

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания
по выполнению практических работ по дисциплине
«Вариационное исчисление и методы оптимизации»
для студентов направления подготовки
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
направленность (профиль)
«Анализ данных и искусственный интеллект»

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Тема 2. Простейшие задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

Практическое занятие 1. Решение простейших вариационных задач для функционала. Постановка вариационной задачи, построение уравнения Эйлера для конкретных видов функционалов. Алгоритм решения уравнения Эйлера.

Практическое занятие 2. Решение простейших вариационных задач для функционала

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx.$$

Практическое занятие 3. Самостоятельное решение задач по теме 2.

Тема 3. Некоторые обобщения простейшей вариационной задачи.

Практическое занятие 4. Решение вариационных задач для функционалов

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx \text{ и } J(\vec{y}) = \int_a^b F(x, \vec{y}, \vec{y}') dx.$$

Практическое занятие 5. Решение вариационных задач с подвижными границами.

Практическое занятие 6. Решение вариационных задач Больца.

Практическое занятие 7. Самостоятельное решение задач по теме 3.

Тема 4. Задачи на условный экстремум

Практическое занятие 8. Решение задач на условный экстремум для функционала

$$J(\vec{y}) = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx.$$

Практическое занятие 9. Решение вариационных задач Лагранжа.

Практическое занятие 10. Решение изопериметрических задач.

Практическое занятие 11. Самостоятельное решение задач по теме 4

Тема 5. Прямые методы вариационного исчисления.

Практическое занятие 12. Метод Ритца, построение алгоритма решения оптимизационной задачи методом Ритца.

Практическое занятие 13. Решение оптимизационных задач вариационным методом Ритца

Практическое занятие 14. Метод Галеркина, построение алгоритма решения оптимизационной задачи методом Галеркина.

Практическое занятие 15. Решение оптимизационных задач вариационным методом Галеркина

Практическое занятие 16. Метод наискорейшего спуска, построение алгоритма решения оптимизационной задачи методом наискорейшего спуска.

Практическое занятие 17. Решение оптимизационных задач вариационным методом наискорейшего спуска

Практическое занятие 18. Самостоятельное решение задач по теме 5

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Введение

Настоящие методические указания разрабатываются с целью обеспечения работы студентов на практических занятиях учебно-методическими материалами. Задачами разработки методических указаний являются:

- улучшение методического обеспечения дисциплины;
- оказание студентам методической помощи в усвоении учебного материала при выполнении работы на практических занятиях;
- рациональное планирование и организация самостоятельной работы, выполняемой в рамках практических занятий и контроля знаний студентов.

Дисциплина «Вариационное исчисление и методы оптимизации» относится к группе дисциплин, формируемой участниками образовательных.

Цель и задачи работы студентов, выполняемой в рамках практических занятий, состоят в следующем.

Цели:

- Изучить теорию вариационного исчисления и методов оптимизации, овладеть соответствующей терминологией;
- Освоить основные методы вариационного исчисления и методов оптимизации и способы их применения к решению оптимизационных задач;

Задачи:

- Познакомиться с основными понятиями и определениями вариационного исчисления и методов оптимизации;
- Изучить методы теории вариационного исчисления и методов оптимизации;
- Приобрести практические навыки применения математического аппарата вариационного исчисления и методов оптимизации в задачах вычислительной математики и информатики.

Реализуемые компетенции:

Индекс	Формулировка:
ПК-1	Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий

ТЕМА 2. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА.

Практическое занятие 1. Решение простейших вариационных задач для функционала. Постановка вариационной задачи, построение уравнения Эйлера для конкретных видов функционалов. Алгоритм решения уравнения Эйлера.

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;
- **уметь** применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что оно, являясь первым, содержит в себе первоначальные базовые понятия, определения и аксиомы, которые затем найдут свое отражение во всех последующих темах изучаемой дисциплины.

Теоретическая часть. Рассмотреть понятия и определения функционала, вариации функционала, «исчисления» функционалов, вариационного исчисления, постановка вариационной задачи. Дать постановку простейшей вариационной задачи для

функционала $J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$, привести уравнение Эйлера для заданного

функционала, рассмотреть алгоритм решения уравнения Эйлера на основе методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Практическая часть: вопросы и задания.

1) Разобрать подробно решение следующей задачи.

Задача 1. Для функционала в простейшей вариационной задаче $J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + xy) dx$,

$y(0) = y(1) = 0$, построить уравнение Эйлера и решить его методами теории ОДУ.

Самостоятельно, но при помощи преподавателя, решить следующую задачу:

Задача 2. Для функционала в простейшей вариационной задаче $J(y) = \int_0^1 (e^y + xy') dx$,

$y(0) = 0$ $y(1) = 1$, построить уравнение Эйлера и решить его методами теории ОДУ.

3) Задания на самостоятельную работу.

А) Решить следующую задачу 3: Для функционала в простейшей вариационной

задаче $J(y) = \int_0^1 (y'^2 + yy' + 12xy) dx$, $y(0) = y(1) = 0$, построить уравнение Эйлера и

решить его методами теории ОДУ.

Б) Проработать теоретический материал по первой и второй лекциям темы 1 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

Практическое занятие 2. Решение простейших вариационных задач для

$$\text{функционала } J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx.$$

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;
- **уметь** применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в нем рассматриваются возможные частные случаи уравнения Эйлера, часто используемые в прикладных задачах математики и физики.

Теоретическая часть. Рассмотреть возможные частные случаи постановки вариационной задачи и соответствующие им уравнения Эйлера.

Практическая часть: вопросы и задания.

2) Разобрать подробно решение следующей задачи.

Задача 1. Найти экстремали функционалов, удовлетворяющих граничным условиям.

$$J(y) = \int_1^e (2y - x^2 y'^2) dx, \quad y(1) = e \quad y(e) = 0.$$

Самостоятельно, но при помощи преподавателя, решить следующую задачу:

Задача 2. Найти экстремали функционалов, удовлетворяющих граничным условиям.

$$J(y) = \int_0^{\pi} (4y \cos x + y'^2 - y^2) dx, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

3) Задания на самостоятельную работу.

А) Решить следующую задачу 3: . Найти экстремали функционалов, удовлетворяющих граничным условиям.

$$J(y) = \int_0^{\pi/2} (2y + y^2 - y'^2) dx, \quad y(0) = 0 \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Б) Проработать теоретический материал по первой и второй лекциям темы 1 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

Практическое занятие 3. Самостоятельное решение задач по теме 2.

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;

- **уметь** применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в ходе самостоятельного решения задач закрепляются знания, умения и навыки решения простейших вариационных задач.

Теоретическая часть. Кратко повторить основные понятия по заданной теме.

Практическая часть: вопросы и задания.

В соответствии с индивидуальным заданием по самостоятельной работе требуется решить примеры из своего варианта по теме 1 (см. методические указания по выполнению самостоятельной работы по данной дисциплине).

Б) Проработать теоретический материал по лекциям темы 2 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

ТЕМА 3. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ.

Практическое занятие 4. Решение вариационных задач для функционалов

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx \text{ и } J(\vec{y}) = \int_a^b F(x, \vec{y}, \vec{y}') dx.$$

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;
- **уметь** применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в нем рассматриваются возможные обобщения простейшей вариационной задачи и соответствующие алгоритмы их решения.

Теоретическая часть. Рассмотреть постановку вариационной задачи для функционалов $J(y) = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$ и $J(\vec{y}) = \int_a^b F(x, \vec{y}, \vec{y}') dx$, алгоритмы построения соответствующих уравнений Эйлера и методы их решения.

Практическая часть: вопросы и задания.

1) Разобрать подробно решение следующих задач.

Задача 1. Найти экстремали функционалов, удовлетворяющих граничным условиям

$$J(y) = \int_0^1 (y'''^2 - y''^2) dx, \quad y(0) = y''(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = y''(1) = \operatorname{sh} 1, \quad y'(1) = \operatorname{ch} 1;$$

Задача 2.

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1' y_2' + 6x y_1 + 12x^2 y_2) dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1;$$

2) Задания на самостоятельную работу.

А) Решить следующую задачу 3: $J(y) = \int_0^1 y'' dx, \quad y(0) = y(1) = y'(1) = 0, \quad y'(0) = 1;$

Б) Проработать теоретический материал по первой и второй лекциям темы 2 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

Практическое занятие 5. Решение вариационных задач с подвижными границами.

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;

- уметь применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в нем рассматриваются вариационные задачи с подвижными границами и соответствующие алгоритмы их решения.

Теоретическая часть. Рассмотреть постановку вариационной задачи с подвижными границами, различные варианты подвижных границ, алгоритмы построения соответствующих уравнений Эйлера, условий трансверсальности и методы их решения.

Практическая часть: вопросы и задания.

- 1) Разобрать подробно решение следующих задач.

Задача 1. Найти экстремали функционала в следующих задачах с подвижными границами:

$$J(y) = \int_0^{x_1} (y^2 + y'^2) dx, \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = 1; \quad y'(1) = ch1;$$

$$\text{Задача 2. } J(y) = \int_0^{\pi/2} (-y^2 + y'^2) dx, \quad y(0) = 0;$$

- 2) Задания на самостоятельную работу.

А) Решить следующую задачу 3: $J(y) = \int_0^1 (y + y'^2) dx, \quad y(1) = 0;$

Б) Проработать теоретический материал по лекциям темы 2 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

Практическое занятие 6. Решение вариационных задач Больца.

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;
- **уметь** применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в нем рассматриваются вариационные задачи Больца и соответствующие алгоритмы их решения.

Теоретическая часть. Рассмотреть постановку вариационной задачи Больца, алгоритмы построения соответствующих уравнений Эйлера, условий трансверсальности и методы их решения.

Практическая часть: вопросы и задания.

- 1) Разобрать подробно решение следующих задач.

Задача 1. Найти экстремали функционала в следующих задачах Больца:

$$J(y) = \int_0^1 e^{x+1} (y^2 + 2y^2) dx + 2y(1)(y(0) + 1);$$

Задача 2. $J(y) = \int_0^1 e^y y'^2 dx + 4e^{y(0)} + 32e^{-y(1)}$;

2) Задания на самостоятельную работу.

А) Решить следующую задачу 3: $J(y) = \int_0^{\pi/2} (-y^2 + y'^2) dx + y^2(0) - y^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4y\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

Б) Проработать теоретический материал по лекциям темы 2 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

Практическое занятие 7. Самостоятельное решение задач по теме 3

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;
- **уметь** применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в ходе самостоятельного решения задач закрепляются знания, умения и навыки решения вариационных задач с подвижными границами и задач Больца.

Теоретическая часть. Кратко повторить основные понятия по заданной теме.

Практическая часть: вопросы и задания.

В соответствии с индивидуальным заданием по самостоятельной работе требуется решить примеры из своего варианта по теме 2 (см. методические указания по выполнению самостоятельной работы по данной дисциплине).

Б) Проработать теоретический материал по лекциям темы 3 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

ТЕМА 4. ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Практическое занятие 8. Решение задач на условный экстремум для функционала

$$J(\bar{y}) = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx.$$

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;
- **уметь** применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в нем рассматриваются вариационные задачи оптимизации на условный экстремум для

функционала $J(\bar{y}) = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$ и соответствующие алгоритмы их решения.

Теоретическая часть. Рассмотреть постановку вариационной задачи оптимизации на условный экстремум для функционала $J(\bar{y}) = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$, алгоритмы построения соответствующего функционала Лагранжа и уравнений Эйлера, и методы их решения.

Практическая часть: вопросы и задания.

- 1) Разобрать подробно решение следующих задач.

Задача 1. Построить функционал Лагранжа и соответствующее уравнение Эйлера, найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} ((y'_1)^2 + (y'_2)^2 + 2y_1 y_2) dx; \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1, \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1, \\ y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1; \quad y'_1 + y'_2 - 4x = 0.$$

- 2) Задания на самостоятельную работу.

А) Решить следующую задачу 3: $J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} (y_1^2 + y_2^2 - (y'_1)^2 - (y'_2)^2 + \cos x) dx;$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1; \quad y_1 - y_2 - \sin x = 0.$$

Б) Проработать теоретический материал по лекциям темы 3 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

Практическое занятие 9. Решение вариационных задач Лагранжа.

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;
- **уметь** применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в нем рассматриваются вариационные задачи оптимизации на условный экстремум Лагранжа и соответствующие алгоритмы их решения.

Теоретическая часть. Рассмотреть постановку вариационной задачи оптимизации на условный экстремум Лагранжа, алгоритмы построения соответствующего функционала Лагранжа и уравнений Эйлера, методы их решения.

Практическая часть: вопросы и задания.

- 1) Разобрать подробно решение следующих задач.

Задача 1. Построить функционал Лагранжа и соответствующее уравнение Эйлера, найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующей задаче Лагранжа:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 ((y_1')^2 + (y_2')^2 + x^3) dx; \quad y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 2;$$

$$y_1 - 2y_2 + 3x = 0.$$

- 2) Задания на самостоятельную работу.

А) Решить следующую задачу 3: Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующей задаче Лагранжа:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 ((y_1')^2 + (y_2')^2) dx; \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 0; \quad y_1' - y_2 = 0.$$

Б) Проработать теоретический материал по лекциям темы 3 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

Практическое занятие 10. Решение изопериметрических задач.

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;
- **уметь** применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в нем рассматриваются изопериметрические вариационные задачи оптимизации на условный экстремум и соответствующие алгоритмы их решения.

Теоретическая часть. Рассмотреть постановку изопериметрической вариационной задачи оптимизации на условный экстремум, алгоритмы построения соответствующего функционала Лагранжа и уравнений Эйлера, методы их решения.

Практическая часть: вопросы и задания.

2) Разобрать подробно решение следующих задач.

1. *Задача 1.* Найти функции на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в следующей изопериметрической задаче:

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = e^{-1}; \quad \int_0^1 e^{-x} y dx = \frac{1}{4} (1 - 3e^{-2}).$$

2) Задания на самостоятельную работу.

А) Решить следующую задачу 3: Найти функции на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в следующей изопериметрической задаче:

$$J(y) = \int_0^1 y'^2 dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0; \quad \int_0^1 y dx = 1, \quad \int_0^1 xy dx = 0.$$

Б) Проработать теоретический материал по лекциям темы 3 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

Практическое занятие 11. Самостоятельное решение задач по теме 4

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;
- **уметь** применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в ходе самостоятельного решения задач закрепляются знания, умения и навыки решения вариационных задач на условный экстремум.

Теоретическая часть. Кратко повторить основные понятия по заданной теме.

Практическая часть: вопросы и задания.

В соответствии с индивидуальным заданием по самостоятельной работе требуется решить примеры из своего варианта по теме 3 (см. методические указания по выполнению самостоятельной работы по данной дисциплине).

Б) Проработать теоретический материал по лекциям темы 4 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

ТЕМА 5. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Практическое занятие 12. Метод Ритца, построение алгоритма решения оптимизационной задачи методом Ритца

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;
- **уметь** применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в нем рассматриваются вариационные задачи оптимизации, решение которых основано на прямых методах вариационного исчисления, и соответствующие алгоритмы их решения. Одним из основных таких методов является метод Ритца.

Теоретическая часть. Рассмотреть прямой метод вариационного исчисления Ритца для задачи оптимизации функционала, алгоритм метода Ритца применительно к решению оптимизационной задачи.

Практическая часть: вопросы и задания.

1) Разобрать подробно решение следующих задач.

Задача 1. Построить алгоритм численного решения методом Ритца в следующей оптимизационной задаче: найти экстремали функционала, удовлетворяющие граничным условиям

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + yy' + 12xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Построить алгоритм вычислительного эксперимента. Для этого зная точное решение $y = x^3 - x$, вычислить по методу Ритца приближенное решение $\tilde{y}_n(x)$, $n = 2$ и оценить погрешность вычислений.

2) Задания на самостоятельную работу.

А) Повторить решение задачи 1, но найти $\tilde{y}_n(x)$, $n = 3$. Оценить погрешность вычислений.

Б) Проработать теоретический материал по лекциям темы 4 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

Практическое занятие 13. Решение оптимизационных задач вариационным методом Ритца

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;

- уметь применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в нем рассматриваются вариационные задачи оптимизации, решение которых основано на прямых методах вариационного исчисления, и соответствующие алгоритмы их решения. Одним из основных таких методов является метод Ритца.

Теоретическая часть. Рассмотреть алгоритм метода Ритца применительно к решению оптимизационной задачи и методы численного анализа полученных результатов.

Практическая часть: вопросы и задания.

2) Разобрать подробно решение следующих задач.

Задача 1. Методом Ритца найти решение следующей вариационной задачи:

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Точное решение: $y = \frac{shx}{sh1} - \frac{x}{2}$. Построить сетку узлов на $[a, b]$, вычислить значения точного решения и приближенного на сетке, построить соответствующую таблицу и вычислить все виды погрешностей.

2) Задания на самостоятельную работу.

А) Повторить решение задачи 1, но найти $\tilde{y}_n(x)$, $n = 3$. Оценить погрешность вычислений.

Б) Проработать теоретический материал по лекциям темы 4 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

Практическое занятие 14. Метод Галеркина, построение алгоритма решения оптимизационной задачи методом Галеркина.

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;
- **уметь** применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в нем рассматриваются вариационные задачи оптимизации, решение которых основано на прямых методах вариационного исчисления, и соответствующие алгоритмы их решения. Одним из основных таких методов является метод Галеркина.

Теоретическая часть. Рассмотреть прямой метод вариационного исчисления Галеркина для задачи оптимизации функционала, алгоритм метода Галеркина применительно к решению оптимизационной задачи.

Практическая часть: вопросы и задания.

3) Разобрать подробно решение следующих задач.

Задача 1. Построить алгоритм численного решения методом Галеркина в следующей оптимизационной задаче: найти экстремали функционала, удовлетворяющие граничным условиям

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + yy' + 12xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Построить алгоритм вычислительного эксперимента. Для этого зная точное решение $y = x^3 - x$, вычислить по методу Галеркина приближенное решение $\tilde{y}_n(x)$, $n = 2$ и оценить погрешность вычислений.

2) Задания на самостоятельную работу.

А) Повторить решение задачи 1, но найти $\tilde{y}_n(x)$, $n = 3$. Оценить погрешность вычислений.

Б) Проработать теоретический материал по лекциям темы 4 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

Практическое занятие 15. Решение оптимизационных задач вариационным методом Галеркина

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;
- **уметь** применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в нем рассматриваются вариационные задачи оптимизации, решение которых основано на прямых методах вариационного исчисления, и соответствующие алгоритмы их решения. Одним из основных таких методов является метод Галеркина.

Теоретическая часть. Рассмотреть алгоритм метода Галеркина применительно к решению оптимизационной задачи и методы численного анализа полученных результатов.

Практическая часть: вопросы и задания.

4) Разобрать подробно решение следующих задач.

Задача 1. Методом Галеркина найти решение следующей вариационной задачи:

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Точное решение: $y = \frac{shx}{sh1} - \frac{x}{2}$. Построить сетку узлов на $[a, b]$, вычислить значения точного решения и приближенного на сетке, построить соответствующую таблицу и вычислить все виды погрешностей.

2) Задания на самостоятельную работу.

А) Повторить решение задачи 1, но найти $\tilde{y}_n(x)$, $n = 3$. Оценить погрешность вычислений.

Б) Проработать теоретический материал по лекциям темы 4 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

Практическое занятие 16. Метод наискорейшего спуска, построение алгоритма решения оптимизационной задачи методом наискорейшего спуска.

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;
- **уметь** применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в нем рассматриваются вариационные задачи оптимизации, решение которых основано на прямых методах вариационного исчисления, и соответствующие алгоритмы их решения. Одним из основных таких методов является метод наискорейшего спуска.

Теоретическая часть. Рассмотреть прямой метод вариационного исчисления наискорейшего спуска для задачи оптимизации функционала, алгоритм метода наискорейшего спуска применительно к решению оптимизационной задачи.

Практическая часть: вопросы и задания.

5) Разобрать подробно решение следующих задач.

Задача 1. Построить алгоритм численного решения методом наискорейшего спуска интегрального уравнения Фредгольма:

$$y(x) - \int_0^1 xty(t)dt = 2x.$$

Предварительно получить оценку $m \cdot \|y\| \leq (Ay, y) \leq M \cdot \|y\|$ и установить значения констант m и M , показав таким образом, что метод наискорейшего спуска сходится. Привести расчетные формулы алгоритма для оценки погрешности получаемых приближенных решений.

2) Задания на самостоятельную работу.

А) Проработать теоретический материал по лекциям темы 4 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

Практическое занятие 17. Решение оптимизационных задач вариационным методом наискорейшего спуска

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;
- **уметь** применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в нем рассматриваются вариационные задачи оптимизации, решение которых основано на

прямых методах вариационного исчисления, и соответствующие алгоритмы их решения. Одним из основных таких методов является метод наискорейшего спуска.

Теоретическая часть. Рассмотреть алгоритм метода наискорейшего спуска применительно к решению интегрального уравнения и метода численного анализа полученных результатов.

Практическая часть: вопросы и задания.

6) Разобрать подробно решение следующих задач.

Задача 1. Методом наискорейшего спуска найти решение следующей задачи:

Дано интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$y(x) - \int_0^1 xty(t)dt = 2x$$

Методом наискорейшего спуска получить решение уравнения, такого что $\|y_{k+1} - y_k\|_{L_2[a,b]} \leq \delta$, $\|Ay_{k+1} - f\|_{L_2[a,b]} \leq \varepsilon$, $\delta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$.

2) Задания на самостоятельную работу.

Б) Проработать теоретический материал по лекциям темы 4 в рамках подготовки к следующему практическому занятию.

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

Практическое занятие 18. Самостоятельное решение задач по теме 5

Цель практического занятия состоит в том, чтобы закрепить теоретические положения, изучаемые в рамках настоящей темы, а именно основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, на примере решения задач.

Знания и умения, приобретаемые студентами в результате освоения темы практического занятия, в рамках формируемых компетенций или их части:

- студент должен **знать** основные понятия, определения, формулировки теорем и методы, изучаемые по данной теме;
- **уметь** применять полученные знания при решении типовых задач настоящей темы дисциплины.

Актуальность темы практического занятия состоит в том, что в ходе самостоятельного решения задач закрепляются знания, умения и навыки решения вариационных задач на условный экстремум.

Теоретическая часть. Кратко повторить основные понятия по заданной теме.

Практическая часть: вопросы и задания.

В соответствии с индивидуальным заданием по самостоятельной работе требуется решить примеры из своего варианта по теме 4 (см. методические указания по выполнению самостоятельной работы по данной дисциплине).

Список литературы приведен в конце методических рекомендаций.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Перечень основной литературы:

1. Лебедев К.А. Вариационное исчисление: учебное пособие / Лебедев К.А. - Москва, Вологда: Инфра-Инженерия, 2023. - 220 с. - ISBN 978-5-9729-1224-7. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/133042.html>

2. Бренерман М.Х. Вариационное исчисление: учебное пособие / Бренерман М.Х., Жихарев В.А. - Казань: Казанский национальный исследовательский технологический

университет, 2017. - 148 с. - ISBN 978-5-7882-2198-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/79275.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Кочегурова Е. А. Теория и методы оптимизации Электронный ресурс: Учебное пособие / Е. А. Кочегурова. - Томск: Томский политехнический университет, 2013. - 134 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-4387-0237-5

2. Моклячук М. П. Вариационное исчисление. Экстремальные задачи: учебник / М. П. Моклячук. - Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. - 428 с. - ISBN 978-5-4344-0695-6. - Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/91913.html>

3. Розова В. Н. Методы оптимизации Электронный ресурс: Учебное пособие / В. Н. Розова, И. С. Максимова. - Москва: Российский университет дружбы народов, 2010. - 112 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-209-03872-6

4. Киселёв В. Ю. Вариационное исчисление и теория оптимального управления: учебное пособие / В. Ю. Киселёв, Т. Ф. Калугина. - Москва, Вологда: Инфра-Инженерия, 2023. - 132 с. - ISBN 978-5-9729-1416-6. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/132988.html>

5. Полякова Н. С. Вариационное исчисление: методические указания к выполнению домашнего задания по дисциплине «Методы оптимизации» / Н. С. Полякова. - Москва: Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 2015. - 40 с. - ISBN 978-5-7038-4216-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/135295.html>

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

<http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

<http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

<http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.

<http://www.mathedu.ru/> Электронная библиотека по математике и вопросам ее преподавания. Включает [популярные книги и пособия](#), [методические руководства](#), [учебники](#), [журналы](#), [исторические работы](#), [авторефераты](#), [диафильмы](#).

<http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

<http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).

<http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Методические указания
по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине
«Вариационное исчисление и методы оптимизации»
для студентов направления подготовки
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
направленность (профиль)
«Анализ данных и искусственный интеллект»**

Введение

Настоящие учебно-методические рекомендации разрабатываются с целью обеспечения самостоятельной работы студентов учебно-методическими материалами. Задачами разработки УМР СРС являются:

- улучшение методического обеспечения дисциплины;
- оказание студентам методической помощи в усвоении учебного материала при выполнении самостоятельной работы;
- рациональное планирование и организация самостоятельной работы и контроля знаний студентов.

Дисциплина «Вариационное исчисление и методы оптимизации» относится к группе дисциплин, формируемой участниками образовательных отношений основной образовательной программы (ООП) подготовки бакалавра по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки. Форма отчетности – зачет в пятом семестре.

Общая характеристика самостоятельной работы студента

Цель и задачи самостоятельной работы студентов по выполнению курсовой работы состоят в следующем.

Цели:

- Самостоятельно изучить теорию вариационного исчисления и методы оптимизации овладеть соответствующей терминологией;
- Освоить способы применения основных методов вариационного исчисления и оптимизации к решению задач;

–Задачи:

- Познакомиться с основными понятиями и определениями вариационного исчисления и методов оптимизации;
- Изучить методы теории вариационного исчисления и методов оптимизации;
- Приобрести практические навыки применения математического аппарата вариационного исчисления и методов оптимизации в задачах вычислительной математики.

Реализуемые компетенции: ПК-1 – «Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий».

План-график выполнения самостоятельной работы

№ п/п	Вид деятельности студентов 5 семестр	Сроки выполнения
1.	Самостоятельная работа с литературой	1-7 неделя
2.	Самостоятельное решение задач	8-12 неделя
3.	Подготовка пояснительной записки, собеседование	13-15 неделя

Методические рекомендации по выполнению этапов работ СРС, правила оформления

На первом этапе необходимо ознакомиться с рабочей программой дисциплины, в которой рассмотрено содержание тем дисциплины лекционного курса, взаимосвязь тем лекций с практическими занятиями, темы и виды самостоятельной работы. По каждому виду самостоятельной работы предусмотрены определённые формы отчетности.

Технологическая карта самостоятельной работы студента

Код реализуемой компетенции	Вид деятельности студентов	Итоговый продукт самостоятельной работы	Средства и технологии оценки*	Объем часов
ПК-1	Изучение и конспектирование литературы по темам самостоятельной работы	Конспект	Собеседование	10
ПК-1	Самостоятельное решение задач	Индивидуальное задание	Собеседование	44
Итого за 5 семестр				54

Задания на самостоятельную работу

Самостоятельная работа предполагает самостоятельное решение задач по темам в соответствии со следующими вариантами.

Простейшая задача вариационного исчисления. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

Вариант 1.

Найти экстремали функционалов, удовлетворяющих граничным условиям.

$$1. J(y) = \int_0^{\pi} (4y \cos x + y'^2 - y^2) dx, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

$$1. J(y) = \int_0^1 y'' dx, \quad y(0) = y(1) = y'(1) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$1. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2) dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = \operatorname{sh} 1, \quad y_2(1) = -\operatorname{sh} 1;$$

Вариант 2.

Найти экстремали функционалов, удовлетворяющих граничным условиям.

$$2. J(y) = \int_1^e (2y - x^2 y'^2) dx, \quad y(1) = e, \quad y(e) = 0.$$

$$2. J(y) = \int_0^1 (48y - y''^2) dx, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4;$$

$$2. J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} (y_1' y_2' - y_1 y_2) dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad y_2(\frac{\pi}{2}) = -1;$$

Вариант 3.

Найти экстремали функционалов, удовлетворяющих граничным условиям.

$$3. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y y' + 12xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

$$3. J(y) = \int_0^1 (-24xy + y''^2) dx, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{5}, \quad y'(1) = 1;$$

$$3. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1' y_2' - y_1 y_2) dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = e, \quad y_2(1) = \frac{1}{e};$$

Вариант 4.

Найти экстремали функционалов, удовлетворяющих граничным условиям.

$$4. J(y) = \int_0^1 (e^y + xy') dx, \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 1.$$

$$4. J(y) = \int_0^{\pi/2} (-y'^2 + y''^2) dx, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 0;$$

$$4. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1' y_2' + 6xy_1 + 12x^2 y_2) dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1;$$

Вариант 5.

Найти экстремали функционалов, удовлетворяющих граничным условиям.

$$5. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

$$5. J(y) = \int_0^b (y'^2 + y''^2) dx, \quad y(0) = y'(0) = y(b) = y'(b) = 0;$$

$$5. J(y_1, y_2) = \int_1^3 (xy_1'^2 + y_2'^2 + xy_1 y_2) dx, \quad y_1(1) = 1 \quad y_2(1) = 0, \quad y_1(3) = \ln 3 + 1, \quad y_2(3) = 0;$$

Вариант 6.

Найти экстремали функционалов, удовлетворяющих граничным условиям.

$$6. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 6y \operatorname{sh} 2x) dx, \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 1$$

$$6. J(y) = \int_0^1 e^{-x} y''^2 dx, \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 2e;$$

$$6. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1) dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 1, \quad y_1(1) = \frac{3}{2}, \quad y_2(1) = 1.$$

Вариант 7.

Найти экстремали функционалов, удовлетворяющих граничным условиям.

$$7. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^x) dx, \quad y(0) = 0 \quad y(1) = \frac{1}{2e}$$

$$7. J(y) = \int_0^1 (x+1)^3 y''^2 dx, \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = -1, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = -\frac{1}{4};$$

$$1. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_1 y_2) dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = \operatorname{sh} 1, \quad y_2(1) = -\operatorname{sh} 1;$$

Вариант 8.

Найти экстремали функционалов, удовлетворяющих граничным условиям.

$$8. J(y) = \int_0^{\ln 2} (y'^2 + 3y^2) e^{2x} dx, \quad y(0) = 0 \quad y(\ln 2) = \frac{15}{8}$$

$$8. J(y) = \int_0^1 y'''^2 dx, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4, \quad y''(1) = 12;$$

$$2. J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} (y_1' y_2' - y_1 y_2) dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad y_2(\frac{\pi}{2}) = -1;$$

Вариант 9.

Найти экстремали функционалов, удовлетворяющих граничным условиям.

$$9. J(y) = \int_a^b (y'^2 + y^2 - 4y \sin x) dx, \quad y(0) = 0 \quad y(b) = y_1$$

$$9. J(y) = \int_0^1 (y'''^2 - y''^2) dx, \quad y(0) = y''(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = y''(1) = sh1, \quad y'(1) = ch1;$$

$$3. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1' y_2' - y_1 y_2) dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = e, \quad y_2(1) = \frac{1}{e};$$

Вариант 10.

Найти экстремали функционалов, удовлетворяющих граничным условиям.

$$10. J(y) = \int_0^1 (2e^y - y^2) dx, \quad y(0) = 0 \quad y(1) = e$$

$$10. J(y) = \int_0^{\pi} (y'''^2 - y'^2) dx, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(\pi) = y''(\pi) = sh\pi, \quad y'(\pi) = ch\pi + 1;$$

$$4. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1' y_2' + 6xy_1 + 12x^2 y_2) dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1;$$

Задачи с подвижными концами и задача Больца

Вариант 1

Найти экстремали функционала в следующих задачах с подвижными границами:

$$1. J(y) = \int_0^{x_1} y'^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = -x_1 - 1;$$

$$2. J(y) = \int_0^1 y'^2 dx + y^2(0) - 2y^2(1);$$

Вариант 2

Найти экстремали функционала в следующих задачах с подвижными границами:

$$1. J(y) = \int_0^{x_1} y'^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = \frac{2}{1-x_1};$$

$$2. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx - 2sh1 \cdot y(1);$$

Вариант 3

Найти экстремали функционала в следующих задачах с подвижными границами:

$$1. J(y) = \int_0^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = \frac{1}{x_1^2};$$

$$2. J(y) = \int_0^{\pi} (y'^2 + y^2 - 4y \sin x) dx - 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi);$$

Вариант 4

Найти экстремали функционала в следующих задачах с подвижными границами:

$$1. J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx, \quad y(x_0) = x_0^2, \quad y(x_1) = x_1 - 5;$$

$$2. J(y) = \int_0^{\pi} 4y'^2 y^2 dx + y^4(0) - 8y(3);$$

Вариант 5

Найти экстремали функционала в следующих задачах с подвижными границами:

$$1. J(y) = \int_0^{\frac{1}{2}} (y - y'^2) dx, \quad y(0) = 0;$$

$$2. J(y) = \int_1^e 2y'(xy' + y) dx + 3y^2(1) - y^2(e) - 4y(e);$$

Вариант 6

Найти экстремали функционала в следующих задачах с подвижными границами:

$$1. J(y) = \int_0^1 (y + y'^2) dx, \quad y(1) = 0;$$

$$2. J(y) = \int_0^1 e^{x+1} (y'^2 + 2y^2) dx + 2y(1)(y(0) + 1);$$

Вариант 7

Найти экстремали функционала в следующих задачах с подвижными границами:

$$1. J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-y^2 + y'^2) dx, \quad y(0) = 0;$$

$$2. J(y) = \int_0^1 e^y y'^2 dx + 4e^{y(0)} + 32e^{-y(1)};$$

Вариант 8

Найти экстремали функционала в следующих задачах с подвижными границами:

$$1. J(y) = \int_0^{x_1} (y^2 + y'^2) dx, \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = 1;$$

$$2. J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-y^2 + y'^2) dx + y^2(0) - y^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4y\left(\frac{\pi}{2}\right);$$

Вариант 9

Найти экстремали функционала в следующих задачах с подвижными границами:

1. $J(y) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx, \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = x_1 - 1;$
2. $J(y) = \int_0^1 e^{x+1}(y'^2 + 2y^2) dx + 2y(1)(y(0) + 1);$

Вариант 10

Найти экстремали функционала в следующих задачах с подвижными границами:

1. $J(y) = \int_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2 + 4y \cos x) dx, \quad y(0) = 0;$
2. $J(y) = \int_0^{\pi} (y'^2 + y^2 - 4y \sin x) dx - 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi)$

Задачи на условный экстремум

Вариант 1.

1. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующей задаче Лагранжа:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} (y_1^2 + y_2^2 - (y_1')^2 - (y_2')^2 + \cos x) dx; \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1; \quad y_1 - y_2 - \sin x = 0.$$

2. Найти функции на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в следующей изопериметрической задаче:

$$J(y) = \int_0^1 y'^2 dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1; \quad \int_0^1 xy dx = 0.$$

Вариант 2.

1. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующей задаче Лагранжа:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 ((y_1')^2 + 2(y_2')^2 + y_2^2) dx; \quad y_1(0) = -2, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1(1) = -e^{-1}, \quad y_2(1) = 0; \\ y_1 - y_2' = 0.$$

2. Найти функции на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в следующей изопериметрической задаче:

$$J(y) = \int_0^1 y'^2 dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0; \quad \int_0^1 y dx = 1, \quad \int_0^1 xy dx = 0.$$

Вариант 3.

1. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующей задаче Лагранжа:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 ((y_1')^2 + (y_2')^2 + x^3) dx; \quad y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 2;$$

$$y_1 - 2y_2 + 3x = 0.$$

2. Найти функции на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в следующей изопериметрической задаче:

$$J(y) = \int_0^\pi y'^2 dx; \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1; \quad \int_0^1 y \cdot \sin x dx = 0.$$

Вариант 4.

1. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующей задаче Лагранжа:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 ((y_1')^2 + (y_2')^2 + 1) dx; \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 2, \quad y_2(1) = 0;$$

$$y_1 + y_2 - 2x^2 = 0.$$

2. Найти функции на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в следующей изопериметрической задаче:

$$J(y) = \int_0^\pi y \cdot \sin x dx; \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = \pi; \quad \int_0^\pi y'^2 dx = \frac{3}{2}\pi.$$

Вариант 5.

1. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующей задаче Лагранжа:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 ((y_1')^2 + (y_2')^2) dx; \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 0; \quad y_1' - y_2 = 0.$$

2. Найти функции на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в следующей изопериметрической задаче:

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = e^{-1}; \quad \int_0^1 e^{-x} y dx = \frac{1}{4}(1 - 3e^{-2}).$$

Вариант 6.

1. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующей задаче Лагранжа:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^\pi ((y_1')^2 - (y_2')^2) dx; \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi) = 0, \quad y_2(\pi) = \frac{\pi}{2};$$

$$y_1' - y_2 + \cos x = 0.$$

2. Найти функции на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в следующей изопериметрической задаче:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 ((y_1') \cdot (y_2')) dx, \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = 1; \quad \int_0^1 y_1 dx = 1, \quad \int_0^1 y_2 dx = 0.$$

Вариант 7.

1. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующей задаче Лагранжа:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} ((y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1y_2) dx; \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1, \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1, \\ y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1; \quad y_1' + y_2' - 4x = 0.$$

2. Найти функции на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в следующей изопериметрической задаче:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 ((y_1) + (y_2)) dx, \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = -3; \quad \int_0^1 y_1' y_2' dx = 0.$$

Вариант 8.

1. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующей задаче Лагранжа:

$$J(y_1, y_2) = \int_a^b (y_1 + y_2 + (y_2')) dx; \quad y_1(a) = y_1^{(0)}, \quad y_2(a) = y_2^{(0)}, \quad y_1(b) = y_1^{(1)}, \quad y_2(b) = y_2^{(1)}; \\ y_1' + y_2' - 1 = 0.$$

2. Найти функции на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в следующей изопериметрической задаче:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 ((y_1') \cdot (y_2')) dx, \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = 1; \quad \int_0^1 xy_1 dx = 0, \quad \int_0^1 xy_2 dx = 0$$

Вариант 9.

1. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующей задаче Лагранжа:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} (y_1^2 + y_2^2 - (y_1')^2 - (y_2')^2 + \cos x) dx; \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1; \quad y_1 - y_2 - \sin x = 0.$$

2. Найти функции на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в следующей изопериметрической задаче:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 ((y_1')^2 + (y_2')^2) dx, \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = 0; \quad \int_0^1 y_1 y_2 dx = -2.$$

Вариант 10.

1. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующей задаче Лагранжа:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 ((y_1')^2 + 2(y_2')^2 + y_2^2) dx; \quad y_1(0) = -2, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1(1) = -e^{-1}, \quad y_2(1) = 0; \\ y_1 - y_2' = 0.$$

2. Найти функции на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в следующей изопериметрической задаче:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 (x(y_1 - y_2)) dx, \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 2, \quad y_2(1) = 0; \quad \int_0^1 y_1' y_2' dx = -\frac{4}{5}.$$

Прямые методы вариационного исчисления: метод Ритца и метод Галеркина

Вариант 1

1. Методом Ритца и Галеркина найти решение следующей вариационной задачи:

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + xy) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

2. Точное решение: $y = \frac{1}{12}(x^3 - x)$. Построить сетку узлов на $[a, b]$, вычислить значения точного решения и приближенного на сетке, построить соответствующую таблицу и вычислить все виды погрешностей, сделать вывод о том какой метод работает лучше.

Вариант 2

1. Методом Ритца и Галеркина найти решение следующей вариационной задачи:

$$J(y) = \int_1^e (2y - x^2 y'^2) dx, \quad y(1) = e, \quad y(e) = 0.$$

2. Точное решение: $y = \frac{e}{x} - \ln x$. Построить сетку узлов на $[a, b]$, вычислить значения точного решения и приближенного на сетке, построить соответствующую таблицу и вычислить все виды погрешностей, сделать вывод о том какой метод работает лучше.

Вариант 3

1. Методом Ритца и Галеркина найти решение следующей вариационной задачи:

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + yy' + 12xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

2. Точное решение: $y = x^3 - x$. Построить сетку узлов на $[a, b]$, вычислить значения точного решения и приближенного на сетке, построить соответствующую таблицу и вычислить все виды погрешностей, сделать вывод о том какой метод работает лучше.

Вариант 4

1. Методом Ритца и Галеркина найти решение следующей вариационной задачи:

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

2. Точное решение: $y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} - \frac{x}{2}$. Построить сетку узлов на $[a, b]$, вычислить значения точного решения и приближенного на сетке, построить соответствующую таблицу и вычислить все виды погрешностей, сделать вывод о том какой метод работает лучше.

Вариант 5

1. Методом Ритца и Галеркина найти решение следующей вариационной задачи:

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 6y \operatorname{sh} 2x) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

2. Точное решение: $y = sh2x - \frac{sh2}{sh1} shx$. Построить сетку узлов на $[a, b]$, вычислить значения точного решения и приближенного на сетке, построить соответствующую таблицу и вычислить все виды погрешностей, сделать вывод о том какой метод работает лучше.

Вариант 6

1. Методом Ритца и Галеркина найти решение следующей вариационной задачи:

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^x) dx, \quad y(0) = 0 \quad y(1) = \frac{1}{2e}$$

2. Точное решение: $y = \frac{1}{2} x \cdot e^x - shx$. Построить сетку узлов на $[a, b]$, вычислить значения точного решения и приближенного на сетке, построить соответствующую таблицу и вычислить все виды погрешностей, сделать вывод о том какой метод работает лучше.

Вариант 7

1. Методом Ритца и Галеркина найти решение следующей вариационной задачи:

$$J(y) = \int_0^{\ln 2} (y'^2 + 3y^2) e^{2x} dx, \quad y(0) = 0 \quad y(\ln 2) = \frac{15}{8}$$

2. Точное решение: $y = e^x - e^{-3x}$. Построить сетку узлов на $[a, b]$, вычислить значения точного решения и приближенного на сетке, построить соответствующую таблицу и вычислить все виды погрешностей, сделать вывод о том какой метод работает лучше.

Вариант 8

1. Методом Ритца и Галеркина найти решение следующей вариационной задачи:

$$J(y) = \int_0^1 (e^{x+y} - y - \sin x) dx, \quad y(0) = 0 \quad y(1) = -1$$

2. Точное решение: $y = -x$. Построить сетку узлов на $[a, b]$, вычислить значения точного решения и приближенного на сетке, построить соответствующую таблицу и вычислить все виды погрешностей, сделать вывод о том какой метод работает лучше.

Вариант 9

1. Методом Ритца и Галеркина найти решение следующей вариационной задачи:

$$J(y) = \int_0^1 (y')^2 dx, \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 1$$

2. Точное решение: $y = x$. Построить сетку узлов на $[a, b]$, вычислить значения точного решения и приближенного на сетке, построить соответствующую таблицу и вычислить все виды погрешностей, сделать вывод о том какой метод работает лучше.

Вариант 10

1. Методом Ритца и Галеркина найти решение следующей вариационной задачи:

$$J(y) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'} dx, \quad y(-1) = 0 \quad y(1) = 1$$

2. Точное решение: $y = \frac{1}{2}(1+x)$. Построить сетку узлов на $[a, b]$, вычислить значения точного решения и приближенного на сетке, построить соответствующую таблицу и вычислить все виды погрешностей, сделать вывод о том какой метод работает лучше.

Метод наискорейшего спуска в решении вариационной задачи для квадратичных функционалов с интегральным оператором

Вариант 1

Дано интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$y(x) - \int_0^1 xty(t)dt = 2x$$

- а) получить оценку $m \cdot \|y\| \leq (Ay, y) \leq M \cdot \|y\|$ и установить значения констант m и M , показав таким образом, что метод наискорейшего спуска сходится;
- б) методом наискорейшего спуска получить решение уравнения, такого что $\|y_{k+1} - y_k\|_{L_2[a,b]} \leq \delta$, $\|Ay_{k+1} - f\|_{L_2[a,b]} \leq \varepsilon$, $\delta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$.

Вариант 2

Дано интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$y(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 t \cdot y(t)dt = 1$$

- а) получить оценку $m \cdot \|y\| \leq (Ay, y) \leq M \cdot \|y\|$ и установить значения констант m и M , показав таким образом, что метод наискорейшего спуска сходится;
- б) методом наискорейшего спуска получить решение уравнения, такого что $\|y_{k+1} - y_k\|_{L_2[a,b]} \leq \delta$, $\|Ay_{k+1} - f\|_{L_2[a,b]} \leq \varepsilon$, $\delta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$.

Вариант 3

Дано интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$y(x) - \pi \int_0^1 (1-x) \cdot \sin 2\pi \cdot y(t)dt = \frac{1}{2}(1-x)$$

- а) получить оценку $m \cdot \|y\| \leq (Ay, y) \leq M \cdot \|y\|$ и установить значения констант m и M , показав таким образом, что метод наискорейшего спуска сходится;
- б) методом наискорейшего спуска получить решение уравнения, такого что $\|y_{k+1} - y_k\|_{L_2[a,b]} \leq \delta$, $\|Ay_{k+1} - f\|_{L_2[a,b]} \leq \varepsilon$, $\delta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$.

Вариант 4

Дано интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$y(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t \cdot \sin x \cdot y(t)dt = 2 \sin x$$

- а) получить оценку $m \cdot \|y\| \leq (Ay, y) \leq M \cdot \|y\|$ и установить значения констант m и M , показав таким образом, что метод наискорейшего спуска сходится;
- б) методом наискорейшего спуска получить решение уравнения, такого что $\|y_{k+1} - y_k\|_{L_2[a,b]} \leq \delta$, $\|Ay_{k+1} - f\|_{L_2[a,b]} \leq \varepsilon$, $\delta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$.

Вариант 5

Дано интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$y(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos(x+t) + \cos(x-t)) \cdot y(t) dt = \cos x$$

- а) получить оценку $m \cdot \|y\| \leq (Ay, y) \leq M \cdot \|y\|$ и установить значения констант m и M , показав таким образом, что метод наискорейшего спуска сходится;
- б) методом наискорейшего спуска получить решение уравнения, такого что $\|y_{k+1} - y_k\|_{L_2[a,b]} \leq \delta$, $\|Ay_{k+1} - f\|_{L_2[a,b]} \leq \varepsilon$, $\delta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$.

Вариант 6

Дано интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$y(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} y(t) dt = \sin x$$

- а) получить оценку $m \cdot \|y\| \leq (Ay, y) \leq M \cdot \|y\|$ и установить значения констант m и M , показав таким образом, что метод наискорейшего спуска сходится;
- б) методом наискорейшего спуска получить решение уравнения, такого что $\|y_{k+1} - y_k\|_{L_2[a,b]} \leq \delta$, $\|Ay_{k+1} - f\|_{L_2[a,b]} \leq \varepsilon$, $\delta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$.

Вариант 7

Дано интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$y(x) - \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 2^{x+t} y(t) dt = x$$

- а) получить оценку $m \cdot \|y\| \leq (Ay, y) \leq M \cdot \|y\|$ и установить значения констант m и M , показав таким образом, что метод наискорейшего спуска сходится;
- б) методом наискорейшего спуска получить решение уравнения, такого что $\|y_{k+1} - y_k\|_{L_2[a,b]} \leq \delta$, $\|Ay_{k+1} - f\|_{L_2[a,b]} \leq \varepsilon$, $\delta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$.

Вариант 8

Дано интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$y(x) + \pi \int_0^1 x \cdot \sin 2\pi t \cdot y(t) dt = \cos 2\pi x$$

- а) получить оценку $m \cdot \|y\| \leq (Ay, y) \leq M \cdot \|y\|$ и установить значения констант m и M , показав таким образом, что метод наискорейшего спуска сходится;
- б) методом наискорейшего спуска получить решение уравнения, такого что $\|y_{k+1} - y_k\|_{L_2[a,b]} \leq \delta$, $\|Ay_{k+1} - f\|_{L_2[a,b]} \leq \varepsilon$, $\delta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$.

Вариант 9

Дано интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot e^t \cdot y(t) dt = e^{-x}$$

- а) получить оценку $m \cdot \|y\| \leq (Ay, y) \leq M \cdot \|y\|$ и установить значения констант m и M , показав таким образом, что метод наискорейшего спуска сходится;
- б) методом наискорейшего спуска получить решение уравнения, такого что $\|y_{k+1} - y_k\|_{L_2[a,b]} \leq \delta$, $\|Ay_{k+1} - f\|_{L_2[a,b]} \leq \varepsilon$, $\delta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$.

Вариант 10

Дано интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$y(x) - \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos t \cdot y(t) dt = 1$$

- а) получить оценку $m \cdot \|y\| \leq (Ay, y) \leq M \cdot \|y\|$ и установить значения констант m и M , показав таким образом, что метод наискорейшего спуска сходится;
- б) методом наискорейшего спуска получить решение уравнения, такого что $\|y_{k+1} - y_k\|_{L_2[a,b]} \leq \delta$, $\|Ay_{k+1} - f\|_{L_2[a,b]} \leq \varepsilon$, $\delta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$.

Текущая аттестация студентов

Текущая аттестация студентов проводится преподавателем, ведущим практические занятия по дисциплине в следующих формах: собеседование, письменный отчет.

Максимальное количество баллов студент получает, если оформление отчета соответствует установленным требованиям, а отчет полностью раскрывает суть работы. Основанием для снижения оценки являются:

- фрагментарные знания по теме и как следствие неполные ответы, даваемые на вопросы в ходе собеседования, в том числе и по отчету;
- содержание темы в ходе собеседования по отчету раскрывается в целом, но при этом требуются дополнительные наводящие вопросы;
- навыки и умения при решении поставленных задач проявляются в ходе собеседования по отчету на высоком уровне, однако при этом устная речь, умение изложить и представить полученные результаты находятся на удовлетворительном уровне.

Отчет может быть отправлен на доработку в следующих случаях:

- оформление отчета не удовлетворяет в полной мере правилам оформления;
- отчет носит фрагментарный не полный характер изложения материала;
- отчет содержит избыточное количество теоретического материала.

Критерии оценивания письменного отчета о самостоятельном решении задач приведены в Фонде оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации».

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

Контрольные точки, рейтинговая оценка знаний студента

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения	Количество баллов
5 семестр			
4.	Самостоятельное решение задач по теме 1-3, оформление письменного отчета, собеседование по отчету. Самостоятельная работа с литературой по темам 1-3.	7 неделя	15
5.	Самостоятельное решение задач по теме 4, оформление письменного отчета, собеседование по отчету. Самостоятельная работа с литературой по темам 4.	12 неделя	15
6.	Самостоятельное решение задач по теме 5, оформление письменного отчета, собеседование по отчету. Самостоятельная работа с литературой по теме 5.	15 неделя	25
	Итого за 5 семестр		55

Критерии оценивания компетенций

По дисциплине предусмотрен зачет.

Зачет является накопительной формой отчетности и выставляется по результатам работы студента в семестре. Критерии оценки:

Оценка «**зачтено**» выставляется студенту, если он знает основные понятия, определения, теоремы и методы дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации», умеет применять математический аппарат данной дисциплины в самостоятельной научно-исследовательской работе и профессиональной деятельности, и владеет способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе. В противном случае студенту выставляется оценка «не зачтено». Зачет выставляется по результатам работы в семестре, при сдаче всех контрольных точек, предусмотренных текущим контролем успеваемости. Если по итогам семестра обучающийся имеет от 33 до 60 баллов, ему ставится отметка «зачтено». Обучающемуся, имеющему по итогам семестра менее 33 баллов, ставится отметка «не зачтено».

Количество баллов за зачет ($S_{зач}$) при различных рейтинговых баллах по дисциплине по результатам работы в семестре

Рейтинговый балл по дисциплине по результатам работы в семестре ($R_{сем}$)	Количество баллов за зачет ($S_{зач}$)
$50 \leq R_{сем} \leq 60$	40
$39 \leq R_{сем} < 50$	35
$33 \leq R_{сем} < 39$	27
$R_{сем} < 33$	0

Типовые контрольные задания для проведения промежуточной аттестации

Контрольные вопросы для собеседования

1. Основные понятия и определения вариационного исчисления.
2. Основная лемма вариационного исчисления. Простейшая задача вариационного исчисления.

3. Вариация для функционала $J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$.
4. Уравнение Эйлера.
5. Вариационная задача для функционала $J(\bar{y}) = \int_a^b F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx$.
6. Вариационная задача для функционала $J(y) = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$.
7. Задачи с подвижными границами.
8. Формулировка задачи на условный экстремум. Основные определения и теоремы.
9. Задача на условный экстремум для функционала $J(\bar{y}) = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$. Вариационная задача Лагранжа.
10. Пример решения изопериметрической задачи.
11. Метод Ритца.
12. Прямые методы для квадратичных функционалов в гильбертовом пространстве H и Метод Ритца. Метод Галеркина.
13. Метод наискорейшего спуска.

Задания для проведения текущего контроля

1. Найти все экстремали функционала $J(y) = \int_0^1 (y'^2 + xy) dx$, удовлетворяющих указанным граничным условиям $y(0) = y(1) = 0$.
2. Найти все экстремали функционала $J(y) = \int_0^1 (-\frac{1}{2} y''^2 + 120xy) dx$, удовлетворяющих указанным граничным условиям $y(0) = y'(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 6$.
3. Решить вариационную задачу с помощью уравнения Эйлера

$$J[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^{\pi/2} ((y'_1)^2 + (y'_2)^2 + 2y_1y_2) dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$
4. Решить вариационную задачу с помощью уравнения Эйлера $J(y) = \int_0^b (y''^2 + y'^2) dx$, $y(0) = y'(0) = y(b) = y'(b) = 0$.
5. Решить вариационную задачу с помощью функции Лагранжа

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 ((y'_1)^2 + (y'_2)^2 + x^3) dx, \quad y_1(0) = y_2(1) = 2, \quad y_1(1) = y_2(0) = 1.$$
6. Методом Ритца и Галеркина найти решение следующей вариационной задачи:

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + xy) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Точное решение: $y = \frac{1}{12}(x^3 - x)$. Построить сетку узлов на $[a, b]$, вычислить значения точного решения и приближенного на сетке, построить

соответствующую таблицу и вычислить все виды погрешностей, сделать вывод о том какой метод работает лучше.

7. Дано интегральное уравнение Фредгольма первого рода: $y(x) - \int_0^1 xty(t)dt = 2x$.

- а) получить оценку $m \cdot \|y\| \leq (Ay, y) \leq M \cdot \|y\|$ и установить значения констант m и M , показав таким образом, что метод наискорейшего спуска сходится;
- б) методом наискорейшего спуска получить решение уравнения, такого что $\|y_{k+1} - y_k\|_{L_2[a,b]} \leq \delta$, $\|Ay_{k+1} - f\|_{L_2[a,b]} \leq \varepsilon$, $\delta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$.

Структура и правила оформления пояснительной записки самостоятельной работы

Структура самостоятельной работы включает в себя две части: самостоятельное изучение теоретического материала в соответствии с содержанием рабочей программы и практическое решение задач согласно вариантам самостоятельных работ.

Структура и правила оформления пояснительной записки самостоятельной работы.

- Титульный лист;
- Оглавление;
- Введение;
- Содержание пояснительной записки;
- Список литературы.

Титульный лист пояснительной записки должен включать в себя полное название учебного заведения, название института и кафедры в верхней части листа формата А4, в центре листа – слово «Самостоятельная работа», на следующей строке – название предмета, ниже - название прописными буквами, ниже в левой половине листа указывается «Работу выполнил»: фамилия, имя и отчество полностью, направление обучения, профиль обучения, форма обучения, курс, группа, ниже - «Работу принял»: данные на преподавателя - фамилия, имя и отчество полностью, ученая степень, звание, должность, ниже – запись «Работа зачтена», подпись преподавателя, дата. В нижней части листа по центру указывается год.

Оглавление включает в себя перечень частей основного содержания пояснительной записки и нумерацию страниц, с которой начинается каждая часть. Оглавление оформляется в таблицу с прозрачными границами, шрифт оглавления 14, межстрочное расстояние 1,5, выравнивание в таблице по левому краю. **Нумерация страниц** начинается с оглавления, а именно со 2 страницы. Титульный лист не нумеруется, но при этом он является первым по умолчанию. Нумерация страниц – внизу, по центру, шрифт -12.

Введение включает в себя следующие составные части. Актуальность тематики исследований. Цель исследований и задачи, способствующие достижению цели. Объект исследований. Предмет исследований. Методы исследований. Краткое описание, что сделано в каждом параграфе. Структура работы.

Содержание пояснительной записки. Текст должен быть оформлен в формате *Microsoft Office 97, 98, 2003 Word 7.0* через 1,5 интервала, шрифтом *Times New Roman* размером *14 nm*. Поля слева – 3 см., справа – 1,5 см., сверху и снизу по 2 см. Абзац - 1 см. Не следует использовать знаки принудительного переноса и дополнительных пробелов. Векторные величины выделяются полужирным шрифтом. Название начинает текст – по центру прописными буквами. Заголовки параграфов отделяются от основного текста пробелами сверху и снизу, шрифт – жирный, нумерация – сквозная, буквы – строчные, кроме первой.

Для записи **формул** применять только редактор формул *Equation 3.0*. При этом формула должна помещаться только на половине строки. Большие формулы необходимо разбить на несколько строк, причем каждая новая строка – новый объект. Запрещается масштабировать формулы. При наборе формул необходимо придерживаться следующих размеров: *текст – 11 pt, крупный индекс – 8 pt, мелкий индекс – 6 pt, крупный символ – 12 pt, мелкий символ – 10 pt*. Формулы не должны включать в состав знаки пунктуации и нумерацию. Текст реферата должен содержать лишь самые необходимые формулы, от промежуточных выкладок желательно отказаться. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки. Нумерация формул должна быть сквозная по всей статье.

Таблицы должны иметь заголовки, в них допускаются только общепринятые сокращения. Название таблицы формируется следующим образом. По правому краю пишется «Таблица» и указывается ее номер. На следующей строке по центру указывается название таблицы, дальше после пробела по центру располагается сама таблица. После таблицы – пробел. Шрифт в таблице – 12 *pt*, межстрочное расстояние – одинарное. Подпись к таблице должна полностью отражать, что представлено в таблице. Таблица может сопровождаться примечаниями. Таблица на сранице не должна разрываться.

Рисунки, графики и схемы делаются в формате *rsx*, размером 800x600, *черно-белые*. Все подписи оформляются под рисунком. Графики должны быть оформлены в формате *MicroSoft Office 98 Word 2000*. Подпись к рисунку оформляется так. После рисунка – пробел. Дальше по центру слово «Рисунок», номер рисунка, подпись к рисунку. После подписи к рисунку – пробел. Подпись к рисунку – в 12 *pt* шрифте. Подпись к рисунку должна полностью отражать, что представлено на рисунке. В тексте пояснительной записки обязательно должны быть ссылки на таблицы и рисунки, в которых анализируются и обсуждаются результаты, приведенные в них.

Единицы измерения следует давать в соответствии с Международной системой (СИ).

Список литературы. **Литература** приводится в алфавитном порядке в конце статьи. В тексте должны быть ссылки в квадратных скобках только на опубликованные материалы. Ссылки на иностранные источники даются на иностранном языке и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием на перевод.

Библиография должна быть оформлена согласно ГОСТу 7.1.-84. Необходимо ознакомиться с данным ГОСТом в системе Интернет.

Порядок защиты самостоятельной работы

Защита включает в себя

- Подготовку пояснительной записки в печатном и электронном виде;
- Собеседование.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Перечень основной литературы:

1. Лебедев К.А. Вариационное исчисление: учебное пособие / Лебедев К.А. - Москва, Вологда: Инфра-Инженерия, 2023. - 220 с. - ISBN 978-5-9729-1224-7. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/133042.html>

2. Бренерман М.Х. Вариационное исчисление: учебное пособие / Бренерман М.Х., Жихарев В.А. - Казань: Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2017. - 148 с. - ISBN 978-5-7882-2198-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/79275.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Кочегурова Е. А. Теория и методы оптимизации Электронный ресурс: Учебное пособие / Е. А. Кочегурова. - Томск: Томский политехнический университет, 2013. - 134 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-4387-0237-5
2. Моклячук М. П. Вариационное исчисление. Экстремальные задачи: учебник / М. П. Моклячук. - Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. - 428 с. - ISBN 978-5-4344-0695-6. - Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/91913.html>
3. Розова В. Н. Методы оптимизации Электронный ресурс: Учебное пособие / В. Н. Розова, И. С. Максимова. - Москва: Российский университет дружбы народов, 2010. - 112 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-209-03872-6
4. Киселёв В. Ю. Вариационное исчисление и теория оптимального управления: учебное пособие / В. Ю. Киселёв, Т. Ф. Калугина. - Москва, Вологда: Инфра-Инженерия, 2023. - 132 с. - ISBN 978-5-9729-1416-6. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/132988.html>
5. Полякова Н. С. Вариационное исчисление: методические указания к выполнению домашнего задания по дисциплине «Методы оптимизации» / Н. С. Полякова. - Москва: Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 2015. - 40 с. - ISBN 978-5-7038-4216-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/135295.html>

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

<http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

<http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

<http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.

<http://www.mathedu.ru/> Электронная библиотека по математике и вопросам ее преподавания. Включает [популярные книги и пособия](#), [методические руководства](#), [учебники](#), [журналы](#), [исторические работы](#), [авторефераты](#), [диафильмы](#).

<http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

<http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).

<http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.