

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

для студентов направления подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Ставрополь, 2026

Содержание

Глава 1 Введение в численные методы	3
Практическое задание №1	3
Глава 2. Аппроксимация функций	8
Практическое задание №2	8
Практическое задание №3	10
Практическое задание №4	13
Практическое задание №5	15
Глава 3 Численное дифференцирование и интегрирование	20
Практическое задание №6	20
Практическое задание №7	25
Глава 4 Решение уравнений и систем	28
Практическое задание №8	28
Практическое задание №9	30
Практическое задание №10	30
Глава 5 Численное решение дифференциальных уравнений	35
Практическое задание №11	35
Практическое задание №12	37
Практическое задание №13	39
Практическое задание №14	41
Практическое задание №15	43
Список рекомендованной литературы	45
ПРИЛОЖЕНИЕ1.....	47

Глава 1 Введение в численные методы
Практическое задание №1
Введение в элементарную теорию погрешностей

I. Контрольные вопросы и задачи:

1. Дать определение абсолютной погрешности приближенного числа.
2. Дать определение относительной погрешности приближенного числа.
3. Укажите связь абсолютной и относительной погрешностей.
4. Что означает запись: $a = 2.52(\pm 0.01)$?
5. Верна ли запись: $a = 3.47(\pm 0.033)$?
6. Укажите верные знаки в широком смысле приближенного числа, если $\epsilon = 1.345(\pm 0.052)$.
7. Укажите верные знаки в узком смысле приближенного числа, если $\epsilon = 2.3345(\pm 0.0052)$.
8. Найдите абсолютную погрешность суммы чисел a^* и ϵ^* , если $\Delta(a^*) = 0.01$, $\Delta(\epsilon^*) = 0.02$.
9. Найдите абсолютную погрешность произведения чисел a^* и ϵ^* , если $a^* = 3.14$, $\epsilon^* = 2.72$, $\Delta(a^*) = 0.01$, $\Delta(\epsilon^*) = 0.02$.
10. Найдите абсолютную погрешность частного чисел a^* и ϵ^* , если $a^* = 3.14$, $\epsilon^* = 2.72$, $\Delta(a^*) = 0.01$, $\Delta(\epsilon^*) = 0.02$.
11. Найдите относительную погрешность произведения чисел a^* и ϵ^* , если $a^* = 3.14$, $\epsilon^* = 2.72$, $\Delta(a^*) = 0.01$, $\Delta(\epsilon^*) = 0.02$.
12. Найдите относительную погрешность частного чисел a^* и ϵ^* , если $a^* = 3.14$, $\epsilon^* = 2.72$, $\Delta(a^*) = 0.01$, $\Delta(\epsilon^*) = 0.02$.
13. Найдите абсолютную погрешность вычисления значения функции $y = \sin(x)$, если $x^* = 0.547$ (все знаки верные в широком смысле).
14. Найдите абсолютную погрешность вычисления значения функции $z = \sin(xy)$, если $x^* = 0.547$, $y^* = 0.825$ (все знаки верные в широком смысле).

II. Задание:

- 1) Определить, какое равенство точнее.
- 2) Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки:
 - а) в узком смысле;
 - б) в широком смысле.
- Определить абсолютную погрешность результата.
- 3) Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры: а) в узком смысле; б) в широком смысле.

Вариант №1 1) $\sqrt{44} = 6,63$; $\frac{19}{41} = 0.463$, 2) а) 22.553(± 0.016); б) 2,8546; $\delta = 0.3\%$ 3) а) 0,2387; б) 42,884.	Вариант №16 1) $\frac{5}{3} = 1.667$; $\sqrt{38} = 6,16$ 2) а) 3,7542; $\delta = 0,32\%$ б) 0.98351(± 0.00042) 3) а) 62,74; б) 0,389.
Вариант №2 1) $\frac{7}{15} = 0.467$; $\sqrt{30} = 5.48$ 2) а) 17,2834; $\delta = 0.3\%$ б) 6.4257(± 0.0024) 3) а) 3,751; б) 0,537.	Вариант №17 1) $\frac{49}{13} = 3.77$; $\sqrt{14} = 3,74$. 2) а) 83,736; $\delta = 0,085\%$; б) 5.6483(± 0.0017). 3) а) 5,6432; б) 0,00858.
Вариант №3 1) $\sqrt{10.5} = 3.24$; $\frac{4}{17} = 0.235$. 2) а) 34,834; $\delta = 0.1\%$ б) 0,5748(± 0.0034) 3) а) 11,445; б) 2,043	Вариант №18 1) $\frac{13}{7} = 1.857$; $\sqrt{7} = 2,64$ 2) а) 2,8867; $\delta = 0,43\%$ б) 32.7486(± 0.0012) 3) а) 0,0384; б) 63,745.
Вариант №4 1) $\frac{5}{17} = 2.14$; $\sqrt{10} = 3.16$ 2) а) 2.3485(± 0.0042) б) 0,34484; $\delta = 0.4\%$ 3) а) 2,3445; б) 0,745.	Вариант №19 1) $\frac{19}{12} = 1.58$; $\sqrt{12} = 3,46$ 2) а) 4.88445(± 0.00052) б) 0,096835; $\delta = 0,32\%$ 3) а) 12,688; б) 4,636.
Вариант №5 1) $\frac{6}{7} = 0.857$; $\sqrt{4.8} = 2.19$ 2) а) 5.435(± 0.0028) б) 10,8441; $\delta = 0.05\%$ 3) а) 8,345; б) 0,288	Вариант №20 1) $\frac{51}{11} = 4.64$; $\sqrt{7} = 5,91$ 2) а) 38.4258(± 0.0014) б) 0,66385; $\delta = 0,34\%$. 3) а) 6,743; б) 0,543
Вариант №6 1) $\frac{12}{11} = 1.091$; $\sqrt{6,8} = 2,61$ 2) а) 8,24163; $\delta = 0,2\%$ б) 0.2356(± 0.00036) 3) а) 12,45; б) 3,4453.	Вариант №21 1) $\frac{18}{7} = 2.57$; $\sqrt{22} = 4,69$ 2) а) 0.39642(± 0.00022) б) 46,453; $\delta = 0,15\%$ 3) а) 15,644; б) 6,125.
Вариант №7 1) $\frac{2}{21} = 0.095$; $\sqrt{22} = 4,69$ 2) а) 2.4543(± 0.0032); б) 24,5643; $\delta = 0,1\%$ 3) а) 0,374; б) 4,348.	Вариант №22 1) $\frac{17}{9} = 2.11$; $\sqrt{17} = 4,12$. 2) а) 5,8425; $\delta = 0,23\%$; б) 0.66385(± 0.00042). 3) а) 0,3825; б) 24,6.

Вариант №8 1) $\frac{19}{41} = 0.463$; $\sqrt{9,8} = 3,13$. 2) а) 23,574; $\delta = 0,2\%$ б) 8.3445(± 0.0022). 3) а) 20,43; б) 0,576.	Вариант №23 1) а) $\frac{16}{7} = 2.28$; $\sqrt{11} = 3,32$. 2) а) 24,3872; $\delta = 0,34\%$; б) 0.75244(± 0.00013). 3) а) 16,383; б) 5,734.
Вариант №9 1) $\frac{6}{11} = 0.545$; $\sqrt{83} = 9,11$ 2) а) 21,68563; $\delta = 0,3\%$; б) 3.7834(± 0.0041). 3) а) 41,73; б) 0,678.	Вариант №24 1) $\frac{21}{13} = 1.54$; $\sqrt{63} = 7,94$. 2) а) 2.3684(± 0.0017); б) 45,7832; $\delta = 0,18\%$. 3) а) 0,573; б) 3,6761.
Вариант №10 1) $\frac{17}{19} = 0.889$; $\sqrt{52} = 7,21$; 2) а) 13.537(± 0.0026); б) 7,521; $\delta = 0,12\%$. 3) а) 5,634; б) 0,0748	Вариант №25 1) $\frac{12}{7} = 1.71$; $\sqrt{47} = 6,86$; 2) а) 72,354; $\delta = 0,24\%$; б) 0.38725(± 0.00112). 3) а) 18,275; б) 0,00644.
Вариант №11 1) $\frac{21}{29} = 0.723$; $\sqrt{44} = 6,63$ 2) а) 0,3567; $\delta = 0,042\%$ б) 13.6253(± 0.0021). 3) а) 18,357 б) 2,16.	Вариант №26 1) $\frac{6}{7} = 0.857$; $\sqrt{41} = 6,40$ 2) а) 0.36127(± 0.00034); б) 46,7843; $\delta = 0,32\%$. 3) а) 3,425; б) 7,38.
Вариант №12 1) $\frac{50}{19} = 2.63$; $\sqrt{27} = 5,19$ 2) а) 1.784(± 0.0063); б) 0,85637; $\delta = 0,21\%$ 3) а) 0,5746; б) 236,58.	Вариант №27 1) $\frac{23}{9} = 2.56$; $\sqrt{87} = 9,33$ 2) а) 23,7564; $\delta = 0,44\%$; б) 4.57633(± 0.00042). 3) а) 3,75; б) 6,8343.
Вариант №13 1) $\frac{13}{17} = 0.764$; $\sqrt{31} = 5,56$. 2) а) 3.6878(± 0.0013); б) 15,873; $\delta = 0,42\%$. 3) а) 14,8624; б) 8,73	Вариант №28 1) $\frac{27}{31} = 0.872$; $\sqrt{42} = 6,48$ 2) а) 15.8372(± 0.0026) б) 0,088748; $\delta = 0,56\%$. 3) а) 3,643; б) 72,385.
Вариант №14 1) $\frac{7}{22} = 0.318$; $\sqrt{13} = 3,60$. 2) а) 27.1548(± 0.0016) б) 0,3945; $\delta = 0,16\%$ 3) а) 0,3648; б) 21,7	Вариант №29 1) $\frac{7}{3} = 2.33$; $\sqrt{58} = 7,61$; 2) а) 3,87683; $\delta = 0,33\%$ б) 13.5726(± 0.0072). 3) а) 26,3; б) 4,8556.
Вариант №15	Вариант №30

1) $\frac{17}{11} = 1.545; \sqrt{18} = 4,243.$ 2) а) $0.8647(\pm 0.0013)$ б) $24,3618; \delta = 0,22\%$ 3) а) $2,4516; б) 0,863.$	1) $\frac{14}{17} = 0.823; \sqrt{53} = 7,28$ 2) а) $0.66835(\pm 0.00115);$ б) $23,3748; \delta = 0,27\%;$ 3) а) $43,813; б) 0,645.$
--	--

III. Задание:

Вычислить значение выражения. Найти абсолютную и относительную погрешности функции. В результате y^* оставить верные цифры в узком смысле.

IV. Варианты:

- $y = \frac{a^2 b^3}{6\sqrt{c}}; \quad a = 2.32, \quad b = 7.325, \quad c = 12.923.$
- $y = 6a^2 + 2 \cdot \frac{a b^3}{\sqrt{c}}; \quad a = 3.23, \quad b = 9.128, \quad c = 10.72.$
- $y = \frac{h^3 \sqrt{l}}{3a^3}; \quad h = 3.81, \quad l = 11.85, \quad a = 2.728.$
- $y = \frac{\sqrt{r} \cdot s^2}{3t^3}; \quad r = 15.824, \quad s = 2.82, \quad t = 1.374.$
- $y = \frac{\sqrt{t} \cdot s^2}{2h^2}; \quad t = 0.984, \quad s = 2.185, \quad h = 1.37.$
- $y = \frac{2\sqrt{b} \cdot a^3}{c^2}; \quad a = 2.1, \quad b = 8.175, \quad c = 1.1415.$
- $y = \frac{4\sqrt{a} \cdot b^2}{h^3}; \quad a = 3.4, \quad b = 8.171, \quad h = 1.08.$
- $y = \frac{\sqrt{st}}{3h^2}; \quad h = 4.245, \quad s = 1.8, \quad t = 1.91.$
- $y = 3\sqrt{s}a^2 + 2sb^3; \quad a = 8.71, \quad b = 1.93, \quad s = 2.255.$
- $y = \frac{4s\sqrt{s} \cdot b^2}{t^2}; \quad b = 9.25, \quad s = 11.91, \quad t = 2.08.$
- $y = \frac{\sqrt{a} \cdot b^2}{2c^3} + \sqrt{ab}; \quad a = 3.84, \quad b = 9.1, \quad c = 10.1.$
- $y = \frac{h^2 \cdot s^2}{\sqrt{t}} + h \cdot s; \quad h = 0.25, \quad s = 3.725, \quad t = 0.528.$
- $y = \frac{\sqrt{n} \cdot m^2}{\sqrt{m}} + mn; \quad m = 15.34, \quad n = 17.01.$
- $y = \frac{\sqrt{q} \cdot p^2}{2t^2} + \sqrt{ptq}; \quad p = 0.25, \quad t = 1.272, \quad q = 4.82.$

$$15. y = \frac{\sqrt{b} \cdot a^3}{s^2} + \sqrt{as}; \quad a = 13.1, \quad b = 15.42, \quad s = 4.25.$$

$$16. y = \frac{\sqrt{rs}}{2t} + s\sqrt{t}; \quad r = 0.47, \quad s = 2.425, \quad t = 3.72.$$

$$17. y = \frac{\sqrt{abc}}{m}; \quad a = 1.2, \quad b = 3.52, \quad c = 8.4, \quad m = 1.24.$$

$$18. y = 5r^3 + 2 \cdot \frac{r^2 \sqrt{s}}{t^2}; \quad r = 1.32, \quad s = 2.41, \quad t = 3.2.$$

$$19. y = \frac{3h^2 \sqrt{l}}{2a^3}; \quad a = 2.1, \quad h = 1.47, \quad l = 1.41.$$

$$20. y = \frac{s^3 t^2}{2\sqrt{h}}; \quad s = 1.71, \quad t = 1.1, \quad h = 2.44.$$

$$21. y = \frac{3\sqrt{b} \cdot a^3}{c^2}; \quad a = 2.6, \quad b = 1.45, \quad c = 2.7.$$

$$22. y = \frac{4\sqrt{a} \cdot b^2}{h^3}; \quad a = 1.6, \quad b = 1.11, \quad h = 0.28.$$

$$23. y = \frac{\sqrt{r} \cdot s^2}{3h^2}; \quad r = 3.44, \quad s = 2.1, \quad h = 2.3.$$

$$24. y = 3\sqrt{sa^3} + \frac{2s}{b^2}; \quad a = 2.1, \quad s = 4.1, \quad b = 1.41.$$

$$25. y = \frac{3\sqrt{t} \cdot b^3}{r^2}; \quad b = 1.1, \quad t = 4.12, \quad r = 1.2.$$

$$26. y = \frac{a^2 b^2}{2\sqrt{c}}; \quad a = 2.51, \quad b = 8.325, \quad c = 12.723.$$

$$27. y = 6\ln(a^2) + 2 \cdot \frac{a b^2}{\sqrt{c}}; \quad a = 3.23, \quad b = 9.128, \quad c = 10.72.$$

$$28. y = \frac{h^2 \sqrt{l}}{3t^3}; \quad h = 4.81, \quad l = 1.85, \quad t = 2.748.$$

$$29. y = \frac{\ln(r^2) \cdot s^2}{t^3}; \quad r = 15.824, \quad s = 2.82, \quad t = 1.374.$$

$$30. y = \frac{2\sqrt{t} \cdot s^2}{\ln(h^2)}; \quad t = 3.52, \quad s = 1.1, \quad h = 3.1.$$

Глава 2. Аппроксимация функций

Практическое задание №2

Тема: «Интерполирование функций по неравноотстоящим узлам»

I. Контрольные вопросы и задачи.

1. Какой многочлен называется интерполяционным?
2. Что называется узлами интерполяции?
3. Сколько интерполяционных многочленов можно построить для данной функции и данной системы узлов?
4. В чем состоит геометрический смысл интерполяции?
5. Что представляет собой график интерполяционного многочлена при следующих данных:

а) $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$;

б) $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

6. Выпишите формулы погрешности (остаточного члена) интерполяции и оценки погрешности интерполяции.

7. Построить интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона для функции, заданной таблично:

x	1	2	3	5
y	1	5	17	89

Сделать проверку.

8. Функция $f(x)$ задана таблично:

x	0	1	2	6
y	-1	-3	3	1187

Пользуясь интерполяционными многочленами Лагранжа и Ньютона, найти ее значение при $x = 4$.

9. Интерполяционный многочлен Лагранжа задан в виде:

$$P_n(x) = \phi_0(x) \cdot y_0 + \phi_1(x) \cdot y_1 + \dots + \phi_n(x) \cdot y_n,$$

$$\text{где } \phi_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Доказать, что $\phi_0(x) + \phi_1(x) + \dots + \phi_n(x) = 1$.

10. Докажите теорему: Разделенные разности n -го порядка от полинома степени n постоянны.

11. Используя таблицу значений функции $y = e^x$, по формулам интерполяции Лагранжа и Ньютона вычислить $e^{3.62}$ и оценить погрешность результата.

x	3.60	3.65	3.70
y	35.598	38.475	40.447

12. Функция $f(x)$ задана таблицей

x	10	15	17	20
$f(x)$	3	7	11	17

Найти значение X , для которого $f(x)=10$.

I. Задание.

Найти промежуточное значение функции в точке x^* по таблице ее значений, приняв за узлы интерполяции точки $x_i, i=0,1,2,3$, методом интерполяции по Лагранжу и Ньютоу. Оценить погрешность полученного результата.

II. Варианты.

Вариант	$f(x)$	x_0	x_1	x_2	x_3	x^*
1	$\sin x$	0.16	0.18	0.20	0.25	0.187
2	$\sin x$	0.20	0.23	0.25	0.27	0.225
3	$\cos x$	0.15	0.16	0.18	0.20	0.173
4	$\sin x$	0.30	0.32	0.34	0.35	0.337
5	$\cos x$	0.21	0.22	0.24	0.25	0.215
6	$\cos x$	0.31	0.32	0.34	0.35	0.322
7	$\sin x$	0.40	0.41	0.43	0.44	0.421
8	e^x	0.15	0.16	0.18	0.20	0.167
9	e^x	0.20	0.21	0.23	0.24	0.215
10	e^x	0.30	0.31	0.32	0.34	0.315
11	$\sin x$	0.21	0.23	0.24	0.25	0.233
12	$\cos x$	0.16	0.18	0.19	0.22	0.165
13	$\ln x$	0.20	0.22	0.23	0.25	0.223
14	$\ln x$	0.15	0.17	0.18	0.20	0.171
15	$\ln x$	0.30	0.32	0.33	0.35	0.325
16	$\ln x$	1.12	1.13	1.15	1.16	1.135
17	$\sqrt{x}$	0.10	0.11	0.12	0.14	0.105
18	$\sqrt{x}$	0.15	0.16	0.18	0.20	0.154
19	$\sqrt{x}$	0.20	0.21	0.23	0.24	0.214
20	$\ln x$	1.21	1.22	1.24	1.25	1.225
21	$\sin x$	0.12	0.13	0.15	0.16	0.134
22	$\sqrt{x}$	0.22	0.23	0.25	0.26	0.234
23	$\sin x$	0.10	0.30	0.40	0.60	0.116
24	$\ln x$	1.20	1.21	1.23	1.25	1.125
25	$\cos x$	0.15	0.16	0.18	0.20	0.156
26	$\sqrt{x}$	1.10	1.11	1.13	1.15	0.106

Практическое задание №3
Тема: «Интерполирование функций по равноотстоящим узлам»

I. Контрольные вопросы и задачи.

1. Определение конечных разностей различного порядка.
2. Выражение конечных разностей любого порядка через значения функции. Привести примеры.
3. Выпишите интерполяционные формулы Ньютона и их остаточные члены.
4. Выражение производных через конечные разности.
5. Остаточные члены интерполяционных формул Ньютона без использования производных соответствующего порядка.
6. Оценить, с какой точностью можно вычислить по формулам Ньютона $\ln 100.5$ и $\ln 102.6$, если известны значения: $\ln 100$, $\ln 101$, $\ln 102$, $\ln 103$.
7. Доказать, что конечные разности порядка n от многочлена степени n равны постоянной величине.
8. Просуммировать конечные ряды:
 - 1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$; Ответ: $\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$.
 - 2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3$; Ответ: $\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right)$.
 - 3) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$; Ответ: $\left(\frac{n(4n^2-1)}{3} \right)$.
 - 4) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3$. Ответ: $n^2(2n^2-1)$.

II. Задание.

Для функции, заданной таблично, найти ее значения в точках t_1 , t_2 , t_3 .
 Результаты получить с той точностью, которую допускает табличное задание функции.

Функция А

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	0.946083	0.5	1.324684
0.1	1.028685	0.6	1.389181
0.2	1.108047	0.7	1.449592
0.3	1.183958	0.8	1.505817
0.4	1.256227	0.9	1.557775

Точки интерполяции

№	t_1	t_2	t_3	a
1	0.175418	0.715878	0.464331	1.344273
2	0.090566	0.826611	0.395142	1.534355
3	0.157369	0.826216	0.445135	1.273228
4	0.053526	0.866027	0.610308	1.435993
5	0.109658	0.710092	0.468515	1.026087
6	0.094189	0.755627	0.343888	1.058530
7	0.132747	0.755108	0.447232	1.390474
8	0.058421	0.731564	0.429815	1.417970
9	0.063946	0.907395	0.455020	1.373809
10	0.182461	0.717093	0.525286	1.197522
11	0.173762	0.759231	0.482714	1.470054
12	0.129140	0.766507	0.238812	1.183944

Функция В

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	0.962852	0.5	1.337904
0.1	1.044824	0.6	1.401593
0.2	1.123512	0.7	1.461175
0.3	1.198709	0.8	1.516552
0.4	1.270228	0.9	1.567650

Точки интерполяции

№	t_1	t_2	t_3	a
13	0.052914	0.882964	0.391986	1.189116
14	0.147327	0.721404	0.355038	1.564167
15	0.148489	0.822272	0.544808	1.573997
16	0.070926	0.901307	0.213966	1.547732
17	0.124548	0.769617	0.303341	1.504725
18	0.009510	0.944211	0.417157	1.994108
19	0.087996	0.778350	0.546174	1.110465
20	0.051598	0.709740	0.542017	1.404176
21	0.083288	0.887929	0.517459	1.484642
22	0.174607	0.902430	0.240569	1.275640
23	0.172537	0.819656	0.698720	1.331830
24	0.160270	0.851787	0.463563	1.307859

Функция С

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	0.979498	0.5	1.350965
0.1	1.060831	0.6	1.413842
0.2	1.138837	0.7	1.472590
0.3	1.213312	0.8	1.527116

0.4	1.284076	0.9	1.577351
-----	----------	-----	----------

Точки интерполяции

№	t_1	t_2	t_3	a
25	0.047475	0.805753	0.653213	1.423549
26	0.104834	0.865748	0.634411	1.361976
27	0.095092	0.861356	0.490247	1.314712
28	0.133412	0.879781	0.473981	1.472912
29	0.069174	0.793965	0.465591	1.498836
30	0.076449	0.702410	0.552699	1.580131
31	0.086081	0.711768	0.446462	1.479177
32	0.045216	0.721249	0.670968	1.429159
33	0.182628	0.729050	0.433820	1.097459
34	0.155091	0.892695	0.403838	0.981061
35	0.118535	0.884719	0.589080	1.399221
36	0.041623	0.839124	0.294268	1.048028

Функция D

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	0.996021	0.5	1.363865
0.1	1.076705	0.6	1.425925
0.2	1.154020	0.7	1.483835
0.3	1.227768	0.8	1.537508
0.4	1.297768	0.9	1.586879

Точки интерполяции

№	t_1	t_2	t_3	a
37	0.143689	0.915777	0.599657	1.018375
38	0.042666	0.825305	0.584323	1.262410
39	0.165626	0.705625	0.456150	1.445709
40	0.126742	0.748197	0.450881	1.467961
41	0.096649	0.891334	0.692973	1.342491
42	0.064256	0.843814	0.373073	1.362658
43	0.071993	0.742732	0.474374	1.567605
44	0.105362	0.711920	0.524242	1.585812
45	0.159355	0.819366	0.337411	1.427805
46	0.161147	0.900531	0.252948	1.146269
47	0.104874	0.852465	0.470731	1.033643
48	0.175694	0.779153	0.306156	1.551797

Практическое задание №4
Тема: «Интерполирование сплайнами»

I. Контрольные вопросы и задачи.

1. Дайте определение сплайна. Линейный сплайн.
2. Дайте определение кубического сплайна.
3. Виды граничных условий при построении сплайнов.
4. Для таблично заданных функций

a)

x	-1	0	1	2
y	3	2	5	1

b)

x	1	2	4	5
y	3	4	6	5

построить линейный и параболический сплайны.

5. Приведите оценки погрешности интерполяции кубическими сплайнами для функции $f(x)$ и ее производных $f'(x)$ и $f''(x)$.

II. Задание.

Для функции, заданной таблицей, найти ее значение в точках z_1, z_2, z_3 , используя сплайновую интерполяцию с условием $S_3''(a) = S_3''(b) = 0$, $a = x_0$, $b = x_5$.

III. Варианты.

№	$f(x)$	$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$	z_1, z_2, z_3
1	$\sin x$	0.16, 0.18, 0.20, 0.23, 0.25, 0.28	0.165, 0.121, 0.252
2		0.20, 0.23, 0.25, 0.27, 0.28, 0.30	0.201, 0.245, 0.203
3		0.30, 0.32, 0.34, 0.35, 0.37, 0.38	0.315, 0.342, 0.371
4		0.40, 0.41, 0.43, 0.44, 0.46, 0.47	0.407, 0.437, 0.465
5		0.21, 0.23, 0.24, 0.25, 0.27, 0.28	0.215, 0.253, 0.274
6		0.80, 0.83, 0.84, 0.85, 0.87, 0.88	0.806, 0.845, 0.876
7	$\cos x$	0.15, 0.16, 0.18, 0.20, 0.21, 0.22	0.155, 0.181, 0.214
8		0.21, 0.22, 0.24, 0.27, 0.28, 0.29	0.215, 0.246, 0.285
9		0.31, 0.32, 0.35, 0.37, 0.38, 0.40	0.315, 0.354, 0.856
10		0.16, 0.18, 0.19, 0.25, 0.27, 0.29	0.172, 0.195, 0.274
11	e^x	0.00, 0.25, 0.30, 0.40, 0.50, 0.55	0.155, 0.355, 0.530
12		0.20, 0.40, 0.45, 0.60, 0.70, 0.75	0.250, 0.442, 0.730
13		0.30, 0.40, 0.60, 0.65, 0.70, 0.80	0.350, 0.630, 0.740
14		0.70, 0.80, 0.95, 1.00, 1.10, 1.15	0.706, 0.905, 1.134
15		1.00, 1.11, 1.13, 1.23, 1.24, 1.34	1.02, 1.131, 1.128
16		0.23, 0.25, 0.40, 0.50, 0.65, 0.70	0.236, 0.457, 0.658
17	$\sqrt{x}$	0.10, 0.25, 0.45, 0.50, 0.70, 0.85	0.108, 0.456, 0.755
18		0.15, 0.26, 0.28, 0.30, 0.35, 0.45	0.154, 0.281, 0.386
19		0.20, 0.25, 0.35, 0.40, 0.55, 0.60	0.245, 0.355, 0.558
20		1.50, 1.65, 1.70, 1.75, 1.85, 1.90	1.154, 1.736, 1.855

21	$Ln\ x$	1.50, 1.65, 1.70, 1.85, 1.90, 1.95	1.502, 1.762, 1.923
22		1.20, 1.21, 1.23, 1.26, 1.28, 1.30	1.205, 1.232, 1.286
23		0.35, 0.45, 0.50, 0.60, 0.70, 0.85	0.368, 0.555, 0.775
24		0.90, 0.92, 0.95, 1.00, 1.10, 1.12	0.915, 0.955, 1.075
25		0.85, 0.95, 1.00, 1.20, 1.25, 1.27	0.875, 1.185, 1.252

Практическое задание №5
Тема: «Метод наименьших квадратов в случае промежутка
(Интегральный метод)»

I. Контрольные вопросы и задачи.

1. Сформулируйте задачу приближения таблично заданной функции полиномом по методу наименьших квадратов.
2. В чем состоит отличие построения интерполяционного многочлена от построения многочлена по методу наименьших квадратов?
3. Приведите условие, при котором интерполяционный многочлен и многочлен, построенный по методу наименьших квадратов, совпадают.
4. Опишите способы выбора аппроксимирующей функции в методе наименьших квадратов.
5. Как от приближающей функции $F(a, m, x) = a \cdot e^{(m \cdot x)}$, $a > 0$ перейти к приближающей функции вида $f(b_0, b_1, x) = b_0 + b_1 \cdot x$?

II. Задание.

Задание 1.

- 1) Аппроксимировать таблично заданную функцию многочленом второй степени.
- 2) Сравнить исходные значения функции y_i с теми, которые получаются из построенного многочлена.
- 3) Найти среднеквадратическое отклонение по формуле:

$$S = \left[\sum_{i=0}^n (P_2(x_i) - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Задание 2 (для всех студентов).

Следующая таблица

t	14.5	30.0	64.5	74.5	86.7	94.5	98.9
k	0	0.004	0.018	0.029	0.051	0.073	0.090

дает значения удельной электропроводимости стекла в зависимости от температуры в градусах C .

Найти для функции

$$k = f(t),$$

заданной таблично, аппроксимирующую функцию вида

$$k = b \cdot e^{at}.$$

III. Варианты заданий.

Значения $x_i = i \cdot 0.1$, $i = 0, 2, \dots, 19$, одинаковые для всех вариантов.

i	Значения $y_i = y(x_i)$					
	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
0	2,05	2,09	2,02	1,99	2,23	2,07
1	1,94	2,05	1,98	2,03	2,29	2,17
2	1,92	2,19	1,67	2,20	2,27	2,21
3	1,87	2,18	1,65	2,39	2,62	2,31
4	1,77	2,17	1,57	2,19	2,72	2,10
5	1,88	2,27	1,42	2,61	2,82	2,09
6	1,71	2,58	1,37	2,35	3,13	2,12
7	1,60	2,73	1,07	2,60	3,49	1,63
8	1,56	2,82	0,85	2,55	3,82	1,78
9	1,40	3,04	0,48	2,49	3,95	1,52
10	1,50	3,03	0,35	2,50	4,22	1,16
11	1,26	3,45	-0,30	2,52	4,48	1,07
12	0,99	3,62	-0,61	2,44	5,06	0,85
13	0,97	3,85	-1,20	2,35	5,50	0,56
14	0,91	4,19	-1,39	2,26	5,68	0,10
15	0,71	4,45	-1,76	2,19	6,19	-0,25
16	0,43	4,89	-2,28	2,24	6,42	-0,65
17	0,54	5,06	-2,81	2,34	7,04	-1,06
18	0,19	5,63	-3,57	1,96	7,57	-1,66
19	0,01	5,91	-4,06	2,19	8,10	-2,01

i	Значения $y_i = y(x_i)$					
	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9	Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12
0	2,18	-0,10	-0,16	2,09	2,15	0,10
1	2,43	-0,21	0,01	2,31	2,41	-0,01
2	2,40	0,01	0,10	2,72	2,58	-0,19
3	2,43	0,05	0,16	2,77	2,84	-0,11
4	2,65	-0,13	0,05	2,78	3,28	-0,31
5	2,75	-0,23	0,35	2,97	3,46	-0,78
6	2,67	-0,21	0,19	3,00	4,02	-0,64
7	2,66	-0,43	0,50	3,51	4,11	-0,85
8	2,63	-0,57	0,74	3,43	4,61	-1,18
9	2,75	-0,44	1,03	3,58	5,03	-1,39
10	2,41	-0,44	1,06	3,58	5,34	-1,79
11	2,24	-0,83	1,49	3,54	5,86	-2,02
12	2,12	-0,78	1,79	3,82	6,33	-2,48
13	1,74	-0,81	2,03	3,90	6,81	-2,93
14	1,57	-1,06	2,22	3,77	7,21	-3,26
15	1,17	-1,41	2,50	3,81	7,67	-3,91
16	0,96	-1,40	2,88	4,00	8,23	-4,41
17	0,63	-1,70	3,21	3,97	8,68	-4,91
18	0,25	-1,96	3,63	4,08	9,35	-5,30
19	-0,01	-1,91	3,90	4,08	9,93	-6,00

i	Значения $y_i = y(x_i)$					
	Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15	Вариант 16	Вариант 17	Вариант 18
0	0,17	0,80	0,04	0,08	-0,02	0,14
1	0,07	0,29	0,47	0,14	0,44	0,23
2	0,17	0,52	0,78	0,37	0,51	0,44
3	0,05	0,77	1,01	0,36	0,67	0,54
4	0,12	0,93	1,19	0,44	0,69	0,72
5	0,00	1,20	1,60	0,48	1,04	0,76
6	0,01	1,20	1,93	0,27	1,14	0,37
7	-0,05	1,35	2,22	0,39	1,37	0,64
8	-0,21	1,39	2,50	0,50	1,77	0,57
9	-0,50	1,48	3,01	0,48	2,00	0,44
10	-0,50	1,52	3,22	0,69	2,12	0,41
11	-0,86	1,71	3,71	0,50	2,47	0,30
12	-1,24	1,72	4,23	0,31	2,90	-0,01
13	-1,47	1,87	4,78	0,37	3,50	-0,03
14	-1,79	1,86	5,27	0,43	3,99	-0,47
15	-2,25	1,89	5,75	0,33	4,06	-0,68
16	-2,55	2,04	6,16	0,31	4,54	-0,93
17	-3,18	1,73	6,76	0,09	4,99	-1,28
18	-3,60	2,04	7,30	0,08	5,36	-1,53
19	-3,93	2,03	8,00	0,03	5,99	-1,93

i	Значения $y_i = y(x_i)$					
	Вариант 19	Вариант 20	Вариант 21	Вариант 22	Вариант 23	Вариант 24
0	-1,86	-1,65	-1,89	-1,84	-1,92	-1,90
1	-1,95	-2,00	-2,07	-1,98	-1,60	-1,80
2	-2,12	-1,87	-2,30	-1,72	-1,57	-1,82
3	-2,06	-1,89	-2,26	-1,58	-1,41	-1,86
4	-2,15	-1,75	-2,34	-1,59	-1,36	-1,83
5	-2,00	-1,59	-2,66	-1,59	-0,97	-2,02
6	-2,12	-1,44	-2,88	-1,58	-0,59	-2,01
7	-2,31	-1,51	-2,85	-1,64	-0,71	-2,05
8	-2,29	-1,00	-3,16	-1,55	-0,15	-2,46
9	-2,57	-1,17	-3,49	-1,35	0,01	-2,68
10	-2,56	-0,87	-3,88	-1,33	0,22	-2,85
11	-2,86	-0,47	-4,22	-1,47	0,63	-2,98
12	-2,85	-0,33	-4,45	-1,50	1,07	-3,30
13	-3,03	-0,00	-4,99	-1,65	1,42	-3,40
14	-3,25	0,34	-5,36	-1,62	1,68	-3,90
15	-3,08	0,49	-5,71	-1,87	2,49	-4,37
16	-3,29	0,81	-6,51	-1,61	2,57	-4,65
17	-3,67	1,37	-6,76	-1,86	3,09	-5,00
18	-3,70	1,72	-7,35	-1,84	3,40	-5,42
19	-3,85	2,03	-8,02	-1,91	4,00	-6,13

Глава 3 Численное дифференцирование и интегрирование

Практическое задание №6

Тема: «Численное дифференцирование»

I. Контрольные вопросы и задачи.

1. Сформулируйте задачу численного дифференцирования.
2. Приведите простейшие формулы численного дифференцирования.
3. Опишите известные способы построения формул численного дифференцирования.

4. Докажите представление

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2} \cdot f''(\xi), \xi \in (x_i, x_{i+1}), h > 0.$$

5. Докажите представление

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2 \cdot h} - \frac{h^2}{6} \cdot f'''(\xi), \xi \in (x_i - h, x_i + h), h > 0.$$

6. Докажите представление

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - h) - 2 \cdot f(x_i) + f(x_i + h))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \cdot f^{IV}(\xi), \xi \in (x_i - h, x_i + h), h > 0.$$

7. В чем заключается некорректность задачи численного дифференцирования?

8. Покажите, что алгоритм

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

вычисления приближенного значения производной в точке x_i некорректен.

9. Покажите, что алгоритм

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2 \cdot h}$$

вычисления приближенного значения производной в точке x_i некорректен.

10. Покажите, что алгоритм

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2 \cdot f(x) + f(x+h))}{h^2}$$

вычисления приближенного значения производной в точке x_i некорректен.

11. Приведите определение понятия «оптимальный шаг формул численного дифференцирования».
12. Найдите оптимальные шаги h для вычисления приближенных значений производных в точке X по формулам, приведенным в задачах 8, 9, 10.
13. Приведите практические оценки погрешностей формул численного дифференцирования.
14. Найдите погрешность метода

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h}, \quad h > 0.$$

при помощи принципа Рунге.

15. Найдите погрешность метода

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \quad h > 0.$$

при помощи принципа Рунге.

II. Задание.

Задание 1. Построить по данной информации интерполяционный многочлен $p_n(x)$, а затем положить $y'(x) \approx p'_n(x)$, $y''(x) \approx p''_n(x)$.

Задание 2. Дана таблица значений функции $y = f(x)$.

1. Составить таблицу значений производной $y'(x)$ в узлах сетки.
2. Составить таблицу значений второй производной $y''(x)$ в узлах сетки.
3. Составить компьютерную программу для вычисления $y'(x)$ и $y''(x)$ в узлах сетки.

Указание. В задании 2 используйте аппроксимации производных второго порядка точности.

Таблица 1	
x	$f(x)$
0,05	1,05127
0,10	1,10517
0,15	1,16183
0,20	1,22140
0,25	1,28403
0,30	1,34986
0,35	1,41907
0,40	1,49182
0,45	1,56831
0,50	1,64872
Таблица 4	
x	$f(x)$
0,45	1,56831
0,50	1,64872
0,55	1,73325
0,60	1,82212

Таблица 2	
x	$f(x)$
0,05	0,02119
0,10	0,04139
0,15	0,06070
0,20	0,07918
0,25	0,09691
0,30	0,11394
0,35	0,13033
0,40	0,14613
0,45	0,16137
0,50	0,17609
Таблица 5	
x	$f(x)$
0,45	0,43497
0,50	0,47943
0,55	0,52269
0,60	0,56464

Таблица 3	
x	$f(x)$
0,05	0,99875
0,10	0,99500
0,15	0,98877
0,20	0,98007
0,25	0,96891
0,30	0,95534
0,35	0,93937
0,40	0,92106
0,45	0,90045
0,50	0,87758
Таблица 6	
x	$f(x)$
0,45	0,90045
0,50	0,87758
0,55	0,85252
0,60	0,82534

0,65	1,91554
0,70	2,01375
0,75	2,11700
0,80	2,22554
0,85	2,33965
0,9	2,45960
Таблица 7	
x	$f(x)$
1,05	2,85765
1,10	3,00417
1,15	3,15819
1,20	3,32012
1,25	3,49034
1,30	3,66930
1,35	3,85743
1,40	4,05520
1,45	4,26311
1,50	4,48169
Таблица 10	
x	$f(x)$
0,85	0,65998
0,90	0,62161
0,95	0,58168
1,00	0,54030
1,05	0,49757
1,10	0,45360
1,15	0,40849
1,20	0,36236
1,25	0,31532
1,30	0,26750
Таблица 13	
x	$f(x)$
1,20	3,32012
1,25	3,49034
1,30	3,66930

0,65	0,60519
0,70	0,64422
0,75	0,68164
0,80	0,71736
0,85	0,75128
0,90	0,78333
Таблица 8	
x	$f(x)$
1,05	0,86742
1,10	0,89121
1,15	0,91276
1,20	0,93204
1,25	0,94898
1,30	0,96356
1,35	0,97572
1,40	0,98545
1,45	0,99271
1,50	0,99749
Таблица 11	
x	$f(x)$
0,85	1,13833
0,90	1,26016
0,95	1,39838
1,00	1,55741
1,05	1,74332
1,10	1,96476
1,15	2,23450
1,20	2,57215
1,25	3,00957
1,30	3,60210
Таблица 14	
x	$f(x)$
1,20	0,93204
1,25	0,94898
1,30	0,96356

0,65	0,79608
0,70	0,76484
0,75	0,73169
0,80	0,69671
0,85	0,65998
0,90	0,62161
Таблица 9	
x	$f(x)$
1,05	0,49757
1,10	0,45360
1,15	0,40849
1,20	0,36236
1,25	0,31532
1,30	0,26750
1,35	0,21901
1,40	0,16997
1,45	0,12050
1,50	0,07074
Таблица 12	
x	$f(x)$
0,85	0,75128
0,90	0,78333
0,95	0,81342
1,00	0,84147
1,05	0,86742
1,10	0,89121
1,15	0,91276
1,20	0,93204
1,25	0,94898
1,30	0,96356
Таблица 15	
x	$f(x)$
1,20	1,07292
1,25	1,05376
1,30	1,03782

1,35	3,85743
1,40	4,05520
1,45	4,26311
1,50	4,48169
1,55	4,71147
1,60	4,95303
1,65	5,20698
Таблица 16	
x	$f(x)$
2,10	0,86321
2,15	0,83690
2,20	0,80850
2,25	0,77807
2,30	0,74571
2,35	0,71147
2,40	0,67546
2,45	0,63776
2,50	0,59847
2,55	0,55768
Таблица 19	
x	$f(x)$
1,40	0,16997
1,45	0,12050
1,50	0,07074
1,55	0,02079
1,60	0,02920
1,65	0,07912
1,70	0,12884
1,75	0,17825
1,80	0,22720
1,85	0,27559
Таблица 22	
x	$f(x)$
0,25	0,24740
0,30	0,29552

1,35	0,97572
1,40	0,98545
1,45	0,99271
1,50	0,99749
1,55	0,99978
1,60	0,99957
1,65	0,99687
Таблица 17	
x	$f(x)$
2,10	0,58485
2,15	0,65403
2,20	0,72790
2,25	0,80735
2,30	0,89348
2,35	0,98769
2,40	1,09169
2,45	1,20770
2,50	1,33865
2,55	1,48839
Таблица 20	
x	$f(x)$
1,40	4,05520
1,45	4,26311
1,50	4,48169
1,55	4,71147
1,60	4,95303
1,65	5,20698
1,70	5,47395
1,75	5,75460
1,80	6,04965
1,85	6,35982
Таблица 23	
x	$f(x)$
0,25	0,96891
0,30	0,95534

1,35	1,02488
1,40	1,01477
1,45	1,00734
1,50	1,00251
1,55	1,00022
1,60	1,00043
1,65	1,00314
Таблица 18	
x	$f(x)$
2,10	0,50485
2,15	0,54736
2,20	0,58850
2,25	0,62817
2,30	0,66628
2,35	0,70271
2,40	0,73739
2,45	0,77023
2,50	0,80114
2,55	0,83005
Таблица 21	
x	$f(x)$
1,40	0,98545
1,45	0,99271
1,50	0,99749
1,55	0,99978
1,60	0,99957
1,65	0,99687
1,70	0,99166
1,75	0,98399
1,80	0,97385
1,85	0,96128
Таблица 24	
x	$f(x)$
0,25	0,60206
0,30	0,52288

0,35	0,34290
0,40	0,38942
0,45	0,43497
0,50	0,47943
0,55	0,52269
0,60	0,56464
0,65	0,60519
0,70	0,64422
Таблица 25	
x	$f(x)$
1,25	0,09691
1,30	0,11394
1,35	0,13033
1,40	0,14613
1,45	0,16137
1,50	0,17609
1,55	0,19033
1,60	0,20412
1,65	0,21748
1,70	0,23045

0,35	0,93937
0,40	0,92106
0,45	0,90045
0,50	0,87758
0,55	0,85252
0,60	0,82534
0,65	0,79608
0,70	0,76484
Таблица 26	
x	$f(x)$
1,25	0,22314
1,30	0,26236
1,35	0,30010
1,40	0,33647
1,45	0,37156
1,50	0,40547
1,55	0,43825
1,60	0,47000
1,65	0,50078
1,70	0,53063

0,35	0,45593
0,40	0,39794
0,45	0,34679
0,50	0,30103
0,55	0,25964
0,60	0,22185
0,65	0,18709
0,70	0,15490
Таблица 27	
x	$f(x)$
1,25	0,31532
1,30	0,26750
1,35	0,21901
1,40	0,16997
1,45	0,12050
1,50	0,07074
1,55	0,02079
1,60	0,02920
1,65	0,07912
1,70	0,12884

Практическое задание №7
Тема: «Численное интегрирование»

I. Контрольные вопросы и задачи.

1. Изложите кратко постановку задачи численного интегрирования.
2. Приведите определения основных понятий: квадратурная сумма, квадратурная формула, узлы и коэффициенты квадратурной формулы, погрешность квадратурной формулы.
3. Кратко изложите сущность метода прямоугольников.
4. Кратко изложите сущность метода трапеций.
5. Кратко изложите сущность метода Симпсона.
6. Выпишите составные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.
7. Выпишите погрешности и их оценки составных формул прямоугольников, трапеций, Симпсона.
8. Кратко изложите способы выбора шага интегрирования.
9. Приведите практические оценки погрешностей формул численного интегрирования (принцип Рунге).
10. Кратко изложите сущность формул Ньютона-Котеса.
11. Кратко изложите сущность формул типа Гаусса.
12. Приведите важнейшие свойства полиномов Лежандра.
13. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

по формуле трапеций при $n = 10$ и оценить остаточный член.

14. Вычислить интеграл

$$\int_4^5 \ln x dx$$

по формуле Симпсона при $n = 10$ и оценить остаточный член.

15. Вычислить интеграл

$$\int_0^{0.8} f(x) dx$$

по формуле Симпсона и оценить остаточный член, если подынтегральная функция задана таблицей:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	1.0000	0.9950	0.9801	0.9553	0.9211	0.8756	0.8553	0.7648	0.6967

16. Найдите шаг h интегрирования для вычисления определенного интеграла

$$\int_2^3 \ln x dx$$

по формуле трапеций с точностью 0.001.

17. Найдите шаг h интегрирования для вычисления определенного интеграла

$$\int_2^3 \ln x dx$$

по формуле Симпсона с точностью 0.0001.

II. Задание.

1. Вычислить определенный интеграл по формуле прямоугольников и трапеций при $n=10$. Оценить погрешность результата, составив таблицу конечных разностей.
2. Разработать компьютерные программы реализации методов трапеций и Симпсона.
3. Вычислить определенный интеграл по формуле Симпсона при $n=10$. Оценить погрешность результата, составив таблицу конечных разностей.
4. Разработать компьютерные программы реализации методов трапеций и Симпсона.

III. Варианты.

1) а) $\int_{0.8}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

2) а) $\int_{1.2}^{2.7} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3.2}}$

3) а) $\int_{0.8}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

4) а) $\int_{1.2}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1.2}}$

5) а) $\int_{2.2}^{2.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0.5}}$

6) а) $\int_{1.4}^{2.2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

7) а) $\int_{0.8}^{1.8} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$

8) а) $\int_{1.6}^{2.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2.5}}$

б) $\int_{1.2}^2 \frac{\ln(x+2)}{x} dx$

б) $\int_{1.6}^{2.4} (x+1) \cdot \sin x dx$

б) $\int_{1.2}^2 \frac{\ln(x+2)}{x} dx$

б) $\int_{1.2}^2 \frac{\ln(x^2 + 3)}{2x} dx$

б) $\int_{1.4}^3 x^2 \ln x dx$

б) $\int_{1.4}^{2.2} \frac{\ln(x^2 + 2)}{x+1} dx$

б) $\int_{0.4}^{1.2} \frac{\cos(x^2)}{x+1} dx$

б) $\int_{0.8}^{1.6} (x^2 + 1) \sin(x - 0.5) dx$

- 9) a) $\int_{0.6}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0.8}}$ б) $\int_{0.6}^{1.4} x^2 \cos x dx$
- 10) a) $\int_{1.2}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1.2}}$ б) $\int_{1.2}^2 \frac{\ln(x^2 + 3)}{2x} dx$
- 11) a) $\int_{1.2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.7}}$ б) $\int_{2.5}^{3.3} \frac{\ln(x^2 + 0.8)}{x - 1} dx$
- 12) a) $\int_{3.2}^4 \frac{dx}{\sqrt{0.5x^2 + 1}}$ б) $\int_{0.5}^{1.2} \frac{tg(x^2)}{x + 1} dx$
- 13) a) $\int_{0.8}^{1.7} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.3}}$ б) $\int_{1.3}^{2.2} \frac{\sin(x^2 - 1)}{2\sqrt{x}} dx$
- 14) a) $\int_{1.2}^2 \frac{dx}{\sqrt{0.5x^2 + 1.5}}$ б) $\int_{0.2}^{1.0} (x + 1) \cos(x^2) dx$
- 15) a) $\int_{2.1}^{3.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}$ б) $\int_{0.8}^{1.2} \frac{\sin(x^2 - 0.4)}{x + 2} dx$
- 16) a) $\int_{1.3}^{2.5} \frac{dx}{\sqrt{0.2x^2 + 1}}$ б) $\int_{0.15}^{0.63} \sqrt{x + 1} \ln(x + 3) dx$
- 17) a) $\int_{0.6}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{1.2x^2 + 0.5}}$ б) $\int_{1.2}^{2.8} \frac{\ln(x^2 + 1)}{2x + 1} dx$
- 18) a) $\int_{1.6}^{2.2} \frac{dx}{\sqrt{x} + 0.5}$ б) $\int_{0.8}^{1.6} (x^2 + 1.6) \cos(x - 0.5) dx$
- 19) a) $\int_{0.6}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{0.2x^2 + 2.5}}$ б) $\int_{0.6}^{1.4} x^2 \sin(x) dx$
- 20) a) $\int_{1.2}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5.2}}$ б) $\int_{1.2}^2 \frac{\ln(x^2 + 0.3)}{2x + 1} dx$
- 21) a) $\int_{1.2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.7}}$ б) $\int_{2.5}^{3.3} \frac{\ln(x^2 + 0.8)}{x + 1} dx$
- 22) a) $\int_{3.2}^4 \frac{dx}{\sqrt{0.1x^2 + 2.5}}$ б) $\int_{0.5}^{1.2} \frac{tg(x^2)}{x + 1} dx$
- 23) a) $\int_{0.8}^{1.7} \frac{dx}{\sqrt{0.2x^2 + 3}}$ б) $\int_{1.3}^{2.2} \frac{\sin(x^2 + 1)}{\sqrt{x}} dx$
- 24) a) $\int_{1.2}^2 \frac{dx}{\sqrt{1.5x^2 + 0.5}}$ б) $\int_{0.2}^{1.0} (x + 2) \cos(x^2 - 1) dx$
- 25) a) $\int_{2.1}^{3.6} \frac{dx}{\sqrt{0.3x^2 + 1.3}}$ б) $\int_{0.8}^{1.2} \frac{\sin(x^2 + 0.4)}{2\sqrt{x}} dx$

Глава 4 Решение уравнений и систем

Практическое задание №8

Тема: «Решение нелинейных скалярных уравнений»

I. Контрольные вопросы и задачи.

1. Является ли число 3 корнем уравнения $2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 6x - 18 = 0$?
2. Является ли число 2 корнем уравнения $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x + 1 = 0$?
3. Определить графически между какими целыми числами заключены корни уравнения $x^3 - 3x - 1 = 0$.
4. Имеет ли уравнение $x^3 + x - 1 = 0$ корни на отрезке $[0; 1]$?
5. Имеет ли уравнение $x^3 + x + 2 = 0$ корни на отрезке $[0; 1]$?
6. Сколько корней уравнения $x^3 + 2x - 5 = 0$ содержится на отрезке $[1; 5]$?
7. Уравнение $x^3 + x - 3 = 0$ содержит единственный корень на отрезке $[1; 2]$.
Сколько итераций надо совершить, чтобы методом половинного деления получить приближенное значение корня с точностью до $\varepsilon = 0.001$?
8. Для решения уравнения $x^3 + x - 3 = 0$, содержащего единственный корень на отрезке $[1; 2]$, построен итерационный процесс:

$$x_{n+1} = 3 - x_n^3, \quad x_0 = 1.5.$$

Обоснуйте сходимость (расходимость) этого процесса.

9. Уравнение $5x - e^x = 0$ имеет один корень на отрезке $[0; 1]$. Вычислите методом итераций первое и второе приближения корня, положив $x_0 = 0.5$.
Оцените величину $|\xi - x_2|$, где ξ - точное значение корня.
10. Уравнение $5x - e^x = 0$ имеет один корень на отрезке $[0; 1]$. Вычислите методом Ньютона первое и второе приближения корня. Оцените величину $|\xi - x_2|$, где ξ - точное значение корня.

II. Задание.

1. Отделить корни данных уравнений графически или аналитически.
2. Уточнить один из корней
 - а) методом половинного деления с точностью до $\varepsilon = 0.01$;
 - б) методом итераций с точностью до $\varepsilon = 0.001$;
 - в) методом Ньютона с точностью до $\varepsilon = 0.000001$.
3. Составить программы отделения корней и уточнения любого отделенного корня уравнения с заданной точностью ε указанными выше методами.
4. Решить данные уравнения, используя ПО компьютера для решения математических задач.

III. Варианты.

1. а). $0.1\sin 0.3x - 0.1x = 1$;
2. а). $0.3\sin(0.1x) + 0.15x = 1$;
3. а). $0.4\sin 0.2x - 0.25x = 1$;
4. а). $0.3\cos 0.2x - 0.4x = 0$;
5. а). $0.2\cos 0.1x - 0.24x = 0$;
6. а). $0.2\cos 0.2x + 0.1x = 0$;
7. а). $0.5\sin x - 0.8x + 1 = 0$;
8. а). $2\sin 2x + 8.2x - 1 = 0$;
9. а). $1.2\sin 0.5x - 1.5x + 1 = 0$;
10. а). $2.4x - 1.2\cos 0.3x = 0$;
11. а). $0.3x + 0.5\cos 0.1x = 0$;
12. а). $5x - \cos x - 1 = 0$;
13. а). $3x + \cos 0.2x - 2 = 0$;
14. а). $2.1x - \sin 0.1x = 0.25$;
15. а). $2.5x - \sin 0.3x = 3.2$;
16. а). $0.1x + 0.5\cos 0.1x = 0.3$;
17. а). $\cos x - 3x - 1 = 0$;
18. а). $\sin x - 3x + 1 = 0$;
19. а). $4x - \sin 2x - 1.2 = 0$;
20. а). $1 - 2.5x - \sin x = 0$;
21. а). $\sin x - 3.2x - 1 = 0$;
22. а). $\cos x + 1.8x - 1.2 = 0$;
23. а). $0.8 - 2.5x + \cos x = 0$;
24. а). $0.5 - \sin x + 2.9x = 0$;
25. а). $2.8x - \sin x = 1.2$;

- б). $e^{-0.1x} - x = 0$.
- б). $10x - e^x = 0$.
- б). $e^{0.5x} - 16x = 0$.
- б). $11x - e^x = 0$.
- б). $e^{0.2x} - 5x = 0$.
- б). $4x - e^{0.1x} = 0$.
- б). $e^{0.1x} - 4.5x = 0$.
- б). $e^{0.3x} - 4x = 0$.
- б). $e^{0.2x} - 5.1x = 0$.
- б). $e^{0.3x} - 7.2x = 0$.
- б). $6x - e^{0.1x} = 0$.
- б). $5.8x - e^{0.2x} = 0$.
- б). $e^{0.6x} - 12x = 0$.
- б). $e^{0.5x} - 9.8x = 0$.
- б). $e^{0.4x} - 12.2x = 0$.
- б). $9.8x - e^{0.6x} = 0$.
- б). $e^{0.7x} - 13.2x = 0$.
- б). $10.2x - e^x = 0$.
- б). $e^{0.9x} - 10.4x = 0$.
- б). $e^x - 11.4x = 0$.
- б). $e^{-0.2x} - 1.2x = 0$.
- б). $10x - e^x = 0$.
- б). $e^{1.1x} - 12.2x = 0$.
- б). $8.2x - e^{0.8x} = 0$.
- б). $5.6x - e^{0.6x} = 0$.

Практическое задание №9

Тема: «Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений»

I. Контрольные вопросы и задачи.

1. Пусть дана система уравнений $A \cdot X = F$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{o}_1 \\ \tilde{o}_2 \\ \tilde{o}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Найти: 1). Все нормы вектора F ;

2). $\|A\|_1, \|A\|_2$.

2. Дана система уравнений

$$\begin{cases} 4\tilde{o}_1 + 0.24\tilde{o}_2 - 0.08\tilde{o}_3 = 8, \\ 0.09\tilde{o}_1 + 3\tilde{o}_2 - 0.15\tilde{o}_3 = 9, \\ 0.04\tilde{o}_1 - 0.08\tilde{o}_2 + 4\tilde{o}_3 = 20. \end{cases}$$

Для решения этой системы постройте итерационный процесс. Выполняются ли условия сходимости процесса итераций?

3. Систему из задания 2 решите методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.0001$. Найдите критерий окончания итерационного процесса.
4. Систему из задания 2 решите методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.001$. Оцените число необходимых итераций (шагов).
5. Укажите, чем отличается метод Зейделя от метода простой итерации?

II. Задание.

1. Систему

$$\begin{pmatrix} 2+\alpha & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 6.1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 3.4 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 7.1+\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 7.0 \\ 4.1 \\ 4.5 \\ 6.9 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0.02 \cdot n$, $\beta = 0.01 \cdot n$, n - номер варианта, решить методом прогонки.

2. Дана система линейных уравнений $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{bmatrix} 9.8 + \alpha & 1.02 & 0.75 & 0.5 \\ 1.05 & 8.9 & 0.45 & 1.22 \\ 0.73 & 0.55 & 9.95 & 0.51 \\ 0.35 & 0.45 & 1.18 & 9.75 + \alpha \end{bmatrix}$$

$$B = [15.655; 22.705; 25.805; 23.480 - \beta]^T \quad n - \text{номер варианта.}$$

$$\alpha = 0.02 \cdot n, \quad \beta = 0.01 \cdot n$$

Данную систему решить методом простой итерации и методом Зейделя. Итерации продолжать до выполнения неравенства

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < 0.0001.$$

Оценить погрешность полученных результатов.

3. Системы из всех заданий решите с помощью ПО компьютера.

Замечание. Для решения систем уравнений разработайте соответствующие компьютерные программы.

4. Систему

$$\begin{bmatrix} 12.72 + \alpha & 2.45 & 0.35 & 1.54 \\ 3.44 & 15.82 & 1.84 & 0.35 \\ 4.55 & 0.78 & 20.75 + \alpha & 0.85 \\ 3.44 & 0.55 & 0.35 & 20.75 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.755 \\ 25.455 \\ 18.470 + \beta \\ 19.680 \end{bmatrix}$$

$\alpha = 0.02 \cdot n, \quad \beta = 0.01 \cdot n, \quad n - \text{номер варианта,}$ решить методом простой итерации и методом Зейделя с погрешностью $\varepsilon = 0.0001$.

5. Систему

$$\begin{bmatrix} 10.25 + \alpha & 1.85 & 0.35 \\ 2.22 & 12.54 & 1.48 \\ 3.08 & 2.44 & 15.85 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.445 + \alpha \\ 15.550 \\ 18.445 \end{bmatrix}$$

$\alpha = 0.02 \cdot n, \quad n - \text{номер варианта,}$ решить методом простой итерации и методом Зейделя, выполнив 5 итераций. Оценить погрешности полученных результатов.

6. Подсчитать число шагов, необходимое для решения системы из задания 3 с погрешностью $\varepsilon = 0.0001$.

7. Системы из всех заданий решите с помощью ПО компьютера.

Замечание. Для решения систем уравнений разработайте соответствующие компьютерные программы.

Тема: «Численное решение систем нелинейных уравнений»

I. Контрольные вопросы и задачи.

1. Является пара чисел $(1,1)$ решением системы уравнений?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ xy = 1. \end{cases}$$

2. Является пара чисел $(1,0)$ решением системы уравнений?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ 2x + \sin(y) = 1. \end{cases}$$

- ### 3. Систему

$$\begin{cases} \sin(x+y) + 2x = 0.5, \\ \cos(2x+y) + 5y = 0.1. \end{cases}$$

привести к виду

$$\begin{cases} x = f(x, y), \\ y = g(x, y). \end{cases}$$

4. Найти область определения решений системы

$$\begin{cases} \sin(x+y) + 2x = 0.5, \\ \cos(2x+y) + 5y = 0.1. \end{cases}$$

- ## 5. Система нелинейных уравнений, приведенная к виду

[illegible]

решается методом итераций. Сформулируйте условия сходимости этого метода.

6. Дано отображение вида

$$x = f(x), \quad \text{где } x, f \quad - \quad n \quad - \text{мерные векторы.}$$

Приведите условие, при котором это отображение является сжимающим.

- ## 7. Приблизить функции

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \sin(x+y) + 2x - 0.5, \\ f_2(x,y) &= \cos(2x+y) + 5y - 0.1 \end{aligned}$$

полиномами Тейлора 1-го порядка в окрестности точки $(0, 0)$.

II. Задание.

1. Используя метод итераций, решить систему нелинейных уравнений с точностью до $\varepsilon = 0.001$.

2. Используя метод Ньютона, решить систему нелинейных уравнений с точностью до $\varepsilon = 0.001$.
3. Для решения систем нелинейных уравнений составить соответствующие программы.
4. Данные системы в задании решить с помощью ПО компьютера.

V. Варианты.

- | | |
|--|--|
| 1. а). $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1.2; \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$ | б). $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.4) = x^2; \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1, \quad x > 0, y > 0. \end{cases}$ |
| 2. а). $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0.5; \\ x - \cos y = 3. \end{cases}$ | б). $\begin{cases} \sin(x+y) - 1.6x = 0; \\ x^2 + y^2 = 1, \quad x > 0, y > 0. \end{cases}$ |
| 3. а). $\begin{cases} \sin x + 2y = 2; \\ \cos(y-1) + x = 0.7. \end{cases}$ | б). $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.1) = x^2; \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$ |
| 4. а). $\begin{cases} \cos x + y = 1.5; \\ 2x - \sin(y-0.5) = 1. \end{cases}$ | б). $\begin{cases} \sin(x+y) - 1.2x = 0.2; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$ |
| 5. а). $\begin{cases} \sin(x+0.5) - y = 1; \\ \cos(y-2) + x = 0. \end{cases}$ | б). $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.3) = x^2; \\ 0.9x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$ |
| 6. а). $\begin{cases} \cos(x+0.5) + y = 0.8; \\ \sin y - 2x = 1.6. \end{cases}$ | б). $\begin{cases} \sin(x+y) - 1.3x = 0; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$ |
| 7. а). $\begin{cases} \sin(x-1) = 1.3 - y; \\ x - \sin(y+1) = 0.8. \end{cases}$ | б). $\begin{cases} \operatorname{tg} xy = x^2; \\ 0.8x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$ |
| 8. а). $\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0; \\ x + \sin y = -0.4. \end{cases}$ | б). $\begin{cases} \sin(x+y) - 1.5x = 0.1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$ |
| 9. а). $\begin{cases} \cos(x+0.5) - y = 2; \\ \sin y - 2x = 1. \end{cases}$ | б). $\begin{cases} \operatorname{tg} xy = x^2; \\ 0.7x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$ |
| 10. а). $\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1.5; \\ x + \cos(y-2) = 0.5. \end{cases}$ | б). $\begin{cases} \sin(x+y) - 1.2x = 0.1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$ |
| 11. а). $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1.2; \\ 2y + \cos x = 2. \end{cases}$ | б). $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.2) = x^2; \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$ |
| 12. а). $\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0.5; \\ y - \cos x = 3. \end{cases}$ | б). $\begin{cases} \sin(x+y) = 1.5x - 0.1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$ |
| 13. а). $\begin{cases} \sin y + 2x = 2; \\ \cos(x-1) + y = 0.7. \end{cases}$ | б). $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.4) = x^2; \\ 0.8x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$ |
| 14. а). $\begin{cases} \cos y + x = 1.5; \\ 2y - \sin(x-0.5) = 1. \end{cases}$ | б). $\begin{cases} \sin(x+y) = 1.2x - 0.1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$ |

- | | | | | |
|-----|-----|--|-----|--|
| 15. | a). | $\begin{cases} \sin(y+0.5)-x=1; \\ \cos(x-2)+y=0. \end{cases}$ | б). | $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0.1)=x^2; \\ 0.9x^2+2y^2=1. \end{cases}$ |
| 16. | a). | $\begin{cases} \cos(y+0.5)+x=0.8; \\ \sin x-2y=1.6. \end{cases}$ | б). | $\begin{cases} \sin(x+y)-1.4x=0; \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$ |
| 17. | a). | $\begin{cases} \sin(y-1)+x=1.3; \\ y-\sin(x+1)=0.8. \end{cases}$ | б). | $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0.1)=x^2; \\ 0.5x^2+2y^2=1. \end{cases}$ |
| 18. | a). | $\begin{cases} 2x-\cos(y+1)=0; \\ y+\sin x=-0.4. \end{cases}$ | б). | $\begin{cases} \sin(x+y)=1.1x-0.1; \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$ |
| 19. | a). | $\begin{cases} \cos(y+0.5)-x=2; \\ \sin x-2y=1. \end{cases}$ | б). | $\begin{cases} \operatorname{tg}(x-y)-xy=0; \\ x^2+2y^2=1. \end{cases}$ |
| 20. | a). | $\begin{cases} \sin(y+2)-x=1.5; \\ y+\cos(x-2)=0.5. \end{cases}$ | б). | $\begin{cases} \sin(x-y)-xy=-1; \\ x^2-y^2=\frac{3}{4}. \end{cases}$ |
| 21. | a). | $\begin{cases} \sin(x+1)-y=1; \\ 2x+\cos y=2. \end{cases}$ | б). | $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0.2)=x^2; \\ x^2+2y^2=1. \end{cases}$ |
| 22. | a). | $\begin{cases} \cos(x-1)+y=0.8; \\ x-\cos y=2. \end{cases}$ | б). | $\begin{cases} \sin(x+y)-1.5x=0; \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$ |
| 23. | a). | $\begin{cases} \sin x+2y=1.6; \\ \cos(y-1)+x=1. \end{cases}$ | б). | $\begin{cases} \operatorname{tg}xy=x^2; \\ 0.5x^2+2y^2=1. \end{cases}$ |
| 24. | a). | $\begin{cases} \cos x+y=1.2; \\ 2x-\sin(y-0.5)=2. \end{cases}$ | б). | $\begin{cases} \sin(x+y)=1.2x-0.2; \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$ |
| 25. | a). | $\begin{cases} \sin(x+0.5)-y=1.2; \\ \cos(y-2)+x=0. \end{cases}$ | б). | $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0.1)=x^2; \\ 0.7x^2+2y^2=1. \end{cases}$ |

Глава 5 Численное решение дифференциальных уравнений

Практическое задание №11

Тема: «Численное решение задачи Коши»

I. Контрольные вопросы и задачи.

1. Приведите приближенную формулу погрешности в каждой точке сетки для методов Рунге-Кутты.
2. Найдите решение задачи Коши для ДУ
$$y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1.$$
3. Решите методом Рунге-Кутты второго порядка задачу Коши для ДУ
$$y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1$$
с шагом 0.1 на отрезке $[0, 0.5]$. Сравните полученное решение с аналитическим. Укажите погрешности в каждой точке сетки.
4. Сформулируйте идею построения методов Адамса.
5. Опишите преимущества и недостатки методов Адамса в сравнении с методами Рунге – Кутты.

II. Задание.

Используя методы Эйлера, Рунге - Кутта и Адамса, решить данное дифференциальное уравнение $u' = f(x, u)$ с начальным условием $u(x_0) = u_0$ на отрезке $[a, b]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

1. Для решения данной задачи разработать соответствующие компьютерные программы.
2. Для решения данной задачи воспользоваться ПО компьютера.

III. Варианты.

1. $u' = x + \cos \frac{u}{\sqrt{5}}, \quad u_0(1.8) = 2.6, \quad x \in [1.8; 2.8].$
2. $u' = x + \cos \frac{u}{3}, \quad u_0(1.6) = 4.6, \quad x \in [1.6; 2.6].$
3. $u' = x + \cos \frac{u}{\sqrt{10}}, \quad u_0(0.6) = 0.8, \quad x \in [0.6; 1.6].$
4. $u' = x + \cos \frac{u}{\sqrt{7}}, \quad u_0(0.5) = 0.6, \quad x \in [0.5; 1.5].$
5. $u' = x + \cos \frac{u}{\pi}, \quad u_0(1.7) = 5.3, \quad x \in [1.7; 2.7].$
6. $u' = x + \cos \frac{u}{2.25}, \quad u_0(1.4) = 2.2, \quad x \in [1.4; 2.4].$
7. $u' = x + \cos \frac{u}{e}, \quad u_0(1.4) = 2.5, \quad x \in [1.4; 2.4].$

8. $u' = x + \cos \frac{u}{\sqrt{2}}, \quad u_0(0.8) = 1.4, \quad x \in [0.8; 1.8].$
9. $u' = x + \cos \frac{u}{\sqrt{3}}, \quad u_0(1.2) = 2.1, \quad x \in [1.2; 2.2].$
10. $u' = x + \cos \frac{u}{\sqrt{11}}, \quad u_0(2.1) = 2.5, \quad x \in [2.1; 3.1].$
11. $u' = x + \cos \frac{u}{1.25}, \quad u_0(0.4) = 0.8, \quad x \in [0.4; 1.4].$
12. $u' = x + \cos \frac{u}{\sqrt{15}}, \quad u_0(0.3) = 0.9, \quad x \in [0.3; 1.3].$
13. $u' = x + \cos \frac{u}{\sqrt{0.3}}, \quad u_0(0.7) = 2.1, \quad x \in [0.7; 1.7].$
14. $u' = x + \sin \frac{u}{\sqrt{5}}, \quad u_0(1.8) = 2.6, \quad x \in [1.8; 2.8].$
15. $u' = x + \sin \frac{u}{3}, \quad u_0(1.6) = 4.6, \quad x \in [1.6; 2.6].$
16. $u' = x + \sin \frac{u}{\sqrt{10}}, \quad u_0(0.6) = 0.8, \quad x \in [0.6; 1.6].$
17. $u' = x + \sin \frac{u}{\sqrt{7}}, \quad u_0(0.5) = 0.6, \quad x \in [0.5; 1.5].$
18. $u' = x + \sin \frac{u}{\pi}, \quad u_0(1.7) = 5.3, \quad x \in [1.7; 2.7].$
19. $u' = x + \sin \frac{u}{\sqrt{2.8}}, \quad u_0(1.4) = 2.2, \quad x \in [1.4; 2.4].$
20. $u' = x + \sin \frac{u}{e}, \quad u_0(1.4) = 2.5, \quad x \in [1.4; 2.4].$
21. $u' = x + \sin \frac{u}{\sqrt{2}}, \quad u_0(0.8) = 1.3, \quad x \in [0.8; 1.8].$
22. $u' = x + \sin \frac{u}{\sqrt{3}}, \quad u_0(1.1) = 1.5, \quad x \in [1.1; 2.1].$
23. $u' = x + \sin \frac{u}{\sqrt{11}}, \quad u_0(0.6) = 1.2, \quad x \in [0.6; 1.6].$
24. $u' = x + \sin \frac{u}{1.25}, \quad u_0(0.5) = 1.8, \quad x \in [0.5; 1.5].$
25. $u' = x + \sin \frac{u}{\sqrt{15}}, \quad u_0(0.3) = 0.9, \quad x \in [0.3; 1.3].$

Практическое задание №12
Тема: «Численное решение краевых задач для ОДУ»

Контрольные вопросы

1. Приведите теорему о существовании и единственности решения краевой задачи.
2. Приведите краевую задачу для ОДУ с граничными условиями первого рода.
3. Приведите краевую задачу для ОДУ с граничными условиями второго рода.
4. Приведите краевую задачу для ОДУ с граничными условиями третьего рода.

I. Задание.

Найти решение краевой задачи методом конечных разностей и методом прогонки на отрезке $[a, b]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

1. Для решения данной задачи разработать соответствующие компьютерные программы.
2. Для решения данной задачи воспользоваться ПО компьютера.

II. Варианты.

1.
$$y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x,$$
$$\begin{cases} y(0.7) = 0.5, \\ 2y(1) + 3y'(1) = 1.2. \end{cases}$$

2.
$$y'' - xy' + 2y = x + 1,$$
$$\begin{cases} y(0.9) - 0.5y'(0.9) = 2, \\ y(1.2) = 1. \end{cases}$$

3.
$$y'' + xy' + y = x + 1,$$
$$\begin{cases} y(0.5) + 2y'(0.5) = 1, \\ y'(0.8) = 1.2. \end{cases}$$

4.
$$y'' + 2y' - \frac{y}{x} = 3,$$
$$\begin{cases} y(0.2) = 2, \\ 0.5y(0.5) - y'(0.5) = 1. \end{cases}$$

5.
$$y'' + 2y' - xy = x^2,$$
$$\begin{cases} y'(0.6) = 0.7, \\ y(0.9) - 0.5y'(0.9) = 1. \end{cases}$$

6.
$$y'' - y' + \frac{2y}{x} = x + 0.4,$$
$$\begin{cases} y(1.1) - 0.5y'(1.1) = 2, \\ y'(1.4) = 4. \end{cases}$$

7.
$$y'' - 3y' + \frac{y}{x} = 1,$$
$$\begin{cases} y(0.4) = 2, \\ y(0.7) + 2y'(0.7) = 0.7. \end{cases}$$

8.
$$y'' + 3y' - \frac{y}{x} = x + 1,$$
$$\begin{cases} y'(1.2) = 1, \\ 2y(1.5) - y'(1.5) = 0.5. \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} y'' - \frac{y'}{2} + 3y = 2x^2, \\ y(1) + 2y'(1) = 0.6, \\ y(1.3) = 1. \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} y'' + 1.5y' - xy = 0.5, \\ 2y(1.3) - y'(1.3) = 1, \\ y(1.6) = 3. \end{cases}$$

$$11. \quad \begin{cases} y'' + 2xy' - y = 0.4, \\ 2y(0.3) + y'(0.3) = 1, \\ y'(0.6) = 2. \end{cases}$$

$$12. \quad \begin{cases} y'' - 0.5xy' + y = 2, \\ y(0.4) = 1.2, \\ y(0.7) + 2y'(0.7) = 1.4. \end{cases}$$

$$13. \quad \begin{cases} y'' + \frac{2y'}{x} - 3y = 2, \\ y'(0.8) = 1.5, \\ 2y(1.1) + y'(1.1) = 3. \end{cases}$$

$$14. \quad \begin{cases} y'' + 2x^2y' + y = x, \\ 2y(0.5) - y'(0.5) = 1, \\ y(0.8) = 3. \end{cases}$$

$$15. \quad \begin{cases} y'' - 3xy' + 2y = 1.5, \\ y'(0.7) = 1.3, \\ 0.5y(1) + y'(1) = 2. \end{cases}$$

$$16. \quad \begin{cases} y'' + 2xy' - 2y = 0.6, \\ y'(2) = 1, \\ 0.4y(2.3) - y'(2.3) = 1. \end{cases}$$

$$17. \quad \begin{cases} y'' + \frac{y'}{x} - 0.4y = 2x, \\ y(0.6) - 0.3y'(0.6) = 0.6, \\ y'(0.9) = 1.7. \end{cases}$$

$$18. \quad \begin{cases} y'' - \frac{y'}{2x} + 0.8y = x, \\ y(1.7) + 1.2y'(1.7) = 2, \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

$$19. \quad \begin{cases} y'' - \frac{y'}{3} + xy = 2, \\ y(0.8) = 1.6, \\ 3y(1.1) - 0.5y'(1.1) = 1. \end{cases}$$

$$20. \quad \begin{cases} y'' + 0.8y' - xy = 1.4, \\ y(1.8) = 0.5, \\ 2y(2.1) + y'(2.1) = 1.7. \end{cases}$$

$$21. \quad \begin{cases} y'' + 2y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x}, \\ 0.5y(0.9) + y'(0.9) = 1, \\ y(1.2) = 0.8. \end{cases}$$

$$22. \quad \begin{cases} y'' - \frac{y'}{4} + \frac{2y}{x} = \frac{x}{2}, \\ 1.5y(1.3) - y'(1.3) = 0.6, \\ 2y(1.6) = 0.3. \end{cases}$$

$$23. \quad \begin{cases} y'' - 0.5y' + 0.5xy = 2x, \\ y'(1) = 0.5, \\ 2y(1.3) - y'(1.3) = 2. \end{cases}$$

$$24. \quad \begin{cases} y'' - 0.5x^2y' + 2y = x^2, \\ y(1.6) + 0.7y'(1.6) = 2, \\ y(1.9) = 0.8. \end{cases}$$

$$25. \quad \begin{cases} y'' + \frac{y'}{2x} - y = \frac{2}{x}, \\ y(0.6) = 1.3, \\ 0.5y(0.9) - 1.2y'(0.9) = 1. \end{cases}$$

Практическое задание №13
Тема: «Разностные схемы для одномерного параболического уравнения»

Контрольные вопросы

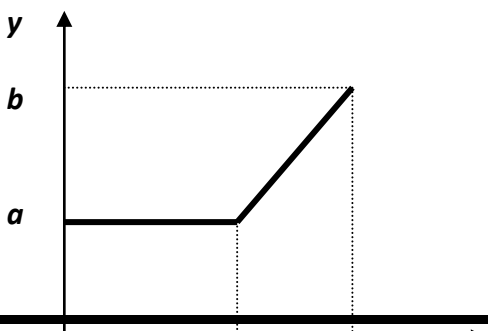
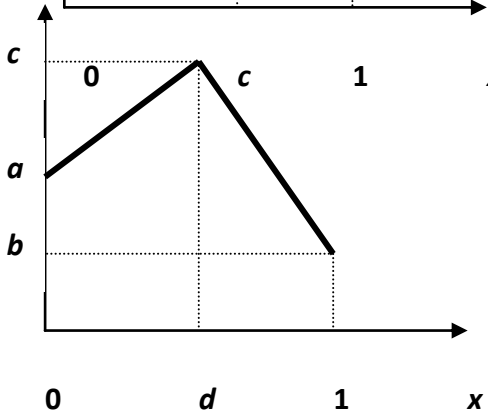
1. Приведите формулу невязки для дифференциального уравнения 2-го порядка.
2. Приведите условия, при которых функции образуют полную замкнутую систему.
3. Приведите пример дифференциального уравнения второго порядка с граничными условиями второго рода.

I. Задание.

Решить смешанную задачу для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с начальным условием $u(x, 0) = f(x)$ и граничными условиями $u(0, t) = a$, $u(1, t) = b$.

1. Для решения данной задачи разработать соответствующие компьютерные программы.
2. Для решения данной задачи воспользоваться ПО компьютера.

I. Варианты.

Номер варианта	$f(x)$	a	b	c	d
1		1.1	3.0	0.05	
2		1.2	3.5	0.15	
3		1.3	4.0	0.25	
4		1.4	4.5	0.35	
5		1.5	5.0	0.45	
6		1.6	5.5	0.55	
7		1.7	6.0	0.65	
8		1.8	6.5	0.75	
9		8.0	3.0	20.0	0.15
10		9.0	4.0	0	0.05
11		10.0	5.0	21.0	0.25
12		11.0	6.0	0	0.35
13		12.0	7.0	22.0	0.45
14		13.0	8.0	0	0.55
15		14.0	9.0	23.0	0.65
16		15.0	10.0	0	0.75
				24.0	
				0	
				25.0	

				0 26.0 0 27.0 0	
17		10.0	14.0	0.05	0.30
18		11.0	14.5	0.10	0.35
19		8.0	15.0	0.15	0.40
20		7.0	15.5	0.20	0.45
21		6.0	16.0	0.25	0.50
22		5.0	17.0	0.30	0.55
23		4.0	17.5	0.35	0.60
24		3.0	18.0	0.40	0.65
25		2.0	19.0	0.45	0.70

Практическое задание №14

Тема: «Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа методом сеток»

I. Задание.

1. Решить смешанную задачу для волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} c$

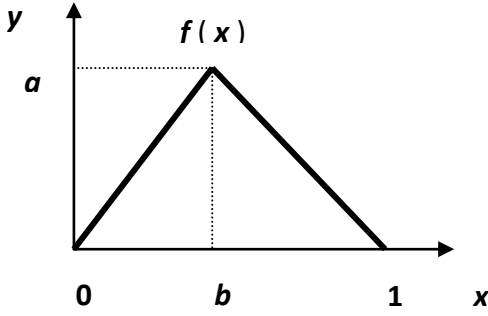
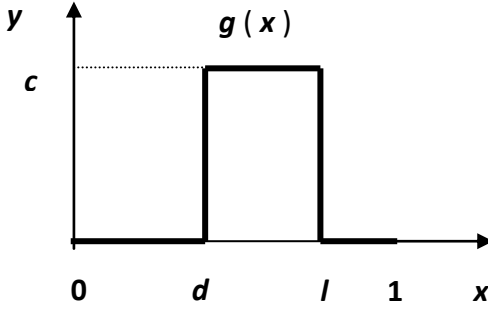
начальными $u(x, 0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$, $0 \leq x \leq 1$, и нулевыми

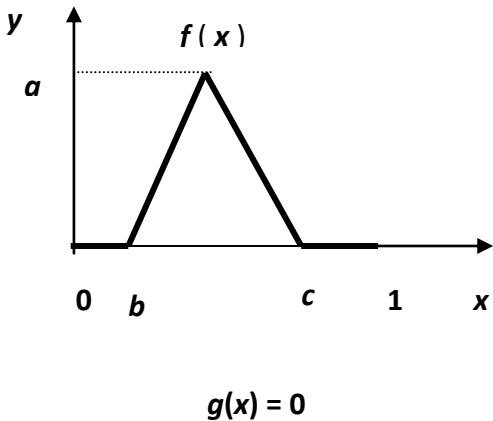
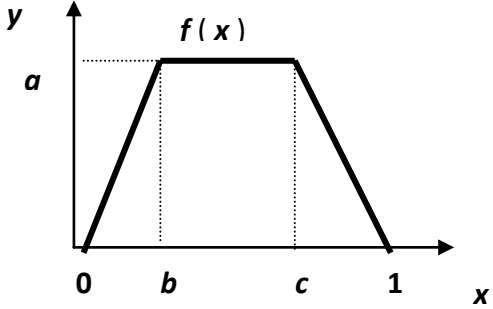
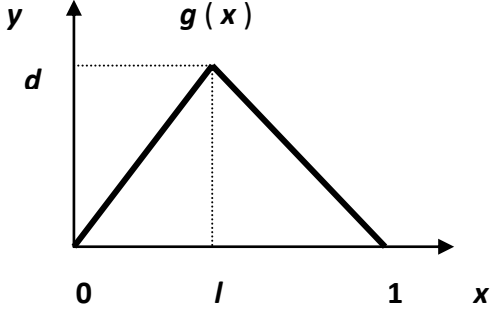
краевыми условиями

$$u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

2. Для решения данной задачи разработать соответствующие компьютерные программы.
3. Для решения данной задачи воспользоваться ПО компьютера.

II. Варианты.

Номер Вариант а	$f(x)$ $g(x)$	a	b	c	d	l
1		1.0	0.05	1.5	0.05	0.45
2		2.0	0.10	1.6	0.10	0.50
3		3.0	0.15	1.7	0.15	0.55
4		4.0	0.20	1.8	0.20	0.60
5		5.0	0.25	1.9	0.25	0.65
6		6.0	0.30	-2.0	0.30	0.70
7		7.0	0.35	-2.1	0.35	0.75
8		8.0	0.40	-2.2	0.40	0.80
						

9	 $g(x) = 0$	1.0	0.05	0.45		
10		2.0	0.10	0.50		
11		3.0	0.15	0.55		
12		4.0	0.20	0.60		
13		5.0	0.25	0.65		
14		6.0	0.30	0.70		
15		7.0	0.35	0.75		
16		8.0	0.40	0.80		
17	 	1.0	0.10	0.20	-1.0	0.10
18		2.0	0.15	0.30	-3.0	0.20
19		3.0	0.20	0.40	-4.0	0.30
20		4.0	0.30	0.50	-5.0	0.40
21		5.0	0.40	0.60	-1.0	0.50
22		6.0	0.50	0.70	1.0	0.60
23		7.0	0.60	0.80	2.0	0.70
24		8.0	0.70	0.90	2.5	0.80
25		9.0	0.80	0.95	3.0	0.90

Практическое задание №15

Тема: «Приближенное аналитическое решение краевой задачи для дифференциального уравнения 2-го порядка»

I. Задание.

Найти решение задачи Дирихле в квадрате со стороной 1 для уравнения

Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ с краевыми условиями вида $u(0, y) = f_1(y)$, $u(1, y) = f_2(y)$,

$0 \leq y \leq 1$, $u(x, 0) = f_3(x)$, $u(x, 1) = f_4(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

1. Для решения данной задачи разработать соответствующие компьютерные программы.
2. Для решения данной задачи воспользоваться ПО компьютера.

II. Варианты.

Номер варианта	$f_1(y)$	$f_2(y)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	y^2	$\cos y + (2 -$	x^3	$x + 1$
2	$e^y - e y^2$	$\cos 1)y$	$-x^3 + 1$	x^2
3	$-y^2 + 1$	y	$\sin x -$	x
4	0	y	$(1 + \sin 1)x^3 + 1$	x
5	$e^y + (1 - e)y^2 -$	y	$\sin x - x^3 \sin 1$	x
6	1	y	0	$2x + 1$
7	y^2	$\cos y + (3 -$	x^3	x^2
8	0	$\cos 1)y$	$\sin x - x^3 \sin 1$	$x - 2$
9	$2ey - (1 +$	y	$-x^3 + 1$	$9x^2 - 15x - 12$
10	$2e)y^2 - 1$	$-y$	$9x^2 + 7x + 6$	$6x^2 - 12x - 9$
11	$-10y^2 - 8y + 6$	$-10y^2 - 30y +$	$6x^2 + 4x + 3$	$4x^2 - 24x - 21$
12	$-7y^2 - 5y + 3$	22	$4x^2 + 2x + 1$	$18x^2 - 24x - 21$
13	$-5y^2 - 3y + 1$	$-7y^2 - 21y + 13$	$18x^2 + 16x + 15$	$3x^2 - 9x - 6$
14	$-19y^2 - 17y +$	$-5y^2 - 15y + 7$	$3x^2 + x$	$x + 1$
15	15	$-19y^2 - 57y +$	1	$x^2 + 1$
16	$-2y - 4y^2$	49	1	e^x
	1	$4 - 12y - 4y^2$	1	
	1	$y + 1$		
	1	$y + 1$		
		e^y		

17	$-y^3$	$1 - y^3$	x^2	$x^2 - 1$
18	$5y - y^2$	$4 - y^2 + 5y$	$x^2 + 3x$	$x^2 + 3x + 4$
19	$3 - 7y$	$7 - 6y$	$4x + 3$	$5x - 4$
20	y^2	$(1 - y)^2$	x^2	$(x - 1)^2$
21	y^2	$y^2 + 2y$	$x^2 - x$	$x^2 + x + 1$
22	y	$y + e$	e^x	$e^x + 1$
23	0	$\operatorname{tg} y$	0	$\operatorname{tg} x$
24	0	$\sin y$	0	$\sin x$
25	1	$1 + \cos y$	x	$x + \cos x$

Список рекомендованной литературы

Список рекомендованной литературы

Основная:

1. Амосов А.А. и др. Вычислительные методы: Учебное пособие. – 4-е изд. стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2014, 672 с.
2. Бахвалов Н., Жидков Н., Кобельков Г. Численные методы. – Москва – Санкт-Петербург: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
3. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и примерах. – М.: ВШ, 2009.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1. – М.: Физматгиз, 1966.
5. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. – М.: Физматгиз, 1962.
6. Вержбицкий В.М. Численные методы. – М.: Высшая школа, 2004.
7. Волков Е.А. Численные методы: Учебное пособие. 5-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008, 256с.
8. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики: Учебное пособие. 8-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2011, 672 с.
9. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: Учебное пособие. 5-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2010, 400 с.
10. Зализняк В.Е. Основы научных вычислений. Введение в численные методы для физиков. – М.: Едиториал УРСС, 2002, 296с.
11. Копчёнова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в задачах и примерах. – М.: Изд-во Лань, 2008, 368 с.
12. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 2008.
13. Срочко В.А. Численные методы. Курс лекций: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2010, 208с.
14. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов: учебное пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003, 320 с.
15. Формалёв В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006, 400 с.
16. Численные методы: лабораторный практикум / сост. Е.Л. Торопцев, Е.О. Тарасенко, П.К. Корнеев, А.В. Гладков. Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2015, 112 с.
17. Шевцов Г. С., Крюкова О.Г., Мызникова Б. И. Численные методы линейной алгебры: Учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Изд-во «Лань», 2011, 496с.
- 18.

Дополнительная:

19. Азаров А.И. и др. Сборник задач по методам вычислений. – М.: Наука, 1994.
20. Дьяченко В.Ф. Основные понятия вычислительной математики. – М.: Наука, 1977.
21. Дробышев В.И., Дымников В.П., Ривин Г.С. Задачи по вычислительной математике. – М.: Наука, 1980.
22. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошников В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ПРАВИЛА ПОВЕДЕНИЯ В КОМПЬЮТЕРНОМ КЛАССЕ

К работе в компьютерном классе допускаются лица, ознакомленные с инструкцией по технике безопасности и охране труда, с правилами поведения и размещения информационных ресурсов.

Работа студентов в компьютерном классе разрешается только в присутствии преподавателя (инженера, лаборанта).

Во время групповых занятий посторонние лица могут находиться в классе только с разрешения преподавателя.

Перед началом работы необходимо:

Убедиться в отсутствии видимых повреждений на рабочем месте;

Разместить на столе тетради, учебные пособия так, чтобы они не мешали работе на компьютере; принять правильную рабочую позу.

Если сеанс работы предыдущего пользователя не был завершен, завершить его; ввести регистрационную информацию (при необходимости).

При работе в компьютерном классе категорически запрещается:

- находиться в классе в верхней одежде;
- размещать одежду и сумки на рабочих местах;
- находиться в классе с едой и напитками;
- класть книги, тетради и т.п. на клавиатуру;
- располагаться сбоку или сзади от включенного монитора;
- присоединять или отсоединять кабели, трогать разъемы, провода и розетки;
- передвигать компьютеры;
- открывать системный блок;

- пытаться самостоятельно устранять неисправности в работе аппаратуры;
- перекрывать вентиляционные отверстия на системном блоке и мониторе;
- ударять по клавиатуре, нажимать бесцельно на клавиши;
- удалять или перемещать чужие файлы;
- устанавливать и запускать компьютерные игры;
- использовать Интернет-ресурсы не учебного назначения.

Находясь в компьютерном классе, необходимо:

соблюдать тишину и порядок, выключать мобильные телефоны от громкой связи; выполнять все требования преподавателя, инженера или лаборанта; работать только под своим именем и паролем; соблюдать режим работы (продолжительность непрерывной работы за компьютером не более двух часов с обязательным 10-минутным перерывом и гимнастикой для глаз; продолжительность интенсивной работы с клавиатурой не более 30 минут с последующей гимнастикой для рук; общая продолжительность работы не более 4 часов в день); при появлении рези в глазах, резкого ухудшения видимости, невозможности сфокусировать взгляд или навести его на резкость, появлении боли в пальцах и кистях рук, усилении сердцебиения немедленно покинуть рабочее место, сообщить о происшедшем преподавателю и обратиться к врачу; после окончания работы завершить все активные программы и корректно завершить сеанс; ставить рабочее место чистым.

Работая за компьютером, необходимо соблюдать правильную позу: расстояние от экрана до глаз 70-80 см (расстояние вытянутой руки); вертикально прямая спина; плечи опущены и расслаблены; ноги на полу и не скрещены; локти, запястья и кисти рук на

одном уровне; локтевые, тазобедренные, коленные, голеностопные суставы под прямым углом.

При появлении программных ошибок или сбоев оборудования студент обязан немедленно обратиться к преподавателю (инженеру, лаборанту).

В случае порчи или выхода из строя оборудования компьютерного класса повинность пользователя ремонта или замены оборудования производится за счет пользователя.