

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине «Основы математического моделирования»
для студентов направления подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Ставрополь, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

- 1 Прямая и обратная задачи теории погрешностей
- 2 Предельные абсолютные и относительные погрешности приближенных чисел
- 3 Определение погрешностей вычисления значений алгебраических выражений
- 4 Прямая задача приближенного вычисления значений функций одной и нескольких переменных
- 5 Обратная задача приближенного вычисления значений функций одной и нескольких переменных
- 6 Приближенные вычисления значения функции с помощью степенных рядов
- 7 Выполнение операций в позиционных системах счисления
- 8 Погрешности вычислений на компьютере
- 9 Вычислительный эксперимент
- 10 Исследование и модификация математических моделей.
- 11 Исследование вычислительных задач на их корректность и устойчивость
- 12 Реализации разработанных программ на компьютере и анализ их работы
- 13 Корректность и обусловленность вычислительных задач и алгоритмов.

Контрольные вопросы

Введение

Вычислительная техника наших дней предоставляет нам новые мощные средства для фактического выполнения вычислительной работы. При выполнении массовых вычислений важно придерживаться определенных простых правил, выработанных практикой. Соблюдение этих правил экономит труд вычислителя и позволяет рационально использовать имеющуюся вычислительную технику. Разумное использование вычислительной техники немыслимо без умелого применения методов приближенного и численного решения прикладных задач.

Этим и объясняется чрезвычайно возросший как в нашей стране, так и за рубежом интерес к методам вычислительной математики. С другой стороны, невозможно представить себе современную науку без широкого применения математического и информационного моделирования. Моделирование является одним из наиболее эффективных методов исследования. Оно заключается в построении и изучении специальных объектов (моделей), свойства которых подобны наиболее важным, с точки зрения исследователя, свойствам исследуемых объектов (оригиналов).

В широком смысле моделирование представляет собой научную дисциплину, в которой изучаются методы построения и использования моделей для познания реального мира.

Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его «образом» – математической моделью – и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительнологических алгоритмов. Этот метод познания, конструирования, проектирования сочетает в себе многие достоинства как теории, так и эксперимента. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях.

В то же время вычислительные (компьютерные, имитационные) эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам. Информационные модели представляют объекты в виде словесных описаний, текстов, рисунков, таблиц, схем, чертежей, формул и т.д. У информационной модели нет материального воплощения, она строится только на информации. Ее можно выразить на языке описания (знаковая модель) или языке представления (наглядная модель).

Методология математического и информационного моделирования бурно развивается, охватывая все новые сферы – от разработки технических систем и управления ими до анализа сложнейших процессов. Она может и должна быть интеллектуальным ядром информационных технологий, всего процесса информатизации общества. 4 Основное назначение данного пособия – систематическое и современное рассмотрение важнейших методов и приемов вычислительной математики, построения и исследования простейших математических и информационных моделей.

Контрольные вопросы в конце каждой темы направлены на закрепление теоретического материала, а приведенные задачи и упражнения нацелены на активизацию самостоятельной работы студентов.

Компьютерное моделирование за несколько последних десятилетий превратилось из инструмента численных решений различных уравнений и их систем в мощный аппарат исследования крупных научных и хозяйственных проблем.

Метод моделирования с успехом применяется в экономике, автоматизации проектирования различных объектов, организации работы сложных вычислительных комплексов, организации работы транспорта, сферы обслуживания, в системном анализе различных сторон деятельности человека (биология, экология, охрана окружающей среды, энергетика и т.д.), в автоматизированном управлении производством, в автоматизированных

системах обработки информации, связи и т.д. Моделирование применяется при проектировании, создании, технической диагностике, внедрении, эксплуатации сложных систем, в том числе, вычислительных.

Моделирование в широком смысле используется на различных уровнях изучения систем – начиная от анализа работы отдельных элементов и заканчивая исследованием системы в целом. Появление мощных компьютеров и компьютерных систем позволило увеличить сложность изучаемых моделей. Появилась возможность строить модели, учитывающие большое многообразие действующих факторов, не «подгоняя» модели под существующие математические методы и средства. О

сновной целью учебного пособия является формирование практических навыков моделирования как инструмента исследования, методологии анализа и моделирования систем, опыта их компьютерной реализации при решении исследовательских задач.

Для достижения указанной цели программой дисциплины предусмотрено решение следующих задач:

1. Усвоение основных методов учета погрешностей вычислений при реализации моделей на компьютере.
2. Усвоение классов систем и этапов математического и информационного моделирования.
3. Изучение проблемных вопросов построения математических и информационных моделей.
4. Приобретение навыков применения для моделирования систем программирования и специального программного обеспечения.

Вычислительная математика – раздел математики, включающий круг вопросов, связанных с использованием ЭВМ. Часто термин «Вычислительная математика» понимается как теория численных методов и алгоритмов решения типовых математических задач. Это толкование термина «Вычислительная математика» получило распространение на первоначальном этапе, когда использование компьютеров предъявило новые требования к численным методам; основной задачей на этом этапе была разработка новых методов, «удобных» для компьютеров. Это - широкий смысл термина «Вычислительная математика».

В вычислительной математике можно выделить следующие три основных раздела. Первый раздел связан с применением ЭВМ в различных областях научной и практической деятельности и может быть охарактеризован как анализ математических моделей.

Второй – с разработкой методов и алгоритмов решения типовых математических задач, возникающих при исследованиях математических моделей.

Третий раздел связан с вопросом об упрощении взаимоотношений человека с компьютером, включая теорию и практику программирования задач для ЭВМ. Анализ математических моделей включает в себя изучение постановки задачи, выбор модели, анализ и обработку входной информации, численное решение математических задач, возникающих при исследовании модели, анализ результатов вычислений и, наконец, вопросы, связанные с реализацией полученных результатов.

Задача выбора модели должна решаться с учетом следующего требования. Степень достоверности, с которой результаты анализа модели позволяют исследовать конкретное явление (или класс явлений), должна соответствовать точности исходной информации.

При этом с появлением возможности получать более точную информацию обычно возникает необходимость совершенствования построенной модели, а в ряде случаев даже коренной ее замены. Для этих задач приобретает существенное значение обработка исходной информации, что в большинстве случаев требует привлечения методов математической статистики.

В качестве примеров типовых математических задач, часто встречающихся в приложениях, можно назвать задачи алгебры: здесь большое значение имеют численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (в частности, больших сис-

тем), обращение матриц, нахождение собственных значений матриц (нескольких первых значений или всех собственных значений).

Другие примеры: численное дифференцирование и интегрирование функций одной или нескольких переменных; численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, решение уравнений в частных производных и т.д. Изучение реальных явлений на основе анализа построенных моделей, как правило, требует развития численных методов и привлечения компьютеров.

Таким образом, в вычислительной математике важное место занимают численные методы решения поставленных математических задач и, в первую очередь, типовых математических задач (вычислительная математика в узком смысле слова). Основная задача теории погрешностей состоит в оценке погрешности результата вычислений при известных погрешностях исходных данных.

Почти всегда используемые на практике решения математических задач имеют некоторые погрешности. То же самое происходит и при реализации математических моделей на ЭВМ.

Погрешность решения задачи обуславливается следующими причинами:

1. Математическое описание задачи является неточным, в частности, неточно заданы исходные данные описания.

2. Применяемый для решения метод часто не является точным: получение точного решения задачи требует неограниченного или неприемлемо большого числа арифметических операций, и поэтому вместо получения точного решения приходится прибегать к приближенному.

3. При выполнении арифметических операций на ЭВМ или любым другим образом, как правило, производятся округления. (Это же относится к вводу чисел в память ЭВМ и выводу полученных результатов.)

Погрешности, соответствующие этим причинам, называются:

- неустраняемая погрешность,
 - погрешность метода,
 - вычислительная погрешность,
- погрешность округлений.

В связи с этим при изучении нашей дисциплины мы подробно рассмотрим понятия абсолютной и относительной погрешностей, а также оценки погрешностей при выполнении арифметических операций, вычисления значений функций, обратную задачу оценки погрешности. С этими понятиями связаны понятия корректности, устойчивости и обусловленности вычислительной задачи и вычислительных алгоритмов, которым мы также уделим внимание.

После выполнения каждой лабораторной работы студенты представляют отчет, в котором необходимо отразить следующие разделы:

- постановка (условие) задачи;
- математическая модель;
- метод исследования модели на ее адекватность действительности;
- алгоритм моделирования задачи;
- программа на языке программирования высокого уровня или в математическом пакете;
- результаты выполнения работы;
- содержательный анализ результатов моделирования, выводы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

ТЕМА: Прямая и обратная задачи теории погрешностей

Цели лабораторной работы:

- выработка практических навыков в выполнении работ по математическому моделированию;
- освоение элементов самостоятельной научно-исследовательской работы;
- закрепление навыков программирования.

После выполнения лабораторной работы студенты представляют отчет, в котором необходимо отразить следующие разделы:

- постановка (условие) задачи;
- математическая модель;
- метод исследования модели на ее адекватность действительности;
- алгоритм моделирования задачи;
- программа на языке программирования высокого уровня или в математическом пакете;
- результаты выполнения работы;
- содержательный анализ результатов моделирования, выводы.

1. Округлить:

- а) до десятых 12,34;
- б) до сотых 3,2465; 1038,785;
- в) до тысячных 3,4335.
- г) до тысяч 12375; 320729.

Ответы.

- а) $12,34 \approx 12,3$;
- б) $3,2465 \approx 3,25$; $1038,785 \approx 1038,79$;
- в) $3,4335 \approx 3,434$.
- г) $12375 \approx 12\,000$; $320729 \approx 321\,000$.

2. Приближенные вычисления с помощью правил подсчета цифр

1. *Предварительные замечания.* Различают приближенные вычисления со строгим учетом погрешностей и без строгого учета. В менее ответственных вычислениях с приближенными числами пользуются вторым способом, основанным на так называемых правилах подсчета цифр.

В этих правилах используются понятия десятичных знаков, значащих цифр, точных и сомнительных цифр. Напомним, что десятичными знаками числа называют все его цифры, стоящие правее запятой. Например, числа 3,5 и 3,05 имеют соответственно один и два десятичных знака.

Значащими цифрами числа называются все его цифры, начиная с первой слева отличной от нуля, кроме нулей, стоящих в конце записи числа на месте отброшенных при округлении цифр (как уже отмечалось, эти нули обычно подчеркивают или пишут меньшими).

Примеры. В числе 3,5 - две значащих цифры, в числе 0,0307 - три значащих цифры. В числе 35000, полученном в результате округления до тысяч, две значащих цифры.

Если граница абсолютной погрешности приближенного числа равна половине единицы разряда последней его цифры, то все цифры этого числа называют точными. Если же эта граница больше половины единицы разряда последней цифры числа, то последняя цифра такого числа называется *сомнительной*.

Примеры. В числе 2,06 ($\pm 0,005$) цифры 2, 0 точные, а 6 – сомнительная цифра. В числе 2,06 ($\pm 0,01$) цифры 2 и 0 точные, а 6 – сомнительная цифра. В числе 35000, полученном в результате округления до тысяч, цифры 3 и 5 точные, а все три нуля - сомнительные.

Правила подсчета цифр тесно связаны с принципом А.Н. Крылова (1863-1945): приближенное число следует писать так, чтобы в нем все значащие цифры, кроме последней, были верны и лишь последняя цифра была бы сомнительна и при том не более как на одну

единицу. Например, если приближенное число записано так: $x \approx 3,52$, то это значит, что оно дано с точностью до сотых, т.е. $x \approx 3,52(\pm 0,01)$. Если же известно, что $x \approx 3,72 (\pm 0,02)$, то, согласно принципу А.Н. Крылова, его надо писать так: $x \approx 3,7$.

Вычисления с приближенными числами, записанными таким способом, выполняют как и над точными числами, но, придерживаясь таких правил.

3. Правила подсчета цифр

1) При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном числе с наименьшим числом десятичных знаков.

Пример 1. Найти сумму приближенных чисел 127,42; 67,3; 0,12 и 3,03.

Решение:

$$\begin{array}{r} 127,42 \\ 67,3 \\ + 0,12 \\ \hline 3,03 \\ \hline 197,87 \approx 197,9 \end{array}$$

Пример 2. Найти разность чисел 418,7 и 39,832.

Решение:

$$\begin{array}{r} 418,7 \\ - 39,832 \\ \hline 378,87 \approx 378,9 \end{array}$$

2) При умножении и делении приближенных чисел в произведении надо сохранить столько значащих цифр, сколько их есть в данном числе с наименьшим количеством значащих цифр.

Пример. Перемножить приближенные числа 3,4 и 12,32.

Решение:

$$\begin{array}{r} 12,32 \\ \times 3,4 \\ \hline 4928 \\ + 3696 \\ \hline 41,888 \approx 42 \end{array}$$

Задача. Площадь прямоугольной грядки приближенно равна 7,6 кв. м, ширина – 2,38 м. Чему равна ее длина?

Решение: Длина грядки равна частному от деления 7,6 на 2,38.

$$\begin{array}{r} 7,60 \overline{) 2,38} \\ \underline{7,14} \\ 460 \\ \underline{238} \\ 2220 \\ \underline{2142} \\ 78 \end{array}$$

Последнюю цифру частного 9 можно было и не писать, а получив в частном две значащие цифры, заметив, что остаток больше половины делителя, округлить частное с избытком.

3) При возведении приближенных чисел в квадрат или куб в результате сохраняется столько значащих цифр, сколько их было в основании.

Примеры: $2,3^2 = 5,29 \approx 5,3$; $0,8^3 = 0,512 \approx 0,5$.

4) В промежуточных результатах следует брать на одну цифру больше, чем рекомендуют предыдущие правила.

5) Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при действиях первой степени) или больше значащих цифр (при действиях второй и третьей степеней) чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну запасную цифру.

6) Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с k цифрами данные следует брать с таким количеством цифр, которое дает согласно правилам 1) - 4) $k+1$ цифру в результате.

Пример применения правил подсчета цифр. Вычислить $x = \frac{(a-b)c}{a+b}$, если $a \approx 9,31; b \approx 3,1; c \approx 2,33$.

Решение:

$$\begin{aligned}a - b &= 9,31 - 3,1 = 6,21; \\(a - b)c &= 6,21 \cdot 2,33 \approx 14,5; \\a + b &= 9,31 + 3,1 = 12,4; \\x &= 14,5 : 12,4 \approx 1,2.\end{aligned}$$

Ответ: $x = 1,2$.

Примечание. Сформулированные выше правила подсчета цифр имеют вероятностный характер: они наиболее вероятны, хотя существуют примеры, не удовлетворяющие этим правилам. Поэтому вычисления методом подсчета цифр – самый *грубый* способ оценки погрешности результатов действий. Однако этот метод очень прост и удобен, а точность таких вычислений вполне достаточна для большинства технических расчетов. Поэтому этот метод широко распространен в вычислительной практике.

В более ответственных вычислениях пользуются метод границ (или методом граничных погрешностей).

4. Приближенные вычисления методом границ

Наилучшим в смысле строгости из известных методов приближенных вычислений является метод границ. Пользуясь этим методом, по известным нижним и верхним границам данных чисел находят отдельно нижнюю и верхнюю границы результата.

Пусть, например, надо сложить два числа $x \approx 3,2 (\pm 0,05)$ и $y \approx 7,9 (\pm 0,05)$.

Имеем: $3,15 < x < 3,25; 7,85 < y < 7,95$, откуда $11,00 < x + y < 11,20$.

Таким образом, $x + y \approx 11,1 (\pm 0,1)$.

Вообще, нижняя граница (НГ) суммы приближенных чисел равна сумме нижних границ слагаемых, а верхняя граница (ВГ) – сумме верхних границ слагаемых. Символически это можно записать так:

$$\text{НГ}(x + y) = \text{НГ}(x) + \text{НГ}(y); \quad \text{ВГ}(x + y) = \text{ВГ}(x) + \text{ВГ}(y).$$

Аналогичные правила справедливы для умножения.

$$\text{НГ}(xy) = \text{НГ}(x) \cdot \text{НГ}(y); \quad \text{ВГ}(xy) = \text{ВГ}(x) \cdot \text{ВГ}(y).$$

Для обратных действий – вычитания и деления – соответствующие правила имеют вид:

$$\text{НГ}(x - y) = \text{НГ}(x) - \text{НГ}(y); \quad \text{ВГ}(x - y) = \text{ВГ}(x) - \text{ВГ}(y).$$

$$\text{НГ}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\text{НГ}(x)}{\text{ВГ}(y)}; \quad \text{ВГ}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\text{ВГ}(x)}{\text{НГ}(y)}.$$

Из определения НГ и ВГ вытекают также следующие правила:

- 1) округлять НГ можно только по недостатку, а ВГ – по избытку;
- 2) чем меньше разность $\text{НГ}(x) - \text{НГ}(y)$, тем точнее определяется число x ;
- 3) в качестве приближенного значения x рекомендуется брать среднее арифметическое чисел $\text{НГ}(x)$ и $\text{ВГ}(x)$ или число, близкое к нему.

Пример применения метода границ при вычислениях. Вычислить $x = \frac{(a-b)c}{a+b}$, если $a \approx 9,21 (\pm 0,01)$; $b \approx 3,05 (\pm 0,02)$; $c \approx 2,33 (\pm 0,01)$.

Решение: Определяем НГ и ВГ каждого из чисел a, b, c и, выполнив над ними соответствующие действия, находим НГ и ВГ числа x . Запись удобно оформить в виде таблицы:

Компоненты	НГ	ВГ
a	9,20	9,22
b	3,03	3,07
c	2,32	2,34
$a - b$	6,13	6,19
$(a - b) c$	14,22	14,49
$a + b$	12,23	12,29
x	1,15	1,19

$$\begin{array}{r}
 1,15 < x < 1,19 \\
 + \quad 1,15 \quad - \quad 1,19 \\
 + \quad \underline{1,19} \quad - \quad \underline{1,15} \\
 2,34 \quad \quad \quad 0,04 \\
 2,34:2=1,17; \quad 0,04:2=0,02,
 \end{array}$$

Ответ: $x \approx 1,17 (\pm 0,02)$.

5. Абсолютные и относительные погрешности приближенных чисел

Расчеты, как правило, производятся с приближенными значениями величин — *приближенными числами*. Уже исходные данные для расчета обычно даются с некоторыми погрешностями; в процессе расчета еще накапливаются погрешности от округления, от применения приближенных формул и т. п. Разумная оценка погрешности при вычислениях позволяет указать оптимальное количество знаков, которые следует сохранять при расчетах, а также в окончательном результате.

Погрешность приближенного числа a , т. е. разность $a - a_0$ между ним и точным значением a_0 , обычно неизвестна. Под *оценкой погрешности* приближенного числа a понимают установление неравенства вида

$$|a - a_0| \leq \Delta_a. \quad (1)$$

Число Δ_a называется *абсолютной погрешностью приближенного числа a* (иногда употребляют термин «предельная абсолютная погрешность»). Это число определяется неоднозначно. Обычно стараются указать возможно меньшее число Δ_a , удовлетворяющее неравенству (1).

Абсолютные погрешности записывают не более чем с двумя-тремя значащими цифрами (при подсчете числа значащих цифр не учитывают нулей, стоящих слева; например, в числе 0,010030 имеется 5 значащих цифр). В приближенном числе a не следует сохранять те разряды, которые подвергаются округлению в его абсолютной погрешности Δ_a .

Пример 1. Длина и ширина комнаты, измеренные с точностью до 1 см, равны соответственно $a = 5,43$ м и $b = 3,82$ м. Оценить погрешность в определении площади комнаты $S = ab = 20,7426$ м².

Решение. По условию задачи $\Delta_a = 0,01$ м, $\Delta_b = 0,01$ м. Крайние возможные значения площади равны $(a + 0,01)(b + 0,01) = 20,8352$ м² и $(a - 0,01)(b - 0,01) = 20,6502$ м². Сравнивая их с подсчитанными выше значениями площади S , получаем оценку

$$|S - S_0| \leq 0,0926,$$

что дает возможность указать абсолютную погрешность числа S в виде $\Delta_S = 0,0926 \text{ м}^2$. Здесь разумно округлить значение Δ_S , например, так: $\Delta_S = 0,093 \text{ м}^2$ или $\Delta_S = 0,10 \text{ м}^2$ (абсолютные погрешности округляют в большую сторону). При этом приближенное значение площади можно записать в виде $S = 20,743 \text{ м}^2$ или $S = 20,74 \text{ м}^2$, или $S = 20,7 \text{ м}^2$.

Пример 2. В некоторую вычислительную машину мы можем ввести числа только с тремя значащими цифрами. С какой точностью мы можем ввести в нее числа π и $1/3$?

Решение. Полагаем $\pi \approx 3,14 = a$ вместо $\pi \approx 3,141592 \dots$; $1/3 \approx 0,333 = b$. Погрешность числа a можно оценить числом $\Delta_a = 0,0016$, а погрешность числа b можно оценить числом $\Delta_b = 0,00034$ или $\Delta_b = 0,0004$.

Относительной погрешностью δ_a приближенного числа a называется отношение его абсолютной погрешности Δ_a к абсолютной величине числа a , то есть

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \quad (2)$$

($a \neq 0$). Относительная погрешность обычно выражается в процентах, и ее принято записывать не более чем с двумя-тремя значащими цифрами (знаками). Иногда под относительной погрешностью понимают отношение

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a_0|},$$

где a_0 — точное (но неизвестное) значение числа; если относительная погрешность числа a не превышает 5%, то различие между отношениями $\frac{\Delta_a}{|a|}$ и $\frac{\Delta_a}{|a_0|}$ сказывается только на втором знаке погрешности, что не существенно.

Пример 3. Определить относительную погрешность числа S в примере 1.

Решение. $S = 20,7426$, $\Delta_S = 0,0926$, поэтому

$$\delta_S = \frac{0,0926}{20,7426} = \frac{926}{207426} = 0,0045 = 0,45\%.$$

Во многих технических приложениях принято характеризовать точность приближенных чисел их относительной погрешностью. Относительная погрешность приближенного числа связана с количеством его верных знаков. *Количество верных знаков* числа отсчитывается от первой значащей цифры числа до первой значащей цифры его абсолютной погрешности: например, число $= 20,7426$ с абсолютной погрешностью $\Delta_S = 0,0926$ имеет три верных знака (2, 0, 7); остальные знаки — *сомнительные*. Ориентировочно можно считать, что наличие только одного верного знака соответствует относительной погрешности порядка 10%, двух верных знаков — погрешности порядка 1%, трех верных знаков — погрешности порядка 0,1% и т. д.

В математических таблицах все числа округлены до верных знаков, причем абсолютная погрешность не превосходит половины единицы последнего оставленного разряда. Например, если в таблице указано $e = 2,718$, то абсолютная погрешность не превосходит $0,5 \cdot 10^{-3}$. В окончательных результатах вычислений обычно оставляют, кроме верных знаков, один сомнительный знак. В промежуточных результатах вычислений обычно сохраняют два-три сомнительных знака, чтобы не накапливать лишних погрешностей от округлений.

Пример 4. Округлить число $S = 20,7426$ в примере 1 до верных знаков.

Решение. Так как в числе S три верных знака, то естественно записать $S = 20,7$. Однако при этом к абсолютной погрешности $\Delta_S = 0,0926$ приходится добавить еще величину 0,0426, отброшенную при округлении. Новая абсолютная погрешность $\Delta_S = 0,136$ заставляет считать сомнительным уже третий знак числа S , и, следовательно, число S приходится округлять до двух знаков: $S = 21$ ($\Delta_S = 0,44 < 0,5$).

Этот пример показывает, что округление результатов расчета до верных знаков не всегда целесообразно.

ЗАДАЧИ

1. Округляя следующие числа до трех значащих цифр, определить абсолютную Δ и относительную δ погрешности полученных приближенных чисел:

- а) 2,1514, б) 0,16152, в) 0,01204, г) 1,225, д) -0,0015281,
е) -392,85, ж) 0,1545, з) 0,003922, и) 625,55, к) 94,525.

2. Определить абсолютную погрешность следующих приближенных чисел по их относительным погрешностям.

- а) $a = 13267$, $\delta = 0,1\%$; б) $a = 2,32$, $\delta = 0,7\%$; в) $a = 35,72$, $\delta = 1\%$;
г) $a = 0,896$, $\delta = 10\%$, д) $a = 232,44$, $\delta = 1\%$.

3. При измерении некоторых углов получили числа $\alpha_1 = 21^\circ 37' 3''$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\alpha_3 = 1^\circ 10''$, $\alpha_4 = 75^\circ 20' 44''$. Определить относительные погрешности чисел α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , полагая абсолютную погрешность измерения равной $1''$.

4. Определить количество верных знаков в числе x , если известна его абсолютная погрешность.

- а) $x = 0,3941$, $\Delta_x = 0,25 \cdot 10^{-2}$; б) $x = 0,1132$, $\Delta_x = 0,1 \cdot 10^{-3}$;
в) $x = 38,2543$, $\Delta_x = 0,27 \cdot 10^{-2}$; г) $x = 293,481$, $\Delta_x = 0,1$;
д) $x = 2,325$, $\Delta_x = 0,1 \cdot 10^{-1}$; е) $x = 14,00231$, $\Delta_x = 0,1 \cdot 10^{-3}$;
ж) $x = 0,0842$, $\Delta_x = 0,15 \cdot 10^{-2}$; з) $x = 0,00381$, $\Delta_x = 0,1 \cdot 10^{-4}$;
и) $x = -32,285$, $\Delta_x = 0,2 \cdot 10^{-2}$; к) $x = -0,2113$, $\Delta_x = 0,5 \cdot 10^{-2}$.

5. Определить количество верных знаков в числе a , если известна его относительная погрешность.

- а) $a = 1,8921$, $\delta_a = 0,1 \cdot 10^{-2}$; б) $a = 0,2218$, $\delta_a = 0,2 \cdot 10^{-1}$;
в) $a = 22,351$, $\delta_a = 0,15$; г) $a = 0,02425$, $\delta_a = 0,5 \cdot 10^{-2}$;
д) $a = 0,000135$, $\delta_a = 0,15$; е) $a = 9,3598$, $\delta_a = 0,1\%$;
ж) $a = 0,11452$, $\delta_a = 10\%$; з) $a = 48361$, $\delta_a = 1\%$;
и) $a = 592,8$, $\delta_a = 2\%$; к) $a = 14,9360$, $\delta_a = 1\%$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

ТЕМА: Предельные абсолютные и относительные погрешности приближенных чисел

Цели лабораторной работы:

- выработка практических навыков в выполнении работ по математическому моделированию;
- освоение элементов самостоятельной научно-исследовательской работы;
- закрепление навыков программирования.

После выполнения лабораторной работы студенты представляют отчет, в котором необходимо отразить следующие разделы:

- постановка (условие) задачи;
- математическая модель;
- метод исследования модели на ее адекватность действительности;
- алгоритм моделирования задачи;
- программа на языке программирования высокого уровня или в математическом пакете;
- результаты выполнения работы;
- содержательный анализ результатов моделирования, выводы.

Задание. 1) Определить, какое равенство точнее.

2) Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки: а) в узком смысле; б) в широком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.

3) Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры: а) в узком смысле; б) в широком смысле.

№ 1. 1) $\sqrt{44}=6,63$; $19/41=0,463$.
2) а) $22,553 (\pm 0,016)$;
б) $2,8546$; $\delta=0,3\%$.
3) а) $0,2387$; б) $42,884$.

№ 3. 1) $\sqrt{10,5}=3,24$; $4/17=0,235$.
2) а) $34,834$; $\delta=0,1\%$;
б) $0,5748 (\pm 0,0034)$.
3) а) $11,445$; б) $2,043$.

№ 5. 1) $6/7=0,857$; $\sqrt{4,8}=2,19$.
2) а) $5,435 (\pm 0,0028)$;
б) $10,8441$; $\delta=0,5\%$.
3) а) $8,345$; б) $0,288$.

№ 7. 1) $2/21=0,095$; $\sqrt{22}=4,69$.
2) а) $2,4543 (\pm 0,0032)$;
б) $24,5643$; $\delta=0,1\%$.
3) а) $0,374$; б) $4,348$.

№ 9. 1) $6/11=0,545$; $\sqrt{83}=9,11$.
2) а) $21,68563$; $\delta=0,3\%$;
б) $3,7834 (\pm 0,0041)$.
3) а) $41,72$; б) $0,678$.

№ 11. 1) $21/29=0,723$; $\sqrt{44}=6,63$.
2) а) $0,3567$; $\delta=0,042\%$;
б) $13,6253 (\pm 0,0021)$.
3) а) $18,357$; б) $2,16$.

№ 13. 1) $13/17=0,764$; $\sqrt{31}=5,56$.
2) а) $3,6878 (\pm 0,0013)$;
б) $15,873$; $\delta=0,42\%$.
3) а) $14,862$; б) $8,73$.

№ 2. 1) $7/15=0,467$; $\sqrt{30}=5,48$.
2) а) $17,2834$; $\delta=0,3\%$.
б) $6,4257 (\pm 0,0024)$.
3) а) $3,751$; б) $0,537$.

№ 4. 1) $15/7=2,14$; $\sqrt{10}=3,16$.
2) а) $2,3485 (\pm 0,0042)$;
б) $0,34484$; $\delta=0,4\%$.
3) а) $2,3445$; б) $0,745$.

№ 6. 1) $12/11=1,091$; $\sqrt{6,8}=2,61$.
2) а) $8,24163$; $\delta=0,2\%$;
б) $0,12356 (\pm 0,00036)$.
3) а) $12,45$; б) $3,4453$.

№ 8. 1) $23/15=1,53$; $\sqrt{9,8}=3,13$.
2) а) $23,574$; $\delta=0,2\%$;
б) $8,3445 (\pm 0,0022)$.
3) а) $20,43$; б) $0,576$.

№ 10. 1) $17/19=0,895$; $\sqrt{52}=7,21$.
2) а) $13,537 (\pm 0,0026)$;
б) $7,521$; $\delta=0,12\%$.
3) а) $5,634$; б) $0,0748$.

№ 12. 1) $50/19=2,63$; $\sqrt{27}=5,19$.
2) а) $1,784 (\pm 0,0063)$;
б) $0,85637$; $\delta=0,21\%$.
3) а) $0,5746$; б) $236,58$.

№ 14. 1) $7/22=0,318$; $\sqrt{13}=3,60$.
2) а) $27,1548 (\pm 0,0016)$;
б) $0,3945$; $\delta=0,16\%$.
3) а) $0,3648$; б) $21,7$.

№ 15. 1) $17/11 = 1,545$; $\sqrt{18} = 4,24$.
2) а) $0,8647 (\pm 0,0013)$;
б) $24,3618$; $\delta = 0,22\%$.
3) а) $2,4516$; б) $0,863$.

№ 17. 1) $49/13 = 3,77$; $\sqrt{14} = 3,74$.
2) а) $83,736$; $\delta = 0,085\%$;
б) $5,6483 (\pm 0,0017)$.
3) а) $5,6432$; б) $0,00858$.

№ 19. 1) $19/12 = 1,58$; $\sqrt{12} = 3,46$.
2) а) $4,88445 (\pm 0,00052)$;
б) $0,096835$; $\delta = 0,32\%$.
3) а) $12,688$; б) $4,636$.

№ 21. 1) $18/7 = 2,57$; $\sqrt{22} = 4,69$.
2) а) $0,39642 (\pm 0,00022)$;
б) $46,453$; $\delta = 0,15\%$.
3) а) $15,644$; б) $6,125$.

№ 23. 1) $16/7 = 2,28$; $\sqrt{11} = 3,32$.
2) а) $24,3872$; $\delta = 0,34\%$;
б) $0,75244 (\pm 0,00013)$.
3) а) $16,383$; б) $5,734$.

№ 25. 1) $12/7 = 1,71$; $\sqrt{47} = 6,86$.
2) а) $72,354$; $\delta = 0,24\%$;
б) $0,38725 (\pm 0,00112)$.
3) а) $18,275$; б) $0,00644$.

№ 27. 1) $23/9 = 2,56$; $\sqrt{87} = 9,33$.
2) а) $23,7564$; $\delta = 0,44\%$;
б) $4,57633 (\pm 0,00042)$.
3) а) $3,75$; б) $6,8343$.

№ 29. 1) $7/3 = 2,33$; $\sqrt{58} = 7,61$.
2) а) $3,87683$; $\delta = 0,33\%$;
б) $13,5726 (\pm 0,0072)$.
3) а) $26,3$; б) $4,8556$.

№ 16. 1) $5/3 = 1,667$; $\sqrt{38} = 6,16$.
2) а) $3,7542$; $\delta = 0,32\%$;
б) $0,98351 (\pm 0,00042)$.
3) а) $62,74$; б) $0,389$.

№ 18. 1) $13/7 = 1,857$; $\sqrt{7} = 2,64$.
2) а) $2,8867$; $\delta = 0,43\%$;
б) $32,7486 (\pm 0,0012)$.
3) а) $0,0384$; б) $63,745$.

№ 20. 1) $51/11 = 4,64$; $\sqrt{35} = 5,91$.
2) а) $38,4258 (\pm 0,0014)$;
б) $0,66385$; $\delta = 0,34\%$.
3) а) $6,743$; б) $0,543$.

№ 22. 1) $19/9 = 2,11$; $\sqrt{17} = 4,12$.
2) а) $5,8425$; $\delta = 0,23\%$.
б) $0,66385 (\pm 0,00042)$.
3) а) $0,3825$; б) $24,6$.

№ 24. 1) $20/13 = 1,54$; $\sqrt{63} = 7,94$.
2) а) $2,3684 (\pm 0,0017)$;
б) $45,7832$; $\delta = 0,18\%$.
3) а) $0,573$; б) $3,6761$.

№ 26. 1) $6/7 = 0,857$; $\sqrt{41} = 6,40$.
2) а) $0,36127 (\pm 0,00034)$;
б) $46,7843$; $\delta = 0,32\%$.
3) а) $3,425$; б) $7,38$.

№ 28. 1) $27/31 = 0,872$; $\sqrt{42} = 6,48$.
2) а) $15,8372 (\pm 0,0026)$;
б) $0,088748$; $\delta = 0,56\%$.
3) а) $3,643$; б) $72,385$.

№ 30. 1) $14/17 = 0,823$; $\sqrt{53} = 7,28$.
2) а) $0,66835 (\pm 0,00115)$;
б) $23,3748$; $\delta = 0,27\%$.
3) а) $43,813$; б) $0,645$.

Образец выполнения задания

1) $9/11 = 0,818$; $\sqrt{18} = 4,24$; 2) а) $72,353 (\pm 0,026)$; б) $2,3544$; $\delta = 0,2\%$; 3) а) $0,4357$; б) $12,384$.

1) Находим значения данных выражений с большим числом десятичных знаков: $a_1 = 9/11 = 0,81818 \dots$, $a_2 = \sqrt{18} = 4,2426 \dots$. Затем вычисляем предельные абсолютные погрешности, округляя их с избытком:

$$\alpha_{a_1} = |0,81818 - 0,818| \leq 0,00019, \quad \alpha_{a_2} = |4,2426 - 4,24| \leq 0,0027.$$

Предельные относительные погрешности составляют

$$\delta_{a_1} = \frac{\alpha_{a_1}}{a_1} = \frac{0,00019}{0,818} = 0,00024 = 0,024\%;$$

$$\delta_{a_2} = \frac{\alpha_{a_2}}{a_2} = \frac{0,0027}{4,24} = 0,00064 = 0,064\%.$$

Так как $\delta_{a_1} < \delta_{a_2}$, то равенство $9/11 = 0,818$ является более точным.

2) а) Пусть $72,353 (\pm 0,026) = a$. Согласно условию, погрешность $\alpha_a = 0,026 < 0,05$; это означает, что в числе 72,353 верными в узком смысле являются цифры 7, 2, 3. По правилам округления найдем приближенное значение числа, сохранив десятые доли:

$$a_1 = 72,4; \alpha_{a_1} = \alpha_a + \Delta_{\text{окр}} = 0,026 + 0,047 = 0,073.$$

Полученная погрешность больше 0,05; значит, нужно уменьшить число цифр в приближенном числе до двух:

$$a_2 = 72; \alpha_{a_2} = \alpha_a + \Delta_{\text{окр}} = 0,026 + 0,353 = 0,379.$$

Так как $\alpha_{a_2} < 0,5$, то обе оставшиеся цифры верны в узком смысле.

б) Пусть $a = 2,3544$; $\delta_a = 0,2\%$; тогда $\alpha_a = a \cdot \delta_a = 0,00471$. В данном числе верными в широком смысле являются три цифры, поэтому округляем его, сохраняя эти три цифры:

$$a_1 = 2,35; \alpha_{a_1} = 0,0044 + 0,00471 = 0,00911 < 0,01.$$

Значит, и в округленном числе 2,35 все три цифры верны в широком смысле.

3) а) Так как все четыре числа $a = 0,4357$ верны в узком смысле, то абсолютная погрешность $\alpha_a = 0,00005$, а относительная погрешность $\delta_a = 1/(2 \cdot 4 \cdot 10^3) = 0,000125 = 0,0125\%$.

б) Так как все пять цифр числа $a = 12,384$ верны в широком смысле, то $\alpha_a = 0,001$; $\delta_a = 1/(1 \cdot 10^4) = 0,0001 = 0,01\%$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3 **ТЕМА: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ВЫРАЖЕНИЙ**

Цели лабораторной работы:

- выработка практических навыков в выполнении работ по математическому моделированию;
- освоение элементов самостоятельной научно-исследовательской работы;
- закрепление навыков программирования.

После выполнения лабораторной работы студенты представляют отчет, в котором необходимо отразить следующие разделы:

- постановка (условие) задачи;
- математическая модель;
- метод исследования модели на ее адекватность действительности;
- алгоритм моделирования задачи;
- программа на языке программирования высокого уровня или в математическом пакете;
- результаты выполнения работы;
- содержательный анализ результатов моделирования, выводы.

- Задание.** 1) Вычислить и определить погрешности результата.
 2) Вычислить и определить погрешности результата.
 3) Вычислить, пользуясь правилами подсчета цифр.

№ 1. 1) $X = \frac{ab}{\sqrt[3]{c}}$

	a	b	в
a	3,85 (±0,01)	4,16 (±0,005)	7,27 (±0,01)
b	2,0435 (±0,0004)	12,163 (±0,002)	5,205 (±0,002)
c	962,6 (±0,1)	55,18 (±0,01)	87,32 (±0,03)

2) $X = \left[\frac{(a+b)c}{m-n} \right]^2$

	a	b	в
a	4,3 (±0,05)	5,2 (±0,04)	2,13 (±0,01)
b	17,21 (±0,02)	15,32 (±0,01)	22,16 (±0,03)
c	8,2 (±0,05)	7,5 (±0,05)	6,3 (±0,04)
m	12,417 (±0,003)	21,823 (±0,002)	16,825 (±0,004)
n	8,37 (±0,005)	7,56 (±0,003)	8,13 (±0,002)

$$3) S = \frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$$

	a	b	B
a	1,141	2,234	5,813
b	3,156	4,518	1,315
h	1,14	4,48	2,56

$$\text{№ 2. 1) } X = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{c}$$

	a	b	B
a	228,6 ($\pm 0,06$)	315,6 ($\pm 0,05$)	186,7 ($\pm 0,04$)
b	86,4 ($\pm 0,02$)	72,5 ($\pm 0,03$)	66,6 ($\pm 0,02$)
c	68,7 ($\pm 0,05$)	53,8 ($\pm 0,04$)	72,3 ($\pm 0,03$)

$$2) X = \frac{m^3(a+b)}{c-d}$$

	a	b	B
a	13,5 ($\pm 0,02$)	18,5 ($\pm 0,03$)	11,8 ($\pm 0,02$)
b	3,7 ($\pm 0,02$)	5,6 ($\pm 0,02$)	7,4 ($\pm 0,03$)
m	4,22 ($\pm 0,004$)	3,42 ($\pm 0,003$)	5,82 ($\pm 0,005$)
c	34,5 ($\pm 0,02$)	26,3 ($\pm 0,01$)	26,7 ($\pm 0,03$)
d	23,725 ($\pm 0,005$)	14,782 ($\pm 0,006$)	11,234 ($\pm 0,004$)

$$3) M = \frac{(a+b)h^3}{4} + \frac{(a+b)h}{12}$$

	a	b	B
a	8,53	6,44	9,05
b	6,271	5,323	3,244
h	12,48	15,44	20,18

$$\text{№ 3. 1) } X = \frac{\sqrt{ab}}{c}$$

	a	b	B
a	3,845 ($\pm 0,004$)	4,632 ($\pm 0,003$)	7,312 ($\pm 0,004$)
b	16,2 ($\pm 0,05$)	23,3 ($\pm 0,04$)	18,4 ($\pm 0,03$)
c	10,8 ($\pm 0,1$)	11,3 ($\pm 0,06$)	20,2 ($\pm 0,08$)

$$2) X = \frac{(a+b)m}{(c-d)^2}$$

	a	б	в
a	2,754 ($\pm 0,001$)	3,236 ($\pm 0,002$)	4,523 ($\pm 0,003$)
b	11,7 ($\pm 0,04$)	15,8 ($\pm 0,03$)	10,8 ($\pm 0,02$)
m	0,56 ($\pm 0,005$)	0,64 ($\pm 0,004$)	0,85 ($\pm 0,003$)
c	10,536 ($\pm 0,002$)	12,415 ($\pm 0,003$)	9,318 ($\pm 0,002$)
d	6,32 ($\pm 0,008$)	7,18 ($\pm 0,006$)	4,17 ($\pm 0,004$)

$$3) N = \frac{(a+b)^2}{2h} + \frac{(a^2+b^2)h}{5}$$

	a	б	в
a	0,562	0,834	0,445
b	0,2518	0,3523	0,4834
h	0,68	0,74	0,87

$$\text{№ 4. 1) } X = \frac{a^2 b}{c}$$

	a	б	в
a	3,456 ($\pm 0,002$)	1,245 ($\pm 0,001$)	0,327 ($\pm 0,005$)
b	0,642 ($\pm 0,0005$)	0,121 ($\pm 0,0002$)	3,147 ($\pm 0,0001$)
c	7,12 ($\pm 0,004$)	2,34 ($\pm 0,003$)	1,78 ($\pm 0,001$)

$$2) X = \frac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$$

	a	б	в
a	23,16 ($\pm 0,02$)	17,41 ($\pm 0,01$)	32,37 ($\pm 0,03$)
b	8,23 ($\pm 0,005$)	1,27 ($\pm 0,002$)	2,35 ($\pm 0,001$)
c	145,5 ($\pm 0,08$)	342,3 ($\pm 0,04$)	128,7 ($\pm 0,02$)
d	28,6 ($\pm 0,1$)	11,7 ($\pm 0,1$)	27,3 ($\pm 0,04$)
m	0,28 ($\pm 0,006$)	0,71 ($\pm 0,003$)	0,93 ($\pm 0,001$)

$$3) V = \frac{h}{3} \cdot S \left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} \right)$$

	a	б	в
a	8,51	5,71	7,28
A	23,42	32,17	11,71
S	45,8	51,7	21,8
h	3,81	2,42	5,31

$$\text{№ 5. 1) } X = \frac{ab^3}{c}$$

	a	b	B
a	0,643 ($\pm 0,0005$)	0,142 ($\pm 0,0003$)	0,258 ($\pm 0,0002$)
b	2,17 ($\pm 0,002$)	1,71 ($\pm 0,002$)	3,45 ($\pm 0,001$)
c	5,843 ($\pm 0,001$)	3,727 ($\pm 0,001$)	7,221 ($\pm 0,003$)

$$2) X = \frac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$$

	a	b	B
a	27,16 ($\pm 0,006$)	15,71 ($\pm 0,005$)	12,31 ($\pm 0,004$)
b	5,03 ($\pm 0,01$)	3,28 ($\pm 0,02$)	1,73 ($\pm 0,03$)
c	3,6 ($\pm 0,02$)	7,2 ($\pm 0,01$)	3,7 ($\pm 0,02$)
m	12,375 ($\pm 0,004$)	13,752 ($\pm 0,001$)	17,428 ($\pm 0,003$)
n	86,2 ($\pm 0,05$)	33,7 ($\pm 0,03$)	41,7 ($\pm 0,01$)

$$3) S = \frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$$

	a	b	B
h	21,1	17,8	32,5
a	22,08	32,47	27,51
b	31,11	11,42	21,78

$$\text{№ 6. 1) } X = \frac{ab}{c^2}$$

	a	b	B
a	0,3575 ($\pm 0,0002$)	0,1756 ($\pm 0,0001$)	0,2731 ($\pm 0,0003$)
b	2,63 ($\pm 0,01$)	3,71 ($\pm 0,03$)	5,12 ($\pm 0,02$)
c	0,854 ($\pm 0,0005$)	0,285 ($\pm 0,0002$)	0,374 ($\pm 0,0001$)

$$2) X = \frac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$$

	a	b	B
a	16,342 ($\pm 0,001$)	12,751 ($\pm 0,001$)	31,456 ($\pm 0,002$)
b	2,5 ($\pm 0,03$)	3,7 ($\pm 0,02$)	7,3 ($\pm 0,01$)
c	38,17 ($\pm 0,002$)	23,76 ($\pm 0,003$)	33,28 ($\pm 0,003$)
d	9,14 ($\pm 0,005$)	8,12 ($\pm 0,004$)	6,71 ($\pm 0,001$)
m	3,6 ($\pm 0,04$)	1,7 ($\pm 0,01$)	5,8 ($\pm 0,02$)

$$3) V = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + h^2)$$

	a	b	B
a	2,456	7,751	5,441
h	1,76	3,35	6,17

$$\text{№ 7. 1) } V = \frac{\pi^2}{4} D d^2$$

	a	b	B
π	3,14	3,14	3,14
D	54 ($\pm 0,5$)	72 ($\pm 0,3$)	31 ($\pm 0,01$)
d	8,235 ($\pm 0,001$)	3,274 ($\pm 0,002$)	7,345 ($\pm 0,001$)

$$2) S = \frac{1}{64} \pi \sqrt{D^4 - d^4}$$

	a	b	B
D	36,5 ($\pm 0,1$)	41,4 ($\pm 0,2$)	52,6 ($\pm 0,01$)
d	26,35 ($\pm 0,005$)	31,75 ($\pm 0,003$)	48,39 ($\pm 0,001$)
π	3,14	3,14	3,14

$$3) a = c^2 \left(1 + \frac{2\beta}{c} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right)$$

	a	b	B
c	2,435	7,834	4,539
β	0,15	0,21	0,34
γ	1,27	3,71	5,93

$$\text{№ 8. 1) } Y = \frac{m^2 n}{c^3}$$

	a	b	B
m	1,6531 ($\pm 0,0003$)	2,348 ($\pm 0,002$)	3,804 ($\pm 0,003$)
n	3,78 ($\pm 0,002$)	4,37 ($\pm 0,004$)	4,05 ($\pm 0,003$)
c	0,158 ($\pm 0,0005$)	0,235 ($\pm 0,0003$)	0,318 ($\pm 0,0002$)

$$2) X = \frac{m \sqrt{a-b}}{c+d}$$

	a	b	B
a	9,542 ($\pm 0,001$)	8,357 ($\pm 0,003$)	4,218 ($\pm 0,001$)
b	3,128 ($\pm 0,002$)	2,48 ($\pm 0,004$)	1,57 ($\pm 0,006$)

Продолжение

	a	б	в
m	2,8 (±0,03)	3,17 (±0,01)	2,32 (±0,02)
c	0,172 (±0,001)	1,315 (±0,0004)	2,418 (±0,004)
d	5,4 (±0,02)	2,4 (±0,02)	1,8 (±0,01)

$$3) V = \frac{1}{15} \pi h (2D^2 + Dd + 0,75d^2)$$

	a	б	в
h	84,2	76	45
D	28,3	17,2	48,3
d	42,08	9,344	32,14

$$\text{№ 9. 1) } X = \sqrt{\frac{cd}{b}}$$

	a	б	в
c	0,7568 (±0,0002)	0,8345 (±0,0004)	0,6384 (±0,0002)
d	21,7 (±0,02)	13,8 (±0,03)	32,7 (±0,04)
b	2,65 (±0,01)	1,84 (±0,006)	4,88 (±0,03)

$$2) y = \frac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$$

	a	б	в
a	10,82 (±0,03)	9,37 (±0,004)	11,45 (±0,01)
b	2,786 (±0,0006)	3,108 (±0,0003)	4,431 (±0,002)
m	0,28 (±0,006)	0,46 (±0,002)	0,75 (±0,003)
n	14,7 (±0,06)	15,2 (±0,04)	16,7 (±0,05)

$$3) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = (a+b+c)/2$$

	a	б	в
a	46,3	10,5	2,48
b	29,72	34,18	5,344
c	37,654	27,327	6,0218

$$\text{№ 10. 1) } f = \frac{Qe^3}{48E}$$

	a	б	в
Q	54,8 (±0,02)	38,5 (±0,01)	17,3 (±0,01)
e	2,45 (±0,01)	3,35 (±0,02)	5,73 (±0,01)
E	0,863 (±0,004)	0,734 (±0,001)	0,956 (±0,004)

$$2) Q = \frac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$$

	a	б	в
n	2.0435 (± 0.0001)	1.1753 (± 0.0002)	4.5681 (± 0.0001)
x	4.2 (± 0.05)	5.8 (± 0.01)	6.3 (± 0.02)
y	0.82 (± 0.01)	0.65 (± 0.02)	0.42 (± 0.03)

$$3) \gamma = \frac{\alpha b - \beta a}{b^2} - \frac{\beta(ab - \beta a)}{b^2(b + \beta)}$$

	a	б	в
α	5.27	7.31	3.28
β	0.0562	0.0761	0.0545
a	158.35	234.36	341.17
b	61.21	81.26	52.34

Образец выполнения задания

$$1) X = \frac{m^2 n^3}{\sqrt{k}}, \text{ где } m = 28.3 (\pm 0.02), n = 7.45 (\pm 0.01), k = 0.678 (\pm 0.003);$$

$$2) N = \frac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}, \text{ где } n = 3.0567 (\pm 0.0001), m = 5.72 (\pm 0.02);$$

$$3) V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right), \text{ где } h = 11.8; R = 23.67.$$

$$1) \text{ Находим } m^2 = 800.9; n^3 = 413.5; \sqrt{k} = 0.8234;$$

$$X = \frac{800.9 \cdot 413.5}{0.8234} = 402\,200 = 4.02 \cdot 10^5.$$

Далее, имеем $\delta_m = 0.02/28.3 = 0.00071$; $\delta_n = 0.01/7.45 = 0.00135$; $\delta_k = 0.003/0.678 = 0.00443$, откуда

$$\delta_X = 2\delta_m + 3\delta_n + 0.5\delta_k = 0.00142 + 0.00405 + 0.00222 = 0.00769 = 0.77\%;$$

$$\alpha_X = 4.02 \cdot 10^5 \cdot 0.0077 = 3.1 \cdot 10^3.$$

$$\text{Отвст: } X = 4.02 \cdot 10^5 (\pm 3.1 \cdot 10^3); \delta_X = 0.77\%.$$

$$2) \text{ Имеем } n-1 = 2.0567 (\pm 0.0001); m+n = 3.057 (\pm 0.0004) + 5.72 (\pm 0.02) = 8.777 (\pm 0.0204);$$

$$m-n = 5.72 (\pm 0.02) - 3.057 (\pm 0.0004) = 2.663 (\pm 0.0204);$$

$$N = \frac{2.0567 \cdot 8.777}{2.663^2} = \frac{2.0567 \cdot 8.777}{7.092} = 2.545 \approx 2.55;$$

$$\delta_N = \frac{0.0001}{2.0567} + \frac{0.0204}{8.777} + 2 \frac{0.0204}{2.663} = 0.000049 + 0.00233 + 2 \cdot 0.00766 =$$

$$= 0.00238 + 0.01532 = 0.0177 = 1.77\%; \alpha_N = 2.55 \cdot 0.0177 = 0.046.$$

$$\text{Отвст: } N \approx 2.55 (\pm 0.046); \delta_N = 1.77\%.$$

3) Находим

$$V = 3.142 \cdot 11.8^2 (23.67 - 3.933) = 3.142 \cdot 11.8^2 \cdot 19.737 =$$

$$= 3.142 \cdot 139.2 \cdot 19.737 = 437.37 \cdot 19.737 = 8630 \approx 8.63 \cdot 10^3.$$

$$\text{Отвст: } V \approx 8.63 \cdot 10^3.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

ТЕМА: ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ИЛИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Цели лабораторной работы:

- выработка практических навыков в выполнении работ по математическому моделированию;
- освоение элементов самостоятельной научно-исследовательской работы;
- закрепление навыков программирования.

После выполнения лабораторной работы студенты представляют отчет, в котором необходимо отразить следующие разделы:

- постановка (условие) задачи;
- математическая модель;
- метод исследования модели на ее адекватность действительности;
- алгоритм моделирования задачи;
- программа на языке программирования высокого уровня или в математическом пакете;
- результаты выполнения работы;
- содержательный анализ результатов моделирования, выводы.

1. Углы x измерены с предельной абсолютной погрешностью Δ_x . Определить абсолютную и относительную погрешности функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$. Найти на инженерном калькуляторе значения этих функций, сохранив в результате лишь верные цифры.

- | | |
|--|---|
| 1) $x = 11^\circ 20'$, $\Delta_x = 1'$; | 2) $x = 28^\circ 42' 31''$, $\Delta_x = 5''$; |
| 3) $x = 45^\circ$, $\Delta_x = 1'$; | 4) $x = 50^\circ 10'$, $\Delta_x = 0,05^\circ$; |
| 5) $x = 0,45$, $\Delta_x = 0,5 \cdot 10^{-2}$; | 6) $x = 1,115$, $\Delta_x = 0,1 \cdot 10^{-3}$; |
| 7) $x = 31^\circ 46'$, $\Delta_x = 16'$; | 8) $x = 82^\circ 34'$, $\Delta_x = 1^\circ$; |
| 9) $x = 1,22$, $\Delta_x = 0,1 \cdot 10^{-2}$; | 10) $x = 73^\circ 53'$, $\Delta_x = 1'$; |
| 11) $x = 27^\circ 13'$, $\Delta_x = 19'$; | 12) $x = 1,15$, $\Delta_x = 0,1 \cdot 10^{-2}$; |
| 13) $x = 55^\circ 24'$, $\Delta_x = 1'$; | 14) $x = 0,85$, $\Delta_x = 0,5 \cdot 10^{-2}$; |
| 15) $x = 34^\circ 12' 47''$, $\Delta_x = 5''$; | 16) $x = 1,35$, $\Delta_x = 0,1 \cdot 10^{-3}$. |

2. Для следующих функций вычислить значения при указанных значениях x и указать абсолютную и относительную погрешности результатов, считая все знаки исходных данных верными.

- | | |
|----------------------------------|-------------------|
| 1) $y = x^3 \sin x$ | при $x = 1,414$; |
| 2) $y = x \ln x$ | при $x = 3,142$; |
| 3) $y = e^x \cos x$ | при $x = 1,732$; |
| 4) $y = x^2 \cos x$ | при $x = 1,414$; |
| 5) $y = x^2 \ln x$ | при $x = 3,142$; |
| 6) $y = e^x \sin x$ | при $x = 1,732$; |
| 7) $y = x^2 \operatorname{tg} x$ | при $x = 1,414$; |

$$8) \quad y = \frac{x^2}{\ln x} \quad \text{при } x = 3,142;$$

$$9) \quad y = \frac{e^x}{\sin x} \quad \text{при } x = 1,732;$$

$$10) \quad y = x^2 \operatorname{ctg} x \quad \text{при } x = 1,414;$$

$$11) \quad y = \frac{e^x}{\cos x} \quad \text{при } x = 1,318;$$

$$12) \quad y = x^3 \cos x \quad \text{при } x = 2,154;$$

$$13) \quad y = x^2 \ln x \quad \text{при } x = 3,211;$$

$$14) \quad y = e^{2x} \sin 2x \quad \text{при } x = 0,487;$$

$$15) \quad y = \ln x \cdot \sin x \quad \text{при } x = 5,134;$$

$$16) \quad y = x^2 \sin x \quad \text{при } x = 1,216.$$

3. Для следующих функций вычислить значения при указанных значениях переменных. Указать абсолютную и относительную погрешности результатов, считая все знаки исходных данных верными.

$$1) \quad u = \ln(x_1 + x_2^2), \quad x_1 = 0,97, \quad x_2 = 1,132;$$

$$2) \quad u = \frac{x_1 + x_2^2}{x_3}, \quad x_1 = 3,28, \quad x_2 = 0,932, \quad x_3 = 1,132;$$

$$3) \quad u = x_1 x_2 + x_2 x_3, \quad x_1 = 2,104, \quad x_2 = 1,935, \quad x_3 = 0,845;$$

$$4) \quad u = x_3 + \ln(x_1 + x_2^2), \quad x_1 = 0,93, \quad x_2 = 1,231, \quad x_3 = 0,756;$$

$$5) \quad u = x_1^2 x_2 + x_1 x_3, \quad x_1 = 1,207, \quad x_2 = 1,467, \quad x_3 = 0,787;$$

$$6) \quad u = \frac{x_1 + x_2^3}{x_3}, \quad x_1 = 4,18, \quad x_2 = 0,345, \quad x_3 = 2,178;$$

$$7) \quad u = 2 \ln(x_1^3 + x_2), \quad x_1 = 0,698, \quad x_2 = 1,351;$$

$$8) \quad u = \frac{x_1 + x_2^3}{x_3^2}, \quad x_1 = 3,438, \quad x_2 = 0,873, \quad x_3 = 1,234;$$

$$9) \quad u = x_1 x_2 + x_1 x_3^2, \quad x_1 = 1,555, \quad x_2 = 2,122, \quad x_3 = 0,977;$$

$$10) \quad u = \arctg x_1 + x_2 x_3^2, \quad x_1 = 2,334, \quad x_2 = 3,663, \quad x_3 = 1,112;$$

$$11) \quad u = \frac{x_1^2 - x_2}{x_3}, \quad x_1 = 2,312, \quad x_2 = 1,243, \quad x_3 = 0,411;$$

$$12) \quad u = \ln(x_1 + x_2 x_3), \quad x_1 = 4,765, \quad x_2 = 3,586, \quad x_3 = 6,879;$$

$$13) \quad u = x_1 x_2 x_3 + x_2^2, \quad x_1 = 1,532, \quad x_2 = 2,312, \quad x_3 = 3,839;$$

$$14) \quad u = \sin(x_1) + x_2 x_3, \quad x_1 = 1,463, \quad x_2 = 3,747, \quad x_3 = 2,368;$$

$$15) \quad u = \ln(x_1 x_3 + x_2^2), \quad x_1 = 4,367, \quad x_2 = 2,644, \quad x_3 = 1,86;$$

$$16) \quad u = \frac{x_1 + x_2^2}{x_3^2}, \quad x_1 = 2,57, \quad x_2 = 0,387, \quad x_3 = 0,96.$$

4. Обратная задача теории погрешностей

- 1) С какой точностью следует взять приближенное значение числа x , чтобы значение функции $y = \sin x$ могло быть найдено с указанным числом m верных значащих цифр?

а) $x = 25^\circ, m = 4$; б) $x = 30,75^\circ, m = 3$;

в) $x = 1,05, m = 2$; г) $x = 0,075, m = 2$.

- 2) С каким числом верных знаков следует взять значения аргумента x , чтобы получить значения указанных функций с точностью до $0,1 \cdot 10^{-5}$?

а) $y = x^3 \sin x, x = \sqrt{2}$; б) $y = x \ln x, x = \pi$;

в) $y = e^x \cos x, x = \sqrt{3}$; г) $y = x^2 \operatorname{tg} x, x = \sqrt{11}$.

- 3) Найти допустимые абсолютные погрешности аргументов, которые позволяют вычислять значения данных функций с четырьмя верными знаками:

а)

$$u = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3, x_1^* = 2,10415, x_2^* = 1,93521, x_3^* = 0,84542;$$

б) $u = \ln(x_1 + x_2^2), x_1^* = 0,9731, x_2^* = 1,13214$.

- 4) С какой точностью определены углы x по значениям функции $y = \cos x$, взятым из пятизначной таблицы тригонометрических функций?

а) $x = 15^\circ 20'$, б) $x = 65^\circ 23'$.

- 5) С какой точностью может быть определено число x по логарифму с помощью пятизначной таблицы логарифмов, если число x находится в указанных пределах?

а) $300 < x < 400$; б) $5000 < x < 6000$;

в) $1,5 < x < 1,7$; г) $3,25 < x < 3,29$.

- 6) Дано квадратное уравнение $x^2 + bx + c = 0$. Предполагается, что один из коэффициентов уравнения (он помечен символом $*$) получен в результате округления. Произвести теоретическую оценку погрешностей корней в зависимости от погрешности этого коэффициента. Вычислить корни уравнения при нескольких различных значениях коэффициента в пределах заданной точности. Сравнить полученные результаты.

а) $b^* = 39,6; c = -716,85$; б) $b^* = 37,4; c = 187,65$;

в) $b = 27,4; c^* = 187,65$; г) $b = -30,9; c^* = 238,7$.

- 7) Для определения модуля Юнга по прогибу стержня прямоугольного сечения применяется формула:

$$E = \frac{1}{4} \cdot \frac{l^3 \cdot p}{d^3 \cdot b \cdot s},$$

где l – длина стержня, b и d – основание и высота поперечного сечения, s – стрела прогиба, p – нагрузка. С какой точностью следует измерить длину l и стрелу s , чтобы погрешность E не превышала **5,5%** при условии, что p из-

вестна с точностью до **0,1%**, величины ***b*** и ***d*** известны с точностью до **1%**, при этом:

а) $l \approx 50$ см, $s \approx 2,5$ см; б) $l \approx 0,97$ см, $s \approx 46$ см.

5. Приближенные вычисления значений функций с помощью степенных рядов

Пользуясь разложением соответствующих функций в степенной ряд, вычислить:

- 1) $\cos 18^\circ$ с точностью до 0,0001;
- 2) $\sqrt[5]{1,1}$ с точностью до 0,0001;
- 3) $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,001;
- 4) $\ln 1,04$ с точностью до 0,0001;
- 5) e с точностью до 0,00001;
- 6) $\sin 9^\circ$ с точностью до 0,0001;
- 7) $\sqrt{27}$ с точностью до 0,001;
- 8) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ с точностью до 0,00001;
- 9) $\ln 0,98$ с точностью до 0,0001;
- 10) $\ln 3$ с точностью до 0,0001;
- 11) $\ln 10$ с точностью до 0,0001;
- 12) π с точностью до 0,001, полагая $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ в разложении $\arctg x$;
- 13) $\sqrt[3]{1,06}$ с точностью до 0,0001;
- 14) $tg 40^\circ$ с точностью до 0,00001;
- 15) $\sin 20^\circ 30'$ с точностью до 0,00001;
- 16) $\sqrt{e}$ с точностью до 0,00001.

ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №5

Тема занятия: Машинная арифметика и погрешности вычислений

Цели лабораторной работы:

- выработка практических навыков в выполнении работ по математическому моделированию;
- освоение элементов самостоятельной научно-исследовательской работы;
- закрепление навыков программирования.

После выполнения лабораторной работы студенты представляют отчет, в котором необходимо отразить следующие разделы:

- постановка (условие) задачи;
- математическая модель;
- метод исследования модели на ее адекватность действительности;
- алгоритм моделирования задачи;
- программа на языке программирования высокого уровня или в математическом пакете;
- результаты выполнения работы;
- содержательный анализ результатов моделирования, выводы.

Задачи

1. Перевести следующие числа в десятичную систему счисления:
а) 110111_2 ; б) 10110111.1011_2 ; в) 563.44_8 ; г) 721.35_8 ; д) $1C4.A_{16}$; е) $9A2F.B5_{16}$.
2. Перевести следующие числа из десятичной ПСС в ПСС с основаниями 2, 8, 16:
а) 463; б) 1209; в) 362; г) 3925; д) 11355.
3. Перевести следующие числа из десятичной ПСС в ПСС с основаниями 2, 8, 16 (точность вычислений - 5 знаков после точки):
а) 0.0625; б) 0.345; в) 0.225; г) 0.725; д) 217.375; е) 31.2375; ж) 725.03125; з) 8846.04.
4. Выполнить указанные операции в двоичной системе счисления:

Номер варианта	Сложение	Вычитание	Умножение
1	$11011+10011$	$100111-11010$	$11011 \cdot 10011$
2	$1011+100011$	$11111-10011$	$10101 \cdot 111$
3	$11101+110011$	$10011-1011$	$11001 \cdot 1011$
4	$11001+10011$	$101101-11101$	$11001 \cdot 1011$
5	$10101+100111$	$1001101-11011$	$10111 \cdot 1001$
6	$11010+1001101$	$10111-10001$	$11101 \cdot 101$
7	$101101+10011$	$111110-10101$	$1101 \cdot 10101$
8	$10111+11100$	$110111-101101$	$110101 \cdot 10111$
9	$10011+10111$	$110001-110110$	$11101 \cdot 11011$
10	$111110+10001$	$11101-11100$	$100111 \cdot 10011$
11	$100111+110001$	$100111-10111$	$101110 \cdot 10001$
12	$110110+100111$	$10111-1001$	$1011 \cdot 101011$
13	$110111+101101$	$101011-1101$	$1010101 \cdot 11$
14	$101110+11111$	$11010-10111$	$110011 \cdot 1101$

15	10011+111001	110001-11111	11101·111001
16	11101+101011	101110-10001	100111·1110

5. Дано квадратное уравнение $x^2 + bx + c = 0$. Предполагается, что один из коэффициентов уравнения (в индивидуальном варианте помечен *) получен в результате округления. Произвести теоретическую оценку погрешностей корней в зависимости от погрешности коэффициента. Вычислить корни уравнения при нескольких различных значениях коэффициента в пределах заданной точности. Сравнить полученные результаты.

Варианты заданий

1. $b^* = -39,6$; $c = -716,85$.
 2. $b = 27,4$; $c^* = 18765$.
 3. $b^* = -37,4$; $c = -117,05$.
 4. $b = 97,3$; $c^* = -338,68$.
 5. $b^* = -29,8$; $c = -473,36$.
 6. $b = 172,7$; $c^* = 188,57$.
 7. $b^* = -77,67$; $c = -73,29$.
 8. $b = 482,74$; $c^* = 812,73$.
 9. $b^* = 127,38$; $c = -137,11$.
 10. $b = 58,35$; $c^* = 711,26$.
 11. $b^* = -25,85$; $c = -74,51$.
 12. $b = 24,45$; $c^* = 147,75$.
 13. $b^* = 75,98$; $c = -347,53$.
 14. $b = -44,45$; $c^* = 488,75$.
 15. $b^* = 68,98$; $c = -647,53$.
 16. $b = -29,45$; $c^* = 207,75$.
6. Разработать, протестировать и реализовать программу, реализующую вычисление заданного набора геометрических характеристик треугольников, с использованием следующих подпрограмм:
- 1) Ввод исходных данных для нового треугольника (все вводимые данные должны проверяться на корректность, все углы должны вводиться в градусах).
 - 2) Вычисление площади треугольника.
 - 3) Вычисление минимального угла в градусах.
 - 4) Вычисление косинуса минимального угла.

Для разработанной программы провести эксперименты, позволяющие отследить, при каких входных данных возникает ситуация переполнения.

Для этого необходимо провести серию тестов, в которых для заданного треугольника (в каждом варианте использовать свой тип треугольника: равнобедренный, равно-сторонний или прямоугольный) вычислить его площадь. При этом длина одной из вы-бранных самостоятельно сторон треугольника должна увеличиваться, принимая следую-щие значения: 10 , 10^2 , 10^3 , ... Увеличение длины стороны выполнять до тех, пока при вычислениях не возникнет особая ситуация – ситуация переполнения. Внести в отчет длину стороны, при которой возникла особая ситуация. Дать объяснение, почему при не-которых входных данных возникает ситуация переполнения.

Выполнить аналогичную серию тестов, уменьшая длину выбранной стороны: 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} , ... Провести исследования, позволяющие отследить, при каких входных данных возникает исчезновение порядка при вычислениях.

Варианты заданий

1. Прямоугольный треугольник задается длинами двух катетов.
2. Прямоугольный треугольник задается длинами катета и гипотенузы.
3. Прямоугольный треугольник задается длиной катета и прилежащим углом.
4. Равнобедренный прямоугольный треугольник задается длиной катетов.
5. Равносторонний треугольник задается длиной стороны.
6. Равнобедренный треугольник задается длиной равных сторон и величиной равных углов при основании.
7. Прямоугольный треугольник задается длиной катета и противолежащим углом.
8. Треугольник задается координатами вершин (использовать формулу Герона).
9. Треугольник задается координатами вершин (использовать формулу с определителем матрицы координат):

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

10. Треугольник задается координатами вершин (использовать векторное произведение векторов).

Для неравнобедренного прямоугольного треугольника или для треугольника, заданного координатами вершин (варианты 1, 2, 4, 8, 9 и 10), зафиксировав значение длины a одной из сторон, вычислить геометрические характеристики (площадь – S , минимальный угол – α , косинус минимального угла – $\cos \alpha$) нескольких треугольников при уменьшении длины b какой-либо другой стороны. Уменьшать значение стороны b до тех пор, пока не возникнет нестандартная ситуация (например, несогласованные вычисленные характеристики треугольника). Далее выполнить аналогичную серию тестов для следующего значения длины стороны a .

Для прямоугольного треугольника с заданным углом или равнобедренного треугольника (варианты 3, 5, 6, 7), зафиксировав значение длины a одной из сторон, вычислить требуемые геометрические характеристики (площадь – S , минимальный угол – α , косинус минимального угла – $\cos \alpha$) при уменьшении угла α . Уменьшать угол α необходимо до тех пор, пока не будет отмечена нестандартная ситуация (несогласованные вычисленные характеристики треугольника). Далее выполнить аналогичную серию тестов для следующего значения длины стороны a .

Для каждого проведенного эксперимента необходимо документировать результаты работы программы, возникающие ошибки, указать причину ошибки и методы ее устранения, сделать необходимые исправления в программе для того, чтобы программа выдавала корректные результаты.

Провести дополнительное исследование, позволяющее ознакомиться с погрешностью вычислений, обусловленной неточностью исходных данных.

На примере точности задания числа π показать, как зависит погрешность результата решения задачи от неточности исходных данных. Провести серию тестов, иллюстрирующих данную ситуацию. Исследовать, изменяется ли результат вычисления в зависимости от количества значащих цифр в представлении числа π .

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6
Тема: Исследование кривых линий
по их параметрическому представлению или уравнению
в полярных координатах

Цели лабораторной работы:

- выработка практических навыков в выполнении работ по математическому моделированию;
- освоение элементов самостоятельной научно-исследовательской работы;
- закрепление навыков программирования.

После выполнения лабораторной работы студенты представляют отчет, в котором необходимо отразить следующие разделы:

- постановка (условие) задачи;
- математическая модель;
- метод исследования модели на ее адекватность действительности;
- алгоритм моделирования задачи;
- программа на языке программирования высокого уровня или в математическом пакете;
- результаты выполнения работы;
- содержательный анализ результатов моделирования, выводы.

Задание к лабораторной работе предполагает использование графических возможностей языков программирования (по выбору студента). Требуется построить семейство кривых линий по их уравнениям. После построения одной кривой из семейства, если это указано в условии задачи, необходимо исследовать ее форму при различных значениях указанных параметров.

Напомним необходимые понятия. Параметрическое представление кривой l на плоскости с координатными осями Ox и Oy - это две функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, определенные на одном и том же числовом множестве.

Полярными координатами ρ и φ точки M на плоскости называется расстояние $\rho = OM$ от фиксированной точки O (полюса) до точки M и угол $\varphi = \angle POM$ между лучом OP и отрезком OM .

ЗАДАЧИ

1. Множество точек плоскости, произведение расстояний от которых до двух данных точек $F_1(-a, 0)$ и $F_2(a, 0)$ равно квадрату расстояния между точками F_1 и F_2 , называется *лемнискатой Бернулли*. Построить лемнискату Бернулли по уравнению $\rho = a\sqrt{2 \cos \varphi}$, $a > 0$. Исследовать ее форму при различных значениях параметра a .

2. Даны две взаимно перпендикулярные прямые l и m , пересекающиеся в точке O . Кроме того, дана точка A , отличная от точки O , лежащая на прямой l и отстоящая от точки O на расстоянии $a \neq 0$. Через точку A проводятся всевозможные прямые, на каждой из которых от точки P пересечения прямой m откладываются в разных направлениях два отрезка PM_1 и PM_2 , удовлетворяющие условию $PM_1 = PM_2 = PO$. Множество всех точек M_1 и M_2 образуют кривую, которая называется *строфоидой*. Построить строфоиду по уравнениям $x = \frac{a(t^2-1)}{t^2+1}$, $y = \frac{at(t^2-1)}{t^2+1}$, $t \in (-\infty, \infty)$, $a > 0$. Исследовать ее форму при различных значениях параметра a .

3. На плоскости даны прямая l и точка S , отстоящая от прямой l на расстоянии a . Через точку S проводятся всевозможные прямые, на каждой из которых от точки пересечения с прямой l (если такая существует) откладывается в обе стороны отрезок длиной b . Множество концов таких отрезков называется *конхойдой Никомеда*. Построить конхоиду Никомеда по уравнениям $x = a + b \cos t, y = a \operatorname{tg} t + b \sin t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ – правая ветвь, $t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ – левая ветвь, $a > 0, b > 0$. Исследовать ее форму при различных значениях параметров a и b (рассмотреть случаи $a < b, a = b, a > b$).

4. Пусть F_1 и F_2 – две различные фиксированные точки, c – постоянное число и расстояние между точками F_1 и F_2 равно $2c$. Множество точек M , для которых $F_1M \cdot F_2M = c^2$, называется *овалом Кассини*. Построить овал Кассини по уравнению

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4 \cos^2 2\varphi + (a^4 - c^4)}.$$

Рассмотреть случаи, когда $a > c\sqrt{2} > 0, 0 < c < a < c\sqrt{2}, 0 < a < c$.

5. Луч l , исходящий из неподвижной точки O , вращается с постоянной угловой скоростью. Точка M , имея начальное положение в точке O , движется по лучу l равномерно с заданной скоростью. Траектория точки M называется *спиралью Архимеда*. Построить спираль Архимеда вокруг начала координат с n витками и внешним радиусом r ; начальное направление спирали образует с осью Ox угол α . Параметрическое представление спирали: $x = r \cos t, y = r \sin t, r = \frac{t}{2}, \alpha \leq t \leq 2\pi n$.

6. Траектория, описываемая точкой M окружности радиуса b , катящейся без скольжения по внутренней стороне другой окружности радиуса $4b$, называется *астроидой*. Построить астроиду по уравнениям

$$x = b \cos^3 t, y = b \sin^3 t, t \in [0, 2\pi].$$

Исследовать ее форму при различных значениях параметра b .

7. Пусть $OA = a$ – диаметр некоторой окружности, AB – касательная к окружности, проведенная в конце диаметра через точку A . Через точку O проведены всевозможные лучи и на каждом из них откладывается отрезок $OM = PQ$, где P – точка пересечения соответствующего луча с окружностью, а Q – точка пересечения этого луча с касательной AB . Множество точек M называется *циссой Диоклеса*. Построить циссоиду Диоклеса по уравнениям

$$x = \frac{at^2}{1+t^2}, y = \frac{at^3}{1+t^2}, t \in (-\infty, \infty), a > 0.$$

Построить на этом же графике прямую $x = a$ и проверить, что эта прямая является асимптотой для циссоиды.

8. На плоскости даны прямая l и точка S . Через точку S проводятся всевозможные прямые, на каждой из которых от точки пересечения с кривой l (если такая существует) откладывается в обе стороны отрезок, равный b . Множество концов этих отрезков называется *конхойдой* данной кривой. *Улиткой Паскаля* называется конхоида окружно-

сти радиуса a , если за точку S выбрана точка на этой окружности. Построить улитку Паскаля по уравнениям

$$x = a \cos^2 t + b \cos t, \quad y = \cos t \sin t + b \sin t, \quad a > 0, b > 0, t \in [0, 2\pi].$$

Рассмотреть случаи, когда $b \geq 2a$, $a < b < 2a$, $a > b$.

9. Траектория, описываемая точкой M окружности радиуса a , катящейся без скольжения по внешней стороне другой окружности радиуса b , называется *эпициклоидой*. Построить эпициклоиду по уравнениям в параметрической форме

$$\begin{aligned} x &= (a + b) \cos t - a \cos \left(\frac{(a + b)t}{a} \right), \\ y &= (a + b) \sin t - a \sin \left(\frac{(a + b)t}{a} \right), \quad a > 0, \quad b > 0. \end{aligned}$$

Рассмотреть следующие случаи:

- а) b/a – целое положительное число, $t \in [0, 2\pi]$;
- б) $b/a = p/q$ – несократимая дробь, $t \in [0, 2q\pi]$.

10. Отрезок постоянной длины $2a$ перемещается своими концами по сторонам прямого угла. Из вершины этого угла опущен перпендикуляр на данный отрезок. Множество оснований этих перпендикуляров есть кривая, называемая *четырёхлепестковой розой*. Взяв за полюс полярной системы координат вершину прямого угла, и направив полярную ось вдоль одной из сторон прямого угла, мы получим уравнение этой кривой: $\rho = a \sin 2\varphi$, где $a > 0$. Построить четырёхлепестковую розу.

11. На окружности радиуса a взята точка O . Через точку K , диаметрально противоположную точке O , к окружности проведена касательная. Вокруг точки O вращается прямая, пересекающая окружность и касательную соответственно в точках A и B . Из точки A проводится прямая, параллельная касательной, а из точки B – прямая, параллельная диаметру OK . Множество точек пересечения этих прямых называется *локоном Аньези* или *верзиерой*. Ее параметрическое представление имеет вид: $x = 2a \cos^2 t$, $y = 2a \operatorname{tg} t$, где t – полярный угол. Построить верзиеру.

12. *Циклоидой* называется траектория, описываемая точкой M окружности радиуса r , катящейся без скольжения по данной прямой l . Приняв прямую l за ось абсцисс, точку O этой прямой, которая совпадает с начальным положением движущейся точки, за начало прямоугольной декартовой системы координат, уравнение циклоиды можно записать в виде

$$x = r(\varphi - \sin \varphi), \quad y = r(1 - \cos \varphi),$$

где φ – угол в радианах между радиусами данной окружности, проведенными в точку M и точку касания окружности с осью Ox . Построить циклоиду.

13. *Спирограф* – это зубчатый диск радиуса b , расположенный внутри колеса радиуса a . Диск вращается против часовой стрелки и всегда находится в зацеплении с внешним колесом. В диске имеется отверстие на расстоянии d от центра диска, в которое помещается карандаш. Грифель карандаша в процессе вращения вычерчивает рисунок; вычерчивание заканчивается, когда карандаш возвращается в исходное положение. Уравнение кривой, вычерчиваемой грифелем, в параметрической форме имеет вид:

$$x = (a - b)\cos t + d \cos \varphi, y = (a - b)\sin t + d \sin \varphi,$$

где $\varphi = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot t$, $d < b < a$. Угол t меняется от 0 до $2\pi n$; $n = b/(a, b)$, где (a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b . Разработать программу, моделирующую работу спирографа.

14. По окружности с уравнением $x^2 + y^2 = r^2$ катится прямая, начальное положение которой определяется уравнением $x = r$. Траектория точки катящейся прямой образует кривую, которая называется *эвольвентой* данной окружности, и определяется ее параметрическими уравнениями:

$$x = r(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi), \quad y = r(\sin \varphi + \varphi \cos \varphi),$$

где φ – угол между полярной осью и радиусом, соединяющим центр окружности с точкой касания. Построить окружность и ее эвольвенту.

15. Построить кривую по уравнениям

$$x = t^2 / (1 - t^2), \quad y = 1 / (1 + t^2), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Исследовать поведение кривой при $|t| > 1$, при $|t| < 1$, и вблизи прямой $y = 0,5$.

16. Дугу окружности с центром в точке (x_0, y_0) радиуса r от 0 до $\frac{\pi}{2}$ можно построить по уравнению

$$x = x_0 + r \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = y_0 + r \frac{2t}{1 + t^2}, \quad t \in [0, 1].$$

Полная окружность может быть построена отображением каждой точки дуги окружности от 0 до $\frac{\pi}{2}$ относительно оси Ox , оси Oy и начала координат в предположении, что начало координат смещено с центром окружности. Построить полную окружность по описанному алгоритму.

17. Представив уравнение кривой $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$ в параметрической форме, построить эту кривую и исследовать ее симметрию.

18. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями

$$x = a \cos 2t, \quad y = a \cos 3t, \quad a > 0, \quad t \in [0, \pi].$$

Исследовать ее форму в промежутках $0 < t < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ при различных значениях параметра a .

19. Множество оснований перпендикуляров, опущенных из полюса полярной системы координат на касательные к данной окружности радиуса b , образуют кривую, уравнение которой имеет вид $\rho = a \cos \varphi + b$, где a – расстояние от полюса до центра окружности. Построить эту кривую и исследовать ее форму в зависимости от значений параметра a .

20. Построить кривую по уравнению

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}, \quad \text{где } a > 0, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{6} \text{ и } \frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5\pi}{6}.$$

Исследовать поведение этой кривой вблизи углов

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{6}, \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \pm \frac{5\pi}{6}.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7
ТЕМА: ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ
ПРОСТЕЙШИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Цели лабораторной работы:

- выработка практических навыков в выполнении работ по математическому моделированию;
- освоение элементов самостоятельной научно-исследовательской работы;
- закрепление навыков программирования.

После выполнения лабораторной работы студенты представляют отчет, в котором необходимо отразить следующие разделы:

- постановка (условие) задачи;
- математическая модель;
- метод исследования модели на ее адекватность действительности;
- алгоритм моделирования задачи;
- программа на языке программирования высокого уровня или в математическом пакете;
- результаты выполнения работы;
- содержательный анализ результатов моделирования, выводы.

Каждое из двух заданий лабораторной работы содержит задачи в 20 вариантах. Номер варианта соответствует номеру, под которым в групповом журнале значится фамилия студента.

ЗАДАНИЕ 1

1. В лаборатории измеряется скорость, с которой распространяется звук вдоль стержней, сделанных из различных материалов. В первом опыте оказалось, что весь путь, состоящий из трех последовательно соединенных стержней, звук проходит за время a секунд, а путь, состоящий из последовательно соединенных второго и третьего стержней, звук проходит в два раза быстрее, чем вдоль только первого стержня. В другом опыте второй стержень заменили новым. Тогда путь, состоящий из последовательно соединенных трех стержней, звук прошел за время b секунд, а путь, состоящий из последовательно соединенных первого и второго стержней, звук проходит вдвое медленнее, чем он проходит вдоль только третьего стержня. Найти скорость распространения звука в новом стержне, если его длина равна l метров.
2. Расстояние между поселками A и B равно s километров. Из поселка A в поселок B отправились одновременно и по одной и той же дороге два автолюбителя, которые должны были прибыть в поселок B в одно и то же время. В действительности первый турист прибыл в поселок B на n часов раньше срока, а второй – на $3n$ часов опоздал, так как он проезжал за каждый час в среднем на r километров меньше первого автолюбителя. Определить часовую скорость этих автолюбителей.
3. Поезд был задержан на t часов. Увеличив скорость на m км/ч, машинист на перегоне в s километров ликвидировал опоздание. Определить, какую скорость должен был иметь поезд на этом перегоне, если бы не было задержки.
4. Расстояние между двумя городами равно a километров. Два автомобилиста, выехав из этих городов навстречу друг другу, встретятся на полпути, если первый выедет на t часов раньше второго. Если же они выедут одновременно друг другу на-

- встречу, то встреча произойдет через $2t$ часов. Определить скорость каждого автомобиля, если считать, что скорости постоянны на всем пути.
5. При испытаниях на дальность самолет пролетел от заводского аэродрома до заранее намеченного пункта всего S километров, затратив на это t_1 часов. Затем он повернул обратно и за время t_2 часов возвратился на заводской аэродром ($t_1 < t_2$). В полете туда и обратно истинная скорость самолета (скорость относительно неподвижной массы воздуха) сохранялась одной и той же, а неравенство $t_1 < t_2$ объясняется влиянием ветра, который был сначала попутным, а затем встречным. Найти истинную скорость v самолета, скорость ветра v_v и пусть $S_{\text{ист}}$ пройденный самолетом относительно неподвижной массы воздуха.
 6. Бассейн для плавания имеет три трубы для отвода воды. Через первую и вторую трубы вместе при закрытой третьей трубе наполненный бассейн делается пустым за a минут. Через первую и третью трубы вместе при закрытой второй трубе – за b минут, а через вторую и третью трубы вместе при закрытой первой трубе – за c минут. За какое время освобождается от воды заполненный бассейн через каждую трубу в отдельности?
 7. По программе, составленной электронной управляющей машиной для поточной линии, два станка на этой линии должны за a часов обработать по одинаковому числу деталей. Первый станок выполнил задание. Второй станок оказался не вполне исправным, работал с перебоями, вследствие чего за то же время обработал на n деталей меньше, чем первый. На обработку одной детали на втором станке затрачивалось в среднем на b минут больше, чем на первом. Сколько деталей обработал каждый станок?
 8. Сотрудник A фирмы выполняет некоторую работу в срок, на a дней больший, чем сотрудник B , и на b дней больший, чем сотрудник C . Сотрудники A и B , работая вместе, выполняют эту работу за столько же дней, что и сотрудник C . Определить время, за которое каждый сотрудник выполняет эту работу отдельно. Определить, при каком соотношении между заданными величинами задача имеет решение.
 9. Кошка, гнавшаяся за мышкой вдоль длинного коридора, догнала ее через a секунд после начала погони. Первоначальное расстояние между ними - l м. Если при таком же начальном расстоянии мышка с перепугу побежала бы не от кошки, а навстречу ей, то была бы схвачена через b секунд. Полагая, что в том и другом случае кошка и мышка прилагали бы максимальные усилия, найти средние скорости каждой из них.
 10. Перевозка тонны груза от пункта M до пункта N по железной дороге обходится на b рублей дороже, чем водным путем. Сколько тонн груза можно перевезти от пункта M до пункта N по железной дороге на сумму a рублей, если водным путем на эту же сумму можно перевезти на k тонн больше, чем по железной дороге?
 11. На обработку одной детали рабочий A затрачивает на k минут меньше рабочего B . Сколько деталей обрабатывает каждый из них за t часов работы, если рабочий A обрабатывает за это время на n деталей больше, чем рабочий B .
 12. На покупку велосипедов спортивный клуб выделил n рублей. Так как вследствие повышения цен стоимость каждого велосипеда увеличилась на a рублей, то вело-

- сипедов было куплено на b штук меньше, чем предполагалось. Сколько купили велосипедов?
13. Дорога между поселками A и B сначала имеет подъем, а потом спуск. Велосипедист, двигаясь на спуске со скоростью на a км/ч большей, чем на подъеме, затрачивает на путь от поселка A до поселка B ровно t часов, а на обратный путь от поселка B до поселка A – половину этого времени. Найти скорость велосипедиста на подъеме и на спуске, если расстояние между поселками b км.
 14. Прибор, применяемый для определения диаметра D крупной детали ($D > 2\text{ м}$) указывает высоту H сегмента при постоянном расстоянии $2L$ между центрами опорных шариков прибора. Установить соответствие между искомым диаметром D детали и измеряемой высотой H ее сегмента при постоянных L и d , где d – диаметр каждого из опорных шариков.
 15. Поезд идет от станции A к станции B . На некотором участке пути, примыкающем к станции B , производились ремонтные работы и на этом участке поезду разрешена скорость, составляющая только $\frac{1}{n}$ часть первоначальной скорости, вследствие чего поезд пришел на станцию B с опозданием на a часов. На другой день фронт ремонтных работ приблизился к станции B на b км и при тех же условиях поезд опоздал на c часов. Найти скорость поезда.
 16. По внутренней области угла 60° прямолинейно движется материальная точка. Выйдя из вершины этого угла, она через некоторый промежуток времени оказалась на расстоянии a от одной стороны угла и на расстоянии b – от другой стороны. Далее она изменила направление движения и по кратчайшему пути просто упала на ту сторону, к которой она была ближе. Найти длину пути, пройденного точкой, если $a < b$.
 17. Во Владивосток должны прибыть два теплохода с разрывом в один час. Оба теплохода шли с одинаковой скоростью, но обстоятельства сложились так, что первый теплоход опоздал бы на t_1 минут, а второй – на t_2 минут. Получив по радиосвязи указание о необходимости прибыть без опоздания, оба капитана теплоходов одновременно дали указание увеличить скорости теплоходов: первый – на v_1 км/ч, второй – на v_2 км/ч, в результате чего оба теплохода прибыли в пункт назначения точно по расписанию. С какой скоростью шли теплоходы до получения сигнала по радиосвязи?
 18. Два контрольных пункта делят лыжную трассу на три участка одинаковой длины. Известно, что путь, состоящий из первого и второго участков вместе, лыжник прошел со средней скоростью a м/мин; путь, состоящий из второго и третьего участков вместе, лыжник прошел со средней скоростью b м/мин. Средняя скорость лыжника на втором участке была такой же, как средняя скорость, подсчитанная для первого и третьего участков вместе. Какова средняя скорость лыжника на всей трассе в целом и на каждом участке этой трассы в отдельности? Провести анализ условий существования реального решения задачи.
 19. На старте два велосипедиста. Раздался сигнал, и оба велосипедиста помчались в одном направлении. Следом за ними через 10 минут с того же старта начал путь третий велосипедист. Сначала он обогнал первого велосипедиста, после чего находился в пути еще 20 минут, пока догнал второго велосипедиста. Начиная от самого

20. Шхуна идет от пункта **A** до пункта **B** по озеру, а от пункта **B** до пункта **C** вверх по реке, а затем отправляется обратно. Скорость шхуны относительно неподвижной воды все время поддерживается равной **c** км/ч. От пункта **A** до пункта **C** шхуна идет **a** часов, а обратный путь занимает **b** часов, причем на путь от пункта **C** до пункта **B** шхуне нужно втрое меньше времени, чем на путь от пункта **B** до пункта **A**. Найти расстояния от пункта **A** до пункта **B** и от пункта **B** до пункта **C**.



- 37

- каждый круг на a секунд быстрее побежденного, закончил дистанцию за t минут. Считается, что скорости спортсменов сохранялись постоянными на всей дистанции.
7. К берегу водохранилища подошли три человека A , B и C . A отправился на противоположный берег вплавь со скоростью v км/ч. Одновременно отправились B и C на моторной лодке со скоростью $10v$ км/ч. Через некоторое время C решил остаток пути преодолеть вплавь и поплыл с той же скоростью, что и A . В тот же момент B повернул назад, чтобы взять в лодку A . A быстро садится в лодку и продолжает путь вместе с B . На противоположном берегу все трое оказываются одновременно. Определить время переправы, если известно, что ширина водохранилища равна b километров (скорость течения предполагается равной нулю).
 8. Две точки A и B , первоначальное расстояние между которыми равно a , одновременно начали двигаться по разным сторонам прямого угла к его вершине с одной и той же постоянной скоростью v . Точка B достигает вершины на t единиц времени раньше, чем точка A (все измерения выполнены в одной системе единиц). Определить, сколько времени двигалась точка A . Если заданы только величины v и t , то какое значение надо придать величине a , чтобы искомое время приняло наименьшее из возможных его значений?
 9. Имеется брусок в форме прямой треугольной призмы. Непосредственным измерением получены размеры сторон основания призмы: a , b и c . На боковых ребрах призмы надо наметить точки M и N так, чтобы при распиливании бруска по линиям CM и CN в сечении получился равносторонний треугольник CMN . Найти размеры отрезков AN и BM , если, разумеется, возможно такое сечение (A , B , C – вершины углов, лежащих соответственно против сторон с длинами a , b и c).
 10. Из двух пунктов A и B одновременно выехали два инспектора к месту происшествия в пункт C . Первый инспектор примчался в пункт C через a минут. Если второй инспектор будет стремиться попасть из пункта B в пункт C одновременно с первым инспектором, то ему придется на проезд каждого километра затрачивать на c минут меньше, чем первому инспектору, так как расстояние от пункта B до пункта C на b километров больше расстояния между пунктами A и C . На каком расстоянии от пункта A случилось происшествие?
 11. К цветущей яблоне полетел шмель со скоростью v_1 м/мин. Одновременно к другой яблоне полетела пчела со скоростью v_2 м/мин. При этом шмелю нужно было преодолеть расстояние в $2a$ метров, а пчеле – расстояние в $2b$ метров. Предположим, что траектории их полета - взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке, делящей пополам и путь шмеля, и путь пчелы. Найти зависимость расстояния y между шмелем и пчелой от времени x их полета. Установить момент, когда в полете шмеля и пчелы расстояние между ними достигает наименьшего значения. Исследовать, пролетит ли пчела или шмель точку пересечения их траекторий к моменту, когда будет достигнуто наименьшее расстояние между шмелем и пчелой.

12. Два велосипедиста выезжают одновременно из пункта **A** с различными (но для каждого постоянными) скоростями и едут к пункту **B**. Достигнув его, они тотчас же едут обратно. Первый велосипедист, ехавший быстрее второго, на обратном пути встретил второго велосипедиста на расстоянии **a** километров от пункта **B**. Затем, достигнув пункта **A**, едет снова по направлению к пункту **B** и, пройдя -ю часть пути **AB**, встречает второго велосипедиста, возвращающегося из пункта **B**. Найти расстояние от пункта **A** до пункта **B**.
13. Кортёж автомобилей с космонавтами равномерно движется по проспекту со скоростью **v** км/ч. Протяженность кортежа постоянно сохраняется равной **m** метров. Букет цветов, брошенный из окна дома, попал в коляску мотоциклиста, ехавшего сзади кортежа. Мотоциклист проехал вперед, передал букет космонавту, находившемуся в первом автомобиле, и тотчас отправился обратно. На проезд туда и обратно вдоль движущегося кортежа мотоциклисту потребовалось **t** минут. Вычислить скорость мотоциклиста, если она на всем пути была одинакова.
14. Арбузы, привезенные на базу, предназначены для двух магазинов. Первый магазин сразу приступил к перевозке арбузов и перевозил их ежедневно одинаковыми весовыми порциями. Второй магазин приступил к перевозке арбузов на **a** дней позже и также перевозил их ежедневно одинаковыми, но иными, чем первый магазин, весовыми порциями. При этих условиях через **b** дней, прошедших от начала перевозочных операций, на базе осталась половина первоначального количества арбузов. За сколько дней были вывезены все арбузы с базы, если перевозка закончилась одновременно и вес арбузов, полученных первым магазином, равен весу арбузов, полученных вторым магазином?
15. Три экскаватора производят некоторую работу. Если эту работу будет выполнять один первый экскаватор, то он закончит работу на **a** дней позже, чем при работе всех экскаваторов вместе. Если эту работу будет выполнять второй экскаватор, то он закончит ее на **b** дней позже, чем все экскаваторы вместе. Если же эту работу будет выполнять только третий экскаватор, то ему потребуется в **c** раз больше времени, чем всем экскаваторам вместе. За сколько дней выполняет работу каждый экскаватор в отдельности? Какие числовые значения может принимать величина **c**?
16. Имеется **n** мензурок с жидкостью. Из первой мензурки перелили $\frac{1}{n}$ часть имеющейся там жидкости во вторую мензурку. Затем из второй мензурки $\frac{1}{n}$ часть оказавшейся там после переливания из первой мензурки жидкости перелили в третью мензурку и т.д. Наконец, из -ой мензурки перелили $\frac{1}{n}$ часть оказавшейся в ней после переливания из предыдущей мензурки жидкости снова в первую мензурку. После всех этих переливаний в каждой мензурке оказалось по **a** см³ жидкости. Сколько первоначально было жидкости в каждой мензурке?
17. Партия одинаковых деталей обрабатывалась на трех станках разных конструкций в такой последовательности: сначала действовал только первый станок столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на втором и третьем станках. Затем действовал только второй станок столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на первом и третьем станках. Остальная часть партии деталей была обработана на третьем станке в течение столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей

работы на первом и втором станках. Во сколько раз быстрее была бы выполнена эта работа, если бы действовали совместно все три станка?

18. Два понтона, находящиеся на одном месте, надо быстро сплавить вниз по реке на a километров. Буксир не может взять сразу два понтона. Тогда возник такой план: один понтон сразу отправится самоходом (как плот), а другой будет на некотором участке реки вначале транспортироваться буксиром, после чего будет отцеплен и отправлен самоходом. Буксир же тотчас развернется и пойдет на сближение с плывущим первым понтоном, возьмет его и отбуксирует до конечного пункта. В результате осуществления плана оба понтона пришли к месту назначения одновременно. По течению реки буксир все время поддерживал скорость $(v + u)$ км/ч, а против течения $(v - u)$ км/ч, где u – скорость течения реки. Сколько времени потребовалось на всю транспортировку по этому плану, и насколько он сокращает время, за которое понтоны прошли бы требуемое расстояние по течению самоходом?
19. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого спортсмена постоянна, но на пробег всей дорожки первый спортсмен тратит на a секунд меньше, чем второй. Если они начинают пробег с общего старта и в одном направлении, то сходятся через каждые b секунд. Через какое время они встретятся, если побегут в противоположных направлениях по той же дорожке с прежними скоростями?
20. На расстоянии l метров от моста A вниз по течению реки расположен мост B . Когда спортсмен проплывал мимо моста A , направляясь к мосту B , ему бросили два мяча. Первый мяч он подхватил, а второй оставил плыть по течению. Проплыв с мячом некоторый участок реки, спортсмен оставил этот мяч и поплыл вверх по реке за вторым мячом. Подхватив второй мяч, он снова повернул по направлению к мосту B и достиг его одновременно со свободно плывшим первым мячом. Какое расстояние пришлось проплыть спортсмену, если его собственная скорость все время была в k больше скорости течения?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8
ТЕМА: СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ИНФОРМАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Цель лабораторной работы: Закрепление практических навыков в построении математических и информационных моделей.

По каждой решенной задаче студенты представляют отчет, в котором необходимо отразить следующие разделы:

- постановка (условие) задачи;
- математическая или информационная модель;
- алгоритм моделирования задачи;
- программа на языке программирования высокого уровня;
- результаты выполнения работы;
- содержательный анализ результатов моделирования, выводы.

Из приведенного ниже списка необходимо решить четыре задачи (по одной из каждого задания). Все задачи разбиты на четыре группы по двадцать задач в каждой. Номера задач каждому студенту соответствуют его номеру в журнале группы. Решение каждой задачи должно включать следующие взаимосвязанные этапы:

- *анализ условия задачи* и выработка подходов к ее решению; *построение математической или информационной модели*;
- *выбор входных, промежуточных и выходных данных*; обоснование их внешнего (для пользователя) и внутреннего (конструкции языка программирования) представления; явное описание класса входных данных (при выборе ограничений необходимо стремиться не сужать, а максимально расширять класс входных данных и, таким образом, разработать наиболее универсальную программу в рамках вычислительных ресурсов компьютера);
- *разработка алгоритма решения задачи* (на основе выбранных подходов) с максимальным использованием подпрограмм или модулей; *описание алгоритма*; обоснование правильности его работы;
- *запись алгоритма на языке программирования*;
- *построение набора тестов*, на которых будет проверяться правильность работы программы;
- *отладка программы* и демонстрация правильности ее работы на выбранном наборе тестов;
- *получение результатов решения задачи* и их анализ.

Каждое задание сдается студентом в виде письменного итогового отчета в два этапа: на первом этапе представляются первые три пункта отчета как итог самостоятельной работы дома и служат допуском для работы на компьютере на втором этапе.

Порядок решения задач роли не играет, однако, отчеты по выполненным заданиям представляются преподавателю в указанные им сроки.

ЗАДАНИЕ 1

1. Найти все такие простые числа, не превосходящие заданного числа n , двоичная запись которых представляет собой симметрическую последовательность нулей и единиц (начинающуюся единицей).
2. Построить таблицу всех различных разбиений заданного целого числа n $n > 0$ на сумму трех натуральных слагаемых (разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, различными не считаются).

3. Найти все простые числа, не превосходящие заданного числа $n > 0$, и записать их в 16-ой системе счисления.
4. Преобразовать заданное целое положительное число из p -ичной системы счисления в q -ичную ($p, q \leq 16$).
5. Найти число из заданного множества положительных целых чисел, в двоичном представлении которого больше всего единиц.
6. Найти все натуральные числа, не превосходящие заданного числа n , в двоичном представлении которых номера ненулевых разрядов образуют арифметическую прогрессию.
7. Перечислить все пары простых чисел-близнецов, не превосходящих заданного числа n , троичные представления которых получаются друг из друга записью цифр в обратном порядке (первая такая пара - это 5 и 7).
8. Найти все пары натуральных двухзначных чисел m, n таких, что значение произведения $m \cdot n$ не изменится, если поменять местами цифры каждого из сомножителей (такой парой будет, например, 38 и 83).
9. Найти все натуральные числа, не превосходящие заданного числа n , делящиеся на каждую из своих цифр.
10. Заданы три натуральных числа a, b и n . Найти все натуральные числа, не превосходящие числа n , которые можно представить в виде суммы (произвольного числа) слагаемых, каждое из которых равно либо числу a , либо числу b .
11. Найти все натуральные числа, не превосходящие заданного числа n , десятичная запись которых есть строго возрастающая или строго убывающая последовательность цифр.
12. Найти все натуральные числа, не превосходящие заданного числа n , представимые в виде суммы квадратов двух каких-нибудь различных натуральных чисел.
13. Задано конечное множество натуральных чисел. Заменить каждое из них на число, которое получается из исходного числа записью его десятичных цифр в обратном порядке.
14. Для натуральных чисел a и b операцию $\oplus$ определим так:

$$a \oplus b = a - b + a \bmod b.$$
 Найти все такие пары чисел a и b , не превосходящие заданного числа n , для которых $a \oplus b = b \oplus a$.
15. Простое число называется числом *Мерсенна*, если оно может быть представлено в виде $2^p - 1$, где p - тоже простое число. Дано натуральное число n . Найти все числа Мерсенна, меньшие n .
16. Дано натуральное число n . Среди чисел $1, 2, \dots, n$ найти все такие, запись которых совпадает с последними цифрами записи их квадрата (например, $25^2 = 625$).
17. Натуральное число из n цифр называется числом *Армстронга*, если сумма его цифр, возведенных в n -ю степень, равна самому числу (например, $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$). Получить все числа Армстронга, состоящие из двух, трех и четырех цифр.

18. Дано натуральное число m . Найти такое натуральное число n , двоичная запись которого получается из двоичной записи числа m изменением порядка следования цифр на обратный порядок (m задано в десятичной системе счисления, n также надо получить в десятичной системе, например, для $m = 6$ получается $n = 3$).
19. Получить все натуральные числа, меньшие 10^6 , которые являются палиндромами как в десятичной, так и в двоичной системах счисления.
20. Получить все 4-значные натуральные десятичные числа, в записи которых нет двух одинаковых цифр. Подсчитать количество таких чисел.



ЗАДАНИЕ 2

1. Из заданного множества точек на плоскости выбрать две различные точки так, чтобы количества точек, лежащих по разные стороны от прямой, проходящей через эти две точки, различались наименьшим образом.
2. Определить радиус и центр окружности, на которой лежит наибольшее число точек заданного на плоскости множества точек.
3. Определить радиус и центр такой окружности, проходящей хотя бы через три различные точки заданного множества точек на плоскости, что разность количества точек, лежащих внутри соответствующего круга и вне его - минимальна.
4. Во множестве точек на плоскости найти пару точек с максимальным расстоянием между ними.
5. Задано множество прямых на плоскости коэффициентами своих уравнений. Вычислить количество точек пересечения этих прямых.
6. Порядок на множестве точек плоскости определим следующим образом: $(x, y) \leq (u, v)$, если либо $x < u$, либо $x = u$ и $y \leq v$. Перечислить точки заданного множества точек на плоскости в соответствии с введенным порядком.
7. На плоскости заданы множество точек A и множество прямых B . Найти две такие различные точки из A , что проходящая через них прямая параллельна наибольшему количеству прямых из B .
8. На плоскости заданы множество точек M и точка $D \notin M$. Подсчитать количество (неупорядоченных) троек точек $A, B, C \in M$ таких, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.
9. Выбрать три разные точки заданного на плоскости множества точек, являющиеся вершинами треугольника наибольшего периметра.
10. Задано множество точек на плоскости. Выбрать из них четыре разные точки, которые являются вершинами квадрата наибольшей площади.
11. На плоскости задано множество попарно различных прямых коэффициентами своих уравнений. Найти среди них ту прямую, которая имеет максимальное число пересечений с остальными прямыми.
12. Найти ромб наибольшей площади с вершинами в заданном множестве точек на плоскости.
13. Вычислить количество равносторонних треугольников с различными длинами оснований и вершинами в заданном множестве точек на плоскости.
14. Задано множество точек на плоскости, не лежащих на одной прямой. Найти минимальное подмножество точек, после удаления которых остаются точки, лежащие на одной прямой.

15. Построить множество всех различных выпуклых четырехугольников с вершинами в заданном множестве точек на плоскости.
16. Из заданного на плоскости множества точек выбрать три различные точки так, чтобы разность между площадью круга, ограниченного окружностью, проходящей через эти три точки, и площадью треугольника с вершинами в этих точках была минимальной.
17. Построить два треугольника с вершинами в заданном множестве точек на плоскости так, чтобы первый треугольник лежал строго внутри второго.
18. Определить радиус и центр окружности минимального радиуса, проходящей хотя бы через три различные точки заданного множества точек на плоскости.
19. Найти такую точку заданного на плоскости множества точек, сумма расстояний от которой до остальных точек минимальна.
20. *Расстояние между двумя множествами точек* - это расстояние между наиболее близко расположенными точками этих множеств. Найти расстояние между двумя заданными множествами точек на плоскости.



ЗАДАНИЕ 3

1. Расстояние между k -й и s -й строками матрицы определяется как $\sum_{j=1}^n |a_{kj}| |a_{sj}|$. Указать номер строки, максимально удаленной от первой строки данной матрицы.
2. Определить норму заданной матрицы $A = \|a_{ij}\|$, т.е. число $\max_i (\sum_j |a_{ij}|)$.
3. Начиная с центра, обойти по спирали все элементы квадратной матрицы размером 13×13 (распечатывая их в порядке обхода).
4. По заданной квадратной матрице размером 10×10 построить вектор длиной 19, элементы которого - максимумы элементов диагоналей, параллельных главной диагонали (включая главную диагональ).
5. Две строки матрицы назовем *похожими*, если совпадают множества чисел, встречающихся в этих строках (не обязательно в том же порядке). Найти количество строк в максимальном множестве попарно непохожих строк заданной матрицы.
6. *Характеристикой* строки целочисленной матрицы назовем сумму ее положительных четных элементов. Переставляя строки заданной матрицы, расположить их в соответствии с ростом характеристик.
7. Построить целочисленную матрицу $A = \|a_{ij}\|$ размером 10×10 следующим образом: $a_{ij} = \begin{cases} c_i^j & \text{при } i \geq j \\ c_j^i & \text{при } j > i \end{cases}$, где c_i^j - число сочетаний из i элементов по j .
8. Для заданной целочисленной матрицы найти максимум сумм элементов диагоналей, параллельных главной диагонали матрицы.

9. Дана матрица A размером 20×20 . Считая ее составленной из 100 квадратов размером 2×2 и переставляя эти квадраты, преобразовать A так, чтобы в результирующей матрице для всяких двух квадратов B и C выполнялось следующее условие: если сумма элементов квадрата B меньше суммы элементов квадрата C , то B лежит либо выше, либо левее (когда B и C находятся на одной горизонтали) квадрата C .
10. *Характеристикой столбца* целочисленной матрицы назовем сумму модулей его отрицательных нечетных элементов. Переставляя столбцы заданной матрицы, расположить их в соответствии с ростом характеристик.
11. Комплексная матрица Z представляется парой X, Y действительных матриц так, что $Z = X + iY$. Даны действительные квадратные матрицы A, B, C и D порядка m . Найти произведение двух комплексных матриц $A + iB$ и $C + iD$, т.е. найти действительные квадратные матрицы X и Y порядка m такие, что $X + iY = (A + iB)(C + iD)$.
12. Правая треугольная матрица A порядка n задана в виде последовательности $n(n+1)/2$ чисел: сначала идет n элементов первой строки, затем $n-1$ элемент второй строки, начиная со второй позиции, и т.д. (в последней строке остается только один элемент). Остальные места матрицы A заполняются нулями. Кроме этой последовательности дан вектор-столбец b размером n . Найти вектор $A \cdot b$.
13. Среди строк заданной целочисленной матрицы, содержащих только нечетные элементы, найти строку с максимальной суммой модулей элементов.
14. Среди столбцов заданной целочисленной матрицы, содержащих только такие элементы, которые по модулю не больше 10 , найти столбец с минимальным произведением элементов.
15. Пусть $m(A, i)$ означает номер столбца матрицы A , в котором находится последний в строке минимум i -й строки. Проверить, верно ли, что для заданной матрицы A размером 20×20 выполняются неравенства $m(A, 1) \leq m(A, 2) \leq \dots \leq m(A, 20)$.
16. *Соседями* элемента a_{ij} в матрице назовем элементы a_{ks} с условиями на индексы: $i-1 \leq k \leq i+1, j-1 \leq s \leq j+1, (k, s) \neq (i, j)$. Операция *сглаживания* матрицы дает новую матрицу того же размера, каждый элемент которой получается как среднее арифметическое имеющихся соседей соответствующего элемента исходной матрицы. Построить результат сглаживания заданной вещественной матрицы размером 10×10 .
17. Элемент матрицы называется *локальным минимумом*, если он строго меньше всех имеющихся у него соседей (см. задачу 71). Подсчитать количество локальных минимумов заданной матрицы размером 10×12 и найти максимум среди них.
18. Определить, становится ли симметричной (относительно главной диагонали) заданная матрица размером 10×10 после замены на число нуль каждого локального минимума (см. задачи 71 и 72).

19. Взаимно однозначное отображение элементов матрицы на себя можно задать с помощью двух целочисленных матриц: в первой указывать номер строки, куда переходит данный элемент, а во второй - номер столбца. Построить две матрицы, задающие отображение каждого элемента матрицы размером 10×10 на симметричный ему элемент относительно главной диагонали.
20. Проверить, удовлетворяет ли заданная матрица $A = \|a_{ij}\|$ размером 10×10 следующему условию: для всех $i > 1$ и для всех $j > 1$ верно неравенство $a_{ij} \geq a_{i-1, j} + a_{i, j-1}$.



ЗАДАНИЕ 4

1. Найти максимальную длину строки в текстовом файле и распечатать все строки файла, имеющие такую длину.
2. В файле находятся только целые числа. Определить, имеет ли последовательность чисел, находящихся в файле, нечетную длину, и если да, то некоторой переменной присвоить значение среднего элемента файла. В противном случае присвоить этой переменной значение первого числа файла.
3. Создать файл, содержащий сведения о книгах в библиотеке. Структура записи: шифр книги, автор, название, год издания, местоположение (номер стеллажа, полка). Предусмотреть возможность корректировки файла по вводимому коду корректировки, например:
 1 - удалить запись (по шифру XXX);
 2 - добавить новую запись;
 3 - изменить запись (по введенной фамилии автора и названию книги);
 4 - получить информацию о книге с шифром XXX.
4. В текстовый файл вставить пробелы таким образом, чтобы каждая строка имела длину **80** символов (пробелы в строке должны быть вставлены равномерно).
5. Каждая строка файла содержит название горной вершины и ее высоту. Используя структуру для описания понятия *вершина*, получить название самой высокой вершины по данным файла.
6. В текстовом файле подсчитать количество строк, которые оканчиваются буквой «В».
7. Из текстового файла удалить все гласные буквы. Новый файл не создавать!
8. Каждая запись файла содержит следующие данные: пол, имя, рост. Распечатать средний женский рост и имя самого высокого мужчины по данным файла. Использовать структуру для описания понятия *человек*.
9. В файле находится текст программы на языке программирования C++ с комментариями. Создать выходной файл, в который переписать содержимое исходного файла, убрав комментарии из текста программы.
10. Используя структуру записи для определения понятия *студент* (состоящую из полей ФИО, курс, группа, оценки в зимнюю сессию), распечатать фамилии и имена отличников группы и их долю от общего числа отличников курса (данные находятся в файле).

11. Используя структуру записи с полями пол, ФИО, возраст, распечатать количество девушек по имени "Елена" и имена тех, кому исполнилось **18** лет (данные находятся в файле).
12. В текстовом файле подсчитать количество строк, которые начинаются с буквы «В».
13. Из текстового файла удалить все пробельные символы. Новый файл не создавать!
14. В текстовом файле подсчитать количество строк, которые начинаются и оканчиваются одной и той же буквой.
15. В текстовом файле заменить все последовательности идущих подряд пробелов одним пробелом, т.е. «сжать» файл. Новый файл не создавать!
16. Дан текстовый файл **F1**. Переписать его содержимое в файл **F2**, разбив **F1** на строки таким образом, чтобы каждая строка либо оканчивалась точкой, либо содержала **40** литер, если среди них нет точек.
17. Создать два файла, содержащих сведения об игроках хоккейных команд "Динамо" и "Спартак". Структура записей файлов:
 - 1 - фамилия, имя игрока;
 - 2 - число заброшенных шайб;
 - 3 - число сделанных голевых передач.По данным, извлекаемым из этих файлов, создать новый файл, содержащий данные о шести самых результативных игроках обеих команд.
18. Создать файл, содержащий сведения о том, какие из **5** предложенных дисциплин по выбору желает слушать студент. Структура записи:
 - 1 - фамилия студента;
 - 2 - имя группы;
 - 3 - средний балл студента в зимнюю сессию;
 - 4 - 5 дисциплин по выбору, где символ "*" указывает на выбранную студентом дисциплину.Создать файл, содержащий данные о тех студентах, которые желают прослушать дисциплину **X**. Если желающих больше **12**, то отобрать тех студентов, у которых более высокий средний балл.
19. Создать файл, в который записать результаты соревнований по **6** видам спорта *зимней Олимпиады 2014 г. в Сочи*.
Написать программу, которая выполняет следующие функции:
 - 1 - выдает список призеров страны **NNN**;
 - 2 - выдает таблицу призеров (золото, серебро, бронза) по запрашиваемому виду спорта.
20. Создать файл, содержащий сведения об ассортименте обуви в магазине. Структура записи: артикул, наименование, размер, количество пар, стоимость одной пары. Артикул начинается с буквы **D** для дамской, с буквы **M** - для мужской, с буквы **C** - для детской обуви.
Написать программу, выдающую следующую информацию:
 - 1 - наличие и стоимость обуви артикула **XX**;
 - 2 - список дамской обуви заданного размера с указанием наименования и имеющегося в наличии числа пар каждой модели.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 13

Тема: Корректность и обусловленность вычислительных задач и алгоритмов

Цель работы: научиться анализировать обусловленность вычислительных задач, находить число обусловленности.

При решении задачи на компьютере точность не может быть произвольной, она всегда ограничена разрядностью регистров. Для чисел с плавающей запятой мерой относительной точности представления вещественных чисел служит характеристика «машинный эпсилон» - $\epsilon_{\text{маш}}$.

Часто вводят количественную меру степени обусловленности вычислительной задачи – **число обусловленности**. Эту величину можно интерпретировать как коэффициент возможного возрастания погрешностей в решении по отношению к вызвавшим их неустранимым погрешностям входных данных. Между абсолютными неустранимыми погрешностями входных данных x и решения y установлено, как известно, неравенство $\Delta y^* \leq v_{\Delta} \Delta x^*$, где v_{Δ} -

абсолютное число обусловленности. Аналогичное неравенство вводится между относительными неустранимыми погрешностями входных данных и решения: $\delta y^* \leq v_{\delta} \delta x^*$, где v_{δ} - относительное число обусловленности.

Пример 1. Число обусловленности задачи вычитания двух приближенных чисел a и b одного знака вычисляется по формуле $v = \frac{|a+b|}{|a-b|} (*)$.

Пример 2. Пусть задано алгебраическое или трансцендентное уравнение

$$f(x, a_1, a_2, \dots, a_m) = 0.$$

Это уравнение может иметь один или несколько корней или не иметь их вовсе. Каждый корень зависит от числовых данных $a_1, a_2, \dots, a_m$ уравнения. Число обусловленности k -го корня в зависимости от параметра a_i находится по формуле

$$v_k = \frac{|a_i| \cdot \left| \frac{f'_{a_i}}{f'_x} \right|}{|x|} \bigg|_{x=x_k}. \quad (**)$$

Вычислительный алгоритм называется **корректным**, если выполнены два условия:

1. Для любых входных данных $x \in X$ результат $y \in Y$ может быть получен за конечное число шагов.
2. Результат, полученный с помощью алгоритма, устойчив по входным данным.

Алгоритм называется **некорректным**, если не выполняется хотя бы одно из этих двух условий. Корректный вычислительный алгоритм называется **хорошо обусловленным**, если неустранимым погрешностям входных данных соответствуют малые погрешности решения. Корректность вычислительного алгоритма это теоретическая возможность получить решение вычислительной задачи с приемлемой точностью. Хорошо обусловленный вычислительный алгоритм дает возможность практической реализации этого алгоритма с помощью вычислительной техники.

Задание 1

Разработать программу, вычисляющую значение разности двух приближенных чисел одинакового знака (использовать типы вещественных чисел одинарной и двойной точности). Сравнить и объяснить полученные результаты. Найти число обусловленности задачи вычитания близких чисел для своего варианта, используя формулу (*).

Номер варианта	Разность чисел
1	$1 - 0, \underbrace{999999999999999999}_{18 \text{ девяток}}$
2	$2 - 1, \underbrace{999999999999999999}_{18 \text{ девяток}}$
3	$3 - 2, \underbrace{999999999999999999}_{18 \text{ девяток}}$
4	$4 - 3, \underbrace{999999999999999999}_{18 \text{ девяток}}$
5	$1 - 0, \underbrace{99999999999999}_{14 \text{ девяток}}$
6	$2 - 1, \underbrace{99999999999999}_{14 \text{ девяток}}$
7	$3 - 2, \underbrace{99999999999999}_{14 \text{ девяток}}$
8	$4 - 3, \underbrace{99999999999999}_{14 \text{ девяток}}$
9	$1 - 0, \underbrace{9999999999999999}_{16 \text{ девяток}}$
10	$2 - 1, \underbrace{9999999999999999}_{16 \text{ девяток}}$
11	$3 - 2, \underbrace{9999999999999999}_{16 \text{ девяток}}$
12	$4 - 3, \underbrace{9999999999999999}_{16 \text{ девяток}}$
13	$1 - 0, \underbrace{999999999999999}_{15 \text{ девяток}}$
14	$2 - 1, \underbrace{999999999999999}_{15 \text{ девяток}}$
15	$3 - 2, \underbrace{999999999999999}_{15 \text{ девяток}}$
16	$4 - 3, \underbrace{999999999999999}_{15 \text{ девяток}}$
17	$1 - 0, \underbrace{9999999999999999}_{15 \text{ девяток}}$

	17 девяток
18	2-1, <u>999999999999999999</u>
	17 девяток
19	3-2, <u>999999999999999999</u>
	17 девяток
20	4-3, <u>999999999999999999</u>
	17 девяток

Задание 2

Найти корни уравнения при условии, что правой части дано возмущение $k = 10^{-8}$. Вычислить число обусловленности для каждого корня по формуле (**).

Номер варианта	Уравнение
1	$(x + 1)^4 = 0$
2	$(x - 2)^4 = 0$
3	$(x - 3)^4 = 0$
4	$(x - 4)^4 = 0$
5	$(x + 5)^4 = 0$
6	$(x - 6)^4 = 0$
7	$(x - 5)^4 = 0$
8	$(x - 8)^4 = 0$
9	$(x + 9)^4 = 0$
10	$(x - 10)^4 = 0$
11	$(x + 3)^4 = 0$
12	$(x + 4)^4 = 0$
13	$(x + 6)^4 = 0$
14	$(x + 2)^4 = 0$
15	$(x - 7)^4 = 0$
16	$(x + 8)^4 = 0$
17	$(x + 7)^4 = 0$
18	$(x - 9)^4 = 0$
19	$(x - 11)^4 = 0$
20	$(x + 10)^4 = 0$

Вопросы для собеседования

Вопросы по теме № 1

1. Какое число называется приближенным значением данного числа по недостатку и по избытку?
2. Какие цифры в записи приближенного числа называются значащими цифрами?
3. Сформулировать правила округления чисел.
4. Чем отличаются приближенные числа от точных чисел?
5. Привести определения абсолютной и относительной погрешностей приближенного числа.
6. В значениях чисел и десятичная запятая перемещена на одинаковое число разрядов влево или вправо. Изменится ли при этом количество верных цифр в числе ?
7. Как устанавливается количество верных в узком смысле цифр по величине относительной погрешности приближенного числа, если первая значащая цифра относительной погрешности меньше 5?
8. Почему в окончательных результатах вычислений кроме верных знаков оставляют еще один сомнительный знак, а в промежуточных вычислениях оставляют два-три сомнительных знака?
9. Какие значащие цифры приближенного числа являются верными в узком смысле, а какие – в широком смысле?
10. Какой приближенной формулой пользуются для решения обратной задачи приближенных вычислений – определения верных цифр числа , если известна его относительная погрешность ?
11. Как определяется предельная абсолютная погрешность приближенного числа?
12. Как определяется предельная относительная погрешность приближенного числа?
13. Какая связь существует между предельной абсолютной погрешностью и предельной относительной погрешностью?
14. По какому правилу округляют сомнительные цифры приближенного числа, оставив только верные знаки в узком смысле?
15. Как найти предельную абсолютную погрешность приближенного числа, если оно имеет верные цифры в широком смысле?
16. Как найти предельную относительную погрешность приближенного числа, если оно имеет верные цифры в узком смысле?
17. 10. Сформулировать алгоритм для выяснения более точного равенства двух числовых выражений.

Вопросы по теме № 2

18. Как объясняется целесообразность сохранения лишних десятичных знаков в более точных слагаемых при сложении нескольких чисел?
19. Каким способом можно быстро оценить относительную погрешность суммы нескольких слагаемых одного знака, если известны относительные погрешности каждого слагаемого?
20. По какой причине в вычислениях следует избегать вычитания близких по величине чисел?
21. Как объясняется нецелесообразность сохранения лишних значащих цифр в более точных данных при умножении или делении нескольких чисел?
22. Как формулируются правила подсчета цифр, и в каких случаях рекомендуется их применять?

23. Как оформляются вычисления со строгим учетом границ погрешностей при пооперационном учете ошибок?
24. Как вычисляются границы погрешностей результата вычислений при использовании методики итоговой оценки ошибки вычислений?
25. В каких случаях в приближенных вычислениях применяют метод границ?
26. Как оформляются расчеты по методу границ при пооперационном учете результатов вычислений?
27. 10. Существует ли связь между правилами подсчета цифр и методом границ?

Вопросы по теме № 3

28. В какой зависимости находится абсолютная погрешность значения функций одной переменной от абсолютной погрешности значения аргумента?
29. Как объясняется резкая потеря точности значения функции () для приближенных значений аргумента на участках с большими по модулю значениями производной ()?
30. Какие существуют оценки для абсолютной и относительной погрешностей при вычислении значений функций одной переменной?
31. Записать формулы для вычисления абсолютных погрешностей для степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций одной переменной. По каким формулам дифференциального исчисления вычисляются предельные абсолютные и относительные погрешности значений дифференцируемых функций нескольких переменных?

Вопросы по теме № 4

32. Как формулируется обратная задача приближенного вычисления значений функций одной и нескольких переменных?
33. В какой зависимости находится абсолютная погрешность значения функций одной переменной от абсолютной погрешности значения аргумента?
34. Как объясняется резкая потеря точности значения функции для приближенных значений аргумента на участках с большими по модулю значениями производной)?
35. Почему обратная задача теории погрешностей для функций нескольких переменных не имеет однозначного решения?
36. Сформулировать принцип равных влияний для решения обратной задачи функций нескольких переменных. В каких случаях следует отступить от принципа равных влияний и как поступить в подобных ситуациях?
37. При каких условиях предельные относительные погрешности всех аргументов функции нескольких переменных равны между собой?

Вопросы по теме № 5

38. Чем отличается разложение функции в ряд Маклорена от разложения в ряд Тейлора?
39. Сформулировать алгоритм разложения данной функции в ряд Маклорена. Что определяет оценка остаточного члена ряда Маклорена?
40. Всякую ли функцию, определенную на данном интервале и имеющую в нулевой точке этого интервала производные до заданного порядка включительно, можно разложить в ряд Маклорена?

Вопросы по теме № 6

41. Чем отличаются позиционные системы счисления от непозиционных?
42. Привести примеры непозиционных систем счисления. Сколько цифр потребуется для записи действительных чисел по основанию p ?
43. Почему люди пользуются десятичной системой счисления, а кодирование информации для ее обработки на компьютере используют двоичную систему?
44. В чем состоят преимущества, а в чем недостатки двоичной системы счисления?
45. Сформулировать правила перевода целых и дробных чисел из одной позиционной системы счисления в другую. Почему при выполнении операций на компьютере замена любого действительного числа конечной дробью является необходимой операцией. По каким правилам производится округление чисел на компьютере?
46. Какое из них является наиболее рациональным с точки зрения точности?
47. В чем состоит преимущество, а в чем недостатки представления чисел с плавающей запятой с их представлением с фиксированной запятой для работы на компьютере?
48. Составить таблицы сложения и умножения чисел в двоичной и восьмеричной системе счисления. Что представляет собой нормализация чисел, представленных в формате с плавающей запятой?
49. Установить порядок действий, необходимых для выполнения арифметических операций над двумя двоичными числами, представленными в формате с плавающей запятой.

Вопросы по теме № 7

50. Из каких основных этапов состоит процесс решения задачи с помощью ЭВМ?
51. Дать характеристику каждого этапа. Из каких частей складывается общая погрешность решения задачи?
52. Какие основные способы представления чисел используются в ЭВМ?
53. Какие числа называют машинным нулём?
54. Какие числа называют машинным эпсилон?
55. Каковы причины возникновения ошибок при проведении расчетов в системе чисел с плавающей запятой, порождаемых структурой этой системы?
56. Верно ли утверждение, что компьютер, округляющий числа по методу отбрасывания, всегда выдает результаты, записанные только верными цифрами?
57. Что понимается под погрешностью округления числа?
58. Из чего складывается полная погрешность округленного числа?
59. Чем объясняется целесообразность сохранения лишних десятичных знаков в более точных слагаемых при сложении нескольких чисел?
60. 10. Какие встроенные функции округления могут быть использованы в процессе вычислений на ЭВМ с использованием пакетов прикладных программ или языков программирования высокого уровня?

Вопросы по теме № 8

61. Как определяется вычислительный эксперимент и каково его назначение?
62. Чем отличается активный эксперимент от пассивного эксперимента?
63. Перечислить основные этапы вычислительного эксперимента. Чем отличается множество F всех действительных чисел от множества $\mathcal{F}$ чисел с плавающей запятой, являющегося моделью системы действительных чисел для вычислений на компьютере?

64. Почему при выполнении операции умножения чисел на компьютере часто возникает переполнение разрядной сетки?
65. В каких случаях при вычислениях на ЭВМ возникает исчезновение порядка?
66. Почему в некоторых случаях возникает машинный нуль, когда два ненулевых числа имеют ненулевое произведение?
67. Почему при вычислениях на ЭВМ законы коммутативности для сложения и умножения выполняются, а законы ассоциативности и дистрибутивности – нет?
68. Что определяет величина машинного эпсилон?
69. 10. Выписать разные формулы для вычисления площади треугольника.

Вопросы по теме № 9

70. В чем состоит сущность методологии математического моделирования?
71. Какова роль вычислительных экспериментов с математическими моделями объектов?
72. Для чего служат результаты математического моделирования при исследовании изучаемых объектов, процессов и явлений?
73. В каких случаях при исследовании модели нужно отказаться от некоторых свойств изучаемого объекта или вовсе не учитывать их?
74. Привести примеры описания разных объектов одной математической моделью. Охарактеризовать триаду «модель – алгоритм – программа»?
75. Привести примеры использования математического моделирования в различных областях знаний. Почему при использовании уже готового математического аппарата к изучению явлений и процессов предпочтителен путь «от задачи к методу», а не наоборот?
76. Какими качествами должен обладать исследователь при решении задачи построения математических моделей?
77. В чем состоит постановка прямых задач, обратных задач и задач идентификации при разработке математических моделей?
78. В чем состоит задача модификации математической модели?
79. Как проводят проверку качества математической модели на ее пригодность для описания исследуемого объекта?

Вопросы по теме № 10

80. Что понимают под вычислительной задачей?
81. В чем состоит цель решения вычислительной задачи?
82. Дать определение корректности математической задачи. Чем может быть мотивировано отсутствие решения вычислительной задачи?
83. Всегда ли единственность решения задачи является необходимым критерием ее корректности?
84. Привести примеры задач, решение которых может быть и не единственным. Какое решение вычислительной задачи называется устойчивым по входным данным. Что означает неустойчивость задачи по входным данным. Может ли одна и та же задача оказаться как устойчивой, так и неустойчивой?
85. Перечислить и прокомментировать основные этапы решения задачи на компьютере.

Вопросы по теме № 11

- 86. В чем суть отладки программы?
- 87. Для чего предназначено тестирование программы?
- 88. Можно ли при тестировании программы полностью устранить все ошибки в ней?
- 89. Как следует поступить при тестировании программы, если нет готовых эталонных результатов?
- 90. Какие данные следует использовать при проведении вычислительного эксперимента для решаемой задачи?
- 91. Как провести анализ результатов решения задачи, если ее математическая модель содержит несколько независимых параметров?

Вопросы по теме № 12

- 92. Что называется обусловленностью вычислительной задачи?
- 93. Чем характеризуются хорошо обусловленные и плохо обусловленные вычислительные задачи?
- 94. Каким неравенством определяется абсолютное число обусловленности?
- 95. Каким неравенством определяется относительное число обусловленности?
- 96. В чем различие между некорректными и плохо обусловленными задачами?
- 97. Привести примеры задач, требующих расширения понятия корректности?
- 98. Какой вычислительный алгоритм называется корректным?
- 99. Какой вычислительный алгоритм называется хорошо обусловленным?
- 100. По какой формуле вычисляется число обусловленности корня алгебраического уравнения с параметрами?
- 101. Почему задача нахождения корней многочлена Уилкинсона является плохо обусловленной?
- 102. Для каких значений относительного числа обусловленности задача вычисления интеграла является плохо обусловленной?
- 103. По какой формуле определяется относительное число обусловленности для вычисления значений дифференцируемой функции?
- 104. Что представляет собой норма матрицы, и какими способами ее можно найти?
- 105. Какую формулу можно использовать для определения числа обусловленности матрицы?

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации
по организации самостоятельной работы
по дисциплине
Основы математического моделирования
для студентов направления подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы

Учебный процесс в высшем учебном заведении в значительной степени строится на самостоятельной работе студентов, без которой трудно в полной мере овладеть сложным программным материалом и научиться в дальнейшем постоянно совершенствовать приобретенные знания и умения. Самостоятельная работа является внеаудиторной и предназначена для самостоятельного ознакомления студента с определенными разделами курса по рекомендованным педагогом материалам и подготовки к выполнению индивидуальных заданий по курсу. Целью самостоятельной работы студентов является:

- научить студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свою квалификацию.

- закрепление, расширение и углубление знаний, умений и навыков, полученных студентами на аудиторных занятиях под руководством преподавателей;

- изучение студентами дополнительных материалов по изучаемым дисциплинам и умение выбирать необходимый материал из различных источников; воспитание у студентов самостоятельности, организованности, самодисциплины, творческой активности, потребности развития познавательных способностей и упорства в достижении поставленных целей.

Предлагаемый подход к освоению материала усиливает мотивацию к аудиторной и внеаудиторной активности, что обеспечивает необходимый уровень знаний по изучаемым дисциплинам и позволяет повысить готовность студентов к сдаче экзаменов.

Приступая к изучению новой учебной дисциплины, студенты должны ознакомиться с учебной программой, учебной, научной и методической литературой, имеющейся в библиотеке, получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками. В ходе лекционных занятий вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций. В ходе подготовки к семинарам изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях: журналах, газетах и т.д. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой. Подготовить тезисы для выступлений по всем учебным вопросам, выносимым на семинар. Готовясь к докладу или реферативному сообщению, обращаться за методической помощью к преподавателю. Составить план-конспект своего выступления. Принимать активное участие в обсуждении учебных вопросов: выступать с докладами, рефератами, обзорами научных статей, отдельных публикаций периодической печати, касающихся содержания темы занятия. В ходе своего выступления использовать технические средства обучения, доску и мел. С целью более глубокого усвоения изучаемого материала задавать вопросы преподавателю. После подведения итогов семинара устранить недостатки, отмеченные преподавателем. При подготовке к экзамену (в конце семестра) повторять пройденный материал в строгом соответствии с учебной программой, примерным перечнем учебных вопросов, выносимых на зачет и содержащихся в данной программе. Использовать конспект лекций и литературу, рекомендованную преподавателем. Обратить особое внимание на темы учебных занятий, пропущенных студентом по разным причинам. При необходимости обратиться за консультацией и методической помощью к преподавателю.

1. Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно – выучу!»), а когда приходит пора экзаменов, материала, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться в оставшийся промежуток времени.

2. Правила и приемы конспектирования лекций

- Записывать информацию необходимо в соответствии с пунктами плана лекции, разбивая весь текст на логические блоки. Стоит использовать нумерацию, чтобы четко понимать последовательность изложения. Не будет лишним предусматривать в конспекте красную строку;

- Сокращайте ключевые термины до заглавной буквы, предварительно выделив их еще на этапе написания заголовка. К примеру, фраза «нематериальные ресурсы в структуре активов» может быть записана как «НР в структуре А». Если какие-то обозначения совпадают, имеет смысл пометить их кружком или любым другим опознавательным знаком;

- Стержневые понятия, которые используются при изучении какой-то дисциплины достаточно часто, можно заменять специальными сокращениями, которые будут актуальны в пределах конкретного конспекта. Если думаете, что забудете обозначения, то не стоит лениться записать их в конце тетради;

- Сокращение длинных распространенных слов позволяет ускорить процесс конспектирования. К примеру, слово «государство» можно заменить сокращенным «гос-во» и т.п.

- **Быстрое конспектирование** не обходится без использования ваших собственных значков важности. Придумайте их сами или возьмите на вооружение следующие:

- «!» — важно;
- «?» — под вопросом;
- «У» — смотреть учебник;
- «ЗВ» — например;
- «R» — перепроверить.

- Обозначения основных понятий имеет смысл записывать отдельным абзацем, при этом выделяя его любым способом. Подчеркивание цветным маркером облегчает процесс запоминания;

- Скоростное конспектирование требует использования математических обозначений. Очевидно, что писать «+» вместо «плюс» и « Σ » вместо «сумма» в разы продуктивнее;

- Не стоит пренебрегать общепринятыми аббревиатурами. Заменять термин типа «система управления базами данных» на «СУБД» является обязательным;

- Периодизации и классификации лучше записывать в виде диаграмм и схем; Эти навыки помогут сделать ваши записи более понятными, а время на фиксацию информации сократить в разы.

Эти умения могут использоваться не только в вузе, но и при посещении курсов дополнительного профессионального образования, семинаров, тренингов и разного рода конференций. Зная, как правильно конспектировать, вы сможете легко освоить большой объем информации, сделав ее сжатой, простой и понятной.

Вы можете находить все более продуктивные методы фиксирования информации сами. Запомните, конспект являет собой сжатую запись письменного или устного текста,

которая создается с целью последующего личного использования. По этой причине одинаковых конспектов у разных людей быть не может. Не стоит полностью перенимать чьи-то методы, надо создавать свой уникальный.

3. Работа с книгой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги. Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой – это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода). При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

4. Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;
2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;
3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;
4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;
5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

6. Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;
2. Выделите главное, составьте план;
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;
4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

Лань, 2011. - 672 с. : ил. - (Классическая учебная литература по математике) (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр. в конце глав. - Предм. указ.: с. 659-664. - ISBN 978-5-8114-0695-1, экземпляров 25

4. Денисова, Э. В. Краткий курс вычислительной математики Электронный ресурс : Учебно-методическое пособие / Э. В. Денисова, А. В. Кучер. - Краткий курс вычислительной математики, 2022-10-01. - Санкт-Петербург : Университет ИТМО, 2013. - 91 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 2227-8397, экземпляров неограничено

5. Основы вычислительной математики, математического и информационного моделирования : лабораторный практикум : Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика. Профиль подготовки "Математическое моделирование и вычислительная математика". Бакалавриат / сост. А. Н. Макоха, М. А. Дерябин ; Сев.-Кав. федер. ун-т. - Ставрополь : СКФУ, 2018. - 195 с. - Библиогр.: с. 194, экземпляров неограничено

6. Чивилихин, С. А. Вычислительные методы в технологиях программирования. Элементы теории и практикум Электронный ресурс / С. А. Чивилихин. - Вычислительные методы в технологиях программирования. Элементы теории и практикум, 2022-10-01. - Санкт-Петербург : Университет ИТМО, 2008. - 110 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 2227-8397, экземпляров неограничено

8.2. Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

1. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы по дисциплине «Основы математического моделирования» (электронный вариант)

2. Методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Основы вычислительной математики, математического и информационного моделирования» : Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль Математическое моделирование и вычислительная математика, квалификация выпускника бакалавр, форма обучения очная / А. Н. Макоха. - Ставрополь : СКФУ, 2013. - 54 с., экземпляров неограничено

8.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <https://moeobrazovanie.ru/partners/Exponenta> (Образовательный математический сайт Exponenta.ru).

2. <http://www.intuit.ru> - Интернет-университет информационных технологий ИНТУИТ

3. www.compres.ru – Сайт журнала «Компьютер пресс».

4. www.osp.ru - Издательство «Открытые системы».

9. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

При чтении лекций используется компьютерная техника, демонстрации презентационных мультимедийных материалов. На семинарских и практических занятиях студенты представляют презентации, подготовленные ими в часы самостоятельной работы.

Информационные справочные системы:

Информационно-справочные и информационно-правовые системы, используемые при изучении дисциплины:

Программное обеспечение:

1	Microsoft Office Standard 2013 (договор №01-эа/13 от 25.02.2013, лицензия №61541869)
2	Microsoft Windows 10 Prof (договор № 27-эа/16 от 02.08.2016, лицензия № 69366049)
3	Visual Studio

10. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Материально-техническая база обеспечивает проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, лабораторной, научно-исследовательской работы обучающихся (переносной ноутбук, переносной проектор, компьютеры с необходимым программным обеспечением и выходом в интернет).

Лекционные занятия	1	Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа укомплектована специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории: ноутбук, проектор. Учебно-наглядные пособия в виде тематических презентаций, соответствующих рабочим программам дисциплин.
Лабораторные работы	1	Помещение, оснащенное компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде: ПЭВМ с микропроцессором не ниже Pentium 5 объем ПЗУ не менее 2-3 гб, объем ОЗУ не менее 512 мб со средой Visual Studio
Самостоятельная работа	1	Помещение для самостоятельной работы обучающихся, оснащено компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде.

11. Особенности освоения дисциплины (модуля) лицами с ограниченными возможностями здоровья

Обучающимся с ограниченными возможностями здоровья предоставляются специальные учебники, учебные пособия и дидактические материалы, специальные технические средства обучения коллективного и индивидуального пользования, услуги ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь, а также услуги сурдопереводчиков и тифлосурдопереводчиков.

Освоение дисциплины (модуля) обучающимися с ограниченными возможностями здоровья может быть организовано совместно с другими обучающимися, а также в отдельных группах.

Освоение дисциплины (модуля) обучающимися с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья.

В целях доступности получения высшего образования по образовательной программе лицами с ограниченными возможностями здоровья при освоении дисциплины (модуля) обеспечивается:

- 1) для лиц с ограниченными возможностями здоровья по зрению:
 - присутствие ассистента, оказывающий студенту необходимую техническую помощь с учетом индивидуальных особенностей (помогает занять рабочее место, передвигаться, прочитать и оформить задание, в том числе, записывая под диктовку),
 - письменные задания, а также инструкции о порядке их выполнения оформляются увеличенным шрифтом,
 - специальные учебники, учебные пособия и дидактические материалы (имеющие крупный шрифт или аудиофайлы),
 - индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс,
 - при необходимости студенту для выполнения задания предоставляется увеличивающее устройство;
- 2) для лиц с ограниченными возможностями здоровья по слуху:

- присутствие ассистента, оказывающий студенту необходимую техническую помощь с учетом индивидуальных особенностей (помогает занять рабочее место, передвигаться, прочитать и оформить задание, в том числе, записывая под диктовку),

- обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости обучающемуся предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;

- обеспечивается надлежащими звуковыми средствами воспроизведения информации;

3) для лиц с ограниченными возможностями здоровья, имеющих нарушения опорно-двигательного аппарата (в том числе с тяжелыми нарушениями двигательных функций верхних конечностей или отсутствием верхних конечностей):

- письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением или надиктовываются ассистенту;

- по желанию студента задания могут выполняться в устной форме.