

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Методические указания по выполнению практических занятий

Направление подготовки 03.03.02 Физика
Направленность (профиль)
«Фундаментальная и прикладная физика»

**Ставрополь
2026**

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания рассчитаны на студентов-физиков и составлены с учетом существующих программ по электродинамике. Может быть использовано в качестве учебного пособия на физических факультетах университетов, а также на радиотехнических и других факультетах, на которых изучается теория электромагнитного поля. Часть задач, включенных в сборник, может быть полезной и для лиц, занимающихся более углубленным изучением вопросов электродинамики.

В начале каждого раздела приводится краткое теоретическое введение и основные законы. Излагаемые сведения не претендуют на полноту; более полное освещение соответствующих вопросов читатель найдет в литературе, указанной в конце каждого раздела. В предлагаемом сборнике приводятся довольно подробные и четкие указания на решение задач с ссылками на основные уравнения и формулы. В некоторых случаях приводится решение одной и той же задачи различными методами, либо указывается на возможность таких решений. Предлагаемый сборник имеет целью также иллюстрацию и конкретизацию основных положений теоретического курса электродинамики.

В книге используется международная система единиц СИ, имеются также сведения о гауссовой абсолютной системе единиц, так как она часто употребляется в физической литературе. Обозначения применяются общепринятые.

Освоение материала пособия имеет целью формирование набора общепрофессиональных и профессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 03.03.02 Физика. Задачи пособия заключаются в освоении студентами современных представлений в следующих областях знаний: электрические и магнитные явления в вакууме и сплошных средах; электромагнитное излучение; распространение электромагнитных волн и их взаимодействие с веществом; связь современных представлений электродинамики с основными положениями теории относительности и квантовой теории.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ТЕМА 1. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ПОЛЕЙ И ЗАРЯДОВ В ВАКУУМЕ. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА.....	5
ТЕМА 2. ЭЛЕКТРОСТАТИКА.....	26
ТЕМА 3. МАГНИТОСТАТИКА.....	33
ТЕМА 4. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ.....	40
ТЕМА 5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. ПРОБЛЕМА ИЗЛУЧЕНИЯ. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН.....	47
ТЕМА 6. ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ.....	54

ТЕМА 1. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ПОЛЕЙ И ЗАРЯДОВ В ВАКУУМЕ. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА.

Цель: Формирование набора общепрофессиональных и профессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 03.03.02 Физика. Изучение электрических и магнитных явлений в вакууме и сплошных средах.

Вопросы для изучения: Законы Ампера и Кулона. Системы единиц. Локальные характеристики электромагнитного поля. Сохранение электрического заряда. Уравнение непрерывности. Система уравнений Максвелла в вакууме в дифференциальной форме. Закон сохранения энергии применительно к электромагнитным явлениям. Законы сохранения импульса и момента импульса применительно к электромагнитным явлениям.

Теоретическая часть

1. Системы единиц электродинамических величин

При рассмотрении единиц и размерностей в теории электромагнетизма мы будем придерживаться традиции и примем в качестве основных независимых величин длину (l), массу (m) и время (t). Кроме того, воспользуемся общепринятым определением тока как скорости изменения заряда во времени ($I = dq/dt$). Это означает, что отношение заряда к току имеет размерность времени. Уравнение непрерывности, связывающее плотности заряда и тока, принимает при этом вид

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.1)$$

Для простоты мы будем вначале рассматривать лишь электромагнитные явления в свободном пространстве в отсутствие зарядов и токов.

Основным физическим законом электростатики является закон Кулона, определяющий силу взаимодействия двух точечных зарядов q и q' , расположенных на расстоянии r друг от друга. Этот закон можно записать в виде

$$F_1 = k_1 \frac{qq'}{r^2}. \quad (1.2)$$

Величину и размерность постоянного коэффициента k_1 можно либо определить из уравнения, если независимо определена величина и размерность единицы заряда, либо выбирать произвольным образом, задав тем самым единицу заряда. Требуется лишь, чтобы произведение $k_1 qq'$ имело размерность (ml^3t^{-2}).

Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ — производная величина, определяемая обычно как сила, действующая на единичный заряд. Можно было бы определить напряженность электрического поля более общим образом,

считая ее пропорциональной силе, действующей на единичный заряд, с коэффициентом пропорциональности, являющимся универсальной постоянной. При этом коэффициент пропорциональности может, вообще говоря, быть размерным, так что напряженность электрического поля не будет иметь размерности силы на единичный заряд. Однако, принимая такое чересчур общее определение E , мы ничего не выигрываем, так как E представляет собой *первую* производную характеристику поля, подлежащую определению. Лишь при определении последующих характеристик поля может оказаться удобным ввести в определяющие формулы размерные постоянные коэффициенты, с помощью которых можно согласовать величины и размерности этих характеристик поля с соответствующими свойствами напряженности электрического поля. Следовательно, без потери общности можно определить напряженность электрического поля точечного заряда q как силу, действующую на единичный заряд, так что, согласно (1.2),

$$E = k_1 \frac{q}{r^2}. \quad (1.3)$$

Во всех системах единиц используется это определение напряженности электрического поля.

В магнитостатике взаимодействие токов и определение магнитной индукции рассматривают исходя из закона Ампера. Согласно закону Ампера, приходящаяся на единицу длины сила взаимодействия двух бесконечно длинных параллельных проводов, находящихся на расстоянии d и несущих токи I и I' , равна

$$\frac{dF_2}{dl} = 2k_2 \frac{I I'}{d} \quad (1.4)$$

Здесь k_2 – коэффициент пропорциональности, аналогичный k_1 в формуле (1.2). Безразмерный численный множитель 2 введен в формулу (1.4) для большего удобства при определении коэффициента k_2 в дальнейшем. При связи размерностей тока и зарядов, устанавливаемого соотношением (1.1), соотношение между размерностями коэффициентов k_2 и k_1 уже определено. Как легко видеть из (1.2) и (4), отношение k_1/k_2 имеет размерность квадрата скорости ($l^2 t^{-2}$). Далее, путем сравнения величин механических сил (1.2) и (1.4) при известных зарядах и токах можно найти значение отношения k_1/k_2 для свободного пространства. Численная величина этого отношения оказывается очень близка к квадрату скорости света в свободном пространстве. Таким образом,

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2 \quad (1.5)$$

где c по величине и размерности совпадает со скоростью света [$c = (2,997930 \pm 0,000003) \cdot 10^{10}$ см/сек].

Вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ может быть определен на основании закона

взаимодействия токов Ампера как величина, пропорциональная силе, действующей на единичный ток, причем постоянный коэффициент пропорциональности α может быть выбран размерным, если это окажется удобным. Таким образом, величина (и размерность) магнитной индукции на расстоянии d от длинного прямолинейного проводника, несущего ток I , определяется формулой

$$B = 2k_2\alpha \frac{I}{d} \quad (1.6)$$

Размерность отношения напряженности электрического поля к магнитной индукции можно найти из соотношений (1.1), (1.3) (1.5) и (1.6). Легко видеть, что отношение E/B имеет размерность (l/α) .

Третьим и последним соотношением, на основании которого определяются единицы и размерности электродинамических величин, является закон электромагнитной индукции Фарадея, устанавливающий связь электрических и магнитных явлений. Дифференциальная форма этого экспериментально установленного закона, согласно которому электродвижущая сила, наведенная в контуре, пропорциональна скорости изменения магнитного потока через него, имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{E} + k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.7)$$

где k_3 – коэффициент пропорциональности. Так как связь между размерностями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ установлена, размерность k_3 можно выразить, через размерности ранее определенных величин, потребовав, чтобы оба члена в (1.7) имели одинаковую размерность. В результате оказывается, что k_3 имеет размерность α^{-1} . В действительности, коэффициент k_3 точно равен α^{-1} . Проще всего убедиться в этом, исходя из уравнений Максвелла для определенных выше полей:

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho,$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi k_2 \alpha \mathbf{J} + \frac{k_2 \alpha}{k_1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.8)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} + k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Для областей без источников можно, комбинируя второе и третье уравнения, получить волновое уравнение

$$\nabla^2 \mathbf{B} - k_3 \frac{k_2 \alpha}{k_1} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.9)$$

Скорость распространения волн, описываемых уравнением (1.9), определяется входящей в уравнение комбинацией констант. Как известно, эта скорость должна быть равна скорости света, так что

$$\frac{k_1}{k_3 k_2 \alpha} = c^2. \quad (1.10)$$

Из (1.5) и (1.10) следует равенство

$$k_3 = \frac{1}{\alpha}, \quad (1.11)$$

определяющее связь как размерностей, так и численных величин этих коэффициентов.

Различные системы электромагнитных единиц. Системы электромагнитных единиц отличаются выбором величин и размерностей различных введенных выше констант. Из-за наличия соотношений (1.5) и (1.11) лишь две константы (например, k_1 и k_3) могут (и должны) выбираться произвольно. Целесообразно, однако, свести в таблицу все четыре константы (k_1, k_2, α, k_3). Для наиболее употребительных систем единиц. Это и сделано в табл. 1. Заметим, что, за исключением размерностей величин, единицы в электромагнитной системе и системе СИ (МКС) очень похожи: они различаются лишь степенями десяти. Гауссова система и система Хевисайда – Лоренца отличаются лишь множителями 4π . Лишь в гауссовой системе и в системе единиц Хевисайда – Лоренца коэффициент k_3 имеет размерность. Как очевидно из соотношения (1.7), если k_3 имеет размерность обратной скорости, то размерность векторов **E** и **B** одинакова. Более того, из соотношения (1.7) следует, что при $k_3 = c^{-1}$ для электромагнитных волн в свободном пространстве **E** и **B** равны по величине.

До сих пор рассматривались лишь электромагнитные поля в свободном пространстве. Поэтому мы ограничивались лишь двумя полями **E** и **B**. Остается еще определить характеристики макроскопических полей **D** и **H**. Если усредненные электромагнитные свойства материальной среды описывать макроскопической поляризацией **P** и намагниченностью **M**, то векторы **D** и **H** определяются общими формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \lambda \mathbf{P}, \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \lambda' \mathbf{M} \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $\varepsilon_0, \mu_0, \lambda, \lambda'$ – постоянные коэффициенты. Мы не получим никакого преимущества, если будем считать размерности величин **D** и **P** или **H** и **M** различными. Поэтому коэффициенты λ и λ' следует считать безразмерными числами (в рационализированных системах $\lambda = \lambda' = 1$, в нерационализированных $\lambda = \lambda' = 4\pi$). Что же касается выбора коэффициентов ε_0 и μ_0 то **D** и **P** можно считать отличающимися по размерности от **E**, а **H** и **M** отличающимися от **B**. Окончательный выбор коэффициентов производится, исходя из соображений удобства и простоты.

Таблица 1

Величины и размерности электромагнитных констант для различных систем единиц

Размерность константы указана в скобках после ее численного значения. Через c обозначена скорость света в свободном пространстве ($c=2,998 \cdot 10^{10}$ см/сек = $2,998 \cdot 10^8$ м/сек). В четырех первых системах единиц в качестве основных единиц (l, m, t) приняты сантиметр, грамм и секунда. В системе МКС используются четыре основные единицы: метр, килограмм, секунда, единица заряда (q).

Система	k_1	k_2	α	k_3
Электростатическая	1	$c^{-2}(t^2 l^{-2})$	1	1
Электромагнитная	$c^2(l^2 t^{-2})$	1	1	1
Гауссова	1	$c^{-2}(t^2 l^{-2})$	$c(l t^{-1})$	$c^{-1}(t l^{-1})$
Хевисайда–Лоренца	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c^2}(t^2 l^{-2})$	$c(l t^{-1})$	$c^{-1}(t l^{-1})$
Рационализированная МКС (СИ)	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2$ $(ml^3 t^{-2} q^{-2})$	$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ $(ml q^{-2})$	1	1

Обычно стремятся придать макроскопическим уравнениям Максвелла относительно простую и изящную форму. Прежде чем перечислить возможные варианты указанного выбора, принятые в различных системах единиц, напомним, что для линейных изотропных сред материальные соотношения имеют вид

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (1.13)$$

Таким образом, постоянные ϵ_0 и μ_0 в уравнениях (1.12) представляют собой значения ϵ и μ для свободного пространства. Относительная диэлектрическая проницаемость вещества (часто называемая диэлектрической постоянной) определяется как безразмерное отношение ϵ/ϵ_0 , а относительная магнитная проницаемость (часто называемая просто проницаемостью) определяется как μ/μ_0 .

В табл. 2. приведены значения ϵ_0 и μ_0 , формулы, определяющие $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$, макроскопическая форма уравнений Максвелла и выражение для силы Лоренца в пяти наиболее употребительных системах единиц, перечисленных в табл. 1. Для каждой из систем единиц уравнение непрерывности, связывающее плотности токов и зарядов, имеет вид (1), как легко проверить, используя в каждом случае первые два уравнения Максвелла. Закон Ома также

записывается в одинаковом виде $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ (σ – проводимость) во всех системах единиц.

Таблица 2

**Величины ε_0 , μ_0 , $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, макроскопические уравнения Максвелла
и силы Лоренца в различных системах единиц**

В скобках указывается размерность величины. Через c обозначена скорость света, имеющая размерность (lt^{-1}) .

Система	ε_0	μ_0	$\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$	Макроскопические уравнения Максвелла	Сила Лоренца, действующая на единичный заряд
Электростатическая	1	c^{-2} (t^2l^{-2})	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = c^2\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$ $\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Электромагнитная	c^{-2} (t^2l^{-2})	1	$\mathbf{D} = \frac{1}{c^2}\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$ $\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Гауссова	1	1	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$ $\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$
Хевисайда–Лоренца	1	1	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right),$ $\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$
Рационализованная МКС (СИ)	$\frac{10^7}{4\pi c^2}$ $(q^2t^2m^{-1}l^{-3})$	$4\pi \cdot 10^{-7}$ (mlq^{-2})	$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$ $\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

Перевод формул и численных значений величин из гауссовой системы единиц в систему МКС (СИ). В настоящее время наибольшее распространение получили две системы электромагнитных единиц: гауссова и рационализованная система МКС (СИ). Система МКС весьма удобна при рассмотрении практических крупномасштабных явлений, особенно в различных технических приложениях. Гауссова система более пригодна при исследовании микроскопических проблем, в том числе электродинамики отдельных заряженных частиц.

Перевод из одной системы единиц в другую в общем случае может быть осуществлен с помощью табл. 3 и 4. Табл. 3 дает схему перевода *выражений и уравнений* и позволяет перевести любое уравнение из гауссовой системы в сис-

Таблица 3

Таблица перевода выражений и формул из одной системы единиц в другую

Величина	Гауссова система	Рационализованная система МКС (СИ)
Скорость света	c	$(\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2}$
Напряженность электрического поля (потенциал, напряжение)	$E (\Phi, V)$	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0} E (\Phi, V)$
Электрическая индукция	D	$\sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_0}} D$
Плотность заряда (заряд, плотность тока, ток, поляризация)	$\rho (q, J, I, P)$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \rho (q, J, I, P)$
Магнитная индукция	B	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} B$
Напряженность магнитного поля	H	$\sqrt{4\pi\mu_0} H$
Намагниченность	M	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} M$
Проводимость	σ	$\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}$
Диэлектрическая проницаемость	ε	$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$
Магнитная проницаемость	μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$
Сопротивление (импеданс)	$R (Z)$	$4\pi\varepsilon_0 R (Z)$
Индуктивность	L	$4\pi\varepsilon_0 L$
Емкость	C	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} C$

тему МКС, и наоборот. Имеются и более простые схемы, предназначенные

лишь для перехода из системы МКС в гауссову, возможны также и другие общие схемы. Однако табл. 3 позволяет при неизменности всех механических величин сразу, без всякого добавочного рассмотрения, осуществлять перевод величин, встречающихся в электродинамике и механике.

В табл. 3 при переходе от одной системы к другой масса, длина, время и другие неэлектродинамические величины не изменяются. Чтобы с помощью табл. 3 преобразовать любое уравнение, записанное в гауссовой системе единиц, в уравнение в системе МКС, следует в обеих частях уравнения заменить символы, перечисленные в столбце «гауссова система», на соответствующие символы системы МКС, помещенные в правом столбце. Допустимо и обратное преобразование. Так как длина и время не изменяются при переходе к другой системе, величины, размерности которых отличаются лишь степенями длины и времени, по возможности сгруппированы вместе.

Табл. 4 для перевода единиц позволяет перевести численное значение любой физической величины из системы единиц МКС в гауссову и обратно. Табл. 4 составлена так, что по известному значению рассматриваемой физической величины, выраженной в единицах МКС или в гауссовых единицах, можно определить ее значение в единицах другой системы. Таким образом, значения, приводимые в каждой строке, представляют одно и то же количество, выраженное в различных единицах. В тех случаях, когда существует общепринятое наименование единиц, оно приведено в таблице. В остальных случаях говорят просто о числе единиц МКС или гауссовых единиц.

Таблица перевода численных значений физических величин

Физическая величина	Обозначение	Рационализированная система МКС (СИ)	Гауссова система
Длина	l	1 метр (м)	10^2 см
Масса	m	1 килограмм (кг)	10^3 г
Время	t	1 секунда (сек)	1 сек
Сила	F	1 Ньютон (Н)	10^5 дин
Работа	W	} 1 Джоуль (Дж)	10^7 эрг
Энергия	U		
Мощность	P	1 Ватт (Вт)	10^7 эрг/сек
Заряд	q	1 Кулон (Кл)	$3 \cdot 10^9$ статкулон
Плотность заряда	ρ	1 Кулон · метр ⁻³	$3 \cdot 10^3$ статкулон · см ⁻³
Ток	I	1 Ампер (А) (Кл/сек)	$3 \cdot 10^9$ статампер
Плотность тока	J	1 Ампер · метр ⁻²	$3 \cdot 10^5$ статампер · см ⁻²
Напряженность электрического поля	E	1 Вольт/метр	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$ статвольт/см
Потенциал	Φ, V	1 Вольт (В)	$1/300$ статвольт
Диэлектрическая поляризация	P	1 Кулон · метр ⁻²	$3 \cdot 10^5$ статкулон · см ⁻²
Электрическая индукция	D	1 Кулон · метр ⁻²	$12\pi \cdot 10^5$ статкулон · см ⁻²
Проводимость	σ	1 1/(Ом · м)	$9 \cdot 10^9$ сек ⁻¹
Сопротивление	R	1 Ом (Ом)	$1/9 \cdot 10^{-11}$ сек · см ⁻¹
Емкость	C	1 Фарад (Ф)	$9 \cdot 10^{11}$ см
Магнитный поток	φ, F	1 Вебер (Вб)	10^8 максвелл
Магнитная индукция	B	1 Тесла (Тл)	10^4 гаусс
Напряженность магнитного поля	H	1 Ампер/метр	$4\pi \cdot 10^{-3}$ эрстед
Намагниченность	M	1 Ампер/метр	$\frac{10^4}{4\pi}$ гаусс
Индуктивность	L	1 Генри (Гн)	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$

1.2 Методы решения задач электродинамики

Метод суперпозиции. Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ нескольких неподвижных точечных зарядов $q_1, q_2 \dots$ равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из этих зарядов в отсутствие остальных, т.е.

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{r}_i, \quad (1.14)$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор, проведенный из заряда q_i в точку наблюдения. Это положение, являющееся обобщением опытных фактов, называется *принципом суперпозиции электростатических полей*. Возможно, что принцип суперпозиции нарушается на малых расстояниях порядка размеров атомных ядер (10^{-13} см) и меньше.

Суть метода расчета электростатических полей системы точечных зарядов заключается в расчете поля, создаваемого каждым из зарядов в отдельности $\mathbf{E}_i$, а затем векторного сложения полученных выражений согласно выражению (1.14). Формула (1.14) позволяет в принципе рассчитать напряженность электрического поля любой системы неподвижных зарядов. Если заряды не точечные, то их следует мысленно разделить на малые, части, чтобы каждую из них можно было считать точечным зарядом. При непрерывном распределении электричества сумма (1.14) переходит в интеграл.

Пример: Вычислить напряженность электрического поля равномерно заряженного тонкого диска на его геометрической оси.

Решение: Пусть σ – поверхностная плотность электричества, т.е. количество электричества (заряд), приходящееся на единицу площади диска. По условию величина σ одна и та же во всех точках плоскости диска. Из соображений симметрии ясно, что поле $\mathbf{E}$ в любой точке A геометрической

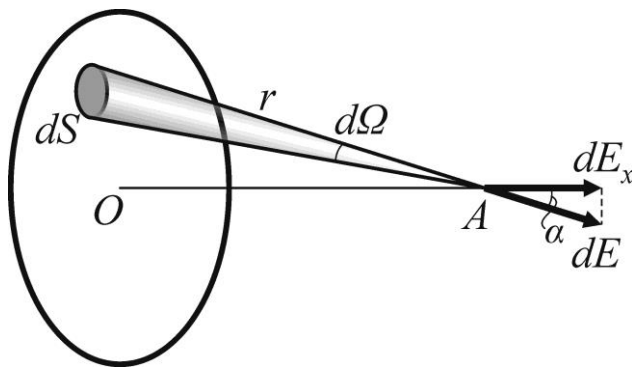


Рис. 1.1

оси (рис.1.1) должно быть направлено вдоль этой оси. Заметив это, возьмем в плоскости диска произвольную бесконечно малую площадку dS с зарядом $dq = \sigma dS$.

Напряженность поля, создаваемого этим зарядом в точке A , будет определяться выражением:

$$dE = \sigma dS / r^2,$$

а его проекция на ось OA

$$dE_x = \sigma dS \cos \alpha / r^2,$$

или

$$dE_x = \sigma d\Omega,$$

где $d\Omega = dS \cos \alpha / r^2$ – телесный угол, под которым площадка dS видна из точки

A.

Полное поле E найдется интегрированием выражения dE_x по телесному углу.

$$E = \int E_x = \int \sigma dS$$

Таким путем получаем

$$E = \sigma \Omega$$

где Ω – полный телесный угол, под которым диск виден из точки A . В частности, когда радиус диска бесконечно велик (бесконечная заряженная плоскость),

$$E = 2\pi\sigma.$$

Метод Гаусса основан на применении электростатической теоремы Гаусса: поток вектора напряженности электростатического поля $\mathbf{E}$ через любую замкнутую поверхность пропорционален алгебраической сумме всех зарядов, окруженных данной поверхностью

$$\Phi \equiv \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi q. \quad (1.15)$$

В качестве примера определим напряженность электростатического поля и потенциал шара радиусом a , равномерно заряженного зарядом q . Диэлектрическая проницаемость материала шара и окружающей среды ε . Начало координат поместим в центре шара. Т.к. заряд распределен симметрично относительно центра шара, то вектор $\mathbf{E}$ в сферических координатах имеет только радиальную составляющую E_r , зависящую от одной координаты r . Проведем на расстоянии $r > a$ от центра шара сферическую поверхность S_1 и применим теорему Гаусса. Т.к. для всех точек поверхности S_1 численное значение вектора $\mathbf{E}$ одинаково, а направление совпадает с направлением положительной нормали к поверхности S_1 , то

$$\int_{S_1} \mathbf{E}_{\text{внеш}} d\mathbf{S} = E_{\text{внеш}} 4\pi r^2 = \frac{4\pi q}{\varepsilon}$$

Откуда напряженность поля вне шара равна

$$E = \frac{q}{\varepsilon r^2}.$$

Потенциал точек вне шара

$$\varphi = -\int \frac{q}{\varepsilon r^2} dr + \text{const} = \frac{q}{\varepsilon r} + \text{const}$$

Пусть $\varphi = 0$ при $r = \infty$, тогда

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}.$$

Исследуем поле внутри шара. Проведем сферическую поверхность S_2 радиусом $r < a$. По теореме Гаусса

$$\oint_{S_2} \mathbf{E} d\mathbf{S} = E_{\text{внут}} 4\pi r^2 = \frac{4\pi q_{\text{внут}}}{\varepsilon}$$

Обозначим объемную плотность заряда

$$\frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \rho.$$

Заряд внутри поверхности S_2

$$q_{\text{внут}} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = q \frac{r_3}{a^3},$$

Поэтому

$$E_{\text{внут}} = \frac{qr}{\varepsilon a^2} = \frac{4\pi\rho r}{3\varepsilon};$$

$$\varphi = -\frac{2\pi\rho r^2}{3\varepsilon} + \text{const.}$$

Т.к. потенциал непрерывен, то при $r = a$ значение потенциала во внешней и внутренней областях должно быть одинаковым

$$\frac{4\pi a^2 \rho}{3\varepsilon} = -\frac{2\pi a^2 \rho}{3\varepsilon} + \text{const},$$

откуда

$$\text{const} = \frac{2\pi a^2 \rho}{\varepsilon}.$$

Поэтому

$$\varphi_{\text{внут}} = \frac{2\pi\rho(3a^2 - r^2)}{3\varepsilon}.$$

Метод изображений. Проще всего понять этот метод, рассмотрев случай проводящего полупространства. Пусть плоскость $z = 0$ разделяет проводник ($z < 0$) и диэлектрик ($z > 0$) с проницаемостью ε , в котором задано распределение свободных зарядов $\rho(\mathbf{r})$. Для нахождения потенциала φ в диэлектрике необходимо решить уравнение

$$\text{div}(\varepsilon \nabla \varphi) = -4\pi\rho$$

с граничным условием $\varphi(z=0)=0$. Предварительно произведем симметричное продолжение функции $\varepsilon(\mathbf{r})$ на область $z < 0$, т.е. положим

$$\varepsilon_c(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon(x, y, |z|). \quad (1.16)$$

Допустим, что известно некоторое решение φ_c уравнения

$$\text{div}(\varepsilon_c \nabla \varphi_c) = -4\pi\rho \quad (1.17)$$

во всем пространстве (обратим внимание на то, что $\rho = 0$ при $z < 0$). Рассмотрим функцию $\varphi' = -\varphi_c(x, y, -z)$. Используя свойство инвариантности оператора $\text{div}(\varepsilon_c \nabla)$ относительно отражения $z \rightarrow -z$, нетрудно убедиться, что φ' удовлетворяет однородному уравнению

$$\text{div}(\varepsilon \nabla \varphi') = 0 \quad (1.18)$$

в области $z > 0$. Очевидно, что φ' — потенциал, созданный отраженными источниками с плотностью $\rho' = -\rho(x, y, -z)$. Таким образом, решением исходной задачи является функция

$$\varphi' = \varphi_c(x, y, z) - \varphi_c(x, y, -z). \quad (1.19)$$

Физический смысл решения (1.19) ясен из самого способа его

построения: потенциалы φ_c и φ' создаются соответственно распределением заряда ρ при отсутствии проводящей среды и поверхностными зарядами, сосредоточенными на границе раздела $z = 0$.

В качестве наглядного примера, иллюстрирующего метод отражений, рассмотрим следующую задачу. Пусть плоскость $z = 0$, разделяет два диэлектрика с проницаемостями $\varepsilon_1(z < 0)$ и $\varepsilon_2(z > 0)$. в точке $A(0, 0, a)$ в области $z > 0$ расположен точечный заряд e . Используя метод отражений,

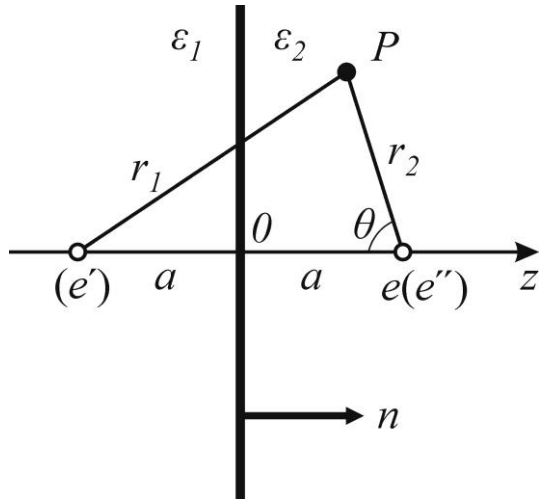


Рис. 1.2

потенциал поля будем искать в виде (рис. 1.2)

$$\varphi_1 = e''/(\varepsilon_1 r_2), \quad \varphi_2 = e/(\varepsilon_2 r_2) + e'/(\varepsilon_2 r_1). \quad (1.20)$$

Иначе говоря, кроме истинного заряда e мы взяли еще два фиктивных заряда e' и e'' , помещенных в симметричные точки. С помощью этих фиктивных зарядов как раз и описывается поле поверхностных зарядов, сосредоточенных на границе раздела $z=0$. Подставляя (1.20) в граничные условия

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0, \quad (\mathbf{n}[\varepsilon \nabla \varphi]) = 0,$$

получаем систему уравнений для определения неизвестных постоянных e' и e'' :

$$e''/\varepsilon_1 = (e + e')/\varepsilon_2, \quad e'' = e - e'.$$

Решение этой системы имеет вид

$$e' = e(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad e'' = 2e\varepsilon_1/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (1.21)$$

С его помощью можно вычислить поверхностную плотность η_p связанных зарядов на границе раздела

$$\eta_p = -(\mathbf{n}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)) = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{n}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)) = \frac{e \cos^3 \theta}{2\pi a^2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

Подсчитаем силу взаимодействия внесенного заряда e с этими связанными зарядами. Энергия взаимодействия равна

$$W'_e = \frac{1}{2} e \varphi'_2 = \frac{ee'}{4a\varepsilon_2} = \frac{e^2}{4a\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2},$$

откуда находим силу взаимодействия («силу изображения»):

$$F_a = -\frac{\partial W'_e}{\partial a} = \frac{e^2}{4a^2\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Метод инверсии основан на применении теоремы Кельвина, которая формулируется следующим образом: если $\varphi(\mathbf{r})$ – решение уравнения Лапласа, то $r^{-1}\varphi(\mathbf{r}r^{-2})$ также его решение при $r \neq 0$. Суть метода состоит в следующем. Допустим, что мы знаем решение уравнения Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ в некоторой области V . Совершим теперь преобразование инверсии радиуса a с центром в

некоторой точке $\mathbf{r}_0$:

$$\varphi'(\mathbf{r}) = a\varphi(\mathbf{r}')/R, \quad \mathbf{r}' \equiv a^2\mathbf{R}/R^2, \quad (1.22)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. При этом преобразовании область V перейдет в некоторую другую область V' , а уравнение Пуассона, согласно теореме Кельвина, примет вид

$$\Delta\varphi' = (a/R)^5 \Delta'\varphi(\mathbf{r}') = -4\pi(a/R)^5 \rho(\mathbf{r}'), \quad (1.23)$$

что эквивалентно введению в области V' нового распределения зарядов с плотностью

$$\rho'(\mathbf{r}) = (a/R)^5 \rho(\mathbf{r}'). \quad (1.24)$$

Таким образом, преобразование инверсии связывает между собой решения двух разных задач электростатики.

Используем метод инверсии для решения следующей задачи. Пусть имеется заземленная проводящая сфера

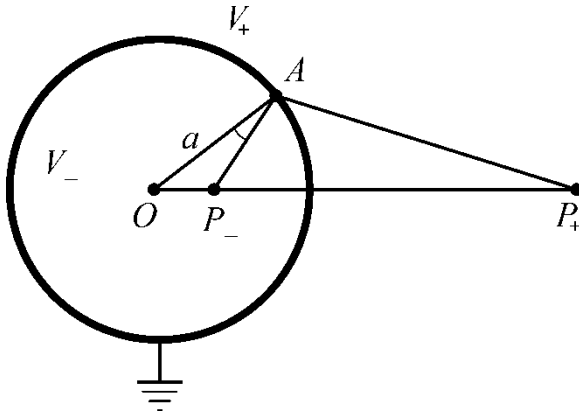


Рис. 1.3

радиуса a и вне ее задано некоторое распределение зарядов $\rho_+(\mathbf{r})$. Введем обозначения $V_{\pm}$ для областей пространства вне и внутри сферы (рис. 1.3). Будем искать решение уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho_+ \quad (1.25)$$

в области V_+ , удовлетворяющее граничному условию $\varphi = 0$ на поверхности сферы, в виде

$$\varphi = \int_{V_+} \frac{\rho_+(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \varphi_0, \quad (1.26)$$

где φ_0 – некоторое решение уравнения Лапласа.

Для нахождения φ_0 поместим в области V_- инвертированные заряды, плотность которых, согласно (1.24), равна

$$\rho_-(\mathbf{r}) = -(a/R)^5 \rho_+(a^2 \mathbf{r}/r^2), \quad (1.27)$$

и рассмотрим создаваемый ими потенциал

$$\varphi_0 = \int_{V_-} \frac{\rho_-(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (1.28)$$

Чтобы убедиться в выполнении граничного условия, вычислим потенциал φ_0 на поверхности сферы в некоторой точке A (рис. 1.3). Для удобства введем обозначения ($OP_{\pm} = r_{\pm}$, $AP_{\pm} = R_{\pm}$) и воспользуемся тем, что условие инверсии $r_+ r_- = a^2$ эквивалентно подобию $\triangle OAP_-$ и $\triangle OAP_+$, из которого следует, что

$$r_+/a = a/r_- = R_+/R_- = \text{const}. \quad (1.29)$$

Этот факт не удивителен и является выражением известного свойства окружности быть геометрическим местом точек, для которых отношение расстояний до двух заданных точек постоянно (окружность Аполлония).

Используя (1.29), а также закон преобразования при инверсии элемента объема

$$dV_+ = r_+^2 dr_+ d\Omega = (a/r_-)^6 dV_-,$$

для точек на поверхности сферы имеем

$$\int_{V_-} \frac{\rho_-(P_-)}{R_-} dV' = - \int_{V_+} \frac{\rho_+(P_+) r'_+}{a R_-} dV' = - \int_{V_+} \frac{\rho_+(P_+)}{R_+} dV',$$

что эквивалентно выполнению граничного условия $\varphi = 0$. Таким образом, решение задачи имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{V_+} \frac{\rho_+(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \int_{V_-} \left(\frac{a}{r'} \right)^5 \rho_+ \left[\left(\frac{a}{r'} \right)^2 \mathbf{r}' \right] \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Метод конформного отображения. Поле, зависящее только от двух декартовых координат (x, y) , называют плоским. Мощным средством для решения плоских задач электростатики является теория функций комплексного переменного. Основания для применения этой теории заключаются в следующем.

Электростатическое поле в пустоте удовлетворяет двум уравнениям: $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ и $\text{div } \mathbf{E} = 0$. Первое из них позволяет ввести потенциал поля согласно $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$. Второе же уравнение показывает, что наряду с φ можно ввести также и «векторный потенциал» поля $\mathbf{A}$ согласно $\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{A}$. В плоском случае вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости xu и зависит только от этих двух координат. Соответственно, вектор $\mathbf{A}$ можно выбрать так, чтобы он был везде направлен перпендикулярно к плоскости xu . Тогда компоненты напряженности выражаются в виде производных от φ или $\mathbf{A}$ согласно

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial A}{\partial x} \quad (1.30)$$

Но такие соотношения между производными функций φ и A с математической точки зрения совпадают с известными условиями Коши – Римана, выражающими тот факт, что комплексное выражение

$$w = \varphi - iA \quad (1.31)$$

является аналитической функцией комплексного аргумента $z = x + iy$. Это значит, что функция $w(z)$ имеет в каждой точке определенную производную, не зависящую от направления, в котором она берется. Так, дифференцируя в направлении оси x , найдем, что

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial A}{\partial x}$$

или

$$\frac{dw}{dz} = -E_x + iE_y. \quad (1.32)$$

Функция w называется комплексным потенциалом. Силовые линии поля определяются уравнением

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}.$$

Выражая E_x и E_y через производные от A , перепишем это уравнение в виде

$$dx \frac{\partial A}{\partial x} + dy \frac{\partial A}{\partial y} = dA = 0,$$

откуда $A(x, y) = \text{const}$. Таким образом, линии постоянных значений мнимой части функции $w(z)$ представляют собой силовые линии поля. Линии же постоянных значений ее вещественной части являются эквипотенциальными линиями. Взаимная ортогональность этих двух семейств линий обеспечивается уже исходными соотношениями (1.30), согласно которым

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} = 0.$$

Как вещественная, так и мнимая части аналитической функции $w(z)$ в равной степени удовлетворяют уравнению Лапласа. Поэтому с тем же успехом можно принять $\text{Im } w$ в качестве потенциала поля. Соответственно силовые линии будут тогда даваться уравнениями $\text{Re } w = \text{const}$. Вместо (1.31) будем при этом иметь $w = A + i\varphi$.

Поток напряженности электрического поля через какой-либо отрезок эквипотенциальной линии дается интегралом

$$\int E_n dl = - \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl,$$

где dl есть элемент эквипотенциальной линии, а $\mathbf{n}$ – направление нормали к ней. Согласно соотношениям (1.30) имеем $\partial \varphi / \partial n = -\partial A / \partial l$, причем выбор знака предполагает, что если смотреть в направлении $\mathbf{n}$, то положительное направление l – влево. Поэтому

$$\int E_n dl = \int \frac{\partial A}{\partial l} dl = A_2 - A_1,$$

где A_1 и A_2 – значения A на обоих концах отрезка. В частности, поток электрического поля через замкнутый контур равен $4\pi e$, где e – полный заряд, охватываемый этим контуром (отнесенный к единице длины проводников вдоль оси z). Поэтому

$$e = \frac{1}{4\pi} \Delta A, \quad (1.33)$$

где ΔA – изменение A при обходе замкнутой эквипотенциальной линии в направлении против часовой стрелки.

Простейшим примером комплексного потенциала является потенциал поля заряженной прямой нити (совпадающей с осью z). Напряженность этого поля дается формулами

$$E_r = \frac{2e}{r}, \quad E_\theta = 0,$$

где r, θ – полярные координаты в плоскости x, y , а e – заряд единицы длины нити. Соответствующий комплексный потенциал

$$w = -2e \ln z = -2e \ln r - 2ie\theta. \quad (1.34)$$

Если же заряженная нить проходит не через начало координат, а через точку (x_0, y_0) , то комплексный потенциал

$$w = -2e \ln(z - z_0), \quad (1.35)$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$.

С математической точки зрения функциональное соотношение $w = w(z)$ осуществляет конформное отображение плоскости комплексного переменного z на плоскость комплексного переменного w . Пусть C есть контур сечения проводника в плоскости x, y , а φ_0 – потенциал этого проводника. Из всего сказанного выше ясно, что задача об определении поля, создаваемого этим проводником, сводится к нахождению такой функции $w(z)$, которая отображала бы контур C в плоскости z на линию $w = \varphi_0$, параллельную оси ординат в плоскости w ; тогда вещественная часть $\operatorname{Re} w$ даст потенциал рассматриваемого поля (если же функция $w(z)$ отображает контур C на линию, параллельную оси абсцисс, то потенциал дается функцией $\operatorname{Im} w$).

В качестве примера определим потенциал вблизи заземленного угла, образованного плоскостями $x = 0$, $y = 0$. Пусть поле направленно вдоль оси OX . Для такого поля

$$w = -|\mathbf{E}|(x + iy) = \varphi + iA,$$

$$\varphi = -|\mathbf{E}|x, \quad A = -|\mathbf{E}|y$$

Конформным преобразованием $w = \Psi z^2 i$ преобразуем угол в полуплоскость. Комплексный потенциал равен

$$w = \varphi + iA = \Psi z^2 i = \Psi (x + iy)^2 i$$

Отсюда

$$\varphi = -2\Psi xy,$$

$$A = \Psi(x^2 - y^2).$$

1.3 Уравнения Максвелла

В интегральной форме уравнения Максвелла имеют вид

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}, \quad (1.36)$$

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad (1.37)$$

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi \int \rho dV, \quad (1.38)$$

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (1.39)$$

В дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.40)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.41)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (1.42)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.43)$$

Дифференциальные уравнения необходимо дополнить граничными условиями, которым должно удовлетворять электромагнитное поле на границе раздела двух сред:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \quad (1.44)$$

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (1.45)$$

$$[\mathbf{nH}_2] - [\mathbf{nH}_1] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}. \quad (1.46)$$

Здесь σ – поверхностная плотность заряда, $\mathbf{i}$ – поверхностная плотность тока проводимости на рассматриваемой границе раздела.

Для того, чтобы уравнения (1.36) – (1.39) и (1.40) – (1.43) составляли полную систему необходимо дополнить их материальными уравнениями, характеризующими индивидуальные свойства среды. Наиболее просты материальные уравнения для слабых полей, медленно меняющихся во времени. В этом случае для изотропных неферромагнитных и несегнетоэлектрических сред материальные уравнения имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.47)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.48)$$

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}. \quad (1.49)$$

где ε , μ , λ – диэлектрическая и магнитная проницаемости и проводимость среды.

Задачи для самостоятельного решения

1. Заряд $q > 0$ равномерно распределен по тонкому кольцу радиусом a . Найти напряженность E электрического поля на оси кольца как функцию расстояния z от его центра.

2. Тонкая прямая нить длиной $2l$ заряжена равномерно зарядом q . Найти напряженность E поля в точке, отстоящей на расстоянии x от центра нити и расположенной симметрично относительно её концов.

3. Определить поле бесконечного прямого цилиндра равномерно заряженного с объемной плотностью заряда ρ .

4. а) Чему равна напряженность поля в центре шестиугольника со стороной a , по вершинам, которого расположены шесть зарядов q .

б) в случае, если три заряда равны $+q$ и три $-q$.

5. Определить напряженность поля бесконечной плоскопараллельной пластинки толщиной $2a$ равномерно заряженной с объемной плотностью заряда ρ .

6. Вычислить потенциал и напряженность электростатического поля внутри и вне проводящей сферы радиуса a , по поверхности, которой равномерно распределен заряд e .

7. Вычислить индукцию магнитного поля, возбуждаемого прямым бесконечным током, на расстоянии r от его оси.

8. Ток $20a$ течет по бесконечно длинному проводу, согнутому под углом в 60° . Определить индукцию магнитного поля в точке, лежащей на биссектрисе угла на расстоянии 5 см от его вершины.

9. Линейный ток I циркулирует по окружности радиуса a . Вычислить индукцию магнитного поля в точке, лежащей на перпендикуляре к плоскости тока на расстоянии x от центра тока.

10. Вычислить напряженность электростатического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости.

11. Вычислить потенциал электростатического поля, создаваемого шаром радиуса R , по объему которого равномерно распределен заряд e .

12. Поверхность бесконечного кругового цилиндра (радиуса a) равномерно заряжена так, что на единицу его длины приходится заряд λ . Определить напряженность поля внутри и вне цилиндра.

13. То же для цилиндра, объемно заряженного с плотностью ρ .

14. Точечный заряд $+e$ находится на расстоянии a от плоской поверхности бесконечного проводника, занимающего все левое полупространство. Определить поле вне проводника. Найти также поверхностную плотность отрицательных зарядов, индуцированных на поверхности проводника.

15. То же для бесконечной прямой равномерно заряженной нити, параллельной плоской границе проводника и отстоящей от нее на расстоянии a .

16. Точечный заряд $+e$ находится на расстоянии a от центра заземленной проводящей сферы радиуса R . Определить потенциал точечного заряда с учетом искажения, вызываемого отрицательными зарядами, индуцированными на поверхности сферы. Найти также силу, с которой заряд притягивается к сфере.

17. Бесконечная прямая заряженная нить (с зарядом $+\lambda$ на единицу длины) параллельна бесконечному заземленному проводящему цилиндру (радиуса R) и отстоит расстоянием h от его оси. Определить: 1) поле вне цилиндра; 2) плотность зарядов, индуцированных на поверхности цилиндра, и 3) силу (на единицу длины), с которой нить притягивается к цилиндру.

18. Чему равен линейный коэффициент преобразования $\omega = z^2$? Каков геометрический и физический смысл коэффициента преобразования?

19. Преобразование $\omega = \ln z$ при линиях равного потенциала $u = \text{const}$ представляет на плоскости z поле заряженной оси, помещенной в начале координат. Что будут представлять на плоскости z преобразования

$$\omega = \ln(z - a); \quad \omega = \ln \frac{z - a}{z + a}, \quad \text{где } a - \text{постоянная?}$$

20. Методом инверсии определить поле точечного заряда расположенного а) вблизи заземленной проводящей плоскости и б) заземленной проводящей сферы.

21. Методом инверсии определить поле проводящего цилиндра в присутствии параллельной ему заряженной нити.

Вопросы для самопроверки.

1. Законы Ампера и Кулона.

2. Системы единиц.
3. Локальные характеристики электромагнитного поля.
4. Сохранение электрического заряда.
5. Уравнение непрерывности.
6. Система уравнений Максвелла в вакууме в дифференциальной форме.
7. Закон сохранения энергии применительно к электромагнитным явлениям.
8. Законы сохранения импульса и момента импульса применительно к электромагнитным явлениям.

Список литературы

1. Васильев А.Н. Классическая электродинамика. Краткий курс лекций. – БХВ-Петербург, 2010, 288 с.
2. Власов А.А. Макроскопическая электродинамика. – М.: Либроком, 2010, 240 с.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндц М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6. Электродинамика. – М.: Либроком, 2012.
4. Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике. – М.: Лань, 2008, 320 с.
5. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности. – М.: Лань, 2010, 480 с.
6. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. Ч.1. Микроскопическая теория. – М.: НИЦ «Регулярная хаотическая динамика», 2005, 736 с.
7. Мултановский В.В., Василевский А.С. Курс теоретической физики. Классическая электродинамика. – М.: Дрофа, 2006, 352 с.

ТЕМА 2. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Цель: Формирование набора общепрофессиональных и профессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 03.03.02 Физика. Изучение электростатических полей в вакууме и сплошных средах.

Вопросы для изучения: Уравнения электростатики и граничные условия при наличии заряженных поверхностей. Электростатическое поле в вакууме. Уравнения Лапласа и Пуассона. Проводники в электростатическом поле. Дипольное разложение потенциала. Мультипольные разложения потенциалов. Энергия электрического поля. Энергия диполя в электрическом поле.

Теоретическая часть

Основные понятия теории электростатических полей

Напряженность электрического поля в вакууме удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (2.1)$$

Потенциал и напряженность электрического поля связаны соотношениями

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{E} d\mathbf{r}, \quad \varphi(\mathbf{r}_0) = 0. \quad (2.2)$$

Потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.3)$$

Общее решение уравнения Пуассона:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r}. \quad (2.4)$$

Потенциал непрерывен и конечен во всех точках пространства, где нет точечных зарядов, в частности, на заряженной поверхности, разделяющей некоторые области 1 и 2, $\varphi_1 = \varphi_2$. Нормальные производные φ терпят разрыв на заряженной поверхности:

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (2.5)$$

Нормаль n направлена из области 1 в область 2.

Энергия электростатического поля в вакууме вычисляется по одной из следующих формул:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS, \quad (2.6)$$

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E^2 dV. \quad (2.7)$$

Плотность энергии электрического поля в вакууме:

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2. \quad (2.9)$$

На 1 м^2 поверхности проводника со стороны электрического поля действует сила, направленная по внешней нормали к его поверхности:

$$f = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}. \quad (2.10)$$

Основные уравнения постоянного электрического поля в диэлектриках имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (2.11)$$

Уравнение Пуассона

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (2.12)$$

Общее решение уравнения Пуассона:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r}. \quad (2.13)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика, определяется из соотношения:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (2.14)$$

Объемная и поверхностная плотности связанных зарядов диэлектрика соответственно равны

$$\rho_{\text{связ.}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (2.15)$$

$$\sigma_{\text{связ.}} = P_{1n} - P_{2n}. \quad (2.16)$$

где $\mathbf{P}$ – вектор поляризации диэлектрика.

Полный потенциал электрического поля при наличии диэлектрика:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\int \frac{(\rho + \rho_{\text{связ.}}) dV}{r} + \int \frac{(\sigma + \sigma_{\text{связ.}}) dS}{r} \right). \quad (2.17)$$

Определение вектора электрической индукции $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2.18)$$

Для широкого класса диэлектриков имеет место следующее соотношение: $\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}$, где α – поляризуемость диэлектрика, связанная с диэлектрической проницаемостью соотношением: $\alpha = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)$.

Электростатическая теорема Гаусса для электрического поля при наличии в нем диэлектриков формулируется следующим образом:

$$\oint_S \mathbf{D} dS = q. \quad (2.19)$$

Граничные условия для электрического поля при наличии диэлектриков:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad (2.20)$$

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (2.21)$$

Плотность энергии электрического поля в диэлектриках:

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D}. \quad (2.22)$$

Объемная плотность пондеромоторных сил, действующих на диэлектрики со стороны электростатического поля:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \alpha \nabla E^2. \quad (2.23)$$

Емкость C конденсатора называется отношение заряда на одной из его обкладок к разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (2.24)$$

Примеры решения задач

1. По объему шара (радиуса a) равномерно распределен заряд e . Определить собственную энергию электростатического поля, возбуждаемого шаром.

Решение

Собственную энергию электростатического поля в отсутствии в нем диэлектриков можно вычислить, пользуясь формулой:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS \quad (1)$$

(где V – объем той части пространства, где имеются объемно распределенные заряды, т.е. где $\rho \neq 0$, и S – поверхности, на которых имеются поверхностно распределенные заряды $\sigma \neq 0$) либо формулой:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E^2 dV \quad (2)$$

где интегрирование распространяется на всю бесконечную область пространства, занимаемого электрическим полем.

Применяя к расчету электрической энергии заряженного шара формулу (1), заметим, что в рассматриваемом случае всюду $\sigma = 0$, а $\rho \neq 0$ лишь внутри шара, где

$$\varphi_i = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right).$$

Поэтому

$$W = \frac{\rho^2}{4\varepsilon_0} \int_{V_{\text{шара}}} \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) dV. \quad (3)$$

Так как подынтегральное выражение в (3) не зависит от углов θ и α , элемент объема можно выбрать в виде $dV = 4\pi r^2 dr$. Подстановка dV в формулу (3) и интегрирование по r в пределах от 0 до a дают:

$$W = \frac{\pi \rho^2}{\varepsilon_0} \int_0^a \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) r^2 dr = \frac{4\pi a^5 \rho^2}{15\varepsilon_0}.$$

Подставляя сюда величину объемной плотности зарядов, получаем:

$$W = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 a}. \quad (4)$$

Покажем теперь, как пользоваться формулой (2). Прежде всего ее следует переписать в виде:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\int E_i^2 dV + \int E_e^2 dV \right), \quad (5)$$

где E_i и E_e – напряженности поля соответственно внутри и вне шара; они равны:

$$E_i = \frac{er}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \quad \text{и} \quad E_e = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Подставляя в (5) также $dV = 4\pi r^2 dr$ и выполняя интегрирование, находим

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \left(\int_0^a \frac{e^2}{a^6} r^4 dr + \int_a^\infty \frac{e^2}{r^2} dr \right) = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 a}.$$

2. Для системы двух бесконечно длинных и параллельных цилиндрических проводников (произвольного сечения), имеющих заряды $\pm e$, известен потенциал $\varphi(x, y)$, который на поверхностях проводников принимает постоянные значения φ_1 и φ_2 и всюду в пространстве между ними удовлетворяет уравнению Лапласа. Какова взаимная емкость (на единицу длины) указанной системы проводников?

Решение

Полная электрическая энергия, приходящаяся на единицу длины рассматриваемой системы проводников, равна:

$$W = \frac{1}{2} \left(\int_{S_1} \sigma_1 \varphi_1 dS + \int_{S_2} \sigma_2 \varphi_2 dS \right),$$

где интегрирование производится по боковым поверхностям S_1 и S_2 цилиндров единичной длины. Ввиду того, что цилиндры несут равные по абсолютной величине заряды ($\sigma_2 = -\sigma_1$)

$$W = \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1) \int_{S_2} \sigma_2 dS.$$

Подставляя сюда

$$\sigma_2 = -\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{S_2} \quad \text{и} \quad dS = dL,$$

где dL – элемент длины кривой L_2 , лежащей в сечении одного из цилиндров, находим:

$$W = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varphi_1 - \varphi_2) \oint_{L_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dL. \quad (1)$$

С другой стороны, рассматривая данную систему проводников как конденсатор, ее полную электрическую энергию можно записать в виде:

$$W = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 C. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), находим величину взаимной емкости рассматриваемой системы проводников

$$C = \frac{\varepsilon_0}{\varphi_1 - \varphi_2} \oint_{L_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dL.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Считая, что заряды протонов равномерно распределены по объему ядра, представляющего собой шар радиуса R , подсчитать энергию электростатического взаимодействия протонов в ядре атома с порядковым номером Z .
2. В равномерно заряженном шаре с объемной плотностью заряда ρ имеется шарообразная полость, центр которой расположен на расстоянии a от центра шара. Найти напряженность электрического поля внутри полости, внутри шара и снаружи шара. Радиусы шара и полости равны соответственно R и R' .
3. Вычислить энергию и емкость сферического конденсатора.
4. Определить взаимную емкость единицы длины двойной проводки, т. е. системы из двух бесконечных и параллельных проводящих цилиндров радиуса a с осями, отстоящими друг от друга на расстоянии $h > a$.
5. Записать энергию системы заряженных проводников через их потенциалы, коэффициенты емкости и коэффициенты электростатической индукции.
6. Определить период гармонических колебаний жесткого диполя с моментом $p = eL$ во внешнем однородном и постоянном поле E_0 , считая, что с каждым из зарядов $+e$ и $-e$ связана масса m .
7. В однородное электростатическое поле с напряженностью $E_0 = \text{const}$ помещен металлический шар радиусом a . Определить напряженность электрического поля вокруг шара, если диэлектрическая проницаемость среды ε .
8. Проводящая сфера радиуса a , помещенная в однородное электрическое поле E_0 , рассечена на две половины плоскостью, перпендикулярной к направлению линий поля. С какой силой отталкиваются полусферы?
9. Вычислить силу, действующую на единицу длины бесконечной прямой и равномерно заряженной нити, параллельной плоской границе раздела двух диэлектрических сред и расположенной от нее на расстоянии d .

10. Исследовать поле двухслойного цилиндрического конденсатора длиной l и определить его емкость. Диэлектрическая проницаемость внутреннего слоя ε_1 , внешнего – ε_2 . Радиусы цилиндрических слоев a_1 и a_2 соответственно. Заряд конденсатора равен q .

11. Центр проводящей сферы радиуса R находится на плоской границе раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 каждая. Заряд сферы e . Найти потенциал системы, вектор электрической индукции и распределение поверхностного заряда на сфере.

12. После погружения конденсатора в среду с проводимостью λ сопротивление между его зажимами оказалось равным R . Показать, что независимо от формы его пластин имеет место соотношение $RC = \varepsilon/\lambda$, где ε – диэлектрическая проницаемость среды, а C – емкость конденсатора в среде.

13. Вычислить емкость C сферического конденсатора, внутренний и внешний радиусы которого равны соответственно R_1 и R_2 . Конденсатор наполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos^2 \theta,$$

где θ – полярный угол.

14. Определить электрическое поле внутри и вне равномерно поляризованного диэлектрического шара (в отсутствии внешнего поля), не прибегая к рассмотрению механизма поляризации вещества.

15. Определить вектор поляризации однородного диэлектрического шара, помещенного во внешнее однородное поле E_0 . Найти также потенциалы поля внутри и вне диэлектрического шара.

16. Диэлектрический шар (радиуса a), находящийся во внешнем однородном поле E_0 , разрезан на две половины плоскостью, перпендикулярной к направлению поля. Определить силу притяжения между полушариями.

Вопросы для самопроверки.

1. Уравнения электростатики и граничные условия при наличии заряженных поверхностей.
2. Электростатическое поле в вакууме.
3. Уравнения Лапласа и Пуассона.
4. Проводники в электростатическом поле.
5. Дипольное разложение потенциала.
6. Мультипольные разложения потенциалов.
7. Энергия электрического поля.
8. Энергия диполя в электрическом поле.

Список литературы

1. Васильев А.Н. Классическая электродинамика. Краткий курс лекций. – БХВ-Петербург, 2010, 288 с.
2. Власов А.А. Макроскопическая электродинамика. – М.: Либроком, 2010, 240 с.

3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндц М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6. Электродинамика. – М.: Либроком, 2012.
4. Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике. – М.: Лань, 2008, 320 с.
5. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности. – М.: Лань, 2010, 480 с.
6. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. Ч.1. Микроскопическая теория. – М.: НИЦ «Регулярная хаотическая динамика», 2005, 736 с.
7. Мултановский В.В., Василевский А.С. Курс теоретической физики. Классическая электродинамика. – М.: Дрофа, 2006, 352 с.

ТЕМА 3. МАГНИТОСТАТИКА

Цель: Формирование набора общепрофессиональных и профессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 03.03.02 Физика. Изучение магнитостатических полей в вакууме и сплошных средах.

Вопросы для изучения: Уравнения магнитостатики. Граничные условия. Векторный потенциал. Закон Био – Савара. Поле элементарного линейного тока. Энергия магнитного поля постоянных токов. Самоиндукция и взаимоиנדукция. Сила и момент сил, действующие на ограниченное распределение тока во внешнем магнитном поле.

Теоретическая часть

Основные понятия теории магнитостатических полей

Уравнения Максвелла для постоянного магнитного поля в вакууме имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (3.2)$$

Размерности магнитной индукции $\mathbf{B}$ и напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ в системе единиц СИ оказываются разными: магнитная индукция $\mathbf{B}$ имеет размерность $[\text{Вб/м}^2] = 1 \text{ Тл}$, напряженность поля $\mathbf{H}$ – $[\text{А/м}]$. В абсолютной гауссовой системе единиц размерности векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ одинаковы.

Учитывая, что $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, магнитную индукцию $\mathbf{B}$ можно выразить через векторный потенциал магнитного поля

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (3.3)$$

определяемый из уравнения:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (3.4)$$

Общее решение уравнения (3.3) имеет вид:

а) для объемно распределенных токов

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j} \frac{dV}{r}, \quad (3.5)$$

б) для линейных токов

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}}{r}. \quad (3.6)$$

Закон Био-Савара:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (3.7)$$

Закон Эрстеда (теорема о циркуляции или закон полного тока):

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S j_n dS \quad (3.8)$$

или

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum_i I_i \quad (3.9)$$

где под $\sum_i I_i$ понимается алгебраическая сумма токов, пронизывающих площадку S , натянутую на контур интегрирования L .

При расчете магнитного поля в магнетиках в формулах (3.2), (3.4), (3.5), (3.6) и (3.7) вместо μ_0 следует писать $\mu_0\mu$, где μ – относительная магнитная проницаемость магнетика.

Закон Ампера: сила, действующая на замкнутый контур с током со стороны внешнего магнитного поля, равна:

$$\mathbf{F} = I \oint_L [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (3.10)$$

Поток индукции магнитного поля, возбуждаемого током I_1 , через контур тока I_2 :

$$\Phi_{12} = I_1 L_{12}, \quad (3.11)$$

где L_{12} – коэффициент взаимной индукции токов I_1 и I_2 , определяемый (в случае линейных токов) по формуле:

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}. \quad (3.12)$$

Силовая функция тока во внешнем магнитном поле (потенциальная энергия контура в магнитном поле):

$$U = -I\Phi, \quad (3.13)$$

где Φ – магнитный поток внешнего магнитного поля через контур тока I .

Энергия магнитного поля, возбуждаемого постоянным током I :

$$W = \frac{1}{2} I^2 L_{11} \quad (3.14)$$

или

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV. \quad (3.15)$$

Формула (3.14) следующим образом обобщается для системы, состоящей из нескольких взаимодействующих между собой замкнутых токов:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_i I_j L_{ij}. \quad (3.16)$$

Если известны индукция и напряженность магнитного поля во всем пространстве, то энергию магнитного поля можно вычислить, пользуясь формулой:

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (3.17)$$

Примеры решения задач

1. Ток 20а течет по бесконечно длинному проводу, согнутому под углом в 60° . Определить индукцию магнитного поля в точке, лежащей на биссектрисе угла на расстоянии 5 см от его вершины.

Решение

Индукция магнитного поля в точке P (рис. 3.1) перпендикулярна к плоскости чертежа, причем $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ где $\mathbf{B}_1$ – поле, возбуждаемое в точке P током, текущим вдоль провода AB , а $\mathbf{B}_2$ – поле, создаваемое в той же точке током, текущим вдоль провода BC . По закону Био–Савара индукция магнитного поля линейного тока

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{R}]}{R^3}, \quad (1)$$

где $d\mathbf{l}$ – элемент тока, $\mathbf{R}$ – радиус-вектор, соединяющий элемент тока с точкой наблюдения P , а интегрирование ведется вдоль контура тока. Для прямолинейного тока вектор $[d\mathbf{l}, \mathbf{R}]$, входящий в выражение (1), имеет одинаковое направление для всех элементов тока, так что вектор $\mathbf{B}$ оказывается направленным по касательной к окружности, проходящей через точку наблюдения P , а его абсолютная величина

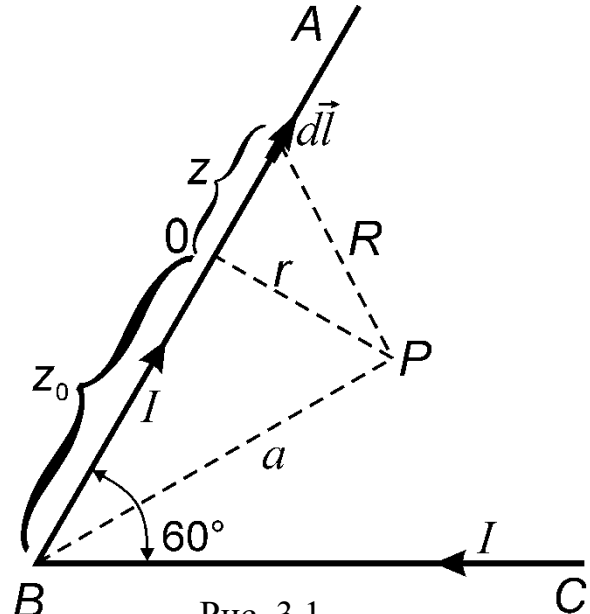


Рис. 3.1

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{R^3} [d\mathbf{l}, \mathbf{R}]. \quad (2)$$

Подставляя сюда

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad |d\mathbf{l}| = dz, \quad [d\mathbf{l}, \mathbf{R}] = [d\mathbf{l}, \mathbf{r}] = r dz$$

и интегрируя по z в пределах от $-z_0$ до $+\infty$, получим:

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \int_{-z_0}^{\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

Интеграл, входящий в (3), вычисляется следующим образом. Прежде всего, очевидно, что

$$\int \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^2} \left\{ \int \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \int \frac{z^2 dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right\};$$

применяя затем ко второму интегралу, стоящему в правой части этого равенства, правило интегрирования по частям, получим:

$$\int \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{z}{r^2 \sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (4)$$

Подстановка (4) в формулу (3) приводит к окончательному результату:

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (2 + \sqrt{3}), \quad (5)$$

где $z_0 = a \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $r = a/2$. Отсюда

$$B = 2B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (2 + \sqrt{3}).$$

2. Вычислить поле внутри достаточно длинной, тонкой цилиндрической катушки, на единицу длины которой приходится n витков проволоки с током I .

Решение

Из соображений симметрии следует, что поле как внутри, так и вне катушки параллельно ее оси и не зависит от координат z и φ (рис. 3.2), т. е.

$H = H(r)$. Далее, нетрудно видеть, что циркуляция вектора $\mathbf{H}$ вдоль контура $ABCD$, замыкающегося на бесконечности,

$$C = \oint_{ABCD} \mathbf{H} d\mathbf{L} = 0.$$

так как площадка $ABCD$ пересекается каждым витком тока два раза в противоположных направлениях и, следовательно, $\sum_i I_i = 0$.

С другой стороны, циркуляция вектора $\mathbf{H}$ вдоль контура $ABCD$

$$C = H_e(r) - H_e(\infty) = 0,$$

откуда, принимая $H_e(\infty) \equiv \infty$, находим: $H_e(r)$, т. е. поля вне катушки нет.

Циркуляция вектора $\vec{H}$ вдоль контура $CNMB$

$$\oint_{CNMD} \mathbf{H} d\mathbf{L} = H_i(NM) = H_i; \quad \sum_i I_i = nI,$$

откуда с помощью теоремы о циркуляции находим:

$$H_i = nI.$$

3. Определить силу, с которой бесконечный прямой ток I действует на прямоугольный контур $ABCD$, лежащий с ним в одной плоскости и несущий ток I_1 (рис. 3.3).

Решение

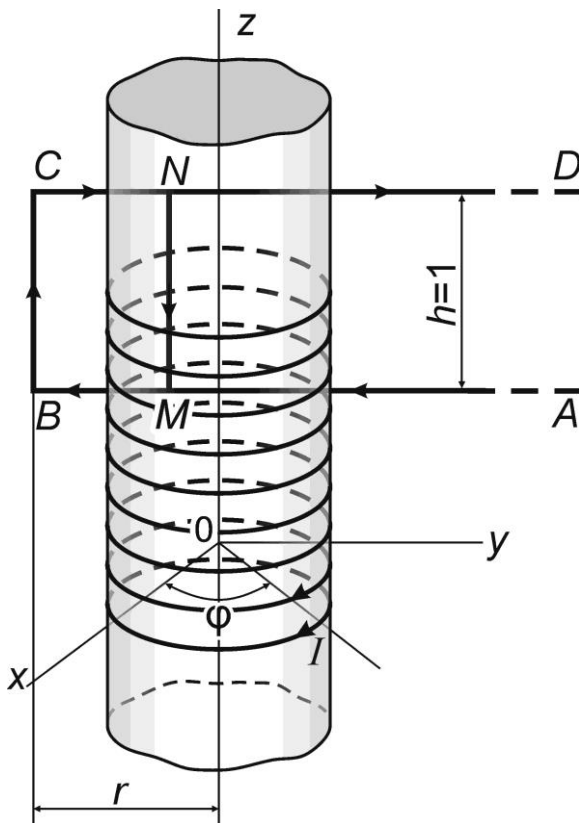


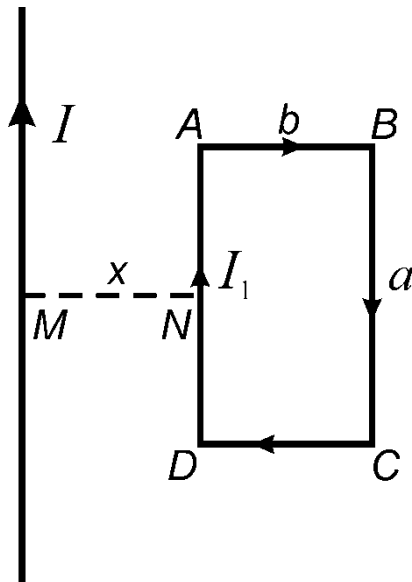
Рис. 3.2.

По закону Ампера, сила, с которой бесконечный прямой ток I взаимодействует со стороной DA прямоугольного контура (с током I_1), параллельна прямой NM и равна

$$F_1 = I_1 \int_D^A [d\mathbf{l}, \mathbf{B}] = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi x} \int_D^A dl = \frac{\mu_0 a I I_1}{2\pi x}.$$

Аналогично, сила взаимодействия тока I со стороной BC прямоугольного контура антипараллельна прямой NM и равна:

$$F_2 = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi(x+b)} \int_B^C dl = \frac{\mu_0 a I I_1}{2\pi(x+b)}.$$



Силы, с которыми ток I взаимодействует со сторонами AB и CD , равны по абсолютной величине и противоположны по направлению; эти силы перпендикулярны к прямой MN и параллельны току I . Суммарная сила, действующая со стороны тока I на прямоугольный контур с током I_1 , параллельна прямой NM (рамка с током I_1 притягивается к бесконечному прямому току I) и равна:

$$F = F_1 - F_2 = \frac{\mu_0 a b I I_1}{2\pi x(x+b)}.$$

Рис. 3.3

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить магнитное поле в центре шара радиуса R , равномерно покрытого очень большим числом N параллельных витков, толщина которых τ такова, что $N\tau = 2R$.
2. Найти уравнение силовых линий магнитного поля двух бесконечных прямых параллельных токов I , протекающих в противоположных направлениях (расстояние между токами принять равным $2a$).
3. Вычислить магнитное поле в центре правильного многоугольника с n сторонами, вдоль которого циркулирует ток I .
4. Вдоль бесконечного цилиндрического проводника (радиуса a) течет постоянный ток I , равномерно распределенный по сечению проводника. Определить напряженность магнитного поля внутри и вне цилиндра.
5. На тор радиуса R (с круговым сечением радиуса a) намотано N витков проволоки, по которой течет ток I . Считая проволоку достаточно тонкой, определить напряженность магнитного поля указанного соленоида.
6. Рассчитать магнитное поле бесконечного прямого тока I , вычисляя сначала векторный потенциал $\vec{A}$, а затем и индукцию поля по формуле $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$. Найти уравнение силовых линий поля.

7. Вычислить векторный потенциал и индукцию магнитного поля кругового (радиуса a) тока I на больших расстояниях от него, т. е. на расстояниях $R \gg a$.
8. Вычислить векторный потенциал магнитного поля тока, текущего вдоль бесконечного цилиндрического провода (радиуса a) и равномерно распределенного по его сечению.
9. В бесконечном прямом проводнике радиуса R течет ток, плотность которого равна a/ρ при $\rho \leq R$, где ρ – расстояние от оси проводника. Найти векторный потенциал и напряженность магнитного поля внутри и снаружи проводника.
10. Найти магнитное поле плоскости, по которой течет ток с поверхностной плотностью i , одинаковой в любой точке плоскости.
11. По двум бесконечным линейным проводникам, расстояние между которыми d , текут в противоположных направлениях токи силой I . Вычислить векторный потенциал системы.
12. Найти самоиндукцию L единицы длины линии, состоящей из двух коаксиальных цилиндров с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), пространство между которыми заполнено веществом с магнитной проницаемостью μ .
13. В однородное магнитное поле $\vec{B}_0$ вносится шар (радиуса a), изготовленный из материала с относительной магнитной проницаемостью μ , благодаря чему однородное поле $\vec{B}_0$ искажается. Определить магнитное поле внутри и вне шара. Найти также вектор намагниченности (т.е. магнитный момент, приходящийся на единицу объема шара).
14. Определить самоиндукцию единицы длины бесконечной прямой двойной проводки, состоящей из двух параллельных проводов кругового сечения (радиуса a), по которым текут равные и противоположно направленные токи. Расстояние между осями проводов принять равным d .
15. Шар (радиуса a), изготовленный из магнетика с относительной магнитной проницаемостью μ и находящийся во внешнем однородном поле $\vec{B}_0$, разрезан на две половины плоскостью, перпендикулярной к направлению поля. Определить силу взаимодействия между полушариями.

Вопросы для самопроверки.

1. Уравнения магнитостатики.
2. Граничные условия.
3. Векторный потенциал.
4. Закон Био – Савара.
5. Поле элементарного линейного тока.
6. Энергия магнитного поля постоянных токов.
7. Самоиндукция и взаимоиנדукция.
8. Сила и момент сил, действующие на ограниченное распределение тока во внешнем магнитном поле.

Список литературы

1. Васильев А.Н. Классическая электродинамика. Краткий курс лекций. – БХВ-Петербург, 2010, 288 с.
2. Власов А.А. Макроскопическая электродинамика. – М.: Либроком, 2010, 240 с.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндц М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6. Электродинамика. – М.: Либроком, 2012.
4. Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике. – М.: Лань, 2008, 320 с.
5. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности. – М.: Лань, 2010, 480 с.
6. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. Ч.1. Микроскопическая теория. – М.: НИЦ «Регулярная хаотическая динамика», 2005, 736 с.
7. Мултановский В.В., Василевский А.С. Курс теоретической физики. Классическая электродинамика. – М.: Дрофа, 2006, 352 с.

ТЕМА 4. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Цель: Формирование набора общепрофессиональных и профессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 03.03.02 Физика. Изучение законов квазистационарных явлений в вакууме.

Вопросы для изучения: Уравнения для квазистационарной области. Квазистационарные явления в линейных проводниках. Энергия и силы в области квазистационарных явлений. Элементы магнитной гидродинамики.

Теоретическая часть

Основные законы квазистационарных процессов

Квазистационарными называются процессы, имеющие место в случае медленно меняющихся во времени полей, когда выполняются условия

$$\omega \ll \frac{c}{l}, \quad l \ll \lambda$$

где c – скорость света, ω и λ – соответственно частота и длина волны электромагнитных колебаний, l – линейные размеры системы. Система уравнений Максвелла в этом случае принимает вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Закон электромагнитной индукции Фарадея в интегральной форме:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (4.2)$$

где Φ – магнитный поток, пронизывающий площадку, натянутую на замкнутый контур интегрирования.

Сила, действующая на движущийся электрический заряд со стороны магнитного поля (сила Лоренца):

$$\mathbf{F} = e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (4.3)$$

Примеры решения задач

1. В системе (рис. 4.1), образованной двумя параллельными рельсами и поперечным проводником AB (длина которого равна l , а масса m) и находящейся в однородном магнитном поле B , перпендикулярном к плоскости чертежа (и направленном за чертеж), желают установить при помощи подходящей ЭДС постоянный ток I , направленный по стрелке.

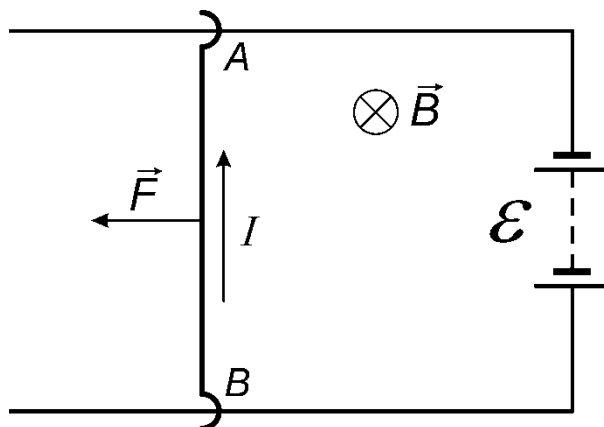


Рис. 4.1

Считая сопротивление системы постоянным, определить: а) закон движения проводника AB ; б) электродвижущую силу $\mathcal{E}$ как функцию времени. Проверить выполнение закона сохранения энергии.

Решение

Так как по предположению ток I поддерживается постоянным, то сила $F = BIl$, действующая на стержень AB , также постоянна. Поэтому движение стержня будет равнопеременным с ускорением, равным BIl/m . Если в начальный момент стержень был пущен со скоростью v_0 , то закон движения стержня выразится формулой (положительным направлением движения считается направление справа налево):

$$v = v_0 + \frac{BIl}{m}t$$

ЭДС индукции, возникающая при этом в стержне AB , равна Blv и по закону Ленца противоположна электродвижущей силе $\mathcal{E}$, включенной в цепь. На основании обобщенного закона Ома

$$IR = \mathcal{E} - BLv,$$

Откуда

$$\mathcal{E} = IR + Bl\left(v_0 + \frac{BIl}{m}t\right). \quad (1)$$

Таков искомый закон изменения электродвижущей силы $\mathcal{E}$, как функции времени.

Чтобы проверить согласие с законом сохранения энергии, умножим обе части уравнения (1) на Idt :

$$\mathcal{E}Idt = I^2Rdt + BIl\left(v_0 + \frac{BIl}{m}t\right)dt = I^2Rdt + FdS, \quad (2)$$

где dS – элемент пути стержня.

Левая часть уравнения (2) представляет собой энергию, доставляемую источником тока за время dt ; первое слагаемое правой части – джоулево тепло, а второе слагаемое – прирост кинетической энергии стержня за время dt ; или работу электродинамической силы F . Если v_0 отрицательно, т.е. если бы в начальный момент стержень имел скорость, противоположную той, которую он получает свободно под действием электродинамической силы F , то могло бы случиться, что электродвижущая сила $\mathcal{E}$ была бы отрицательна, другими словами, источник тока мог бы стать потребителем тока. Если v_0 отрицательно, т.е. движение стержня вначале направлено вправо, то такое направление его движения сохранится до момента $t_1 = -\frac{BIl}{mv_0}$, потом его

скорость изменит знак и стержень будет двигаться влево (аналогично тяжелому телу, брошенному вверх, а затем падающему вниз).

2. Конденсатор с емкостью C присоединен параллельно катушке с сопротивлением R и самоиндукцией L при помощи проводников, обладающих сопротивлением r . Полученный контур включается в цепь с

ЭДС, равной $\mathcal{E}_0 \cos pt$. Показать, что этот контур эквивалентен проводу без самоиндукции, если

$$R^2 - \frac{L}{C} = p^2 LC \left(r^2 - \frac{L}{C} \right)$$

Найти сопротивление указанного провода.

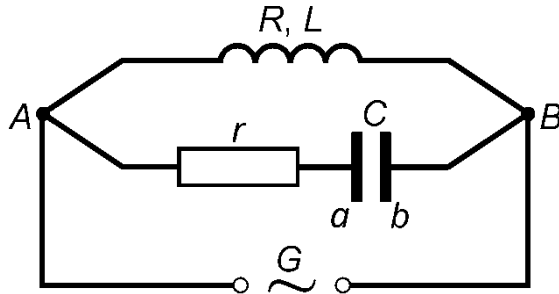


Рис. 4.2

Решение

Пусть I_1 – ток в ветви с катушкой (рис. 2), I_2 – ток в ветви с конденсатором и I – общий ток, протекающий через обе ветви, причем

$$I = I_1 + I_2. \quad (1)$$

Пусть общее сопротивление обеих ветвей равно R' , оно будет также и сопротивлением эквивалентного провода, которым при выполнении некоторого условия можно заменить обе ветви. Очевидно также, что

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R'} \cos pt. \quad (2)$$

Ток I_1 , протекающий через катушку, определяется уравнением:

$$I_1 R + L \frac{dI_1}{dt} = \mathcal{E}_0 \cos pt. \quad (3)$$

Нетрудно показать, что частное решение уравнения (3) имеет вид:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_0 R}{R^2 + p^2 L^2} \cos pt + \frac{\mathcal{E}_0 p L}{R^2 + p^2 L^2} \sin pt. \quad (4)$$

При определении тока I_2 в ветви с конденсатором исходим из того, что падение напряжения на участке $aAGBb$

$$rI_2 = \int_{aAGBb} E_S dS, \quad (5)$$

где

$$\int_{aAGBb} E_S dS = \oint_{aAGBbCa} E_S dS - \int_{bCa} E_S dS = \mathcal{E}^{\text{ст}} + \int_{aCb} E_S dS.$$

В случае квазистационарного тока последний интеграл можно положить равным той разности потенциалов $(\varphi_a - \varphi_b)$, которая существовала бы на обкладках конденсатора в статическом случае. Поэтому уравнение (5) можно переписать в виде:

$$rI_2 = \mathcal{E}^{\text{ст}} + (\varphi_a - \varphi_b)$$

или, так как $\mathcal{E}^{\text{ст}} = \mathcal{E}_0 \cos pt$ и $\varphi_a - \varphi_b = \frac{e}{C}$:

$$rI_2 - \frac{e}{C} = \mathcal{E}_0 \cos pt.$$

Продифференцировав последнее уравнение по времени t , получим:

$$r \frac{dI_2}{dt} - \frac{1}{C} \frac{de}{dt} = -p \mathcal{E}_0 \sin pt$$

или, так как

$$-\frac{de}{dt} = I_2$$

(сила тока I_2 равна изменению заряда на одной из обкладок конденсатора):

$$r \frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{C} = -p \mathcal{E}_0 \sin pt. \quad (6)$$

Частное решение уравнения (6) имеет вид:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_0 r p^2 C^2}{1 + r^2 p^2 C^2} \cos pt - \frac{\mathcal{E}_0 p C}{1 + r^2 p^2 C^2} \sin pt. \quad (7)$$

Запишем теперь первый закон Кирхгофа (1), используя (2), (4) и (7):

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_0}{R'} \cos pt = \mathcal{E}_0 \left(\frac{R}{R^2 + p^2 L^2} + \frac{r p^2 C^2}{1 + r^2 p^2 C^2} \right) \cos pt + \\ + \mathcal{E}_0 \left(\frac{p L}{R^2 + p^2 L^2} - \frac{p C}{1 + r^2 p^2 C^2} \right) \sin pt \end{aligned}$$

откуда, приравнявая коэффициенты при $\cos pt$ и $\sin pt$, находим:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{L}{R^2 + p^2 L^2} - \frac{C}{1 + r^2 p^2 C^2} &= 0, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{R}{R^2 + p^2 L^2} + \frac{r p^2 C^2}{1 + r^2 p^2 C^2} &= \frac{1}{R'}. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Из уравнения (8) находим условие, при выполнении которого рассматриваемую цепь с разветвлениями можно заменить эквивалентным проводом без самоиндукции

$$R^2 - \frac{L}{C} = p^2 L C \left(r^2 - \frac{L}{C} \right), \quad (10)$$

а из уравнения (9), учитывая условие (10), находим сопротивление указанного провода:

$$R' = \frac{R^2 + p^2 L^2}{R + r^2 p^2 L C}. \quad (11)$$

3. По малому участку внутри однородного проводника в начальный момент распределен заряд с объемной плотностью $\rho_0(x, y, z)$ предоставленный потом самому себе заряд стекает на поверхность проводника. Как будет при этом изменяться плотность заряда в указанном участке? Каково время релаксации процесса растекания заряда в проводнике?

Решение.

Подставляя $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ (в такой форме закон Ома справедлив как для постоянных, так и для переменных токов) в уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

получим:

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1)$$

Из уравнения (1) и уравнения для источников электрического поля $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

получаем уравнение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\varepsilon_0} \rho, \quad (2)$$

интегрируя которое, находим:

$$\rho = \rho_0(x, y, z) e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon_0} t}. \quad (3)$$

Выражение (3) показывает, что за время

$$\tau = \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \quad (4)$$

заряд в рассматриваемом участке проводника уменьшается в e раз. Время τ и есть время релаксации процесса растекания заряда в проводнике.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Прямой провод длины и направления $\mathbf{S}$ движется со скоростью $\mathbf{u}$ в однородном магнитном поле $\mathbf{B}$, его концы соединены посредством подвижных контактов с неподвижным проводником, который вместе с ним образует замкнутую цепь. Какова ЭДС индукции в этой цепи?
2. Кольцо из медной проволоки с радиусом $r = 10$ см и поперечным сечением $S = 1$ мм² вращается в магнитном поле Земли вокруг вертикальной оси, совпадающей с диаметром кольца, делая 300 об/мин. Сколько джоулей тепла выделяется в кольце за 1 сек? Горизонтальную составляющую магнитной индукции поля Земли принять равной $2,3 \cdot 10^{-5}$ Тл.
3. Исходя из обобщенной формы закона Ома, показать, что плотность магнитной энергии внутри тороидального соленоида радиуса R (с круговым сечением радиуса $r_0 \ll R$) с N витками тонкой проволоки, по которой течет переменный ток I , равна $\frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2$, где μ – магнитная проницаемость сердечника соленоида.
4. Показать, что при изменении во времени радиального магнитного поля, у которого

$$B_x = B_y = 0; B_z = B(r, t),$$

возникает вихревое электрическое поле, силовые линии которого представляют собой концентрические окружности с центрами, лежащими на оси магнитного поля.

5. Определить частоты свободных электрических колебаний в системе из двух индуктивно связанных контуров, содержащих самоиндукции L_1 и L_2 и емкости C_1 и C_2 , активными сопротивлениями пренебречь.

6. Показать, что при релаксации зарядов в однородной проводящей среде ток смещения точно компенсирует ток проводимости, так что магнитное поле в процессе релаксации зарядов не создается.

7. Дроссель с коэффициентом самоиндукции $L = 1$ Гн и сопротивлением $R = 1$ Ом подключается в момент времени $t = 0$ к батарее с постоянной ЭДС в 5 в. Определить, как будет изменяться ток в цепи. Сколько пройдет времени до момента, когда ток разовьется до 1 % к своему максимальному значению?

8. Плоский конденсатор с двухслойным несовершенным диэлектриком включается на постоянное напряжение U . Толщины слоев диэлектрика и значения их относительных диэлектрических проницаемостей и удельных проводимостей постоянны и равны, соответственно, $d_1, \varepsilon_1, \lambda_1; d_2, \varepsilon_2, \lambda_2$. Вывести общие уравнения изменения во времени напряженностей E_1 и E_2 электрического поля в каждом из слоев.

9. Под действием постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_0$ в магнетике устанавливается магнитный момент единицы объема $\mathbf{M}_0$ параллельный $\mathbf{H}_0$. К системе кроме постоянного поля приложено переменное магнитное поле перпендикулярное $\mathbf{H}_0$ и вращающееся с частотой ω . Амплитуда h вектора напряженности переменного поля удовлетворяет условию $h \ll H$. Определить магнитный момент, созданный переменным полем в единице объема магнетика.

10. Шар из магнетика находится в постоянном магнитном поле, напряженность которого внутри шара равна $\mathbf{H}_0$. Предполагая, что размеры шара намного меньше длины волны собственных колебаний магнитного момента, найти частоту этих колебаний.

Вопросы для самопроверки.

1. Уравнения для квазистационарной области.
2. Квазистационарные явления в линейных проводниках.
3. Энергия и силы в области квазистационарных явлений.
4. Элементы магнитной гидродинамики.

Список литературы

1. Васильев А.Н. Классическая электродинамика. Краткий курс лекций. – БХВ-Петербург, 2010, 288 с.
2. Власов А.А. Макроскопическая электродинамика. – М.: Либроком, 2010, 240 с.

3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндц М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6. Электродинамика. – М.: Либроком, 2012.
4. Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике. – М.: Лань, 2008, 320 с.
5. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности. – М.: Лань, 2010, 480 с.
6. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. Ч.1. Микроскопическая теория. – М.: НИЦ «Регулярная хаотическая динамика», 2005, 736 с.
7. Мултановский В.В., Василевский А.С. Курс теоретической физики. Классическая электродинамика. – М.: Дрофа, 2006, 352 с.

ТЕМА 5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. ПРОБЛЕМА ИЗЛУЧЕНИЯ. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Цель: Формирование набора общепрофессиональных и профессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 03.03.02 Физика. Изучение законов распространения электромагнитных волн в вакууме. Изучение проблемы излучения.

Вопросы для изучения: Уравнения электромагнитных волн. Уравнения электромагнитных волн. Плоские волны. Монохроматическая плоская волна. Дифференциальные уравнения для потенциалов. Калибровочные преобразования. Излучение от электрического и магнитного моментов. Импульс электромагнитного поля. Плоские волны в неограниченной однородной непроводящей среде. Преломление и отражение плоских электромагнитных волн на границе между диэлектриками.

Теоретическая часть

Основные законы электромагнитных полей

Полная система уравнений Максвелла для переменного электромагнитного поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (5.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (5.4)$$

Плотность энергии электромагнитного поля:

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{B} \mathbf{H}). \quad (5.5)$$

Плотность потока электромагнитной энергии (вектор Пойнтинга):

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]. \quad (5.6)$$

Плотность электромагнитного импульса:

$$\mathbf{g} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \mathbf{S}. \quad (5.7)$$

Обобщенные (запаздывающие) электродинамические потенциалы:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j} \frac{\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} dV, \quad (5.8)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int \rho \frac{\left(t - \frac{r}{v}\right) dV}{r}. \quad (5.9)$$

Связь векторов **B** и **E** с электромагнитными потенциалами:

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon\epsilon_0} = -\text{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (5.11)$$

Для однородных изотропных сред электромагнитные потенциалы φ и **A** определяются из следующих уравнений Даламбера:

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0 \mathbf{j}, \quad (5.12)$$

$$\Delta \varphi - \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (5.13)$$

При этом потенциалы φ и **A** предполагаются калиброванными по Лоренцу, т.е.

$$\text{div} \mathbf{A} + \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (5.14)$$

Уравнения (5.12) и (5.13) при $\rho = 0, j = 0$ описывают свободные электромагнитные волны, распространяющиеся с фазовой скоростью:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0}} = \frac{c}{n}, \quad (5.15)$$

где c – скорость света в вакууме; n – показатель преломления.

В случае однородной среды из (5.1)–(5.4) также можно получить уравнения второго порядка для **E** и **H**:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.16)$$

Волновое сопротивление в непроводящей среде:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}. \quad (5.17)$$

При падении плоской волны на плоскую границу раздела двух сред углы $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, указывающие направления распространения соответственно падающей, отраженной и преломленной волн связаны соотношениями:

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (5.18)$$

где $n_{1,2}$ – показатели преломления первой и второй сред.

Амплитуды отраженной (E_1, H_1) и преломленной (E_2, H_2) волн выражаются через амплитуды E_0, H_0 падающей волны по формулам Френеля:

а) если E_0 нормальна к плоскости падения, то

$$E_1 = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0, \quad E_2 = \frac{2 \cos \theta_0 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0, \quad (5.19)$$

б) если H_0 нормальна к плоскости падения, то

$$H_1 = \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)} H_0, \quad H_2 = \frac{\sin 2\theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} H_0. \quad (5.20)$$

Примеры решения задач

1. Перпендикулярно к поверхности проводника с электропроводностью λ и магнитной проницаемостью μ падает плоская электромагнитная волна частоты ω . Пренебрегая токами смещения по сравнению с токами проводимости, определить, на какой глубине внутри проводника электромагнитное поле волны ослабевает в e раз (e – основание натуральных логарифмов).

Решение

Выбрав систему координат так, как это показано на рисунке 5.1, можно записать для электромагнитного поля плоской волны в вакууме:

$$E_x = E_z = 0, \quad E_y = E(x)e^{i\omega t},$$

$$H_x = H_y = 0, \quad H_z = H(x)e^{i\omega t}.$$

Электромагнитное поле в проводнике определяется уравнениями:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \lambda \mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -j e^{i\omega t} \frac{dH}{dx}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = k e^{i\omega t} \frac{dE}{dx}$$

и, следовательно, уравнения (1) и (2) можно

переписать в виде:

$$\frac{dH}{dx} = -\lambda E, \quad (3)$$

$$\frac{dE}{dx} = -i\omega\mu\mu_0 H. \quad (4)$$

Продифференцировав уравнение (3) еще один раз по x и подставив $\frac{dE}{dx}$ из (4), получим уравнение для определения амплитуды магнитного поля волны:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - i\lambda\mu\mu_0 \omega H = 0. \quad (5)$$

Тем же способом получается аналогичное уравнение для определения амплитуды электрического поля. Корни характеристического уравнения $k^2 - i\lambda\mu\mu_0 \omega = 0$, соответствующего уравнению (5), равны:

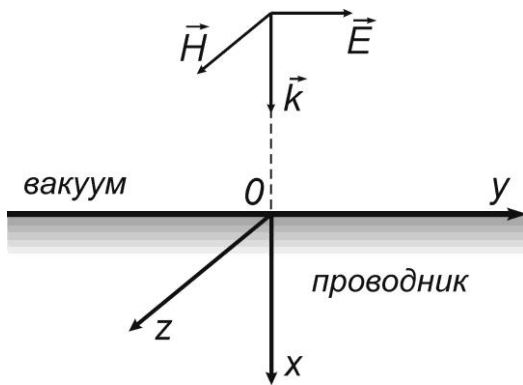


Рис. 5.1

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda \mu \mu_0 \omega} \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Однако условию задачи удовлетворяет лишь второй корень k_2 (корню k_1 соответствует волна, амплитуда которой возрастает по мере продвижения в глубь проводника).

Таким образом, решения уравнений (3) и (4) мы должны записать в виде:

$$\begin{cases} E(x) = E(0)e^{-\sqrt{\frac{\lambda \mu \mu_0 \omega}{2}} x} \cos \sqrt{\frac{\lambda \mu \mu_0 \omega}{2}} x, \\ H(x) = H(0)e^{-\sqrt{\frac{\lambda \mu \mu_0 \omega}{2}} x} \cos \sqrt{\frac{\lambda \mu \mu_0 \omega}{2}} x, \end{cases} \quad (6)$$

где $E(0)$ и $H(0)$ – амплитуды напряженностей электрического и магнитного поля волны при $x = 0$, т. е. на поверхности проводника.

Выражения (6) показывают, что электромагнитная волна ослабляется в e раз на глубине

$$x_0 = \sqrt{\frac{2}{\lambda \mu \mu_0 \omega}}.$$

2. Плоскополяризованная электромагнитная волна падает на границу раздела двух прозрачных ($\mu \cong 1$) сред с показателями преломления n_1 и n_2 . Электрический вектор волны параллелен плоскости раздела сред. Найти коэффициент прохождения света во вторую среду.

Решение

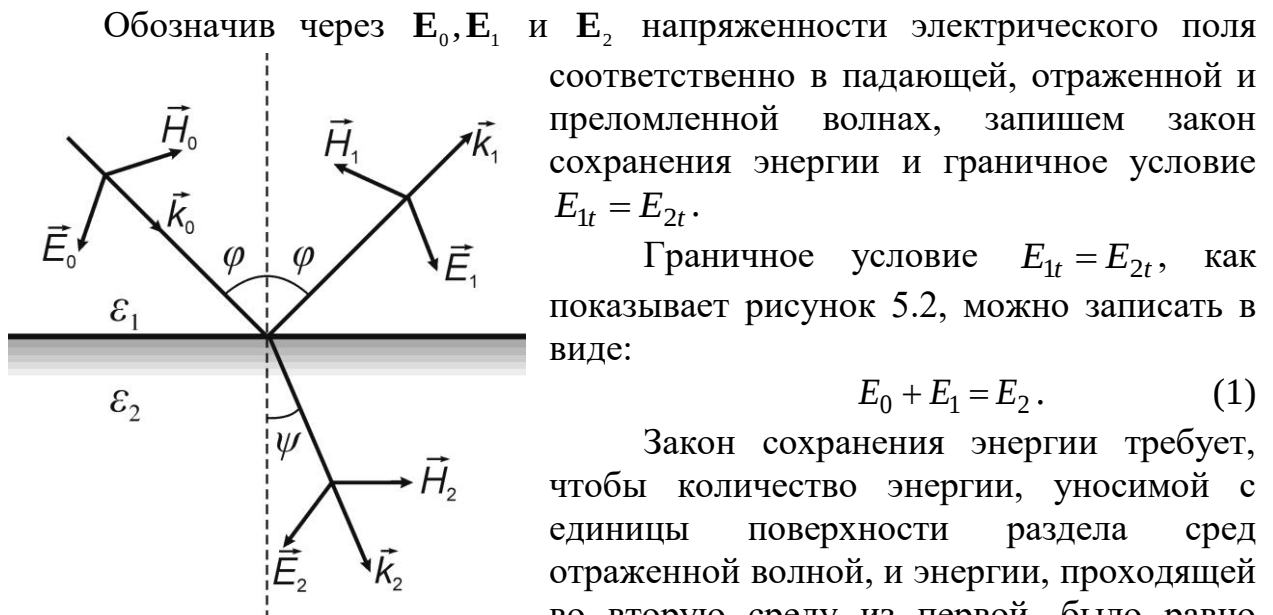


Рис. 5.2

где S – вектор Пойнтинга. Подставляя в (2)

$$S_0 = \sqrt{\varepsilon_1} E_0^2; S_1 = \sqrt{\varepsilon_1} E_1^2; S_2 = \sqrt{\varepsilon_2} E_2^2,$$

находим:

$$\sqrt{\varepsilon_1}(E_0^2 - E_1^2) \cos \varphi = \sqrt{\varepsilon_2} E_2^2 \cos \psi,$$

откуда, используя закон преломления $\sqrt{\varepsilon_1} \sin \varphi = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \psi$, окончательно получаем:

$$E_0^2 - E_1^2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \psi} E_2^2. \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1) и (3), находим:

$$E_1 = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} E_0, \quad E_2 = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)} E_0. \quad (4)$$

Подставляя в (4) $E_0 = \frac{H_0}{\sqrt{\varepsilon_1}}$, $E_1 = \frac{H_1}{\sqrt{\varepsilon_1}}$ и $E_2 = \frac{H_2}{\sqrt{\varepsilon_2}}$, находим далее:

$$H_1 = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} H_0, \quad E_2 = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} H_0 = \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \psi)} H_0. \quad (4)$$

С помощью выражений (4) и (5) находим следующие выражения для плотности потока энергии в отраженной и преломленной волне:

$$S_1 = E_1 H_1 = \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)} S_0,$$

$$S_2 = E_2 H_2 = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi \sin 2\varphi}{\sin^2(\varphi + \psi)} S_0,$$

откуда искомые коэффициенты отражения и прохождения оказываются равными:

$$r = \frac{S_1}{S_0} = \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)}, \quad d = \frac{S_2}{S_0} = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi \sin 2\varphi}{\sin^2(\varphi + \psi)}. \quad (6)$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Показать, что в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в однородной среде, векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны между собой и каждый из них перпендикулярен к направлению распространения волны. Показать также, что у плоской электромагнитной волны $\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} |E| = \sqrt{\mu \mu_0} |H|$.

2. Плоская электромагнитная волна, у которой

$$E_x = E_z = 0; H_z = H_y = 0; E_y = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_z = a \sin 2\pi \nu \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

падает при $x = 0$ на нормальную к оси X плоскую поверхность проводника, простирающегося вправо до бесконечности. Пренебрегая отражением, определить производимое электромагнитной волной световое давление.

3. Плоский конденсатор состоит из двух параллельных слоев различных веществ. Первый слой толщиной d имеет диэлектрическую проницаемость ε

и электропроводность, равную нулю; для другого слоя толщиной kd диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_2 = 0$, а электропроводность λ имеет конечное значение. Показать, что в отношении распространения монохроматических плоских волн этот конденсатор ведет себя так, как если бы все пространство между его пластинами было заполнено однородной средой с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon^* = \varepsilon(1 + k) \left(1 + i \frac{\varepsilon \omega k}{\lambda} \right)^{-1}.$$

4. Определить затухание электромагнитных волн в среде при полном внутреннем отражении.
5. Определить амплитуды волн, отраженной от плоскопараллельной пластины и прошедшей через нее. Толщина пластины d , диэлектрическая проницаемость ε . Найти условия, при которых отражение электромагнитных волн от пластины минимально.
6. Определить напряженности электрического и магнитного поля E – TM волны, бегущей вдоль волновода прямоугольного сечения с идеально проводящими стенками. Найти также уравнения силовых линий электрического и магнитного поля в сечении XOY волновода.
7. Найти плотность поверхностного заряда и плотность поверхностного тока на стенках прямоугольного волновода, вдоль которого бежит волна E – $T_{11}M$ частоты ω .

Вопросы для самопроверки

1. Уравнения электромагнитных волн.
2. Уравнения электромагнитных волн.
3. Плоские волны.
4. Монохроматическая плоская волна.
5. Дифференциальные уравнения для потенциалов.
6. Калибровочные преобразования.
7. Излучение от электрического и магнитного моментов.
8. Импульс электромагнитного поля.
9. Плоские волны в неограниченной однородной непроводящей среде.
10. Преломление и отражение плоских электромагнитных волн на границе между диэлектриками.

Список литературы

1. Васильев А.Н. Классическая электродинамика. Краткий курс лекций. – БХВ-Петербург, 2010, 288 с.
2. Власов А.А. Макроскопическая электродинамика. – М.: Либроком, 2010, 240 с.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндц М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6. Электродинамика. – М.: Либроком, 2012.
4. Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике. – М.:

- Лань, 2008, 320 с.
5. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности. – М.: Лань, 2010, 480 с.
 6. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. Ч.1. Микроскопическая теория. – М.: НИЦ «Регулярная хаотическая динамика», 2005, 736 с.
 7. Мултановский В.В., Василевский А.С. Курс теоретической физики. Классическая электродинамика. – М.: Дрофа, 2006, 352 с.

ТЕМА 6. ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Цель: Формирование набора общепрофессиональных и профессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 03.03.02 Физика. Изучение законов распространения электромагнитных волн в вакууме. Изучение проблемы излучения.

Вопросы для изучения: Принцип относительности. Релятивистская динамика и кинематика. Четырехмерные векторы и тензоры. Тензорный анализ. Преобразования Лоренца. Четырехвекторы плотности тока и движущегося заряда. Четырехвектор потенциала. Тензорная запись уравнений Максвелла. Тензор электромагнитного поля. Инварианты электромагнитного поля. Четырехмерная плотность силы. Тензор энергии – импульса. Плоская волна. Поле произвольно движущегося электрона.

Теоретическая часть

Основные законы специальной теории относительности

Формулы преобразования Лоренца для составляющих электромагнитного поля в произвольной материальной среде:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad E'_z = \frac{E_z - vB_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.1)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \frac{B_y - \frac{v}{c^2}E_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad B'_z = \frac{B_z - \frac{v}{c^2}E_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.2)$$

или

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}\mathbf{B}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}\mathbf{E}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.4)$$

где $\mathbf{v}$ – скорость системы отсчета K' относительно системы K ; $\mathbf{E}_{\parallel}$, $\mathbf{B}_{\parallel}$ – составляющие поля, параллельные скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{E}_{\perp}$, $\mathbf{B}_{\perp}$ – составляющие поля, перпендикулярные к скорости $\mathbf{v}$.

Формулы преобразования Лоренца для составляющих векторов $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ можно получить из формул (6.3) и (6.4), воспользовавшись соотношениями $\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\mathbf{D} - \mathbf{P})$ и $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, при этом следует помнить,

что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой вектор **D** преобразуется через вектор **H**, а вектор **P** – через вектор **M**. В результате находим следующие формулы преобразования Лоренца для векторов **D**, **H**, **P** и **M**:

$$\mathbf{D}'_{\parallel} = \mathbf{D}_{\parallel}, \quad \mathbf{D}'_{\perp} = \frac{\mathbf{D}_{\perp} + \frac{1}{c^2}[\mathbf{vH}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{H}'_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel}, \quad \mathbf{H}'_{\perp} = \frac{\mathbf{H}_{\perp} - [\mathbf{vD}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{P}'_{\parallel} = \mathbf{P}_{\parallel}, \quad \mathbf{P}'_{\perp} = \frac{\mathbf{P}_{\perp} - \frac{1}{c^2}[\mathbf{vM}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{M}'_{\parallel} = \mathbf{M}_{\parallel}, \quad \mathbf{M}'_{\perp} = \frac{\mathbf{M}_{\perp} + [\mathbf{vP}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.8)$$

Пример решения задачи

Определить электромагнитное поле точечного заряда e , движущегося в вакууме с постоянной скоростью $\mathbf{V}$ близкой к скорости света c .

Решение

В собственной системе отсчета K' , т.е. в системе, относительно которой заряд покоится, электрическое поле точечного заряда определяется формулами:

$$E'_x = \frac{ex'}{4\pi\epsilon_0(r')^3}, \quad E'_y = \frac{ey'}{4\pi\epsilon_0(r')^3}, \quad E'_z = \frac{ez'}{4\pi\epsilon_0(r')^3},$$

а магнитное поле отсутствует.

В лабораторной системе отсчета K по формулам преобразования Лоренца (6.1), (6.2) находим:

$$E_x = \frac{ex'}{4\pi\epsilon_0(r')^3}, \quad E_y = \frac{ey'}{4\pi\epsilon_0(r')^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{ez'}{4\pi\epsilon_0(r')^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$B_x = 0, \quad B_y = -\frac{\mu_0 evz'}{4\pi(r')^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad B_z = \frac{\mu_0 evy'}{4\pi(r')^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Здесь

$$r' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}.$$

Подставляя в r' выражения для x' , y' и z' , записанные через нештрихованные величины, определяемые из формул преобразования Лоренца для четырехмерного радиус-вектора, т.е.

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

получим:

$$r' = \frac{\sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1)$$

где введено обозначение

$$R = \sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}.$$

Используя выражение (1), составляющие напряженности электрического поля заряда в лабораторной системе отсчета K можно представить в виде:

$$E_x = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (x - vt), \quad E_y = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) y, \quad E_z = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) z$$

или в векторной форме

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r} = (x - vt)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Составляющие вектора индукции магнитного поля движущегося заряда можно представить в виде:

$$B_x = 0, \quad B_y = -\frac{\mu_0 e v}{4\pi R^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) z = -\frac{v}{c^2} E_z, \quad B_z = -\frac{\mu_0 e v}{4\pi R^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) y = -\frac{v}{c^2} E_y$$

или в векторной форме

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}\mathbf{E}].$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. В лабораторной системе отсчета K электрическое и магнитное поля направлены под углом α друг к другу. Определить скорость движущейся перпендикулярно к обоим полям системы отсчета K' в которой электрическое и магнитное поля оказываются между собой параллельными.
2. Частица, заряд которой равен e , а масса покоя – m , влетает с начальной скоростью v_0 в однородное и постоянное электрическое поле E , перпендикулярное к v_0 . Найти траекторию частицы и показать, что при $s \rightarrow \infty$ она принимает вид параболы.
3. Электрон влетает в однородное и постоянное магнитное поле с начальной скоростью v_0 , перпендикулярной к направлению поля. Найти траекторию электрона.

4. Определить угол отклонения релятивистской α -частицы, пролетающей в поле ядра с зарядом Ze .

5. Вычислить интенсивность дипольно электрического излучения релятивистской заряженной частицы, движущейся в однородном и постоянном электрическом поле $\vec{E}$, перпендикулярном к направлению ее начальной скорости v_0 .

6. Определить разность потенциалов на стенках однородной, намагниченной ленты (прямоугольного сечения), движущейся со скоростью, малой по сравнению со скоростью света (рис. 6.1).

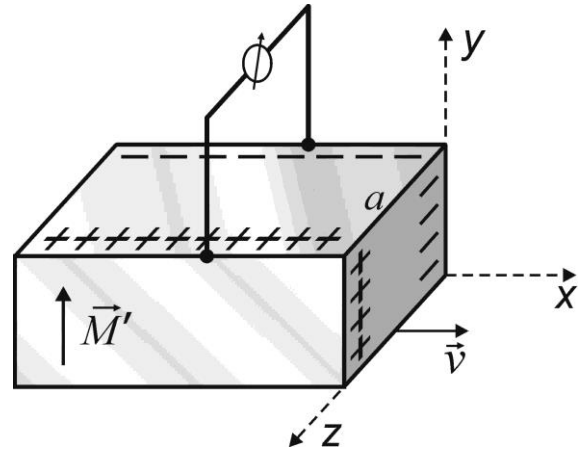


Рис. 6.1

7. В среде, движущейся со скоростью v относительно некоторой системы K , распространяется плоская электромагнитная волна. Найти скорость распространения волны в системе K , если показатель преломления среды равен n .

8. Найти траекторию движения заряженной частицы в однородном электрическом поле с напряженностью E_0 . Рассмотреть предельный случай малых скоростей.

9. Найти систему отсчета, в которой электрическое и магнитное поля параллельны.

Вопросы для самопроверки

1. Принцип относительности.
2. Релятивистская динамика и кинематика.
3. Четырехмерные векторы и тензоры.
4. Тензорный анализ.
5. Преобразования Лоренца.
6. Четырехвекторы плотности тока и движущегося заряда.
7. Четырехвектор потенциала.
8. Тензорная запись уравнений Максвелла.
9. Тензор электромагнитного поля.
10. Инварианты электромагнитного поля.
11. Четырехмерная плотность силы.
12. Тензор энергии – импульса.
13. Плоская волна.
14. Поле произвольно движущегося электрона.

Список литературы

1. Васильев А.Н. Классическая электродинамика. Краткий курс лекций. –

- БХВ-Петербург, 2010, 288 с.
2. Власов А.А. Макроскопическая электродинамика. – М.: Либроком, 2010, 240 с.
 3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндц М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6. Электродинамика. – М.: Либроком, 2012.
 4. Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике. – М.: Лань, 2008, 320 с.
 5. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности. – М.: Лань, 2010, 480 с.
 6. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. Ч.1. Микроскопическая теория. – М.: НИЦ «Регулярная хаотическая динамика», 2005, 736 с.
 7. Мултановский В.В., Василевский А.С. Курс теоретической физики. Классическая электродинамика. – М.: Дрофа, 2006, 352 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

**Методические указания для обучающихся по организации и проведению
самостоятельной работы**

Направление подготовки 03.03.02 Физика
Направленность (профиль)
«Фундаментальная и прикладная физика»

**Ставрополь
2026**

Содержание

Пояснительная записка

Виды и содержание самостоятельной работы студента; формы контроля

Контрольные точки и виды отчетности

Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Список рекомендуемой литературы

Пояснительная записка

Все виды самостоятельной работы студентов по дисциплине «Электродинамика», предусмотренные учебным планом и рабочей программой, направлены на осуществление следующих основных целей:

- *овладение знаниями*: изучение источников литературы по темам дисциплины; учебно-исследовательская работа; использование компьютерной техники, Интернет;
- *закрепление и систематизация знаний*: работа с конспектом лекции (обработка текста); повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы, аудио- и видеозаписей); составление плана и тезисов ответа; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста (аннотирование, рецензирование, реферирование, конспект, анализ и др.); подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка рефератов, докладов; составление библиографии; тестирование и др.;
- *формирование умений*: решение задач и упражнений по образцу; решение нелинейных задач математической физики; математическое моделирование разного рода физических процессов; подготовка курсовых и дипломных работ (проектов); экспериментальная работа; рефлексивный анализ профессиональных умений с использованием аудио- и видеотехники и др.

Основными **формами работы и контроля** самостоятельной работы студентов являются:

Индивидуальное решение репродуктивных, реконструктивных и творческих **заданий**, позволяющих оценивать и диагностировать уровень обученности, уровень умений и навыков студентов по дисциплине.

Собеседование - форма учебной деятельности, специальная беседа преподавателя со студентом на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, рассчитанная на выяснение объема знаний студента по определенному разделу, теме, проблеме и т. п., позволяющая оценить их знания по теме, умение аргументировать собственную точку зрения, предполагающая всестороннее обсуждение какого-либо вопроса, проблемы или сопоставлении информации, идей, мнений, предложений.

Методические рекомендации по изучению теоретического материала

При изучении теоретического материала по дисциплине «Электродинамика», основополагающим для студента является курс лекций по данной дисциплине, составленный в соответствии с учебной программой. При использовании дополнительных источников литературы следует придерживаться плана и содержания изучаемой дисциплины, представленного в учебной программе.

Вопросы для изучения:

1. Электромагнитные волны
2. Проблема излучения
3. Распространение электромагнитных волн
4. Основы специальной теории относительности. Четырехмерная формулировка электродинамики

По результатам изучения теоретического материала преподавателем осуществляется контроль полученных студентом знаний, формами которого являются собеседование и доклад рефератов.

Собеседование - форма учебной деятельности, специальная беседа преподавателя со студентом на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, рассчитанная на выяснение объема знаний студента по определенному разделу, теме, проблеме и т.п., позволяющая оценить их умение аргументировать собственную точку зрения, предполагающая всестороннее обсуждение какого-либо вопроса, проблемы или сопоставлении информации, идей, мнений, предложений.

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя:

- отдельное собеседование по каждой из указанных тем;
- составленные аспирантом конспекты научной литературы;
- анализ аспирантом публицистического материала.

Принципиальные отличия заданий базового уровня от повышенного заключаются в большем объеме фактов и событий, в сравнительно-аналитическом характере изложения материала, его теоретической (методологической) составляющей.

Для подготовки к каждой теме следует изучить и законспектировать рекомендованные источники и научную литературу и на их основании подготовиться к указанным в методических материалах вопросам для обсуждения.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования указанными конспектами.

При проверке задания, оцениваются:

- активное участие в работе;
- уверенное владение материалом;

- умение четко и логично излагать свои мысли;
- умение творчески подходить к решению основных вопросов темы;
- самостоятельность мышления,
- полное соответствие конспекта установленным требованиям;
- самостоятельная устная речь, полностью раскрывающая суть проблематики собеседования.

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Вопросы к коллоквиуму (5 семестр)

1. Закон Ампера и Кулона. Системы единиц.
2. Локальные характеристики электромагнитного поля.
3. Закон сохранения электрического заряда. Уравнение непрерывности.
4. Интегральная форма первого уравнения Максвелла (вывод).
5. Дифференциальная форма первого уравнения Максвелла (вывод).
6. Интегральная форма второго уравнения Максвелла (вывод).
7. Дифференциальная форма второго уравнения Максвелла (вывод).
8. Интегральная форма третьего уравнения Максвелла (вывод).
9. Дифференциальная форма третьего уравнения Максвелла (вывод).
10. Интегральная и дифференциальная форма четвертого уравнения Максвелла (вывод).
11. Закон сохранения энергии применительно к электромагнитным явлениям.
12. Уравнения электростатики. Граничные условия при наличии заряженных поверхностей.
13. Электростатическое поле в вакууме. Потенциал.
14. Физический смысл скалярного потенциала. Нормировка потенциала.
15. Уравнения Лапласа и Пуассона.
16. Электростатическое поле внутри проводника. Электростатическое поле вблизи поверхности проводника.
17. Потенциал проводника. Емкость. Металлический экран.
18. Конденсаторы. Емкость плоского конденсатора (вывод).
19. Емкость сферического конденсатора (вывод).
20. Емкость цилиндрического конденсатора (вывод).
21. Дипольное разложение потенциала.
22. Энергия электростатического поля.
23. Энергия диполя во внешнем поле.
24. Механические силы в электрическом поле. Момент сил, действующий на диполь.
25. Диэлектрики. Поляризация диэлектриков. Граничные условия при наличии диэлектриков.
26. Вектор поляризованности. Диэлектрическая восприимчивость.
27. Энергия диэлектрического тела во внешнем поле.
28. Объемные силы, действующие на диэлектрики.
29. Магнитостатика. Граничные условия магнитостатики в вакууме.
30. Энергия магнитного поля постоянных токов.
31. Самоиндукция и взаимоиנדукция.

32. Сила, действующая на ограниченное распределение тока во внешнем магнитном поле (вывод). Энергия.
33. Момент сил, действующий на ограниченное распределение тока во внешнем магнитном поле (вывод). Энергия.
34. Макроскопические уравнения в магнитостатике. Выражения для векторного потенциала (вывод).
35. Макроскопические уравнения в магнитостатике. Уравнения Максвелла в среде (вывод). Гистерезис.
36. Абсолютная магнитная проницаемость вещества. Абсолютная магнитная восприимчивость вещества.
37. Граничные условия для магнитной индукции и напряженности поля.
38. Область квазистационарных явлений. Условия квазистационарности.
39. Уравнения для квазистационарной области явлений.
40. Квазистационарные явления в линейных проводниках. Выражение для определения токов в проводнике по заданным сторонним силам, сопротивлению и коэффициенту индукции.
41. Контур с самоиндукцией, сопротивлением и емкостью. Выражение для силы тока (вывод).
42. Энергия в области квазистационарных явлений.
43. Силы в области квазистационарных явлений.
44. Скин-эффект.
45. Омическое сопротивление для случая квазистационарных и быстропеременных токов.
46. Электромагнитные волны. Уравнения для потенциалов (вывод).
47. Плоские волны. Свойства плоских волн (вывод). Вектор потока энергии для плоской волны.
48. Монохроматическая плоская волна. Виды поляризации волн (вывод).
49. Проблема излучения. Дифференциальные уравнения для потенциалов.
50. Калибровочные преобразования. Лоренцева калибровка.
51. Калибровочные преобразования. Кулоновская калибровка.
52. Функция Грина для волнового уравнения.
53. Выражения для запаздывающих потенциалов (вывод). Опережающие потенциалы.
54. Излучение от электрического момента. Уравнения для потенциалов (вывод).
55. Электрический поляризационный потенциал. Уравнение для электрического поляризационного потенциала (вывод).
56. Излучение от магнитного момента. Уравнения для потенциалов (вывод).
57. Магнитный поляризационный потенциал. Уравнение для магнитного поляризационного потенциала (вывод).
58. Уравнения для поляризационных потенциалов в пространстве вне источников поля. Выражения для поляризационных потенциалов (вывод).
59. Выражения для напряженностей в случае поля создаваемого электрическим диполем. Свойства поле.
60. Выражения и свойства полей, создаваемых электрическим вибратором в ближней и дальней зонах.
61. Вектор Умова-Пойтинга в волновой зоне. Зависимость мощности излучения от частоты.
62. Выражения для напряженностей и свойства полей, создаваемых переменным магнитным моментом.
63. Плоские волны в неограниченной однородной непроводящей среде.

- 64. Частное решение волнового уравнения для случая плоских волн. Свойства полей.
- 65. Преломление и отражение плоских электромагнитных волн на границе между диэлектриками.
- 66. Распространение электромагнитных волн в проводящих средах. Комплексная диэлектрическая проницаемость вещества.
- 67. Комплексный волновой вектор. Свойства полей.

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения экзамена осуществляется в соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры - в СКФУ, Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам аспирантуры, программам ординатуры - в СКФУ

В экзаменационный билет включаются: два теоретических вопроса, одно практическое задание.

Для подготовки по билету отводится: 40 минут.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования: справочными материалами по данной дисциплине.

При проверке практического задания, оцениваются: знание основных теоретических положений, необходимых для решения поставленной практической задачи, навыки решения подобного типа заданий, умение применять соответствующий математический аппарат.

Допуск к **практическим** работам происходит при наличии у студентов печатного варианта отчета. Защита отчета проходит в форме доклада студента по выполненной работе и ответов на вопросы преподавателя.

Максимальное количество баллов студент получает, если оформление отчета соответствует установленным требованиям, а отчет полностью раскрывает суть работы. Основанием для снижения оценки являются:

Отчет может быть отправлен на доработку в следующих случаях:

Критерии оценивания результатов самостоятельной работы студентов приведены в Фонде оценочных средств по дисциплине.

Вопросы к экзамену.

6 семестр – экзамен.

Вопросы к экзамену:

1. Закон Ампера и Кулона. Системы единиц.

2. Локальные характеристики электромагнитного поля.
3. Закон сохранения электрического заряда. Уравнение непрерывности.
4. Интегральная форма первого уравнения Максвелла (вывод).
5. Дифференциальная форма первого уравнения Максвелла (вывод).
6. Интегральная форма второго уравнения Максвелла (вывод).
7. Дифференциальная форма второго уравнения Максвелла (вывод).
8. Интегральная форма третьего уравнения Максвелла (вывод).
9. Дифференциальная форма третьего уравнения Максвелла (вывод).
10. Интегральная и дифференциальная форма четвертого уравнения Максвелла (вывод).
11. Закон сохранения энергии применительно к электромагнитным явлениям.
12. Уравнения электростатики. Граничные условия при наличии заряженных поверхностей.
13. Электростатическое поле в вакууме. Потенциал.
14. Физический смысл скалярного потенциала. Нормировка потенциала.
15. Уравнения Лапласа и Пуассона.
16. Электростатическое поле внутри проводника. Электростатическое поле вблизи поверхности проводника.
17. Потенциал проводника. Емкость. Металлический экран.
18. Конденсаторы. Емкость плоского конденсатора (вывод).
19. Емкость сферического конденсатора (вывод).
20. Емкость цилиндрического конденсатора (вывод).
21. Дипольное разложение потенциала.
22. Энергия электростатического поля.
23. Энергия диполя во внешнем поле.
24. Механические силы в электрическом поле. Момент сил, действующий на диполь.
25. Диэлектрики. Поляризация диэлектриков. Граничные условия при наличии диэлектриков.
26. Вектор поляризованности. Диэлектрическая восприимчивость.
27. Энергия диэлектрического тела во внешнем поле.
28. Объемные силы, действующие на диэлектрики.
29. Магнитостатика. Граничные условия магнитостатики в вакууме.
30. Энергия магнитного поля постоянных токов.
31. Самоиндукция и взаимная индукция.
32. Сила, действующая на ограниченное распределение тока во внешнем магнитном поле (вывод). Энергия.
33. Момент сил, действующий на ограниченное распределение тока во внешнем магнитном поле (вывод). Энергия.
34. Макроскопические уравнения в магнитостатике. Выражения для векторного потенциала (вывод).
35. Макроскопические уравнения в магнитостатике. Уравнения Максвелла в среде (вывод). Гистерезис.
36. Абсолютная магнитная проницаемость вещества. Абсолютная магнитная восприимчивость вещества.
37. Граничные условия для магнитной индукции и напряженности поля.
38. Область квазистационарных явлений. Условия квазистационарности.
39. Уравнения для квазистационарной области явлений.

40. Квазистационарные явления в линейных проводниках. Выражение для определения токов в проводнике по заданным сторонним силам, сопротивлению и коэффициенту индукции.
41. Контур с самоиндукцией, сопротивлением и емкостью. Выражение для силы тока (вывод).
42. Энергия в области квазистационарных явлений.
43. Силы в области квазистационарных явлений.
44. Скин-эффект.
45. Омическое сопротивление для случая квазистационарных и быстропеременных токов.
17. Электромагнитные волны. Уравнения для потенциалов (вывод).
18. Плоские волны. Свойства плоских волн (вывод). Вектор потока энергии для плоской волны.
19. Монохроматическая плоская волна. Виды поляризации волн (вывод).
20. Проблема излучения. Дифференциальные уравнения для потенциалов.
21. Калибровочные преобразования. Лоренцева калибровка.
22. Калибровочные преобразования. Кулоновская калибровка.
23. Функция Грина для волнового уравнения.
24. Выражения для запаздывающих потенциалов (вывод). Опережающие потенциалы.
25. Излучение от электрического момента. Уравнения для потенциалов (вывод).
26. Электрический поляризационный потенциал. Уравнение для электрического поляризационного потенциала (вывод).
27. Излучение от магнитного момента. Уравнения для потенциалов (вывод).
28. Магнитный поляризационный потенциал. Уравнение для магнитного поляризационного потенциала (вывод).
29. Уравнения для поляризационных потенциалов в пространстве вне источников поля. Выражения для поляризационных потенциалов (вывод).
30. Выражения для напряженностей в случае поля создаваемого электрическим диполем. Свойства поле.
31. Выражения и свойства полей, создаваемых электрическим вибратором в ближней и дальней зонах.
32. Вектор Умова-Пойтинга в волновой зоне. Зависимость мощности излучения от частоты.
33. Выражения для напряженностей и свойства полей, создаваемых переменным магнитным моментом.
34. Плоские волны в неограниченной однородной непроводящей среде.
35. Частное решение волнового уравнения для случая плоских волн. Свойства полей.
36. Преломление и отражение плоских электромагнитных волн на границе между диэлектриками.
37. Распространение электромагнитных волн в проводящих средах. Комплексная диэлектрическая проницаемость вещества.
38. Комплексный волновой вектор. Свойства полей.

Критерии оценки самостоятельной работы студентов

Критерии оценивания результатов самостоятельной работы студентов разработаны с учетом требований ФГОС ВО. Задания, выносимые на самостоятельную работу студентов, оцениваются по шкале «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно».

Оценка **«отлично»** выставляется при следующих условиях:

- даны исчерпывающие и обоснованные ответы на вопросы, поставленные в задании, выносимом на самостоятельную работу аспирантов;
- показано умение грамотно применять полученные теоретические знания при анализе событий действительности;
- показано глубокое и творческое овладение основной и дополнительной литературой;
- материал излагается аргументировано и логически стройно.

Оценка **«хорошо»** выставляется при следующих условиях:

- даны полные, достаточно глубокие и обоснованные ответы на вопросы, поставленные в задании, выносимом на самостоятельную работу аспирантов;
- показаны достаточно прочные практические навыки;
- даны полные, но недостаточно обоснованные ответы на дополнительные вопросы;
- показаны глубокие знания основной и недостаточное знакомство с дополнительной литературой;
- показано умение теоретически обосновывать высказываемые положения;
- ответы в основном были краткими, но в них не всегда выдерживалась логическая последовательность.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется при следующих условиях.

- даны в основном правильные ответы на все вопросы задания, выносимого на самостоятельную работу аспирантов, но без должной глубины и обоснования;
- показаны недостаточно прочные практические навыки;
- не даны положительные ответы на некоторые дополнительные вопросы;
- показаны недостаточные знания основной литературы;
- ответы были многословными, мысли излагались недостаточно четко и без должной логической последовательности.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется в случаях, когда не выполнены условия, позволяющие поставить оценку «удовлетворительно», когда аспирант не усвоил основного содержания предмета и слабо знает рекомендованную литературу.

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы.

8. А.А. Власов Макроскопическая электродинамика. – Изд-во Либроком, 2010.
9. В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. Современная электродинамика. Ч.1. Микроскопическая теория. – Изд-во НИЦ «Регулярная хаотическая динамика», 2005.

10. В.В. Мултановский, А.С. Василевский. Курс теоретической физики. Классическая электродинамика. – Изд-во Дрофа, 2006.
11. Р. Фейнман., Р. Лейтон, М. Сэндц. Фейнмановские лекции по физике. Вып.: Электродинамика. – Изд-во ЛКИ, 2008.
12. А.И. Алексеев. Сборник задач по классической электродинамике. – Изд-во Лань, 2008.
13. В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности. – Изд-во Лань, 2010.

Перечень дополнительной литературы:

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М., Наука, 1973г.
2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. – Изд-во Лань, 2009.
3. А.А. Сазанов. Четырехмерная модель мира по Минковскому. – Изд-во ЛКИ, 2008.
4. Ю.С. Владимиров. Классическая теория гравитации. – Изд-во Либроком, 2009.
5. Матвеев А.Н. Электродинамика. – М.: Наука, 1984 г.
6. Жирнов Н.И. Задачник-практикум по электродинамике. – М.: Наука, 1995 г.