аддитивная группа однотипных действительных матриц.
3. Умножение матрицы на число. Произведение матриц. Свойства этих операций.
4. Кольцо квадратных действительных матриц n -го порядка.
5. Перестановки. Четность перестановки.
6. Подстановки. Четность подстановки.

7. Определитель квадратной матрицы n -го порядка. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядка.
8. Свойства определителей квадратной матрицы n -го порядка.
9. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Теорема о произведении a_{ij} A_{ij} .
10. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Вычисление определителя n -го порядка.
11. Обратная матрица. Единственность обратной матрицы.
12. Формула для вычисления обратной матрицы. Условия существования обратной матрицы.
13. Группа квадратных невырожденных матриц n -го порядка.
14. Ранг матрицы. Ранг ступенчатой матрицы
15. Элементарные преобразования матриц. Эквивалентные матрицы.
16. Приведение матрицы к ступенчатому виду.
17. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
18. Арифметические n -мерные векторы.
19. Действия над арифметическими n -мерными векторами.
20. Линейная зависимость системы арифметических n -мерных векторов.
21. Базис и ранг системы арифметических n -мерных векторов.

Тема 3. Системы линейных уравнений над полем. Системы линейных неравенств.

1. Основные понятия теории решения систем линейных уравнений
2. Теорема Кронекера-Капелли.
3. Критерий определённости системы линейных уравнений.
4. Запись и решение систем линейных уравнений в матричной форме.
5. Условия, при которых можно решить систему линейных уравнений в матричной форме.
6. Теорема Крамера о системах n линейных уравнений с n неизвестными.
7. Условия, при которых применяется теорема Крамера.
8. Элементарные преобразования систем линейных уравнений.
9. Теорема о равносильных системах линейных уравнений.
10. Метод Гаусса.
11. Свойства решений однородной системы линейных уравнений.
12. Базис множества решений однородной системы линейных уравнений.
13. Нахождение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.
14. Выражение общего решения системы однородных линейных уравнений через фундаментальную систему решений.
15. Ассоциированные системы линейных уравнений.
16. Свойства решений неоднородной системы линейных уравнений.
17. Нахождение общего решения неоднородной системы линейных уравнений с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.
18. Основные понятия теории решения систем линейных неравенств.
19. Неотрицательные решения совместной системы линейных уравнений над полем действительных чисел.
20. Следствие из системы линейных неравенств.
21. Теорема Минковского
22. Критерий совместности системы линейных неравенств.

4. Методические рекомендации по подготовке к экзамену.

Проработайте теоретический материал по вопросам к экзамену базового и повышенного уровня.

При этом особое внимание обратите на

- точность формулировок определений и теорем;
- область применения методов и правил;
- порядок выполнения алгоритмов;
- математическую символику, используемую в темах, выносимых на экзамен.

Обязательно выделите время на повторение методов решения типовых заданий по материалу, выносимому на экзамен. При этом используйте задачи, из предложенных для подготовки к экзамену.

5. Вопросы к экзамену.

1. Алгебраическая операция (определение, примеры). Основные свойства бинарных алгебраических операций.
2. Понятие алгебры как множества с алгебраическими операциями. Примеры алгебр.
3. Понятие группы (определение, примеры). Полугруппа. Основные свойства групп.
4. Понятие кольца (определение, примеры). Основные свойства колец. Обратимые элементы кольца с единицей. Мультипликативная группа кольца.
5. Понятие поля. Поле рациональных и поле действительных чисел.
6. Поле комплексных чисел (построение).
7. Алгебраическая форма комплексного числа и действия над комплексными числами в алгебраической форме.
8. Геометрическое представление комплексных чисел и действий над ними.
9. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
10. Извлечение корней n -степени из комплексного числа. Группа корней n -степени из единицы.
11. Матрицы однотипные, равные, квадратные. Нулевая матрица. Сложение матриц и его свойства. Аддитивная группа однотипных действительных матриц.
12. Умножение матрицы на число. Произведение матриц. Свойства этих операций. Кольцо квадратных действительных матриц n -го порядка.
13. Определитель квадратной матрицы n -го порядка. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядка.
14. Свойства определителей квадратной матрицы n -го порядка.
15. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Теорема о произведении $a_{ij}A_{ij}$. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Вычисление определителя n -го порядка.
16. Обратная матрица. Единственность обратной матрицы. Формула для вычисления обратной матрицы. Условия существования обратной матрицы. Группа квадратных невырожденных матриц n -го порядка.
17. Элементарные преобразования матриц. Эквивалентные матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому виду.

18. Ранг матрицы. Ранг ступенчатой матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
19. Арифметические n -мерные векторы. Действия над арифметическими n -мерными векторами.
20. Линейная зависимость системы арифметических n -мерных векторов. Базис и ранг системы арифметических n -мерных векторов.
21. Основные понятия теории решения систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Критерий определённости системы линейных уравнений.
22. Запись и решение систем линейных уравнений в матричной форме. Условия, при которых можно решить систему линейных уравнений в матричной форме.
23. Теорема Крамера о системах n линейных уравнений с n неизвестными. Условия, при которых применяется теорема Крамера.
24. Элементарные преобразования систем линейных уравнений. Теорема о равносильных системах линейных уравнений. Метод Гаусса.
25. Свойства решений однородной системы линейных уравнений. Базис множества решений однородной системы линейных уравнений.
26. Нахождение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений. Выражение общего решения системы однородных линейных уравнений через фундаментальную систему решений.
27. Ассоциированные системы линейных уравнений. Свойства решений неоднородной системы линейных уравнений.
28. Нахождение общего решения неоднородной системы линейных уравнений с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.
29. Неотрицательные решения совместной системы линейных уравнений над полем действительных чисел.
30. Основные понятия теории решения систем линейных неравенств. Следствие из системы линейных неравенств.
31. Теорема Минковского. Критерий совместности системы линейных неравенств.

7. Задачи для подготовки к экзамену.

1. Является ли бинарной алгебраической операцией умножение вектора на скаляр?
2. Является ли бинарной алгебраической операцией нахождение среднего арифметического двух целых чисел?
3. Является ли бинарной алгебраической операцией нахождение среднего арифметического двух рациональных чисел?
4. Образует ли группу по умножению множество всех степеней числа 2 с целыми показателями?
5. Образует ли группу по умножению множество чисел вида $b + c\sqrt{3}$, где b и c – целые числа?
6. Определить является ли кольцом по отношению к обычным операциям сложения и умножения множество чисел вида $1, \pm 3, \pm 3^2, \dots, \pm 3^n, \dots$
7. Определить является ли кольцом по отношению к обычным операциям сложения и умножения множество чисел вида $0, 1^2, 2^2, \dots, n^2, \dots$
8. Является ли полем относительно сложения и умножения множество чисел вида $b + c\sqrt{3}$, где b и c – целые числа?

9. Является ли полем относительно сложения и умножения множество чисел вида $b + c\sqrt{3}$, где b и c – рациональные числа?

10. Вычислить $\frac{(3-i)^2}{1+i} + 3 + 5i$.

11. Решить уравнение $|z| + z = 8 + 4i$.

12. Вычислить $(\sqrt{3} + i)^{30}$.

13. Вычислить $\frac{(-3 - 3i)^{20}}{(4 - 4i\sqrt{3})^{12}}$.

14. Вычислить $\sqrt[6]{-27}$.

15. Вычислить $\sqrt[4]{-\frac{18}{1+i\sqrt{3}}}$.

16. Вычислить произведения AB и BA , если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

17. Перестановочны ли матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$?

18. Перестановочны ли матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -15 & 22 \end{pmatrix}$?

19. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

20. Вычислить $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

21. Вычислить значение многочлена $f(x) = x^3 - 2x + 1$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

22. Подобрать i и k так, чтобы произведение $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ входило в определитель 5-го порядка со знаком плюс.

23. Подобрать i и k так, чтобы произведение $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ входило в определитель 5-го порядка со знаком минус.

24. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

25. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 8 \end{vmatrix}$.

26. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

27. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

28. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

29. С помощью присоединённой матрицы найти обратную к матрице $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

30. Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

31. Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

32. Решить матричное уравнение $X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

33. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$.

34. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

35. Решить матричное уравнение $X \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$.

36. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 7 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

37. Выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $a_1 = [3, -6, 10]$, $a_2 = [2, -5, 8]$, $a_3 = [1, -3, 5]$.

38. Выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $a_1 = [1, 3, 6, 10]$, $a_2 = [1, 1, 1, 1]$, $a_3 = [1, -3, -8, -18]$, $a_4 = [3, 5, 8, 12]$.

39. Найти базис и ранг системы векторов $a_1 = [3, 1, 1, 1]$, $a_2 = [1, 1, 3, 1]$, $a_3 = [1, 3, -2, 3]$, $a_4 = [1, 3, 1, 1]$.

40. Найти базис и ранг системы векторов $a = [3, 1, 1, 1]$, $b = [1, 1, 3, 1]$, $c = [1, 3, 1, 1]$, $d = [-1, 1, 5, 1]$ и выразить через базис остальные векторы системы.

41. Найти базис и ранг системы векторов $a_1 = [1, 3, 6, 10]$, $a_2 = [1, 1, 1, 1]$, $a_3 = [1, -3, -8, -18]$, $a_4 = [3, 5, 8, 12]$ и выразить через базис остальные векторы системы.

42. Сколько решений имеет система уравнений
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0, \\ 5x_1 + 21x_3 + 13x_4 = 3. \end{cases} ?$$

43. Проверить, совместна ли система уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases} ?$$

44. Решить систему матричным способом
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$$

45. Решить систему матричным способом
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$$

46. Решить систему матричным способом
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$$

47. Пользуясь теоремой Крамера, выяснить, имеет ли система уравнений
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0, \\ 5x_1 + 21x_3 + 13x_4 = 3. \end{cases}$$
 единственное решение.

48. Пользуясь теоремой Крамера, выяснить, имеет ли система линейных уравнений
$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$
 единственное решение

49. Решить систему по формулам Крамера
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

50. Решить систему по формулам Крамера
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$$

51. Решить систему по формулам Крамера
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$
52. Решить систему линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_1 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$
53. Решить систему линейных уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$
54. Найти общее решение системы уравнений
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 8. \end{cases}$$
55. Найти фундаментальную систему решений системы
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$
56. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 13x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 16x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$
57. Найти общее решение системы линейных уравнений с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1. \end{cases}$$

8.Рекомендуемая литература

1. Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. - Москва: МЦНМО, 2021. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / А.О. Ремизов, И.Р. Шафаревич. - Москва: Физматлит, 2019. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68387>

2. Дополнительная литература :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. - Москва: МЦНМО, 2020. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2.

Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.П. Чеголин. - Электрон.текстовые данные. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2018. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2.

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68568.html>

5. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва: Физматлит, 2021. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - ISBN 978-5-9221-0481-4.