

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»
для студентов направления подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
направленность (профиль):
«Информатика и математика»

Ставрополь, 2026

ВВЕДЕНИЕ

Цель освоения дисциплины «Теория вероятностей» является формирование профессиональной компетенции ПК-1 будущего бакалавра по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) "Информатика и математика", путем освоения возможностей использования средств и методов теории вероятностей для решения прикладных задач в образовательной и педагогической сферах деятельности.

Задачи освоения дисциплины

- формирование научного мировоззрения, понимания широты и универсальности методов теории вероятностей, умения применять эти методы в решении прикладных задач;
- воспитание математической культуры, которая предполагает четкое осознание необходимости и важности математической подготовки для специалиста в области математического и информационного образования;
- ознакомление с основными объектами теории вероятностей, а также их приложениями для решения различных задач, требующих применения логических средств;
- овладение современным математическим аппаратом теории вероятностей для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач в образовательной области.

В результате освоения дисциплины « **Теория вероятностей**» формируется профессиональная компетенция ПК-1, в соответствии с которой студент должен:

Знать:

методы использования математического аппарата теории вероятностей для решения прикладных задач.

Уметь:

использовать математический аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач.

Владеть:

навыками использования математического аппарата теории вероятностей для решения прикладных задач.

Тема 2. «ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ»

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Правила комбинаторики.
2. Основные комбинаторные соединения.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Правила комбинаторики

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_k$ – элементы заданного конечного множества.

Правило суммы

Если элемент A_1 может быть выбран n_1 способами, элемент A_2 – другими n_2 способами, элемент A_3 – отличными от первых двух n_3 способами, ..., элемент A_k – n_k способами, отличными от всех предыдущих, то выбор одного из элементов: или A_1 , или A_2 , ..., или A_k может быть осуществлен $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ способами.

Правило произведения

Если элемент A_1 может быть выбран n_1 способами, после каждого такого выбора элемент A_2 может быть выбран n_2 способами, ..., после каждого $(k-1)$ выбора элемент A_k может быть выбран n_k способами, то выбор всех элементов $A_1, A_2, \dots, A_k$ в указанном порядке может быть осуществлен $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Основные комбинаторные соединения

Перестановками из n различных элементов называются такие комбинации из n элементов, которые отличаются только порядком расположения элементов.

Обозначение числа перестановок: P_n .

Формула: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

Если в перестановках из общего числа n элементов есть k различных элементов, при этом первый элемент повторяется n_1 раз, второй элемент – n_2 раз, ..., k -й элемент – n_k раз ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$), то такие перестановки называются **перестановками с повторениями** из n элементов.

Обозначение числа перестановок с повторениями: $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$

Формула: $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

Размещениями из n различных элементов по m в каждом называются такие комбинации из n элементов по m , которые отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Обозначение числа размещений: A_n^m

Формула: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$

Сочетаниями из n различных элементов по m в каждом называются такие комбинации из n элементов по m , которые отличаются только составом элементов.

Обозначение числа сочетаний: C_n^m

Формула:
$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}$$

Свойства сочетаний

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$. 2. $C_n^1 = n$. 3. $C_n^m = C_n^{n-m}$ (пример: $C_9^7 = C_9^{9-7} = C_9^2$).

Размещения с повторениями: $\overline{A_n^m} = n^m$

Сочетания с повторениями: $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m$

ЗАДАНИЯ

1. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5? *Ответ: 18 000.*
2. Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник произведений Д. Лондона, располагая их:
 - а) в произвольном порядке; б) так, чтобы I, V и IX тома стояли рядом (в любом порядке)?*Ответ: а) 3 628 800; б) 241 920.*
3. Требуется составить расписание отправления поездов на различные дни недели. При этом необходимо, что 3 дня отправлялись по 2 поезда в день, 2 дня – по 1 поезду в день, 2 дня – по 3 поезда в день. Сколько можно составить различных расписаний? *Ответ: 210.*
4. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов? *Ответ: 60.*
5. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, если:
 - а) цифры в номере не повторяются; б) цифры в номере могут повторяться?*Ответ: а) 604 800; б) 10 000 000.*
6. В вазе стоят 9 красных и 7 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из нее:
 - а) 3 гвоздики; б) 6 гвоздик одного цвета; в) 4 красных и 3 розовых гвоздики?*Ответ: а) 560; б) 91; в) 4 410.*
7. Сколькими способами можно выбрать 4 монеты из четырех пятирублевых монет и четырех двухрублевых монет? *Ответ: 5.*
8. В колоде 36 карт, из них 4 туза. Сколькими способами можно сдать 6 карт так, чтобы среди них было 2 туза. *Ответ: 215 760.*
9. Пять авторов должны написать учебник из 14 глав. Два автора напишут по 2 главы, два других – по 3 главы и еще один – 4 главы книги. Сколькими способами может быть распределен материал между авторами? *Ответ: 25 225 200.*

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

10. Пять человек вошли в лифт на первом этаже девятиэтажного дома. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта на нужных этажах? *Ответ: 32 768.*

11. Выпускники одной из групп обменялись фотографиями. Сколько было выпускников, если фотографий потребовалось 240? *Ответ: 16.*

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. В комнате имеется 7 стульев. Сколькими способами можно разместить на них 7 гостей? 3 гостя? *Ответ: 5 040, 210.*

2. Сколькими способами можно переставить буквы в словах: а) «математика», 2) «абракадабра», чтобы получились всевозможные различные наборы букв? *Ответ: 151 200, 83 160.*

3. Для доступа в компьютерную сеть оператору необходимо набрать пароль из 4 цифр. Оператор забыл или не знает необходимого кода. Сколько всевозможных комбинаций он может составить для набора пароля: а) если цифры в пароле не повторяются; б) если повторяются?

Ответ: а) 5 040, б) 10 000

4. Группа туристов из 12 юношей и 7 девушек выбирает по жребии 5 человек для приготовления ужина. Сколько существует способов выбора, при которых в эту «пятерку» попадут: а) одни девушки; б) 3 юноши и 2 девушки; в) 1 юноша и 4 девушки; г) 5 юношей?

Ответ: а) 21, б) 4620, в) 420, г) 792.

5. На вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них четыре пары для танца? *Ответ: 16 216 200.*

6. В магазине имеется 7 видов тортов. Сколькими способами можно составить набор, содержащий 3 торта? А если имеются 3 вида тортов, а нужен набор из 7 тортов? *Ответ: 84, 36.*

Тема 3. «ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ»

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Классическое определение вероятности.
2. Геометрическое определение вероятности.
3. Статистическое определение вероятности.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Классическое определение вероятности

Пусть исходы некоторого испытания равновозможны, попарно несовместны и образуют полную группу. Такие исходы называются **элементарными исходами, случаями** или **шансами**. При этом говорят, что испытание сводится к **классической схеме** или **схеме случаев**.

Исход (случай) называется **благоприятствующим (благоприятным)** событию A , если появление этого исхода влечет за собой появление события A .

Классическое определение вероятности

Если испытание сводится к классической схеме, то **вероятностью** события A называется отношение числа исходов, благоприятствующих событию A , к общему числу всех возможных элементарных исходов испытания, т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где $P(A)$ – вероятность события A ; m – число исходов, благоприятствующих событию A ; n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Свойства вероятности

1. Если A – достоверное событие, то $P(A) = 1$.
2. Если A – невозможное событие, то $P(A) = 0$.
3. Если A – случайное событие, то $0 < P(A) < 1$.

Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности

Геометрической вероятностью события A называется число $P(A)$, равное отношению меры области g , благоприятствующей событию A , к мере всей области G :

$$P(A) = \frac{\text{мера } g}{\text{мера } G}.$$

Область, на которую распространяется понятие геометрической вероятности, может быть одномерной (прямая, отрезок), двумерной (некоторая фигура на плоскости) и трехмерной (некоторое тело в пространстве). Кроме того, область может представлять собой некоторый угол.

Статистическое определение вероятности

Пусть проведено n испытаний. При этом событие A появилось m раз ($0 \leq m \leq n$). Число m называется **абсолютной частотой** события A .

Относительной частотой или просто **частотой** события A называется отношение числа испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу проведенных испытаний, т.е.

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где $W(A)$ – относительная частота события A ; m – число появлений события A ; n – общее число испытаний.

Статистическое определение вероятности

Статистической вероятностью события A называется число, около которого группируются (стабилизируются) значения относительной частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний.

В качестве статистической вероятности события A принимают относительную частоту этого события $W(A)$ или число, близкое к ней:

$$P(A) \approx W(A).$$

ЗАДАНИЯ

1. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым? *Ответ: 0,4.*
2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что:
а) выпадет разное число очков, сумма которых не больше 4;
б) произведение выпавших очков делится на 4;
в) хотя бы на одной кости выпадет 6 очков?
Ответ: а) 1/9; б) 5/12; в) 11/36.
3. В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Найти вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров не более 10. *Ответ: 0,4.*
4. Буквы Т, Е, И, Р, О, Я написаны на отдельных карточках. Наудачу последовательно извлекаются и складываются в ряд: а) 3 карточки; б) все 6 карточек. Какова вероятность того, что получится слово: а) ТОР; б) ТЕОРИЯ? *Ответ: а) 1/120; б) 1/720.*
5. Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются 4 билета в театр, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся:
а) 4 девушки; б) 4 юноши; в) 3 юноши и 1 девушка?
Ответ: а) 0,108; б) 0,0166; в) 0,142.
6. В группе 30 студентов, из которых 6 отличников. Группу наудачу разделили на две равные части. Какова вероятность того, что в каждой части по 3 отличника? *Ответ: 0,35.*
7. На отрезок OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую, чем $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси. *Ответ: 1/3.*
8. В круг радиуса R вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадет в квадрат? *Ответ: $2/\pi \approx 0,637$.*
9. В квадрат с вершинами в точках $O(0,0)$, $K(0,1)$, $B(1,1)$ и $M(1,0)$ наудачу брошена точка $A(x,y)$. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y > \frac{1}{2}x$. *Ответ: 0,75.*
10. В шар вписан куб. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность того, что точка попадет в куб. *Ответ: 0,368.*
11. Среди 1 000 новорожденных оказалось 515 мальчиков. Какова частота рождения мальчика? *Ответ: 0,515.*

12. Контролер, проверяя качество 400 изделий, установил, что 20 из них относятся ко 2-му сорту, а остальные – к 1-му. Какова частота изделий первого сорта? *Ответ: 0,95.*
13. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов. *Ответ: 102.*

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная из ящика деталь (после перевозки) оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь. *Ответ: а) $\frac{2}{3}$, б) $\frac{1}{3}$.*
2. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число кратно 5? *Ответ: 0,2.*
3. На 6 одинаковых карточках написаны буквы А, В, К, М, О, С. Карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово МОСКВА? *Ответ: $\frac{1}{720}$.*
4. Из 40 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 30. Найти вероятность того, что среди трех наугад выбранных вопросов студент знает: а) 3 вопроса; б) 2 вопроса; в) 1 вопрос. *Ответ: а) 0,41, б) 0,44, в) 0,14.*
5. Код домофона состоит из 8 цифр, которые могут повторяться. Какова вероятность того, что, случайно набирая цифры, можно угадать нужный код? *Ответ: $\frac{1}{108}$.*
6. В круге радиусом $R = 4$ см наудачу поставлена точка. Найти вероятность того, что расстояние от точки до окружности, ограничивающей этот круг не превосходит 1 см. *Ответ: $\frac{7}{16}$.*
7. В круг радиуса 8 помещен меньший круг радиуса 5. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет так же и в меньший круг. *Ответ: $\frac{25}{64}$.*
8. На отрезке $[0;5]$ случайно выбирается точка. Найти вероятность того, что расстояние от нее до правого конца отрезка не превосходит 1,6 единиц. *Ответ: 0,32.*
9. На отрезке натурального ряда от 1 до 20 найти относительную частоту простых чисел. *Ответ: 0,4.*

Тема 4. «ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Действия над событиями.
2. Независимые и зависимые события. Условная вероятность.
3. Теоремы умножения вероятностей.
4. Теоремы сложения вероятностей.
5. Вероятность появления хотя бы одного события.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Действия над событиями

Суммой двух событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B .

Произведением двух событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, состоящее в совместном наступлении событий A и B .

Разностью двух событий A и B называется событие $C = A - B$, состоящее в наступлении события A и не наступлении события B .

Независимые и зависимые события. Условная вероятность

Два события A и B называются **независимыми**, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет. В противном случае события A и B называются **зависимыми**.

Несколько событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ называются **попарно независимыми**, если каждые два из них независимы.

Несколько событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ называются **независимыми в совокупности** или просто **независимыми**, если независимы любые два из них и независимы любое из данных событий и любые комбинации (произведения) остальных событий. В противном случае события $A_1, A_2, \dots, A_k$ называются **зависимыми**.

Пусть A и B – зависимые события.

Условной вероятностью события B называется вероятность данного события, вычисленная в предположении, что событие A уже произошло. Обозначение: $P_A(B)$ или $P(B|A)$.

Аналогично определяется условная вероятность события A : $P_B(A)$ или $P(A|B)$.

Если A и B – независимые события, то их условные вероятности совпадают с обычными безусловными вероятностями: $P_A(B) = P(B)$ и $P_B(A) = P(A)$.

Теоремы умножения вероятностей

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже произошло: $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких зависимых событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже произошли:

$$P(A_1 A_2 \dots A_k) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{k-1}}(A_k).$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких независимых событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 \dots A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k).$$

Теоремы сложения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Следствия:

1. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k).$$

2. Если события $A_1, A_2, \dots, A_k$ образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице: $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) = 1$.

3. Сумма вероятностей двух противоположных событий A и $\bar{A}$ равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

С учетом теорем умножения теорема сложения вероятностей совместных событий примет вид:

1) для независимых событий: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$.

2) для зависимых событий: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B)$.

Вероятность появления хотя бы одного события

Теорема (вероятность появления хотя бы одного события)

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n).$$

Частный случай

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную p , то вероятность появления хотя бы одного из этих событий определяется по формуле $P(A) = 1 - q^n$, где $q = 1 - p$.

ЗАДАНИЯ

1. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с первого, пять со второго, семь с третьего и четыре с четвертого. Случайным образом выбран ящик

для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада?

Ответ: 11/20.

2. Мастер обслуживает пять станков. 10% рабочего времени он проводит у 1-го станка, 15% – у второго, 20% – у третьего, 25% – у четвертого и 30% – у пятого. Найти вероятность того, что в наудачу выбранный момент он находится: а) у 3-го или 5-го станка; б) у 1-го или 2-го или 4-го станка. *Ответ: а) 0,5; б) 0,5.*

3. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,7; а второго – 0,8. Найти вероятность того, что: а) мишень будет поражена; б) в мишень попадет только один из стрелков. *Ответ: а) 0,94; б) 0,38.*

4. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9 и третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы:

- а) только второй экзамен;
- б) только один экзамен;
- в) три экзамена;
- г) по крайней мере 2 экзамена;
- д) хотя бы один экзамен.

Ответ: 1) 0,018; 2) 0,044; 3) 0,648; 4) 0,954; 5) 0,998.

5. Для посева берут семена из двух пакетов. Вероятности прорастания семян в первом и втором пакетах соответственно равны 0,4 и 0,7. Найти вероятность того, что хотя бы в одном пакете семена прорастут. *Ответ: 0,82.*

6. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит нормальное, равна 0,6. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет. *Ответ: 0,936.*

7. Из колоды в 36 карт наудачу вынимаются 3 карты. Какова вероятность того, что среди них не будет ни одной шестерки? Рассмотреть выборки: 1) без возвращения; 2) с возвращением.

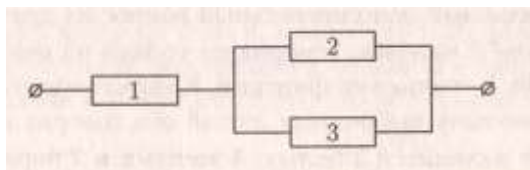
Ответ: 1) 0,695; 2) 0,702.

8. В урну, в которой лежат 4 белых и 3 черных шара, добавляют 2 белых и один черный шар. После этого наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятности следующих событий:

- а) все три шара белые;
- б) все три шара черные;
- в) первый шар белый, а второй и третий шар – черные.

Ответ: а) 1/6, б) 1/30, в) 1/10.

9. Электрическая цепь представлена схемой. Элементы с номерами 1,2,3 могут выйти из строя



Независимо друг от друга с вероятностями, равными соответственно 0,1; 0,15 и 0,2. Какова вероятность разрыва цепи? *Ответ: 0,127.*

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

10. Только один из 9 ключей подходит к данному замку. Какова вероятность того, что придется опробовать 5 ключей для открытия замка? *Ответ: 0,11.*

11. В магазине имеются 10 женских и 6 мужских шуб. Для анализа качества случайным образом отобрали 3 шубы. Определить вероятность того, что среди отобранных шуб окажутся только мужские или только женские шубы. *Ответ: 0,25.*

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете. *Ответ: 67/91.*

2. Один студент выучил 20 из 25 вопросов программы, а второй – только 15. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что правильно ответят: а) оба студента; б) только первый студент; в) только один из них; г) хотя бы один из студентов. *Ответ: а) 0,48, б) 0,32, в) 0,44, г) 0,92.*

3. В районе 100 поселков. В пяти из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобрали два поселка. Какова вероятность того, что в них окажутся пункты проката? Решить задачу, используя теорему умножения вероятностей. *Ответ: 1/495.*

4. Вероятность своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равна 0.5, 0.6 и 0.7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним предприятием. *Ответ: 0,94.*

Тема 4. «ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ» «ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ФОРМУЛЫ БАЙЕСА»

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Полная вероятность.
2. Формулы Байеса.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Теорема. Если событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу, то вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие условные вероятности события A :

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A).$$

(1)

Формула (1) называется **формулой полной вероятности**, а события $B_1, B_2, \dots, B_n$ – **гипотезами**.

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу. Вероятность появления события A находится по формуле полной вероятности, т.е. по формуле (1). Допустим, что произведено испытание, в результате которого событие A появилось. Требуется найти вероятности гипотез $B_1, B_2, \dots, B_n$ после испытания, т.е. условные вероятности $P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$. Данные вероятности могут быть найдены по **формулам Байеса**:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) P_{B_i}(A)} = \frac{P(B_i) P_{B_i}(A)}{P(A)}.$$

Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A .

ЗАДАНИЯ

1. В первой урне 3 черных и 7 белых шаров. Во второй урне 4 белых и 6 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули шар, который оказался черным. Найти вероятность того, что этот шар вынули из второй урны. *Ответ: 2/3.*
2. Ковбой Джек попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джек стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,16. На столе лежат 8 револьверов, из которых 5 пристрелянных. Ковбой Джек видит муху на стене, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в нее. Найти вероятность того, что он промахнется. *Ответ: 0,44.*
3. Из 500 ламп 300 принадлежат первой партии, остальные – второй. В первой партии 4% бракованных ламп, во второй – 3 % бракованных ламп. Наудачу выбирается лампа, которая оказалась бракованной. Найти вероятность того, что эта лампа: а) из первой партии; б) из второй партии. *Ответ: а) 2/3, б) 1/3.*
4. В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель – 0,85. Проведена проверка качества одной пары обуви. Оказалось, что эта пара обуви отремонтирована качественно. Какова вероятность того, что это: 1) туфли; 2) сапоги? *Ответ: 1) 0,59; 2) 0,41.*
5. Рабочий обслуживает три станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго – 0,03, а для третьего – 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в 3 раза больше, чем второго, а третьего – в 2 раза меньше, чем второго. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной? *Ответ: 0,024.*
6. В одном ящике находятся 7 деталей, из которых 3 нестандартные. В другом – 5 деталей, из них 2 нестандартные. Из первого ящика во второй перекладывают одну деталь. Затем из второго ящика берут одну деталь. Найти вероятность того, что взятая деталь окажется нестандартной. *Ответ: 0,405.*

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

7. На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго – 6 и от третьего – 4 двигателя. Вероятности безотказной

работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8 и 0,7. Какова вероятность того, что:

- а) установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока;
- б) проработавший без дефектов двигатель изготовлен на втором заводе?

Ответ: а) 0,83; б) 0,29.

8. Исследованиями психологов установлено, что мужчины и женщины по-разному реагируют на некоторые жизненные обстоятельства. Результаты исследований показали, что 70% женщин позитивно реагируют на изучаемый круг ситуаций, в то время как 40% мужчин реагируют на них негативно. 15 женщин и 5 мужчин заполнили анкету, в которой отразили свое отношение к предлагаемым ситуациям. Случайно извлеченная анкета оказалась негативной. Чему равна вероятность того, что ее заполнял мужчина? *Ответ: 0,31.*

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25%, второй – 35%, а третий 40% всех замков. Брак составляет соответственно 5%, 4% и 2%.

- а) Найти вероятность того, что случайно выбранный замок является дефектным.
- б) Случайно выбранный замок является дефектным. Какова вероятность того, что он был изготовлен в первом, втором, третьем цехе?

Ответ: а) 0,345, б) 0,362; 0,408; 0,230.

2. Партия электрических лампочек на 20% изготовлена первым заводом, на 30% – вторым заводом, на 50% – третьим заводом. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны 0,01, 0,005 и 0,006. Найти вероятность того, что наудачу взятая из партии лампочка окажется стандартной, т.е. небракованной. *Ответ: 0,9935.*

3. В торговую фирму поставляются телевизоры тремя фирмами в соотношении 5:2:3. Телевизоры, поступающие от этих фирм, не требуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 96%, 92% и 94% случаев.

- а) Найти вероятность того, что наудачу купленный телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.
- б) Купленный телевизор не потребовал ремонта в течение гарантийного срока. Какая фирма вероятнее всего поставила данный телевизор?

Ответ: а) 0,946, б) первая.

4. На двух автоматических станках изготавливаются одинаковые детали. Известно, что производительность первого станка в 2 раза больше, чем второго, и что вероятность изготовления детали высшего качества на первом станке равна 0,9, а на втором – 0,81. Изготовленные за смену на обоих станках нерассортированные детали находятся на складе. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется высшего качества. *Ответ: 0,81.*

Тема 5. «ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ»

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Независимые испытания. Формула Бернулли.
2. Формула Пуассона.
3. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Теорема 1. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A наступит k раз в n независимых испытаниях, определяется по **формуле Бернулли**: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

О.1. Число k_0 наступления события A в n независимых испытаниях называется **наивероятнейшим**, если вероятность осуществления этого события $P_n(k_0)$ по крайней мере не меньше вероятностей других событий $P_n(k)$ при любом k .

Число k_0 находится из неравенств $np - q \leq k_0 \leq np + p$. (1)

Замечание.

1. Так как $np + p - (np - q) = p + q = 1$, то всегда существует целое число k_0 , удовлетворяющее неравенствам (1).
2. Если обе части неравенства (1) – дробные числа, то k_0 – единственное целое число, заключенное между дробями.
3. Если $np + p$ – целое число, то наивероятнейших чисел два: $k_0 = np + p$ и $k_0' = np - q$.

Теорема Пуассона. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю ($p \rightarrow 0$) при неограниченном увеличении числа испытаний n ($n \rightarrow \infty$), причем произведение np стремится к постоянному числу a ($np \rightarrow a$), то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится k раз в n независимых испытаниях, удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}. \quad (2)$$

Если вероятность p – постоянна и мала, число испытаний n – велико и число $np = a$ – незначительно (будем полагать, что $np = a \leq 10$), то из предельного равенства (2) вытекает

приближенная **формула Пуассона**: $P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A произойдет k раз в n независимых испытаниях при достаточно большом n

определяется по асимптотической формуле $P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$ (3), где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Формула (3) называется **локальной формулой Муавра-Лапласа**. Вычисление по формуле (3) дает незначительную погрешность при выполнении условия $npq \geq 20$.

Функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ называется **функцией Гаусса**. Для функции $\varphi(x)$ составлена таблица значений. Пользуясь таблицей, следует учитывать, что:

1. Функция $\varphi(x)$ – четна, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$.
2. Функция $\varphi(x)$ монотонно убывает при $x > 0$, причем $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.
Практически можно считать, что при $x > 4$: $\varphi(x) = 0$.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A в n независимых испытаниях появится от k_1 до k_2 раз при достаточно большом n определяется по асимптотической формуле $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ (4), где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – **функция или интеграл вероятностей Лапласа**; $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Формула (4) называется **интегральной формулой Муавра-Лапласа**. Вычисление по формуле (4) дает незначительную погрешность при выполнении условия: $npq \geq 20$.

Для упрощения расчетов по формуле (4) составлена таблица значений функции $\Phi(x)$. Пользуясь таблицей, следует учитывать, что:

1. Функция $\Phi(x)$ – нечетна, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
2. Функция $\Phi(x)$ монотонно возрастает при $x > 0$, причем $\Phi(x) \rightarrow 0,5$ при $x \rightarrow \infty$.
Практически можно считать, что при $x > 4$: $\Phi(x) = 0,5$.

ЗАДАНИЯ

1. Контрольный тест состоит из четырех вопросов. На каждый вопрос предлагается четыре варианта ответа, среди которых только один правильный. Найти вероятность правильного ответа на 3 вопроса неподготовленного человека (выбор ответа наудачу). *Ответ: 0,047.*
2. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: **а)** 2 мальчика; **б)** не более двух мальчиков; **в)** более двух мальчиков; **г)** не более трех и не менее двух мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51. *Ответ: а) 0,306; б) 0,481; в) 0,519; г) 0,624.*
3. Вероятность того, что студент опоздает на лекцию, равна 0,08. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 96 студентов. *Ответ: 7.*
4. Вероятность «сбоя» в работе АТС при каждом вызове равна 0,007. Поступило 1000 вызовов. Определить вероятность 9 «сбоев». *Ответ: 0,1014.*
5. Завод-изготовитель отправил на базу 12000 доброкачественных изделий. Число поврежденных при транспортировке изделий составляет 0,05%. Найти вероятность того, что на базу поступит:

а) не более трех поврежденных изделий; б) хотя бы два поврежденных изделия.
Ответ: а) 0,1512; б) 0,9826.

6. Вероятность того, что при автоматической штамповке изделий отдельное изделие окажется бракованным, постоянна и равна 0,05. Какова вероятность того, что в партии из 1000 изделий встретится ровно 40 бракованных? *Ответ: 0,02.*

7. Используя условия задачи 6, выяснить, сколько небракованных изделий следует ожидать с вероятностью 0,042? *Ответ: 945 или 955.*

8. Вероятность попадания в цель из скорострельного орудия при отдельном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 300 выстрелах число попаданий будет не менее 210, но не более 230 раз. *Ответ: 0,7258.*

9. Замечено, что в среднем 80% семян из посаженных всходят. Сколько нужно посадить семян, чтобы с вероятностью 0,9 можно было бы ожидать, что не менее 100 посаженных семян взойдут? *Ответ: 133.*

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее восьми машин, а всего имеется их десять. Вероятность невыхода каждой автомашины на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы автобазы на ближайший день. *Ответ: 0,9298.*

2. Сколько раз надо подбросить игральный кубик, чтобы наивероятнейшее число выпадений двойки было равно 32? *Ответ: от 191 до 197.*

3. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,01. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{\text{в течение часа 5 абонентов позвонят на станцию}\};$

$B = \{\text{в течение часа не более 4 абонентов позвонят на станцию}\};$

$C = \{\text{в течение часа не менее 3 абонентов позвонят на станцию}\}.$

Ответ: 0,1563; 0,6289; 0,7619.

4. Вероятность изготовления доброкачественного изделия равна 0,9. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 300 изделий 95% окажется доброкачественными. *Ответ: 0,001.*

5. Контрольную работу по теории вероятностей успешно выполняют в среднем 70% студентов. Какова вероятность того, что из 200 студентов работу успешно выполнят: а) 150 студентов; б) не более 150 студентов; в) не менее 100 студентов? *Ответ: а) 0,019, б) 0,938, в) 1.*

6. Всхожесть семян данного сорта растений составляет 70%. Найти вероятность того, что из 700 посаженных семян число проросших будет заключено между 460 и 510. *Ответ: 0,944.*

Тема 6. «СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ»

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СПОСОБЫ ИХ ЗАДАНИЯ

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Закон распределения дискретной случайной величины и его формы.
2. Математические операции над дискретными случайными величинами.
3. Функция распределения и ее свойства.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Закон распределения дискретной случайной величины и его формы

0.1. Случайной величиной (СВ) называется переменная величина, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно (неизвестное заранее) значение из возможного множества своих значений.

Случайные величины обозначаются заглавными буквами латинского алфавита $X, Y, Z, \dots$, а их возможные значения – соответствующими малыми буквами, т.е. $x_1, x_2, \dots$ (для X), $y_1, y_2, \dots$ (для Y) и т.п.

0.2. Дискретной (прерывной) случайной величиной (ДСВ) называется случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные друг от друга, возможные значения с определенными вероятностями.

Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным (счетным).

0.3. Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Для дискретной случайной величины закон распределения можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

Простейшей формой задания закона распределения ДСВ X является таблица, в которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ и соответствующие им вероятности $p_1, p_2, \dots, p_n$:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Такая таблица называется **рядом распределения дискретной случайной величины**.

Контроль:
$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Ряд распределения дискретной случайной величины может быть изображен графически в виде **многоугольника** или **полигона распределения** вероятностей, который представляет собой ломаную с вершинами (x_i, p_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.

Математические операции над дискретными случайными величинами

Пусть даны две дискретные случайные величины:

- величина X , принимающая значения x_i с вероятностями $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$;
- величина Y , принимающая значения y_j с вероятностями $p_j = P\{Y = y_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m$.

0.4. Произведением дискретной случайной величины X на число C называется дискретная случайная величина CX , принимающая значения Cx_i с вероятностями $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

0.5. k -той степенью случайной величины X называется случайная величина X^k , принимающая значения x_i^k с вероятностями $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

0.6. Суммой (разностью, произведением) случайных величин X и Y называется случайная величина $X + Y$ ($X - Y$, $X \cdot Y$), принимающая значения $x_i + y_j$ ($x_i - y_j$, $x_i \cdot y_j$) с вероятностями

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\},$$

для $i = 1, 2, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, m$.

В случае совпадения некоторых сумм $x_i + y_j$ (разностей $x_i - y_j$, произведений $x_i \cdot y_j$) соответствующие вероятности складываются.

0.7. Две случайные величины называются **независимыми**, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое возможное значение приняла другая величина. В противном случае случайные величины называются **зависимыми**.

Если ДСВ X принимает значения x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а ДСВ Y принимает значения y_j ($j = 1, 2, \dots, m$), то независимость случайных величин X и Y означает независимость событий $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$ при любых $i = 1, 2, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, m$. В этом случае по теореме умножения вероятностей получим

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}.$$

0.8. Несколько случайных величин называются **взаимно независимыми**, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли остальные величины.

Функция распределения и ее свойства

Пусть X – случайная величина, а x – действительное число. Событие $\{X < x\}$ означает, что случайная величина X приняла значение, меньшее x . Вероятность этого события $P(X < x)$, зависит от x , т.е. является функцией от x .

0.9. Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого числа $x \in R$ вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция $F(x)$ так же называется **интегральной функцией распределения** или **интегральным законом распределения** случайной величины X .

Свойства функции распределения

Свойство 1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0; 1]$, т.е. $0 \leq F(x) \leq 1$.

Свойство 2. $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. $F(x_1) \leq F(x_2)$ при $x_1 \leq x_2$.

Из свойства 2 вытекают *следствия*:

- 1) Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в полуинтервале $[x_1; x_2)$, равна приращению интегральной функции на этом полуинтервале, т.е.

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

- 2) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение x , равна нулю: $P(X = x) = 0$.

Из следствий 1) и 2) вытекает, что для непрерывной случайной X справедливы равенства

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Свойство 3. Если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то

- 1) $F(x) = 0$ при $x \leq a$,
- 2) $F(x) = 1$ при $x \geq b$.

Следствие. Если возможные значения непрерывной случайной величины X расположены на всей оси x , то справедливы следующие предельные соотношения:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$

Зная ряд распределения ДСВ X , можно построить функцию распределения этой СВ.

Функция распределения $F(x)$ для ДСВ X , которая принимает значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$, может быть найдена по формуле $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$, где символ $x_i < x$ означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше x .

Графиком функции распределения дискретной случайной величины X является ступенчатая фигура, имеющая в точках x_i разрывы 1-го рода с соответствующей величиной скачка $p_i, i=1, 2, \dots, n$.

ЗАДАНИЯ

1. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	1	2	4	5	7
p	0,15	0,2	0,3	c	0,15

. Найти вероятность c . Построить многоугольник распределения. *Ответ:* $c = 0,2$.

2. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее наудачу извлекли три шара. Найти:
 - а) ряд распределения дискретной случайной величины X – числа извлеченных белых шаров;
 - б) вероятность события $A = \{\text{извлечено не менее двух белых шаров}\}$.

Ответ: а)

X	0	1	2	3
p	1/35	12/35	18/35	4/35

; б) $p = 22/35$.

3. Произведены два выстрела с вероятностями попадания в цель, равными 0,4 и 0,3 соответственно. Составить закон распределения случайной величины X – общего числа попаданий в цель.

Ответ:

X	0	1	2
p	0,42	0,46	0,12

.

4. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

X	-2	1	2	3
p	0,08	0,4	0,32	0,2

. Найти:

- а) функцию распределения $F(x)$;
- б) вероятности событий $\{X < 2\}$, $\{1 \leq X < 3\}$ и $\{1 < X \leq 3\}$;
- в) построить график функции $F(x)$.

Ответ: б) 0,48; 0,72; 0,52.

5. В урне 3 белых и 2 черных шара. Из нее последовательно вынимают шары до первого появления белого шара.

- а) Найти закон распределения дискретной случайной величины X – числа извлеченных шаров.
- б) Построить многоугольник распределения.
- в) Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Ответ: а)

X	1	2	3
p	0,6	0,3	0,1

, в) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 0,6, & 1 < x \leq 2 \\ 0,9, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$

6. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

X	-2	-1	1	2	3
p	0,2	0,25	0,3	0,15	0,1

. Построить ряды распределения случайных величин: а) $Y = 3X$; б) $Z = X^2$.

Ответ: а)

Y	-6	-3	3	6	9
p	0,2	0,25	0,3	0,15	0,1

 б)

Z	1	4	9
p	0,55	0,35	0,1

7. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и Y :

X	1	2	3
p	0,3	0,5	0,2

 и

Y	-2	-1
p	0,4	0,6

Построить ряды распределения случайных величин: а) $Z = X + Y$; б) $W = X \cdot Y$.

Ответ: а)

Z	-1	0	1	2
p	0,12	0,38	0,38	0,12

 б)

W	-6	-4	-3	-2	-1
p	0,08	0,2	0,12	0,42	0,18

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1,1	1,4	1,7	2	2,3
p	0,1	0,2	0,3	0,3	p_5

- 1) Найти вероятность p_5 .
- 2) Построить многоугольник распределения.
- 3) Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.
- 4) Определить вероятности $P(X > 1,4)$, $P(1,4 \leq X < 2)$, $P(X \leq 1,7)$.

Ответ: 1) 0,1; 4) 0,7; 0,5; 0,6

2. Три стрелка, ведущие огонь по цели, сделали по одному выстрелу. Вероятности их попадания в цель соответственно равны 0,5, 0,6 и 0,8. Построить ряд распределения дискретной случайной величины X – числа попаданий в цель. Ответ:

X	0	1	2	3
p	0,04	0,26	0,46	0,24

3. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

X	-3	-1	0	1	3	5
p	0,05	0,2	0,25	0,3	0,15	0,05

Найти распределение случайной величины $Y = |X|$. Ответ:

Y	0	1	3	5
p	0,25	0,5	0,2	0,05

4. Построить ряды распределения для случайных величин $Z = X + Y$ и $W = X \cdot Y$, если X и

Y – независимые случайные величины, заданные рядами

X	0	1
p	0,3	0,7

 и

Y	2	3
p	0,4	0,6

.

Ответ:

Z	2	3	4
p	0,12	0,46	0,42

,

W	0	2	3
p	0,3	0,28	0,42

Тема 6. «СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ» НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СПОСОБЫ ИХ ЗАДАНИЯ

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Функция распределения непрерывной случайной величины.
2. Плотность распределения и ее свойства.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

0.1. Случайной величиной (СВ) называется переменная величина, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно (неизвестное заранее) значение из возможного множества своих значений.

Случайные величины обозначаются заглавными буквами латинского алфавита $X, Y, Z, \dots$, а их возможные значения – соответствующими малыми буквами, т.е. $x_1, x_2, \dots$ (для X), $y_1, y_2, \dots$ (для Y) и т.п.

0.2. Непрерывной случайной величиной (НСВ) называется случайная величина, которая принимает все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка числовой оси.

Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно (несчетно).

Функция распределения непрерывной случайной величины

Наиболее универсальным способом описания случайных величин (и дискретных, и непрерывных) является использование функции распределения.

Пусть X – случайная величина, а x – действительное число. Событие $\{X < x\}$ означает, что случайная величина X приняла значение, меньшее x . Вероятность этого события $P(X < x)$, зависит от x , т.е. является функцией от x .

0.3. Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого числа $x \in R$ вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция $F(x)$ так же называется **интегральной функцией распределения** или **интегральным законом распределения** случайной величины X .

Свойства функции распределения

Свойство 1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0;1]$, т.е. $0 \leq F(x) \leq 1$.

Свойство 2. $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. $F(x_1) \leq F(x_2)$ при $x_1 \leq x_2$.

Из свойства 2 вытекают **следствия**:

3) Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в полуинтервале $[x_1; x_2)$, равна приращению интегральной функции на этом полуинтервале, т.е.

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

4) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение x , равна нулю: $P(X = x) = 0$.

Из следствий 1) и 2) вытекает, что для непрерывной случайной X справедливы равенства

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Свойство 3. Если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то

$$1) F(x) = 0 \text{ при } x \leq a, \quad 2) F(x) = 1 \text{ при } x \geq b.$$

Следствие. Если возможные значения непрерывной случайной величины X расположены на всей оси x , то справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

0.4. Случайная величина X называется **непрерывной**, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

Плотность распределения и ее свойства

0.5. **Плотностью распределения** непрерывной случайной величины X называется функция $f(x)$, равная первой производной от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Другие названия функции $f(x)$: **плотность распределения вероятностей, плотность вероятностей, плотность, дифференциальная функция распределения, дифференциальный закон распределения.**

Свойства плотности распределения

Свойство 1. $f(x)$ – неотрицательная функция, т.е. $f(x) \geq 0$.

Свойство 2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал $(x_1; x_2)$ равна определенному интегралу от ее плотности распределения, взятому в пределах от x_1 до x_2 :

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Свойство 3. Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения непрерывной случайной величины равен 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

В частности, если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то $\int_a^b f(x) dx = 1$.

Связь между функцией и плотностью распределения непрерывной случайной величины

1) Если известна функция распределения $F(x)$, то плотность распределения $f(x)$ находится по формуле $f(x) = F'(x)$.

2) Если известна плотность распределения $f(x)$, то функция распределения $F(x)$ находится по формуле $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$.

ЗАДАНИЯ

1. При каких значениях параметров k и b функция $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ kx + b, & -1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$ является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины? Ответ: $k = 1/3, b = 1/3$.

2. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ (x-2)^2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases} \text{ Найти:}$$

- 1) вероятности того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее 2,5, и не меньшее 3;
- 2) вероятности попадания случайной величины X в интервал $(2,5; 3,5)$ и полуинтервал $[1; 2,5)$;
- 3) плотность распределения $f(x)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

$$\text{Ответ: 1) } 0,25; 1; \text{ 2) } 0,75; 0,25; \text{ 3) } f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 2x - 4, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}.$$

3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \frac{3}{2} \sin 3x \text{ в интервале } \left(0; \frac{\pi}{3}\right); \text{ вне этого интервала } f(x) = 0. \text{ Найти вероятность}$$

того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$. Ответ: $\sqrt{2}/4$.

4. Найти функцию распределения непрерывной случайной величины X , плотность распределения которой определена формулой $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ($-\infty < x < +\infty$).

$$\text{Ответ: } F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x.$$

5. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases} \text{ Найти функцию распределения } F(x).$$

$$\text{Ответ: } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 - x}{2}, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

5. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана в интервале $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ функцией $f(x) = c \sin 4x$. Вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр c .
Ответ: $c = 2$.

6. Плотность распределения непрерывной случайной величины X на всей оси Ox задана равенством $f(x) = \frac{4c}{e^x + e^{-x}}$. Найти постоянный параметр c . *Ответ: $c = 1/(2\pi)$.*

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ bx, & 0 \leq x < 5,8 \\ 0, & x \geq 5,8 \end{cases}$$

- 1) Определить постоянную b .
- 2) Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.
- 3) Вычислить вероятности $P(X < 3,3)$ и $P(3,3 < X < 7,8)$.

Ответ: 1) $b = 50/841$; 2) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{25x^2}{841}, & 0 \leq x < 5,8 \\ 1, & x \geq 5,8 \end{cases}$; 3) $0,324$; $0,676$.

2. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -a \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

Требуется найти:

- а) плотность вероятности $f(x)$;
- б) коэффициент a ;
- в) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\pi/4; \pi/3)$.

Ответ: $a = 1/2$

3. Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$

Найти функцию распределения вероятностей $F(x)$ и построить ее график.

Тема 7. «ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН»

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Математическое ожидание и его свойства.
2. Дисперсия и ее свойства. Среднее квадратическое отклонение.
3. Моменты случайных величин.

4. Мода и медиана.
5. Асимметрия и эксцесс.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Математическое ожидание

Пусть дискретная случайная величина X с конечным множеством значений задана законом распределения:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

0.1. Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (1)$$

Пусть непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$.

0.2. Математическим ожиданием $M(X)$ непрерывной случайной величины X , возможные значения которой принадлежат отрезку $[a; b]$, называется число, определяемое равенством

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx.$$

Если значения непрерывной случайной величины X принадлежат всей числовой оси, то математическое ожидание определяется формулой $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$, в которой предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой величине: $M(C) = C$.
2. Постоянный множитель можно за знак математического ожидания: $M(CX) = C \cdot M(X)$.
3. Математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий: $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.
4. Математическое ожидание произведения конечного числа взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.
5. Математическое ожидание отклонения случайной величины X равно 0: $M(X - M(X)) = 0$.

Дисперсия. Среднее квадратическое отклонение

0.3. Дисперсией (рассеянием) $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от своего математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

1. Если X – ДСВ, то
$$D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$$

2. Если X – НСВ, то

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx \quad \text{или} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx$$

Т.1. (вычисление дисперсии)

Дисперсия $D(X)$ равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания: $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины C равна 0: $D(C) = 0$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его при этом в квадрат:

$$D(CX) = C^2 \cdot D(X).$$

3. Дисперсия алгебраической суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

4. Дисперсия суммы постоянной величины C и случайной величины X равна дисперсии случайной величины X : $D(C + X) = D(X)$

0.4. Средним квадратическим отклонением или стандартным отклонением $\sigma(X)$ случайной величины X называется квадратный корень из ее дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Моменты случайных величин

0.5. Начальным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени этой величины: $\alpha_k = M(X^k)$.

1. Если X – ДСВ, то
$$\alpha_k = \sum_i x_i^k \cdot p_i$$

2. Если X – НСВ, то
$$\alpha_k = \int_a^b x^k \cdot f(x) dx \quad \text{или} \quad \alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) dx$$

В частности, $\alpha_1 = M(X)$ и $\alpha_2 = M(X^2)$.

Пользуясь этими моментами, формулу для вычисления дисперсии $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$, можно записать в виде $D(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2$.

0.6. Центральным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени отклонения этой величины: $\beta_k = M(X - M(X))^k$.

1. Если X – ДСВ, то
$$\beta_k = \sum_i (x_i - M(X))^k \cdot p_i$$

2. Если X – НСВ, то
$$\beta_k = \int_a^b (x - M(X))^k \cdot f(x) dx \quad \text{или} \quad \beta_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k \cdot f(x) dx$$

В частности, $\beta_1 = M(X - M(X)) = 0$, $\beta_2 = M(X - M(X))^2 = D(X) \Rightarrow D(X) = \beta_2$.

Центральные моменты β_k могут быть выражены через начальные моменты α_k по формулам:

$$\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2, \quad \beta_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3, \quad \beta_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4;$$

и так далее.

Мода и медиана

0.7. Модой M_0 дискретной случайной величины X называется ее наиболее вероятное значение x_0 :

$$M_0 = x_0, \text{ где } P(X = x_0) = \max\{p_i\}.$$

0.8. Модой M_0 непрерывной случайной величины X называется такое ее значение x_0 , в котором плотность распределения $f(x)$ максимальна: $M_0 = x_0$, где $f(x_0) = \max f(x)$.

0.9. Медианой M_e непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, для которого $P(X < M_e) = P(X > M_e) = 1/2$, то есть одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше M_e .

Асимметрия и эксцесс

0.10. Коэффициентом асимметрии («скошенности») A случайной величины X называется отношение центрального момента 3-го порядка к кубу среднего квадратического отклонения:

$$A = \frac{\beta_3}{\sigma^3(X)}.$$

Если $A > 0$, то кривая распределения случайной величины X более полого справа от моды M_0 .

Если $A < 0$, то кривая распределения случайной величины X более полого слева от моды M_0 .

0.11. Коэффициентом эксцесса («островершинности») E случайной величины X

называется величина
$$E = \frac{\beta_4}{\sigma^4(X)} - 3.$$

Величина E характеризует островершинность или плосковершинность распределения. Для нормального распределения $A = 0$ и $E = 0$.

Остальные распределения сравнивают с нормальным:

- если $E > 0$ – более островершинные распределения,
- если $E < 0$ – более плосковершинные распределения.

ЗАДАНИЯ

1. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X соответственно равны $7/2$ и $35/12$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $3X + 2$.
Ответ: 12,5; 105/4.

2. Случайные величины X и Y независимы, причем $D(X) = 2$, $D(Y) = 6$, $M(X) = 3$, $M(Y) = 1$. Найти $M(Z)$ и $D(Z)$, если $Z = 12X - 3Y + 1$. *Ответ:* 34; 342.

3. Задан ряд распределения дискретной случайной величины X :

X	2	3	5	6	7	10
p	0,4	0,2	0,2	0,05	0,1	0,05

Найти:

- числовые характеристики случайной величины X : $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$;
- начальный момент третьего порядка случайной величины X ;
- моду случайной величины X .

Ответ: а) $M(X) = 3,9$; $D(X) = 4,89$; $\sigma(X) = 2,21$; б) $\alpha_3 = 128,7$; в) $M_0 = 2$ ($p = 0,4$).

4. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

X	2	4	6	8
p	0,4	0,2	0,1	a

и

Y	0	1	2
p	0,5	0,2	b

Найти:

- параметры a и b ;
- математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 2X + 3Y$.

Ответ: а) $a = 0,3$; $b = 0,3$; б) $M(Z) = 11,6$; $D(Z) = 32,6$.

5. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято 2 детали. Найти числовые характеристики дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей в выборке. *Ответ:* $M(X) = 8/5$; $D(X) = 64/225$; $\sigma(X) = 8/15$.

6. Дискретная случайная величина X задана законом распределения $\frac{X}{p} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 0,4 & 0,6 \end{array}$. Найти:

- центральные моменты 1-го, 2-го и 3-го порядков;
- асимметрию и эксцесс случайной величины X .

Ответ: а) 0; 0,24; -0,048 б) -0,408; 1,166

7. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x, & 0 < x \leq 1. \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Найти числовые характеристики случайной величины X . *Ответ:* $M(X) = 2/3$; $D(X) = 1/18$; $\sigma(X) = 0,24$.

8. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ 0,2(x+2), & -2 < x \leq 3. \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Найти числовые характеристики случайной величины X . *Ответ:* $M(X)=0,5$; $D(X)= 2,083$; $\sigma(X)= 1,443$.

9. Найти начальный и центральный моменты второго порядка непрерывной случайной ве-

личины X , заданной плотностью распределения $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 3x^2, & 0 < x \leq 1. \\ 0, & x > 1 \end{cases}$. *Ответ:* $\alpha_2 = 3/5$,

$$\beta_2 = 3/80.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Найти числовые характеристики дискретной случайной величины X , заданной законом распределения

X	-0,1	0	0,1	0,4
p	0,3	0,15	0,3	0,25

Ответ: $M(X)=0,1$, $D(X)= 0,036$, $\sigma(X)=0,19$.

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	2	3
p	0,4	0,6

Найти начальные и центральные моменты 1-го, 2-го и 3-го порядков случайной величины X .

Ответ: $\alpha_1=2,6$, $\alpha_2=7$, $\alpha_3 = 19,4$; $\beta_1=0$, $\beta_2 = 0,24$, $\beta_3 = -17,624$.

3. Пусть X и Y – независимые дискретные величины, причем $M(X) = 2$, $M(Y) = -3$, $D(X) = 2$, $D(Y) = 9$. Найти $M(Z)$ и $D(Z)$, если $Z = 5X - 3Y + 2$. *Ответ:* $M(Z)=21$, $D(Z)=131$.

4. Случайная величина задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 & , & x \leq 0 \\ x^3 & , & 0 < x \leq 1. \\ 1 & , & x > 1 \end{cases}$. Найти

числовые характеристики случайной величины X . Вычислить начальные и центральные моменты 1-го, 2-го и 3-го порядков. *Ответ:* $\alpha_1=M(X)=3/4$, $\beta_2 =D(X)= 3/80$, $\sigma(X)=0,19$, $\alpha_2=0,6$, $\alpha_3=0,5$, $\beta_1=0$, $\beta_3=1/160$.

Тема 8. «ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН» ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Биномиальное распределение.
2. Пуассоновское распределение.

3. Геометрическое распределение.
4. Гипергеометрическое распределение.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Биномиальное распределение

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Вероятность наступления события A во всех испытаниях постоянна и равна p , вероятность не появления события A есть $q = 1 - p$.

Дискретная случайная величина X – число появлений события A в этих испытаниях.

Возможные значения случайной величины X : $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n$.

Вероятности появления каждого из этих значений в силу независимости испытаний определяются по **формуле Бернулли**: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Биномиальный закон распределения:

X	0	1	2	...	k	...	n
p	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Т.1. (числовые характеристики биномиального распределения)

Если дискретная случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p , то ее математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ могут быть найдены по формулам:

$$M(X) = np \quad \text{и} \quad D(X) = npq$$

Пуассоновское распределение

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться или не появиться. Вероятность появления события A во всех испытаниях постоянна и равна p . Пусть число проведенных испытаний n велико ($n \rightarrow \infty$), а вероятность p очень мала ($p \leq 0,1$ и $p \rightarrow 0$), причем произведение np сохраняет постоянное значение, т.е. $np = a$.

Дискретная случайная величина X – число появлений события A в этих испытаниях.

Возможные значения случайной величины X : $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n$.

Вероятности появления каждого из этих значений определяются по **формуле Пуас-**

сона: $P_n(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$, где $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Пуассоновский закон распределения:

X	0	1	2	...	k	...	n
p	e^{-a}	ae^{-a}	$\frac{a^2}{2} e^{-a}$	...	$\frac{a^k}{k!} e^{-a}$	...	$\frac{a^n}{n!} e^{-a}$

Т.2. (числовые характеристики пуассоновского распределения)

Если дискретная случайная величина X имеет пуассоновское распределение с параметром a , то ее математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ могут быть найдены по формуле

$$M(X) = D(X) = a.$$

Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и равна p . Следовательно, вероятность непоявления события A есть $q = 1 - p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A .

Дискретная случайная величина X – число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A .

Возможные значения случайной величины X : $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \dots$

Вероятности появления каждого из этих значений по теореме умножения вероятностей независимых событий находятся по формуле $p_k = q^{k-1}p$, где $k = 1, 2, 3, \dots$

Геометрический закон распределения:

X	1	2	3	...	k	...
p	p	qp	q^2p	...	$q^{k-1}p$	...

Т.3. (числовые характеристики геометрического распределения)

Если дискретная случайная величина X имеет геометрическое распределение, то ее математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ могут быть найдены по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{p} \quad \text{и} \quad D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Гипергеометрическое распределение

Пусть имеется N элементов, среди которых M элементов обладают свойством A . Случайно отбираются n элементов (каждый элемент может быть извлечен с одинаковой вероятностью), причем отобранный элемент перед отбором следующего не возвращается в искомое множество.

Дискретная случайная величина X – число элементов, обладающих свойством A , среди n взятых.

Возможные значения случайной величины X : $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n$.

Вероятности появления каждого из этих значений определяются по формуле

$$p_k = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Гипергеометрический закон распределения:

X	0	1	2	...	...	n
p	$\frac{C_M^0 \cdot C_{N-M}^n}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1 \cdot C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^2 \cdot C_{N-M}^{n-2}}{C_N^n}$	...	...	$\frac{C_M^n \cdot C_{N-M}^0}{C_N^n}$

Т.4. (числовые характеристики гипергеометрического распределения)

Если дискретная случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение, то ее математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ могут быть найдены по формулам:

$$M(X) = \frac{n \cdot M}{N} \quad \text{и} \quad D(X) = \frac{nM}{N-1} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(1 - \frac{n}{N}\right).$$

ЗАДАНИЯ

1. Вероятность того, что аудитор допустит ошибку при проверке бухгалтерского баланса, равна 0,05. Аудитору на заключение представлены 2 баланса. Составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа правильных заключений на проверяемые балансы. *Ответ:*

$$\begin{array}{c|c|c|c} X & 0 & 1 & 2 \\ \hline p & 0,0025 & 0,095 & 0,9025 \end{array}, M(X) = 1,9; D(X) = 0,095; \sigma(X) = 0,31.$$

2. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобрали 4 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных. Найти числовые характеристики и построить многоугольник распределения случайной величины X . *Ответ:*

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} X & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline p & 0,6561 & 0,2916 & 0,0486 & 0,0036 & 0,0001 \end{array}; M(X) = 0,4; D(X) = 0,36; \sigma(X) = 0,6.$$

3. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Составить закон распределения и найти числовые характеристики дискретной случайной величины X – числа отказавших элементов в течение года.

Ответ: $P_{1000}(k) \approx \frac{1}{k!} e^{-1} (k = 0, 1, 2, \dots); M(X) = D(X) = \sigma(X) = 1.$

4. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,01. Найти вероятности следующих событий:

- а) в течение часа 5 абонентов позвонят на станцию;
- б) в течение часа не более 4 абонентов позвонят на станцию;
- в) в течение часа не менее 3 абонентов позвонят на станцию.

Ответ: а) 0,1563; б) 0,6289; в) 0,7619.

5. Вероятность поражения цели равна 0,05. Производится стрельба до первого попадания. Составить закон распределения и найти числовые характеристики дискретной случайной величины X – числа сделанных выстрелов. Определить вероятность того, что для поражения цели потребуется не менее 5 выстрелов. *Ответ:* $p_k = 0,05 \cdot 0,95^{k-1} (k = 1, 2, 3, \dots); M(X) = 20; D(X) = 380; \sigma(X) = 19,49; P(X \geq 5) = 0,8145.$

6. Проводится бросание игральной кости до первого выпадения шести очков. Составить закон распределения и найти числовые характеристики дискретной случайной

величины X – числа бросаний игральной кости. *Ответ:* $p_k = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} (k = 1, 2, 3, \dots);$

$M(X) = 6; D(X) = 30; \sigma(X) = 5,48.$

7. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее наудачу извлекли 3 шара. Найти закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа

извлеченных белых шаров. *Ответ:* $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p & 1/35 & 12/35 & 18/35 & 4/35 \end{array}, M(X) = 12/7;$

$D(X) = 24/49; \sigma(X) = 0,7.$

8. В магазине имеются 20 телевизоров, из них 7 имеют дефекты. Составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа телевизоров с дефектами среди выбранных наудачу пяти. *Ответ:*
- | | | | | | | |
|-----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|--------------------|
| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| p | $\frac{1287}{15504}$ | $\frac{5005}{15504}$ | $\frac{6006}{15504}$ | $\frac{2730}{15504}$ | $\frac{455}{15504}$ | $\frac{21}{15504}$ |
- , $M(X)=1,75$; $D(X)=0,898$,
 $\sigma(X)=0,948$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Игральная кость брошена 3 раза. Составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа появлений шестерки. *Ответ:* $M(X)=1,5$, $D(X)=5/12$, $\sigma(X)=0,65$.
2. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг. Составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа бракованных книг в тираже. *Ответ:* $P_{100000}(5)=0,0375$, $M(X)=D(X)=10$, $\sigma(X)=3,2$.
3. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0,9. Требуется составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту. *Ответ:* $M(X)=10$, $D(X)=90$, $\sigma(X)=9,49$.
4. Среди 10 лотерейных билетов имеется 4 билета с выигрышем. Наудачу покупают 2 билета. Составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа выигрышных билетов среди купленных. *Ответ:* $M(X)=4/5$, $D(X)=32/75$, $\sigma(X)=0,65$.

Тема 8. «ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН» ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Равномерное распределение.
2. Показательное распределение.
3. Нормальное распределение.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Равномерное распределение

0.1. Непрерывная случайная величина X имеет **равномерное распределение** на отрезке $[a;b]$, если ее плотность распределения $f(x)$ постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Функция распределения для равномерно распределенной НСВ X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

T.1. Если случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a;b]$, то:

1) математическое ожидание и дисперсия находятся по формулам:

$$M(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(x_1; x_2) \subset [a;b]$ находится по формуле

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b - a}$$

Показательное распределение

0.2. Непрерывная случайная величина X имеет **показательное (экспоненциальное) распределение**, если ее плотность распределения задается в виде $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$, где $\lambda > 0$ – параметр распределения.

Функция распределения для показательно распределенной НСВ X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

T.2. Если случайная величина X имеет показательное распределение, то:

1) математическое ожидание и дисперсия находятся по формулам: $M(X) = \frac{1}{\lambda}$ и

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

2) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(x_1; x_2)$ находится по формуле $P(x_1 < X < x_2) = e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}$

Нормальное распределение

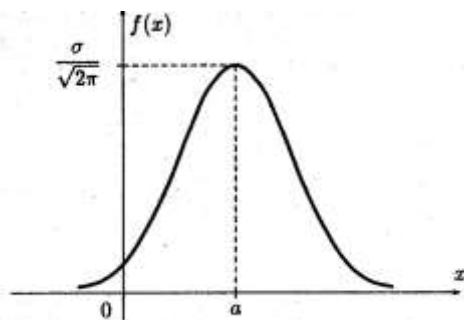
0.3. Непрерывная случайная величина X имеет **нормальное распределение**, если ее плотность распределения задается в виде $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a и σ – параметры распределения.

Если $a = 0$ и $\sigma = 1$, то нормальное распределение с такими параметрами называется **стандартным**. Плотность распределения стандартной случайной величины имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ т.е. является функцией Гаусса.}$$

T.3. (вероятностный смысл параметров нормального распределения)

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X , распределенной по нормальному закону, равно параметру a этого закона, то есть $M(X) = a$, а ее среднее квадратическое отклонение – параметру σ , то есть $\sigma(X) = \sigma$.



0.4. График плотности нормального распределения называется **нормальной кривой** (кривой Гаусса).

Вывод: параметр a (математическое ожидание) характеризует положение, а параметр σ (среднее квадратическое отклонение) – форму нормальной кривой.

T.4. Функция распределения непрерывной случайной величины X , распределенной по нормальному закону, выражается через функцию Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ по фор-

муле
$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

T.5. (вероятность попадания случайной величины в заданный интервал)

Вероятность попадания случайной величины X , распределенной по нормальному закону, в интервал $(x_1; x_2)$ определяется по формуле $P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right).$

T.6. (вероятность заданного отклонения)

Вероятность того, что отклонение случайной величины X , распределенной по нормальному закону, от математического ожидания a по абсолютной величине меньше заданного числа $\varepsilon > 0$, определяется по формуле $P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$

«Правило трех сигм»: если случайная величина X имеет нормальное распределение, то с вероятностью, близкой к 1, все значения случайной величины X заключены в интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$.

ЗАДАНИЯ

1. Автобусы подходят к остановке с интервалом в 5 минут. Считая, что случайная величина X – время ожидания автобуса – распределена равномерно, найти:
 - а. плотность распределения;
 - б. функцию распределения;
 - с. среднее время ожидания.

$$\text{Ответ: 1) } f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/5, & 0 \leq x \leq 5; \\ 0, & x > 5 \end{cases}; \quad 2) F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/5, & 0 \leq x \leq 5; \\ 1, & x > 5 \end{cases}; \quad 3) 2,5 \text{ мин.}$$

2. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого числа. Полагая, что при отсчете ошибка округления распределена по равномерному закону, найти:
 - а. числовые характеристики этой случайной величины;
 - б. вероятность того, что ошибка округления меньше 0,04;
 - с. вероятность того, что ошибка округления больше 0,05.

$$\text{Ответ: 1) } M(X)=0,1; D(X)=0,0033; \sigma(X)=0,0577; \quad 2) 0,4; \quad 3) 0,5.$$

3. Плотность распределения непрерывной случайной величины, имеющей показательное распределение, задается в виде $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Ce^{-0,1x}, & x \geq 0 \end{cases}$. Найти:
 - а. параметр C ;
 - б. числовые характеристики случайной величины X ;
 - с. вероятность попадания случайной величины X в интервал $(4; 10)$.

$$\text{Ответ: 1) } C = 0,1; \quad 2) M(X) = 10; D(X) = 100; \sigma(X) = 10; \quad 3) 0,3.$$

4. Среднее время безотказной работы прибора равно 80 часов. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти:
 - а. выражение его плотности вероятности и функции распределения;
 - б. вероятность того, что в течение 100 часов прибор не выйдет из строя.

$$\text{Ответ: 1) } f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,0125 e^{-0,0125x}, & x \geq 0 \end{cases}; \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-0,0125x}, & x \geq 0 \end{cases}; \quad 2) 0,2865.$$

5. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X) = 10$, $D(X) = 4$.
 - 1) Записать плотность распределения и функцию распределения случайной величины X .
 - 2) Найти вероятности $P(12 < X < 14)$ и $P(8 < X < 12)$.

$$\text{Ответ: 1) } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}; \quad F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-10}{2}\right); \quad 2) 0,135905; 0,68269.$$

6. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X) = 10$. Найти $P(0 < X < 10)$, если известно, что $P(10 < X < 20) = 0,3$. *Ответ: 0,3.*
7. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a = 375$ г и $\sigma = 25$ г. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет:
- 1) от 300 до 425 г;
 - 2) не более 450 г;
 - 3) больше 300 г.
- Ответ: 1) 0,9759; 2) 0,9987; 3) 0,9987.*
8. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону распределения с параметром $\sigma = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей 15 мм. *Ответ: 0,866386.*
9. Станок-автомат изготавливает валики, контролируя их диаметры X . Считая, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 10$ мм и $\sigma = 0,1$ мм, найти интервал, в котором с вероятностью 0,95 будут заключены диаметры изготовленных валиков. *Ответ: (9,804; 10,196).*
10. В результате проверки точности работы прибора установлено, что 80% ошибок не вышло за пределы ± 20 мм, а остальные ошибки вышли за эти пределы. Определите среднее квадратическое отклонение ошибок прибора, если известно, что систематических ошибок прибор не дает, а случайные ошибки распределены по нормальному закону. *Ответ: 15,6.*
11. Случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ мм. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет X в результате испытания. *Ответ: 30 мм.*

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Паром для перевозки автомашин через залив подходит к причалу через каждые два часа. Считая, что время прибытия автомашин – случайная величина X – распределена равномерно, найти: а) плотность вероятности $f(x)$; б) функцию распределения $F(x)$; в) среднее время ожидания автомашиной прихода парома; г) дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания. *Ответ: $M(X) = 1$ ч., $D(X) = 1/3$ ч², $\sigma(X) = 0,58$ ч.*
2. Случайная величина X , имеющая показательное распределение, задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-0,4x}, & x > 0. \end{cases}$ Найти: а) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X ; б) вероятность попадания случайной величины X в интервал (2;5). *Ответ: а) $M(X) = 2,5$, $\sigma(X) = 2,5$; б) 0,314.*
3. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 15, и средним квадратическим отклонением, равным 2. Найти

симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,954 попадет случайная величина X . *Ответ: (11; 19).*

4. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины – количества сыра, используемого для изготовления 100 бутербродов, равно 1 кг. Известно, что с вероятностью 0,96 расход сыра на изготовление 100 бутербродов составляет от 900 до 1100 г. Определить среднее квадратическое отклонение расхода сыра на 100 бутербродов. *Ответ: $\sigma = 48,8$ г.*
5. На станке изготавливаются втулки. Длина 1 втулки представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, которая имеет среднее значение $l_{cp} = 20$ см и дисперсию $D(l) = 0,04$ см². Найти вероятность того, что длина втулки заключена между 19,7 и 20,3 см, т.е. отклонение в ту или иную сторону не превзойдет 0,3 см. Какую длину можно гарантировать с вероятностью $p = 0,95$? *Ответ: 1) 0,87; 2) 20 ± 4 см.*

Тема 9. «ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие о законе больших чисел. Неравенства Маркова и Чебышева.
2. Теорема Чебышева.
3. Теоремы Бернулли и Пуассона.
4. Центральная предельная теорема.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Т.1. (неравенство Чебышева).

Если случайная величина X имеет математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо **неравенство Чебышева**

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева можно записать и в другой форме

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева применимо для любых случайных величин.

Т. 2. (неравенство Маркова)

Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения и имеет математическое ожидание $M(X)$, то для любого числа $A > 0$ верно **неравенство Маркова**

$$P(X \geq A) \leq \frac{M(X)}{A}.$$

Неравенство Маркова можно записать в другой форме $P(X < A) \geq 1 - \frac{M(X)}{A}.$

Неравенство Маркова применимо к любым неотрицательным случайным величинам.

Т.3. (теорема Чебышева)

Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – попарно независимые случайные величины, дисперсии которых равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то, как бы ни было мало число $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства $\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) \right| < \varepsilon$ будет как угодно близка к единице, если число n случайных величин достаточно велико, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) \right| < \varepsilon\right) = 1.$$

При этом справедливо неравенство
$$P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) \right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n \cdot \varepsilon^2}.$$

Т.4. (частный случай теоремы Чебышева)

Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – попарно независимые случайные величины, имеющие одинаковые математические ожидания, равные a , и равномерно ограниченные дисперсии, не превышающие постоянного числа C , то, как бы ни было мало число $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства $\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a \right| < \varepsilon$ будет как угодно близка к единице, если число n случайных величин достаточно велико, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a \right| < \varepsilon\right) = 1.$$

При этом справедливо неравенство
$$P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a \right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n \cdot \varepsilon^2}.$$

Т.5. (теорема Бернулли)

Пусть m – число наступлений события A в n независимых испытаниях и p – вероятность наступления события A в каждом испытании. Тогда, как бы ни было мало число $\varepsilon > 0$, имеет место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon\right) = 1$, т.е. относительная частота появления события A как угодно близка к вероятности события A .

Т.6. (теорема Пуассона)

Пусть m – число наступлений события A в n независимых испытаниях и $p_1, p_2, \dots, p_n$ – вероятности наступления события A в каждом из этих испытаний соответственно. Тогда, как бы ни было мало число $\varepsilon > 0$, имеет место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \right| < \varepsilon\right) = 1$, т.е. относительная частота появления события A как угодно близка к среднему арифметическому вероятностей события A .

Центральная предельная теорема (ЦПТ) – группа теорем, устанавливающих связь между законом распределения суммы случайных величин и его предельной формой – нормальным законом распределения.

Т.7. (ЦПТ для одинаково распределенных слагаемых)

Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – попарно независимые случайные величины, имеющие одно и тоже распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 , то при увеличении n закон распределения суммы $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ неограниченно приближается к нормальному.

Т.8. (теорема Ляпунова)

Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – попарно независимые случайные величины, имеющие математические ожидания $M(X_i) = a_i$, дисперсии $D(X_i) = \sigma_i^2$, абсолютный центральный момент

третьего порядка $M(|X_i - a_i|^3) = m_i$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)^{3/2}} = 0$, то закон распределения суммы Y

$= X_1 + X_2 + \dots + X_n$ при $n \rightarrow \infty$ неограниченно приближается к нормальному с математическим ожиданием $\sum_{i=1}^n a_i$ и дисперсией $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

ЗАДАНИЯ

1. Среднее число молодых специалистов, ежегодно направляемых в аспирантуру, составляет 200 человек. Оценить вероятность того, что в данном году будет направлено в аспирантуру не более 220 молодых специалистов. *Ответ: $P \geq 0,0909$.*
2. Оценить вероятность того, что при 3600 независимых подбрасываниях игрального кубика число появлений 6 очков будет не меньше 900. *Ответ: $P \leq 2/3$.*
3. Случайная величина X имеет дисперсию $D(X) = 0,001$. Какова вероятность того, что случайная величина X отличается от математического ожидания $M(X)$ более, чем на 0,1? *Ответ: $P \leq 0,1$.*
4. Вероятность появления события A в каждом из 150 проведенных испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что число X появлений события A будет заключено в пределах от 110 до 130. *Ответ: $P \geq 0,76$.*
5. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Всего было куплено 100 билетов. Найти вероятность того, что количество выигравших билетов будет заключено в пределах от 15 до 25. *Ответ: $P \geq 0,36$.*
6. Для случайной величины X известна дисперсия $D(X) = 0,01$ и имеет место неравенство $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0,96$. Найти значение ε . *Ответ: $P \geq 0,5$.*

7. В результате проведения 100 независимых испытаний получены случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ с равными математическими ожиданиями $M(X_i) = a = 30$ и равными дисперсиями $D(X_i) = 11$. Найти вероятность того, что среднее арифметическое этих случайных величин отклонится по абсолютной величине от математического ожидания $a = 30$ на величину, меньшую 0,5. *Ответ: $P \geq 0,56$.*
8. Определить, сколько надо произвести замеров поперечного сечения деревьев на большом участке, чтобы средний диаметр деревьев отличался от истинного значения a не более, чем на 2 см с вероятностью не меньшей 0,95. Среднее квадратическое отклонение поперечного сечения деревьев не превышает 10 см и измерения проводятся без ошибок. *Ответ: 500.*

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Средний срок службы прибора 10 лет. Оценить вероятность того, что данный прибор не прослужит более 15 лет. *Ответ: $P \geq 1/3$*
2. Случайная величина X имеет дисперсию $D(X) = 0,004$. Найти вероятность того, что случайная величина X отличается от $M(X)$ более чем на 0,2. *Ответ: $P \leq 0,1$*
3. Для случайной величины X известна дисперсия $D(X)=0,009$ и неравенство $P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq 0,1$. Найти число ε . *Ответ: $\varepsilon \geq 0,3$*
4. Всхожесть семян некоторой культуры равна 0,75. Оценить вероятность того, что из посеянных 1000 семян число взойшедших семян окажется от 700 до 800 включительно. *Ответ: $P \geq 0,925$*
*Указание: $M(X)=a=1000*0.75=750$.*

5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	2	3	4	5
p	0,1	0,15	0,3	0,25	0,2

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 1,5$. *Ответ: $P \geq 0,6$*

6. Вероятность появления события A в каждом из 150 проведенных испытаний равна 0,6. Найти вероятность того, что число X появлений события A будет заключено в пределах от 80 до 100. *Ответ: $P \geq 0,64$.*
7. В результате проведения 600 независимых испытаний получены случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_{600}$ с равными математическими ожиданиями $M(X_i) = a = 80$ и равными дисперсиями $D(X_i) = 54$. Найти вероятность того, что среднее арифметическое этих случайных величин отклонится по абсолютной величине от математического ожидания $a = 80$ на величину, меньшую 1,5. *Ответ: $P \geq 0,96$.*

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы:

1. Матальцкий М. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / М. А. Матальцкий, Г. А. Хацкевич. - Минск: Вышэйшая школа, 2017. - 592 с. - ISBN 978-985-06-2855-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/90834.html>
2. Чернова Н. М. Основы теории вероятностей : учебное пособие / Н. М. Чернова. - 3-е изд. - Москва, Саратов: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИИ-ТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2020. - 107 с. - ISBN 978-5-4497-0348-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/89462.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Климов Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Г. П. Климов. - Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2011. - 368 с. - ISBN 978-5-211-05846-0. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/13115.html>
2. Гусак А. А. Теория вероятностей. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. - Минск: ТетраСистемс, 2013. - 287 с. - ISBN 978-985-536-385-0. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28244.html>
3. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие (курс лекций) / Е. О. Тарасенко, И. В. Зайцева, П. К. Корнеев, А. В. Гладков. - Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2018. - 229 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/92605.html>

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

<http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

<http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

<http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.

<http://www.mathedu.ru/> Электронная библиотека по математике и вопросам ее преподавания. Включает [популярные книги и пособия](#), [методические руководства](#), [учебники](#), [журналы](#), [исторические работы](#), [авторефераты](#), [диафильмы](#).

<http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

<http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).

<http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине

«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
направленность (профиль):
«Информатика и математика»

Ставрополь, 2026

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студента).

Самостоятельная работа студента является важным видом учебной и научной деятельности студента. Федеральным государственным образовательным стандартом предусматривается значительный объем времени из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу. В связи с этим, обучение включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому самостоятельная работа должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования – подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности.

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

Самостоятельная работа студента предполагает, прежде всего, его научно-исследовательскую и практическую деятельность, поскольку именно эти виды учебной работы в первую очередь готовят к самостоятельному выполнению профессиональных задач. Конечной целью самостоятельной работы является организация самостоятельной познавательной деятельности, формирование умения самостоятельно анализировать информацию, выделять главное и второстепенное.

Основными формами самостоятельной работы студентов по дисциплине **«Теория вероятностей»** является подготовка к практическим занятиям и подготовка к экзамену.

В результате освоения дисциплины **«Теория вероятностей»** формируется профессиональная компетенция ПК-1, в соответствии с которой студент должен:

Знать:

методы использования математического аппарата теории вероятностей для решения прикладных задач.

Уметь:

использовать математический аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач.

Владеть:

навыками использования математического аппарата теории вероятностей для решения прикладных задач.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «Теория вероятностей»

Самостоятельная работа проводится в виде подготовки к практическим занятиям по темам дисциплины **«Теория вероятностей»** и подготовка к сдаче экзамена. Основной целью этих видов самостоятельной работы является улучшение профессиональной подготовки бакалавров высшей квалификации, направленное на формирование действенной системы фундаментальных и профессиональных знаний, умений и навыков, которые они могли бы свободно и самостоятельно применять в практической деятельности.

Цели самостоятельной работы:

- научить студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свою квалификацию.
- закрепление, расширение и углубление знаний, умений и навыков, полученных студентами на аудиторных занятиях под руководством преподавателей;
- изучение студентами дополнительных материалов по изучаемым дисциплинам и умение выбирать необходимый материал из различных источников; воспитание у студентов самостоятельности, организованности, самодисциплины, творческой активности, потребности развития познавательных способностей и упорства в достижении поставленных целей.

Предлагаемый подход к освоению материала усиливает мотивацию к аудиторной и внеаудиторной активности, что обеспечивает необходимый уровень знаний по изучаемым дисциплинам.

Приступая к изучению учебной дисциплины **«Теория вероятностей»**, студенты должны ознакомиться с учебной программой, учебной, научной и методической литературой, имеющейся в библиотеке, получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

В ходе лекционных занятий вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

В ходе подготовки к практическим занятиям изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях: журналах, газетах и т.д. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой. После подведения итогов лабораторного занятия устранить недостатки, отмеченные преподавателем.

В ходе организации самостоятельной работы **решаются следующие задачи:**

- углублять и расширять их профессиональные знания;
- формировать у них интерес к учебно-познавательной деятельности;
- развивать у бакалавров самостоятельность, активность, ответственность;
- развивать познавательные способности специалистов.

Учебный процесс в высшем учебном заведении в значительной степени строится на самостоятельной работе студентов, без которой трудно в полной мере овладеть сложным программным материалом и научиться, в дальнейшем, постоянно совершенствовать приобретенные знания и умения.

Самостоятельная работа является внеаудиторной и предназначена для самостоятельного ознакомления студента с определенными разделами дисциплины «Теория вероятностей» по рекомендованным преподавателем материалам и подготовки к выполнению контрольной работы.

ПЛАН – ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вид деятельности студентов	Итоговый продукт самостоятельной работы	Средства и технологии оценки	Примерные сроки выполнения
7 семестр			
Изучение лекционного материала, рекомендуемой литературы	Конспект	Собеседование	7 неделя
Подготовка к практическим занятиям	Решенные практические задания	Собеседование	15 неделя

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Как уже отмечалось, самостоятельная работа по изучению теоретического материала (а также самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях) – это важнейшее условие формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

- Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать».

- Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

- Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).

- Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.

- При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...

- Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

- Если книга – Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора (это очень хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).

• Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать), и это может занять немалое время (у кого-то – до нескольких недель и даже месяцев); опыт показывает, что после этого студент каким-то «чудом» начинает буквально заглатывать книги и чуть ли не видеть «сквозь обложку», стоящая это работа или нет...

• «Либо читайте, либо перелистывайте материал, но не пытайтесь читать быстро... Если текст меня интересует, то чтение, размышление и даже фантазирование по этому поводу сливаются в единый процесс, в то время как вынужденное скорочтение не только не способствует качеству чтения, но и не приносит чувства удовлетворения, которое мы получаем, размышляя о прочитанном», – советует Г. Селье (Селье, 1987. – С. 325-326).

• Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент (или молодой ученый) будет как бы искать аргументы «за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Проблема лишь в том, как найти «свою» идею...

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют четыре основные установки в чтении научного текста:

1. **информационно-поисковый** (задача – найти, выделить искомую информацию)
2. **усваивающая** (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)
3. **аналитико-критическая** (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)
4. **творческая** (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких видов чтения:

1. **библиографическое** – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
2. **просмотровое** – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
3. **ознакомительное** – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;
4. **изучающее** – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;
5. **аналитико-критическое и творческое чтение** – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает

ет направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВИДАМ РАБОТ, ПРЕДУСМОТРЕННЫХ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Предполагается, что отдельные вопросы тем дисциплины изучаются студентами самостоятельно. Знания указанных вопросов проверяется наличием конспектов и собеседованием. Ниже приведены вопросы для собеседования по всем темам дисциплины **«Теория вероятностей»**. Ответы на теоретические вопросы в рамках каждого практического занятия (собеседование) показывают умения и навыки студентов анализировать теоретический материал и готовность к применению теоретических знаний в практической деятельности.

Данное оценочное мероприятие проводится на каждом практическом занятии на основании материалов и знаний, полученных на лекциях, а также при изучении основной и дополнительной литературы.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования материалами лекций, основной и дополнительной литературы, а также интернет-ресурсов.

При проверке задания оцениваются:

- правильность ответов;
- чёткое знание терминологии;
- умение грамотно, четко и последовательно излагать материал;
- использование дополнительной литературы при подготовке;
- умение анализировать теоретический материал и сопоставлять его с практикой;
- умение приводить конкретные примеры.

В процессе самостоятельного изучения отдельных вопросов тем дисциплины рекомендуется работа с литературой, перечень которой приведен в конце методических указаний.

Вопросы для собеседования

Собеседование №1

Базовый уровень

1. Основные понятия теории вероятностей.
2. Классификация событий.
3. Случайные события и их вероятности.
4. Классическое, геометрическое и статистическое определение вероятности.
5. Комбинаторика, основные правила комбинаторики.
6. Виды соединений: перестановки, размещения, сочетания без повторений.
7. Основные формулы комбинаторики и их применение к вычислению вероятностей.
8. Совместные и несовместные события, определение, примеры.
9. Зависимые и независимые события, примеры.
10. Алгебра событий: сумма и произведение событий, примеры.
11. Сумма совместных и несовместных событий.
12. Произведение зависимых и независимых событий.
13. Вычисление вероятности события, которое может появиться с одним из событий, образующих полную группу (формула полной вероятности).

14. Схема Бернулли.
15. Формула Бернулли. Условия её применения.
16. Условия применения локальной теоремы Муавра-Лапласа, отличие условий применения от формулы Бернулли. Вычисление вероятности появления события в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз, интегральная теорема Муавра-Лапласа.
17. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.

Повышенный уровень

1. Предмет теории вероятностей. Исторический обзор развития теории вероятностей как науки.
2. Основные разделы современной теории вероятностей.
3. Связь между теорией вероятностей и математической статистикой.
4. Перестановки, размещения, сочетания с повторениями.
5. Условная вероятность.
6. Полная группа событий, противоположные события.
7. Вероятность появления хотя бы одного события.
8. Вероятность перераспределённых гипотез (формула Байеса).
9. Вывод формулы Бернулли.
10. Найвероятнейшее число наступления события.
11. Условия применения формулы Пуассона, отличие от условий применения формулы Бернулли и локальной теоремы Муавра-Лапласа.

Собеседование №2

Базовый уровень

1. Понятие случайной величины. Виды случайных величин и законы их распределения.
2. Числовые характеристики дискретной случайной величины.
3. Биномиальное распределение, числовые характеристики.
4. Распределение Пуассона, числовые характеристики.
5. Геометрическое распределение, числовые характеристики.
6. Непрерывная случайная величина. Дифференциальная и интегральная функции распределения, определение, свойства, взаимосвязь.
7. Определение вероятности попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.
8. Нахождение числовых характеристик непрерывной случайной величины.
9. Равномерное распределение. Числовые характеристики.
10. Нормальное распределение. Числовые характеристики.
11. Показательное распределение. Числовые характеристики

Повышенный уровень

1. Сформулируйте и докажите свойства математического ожидания дискретной случайной величины.
2. Сформулируйте и докажите свойства дисперсии дискретной случайной величины.
3. Понятие многомерной случайной величины.
4. Функция распределения многомерной случайной величины.
5. Плотность вероятности двумерной случайной величины. Условные законы распределения.
6. Числовые характеристики двумерной случайной величины.
7. Выведите формулы для вычисления числовых характеристик случайной величины, имеющей равномерное распределение.
8. Выведите формулы для вычисления числовых характеристик случайной величины, имеющей показательное распределение.
9. В чём заключается правило $3\text{-}\sigma$, для какого закона распределения оно справедливо?

Собеседование №3

Базовый уровень

1. Какие теоремы входят в «закон больших чисел»?
2. Запишите неравенство Чебышева, при решении каких задач оно применяется.
3. Теорема Чебышева.
4. Неравенство Маркова.

Повышенный уровень

1. Сформулируйте теорему Бернулли.
2. Центральная предельная теорема.

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка **«отлично»** выставляется студенту, если студент показал глубокое, прочное и аргументированное освоение учебного материала по теме, при этом поставленные вопросы (включая вопросы повышенного уровня) раскрыты последовательно, четко и логически стройно, в полном исчерпывающем объеме. Основные категории, понятия и определения темы сформулированы правильно и при ответе не допущено ошибок.

Оценка **«хорошо»** выставляется студенту, если студент показал твердое знание базового учебного материала по теме, при этом поставленные вопросы раскрыты грамотно и по существу, в достаточно полном объеме. Основные категории, понятия и определения темы сформулированы правильно, но при ответе допущены отдельные неточности или одна ошибка.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется студенту, если студент показал знание только базовой части темы, при этом поставленные вопросы раскрыты с нарушением логической последовательности или не в полном объеме. В ходе ответа были допущены неточные формулировки основных определений, понятий и теорем заданной темы, а также ошибки (не более двух) или ряд незначительных неточностей, не исказивших существенно суть ответа.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется студенту, если студент не знает значительной части вопросов темы, допускает существенные ошибки (более двух) и существенно искажает суть излагаемого материала. Оценка неудовлетворительно выставляется также, если студент отказался проходить собеседование.

2. Описание шкалы оценивания

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

Методические указания по подготовке к экзамену

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается экзаменом. Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

Экзаменационная сессия - это серия экзаменов, установленных учебным планом. Между экзаменами интервал 3-4 дня. Не следует думать, что 3-4 дня достаточно для успешной подготовки к экзаменам.

В эти 3-4 дня нужно систематизировать уже имеющиеся знания. На консультации перед экзаменом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к экзаменам те же, что и при занятиях в течение семестра, но соблюдаться они должны более строго. Во-первых, очень важно соблюдение режима дня; сон не менее 8 часов в сутки, занятия заканчиваются не позднее, чем за 2-3 часа до сна. Оптимальное время занятий, особенно по математике - утренние и дневные часы. В перерывах между занятиями рекомендуются прогулки на свежем воздухе, неустойчивые занятия спортом. Во-вторых, наличие хороших собственных конспектов лекций. Даже в том случае, если была пропущена какая-либо лекция, необходимо во время ее восстановить (переписать ее на кафедре), обдумать, снять возникшие вопросы для того, чтобы запоминание материала было осознанным. В-третьих, при подготовке к экзаменам у студента должен быть хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Правила подготовки к экзамену:

- Лучше сразу сориентироваться во всем материале и обязательно расположить весь материал согласно экзаменационным вопросам (или вопросам, обсуждаемым на семинарах), эта работа может занять много времени, но все остальное – это уже технические детали (главное – это ориентировка в материале!).

- Сама подготовка связана не только с «запоминанием». Подготовка также предполагает и переосмысление материала, и даже рассмотрение альтернативных идей.

- Готовить «шпаргалки» полезно, но пользоваться ими рискованно. Главный смысл подготовки «шпаргалок» – это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету, что само по себе прекрасно – это очень сложная и важная для студента работа, более сложная и важная, чем простое поглощение массы учебной информации. Если студент самостоятельно подготовил такие «шпаргалки», то, скорее всего, он и экзамены сдавать будет более уверенно, так как у него уже сформирована общая ориентировка в сложном материале.

- Как это ни парадоксально, но использование «шпаргалок» часто позволяет отвечающему студенту лучше демонстрировать свои познания (точнее – ориентировку в знаниях, что намного важнее знания «запомненного» и «тут же забытого» после сдачи экзамена).

• Сначала студент должен продемонстрировать, что он «усвоил» все, что требуется по программе обучения (или по программе данного преподавателя), и лишь после этого он вправе высказать иные, желательно аргументированные точки зрения.

Примерные вопросы к экзамену

1. Предмет теории вероятностей. Исторический обзор развития теории вероятностей как науки.
2. Основные понятия теории вероятностей.
3. Классификация событий.
4. Случайные события и их вероятности.
5. Классическое, геометрическое и статистическое определение вероятности.
6. Комбинаторика, основные правила комбинаторики.
7. Виды соединений: перестановки, размещения, сочетания без повторений.
8. Основные формулы комбинаторики и их применение к вычислению вероятностей.
9. Совместные и несовместные события, определение, примеры.
10. Зависимые и независимые события, примеры.
11. Алгебра событий: сумма и произведение событий, примеры.
12. Сумма совместных и несовместных событий.
13. Произведение зависимых и независимых событий.
14. Вычисление вероятности события, которое может появиться с одним из событий, образующих полную группу (формула полной вероятности).
15. Схема Бернулли.
16. Формула Бернулли. Условия её применения.
17. Условия применения локальной теоремы Муавра-Лапласа, отличие условий применения от формулы Бернулли. Вычисление вероятности появления события в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз, интегральная теорема Муавра-Лапласа.
18. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
19. Понятие случайной величины. Виды случайных величин и законы их распределения.
20. Числовые характеристики дискретной случайной величины.
21. Биномиальное распределение, числовые характеристики.
22. Распределение Пуассона, числовые характеристики.
23. Геометрическое распределение, числовые характеристики.
24. Непрерывная случайная величина. Дифференциальная и интегральная функции распределения, определение, свойства, взаимосвязь.
25. Определение вероятности попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.
26. Нахождение числовых характеристик непрерывной случайной величины.
27. Равномерное распределение. Числовые характеристики.
28. Нормальное распределение. Числовые характеристики.
29. Показательное распределение. Числовые характеристики.
30. Какие теоремы входят в «закон больших чисел»?
31. Запишите неравенство Чебышева, при решении каких задач оно применяется.
32. Теорема Чебышева.
33. Неравенство Маркова.
34. Сформулируйте теорему Бернулли.
35. Центральная предельная теорема.

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно отвечает на вопросы базового и повышенного уровней, умеет тесно увязывать теорию с практикой, не затрудняется с ответом при видоизменении

заданий, использует в ответе материал дополнительной литературы, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал как базового, так и повышенного уровней, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками сопоставления теории и практики.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только материала базового уровня, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при сопоставлении теории и практики.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Отметка «неудовлетворительно» выставляется также, если обучающийся отказался отвечать на вопросы.

2. Описание шкалы оценивания

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	88-100
Хороший	72-87
Удовлетворительный	53-71
Неудовлетворительный	<53

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Перечень основной литературы:

1. Маталыцкий М. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / М. А. Маталыцкий, Г. А. Хацкевич. - Минск: Вышэйшая школа, 2017. - 592 с. - ISBN 978-985-06-2855-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/90834.html>
2. Чернова Н. М. Основы теории вероятностей : учебное пособие / Н. М. Чернова. - 3-е изд. - Москва, Саратов: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2020. - 107 с. - ISBN 978-5-4497-0348-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/89462.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Климов Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Г. П. Климов. - Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2011. - 368 с. - ISBN 978-5-211-05846-0. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/13115.html>
2. Гусак А. А. Теория вероятностей. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. - Минск: ТетраСистемс, 2013. - 287 с. - ISBN 978-985-536-385-0. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28244.html>
3. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие (курс лекций) / Е. О. Тарасенко, И. В. Зайцева, П. К. Корнеев, А. В. Гладков. - Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2018. - 229 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/92605.html>

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

<http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

<http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

<http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.

<http://www.mathedu.ru/> Электронная библиотека по математике и вопросам ее преподавания. Включает [популярные книги и пособия](#), [методические руководства](#), [учебники](#), [журналы](#), [исторические работы](#), [авторефераты](#), [диафильмы](#).

<http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

<http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).

<http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания
по выполнению курсовой работы по дисциплине
«Теория вероятностей»
для студентов направления подготовки
44.03.05 «Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки),
направленность (профиль): «Информатика и математика»

Ставрополь, 2024

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ

Курсовая работа является формой учебно-исследовательской, проектной работы обучающихся, выполняется в соответствии с Положением о выполнении и защите курсовых работ (проектов) в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Северо-Кавказский федеральный университет» (новая редакция).

Цели и задачи выполнения курсовой работы:

- систематизация, закрепление, расширение теоретических знаний и практических умений по изучаемой дисциплине и использование их при решении профессиональных задач;
- приобретение новых теоретических знаний в соответствии с темой работы;
- развитие умения систематизировать, обобщать и логично излагать концепции, альтернативные точки зрения по исследуемой проблеме;
- развитие учебно-исследовательских и методических навыков, необходимых для системного научного анализа изучаемого явления;
- формирования у обучающихся компетенций, установленных ФГОС ВО.

Тематика курсовой работы определяется программой дисциплины и обсуждается на заседании межфакультетской базовой кафедры инновационных технологий обучения физико-математическим дисциплинам и утверждается распоряжением декана физико-технического факультета.

Курсовая работа по дисциплине «Теория и методика обучения физике (частная методика)» должна носить практический характер. В курсовой работе должен быть проведен анализ современного состояния изучаемой проблемы, включенность в государственную и(или) региональную проблематику.

Курсовая работа должна иметь следующую структуру:

- Титульный лист;
- Содержание;
- Введение;
- Основная часть;
- Заключение;
- Список использованных источников;
- Приложения (при наличии).

Титульный лист является первой страницей курсовой работы, оформляется в соответствии с Приложением 1 к Положению о выполнении и защите курсовых работ (проектов) в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Северо-Кавказский федеральный университет» (новая редакция).

Содержание включает в себя все заголовки курсовой работы с указанием страниц начала каждого раздела, подраздела.

Во введении (5–6 страниц печатного текста) обосновывается актуальность выбранной темы исследования, отражаются объект, предмет, задачи, цели, методы исследования.

Актуальность темы обосновывается с опорой на общественную практику, на нужды людей, сталкивающихся с проблемами социально-психологического характера. Актуальной является такая тема, которая ставит целью поиск ответа на вопрос, продиктованный требованиями практической деятельности людей, сталкивающихся либо с отсутствием готового ответа в соответствующей литературе, либо с наличием разных точек зрения на проблему.

Цель исследования должна формулироваться исходя из выбранной темы. Она предопределяет всю логику курсовой работы, которая должна быть направлена на её достижение.

В задачах исследования происходит конкретизация основных теоретических и практических направлений исследования. Рекомендуется ставить не более 2-3 задач и в

дальнейшем планировать исследование таким образом, чтобы оно было направлено на решение поставленных задач.

Объект исследования – это научное направление, на материалах которого выполняется курсовая работа.

Предмет исследования определяется темой курсовой работы.

Методы исследования подразделяют на теоретические и эмпирические (практические). К теоретическим методам относится: анализ психолого – педагогической, методической литературы; нормативно – законодательных документов РФ в области образования; обобщение опыта работы преподавателей и др. К практическим методам относятся: наблюдение, беседа, анкетирование, тестирование, экспериментальное обучение и др.

Основная часть курсовой работы должна содержать два раздела: теоретический и практический.

Теоретическая часть должна включать описание истории вопроса, уровень разработанности проблемы в теории и практике на основе сравнительного анализа литературы.

Практическая часть должна включать методические разработки по теме курсовой работы, проведение апробации в учебном процессе.

Теоретическая и практическая части по содержанию должны быть логически связаны между собой и завершаться выводами. Соотношение теоретической и практической части, как правило, должно быть 1:2.

Основную часть текстового документа следует делить на параграфы.

В заключении (1–2 страницы печатного текста) содержатся выводы по курсовой работе в целом, перспективы дальнейшего изучения проблемы, связь с практикой, анализ реализации целей и задач исследования.

Список использованных источников должен быть оформлен в соответствии с требованиями с ГОСТ 7.32–2001, ГОСТ 7.1-2003, ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В приложения (при необходимости) включаются разработанные методические материалы, диагностические методики и т.д.

ОФОРМЛЕНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ.

Изложение текста и оформление текстового документа выполняется в соответствии с требованиями ГОСТ 7.32–2001.

Текстовый документ должен быть выполнен печатным способом с использованием компьютера и принтера, на одной стороне листа белой бумаги формата А4 (210×294 мм) через полтора интервала. Цвет шрифта должен быть черным, используется шрифт Times New Roman кегль 14, абзацный отступ — 1,25 мм. Интервал — 1,5. В таблицах и рисунках допускается применять кегль 12.

Текст документа следует печатать, соблюдая следующие размеры полей: правое — верхнее и нижнее — 20 мм, правое — 10 мм, левое — 30 мм. Автоматические переносы запрещены, а также недопустимо наличие переносов, расставленных вручную. Все параметры устанавливаются автоматически для всей работы.

Весь текст должен быть выровнен по ширине.

Наименования структурных элементов работы «Содержание», «Введение», «Наименование параграфов», «Заключение», «Список Литературы», «Приложение» служат заголовками структурных элементов работы. Заголовки структурных элементов следует располагать в середине строки без точки в конце и печатать прописными буквами, не подчеркивая полужирным шрифтом.

Страницы текстового документа следует нумеровать арабскими цифрами, соблюдая сквозную нумерацию по всему тексту документа. Страницы приложений не нумеруются и не входят в состав основного текста. Номер страницы проставляется в правой нижней части листа без точки. Титульный лист входит в общую нумерацию страниц документа. Номер страницы на титульном листе не проставляется.

Объем курсовой работы — не менее 30 страниц (приложения не включаются в объем основного текста).

Таблиц и графический материал оформляются в соответствии с ГОСТ 7.32-2001 Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления.

В курсовой работе должно быть использовано не менее 30 основных источников. Список должен включать источники, как правило, опубликованные в течение последних 10 лет.

Сведения об источниках следует располагать в алфавитном порядке (относительно заголовка соответствующей источнику библиографической записи) и нумеровать арабскими цифрами. При этом независимо от алфавитного порядка впереди обычно идут нормативные акты.

В списке литературы сначала идут источники на русском языке, а потом — на иностранных языках (так же в алфавитном порядке).

Приложение оформляют как продолжение данного документа на последующих его листах, не нумеруют и информация не входит в объем основного текста.

Каждое приложение следует начинать с новой страницы с указанием справа наверху страницы слова «ПРИЛОЖЕНИЕ» заглавными буквами полужирным шрифтом. Допускается 12 кегль и одинарный интервал.

Приложение обозначают арабскими цифрами, и оно должно иметь заголовок, который записывают симметрично относительно текста с прописной буквы отдельной строкой.

Если приложений больше двух, в этом случае в содержание заносится наименование «ПРИЛОЖЕНИЯ».

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Перечень основной литературы:

1. Матальцкий М. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / М. А. Матальцкий, Г. А. Хацкевич. - Минск: Вышэйшая школа, 2017. - 592 с. - ISBN 978-985-06-2855-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/90834.html>

2. Чернова Н. М. Основы теории вероятностей : учебное пособие / Н. М. Чернова. - 3-е изд. - Москва, Саратов: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2020. - 107 с. - ISBN 978-5-4497-0348-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/89462.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Климов Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Г. П. Климов. - Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2011. - 368 с. - ISBN 978-5-211-05846-0. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/13115.html>

2. Гусак А. А. Теория вероятностей. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. - Минск: ТетраСистемс, 2013. - 287 с. - ISBN 978-985-536-385-0. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28244.html>

3. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие (курс лекций) / Е. О. Тарасенко, И. В. Зайцева, П. К. Корнеев, А. В. Гладков. - Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2018. - 229 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/92605.html>

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

<http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

<http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

<http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.

<http://www.mathedu.ru/> Электронная библиотека по математике и вопросам ее преподавания. Включает [популярные книги и пособия](#), [методические руководства](#), [учебники](#), [журналы](#), [исторические работы](#), [авторефераты](#), [диафильмы](#).

<http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

<http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).

<http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.