

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»
для студентов направления подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
направленность (профиль):
«Информатика и математика»

Ставрополь, 2026

Содержание

Введение

Раздел 1. Матрицы и определители

Раздел 2. Системы линейных уравнений

Раздел 3. Элементы векторной алгебры

Раздел 4. Алгебраические линии и поверхности первого порядка

Раздел 5. Алгебраические линии и поверхности второго порядка

Раздел 6. Элементы высшей алгебры

Раздел 7. Линейные пространства

ВВЕДЕНИЕ

Цель освоения дисциплины «Алгебра и геометрия» является формирование профессиональной компетенции ПК-1 будущего бакалавра по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) "Информатика и математика", путем освоения возможностей использования средств и методов алгебры и геометрии для решения прикладных задач в педагогической сфере деятельности.

Основными задачами освоения дисциплины «Алгебра и геометрия» являются:

- формирование научного мировоззрения, понимания широты и универсальности методов алгебры и геометрии, умения применять эти методы в решении прикладных задач;
- воспитание математической культуры, которая предполагает четкое осознание необходимости и важности математической подготовки для специалиста в области математического и информационного образования;
- ознакомление с основными объектами алгебры и геометрии, а также их приложениями для решения различных задач, требующих применения логических средств;
- овладение современным математическим аппаратом алгебры и геометрии для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач в образовательной области.

Дисциплина «Алгебра и геометрия» относится к дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений. Ее освоение осуществляется в 1-2 семестрах.

В результате освоения дисциплины «Алгебра и геометрия» формируется профессиональная компетенция **ПК-1** в соответствии, с которой студент должен:

Знать:

фундаментальные основы алгебры и геометрии, способен на научной основе применять данные знания для построения и функционирования образовательного процесса в области преподавания математики.

Уметь:

использовать основные положения алгебры и геометрии в будущей профессиональной деятельности.

Владеть:

методами линейной алгебры и аналитической геометрии для осуществления учебной и проектной деятельности обучающихся.

РАЗДЕЛ 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Учебные вопросы:

1. Матрицы и их виды.
2. Операции над матрицами и их свойства.
3. Ранг матрицы. Ступенчатый вид матрицы.
4. Определители, их свойства.
5. Миноры и алгебраические дополнения.
6. Вычисление определителей.
7. Обратная матрица, условие существования обратной матрицы.
8. Способы вычисления обратной матрицы.

В результате изучения данного раздела студент должен:

Знать:

основные положения матричной алгебры.

Уметь:

использовать основные положения матричной алгебры в будущей профессиональной деятельности.

Владеть:

навыками использования фундаментальных знаний в области матричной алгебры в профессиональной деятельности.

Примеры решения задач

Пример 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти $C = 2A + B$.

Решение

$$C = 2A + B = 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 10 & 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 10 \\ 10 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти AB и BA .

Решение

1. $A \cdot B = C$,
 $2 \times 2 \quad 2 \times 3 \quad 2 \times 3$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $B \cdot A$ – не определено.
 $2 \times 3 \quad 2 \times 2$

Пример 3. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 4 & 15 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 17 & 4 & 13 & -9 \end{pmatrix}$.

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 4 & 15 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 17 & 4 & 13 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2 \cdot 1 \\ \swarrow +}} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 13 & 0 & 13 & -13 \\ 0 & 16 & 0 & 16 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{:13 \\ :16}} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-1 \\ \swarrow +}} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $r(A) = 2$.

Пример 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 = 6 + 1 = 7.$$

Пример 5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2 - 3 - 12 = -13$$

Пример 6. Дан определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. Найти M_{23} и A_{23} .

Решение

Элемент $a_{23} = 7$. Вычеркнем из определителя 2-ю строку и 3-й столбец. В результате получим:

$$\text{Минор элемента } a_{23}: M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -21.$$

$$\text{Алгебраическое дополнение элемента } a_{23}: A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = -(-21) = 21.$$

Пример 7. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2-6 \\ \swarrow + \\ \swarrow + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -12 \\ 0 & -9 & -23 & -41 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -12 \\ -9 & -23 & -41 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -12 \\ -9 & -23 & -41 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ \swarrow + \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & -23 & -35 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & -12 \\ -23 & -35 \end{vmatrix} = -303.$$

Пример 8. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (с помощью присоединенной матрицы).

Решение

1. Найдем определитель матрицы $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$. Следовательно, обратная матри-

ца A^{-1} существует.

2. Найдем присоединенную матрицу $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

$$\begin{matrix} A_{11}=3 & A_{21}=-4 & A_{31}=2 \\ A_{12}=-6 & A_{22}=2 & A_{32}=-1 \\ A_{13}=3 & A_{23}=-1 & A_{33}=-4 \end{matrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

4. Можно показать, что $AA^{-1} = E$ (выполнить самостоятельно).

Пример 9. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (с помощью элементарных преобразований).

Решение

1. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$. Следовательно, обратная матрица A^{-1} существует.

$$\begin{aligned}
2. \quad & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-3R_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{4R_2} \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{:9} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/9 & 1/9 & 4/9 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{array} \right). \\
3. \quad & A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4. Проверка: $AA^{-1} = E$.

Задачи для самостоятельного решения

Матрицы и операции над ними

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решить уравнение $5A + 2X - B = O$.

2. Найти произведение матриц ABC , где $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить $AB - BA$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить матрицу $P = ABC - 3E$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица соответствующего порядка.

5. Найти ранги матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

Определители и их свойства

6. Вычислить определители 2-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix};$

в) $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x & x+1 \end{vmatrix};$

г) $\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{vmatrix}.$

7. Вычислить определители 3-го порядка по правилу треугольников и разлагая их по строке или столбцу:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 10 & 3 & 16 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & -a \\ a & a & x \end{vmatrix}.$$

8. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

9. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{д) } \begin{vmatrix} 0 & 6 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 26 \\ -3 & 8 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Обратная матрица

10. При каких значениях λ матрица $A = \begin{pmatrix} \lambda & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ не имеет обратной?

11. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами - с помощью присоединенной матрицы

и с помощью элементарных преобразований: а) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

12. Решить матричные уравнения: а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $X \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы:

1. Ивлева, А. М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / А. М. Ивлева, П. И. Прилуцкая, И. Д. Черных. - 5-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2019. - 183 с. - ISBN 978-5-7782-3868-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL:

<https://www.iprbookshop.ru/98793.html>

2. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2011. - 265 с. - ISBN 978-985-536-229-7. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28035.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Пономарёв, К. Н. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия и комплексные числа: учебное пособие / К. Н. Пономарёв, И. А. Сажин. - 2-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2022. - 127 с. - ISBN

978-5-7782-4735-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/126500.html>

2. Чеголин, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / А. П. Чеголин. - Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/68568.html>

3. Алания, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Алания, С. М. Гусейн-Заде, И. А. Дынников. - Москва: Логос, 2005. - 376 с. - ISBN 5-94010-375-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/9121.html>

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Бобылева, Т. Н. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие / Т. Н. Бобылева, Л. В. Кирьянова, Т. Н. Титова. - Москва: МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 144 с. - ISBN 978-5-7264-1909-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/80626.html>

2. Лебедева, Е. А. Практические занятия по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебно-методическое пособие / Е. А. Лебедева, О. Е. Рощенко, Т. И. Ерзина. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2013. - 130 с. — ISBN 978-5-7782-2275-5. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/45428.html>

РАЗДЕЛ 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебные вопросы:

1. Системы линейных уравнений, основные понятия.
2. Матричный метод решения систем линейных уравнений
3. Правило Крамера.
4. Теорема Кронекера-Капелли.
5. Метод Гаусса.
6. Системы линейных однородных уравнений.

В результате изучения данного раздела студент должен:

Знать:

основные положения теории систем линейных алгебраических уравнений.

Уметь:

использовать основные положения теории систем линейных алгебраических уравнений в будущей профессиональной деятельности.

Владеть:

навыками использования фундаментальных знаний в теории систем линейных алгебраических уравнений в профессиональной деятельности.

Примеры решения задач

Пример 1. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение

Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 & -3 \\ \swarrow + \\ \\ \swarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :(-5) \\ \\ :(-5) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3 & -1 \\ \swarrow + \\ \swarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :2 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r=3, n=3$$

Система совместная и определенная, т.е. имеет единственное решение.

Перейдем от матрицы к системе:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Отсюда получим решение
$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ: (1,2,1).

Пример 2. Решить систему методом Гаусса
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение

Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & | & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & | & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & | & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & | & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \uparrow + \\ \uparrow + \end{smallmatrix}} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & | & 10 \\ 0 & 22 & 10 & -2 & | & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} -2 \\ \uparrow + \end{smallmatrix}} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 2 < n = 4$$

Система совместная и неопределенная, т.е. имеет множество решений.

Число неизвестных: $n = 4$.

Число главных неизвестных: $r = 2$.

Число свободных неизвестных: $n - r = 4 - 2 = 2$.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 11x_2 + 5x_3 - x_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1, x_2 - \text{главные неизвестные} \\ x_3, x_4 - \text{свободные неизвестные} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} 11x_2 + 5x_3 - x_4 &= 10, & -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2, \\ x_2 &= \frac{10}{11} - \frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4, & x_1 &= 2x_2 + x_3 - x_4 - 2, \\ x_2 &= \frac{10 - 5x_3 + x_4}{11} & x_1 &= 2 \cdot \frac{10 - 5x_3 + x_4}{11} + x_3 - x_4 - 2, \\ & & x_1 &= \frac{-2 + x_3 - 9x_4}{11} \end{aligned}$$

$$\text{Общее решение: } \left(\frac{-2 + x_3 - 9x_4}{11}, \frac{10 - 5x_3 + x_4}{11}, x_3, x_4 \right).$$

Пример 3. Исследовать на совместность систему
$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x + 3y = -2. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} -3 \\ \uparrow + \end{smallmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} r(A) = 1 \\ r(\bar{A}) = 2 \end{matrix} \Rightarrow r(A) \neq r(\bar{A}) \Rightarrow \text{система несовместна.}$$

Пример 4. Решить систему линейных уравнений матричным методом
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение

Введем матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$1. \Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{система совместна и определена.}$$

$$2. X = A^{-1}B, \quad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Ответ: (3, 1, 2).

Пример 5. Решить систему по правилу Крамера:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение

$$1. \Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{система совместна и определена.}$$

$$2. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 15, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 10.$$

$$3. x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2.$$

Ответ: (3, 1, 2).

Задачи для самостоятельного решения

Методы решения квадратных систем линейных уравнений

1. Решить системы линейных уравнений матричным методом и по формулам Крамера:

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0; \end{cases} \quad в) \begin{cases} 5x + 2y + 5z = 4, \\ 3x + 5y - 3z = -1, \\ -2x - 4y + 3z = 1. \end{cases}$$

$$2. \text{Решить систему уравнений по правилу Крамера: } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$$

Исследование и решение систем линейных уравнений

3. Исследовать и решить системы линейных уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3; \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4; \end{array} \right. \\ \text{в)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 9; \end{array} \right. & \text{г)} \left\{ \begin{array}{l} 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 6x_5 = 3; \end{array} \right. \\ \text{д)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0. \end{array} \right. & \end{array}$$

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы:

1. Ивлева, А. М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / А. М. Ивлева, П. И. Прилуцкая, И. Д. Черных. - 5-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2019. - 183 с. - ISBN 978-5-7782-3868-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/98793.html>
2. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2011. - 265 с. - ISBN 978-985-536-229-7. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28035.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Пономарёв, К. Н. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия и комплексные числа: учебное пособие / К. Н. Пономарёв, И. А. Сажин. - 2-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2022. - 127 с. - ISBN 978-5-7782-4735-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/126500.html>
2. Чеголин, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / А. П. Чеголин. - Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/68568.html>
3. Алания, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Алания, С. М. Гусейн-Заде, И. А. Дынников. - Москва: Логос, 2005. - 376 с. - ISBN 5-94010-375-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/9121.html>

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Бобылева, Т. Н. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие / Т. Н. Бобылева, Л. В. Кирьянова, Т. Н. Титова. - Москва: МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 144 с. - ISBN 978-5-7264-1909-1. - Текст: элек-

тронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/80626.html>

2. Лебедева, Е. А. Практические занятия по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебно-методическое пособие / Е. А. Лебедева, О. Е. Рощенко, Т. И. Ерзина. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2013. - 130 с. — ISBN 978-5-7782-2275-5. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/45428.html>

РАЗДЕЛ 3. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебные вопросы:

1. Векторы. Линейные операции над векторами.
2. Линейная зависимость векторов на плоскости и в пространстве.
3. Понятие базиса. Координаты вектора.
4. Проекция вектора на ось.
5. Аффинная система координат.
6. Прямоугольная система координат.
7. Полярная система координат.
8. Скалярное произведение векторов.
9. Правые и левые тройки векторов и системы координат.
10. Векторное произведение векторов.
11. Смешанное произведение векторов.

В результате изучения данного раздела студент должен:

Знать:

основные положения векторной алгебры.

Уметь:

использовать основные положения векторной алгебры в будущей профессиональной деятельности.

Владеть:

навыками использования фундаментальных знаний в области векторной алгебры в профессиональной деятельности.

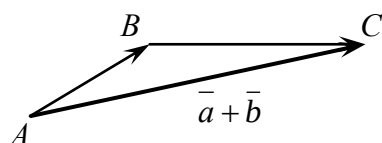
Примеры решения задач

Пример 1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить их сумму.

Решение

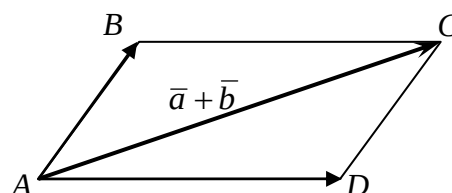
Построение можно выполнить двумя способами:

правило треугольника



Если $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \vec{b}$, то $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ по определению суммы.

правило параллелограмма

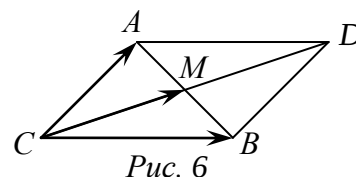


Если $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AD} = \vec{b}$, то $\overline{BC} = \overline{AD} = \vec{b}$ (по свойству противоположащих сторон параллелограмма), поэтому $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ по определению суммы.

Пример 2. В треугольнике ABC M – середина стороны AB . Выразить вектор $\overline{CM}$ через векторы $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$.

Решение

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ADBC$ таким образом, чтобы отрезок CM лежал на его диагонали (рис. 6). По свойству параллелограмма $CM = MD$, по правилу параллелограмма $\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{CB}$, $\overline{CM} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$.



Ответ: $\overline{CM} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$.

Пример 3. В тетраэдре $DABC$: $CM=MB$, $\overline{AD} = \overline{m}$, $\overline{DC} = \overline{n}$, $\overline{DM} = \overline{p}$ (рис. 7). Разложить вектор $\overline{AB}$ по векторам $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$. Выяснить компланарны ли векторы $\overline{AC} + \overline{AM}$, $\overline{DA} - \overline{DB}$, $\overline{BC}$.

Решение

По правилу многоугольника

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CB} = \overline{AD} + \overline{DC} + 2\overline{CM} = \\ &= \overline{AD} + \overline{DC} + 2(\overline{DM} - \overline{DC}) = \overline{m} + \overline{n} + 2\overline{p} - 2\overline{n} = \overline{m} + 2\overline{p} - \overline{n}.\end{aligned}$$

Вектор $\overline{AC} + \overline{AM}$ лежит в плоскости (ABC) , так как все точки A, C, M лежат в ней; $\overline{DA} - \overline{DB} = -\overline{AD} - \overline{DB} = -(\overline{AD} + \overline{DB}) = -\overline{AB} = \overline{BA}$ лежит в плоскости (ABC) , $\overline{BC}$ лежит в плоскости (ABC) . По определению эти векторы компланарны.

Ответ: $\overline{AB} = \overline{m} + 2\overline{p} - \overline{n}$, векторы $\overline{AC} + \overline{AM}$, $\overline{DA} - \overline{DB}$, $\overline{BC}$ компланарны.

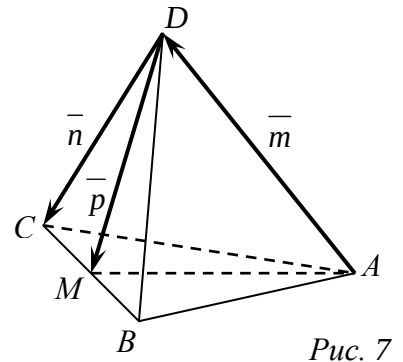


Рис. 7

Пример 4. Показать, что на плоскости векторы $\overline{e}_1(1,2)$ и $\overline{e}_2(3,4)$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{x}(7,10)$ в этом базисе.

Решение.

Пусть векторы $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ линейно зависимы, тогда существует единственное число $c \in R$ такое, что $\overline{e}_2 = c \cdot \overline{e}_1$, т.е. $(3,4) = (1c, 2c)$. Запишем это равенство в координатах $\begin{cases} 3 = c, \\ 4 = 2c; \end{cases} \begin{cases} c = 3, \\ c = 2, \end{cases}$ что невозможно, следовательно, векторы $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ линейно независимы.

Покажем, что произвольный вектор $\overline{a}(a_1, a_2)$ можно разложить по векторам $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$, т.е. найдутся $\alpha, \beta \in R$ такие, что $\overline{a} = \alpha \overline{e}_1 + \beta \overline{e}_2$. Запишем это равенство в координатах $\begin{cases} \alpha + 3\beta = a_1, \\ 2\alpha + 4\beta = a_2. \end{cases}$ Найдем α и β , для этого решим систему уравнений методом Гаусса.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0, \text{ следовательно, система имеет единственное решение, т.е.}$$

разложение произвольного вектора $\overline{a}$ по векторам $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ единственно. Это значит, что векторы $\overline{a}$, $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ линейно зависимы, как и любые три вектора, поэтому $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ образуют базис.

Найдем координаты вектора $\overline{x}$ относительно этого базиса. Для этого подставим в систему вместо a_1, a_2 координаты вектора $\overline{x}$:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 7, \\ 2\alpha + 4\beta = 10, \end{cases} \begin{cases} \alpha + 3\beta = 7, \\ \alpha + 2\beta = 5, \end{cases} \begin{cases} \beta = 2, \\ \alpha = 5 - 2\beta, \end{cases} \begin{cases} \beta = 2, \\ \alpha = 1, \end{cases} \quad \text{т.е. } \overline{x} = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2.$$

Ответ: $\overline{x} = (1,2)$ в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2$.

Пример 5. Точка $C(2,3)$ служит серединой отрезка AB . Определить координаты точки A , если $B(7,5)$.

Решение.

Пусть $A(x,y)$, тогда $\overline{AC} = (2-x, 3-y)$, $\overline{CB} = (7-2, 5-3) = (5,2)$ и так как $\overline{AC} = \overline{CB}$, то

$$\begin{cases} 2-x=5, \\ 3-y=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3, \\ y=1. \end{cases}$$

Ответ. $A(-3,1)$.

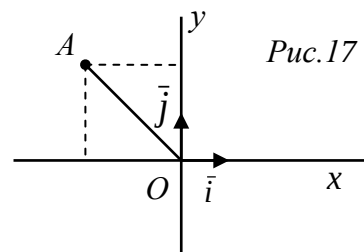
Пример 6. Найти прямоугольные координаты и построить точку $A\left(2\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$, если полюс совпадает с началом координат, полярная ось направлена по оси абсцисс.

Решение

По формулам (1) $x = 2\sqrt{2} \cos \frac{3}{4}\pi = -2$; $y = 2\sqrt{2} \sin \frac{3}{4}\pi = 2$;

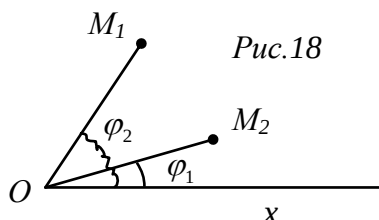
$A(-2,2)$. Построение см. на рис. 17.

Ответ: $A(-2,2)$.



Пример 7. Найти полярные координаты точки $M(1, -\sqrt{3})$, если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось - с положительным направлением оси абсцисс (т.е. системы координат согласованы).

Решение



По формулам (2) $\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$, $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi = \frac{5}{3}\pi$

(так как точка M лежит в IV четверти). Итак, $M\left(2, \frac{5}{3}\pi\right)$.

Ответ: $M\left(2, \frac{5}{3}\pi\right)$.

Пример 8. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Решение

По свойству векторного произведения $S = \left| \left[(\vec{a} + 3\vec{b}), (3\vec{a} + \vec{b}) \right] \right|$. Упростим выражение $\left[(\vec{a} + 3\vec{b}), (3\vec{a} + \vec{b}) \right] = [\vec{a}, 3\vec{a} + \vec{b}] + 3[\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{b}] + 9[\vec{b}, \vec{a}] + 3[\vec{b}, \vec{b}] = -8[\vec{a}, \vec{b}]$, (так как $\vec{a}$ параллелен $\vec{a}$, $\vec{b}$ параллелен $\vec{b}$, то $[\vec{a}, \vec{a}] = [\vec{b}, \vec{b}] = 0$).

Таким образом, $S = |-8 \cdot [\vec{a}, \vec{b}]| = 8 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 4$ (кв.ед.).

Ответ: $S=4$ кв.ед.

Пример 9. Вычислить площадь треугольника ABC , если $\overline{AB}(1,2,3), \overline{BC}(2,0,2)$.

Решение.

По свойству векторного произведения $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\left[\overline{AB}, \overline{BC} \right]|$.

$$\left[\overline{AB}, \overline{BC} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k},$$

$$|[\overline{AB}, \overline{BC}]| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{3}, \quad S = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ: $S = 2\sqrt{3}$ кв.ед.

Пример 10. Вычислить $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a})$.

Решение

Так как $(\bar{a} - \bar{b}) + (\bar{b} - \bar{c}) + (\bar{c} - \bar{a}) = \bar{0}$, то векторы $\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{b} - \bar{c}$, $\bar{c} - \bar{a}$ компланарны, поэтому $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a}) = 0$.

Ответ: $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a}) = 0$.

Пример 11. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ векторы $\overline{AB}(0,1,-1), \overline{AC}(2,-1,4)$ определяют основание, $\overline{AA_1} = (-3,2,2)$. Найти высоту призмы.

Решение

$V = \frac{1}{2} S_{осн} \cdot h, S_{осн} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]|$, так как объем призмы в два раза меньше объема параллелепипеда, построенного на тех же векторах, то $V = \frac{1}{2} |\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AA_1}|$. Тогда

$$h = \frac{2 \cdot |\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AA_1}|}{|[\overline{AB}, \overline{AC}]|}, \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AA_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -16 - 1 = -17,$$

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (3, -2, -2),$$

$$h = \frac{2 \cdot |-17|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{34}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17} \text{ (ед.)}.$$

Ответ: $h = 2\sqrt{17}$ ед.

Задачи для самостоятельного решения

Понятие вектора и линейные операции над векторами

1. Дан параллелограмм $ABCD$. O – точка пересечения диагоналей AC и BD . Обозначив $\overline{AO} = \bar{a}$, $\overline{BO} = \bar{b}$, выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$.
2. Дано: $\bar{a} = (2, 3, -1)$, $\bar{b} = (0, 1, 4)$, $\bar{c} = (1, 0, 3)$. Найти координаты векторов:
 - а) $\bar{p} = 2\bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c}$
 - б) $\bar{q} = -\bar{a} + 3\bar{b} + \bar{c}$
3. Даны векторы $\bar{a} = (3, -2)$, $\bar{b} = (-2, 1)$, $\bar{c} = (7, -4)$. Разложить вектор $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Системы координат

4. В аффинной системе координат построить точки $A(3, -1, -4)$ и $B(-2, 1, 5)$.
5. В прямоугольной декартовой системе координат заданы точки $A(4, 3, 5)$, $B(-3, 2, 1)$, $C(2, -3, 0)$, $D(0, 0, 3)$. Найти координаты их проекций:
 - а) на плоскость Oxy
 - б) на плоскость Oxz
 - в) на плоскость Oyz
 - г) на ось Ox
 - д) на ось Oy
 - е) на ось Oz

6. В прямоугольной декартовой системе координат даны две смежные вершины параллелограмма $A(1, -2)$, $B(3, 2)$ и точка $N(5, -1)$ пересечения его диагоналей. Найти две другие вершины параллелограмма и длины его сторон.
7. Даны точки в полярной системе координат $A(8, 4\pi/3)$ и $B(6, \pi/3)$. Найти полярные координаты середины отрезка AB .

Нелинейные операции над векторами **(скалярное, векторное и смешанное произведения)**

8. Вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$. найти его координаты при условии, что $|\vec{a}| = 2$.
9. Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$. Найти модуль вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.
10. Найти длины сторон и углы треугольника с вершинами $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$.
11. Дано: $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = 2\pi/3$. Найти: $|\vec{a} \times \vec{b}|$, $|\vec{a} + 2\vec{b}|$, $|\vec{a} + 2\vec{b}| \times |-\vec{a} + 3\vec{b}|$.
12. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.
13. При каком значении λ векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \lambda\vec{k}$, $\vec{b} = (0, 1, 0)$ и $\vec{c} = (3, 0, 1)$ компланарны?
14. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (1, -2, 1)$, $\vec{b} = (3, 2, 1)$, $\vec{c} = (1, 0, -1)$.
15. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D , если известно, что она лежит на оси Oy .

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы:

1. Ивлева, А. М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / А. М. Ивлева, П. И. Прилуцкая, И. Д. Черных. - 5-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2019. - 183 с. - ISBN 978-5-7782-3868-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/98793.html>
2. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2011. - 265 с. - ISBN 978-985-536-229-7. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28035.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Пономарёв, К. Н. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия и комплексные числа: учебное пособие / К. Н. Пономарёв, И. А. Сажин. - 2-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2022. - 127 с. - ISBN 978-5-7782-4735-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/126500.html>
2. Чеголин, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / А. П. Чеголин. - Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/68568.html>
3. Алания, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Алания, С. М. Гусейн-Заде, И. А. Дынников. - Москва: Логос, 2005. - 376 с. - ISBN 5-

94010-375-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/9121.html>

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Бобылева, Т. Н. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие / Т. Н. Бобылева, Л. В. Кирьянова, Т. Н. Титова. - Москва: МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 144 с. - ISBN 978-5-7264-1909-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/80626.html>

2. Лебедева, Е. А. Практические занятия по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебно-методическое пособие / Е. А. Лебедева, О. Е. Рощенко, Т. И. Ерзина. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2013. - 130 с. — ISBN 978-5-7782-2275-5. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/45428.html>

РАЗДЕЛ 4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Учебные вопросы:

1. Различные виды уравнений прямой на плоскости.
2. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
3. Расстояние от точки до прямой.
4. Различные виды уравнений плоскости.
5. Взаимное расположение двух плоскостей.
6. Расстояние от точки до плоскости.
7. Различные виды уравнений прямой в пространстве.
8. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
9. Взаимное расположение прямой и плоскости.

В результате изучения данного раздела студент должен:

Знать:

основные положения теории алгебраических линий и поверхностей первого порядка.

Уметь:

использовать основные положения теории алгебраических линий и поверхностей первого порядка в будущей профессиональной деятельности.

Владеть:

навыками использования фундаментальных знаний в теории алгебраических линий и поверхностей первого порядка в профессиональной деятельности.

Примеры решения задач

Пример 1. Задайте ту полуплоскость, в которую попадает точка $M(1,2)$ относительно прямой $l: 5x-3y+7=0$.

Решение

Подставим координаты точки M в левую часть уравнения прямой l , получим неравенство $5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 7 = 5 - 6 + 7 = 6 > 0$. Этому же неравенству будут удовлетворять все точки рассматриваемой полуплоскости.

Ответ: $5x-3y+7>0$.

Пример 2. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b=-3$ и образующий с положительным направлением оси абсцисс угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Построить прямую.

Решение.

Угловым коэффициентом прямой $k = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Так как прямая отсекает от оси ординат отрезок $b=-3$, то она проходит через точку $B(0,b)$, т.е. $B(0,-3)$. Уравнение прямой имеет вид $y-(-3)=1(x-0)$, т.е. $y=x-3$ или $x-y-3=0$ - общее уравнение прямой. Для построения достаточно двух точек. Одна точка известна – это точка B . Пусть ордината другой точки равна нулю, подставляя $y=0$ в общее уравнение прямой, получим $x=3$, т.е. прямая проходит через точку $A(3,0)$ (рис.24).

Ответ: $x-y-3=0$ - общее уравнение прямой.

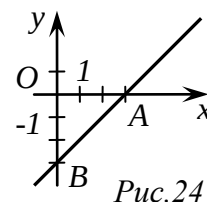


Рис.24

Пример 3. Дан треугольник ABC : $A(0,1)$, $B(6,5)$, $C(12,-1)$.

1) Составить уравнение медианы AM .

Решение

M – середина BC , поэтому координаты точки M $x_M = \frac{6+12}{2} = 9$; $y_M = \frac{5+(-1)}{2} = 2$. Запишем уравнение прямой AM как уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x-9}{0-9} = \frac{y-2}{1-2}, \quad \frac{x-9}{-9} = \frac{y-2}{-1},$$

$x-9=9y-18$, $x-9y+9=0$ – общее уравнение AM .

Ответ: $x-9y+9=0$.

2) Составить уравнение высоты CH .

Решение

$CH \perp AB$, поэтому направляющий вектор $\overline{AB}(6,4)$ прямой AB является нормальным для прямой CH . Пусть прямая CH задана общим уравнением $ax+by+c=0$, тогда $\vec{n}(a,b) \perp CH$, поэтому $a=6$, $b=4$, т.е. $6x+4y+c=0$. Так как $C \in CH$, то координаты точки C удовлетворяют уравнению прямой, подставляя координаты точки C в уравнение прямой CH , найдем коэффициент c : $6 \cdot 12 + 4 \cdot (-1) + c = 0$, $c = -68$, т.е. $6x+4y-68=0$ или $3x+2y-34=0$ – уравнение прямой CH .

Ответ: $3x+2y-34=0$.

Пример 4. Составить уравнение катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы $3x-y+5=0$ и вершину прямого угла $C(4,-1)$.

Решение

Углы при основании равнобедренного треугольника 45° , поэтому для угла α между прямыми AB и AC , где AC задана уравнением $ax+by+c=0$, имеем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3b+a}{3a-b} = 1$. Так как точка $C \in AC$, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т.е. $4a-b+c=0$. Имеем систему: $\begin{cases} 3b+a=3a-b, \\ 4a-b+c=0, \end{cases} \begin{cases} 2b=a, \\ c=-7b, \end{cases}$ т.е. $2bx+by-7b=0$ или $2x+y-7=0$ – уравнение прямой AC .

Так как $BC \perp AC$, то $\vec{n}(2,1) \perp AC$, $\vec{n}$ параллелен BC . Запишем каноническое уравнение прямой BC : $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{1}$; $x-4=2y+2$; $x-2y-6=0$.

Ответ: $2x+y-7=0$, $x-2y-6=0$.

Пример 5. Даны стороны AB : $x+3y-7=0$, BC : $4x-y-2=0$, AC : $6x+8y-10=0$ треугольника ABC . Найти высоту, опущенную из вершины B .

Решение

$B = AB \cap BC$, поэтому ее координаты удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x+3y-7=0, \\ 4x-y-2=0, \end{cases} \begin{cases} x=7-3y, \\ 28-12y-y-2=0, \end{cases} \begin{cases} y=2, \\ x=1, \end{cases}$$

т.е. $B(1,2)$, $\rho(B, AC) = \frac{|6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{6}{10} = 0,6$.

Ответ: $\rho(B, AC) = 0,6$.

Пример 6. Даны параллельные плоскости $\alpha: x-y+z+1=0$ и $\beta: 2x-2y+2z-5=0$.

Описать алгебраически область между ними.

Решение

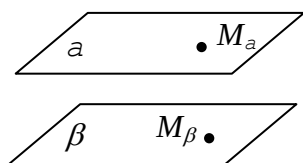


Рис. 31

Область между плоскостями есть пересечение двух полупространств, образованных этими плоскостями. Относительно плоскости α выберем то полупространство, которое содержит плоскость β , а значит и любую ее точку. Возьмем некоторую точку $M_\beta(0,0,2.5) \in \beta$ (рис. 31) (координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости β) и для вычисления знака неравенства подставим ее координаты в уравнение плоскости α :

$0-0+2.5+1>0$, поэтому $x-y+z+1>0$ - первое неравенство системы.

Возьмем некоторую точку $M_\alpha(0,0,-1) \in \alpha$ (рис. 31) и определим знак второго неравенства $2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) - 5 < 0$, поэтому $2x-2y+2z-5 < 0$ - второе неравенство системы.

Таким образом, область между плоскостями α и β характеризуется системой неравенств

$$\begin{cases} x-y+z+1>0, \\ 2x-2y+2z-5<0. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x-y+z+1>0, \\ 2x-2y+2z-5<0. \end{cases}$

Пример 7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2,-1,4)$, $B(3,2,-1)$ перпендикулярно плоскости $\alpha: x+y+2z-3=0$.

Решение

Так как точки A, B принадлежат плоскости, то вектор $\overline{AB}(1,3,-5)$ параллелен ей. Вектор $\vec{n}(1,1,2) \perp \alpha$, поэтому $\vec{n}$ параллелен искомой плоскости. Запишем каноническое уравнение плоскости, проходящей через точку A параллельно векторам $\overline{AB}$ и $\vec{n}$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad (x-2) \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-4) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 11x-7y-2z-21=0$$

общее уравнение плоскости.

Ответ: $11x-7y-2z-21=0$.

Пример 8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(5,4,3)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.

Решение

Так как плоскость отсекает равные отрезки от осей координат, то ее уравнение имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$. Так как она проходит через точку A , то координаты точки A удовлетворяют

уравнению плоскости, т.е. $\frac{5}{a} + \frac{4}{a} + \frac{3}{a} = 1$, $a=12$. Тогда $x+y+z=12$ - общее уравнение плоскости.

Ответ: $x+y+z-12=0$.

Пример 9. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $P(0,2,0)$ и $Q(2,0,0)$ и образующей угол 60° с плоскостью $x=0$.

Решение

Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ уравнение искомой плоскости. Так как точки P и Q принадлежат ей, то их координаты удовлетворяют этому уравнению: $2B + D = 0, 2A + D = 0$. Так как плоскость образует угол в 60° с плоскостью $x = 0$, то

$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} B = -\frac{1}{2}D, \\ A = -\frac{1}{2}D, \\ 2A = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} B = A = -\frac{1}{2}D, \\ -D = \sqrt{\frac{1}{4}D^2 + \frac{1}{4}D^2 + C^2}, \end{cases} \quad D^2 = \frac{1}{2}D^2 + C^2,$$

$$\frac{1}{2}D^2 = C^2.$$

Пусть $C = 1$, тогда $D = -\sqrt{2}, A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (так как $D < 0$ из последнего уравнения системы).

Таким образом, уравнение искомой плоскости имеет вид: $\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + z - \sqrt{2} = 0$

или $x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$.

Ответ: $x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$.

Пример 10. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $K(1, -3, 4)$ параллельно прямой $l: \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 3y - z - 1 = 0. \end{cases}$

Решение

Так как прямые параллельны, то направляющий вектор $\vec{p} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-2, 3, 7)$

прямой l является направляющим вектором искомой прямой, каноническое уравнение которой имеет вид: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{7}$.

Ответ: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{7}$.

Пример 11. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, 1, 1)$ перпендикулярно плоскости $\alpha: 2x + 3y + z - 1 = 0$.

Решение

Так как прямая и плоскость перпендикулярны, то вектор нормали $\vec{n}(2, 3, 1)$ к плоскости α является направляющим для искомой прямой, каноническое уравнение которой имеет

вид: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z-1$.

Ответ: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z-1$.

Пример 12. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $B(1,5,-1)$ перпендикулярно

прямым $l_1: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}$ и $l_2: \begin{cases} x = 2-3t, \\ y = -1+t, \\ z = -2t. \end{cases}$

Решение

Искомую прямую m рассмотрим как прямую, проходящую через точку B перпендикулярно плоскости a такой, что прямая l_1 параллельна a , прямая l_2 параллельна a , $B \in a$. Векторы $\vec{a}(-1,3,-1)$ и $\vec{b}(-3,1,-2)$ являются направляющими для прямых l_1 и l_2 соответственно, поэтому они параллельны плоскости a . Каноническое уравнение плоскости a имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad (x-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (y-5) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-5x + y + 8z + 18 = 0.$$

Вектор нормали $\vec{n}(-5,1,8)$ к плоскости a является направляющим для искомой прямой m , поэтому ее каноническое уравнение имеет вид $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{8}$.

Ответ: $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{8}$.

Пример 13. Найти угол между прямой $l: \frac{x}{2} = \frac{y+12}{3} = \frac{z-4}{6}$ и плоскостью $a: 6x+15y-10z=0$.

Решение

Направляющим вектором прямой l является вектор $\vec{a}(2,3,6)$, поэтому

$$\sin \varphi = \frac{|6 \cdot 2 + 15 \cdot 3 - 10 \cdot 6|}{\sqrt{6^2 + 15^2 + (-10)^2} \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{3}{133}; \quad \varphi = \arcsin \frac{3}{133}.$$

Ответ: $\varphi = \arcsin \frac{3}{133}$.

Пример 14. Из начала координат опустить перпендикуляр на прямую $l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}$.

Решение

Искомый перпендикуляр m лежит в плоскости a , проходящей через $O(0,0,0)$ перпендикулярно прямой l с направляющим вектором $\vec{a}(2,3,1)$. Тогда $\vec{a} \perp a$, поэтому общее уравнение плоскости a имеет вид $2x+3y+z+D=0$, так как $O \in a$, то ее координаты удовлетворяют полученному уравнению: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 + D = 0$, т.е. $D=0$, $a: 2x+3y+z=0$.

Найдем точку пересечения прямой l и плоскости a , для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}, \\ 2x+3y+z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2z-4, \\ y = 3z-8, \\ 2x+3y+z=0. \end{cases} \quad A = l \cap a, \quad A\left(\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{16}{7}\right).$$

Запишем уравнение прямой m , проходящей через точки O и A : $\frac{x-0}{\frac{4}{7}-0} = \frac{y-0}{-\frac{8}{7}-0} = \frac{z-0}{\frac{16}{7}-0}$

или $4x = -2y = z$.

Ответ: $4x = -2y = z$.

Задачи для самостоятельного решения

Прямая на плоскости

1. Написать уравнения прямых, проходящих:
 - а) через точки $A(-1, 1)$ и $B(2, 5)$;
 - б) через начало координат и точку $M(3, 2)$;
 - в) через точку $C(2, -6)$ и параллельно вектору $\vec{a} = (1, -3)$;
 - г) через точку $A(3, 5)$ и перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2, 1)$.
2. При каких значениях A прямая $Ax + 5y - 40 = 0$ отсекает на координатных осях равные отрезки?
3. Найти значения B , при которых прямая $2x + By - 6 = 0$ образует с осью Ox углы $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 135^\circ$.
4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$ перпендикулярно к прямой $y = 2x$.
5. Написать уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника $A(5, -4)$, $B(-1, 3)$, $C(-3, -2)$ параллельно противоположным сторонам.
6. Найти угол между прямыми:
 - а) $6x - 3y + 5 = 0$, $2x - 6y - 3 = 0$;
 - б) $y = 2x - 3$, $y = \frac{1}{2}x + 1$.
7. Определить, при каких значениях m и n две прямые $mx + 8y + n = 0$, $2x + my - 1 = 0$
 - а) параллельны;
 - б) совпадают;
 - в) перпендикулярны.
8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, 4)$ и удаленной от начала координат на расстояние $d = 2$.

Плоскость и ее уравнения

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(4, -4, 2)$ и параллельной плоскости Oxz .
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(5, 4, 3)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.
11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3, 4, -5)$, параллельно векторам $\vec{a} = (3, 1, -1)$ и $\vec{b} = (1, -2, 1)$.
12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(7, 6, 7)$, $M_2(5, 10, 5)$ и $M_3(-1, 8, 9)$.
13. Определить угол между плоскостями $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$ и $x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$.
14. На оси Oy найти точку, отстоящую от плоскости $x + 2y - 2z - 2 = 0$ на расстояние $d = 4$.

Прямая в пространстве

15. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $P(1, -5, 3)$ и образующей с осями координат углы $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$ и $\gamma = 2\pi/3$.
16. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(3, -2, 4)$ перпендикулярно плоскости $5x + 3y - 7z + 1 = 0$.
17. Даны вершины треугольника $A(-3, 2, 8)$, $B(-7, 0, 3)$, $C(3, 4, 5)$. Составить параметрические уравнения медианы, проведенной из вершины A .
18. Найти угол между прямыми $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}$.

19. При каком значении m прямая $\frac{x+10}{m} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+2}{-6}$ параллельна плоскости $5x - 3y + 4z - 1 = 0$?

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы:

1. Ивлева, А. М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / А. М. Ивлева, П. И. Прилуцкая, И. Д. Черных. - 5-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2019. - 183 с. - ISBN 978-5-7782-3868-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/98793.html>
2. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2011. - 265 с. - ISBN 978-985-536-229-7. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28035.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Пономарёв, К. Н. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия и комплексные числа: учебное пособие / К. Н. Пономарёв, И. А. Сажин. - 2-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2022. - 127 с. - ISBN 978-5-7782-4735-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/126500.html>
2. Чеголин, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / А. П. Чеголин. - Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/68568.html>
3. Алания, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Алания, С. М. Гусейн-Заде, И. А. Дынников. - Москва: Логос, 2005. - 376 с. - ISBN 5-94010-375-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/9121.html>

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Бобылева, Т. Н. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие / Т. Н. Бобылева, Л. В. Кирьянова, Т. Н. Титова. - Москва: МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 144 с. - ISBN 978-5-7264-1909-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/80626.html>
2. Лебедева, Е. А. Практические занятия по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебно-методическое пособие / Е. А. Лебедева, О. Е. Рощенко, Т. И. Ерзина. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2013. - 130 с. — ISBN 978-5-7782-2275-5. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/45428.html>

РАЗДЕЛ 5. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Учебные вопросы:

1. Окружность.
2. Эллипс.
3. Гипербола.
4. Парабола.
5. Уравнения кривых второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям.
6. Метод сечений. Поверхности вращения.
7. Сфера.
8. Эллипсоид.
9. Однополостный и двуполостный гиперболоиды.
10. Эллиптический и гиперболический параболоиды.
11. Цилиндрические поверхности. Цилиндры второго порядка.
12. Конические поверхности. Конус второго порядка.
13. Классификация поверхностей второго порядка.

В результате изучения данного раздела студент должен:

Знать:

основные положения теории алгебраических линий и поверхностей второго порядка.

Уметь:

использовать основные положения теории алгебраических линий и поверхностей второго порядка в будущей профессиональной деятельности.

Владеть:

навыками использования фундаментальных знаний в теории алгебраических линий и поверхностей второго порядка в профессиональной деятельности.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти координаты центра и радиус окружности $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$.

Решение

Выделим в общем уравнении окружности полные квадраты:

$$2(x^2 - 4x + 4) - 8 + 2\left(y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{8} - 4 = 0, \quad 2(x-2)^2 + 2\left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{121}{8}$$

и разделим обе части уравнения на 2:

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{121}{16}.$$

Тогда $Q\left(2, -\frac{5}{4}\right)$ - центр окружности, а $r = \frac{11}{4}$ - ее радиус.

Ответ: $Q\left(2, -\frac{5}{4}\right), r = \frac{11}{4}$.

Пример 2. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, зная, что его большая ось 10, а расстояние между фокусами 8. Построить эллипс, найти координаты фокусов и эксцентриситет.

Решение.

По условию $2b=10$, $2c=8$, поэтому $b=5$, $c=4$, $a^2=b^2-c^2=9$

(рис.26). Тогда каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$,

его фокусы $F_1(0,4)$, $F_2(0,-4)$, эксцентриситет $e = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, $F_1(0,4)$, $F_2(0,-4)$, $e = \frac{4}{5}$.

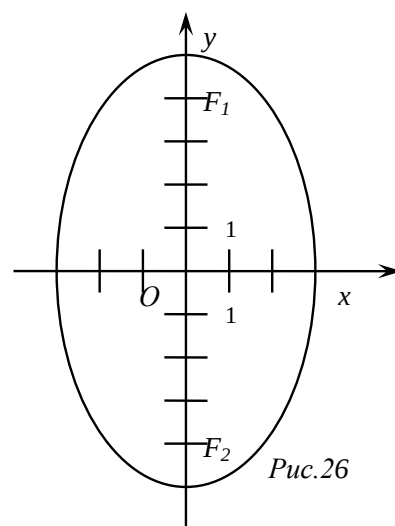


Рис.26

Пример 3. Составить каноническое уравнение эллипса, если он проходит через точки $M_1(1,3)$, $M_2(4,1)$.

Решение.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Так как точки M_1 , M_2 принадлежат эллипсу, то их координаты удовлетворяют его уравнению. Имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{1^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1, \\ \frac{4^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{a^2} = 1 - \frac{9}{b^2}, \\ 16\left(1 - \frac{9}{b^2}\right) + \frac{1}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{b^2} = \frac{15}{143}, \\ \frac{1}{a^2} = \frac{8}{143}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{8}{143}x^2 + \frac{15}{143}y^2 = 1$.

Пример 4. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 1$. Написать уравнение софокусной равнобочной гиперболы.

Решение.

Исходя из уравнения эллипса $a^2 = \frac{1}{9}$, $b^2 = \frac{1}{25}$, $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{2}{75}$. Для гиперболы $c^2 = \frac{2}{75}$,

так как она равнобочная, то $a_2 = b_2$, поэтому

$c^2 = a_2^2 + b_2^2 = 2a_2^2$; $2a_2^2 = \frac{2}{75}$, $a_2^2 = \frac{1}{75}$. Так как

$a_2 > b_2$, то фокусы лежат на оси абсцисс, поэтому каноническое уравнение гиперболы имеет вид $75x^2 - 75y^2 = 1$.

Ответ: $75x^2 - 75y^2 = 1$.

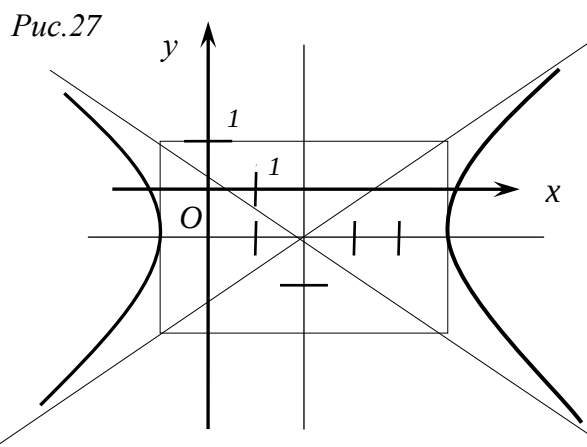


Рис.27

Пример 5. Привести к каноническому виду уравнение кривой $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$. Определить тип кривой, вычислить основные параметры. Построить кривую.

Решение.

В данном уравнении выделим полные квадраты, содержащие переменные,

$$4(x^2 - 4x + 4) - 16 - 9(y^2 + 2y + 1) + 9 - 29 = 0, \quad 4(x-2)^2 - 9(y+1)^2 = 36,$$

и разделим обе части уравнения на 36:

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1, \quad \frac{(x-2)^2}{3^2} - \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1,$$

следовательно, это гипербола. Ее действительная полуось $a=3$, мнимая полуось $b=2$, $c^2=a^2+b^2=25$, $c=5$. Расстояние между фокусами $2c=10$, центр симметрии $C(2,-1)$, координаты фокусов $F_1(-3,-1)$, $F_2(7,-1)$.

Для построения сместим параллельным переносом оси координат так, чтобы начало координат оказалось в точке $(2,-1)$ и в новой системе построим гиперболу $\frac{x_n^2}{3^2} - \frac{y_n^2}{2^2} = 1$ (рис.27).

Ответ: $\frac{x_n^2}{3^2} - \frac{y_n^2}{2^2} = 1$.

Пример 6. Составить каноническое уравнение параболы, если ее фокус находится в точке пересечения прямой $4x-3y-4=0$ с осью Ox .

Решение.

Найдем координаты фокуса, для этого решим систему уравнений $\begin{cases} 4x-3y-4=0, \\ y=0. \end{cases}$ Здесь

$y=0$ - уравнение оси Ox . $F(1,0)$ - фокус, $F \in Ox$, $\frac{p}{2} = 1$, поэтому каноническое уравнение параболы $y^2=4x$.

Ответ: $y^2=4x$.

Пример 7. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(2,-1)$ и директриса $d: x-y-1=0$.

Решение.

Пусть $M(x,y)$ - текущая точка параболы. По определению $FM = \rho(M,d)$. Запишем это равенство в координатах $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \frac{|x-y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$. Возведем обе части равенства в квадрат:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + 2y - 1 - 2xy + 2x) \text{ или } x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x + 2y + 11 = 0.$$

Ответ: $x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x + 2y + 11 = 0$.

Пример 8. Написать уравнение сферической поверхности, проходящей через точку

$M(1,5,1)$ и окружность

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 23 = 0$, расположенную на плоскости xOy .

Решение.

Пусть $C(x_c, y_c, z_c)$ - центр сферической поверхности, тогда $CM = CM' = r$, где M' - произвольная точка, лежащая на заданной окружности, а r - радиус сферы. Найдем какую-нибудь точку, принадлежащую окружности: если $x=1$, то $y^2 - 10y + 22 = 0$ и $y = 5 \pm \sqrt{3}$, например,

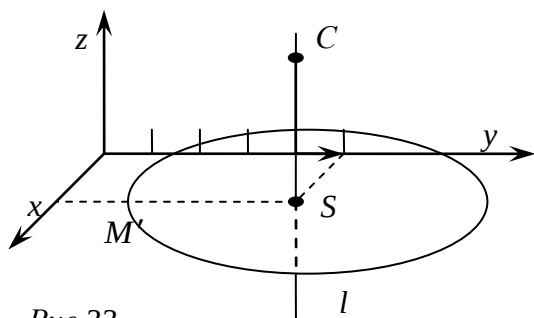


Рис.33

$M'(1, 5 + \sqrt{3}, 0)$. Очевидно, центр сферы лежит на прямой, перпендикулярной плоскости окружности и проходящей через центр последней (рис. 33). Выделим в уравнении окружности полные квадраты: $(x-1)^2 + (y-5)^2 - 3 = 0$, тогда $S(1, 5, 0)$ - центр окружности. Так как $\vec{k}(0, 0, 1)$ является направляющим вектором прямой l , то ее уравнение имеет вид $\begin{cases} x-1=0, \\ z-5=0, \end{cases}$ поэтому точка C имеет координаты $(1, 5, z_c)$. Запишем равенство $CM = CM'$ в координатах

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-1)^2 + (5-5)^2 + (1-z_c)^2} &= \sqrt{(1-1)^2 + (5-5-\sqrt{3})^2 + z_c(0-z_c)^2}, \\ \sqrt{(1-z_c)^2} &= \sqrt{3+z_c^2}, \\ 1-2z_c-z_c^2 &= 3+z_c^2, \\ z_c &= -1. \end{aligned}$$

Таким образом, $C(1, 5, -1)$, $r = \sqrt{(1-1)^2 + (5-5)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{2}$, поэтому $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 2$ - уравнение сферы.
 Ответ: $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 2$.

Пример 9. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой $l: x = y = z$, а направляющей служит окружность $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

Решение.

Цилиндрической называется поверхность, которая вместе с каждой своей точкой содержит всю прямую, проходящую через эту точку, параллельно некоторой заданной прямой.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ некоторая точка, лежащая на окружности, тогда

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1, \\ x_0 + y_0 + z_0 = 1. \end{cases} \quad (2)$$

По определению каждая точка $M(x, y, z)$, лежащая на прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно прямой l , принадлежит цилиндрической поверхности. Запишем уравнение этой прямой в параметрической форме $\begin{cases} x = x_0 + t, \\ y = y_0 + t, \\ z = z_0 + t, t \in R \end{cases}$

Выразим x_0, y_0, z_0 и подставим в систему (2): $\begin{cases} (x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2 = 9, \\ x + y + z - 3t = 1. \end{cases}$

Выражая из второго уравнения системы t и подставляя в первое, получим уравнение цилиндрической поверхности

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{3}(x + y + z - 1), \\ x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2 - 2t(x + y + z) &= 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{3}(x + y + z - 1)^2 - \frac{2}{3}(x + y + z - 1)(x + y + z) &= 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz &= 4. \end{aligned}$$

Ответ: уравнение цилиндрической поверхности имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = 4$.

Пример 10. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в точке $A(0,0,1)$,

если кривая $\gamma: \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9, \\ z = 5 \end{cases}$ целиком принадлежит поверхности.

Решение.

Конической называется поверхность, которая вместе с каждой своей точкой содержит прямую, проходящую через эту точку и некоторую заданную точку, называемую *вершиной конуса*. Прямые, целиком принадлежащие конической поверхности, называются ее *образующими*.

Пусть $M(x', y', 5)$ – текущая точка кривой γ (эта кривая называется *направляющей* конуса). Тогда прямая AM принадлежит конусу, при этом

$$AM: \begin{cases} x = 0 + t(x' - 0), \\ y = 0 + t(y' - 0), \\ z = 1 + t(5 - 1), \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{t}x, \\ y' = \frac{1}{t}y, \\ t = \frac{1}{4}(z - 1). \end{cases}$$

Так как $M \in \gamma$, то ее координаты удовлетворяют уравнению кривой, поэтому

$$\left(\frac{1}{t}x\right)^2 + 4\left(\frac{1}{t}y\right)^2 = 9, \quad x^2 + 4y^2 = 9t^2, \quad t^2 = \frac{x^2 + 4y^2}{9}.$$

Возведя обе части последнего уравнения системы в квадрат и подставляя выражение для

t^2 , получим уравнение конической поверхности: $\frac{x^2 + 4y^2}{9} = \frac{1}{4}(z - 1)^2$, $4x^2 + 16y^2 -$

$9z^2 + 18z - 9 = 0$.

Ответ: $4x^2 + 16y^2 - 9z^2 + 18z - 9 = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

Кривые второго порядка

1. Составить уравнение прямой, проходящей через центр окружности $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 15 = 0$ параллельно прямой $x + y = 0$.
2. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$. Найти фокусы, эксцентриситет, большую и малую оси.
3. Эллипс проходит через точку $M(-4, \sqrt{21})$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = 3/4$. Написать уравнение эллипса. Найти его полуоси и координаты фокусов.
4. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусе эллипса $5x^2 + y^2 = 20$, а две другие совпадают с концами его малой оси.
5. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точки $A(2,1)$ и $B(-4, \sqrt{7})$.
6. Составить уравнение гиперболы, если расстояние между вершинами равно 20, а расстояние между фокусами равно 30. Построить гиперболу.
7. Найти уравнения асимптот гиперболы $2x^2 - 3y^2 = 6$.

8. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если известно, что парабола проходит через точки пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2+4y=0$ и симметрична относительно оси Oy.

9. Найти координаты вершины параболы: 1) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$; 2) $y = 4x^2 - 8x + 7$.

10. Найти вершину, фокус и директрису параболы $y = -2x^2 + 8x - 5$, построить эскиз графика.

Поверхности второго порядка

11. Найти центр и радиус сферы $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8y - 2z + \frac{1}{2} = 0$. Построить ее.

12. Найти уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг оси Oz.

13. Построить поверхность методом сечений $\sigma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$.

14. Построить поверхность методом сечений $\frac{x^2 + z^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$.

15. Установить тип поверхностей и построить их:

1) $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$; 3) $y = 4z^2$; 4) $x^2 + 25y^2 = 25$.

16. Методом сечений исследовать форму и расположение относительно системы координат поверхности (сделать чертеж): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{2} = 0$

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы:

1. Ивлева, А. М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / А. М. Ивлева, П. И. Прилуцкая, И. Д. Черных. - 5-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2019. - 183 с. - ISBN 978-5-7782-3868-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/98793.html>

2. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2011. - 265 с. - ISBN 978-985-536-229-7. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28035.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Пономарёв, К. Н. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия и комплексные числа: учебное пособие / К. Н. Пономарёв, И. А. Сажин. - 2-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2022. - 127 с. - ISBN 978-5-7782-4735-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/126500.html>

2. Чеголин, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / А. П. Чеголин. - Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/68568.html>

3. Алания, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Алания, С. М. Гусейн-Заде, И. А. Дынников. - Москва: Логос, 2005. - 376 с. - ISBN 5-94010-375-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/9121.html>

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Бобылева, Т. Н. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие / Т. Н. Бобылева, Л. В. Кирьянова, Т. Н. Титова. - Москва: МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 144 с. - ISBN 978-5-7264-1909-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/80626.html>

2. Лебедева, Е. А. Практические занятия по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебно-методическое пособие / Е. А. Лебедева, О. Е. Рощенко, Т. И. Ерзина. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2013. - 130 с. — ISBN 978-5-7782-2275-5. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/45428.html>

РАЗДЕЛ 6. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

Учебные вопросы:

1. Алгебраические операции и их свойства.
2. Gruppoиды. Полугруппы, группы.
3. Кольца. Поля.
4. Поле комплексных чисел.

В результате изучения данного раздела студент должен:

Знать:

основные положения теории алгебраических структур.

Уметь:

использовать основные положения теории алгебраических структур в будущей профессиональной деятельности.

Владеть:

навыками использования фундаментальных знаний в теории алгебраических структур в профессиональной деятельности.

Примеры решения задач

Пример 1. Определить, является ли кольцом по отношению к обычным операциям сложения и умножения множество чисел вида $1, \pm 3, \pm 3^2, \dots, \pm 3^n, \dots$

Решение

Пусть $K = \{1, \pm 3, \pm 3^2, \dots, \pm 3^n, \dots\}$

Проверим, являются ли операции «+» и «·» бинарными алгебраическими операциями на множестве K .

Очевидно, что в общем случае $a + b \notin K$ ($a \in K, b \in K$). Например, $a = 1 \in K$ и $b = 3 \in K$, но $a + b = 4 \notin K$

Вывод: операция «+» не является бинарной алгебраической операцией на множестве $K \Rightarrow$ множество K с обычными операциями сложения и умножения не образует кольцо.

Пример 2. Является ли кольцом относительно обычных операций сложения и умножения множество целых чисел, кратных 3?

Решение

Пусть Z_{3n} - множество целых чисел, кратных 3 (целые числа, которые делятся на 3)

1. Проверим, являются ли операции «+» и «·» бинарными алгебраическими операциями на множестве Z_{3n}

Пусть $a = 3n, b = 3k$ ($n, k \in \mathbb{Z}$) – два произвольных числа из множества Z_{3n}

$a + b = 3n + 3k = 3(n + k) = 3q \in Z_{3n}$ (здесь $q = n + k \in \mathbb{Z}$)

$a \cdot b = 3n \cdot 3k = 9(n \cdot k) = 3(3n \cdot k) = 3m \in Z_{3n}$ (здесь $m = 3n \cdot k \in \mathbb{Z}$)

Вывод 1: операции «+» и «·» являются бинарными алгебраическими операциями на множестве Z_{3n}

2. Если Z_{3n} – кольцо, то должны выполняться аксиомы кольца:

1) $\langle \mathbb{Z}_{3n}; + \rangle$ - абелева группа

2) $\langle \mathbb{Z}_{3n}; \cdot \rangle$ - полугруппа

3) имеют место законы дистрибутивности:

$$\text{для } \forall a, b, c \in \mathbb{Z}_{3n}: a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

Проверим выполнение данных аксиом.

Пусть $a = 3n$, $b = 3k$, $c = 3m$ ($n, k, m \in \mathbb{Z}$) – три произвольных числа из множества $\mathbb{Z}_{3n}$

1) $(a + b) + c = (3n + 3k) + 3m = 3n + (3k + 3m) = a + (b + c) \Rightarrow$ операция «+» ассоциативна на $\mathbb{Z}_{3n}$

$$a + b = 3n + 3k = 3k + 3n = b + a \Rightarrow \text{операция «+» коммутативна на } \mathbb{Z}_{3n}$$

Нейтральный элемент по сложению $0 = 3 \cdot 0 \in \mathbb{Z}_{3n}$

Для любого элемента $a = 3n \in \mathbb{Z}_{3n}$ противоположный элемент $-a = -3n \in \mathbb{Z}_{3n}$

Вывод 2: $\langle \mathbb{Z}_{3n}; + \rangle$ - абелева группа

2) $(a \cdot b) \cdot c = (3n \cdot 3k) \cdot 3m = 3n \cdot (3k \cdot 3m) = a \cdot (b \cdot c) \Rightarrow$ операция « $\cdot$ » ассоциативна на $\mathbb{Z}_{3n}$

Вывод 3: $\langle \mathbb{Z}_{3n}; \cdot \rangle$ - полугруппа

$$3) a \cdot (b + c) = 3n \cdot (3k + 3m) = 3n \cdot 3k + 3n \cdot 3m = a \cdot b + a \cdot c$$

Аналогично доказывается, что $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Вывод 4: На $\mathbb{Z}_{3n}$ умножение дистрибутивно относительно сложения.

Общий вывод: множество $\mathbb{Z}_{3n}$ целых чисел, кратных 3, образует кольцо относительно обычных операций сложения и умножения.

Пример 3. Определить, является ли кольцом по отношению к обычным операциям сложения и умножения множество чисел вида $a + b\sqrt{3}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$.

Решение

Пусть $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. Ранее было доказано, что операции «+» и « $\cdot$ » являются бинарными алгебраическими операциями на множестве M , причем $\langle M; + \rangle$ - абелева группа (см. практическое занятие №1)

2. Проверим, является ли $\langle M; \cdot \rangle$ полугруппой и выполняются ли на M законы дистрибутивности.

1) Пусть $m_1 = a_1 + b_1\sqrt{3}$, $m_2 = a_2 + b_2\sqrt{3}$, $m_3 = a_3 + b_3\sqrt{3} \in M$.

$$\begin{aligned} (m_1 \cdot m_2) \cdot m_3 &= ((a_1 + b_1\sqrt{3}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{3})) \cdot (a_3 + b_3\sqrt{3}) = \\ &= (a_1a_2 + a_2b_1\sqrt{3} + a_1b_2\sqrt{3} + 3b_1b_2) \cdot (a_3 + b_3\sqrt{3}) = a_1a_2a_3 + a_2a_3b_1\sqrt{3} + a_1a_3b_2\sqrt{3} + 3b_1b_2a_3 + \\ &+ a_1a_2b_3\sqrt{3} + 3a_2b_1b_3 + 3a_1b_2b_3 + 3b_1b_2b_3\sqrt{3} = m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3) \end{aligned}$$

Вывод 1: операция « $\cdot$ » ассоциативна на $M \Rightarrow \langle M; \cdot \rangle$ - полугруппа

$$\begin{aligned} 2) m_1 \cdot (m_2 + m_3) &= (a_1 + b_1\sqrt{3}) \cdot ((a_2 + b_2\sqrt{3}) + (a_3 + b_3\sqrt{3})) = \\ &= a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{3} + a_1a_3 + a_1b_3\sqrt{3} + a_2b_1\sqrt{3} + 3b_1b_2 + a_3b_1\sqrt{3} + 3b_1b_3 \end{aligned}$$

$$m_1 m_2 + m_1 m_3 = (a_1 + b_1 \sqrt{3}) \cdot (a_2 + b_2 \sqrt{3}) + (a_1 + b_1 \sqrt{3}) \cdot (a_3 + b_3 \sqrt{3}) = \\ = a_1 a_2 + a_1 b_2 \sqrt{3} + a_1 a_3 + a_1 b_3 \sqrt{3} + a_2 b_1 \sqrt{3} + 3b_1 b_2 + a_3 b_1 \sqrt{3} + 3b_1 b_3$$

Следовательно, $m_1 \cdot (m_2 + m_3) = m_1 m_2 + m_1 m_3$.

Аналогично доказывается, что $(m_2 + m_3) \cdot m_1 = m_2 m_1 + m_3 m_1$

Вывод 2: На M умножение дистрибутивно относительно сложения.

Общий вывод: Множество $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}$ образует кольцо

Пример 4. Определить, является ли кольцом по отношению к операциям сложения и

умножения множество матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta \in Z$.

Решение

Пусть $M = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in Z \right\}$

1. Проверим, являются ли операции «+» и «·» бинарными алгебраическими операциями на множестве M .

Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 3\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$ и $A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 3\beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ две произвольные матрицы из M .

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 3\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & 3\beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & 3(\beta_1 + \beta_2) \\ \beta_1 + \beta_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \in Z \\ \beta_1 + \beta_2 = \beta \in Z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in M$$

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 3\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 & 3\beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 + 3\beta_1 \beta_2 & 3\alpha_1 \beta_2 + 3\alpha_2 \beta_1 \\ \alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 & 3\beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \alpha_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 + 3\beta_1 \beta_2 = m \in Z \\ \alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 = n \in Z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} m & 3n \\ n & m \end{pmatrix} \in M$$

Вывод 1: операции «+» и «·» являются бинарными алгебраическими операциями на множестве M .

2. Если M – кольцо, то должны выполняться аксиомы кольца:

- 1) $\langle M; + \rangle$ - абелева группа
- 2) $\langle M; \cdot \rangle$ - полугруппа
- 3) имеют место законы дистрибутивности

1) Пусть $A_1, A_2, A_3 \in M$.

$(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3)$ – выполняется, так как сложение матриц ассоциативно.

$A_1 + A_2 = A_2 + A_1$ – выполняется, так как сложение матриц коммутативно.

Нейтральный элемент по сложению $O = \begin{pmatrix} 0 & 3 \cdot 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$

Для любой матрицы $A = \begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in M$ противоположная матрица

$$-A = \begin{pmatrix} -\alpha & -3\beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} \in M$$

Вывод 2: $\langle M; + \rangle$ - абелева группа

2) $(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3 = A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)$ – выполняется, так как умножение матриц ассоциативно.

Вывод 3: $\langle M; \cdot \rangle$ - полугруппа

3) Законы дистрибутивности выполняются (это следует из свойств операций над матрицами):

$$A_1 \cdot (A_2 + A_3) = A_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_3, (A_2 + A_3) \cdot A_1 = A_2 \cdot A_1 + A_3 \cdot A_1$$

Общий вывод: Множество $M = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in Z \right\}$ образует кольцо.

Пример 5. Может ли множество, состоящее из одного 0, с обычными операциями сложения и умножения быть: кольцом? полем?

Решение

Пусть $A = \{0\}$.

1. Очевидно, что A не образует поле, так как содержит только один элемент.

2. $0 + 0 = 0 \in A, 0 \cdot 0 = 0 \in A \Rightarrow$ операции «+» и «·» являются бинарными алгебраическими операциями на множестве A .

$(0 + 0) + 0 = 0 + (0 + 0), 0 + 0 = 0 + 0 \Rightarrow$ операция «+» ассоциативна и коммутативна на A .

Нейтральный элемент по сложению $0 \in A$

Для элемента $0 \in A$ противоположный элемент $0 \in A$

Следовательно, $\langle A; + \rangle$ - абелева группа

$(0 \cdot 0) \cdot 0 = 0 \cdot (0 \cdot 0) \Rightarrow$ операция «·» ассоциативна на $A \Rightarrow \langle A; \cdot \rangle$ – полугруппа

$0 \cdot (0 + 0) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0, (0 + 0) \cdot 0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \Rightarrow$ на A выполняются законы дистрибутивности

Вывод: Множество $A = \{0\}$ образует кольцо, но не поле

Пример 6. Докажите, что множество чисел вида $a + b\sqrt{3}$, где $a, b \in Q$, образует поле.

Решение

Пусть $M = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in Q\}$.

Ранее было доказано, что множество M образует кольцо (см. задание 3)

Пусть $m_1 = a_1 + b_1\sqrt{3}$, $m_2 = a_2 + b_2\sqrt{3} \in M$.

$$m_1 \cdot m_2 = (a_1 + b_1\sqrt{3}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{3}) = a_1a_2 + a_2b_1\sqrt{3} + a_1b_2\sqrt{3} + 3b_1b_2 = m_2 \cdot m_1$$

Операция « $\cdot$ » коммутативна на $M \Rightarrow M$ – коммутативное кольцо

Нейтральный элемент по умножению $1 = 1 + 0\sqrt{3} \in M \Rightarrow$ кольцо M содержит $1 \neq 0$.

Пусть $m = a + b\sqrt{3} \neq 0$ – произвольный ненулевой элемент из M . Найдем для него обратный.

$$m^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{3}} = \frac{a - b\sqrt{3}}{(a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3})} = \frac{a - b\sqrt{3}}{a^2 - 3b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2 - 3b^2}}_{\alpha \in Q} - \underbrace{\frac{b}{a^2 - 3b^2}}_{\beta \in Q} \sqrt{3} = \alpha + \beta\sqrt{3} \in M$$

Вывод: Множество $M = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in Q\}$ образует поле

Пример 7. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} + \overline{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$.

Решение

1. $z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i$.
2. $z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (2 - i) = -1 + 3i$.
3. $z_1 z_2 = (1 + 2i)(2 - i) = 2 + 4i - i - 2i^2 = [i^2 = -1] = 2 + 3i + 2 = 4 + 3i$.
4. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{2 - i} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + 4i + i + 2i^2}{4 - i^2} = \frac{5i}{5} = i$.
5. $\overline{z_1} = 1 - 2i$, $\overline{z_2} = 2 + i$.
6. $\overline{z_1 z_2} + \overline{z_2} = (1 - 2i)(2 - i) + (2 + i) = 2 - 4i - i + 2i^2 + 2 + i = 2 - 4i$.

Пример 8. Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если $z = \frac{1 + 2i}{3 - i} + (1 - i)^2$.

Решение

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 + 2i}{3 - i} + (1 - i)^2 = \frac{(1 + 2i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} + (1 - 2i + i^2) = \frac{3 + 6i + i + 2i^2}{9 - i^2} - 2i = \frac{1 + 7i}{10} - 2i = \frac{1 + 7i - 20i}{10} = \\ &= \frac{1 - 13i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{13}{10}i. \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{10}, \operatorname{Im} z = -\frac{13}{10}.$$

Пример 9. Вычислить:

1) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7};$

2) $f(i)$, если $f(x) = x^{117} + 5x^{96} + x^9 - 3$.

Решение

1)
$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \frac{(1+i)^7}{(1-i)^7} \cdot (1+i)^2 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7 \cdot (1+2i+i^2) = \left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^7 \cdot 2i = \left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^7 \cdot 2i =$$

$$= \left(\frac{2i}{2}\right)^7 \cdot 2i = i^7 \cdot 2i = 2i^8 = 2 \cdot (i^2)^4 = 2 \cdot (-1)^4 = 2.$$

2) $f(i) = i^{117} + 5i^{96} + i^9 - 3 = i \cdot i^{116} + 5(i^2)^{48} + i \cdot i^8 - 3 = i \cdot (i^2)^{58} + 5(-1)^{48} + i \cdot (i^2)^4 - 3 =$
 $= i \cdot (-1)^{58} + 5 + i \cdot (-1)^4 - 3 = i + 2 + i = 2 + 2i.$

Пример 10. Найти $\sqrt{-3+4i}$.

Решение

Пусть $\sqrt{-3+4i} = x + yi$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (\sqrt{-3+4i})^2 &= (x+yi)^2 \\ -3+4i &= x^2 + 2xyi + y^2i^2 \\ -3+4i &= (x^2 - y^2) + 2xyi \end{aligned}$$

В результате получим систему:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = -3 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$$

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = -3$$

$$x^2 - \frac{4}{x^2} + 3 = 0, x \neq 0$$

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

Пусть $t = x^2, t > 0$

Уравнение примет вид: $t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = 1, t = -4$ (не удовлетворяет условию $t > 0$)

Таким образом, $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Если $x = 1$, то $y = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow w_1 = 1 + 2i$

Если $x = -1$, то $y = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow w_2 = -1 - 2i$

Ответ: $\sqrt{-3+4i} = \begin{cases} 1+2i \\ -1-2i \end{cases}$

Пример 11. Решить уравнения:

1) $x^4 - 16 = 0$

2) $x^2 - 4x + 8 = 0$

$$3) z^2 + (1 - 2i)z - 2i = 0$$

Решение

$$1) x^4 - 16 = 0$$

Пусть $t = x^2$

Тогда уравнение примет вид $t^2 = 16 \Rightarrow t = \pm 4$

В результате получим:

$$x^2 = 4 \quad \text{или} \quad x^2 = -4$$

$$x = \pm 2 \quad x^2 = 4i^2$$

$$x = \pm 2i$$

$$2) x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$D = 16 - 32 = -16 = 16i^2 \Rightarrow \sqrt{D} = 4i$$

$$x_1 = \frac{4 - 4i}{2} = 2 - 2i, \quad x_2 = 2 + 2i$$

$$3) z^2 + (1 - 2i)z - 2i = 0$$

$$D = (1 - 2i)^2 - 4 \cdot (-2i) = 1 - 4i + 4i^2 + 8i = -3 + 4i$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-3 + 4i} = \begin{bmatrix} 1 + 2i \\ -1 - 2i \end{bmatrix} \quad (\text{см. задание 4})$$

Для нахождения корней квадратного уравнения можно взять любое одно из данных двух значений $\sqrt{D}$ (если взять второе значение, то корни получатся точно такие же).

Пусть $\sqrt{D} = 1 + 2i$

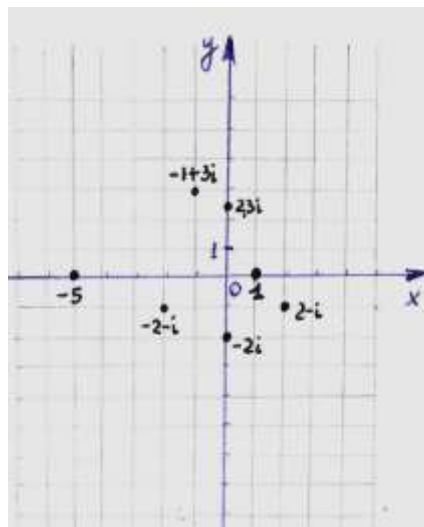
$$\text{Тогда } z_1 = \frac{-(1 - 2i) - (1 - 2i)}{2} = -1, \quad z_2 = \frac{-(1 - 2i) + (1 - 2i)}{2} = 2i.$$

Пример 12. Постройте точки, изображающие числа

1; -5; 2,3i; -2i; 2 - i; -1 + 3i; -2 - i.

Решение

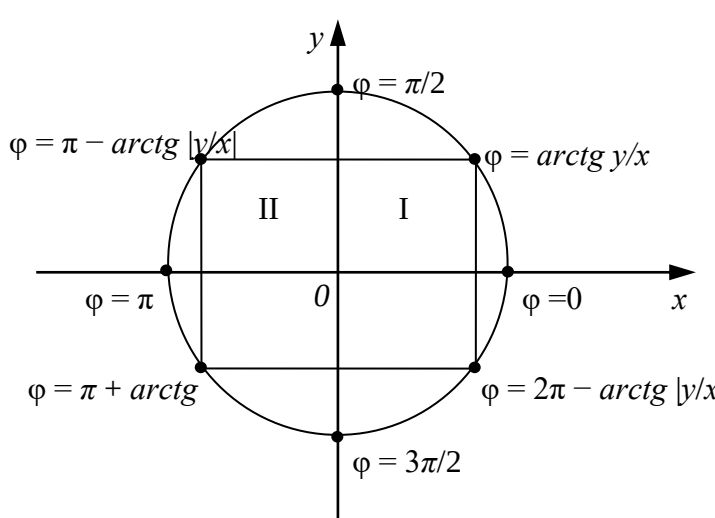
Комплексное число	Координаты соответствующей точки
$z = 1$	(1; 0)
$z = -5$	(-5; 0)
$z = 2,3i$	(0; 2,3)
$z = -2i$	(0; -2)
$z = 2 - i$	(2; -1)
$z = -1 + 3i$	(-1; 3)
$z = -2 - i$	(-2; -1)



Пример 13. Найти модуль и аргумент комплексного числа:

2i; -3; 1 + i; $-1 + \sqrt{3}i$; 2 - i.

Решение

<u>Правило №1.</u> Если $z = x$, то $z = r = x$. Если $z = yi$, то $z = r = y$. Если $z = x + yi$, то $z = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ <u>Правило №2.</u> Если $z = x$, то $\varphi = \arg z = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \pi, & x < 0 \end{cases}$ Если $z = yi$, то $\varphi = \arg z = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & y < 0 \end{cases}$	Общая схема для определения аргумента $\varphi = \arg z$ 
---	--

1) $z = 2i$

$$x = 0, y = 2 > 0 \Rightarrow z \in Oy \text{ (выше 0)} \Rightarrow r = |y| = 2, \varphi = \frac{\pi}{2}$$

2) $z = -3$

$$x = -3 < 0, y = 0 \Rightarrow z \in Ox \text{ (левее 0)} \Rightarrow r = |x| = 3, \varphi = \pi$$

3) $z = 1 + i$

$$x = 1, y = 1 \Rightarrow z \in \text{I четверти}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \varphi = \arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{1}{1} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

4) $z = -1 + \sqrt{3}i$

$$x = -1, y = \sqrt{3} \Rightarrow z \in \text{II четверти}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2, \varphi = \pi - \arctg \left| \frac{y}{x} \right| = \pi - \arctg \left| \frac{\sqrt{3}}{-1} \right| = \pi - \arctg \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

5) $z = 2 - i$

$$x = 2, y = -1 \Rightarrow z \in \text{IV четверти}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}, \varphi = 2\pi - \arctg \left| \frac{y}{x} \right| = 2\pi - \arctg \left| \frac{-1}{2} \right| = 2\pi - \arctg \frac{1}{2}.$$

Пример 14. Решить уравнение $|z| + 2z = 1 - 2i$.

Решение

Пусть $z = x + yi$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Тогда } |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

В результате уравнение можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} + 2(x + yi) &= 1 - 2i \\ (\sqrt{x^2 + y^2} + 2x) + 2yi &= 1 - 2i\end{aligned}$$

Получим систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + 2x = 1 \\ 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + 2x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$\sqrt{x^2 + 1} + 2x = 1$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = 1 - 2x$$

$$\text{ОДЗ: } 1 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1/2$$

$$(\sqrt{x^2 + 1})^2 = (1 - 2x)^2$$

$$x^2 + 1 = 1 - 4x + 4x^2$$

$$3x^2 - 4x = 0$$

$$x(3x - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x = 4/3 \text{ (не удовлетворяет условию } x \leq 1/2)$$

$$\text{Таким образом, } x = 0, y = -1 \Rightarrow z = x + yi = 0 - 1 \cdot i = -i$$

Ответ: $z = -i$.

Пример 15. Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющие условиям:

1) $|z| = 2$

2) $|z - 1 - i| > 1$

3) $|z + i| = |z - 1|$

4) $\arg z = \frac{\pi}{3}$

5) $\begin{cases} |z - 4i| \leq 5 \\ 0 \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

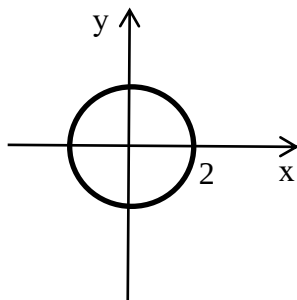
Решение

1) $|z| = 2$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

$$x^2 + y^2 = 2^2 \text{ окружность с центром } O(0;0) \text{ и радиусом } R = 2$$



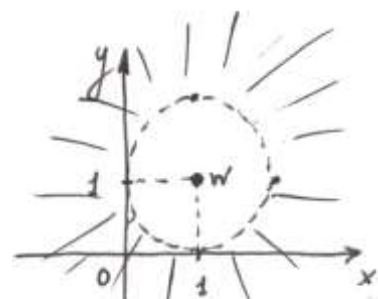
Правило №3

$ z = a$ – окружность с центром в начале координат и радиусом a	$ z < a$ – круг с центром в точке w и радиусом a (без границы)	$ z > a$ – точки вне круга с центром в точке w и радиусом a (без границы)
	$ z \leq a$ – круг с границей	$ z \geq a$ – точки вне круга с границей
$ z - w = a$ – окружность с центром в точке w и радиусом a	$ z - w < a$ – круг с центром в точке w и радиусом a (без границы)	$ z - w > a$ – точки вне круга с центром в точке w и радиусом a (без границы)
	$ z - w \leq a$ – круг с границей	$ z - w \geq a$ – точки вне круга с границей

2) $|z - 1 - i| > 1$

$|z - (1 + i)| > 1$ ($w = 1 + i$ – точка с координатами (1;1))

Получим точки вне круга с центром в точке (1;1) и радиусом $R = 1$ (без границы)



3) $|z + i| = |z - 1|$

Пусть $z = x + yi$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

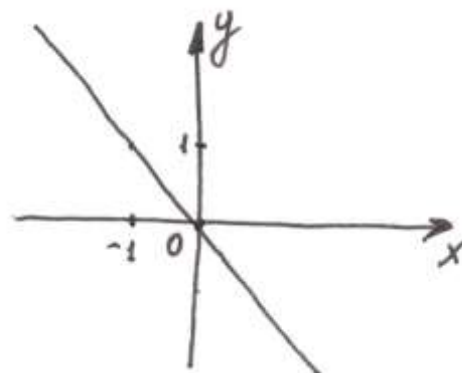
$|x + yi + i| = |x + yi - 1|$

$|x + i(y + 1)| = |(x - 1) + yi|$

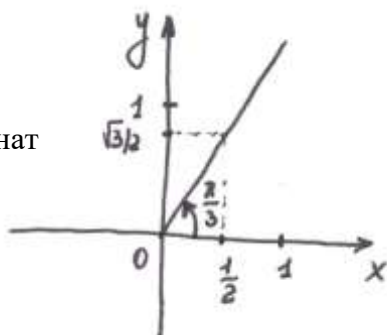
$\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$

$x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2$

$y = -x$ – биссектриса II и IV координатных углов



динат

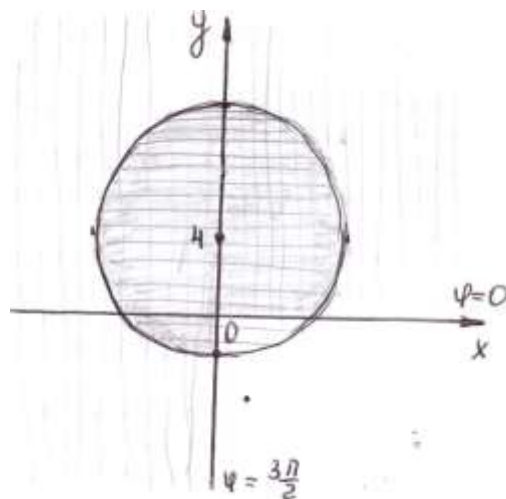


4) $\arg z = \frac{\pi}{3}$ – луч, выходящий из начала координат

и образующий с осью Ox угол $\frac{\pi}{3}$ (60°)

5) $\begin{cases} |z - 4i| \leq 5 \\ 0 \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$|z - 4i| \leq 5$ ($w = 4i \Rightarrow$ точка (0;4)) – круг с центром в точке (0;4) и радиусом $R = 5$ (с границей)



$0 \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$ - множество точек между лучами $\varphi = 0$

и $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ (I, II, III четверти)

Искомое множество – пересечение указанных двух множеств точек

Пример 16. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

1) $z = 200$

4) $z = -i$

2) $z = -1$

5) $z = \frac{3}{\sqrt{2}} + i \frac{3}{\sqrt{2}}$

3) $z = 5i$

6) $z = -1 - i\sqrt{3}$

Решение

Тригонометрическая форма: $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

1) $z = 200$

$$z = x + yi \Rightarrow x = 200 > 0, y = 0 \Rightarrow r = 200, \varphi = 0$$

$$\underline{z = 200 (\cos 0 + i \sin 0)}$$

2) $z = -1$

$$z = x + yi \Rightarrow x = -1 < 0, y = 0 \Rightarrow r = 1, \varphi = \pi$$

$$z = 1 (\cos \pi + i \sin \pi) \Rightarrow \underline{z = \cos \pi + i \sin \pi}$$

3) $z = 5i$

$$z = x + yi \Rightarrow x = 0, y = 5 > 0 \Rightarrow r = 5, \varphi = \pi/2$$

$$\underline{z = 5 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)}$$

4) $z = -i$

$$z = x + yi \Rightarrow x = 0, y = -1 < 0 \Rightarrow r = 1, \varphi = 3\pi/2$$

$$z = 1 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \Rightarrow \underline{z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}}$$

5) $z = \frac{3}{\sqrt{2}} + i \frac{3}{\sqrt{2}}$

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}}, y = \frac{3}{\sqrt{2}} - \text{точка лежит в I четверти}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3,$$

$$\underline{z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}$$

6) $z = -1 - i\sqrt{3}$

$x = -1, y = -\sqrt{3}$ - точка лежит в III четверти

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \pi + \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$z = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

Пример 17. Вычислить в тригонометрической форме:

$$1) (1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}) \quad 2) \frac{(1-i\sqrt{3})(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{2(1-i)(\cos \varphi - i \sin \varphi)}$$

Решение

Представим в тригонометрической форме числа $1+i\sqrt{3}$ и $1+i$

$z = 1+i\sqrt{3}$ $x = 1, y = \sqrt{3}$ - точка лежит в I четверти $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2$ $z = 1+i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$	$z = 1+i$ $x = 1, y = 1$ - точка лежит в I четверти $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $z = 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$
--	--

$$\begin{aligned} (1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}) &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \cdot (\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}) = \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{7} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{7} \right) \right) = \underline{2\sqrt{2} \left(\cos \frac{61\pi}{84} + i \sin \frac{61\pi}{84} \right)} \end{aligned}$$

$$2) \frac{(1-i\sqrt{3})(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{2(1-i)(\cos \varphi - i \sin \varphi)}$$

Представим в тригонометрической форме числа $1-i\sqrt{3}$ и $1-i$

$z = 1-i\sqrt{3}$ $x = 1, y = -\sqrt{3}$ - точка лежит в IV четверти $\varphi = 2\pi - \operatorname{arctg} \left \frac{y}{x} \right = 2\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{5\pi}{3}$ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2$ $z = 1-i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$	$z = 1-i$ $x = 1, y = -1$ - точка лежит в IV четверти $\varphi = 2\pi - \operatorname{arctg} \left \frac{y}{x} \right = 2\pi - \operatorname{arctg} 1 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $z = 1-i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$
--	---

$$\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{2(1-i)(\cos \varphi - i \sin \varphi)} = \frac{2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) (\cos \varphi + i \sin \varphi)}{2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{3} + \varphi - \frac{7\pi}{4} - (-\varphi) \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{3} + \varphi - \frac{7\pi}{4} - (-\varphi) \right) \right) = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(2\varphi - \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(2\varphi - \frac{\pi}{12} \right) \right)
\end{aligned}$$

Пример 18. Вычислить, пользуясь формулой Муавра:

$$1) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{100} \qquad 2) \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$$

Решение

Формула Муавра: $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

$$1) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{100}$$

Представим число $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}$ в тригонометрической форме

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{— точка лежит в IV четверти}$$

$$\varphi = 2\pi - \arctg \left| \frac{y}{x} \right| = 2\pi - \arctg 1 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = 1,$$

$$z = 1 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

По формуле Муавра:

$$z^{100} = 1^{100} \left(\cos \frac{7\pi}{4} \cdot 100 + i \sin \frac{7\pi}{4} \cdot 100 \right) = \cos \underbrace{175\pi}_{-174\pi} + i \sin \underbrace{175\pi}_{-174\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$2) \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$$

$$\text{Из задания 5: } 1+i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), \quad 1-i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)} = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{7\pi}{4} \right) \right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{17\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{17\pi}{12} \right) \right)$$

По формуле Муавра:

$$\begin{aligned}
z^{20} &= \sqrt{2}^{20} \left(\cos \left(-\frac{17\pi}{12} \cdot 20 \right) + i \sin \left(-\frac{17\pi}{12} \cdot 20 \right) \right) = 2^{10} \left(\cos \left(-\underbrace{\frac{85\pi}{3}}_{+28\pi} \right) + i \sin \left(-\underbrace{\frac{85\pi}{3}}_{+28\pi} \right) \right) = \\
&= 2^{10} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2^{10} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 512(1 - i\sqrt{3})
\end{aligned}$$

Пример 19. Разделить $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Многочлены рассматриваются над полем действительных чисел R .

Решение

$$\begin{array}{r}
2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 3x + 1 \\ 2x^2 + 3x + 11 = q(x) \end{array} \right. \\
\underline{2x^4 - 6x^3 + 2x^2} \\
3x^3 + 2x^2 - 5x + 6 \\
\underline{3x^3 - 9x^2 + 3x} \\
11x^2 - 8x + 6 \\
\underline{11x^2 - 33x + 11} \\
25x - 5 = r(x)
\end{array}$$

Таким образом, $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 3x + 11) + (25x - 5)$.

Пример 20. Найти НОД многочленов

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3, \quad g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3.$$

Решение

Чтобы избежать дробных коэффициентов, умножим $f(x)$ на 3 и разделим на $g(x)$:

$$\begin{array}{r}
3x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 12x - 9 \quad \left| \begin{array}{l} 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 \\ x - 1/3 \end{array} \right. \\
\underline{3x^4 + 10x^3 + 2x^2 - 3x} \\
-x^3 - 5x^2 - 9x - 9 \\
\underline{-x^3 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1} \\
-\frac{5}{3}x^2 - \frac{25}{3}x - 10
\end{array}$$

Умножим полученный остаток на 3 и разделим на (-5) : $r_1(x) = x^2 + 5x + 6$.

Теперь разделим $g(x)$ на $r_1(x)$:

$$\begin{array}{r}
3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 5x + 6 \\ 3x - 5 \end{array} \right. \\
\underline{3x^3 + 15x^2 + 18x} \\
-5x^2 - 16x - 3 \\
\underline{-5x^2 - 25x - 30} \\
9x + 27
\end{array}$$

Разделим полученный остаток на 9: $r_2(x) = x + 3$.

Теперь разделим $r_1(x)$ на $r_2(x)$:

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 5x + 6 \quad | \quad x + 3 \\
 - x^2 + 3x \quad | \quad x + 2 \\
 \hline
 2x + 6 \\
 - 2x + 6 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Таким образом, последний отличный от нуля остаток – это $r_2(x) = x + 3$.
Следовательно, $(f(x), g(x)) = x + 3$.

Пример 21. Разделить с остатком многочлен $f(x) = x^4 - 8x^3 + x^2 + 4x - 9$ на $x + 1$.

Решение

$$x + 1 = x - (-1)$$

По схеме Горнера получим:

	1	-8	1	4	-9
-1	1	$-1 \cdot 1 - 8 = -9$	$-1 \cdot (-9) + 1 = 10$	$-1 \cdot 10 + 4 = -6$	$-1 \cdot (-6) - 9 = -3 = f(-1)$

$$\text{Частное : } q(x) = x^3 - 9x^2 + 10x - 6$$

$$\text{Остаток : } r = -3$$

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + x^2 + 4x - 9 = (x + 1)(x^3 - 9x^2 + 10x - 6) - 3$$

$f(-1) = -3 \neq 0 \Rightarrow$ число $x = -1$ не является корнем многочлена $f(x)$.

Пример 22. Найти многочлен 4-й степени со старшим коэффициентом 2, имеющий 1 и -1 простыми корнями и 5 – двукратным корнем.

Решение

$$f(x) = 2(x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 5$$

По формулам Виета находим:

$$a_3 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = -(1 - 1 + 5 + 5) = -10$$

$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -1 + 5 + 5 - 5 - 5 + 25 = 24$$

$$a_1 = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) = -(-5 - 5 + 25 - 25) = 10$$

$$a_0 = x_1x_2x_3x_4 = -25$$

$$f(x) = 2(x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 10x - 25)$$

$$f(x) = 2x^4 - 20x^3 + 48x^2 + 20x - 50$$

Задачи для самостоятельного решения

Алгебраические структуры

1. Выяснить, образует ли группу каждое из следующих множеств при указанной операции над элементами:

- а) неотрицательные целые числа относительно сложения;
- б) рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения.

2. Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно операций сложения и умножения:

- а) рациональные числа б) числа вида $a + b\sqrt{3}$ с целыми a и b .

Алгебраическая форма комплексного числа. Геометрическое изображение комплексных чисел

3. Найти сумму, произведение и частное чисел $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = -3 + 2i$.

4. Вычислить:

а) $(3 + i)(2 - i) + (1 - 2i)$; б) $\frac{3 + i}{3 - i} - \frac{3 + 2i}{2 - 3i}$; в) $\frac{(1 - 2i)^3 - (1 - i)(1 + i)}{2 + i}$.

5. Решить уравнение $x^2 + 6x + 13 = 0$.

6. Построить точки, изображающие числа: $1, -1, -2i, 2 - i, -1 + 3i, -2 - i$. Найти модуль и аргумент каждого числа.

Тригонометрическая форма комплексного числа

7. Изобразить множество точек плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $|z| < 3$ б) $|z - 3 + i| = 4$ в) $1 \leq |z - i| \leq 2$ г) $\begin{cases} |z - 1| = 2 \\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

8. Вычислить в тригонометрической форме:

а) $\frac{1 + i}{2i}$ б) $\sqrt{2}(1 - i)(1 + i\sqrt{3})(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$ в) $\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{-1 + i} \right)^{20}$

9. Решить уравнение $z^4 + 4 = 0$.

Делимость в кольце многочленов. Корни многочлена

10. Выполнить действия:

а) $(2x^3 - 4x^2 + 7x + 1) + (-x^3 + 2x^2 + 3x - 5)$
б) $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - 3x + 1)$

11. Выполнить деление с остатком: $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $2x^2 - 6x + 1$.

12. Найти коэффициенты a, b, c многочлена $ax^2 + bx + c$, зная, что равенство $2x^4 + x^3 - 41x^2 + 83x - 45 = (ax^2 + bx + c)(x^2 + 4x - 9)$ является тождеством.

13. Выполнить деление по схеме Горнера: $2x^5 - 5x^3 - 8x$ на $x + 3$.

14. Найти значение многочлена $f(x) = 2x^5 + 7x^4 - x^3 + 3x - 2$ при $x_0 = -3$.

15. Выяснить, является ли $x_0 = -2$ корнем многочлена

$$f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16,$$

и если да, то какова его кратность.

Многочлены над числовыми полями

16. Найти многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, корнями которого являются числа $-2 + i$, $1 - 2i$, 2 .

17. Построить многочлен степени 4 со старшим коэффициентом 1, имеющий двойной корень 3 и простые корни -2 и -4 .

18. Найти все рациональные корни многочленов:

а) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$ б) $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$.

19. Разложить многочлен $x^4 + 16$ на множители, неприводимые над полем действительных чисел.

20. Разложить многочлен $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на множители, неприводимые над полем комплексных чисел.

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы:

1. Ивлева, А. М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / А. М. Ивлева, П. И. Прилуцкая, И. Д. Черных. - 5-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2019. - 183 с. - ISBN 978-5-7782-3868-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/98793.html>

2. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2011. - 265 с. - ISBN 978-985-536-229-7. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28035.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Пономарёв, К. Н. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия и комплексные числа: учебное пособие / К. Н. Пономарёв, И. А. Сажин. - 2-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2022. - 127 с. - ISBN 978-5-7782-4735-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/126500.html>

2. Чеголин, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / А. П. Чеголин. - Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/68568.html>

3. Алания, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Алания, С. М. Гусейн-Заде, И. А. Дынников. - Москва: Логос, 2005. - 376 с. - ISBN 5-94010-375-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/9121.html>

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Бобылева, Т. Н. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие / Т. Н. Бобылева, Л. В. Кирьянова, Т. Н. Титова. - Москва: МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 144 с. - ISBN 978-5-7264-1909-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/80626.html>

2. Лебедева, Е. А. Практические занятия по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебно-методическое пособие / Е. А. Лебедева, О. Е. Рощенко, Т. И. Ерзина. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2013. - 130 с. — ISBN 978-5-7782-2275-5. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/45428.html>

РАЗДЕЛ 7. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Учебные вопросы:

1. Линейное пространство.
2. Линейная зависимость векторов.
3. Базис и ранг системы векторов.
4. Базис и размерность линейного пространства.
5. Связь между координатами векторов в различных базисах.
6. Изоморфизм линейных пространств.
7. Линейные подпространства, линейная оболочка.
8. Линейное многообразие.
9. Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
10. Линейное многообразие решений неоднородной системы линейных уравнений.

В результате изучения данного раздела студент должен:

Знать:

основные положения теории линейных пространств.

Уметь:

использовать основные положения теории линейных пространств в будущей профессиональной деятельности.

Владеть:

навыками использования фундаментальных знаний в теории линейных пространств в профессиональной деятельности.

Примеры решения задач

Пример 1. Выяснить, является ли линейным пространством множество квадратных матриц n -го порядка с действительными элементами.

Решение

Проверим выполнение условий определения линейного пространства.

- 1) Сумма двух квадратных матриц n -го порядка есть матрица того же самого порядка (по определению сложения матриц).
- 2) Произведение квадратной матрицы n -го порядка на действительное число есть матрица того же самого порядка (по определению произведения матрицы на число).
- 3) Проверим выполнение аксиом линейного пространства. Пусть L – множество квадратных матриц n -го порядка. Очевидно, что для любых $A, B, C \in L$ выполняются равенства:
$$A + B = B + A \text{ и } (A + B) + C = A + (B + C),$$
т.е. аксиомы 1 и 2 выполнены.

Нулевым элементом является нулевая матрица n -го порядка $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$,

которая удовлетворяет аксиоме 3: для любой матрицы $A \in L$: $A + O = A$.

Противоположным элементом для любой матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

служит матрица $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{pmatrix}$, так же принадлежащая L , для которой

выполнена аксиома 4: $A + (-A) = 0$.

Очевидно, что выполняются и остальные аксиомы 5-8:

Аксиома 5. Для любой матрицы $A \in L$: $E \cdot A = A$, где E – единичная матрица n -го порядка.

Аксиома 6. Для любых $\alpha, \beta \in R$ и $A \in L$: $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$.

Аксиома 7. Для любых $\alpha, \beta \in R$ и $A \in L$: $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$.

Аксиома 8. Для любых $A, B \in L$ и $\alpha \in R$: $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Выполнение данных аксиом следует из свойств соответствующих операций над матрицами.

Таким образом, множество всех квадратных матриц n -го порядка с действительными элементами образует линейное пространство.

Пример 2. Выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов:

$$a_1 = (1, -1, 2, 1), a_2 = (1, -1, 1, 2), a_3 = (1, -1, 4, -1).$$

Решение

Векторы a_1, a_2, a_3 линейно зависимы, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что будет выполняться равенство

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0.$$

В последнее равенство вместо векторов $a_1, a_2, a_3, 0$ подставим их компоненты и перейдем к компонентным равенствам:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тогда получим систему} \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases} \quad \text{Решая последнюю систему методом}$$

Гаусса, приводим ее к виду:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы ($r=2$) меньше числа неизвестных ($n=3$), то данная система имеет множество решений, в том числе и ненулевые решения. Следовательно, векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы.

Пример 3. Найти все значения m , при которых вектор $b = (1, m, 3)$ линейно выражается через векторы $a_1 = (2, 3, 7), a_2 = (3, -2, 4), a_3 = (-1, 1, -1)$.

Решение

Вектор b линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3 , если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ такие, что

$$b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Перейдя к покомпонентным равенствам, получим систему

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 1, \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = m, \\ 7\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3 = 3. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & m \\ 7 & 4 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & -2 & 1-m \\ 3 & -2 & 1 & m \\ 7 & 4 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & -2 & 1-m \\ 0 & 13 & -5 & 3-2m \\ 0 & 39 & -15 & 10-7m \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & -2 & 1-m \\ 0 & 13 & -5 & 3-2m \\ 0 & 0 & 0 & 1-m \end{array} \right).$$

Система является совместной, если ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной матрицы. Это возможно только в том случае, когда $1-m = 0$, т.е. $m = 1$. Следовательно, вектор b является линейной комбинацией векторов a_1, a_2, a_3 при $m = 1$.

Пример 4. Вычислить ранг и указать какой-либо базис системы векторов:

$$a_1 = (2, 3, -4, -1), a_2 = (1, -2, 1, 3), a_3 = (5, -3, 1, 8), a_4 = (3, 8, -9, -5).$$

Решение

Составим матрицу из компонент заданных векторов и найдем ее ранг:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -1 & a_1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & a_2 \\ 5 & -3 & -1 & 8 & a_3 \\ 3 & 8 & -9 & -5 & a_4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & a_2 \\ 2 & 3 & -4 & -1 & a_1 \\ 5 & -3 & -1 & 8 & a_3 \\ 3 & 8 & -9 & -5 & a_4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & a_2 \\ 0 & 7 & -6 & -7 & a_1 - 2a_2 \\ 0 & 7 & -6 & -7 & a_3 - 5a_2 \\ 0 & 14 & -12 & -14 & a_4 - 3a_2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & a_2 \\ 0 & 7 & -6 & -7 & a_1 - 2a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 - a_1 - 3a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 - 2a_1 + a_2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & a_2 \\ 0 & 7 & -6 & -7 & a_1 - 2a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 - a_1 - 3a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 - 2a_1 + a_2 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang } A = 2.$$

Следовательно, ранг системы векторов также равен 2, т.е. $\text{rang}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 2$. В качестве базиса данной системы векторов можно взять векторы a_1 и a_2 , т.е. $B = \{a_1, a_2\}$.

Пример 5. Найти базис и размерность линейной оболочки системы векторов $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1)$, $a_3 = (2, 3, 3)$. Выяснить, является ли вектор $b = (5, 9, 5)$ элементом этой оболочки.

Решение

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1+} \sim 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1+} \sim 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 3$$

$B = \{a_1, a_2, a_3\}$ – базис линейной оболочки $L(a_1, a_2, a_3)$

$\text{Dim } L(a_1, a_2, a_3) = 3$ – размерность линейной оболочки $L(a_1, a_2, a_3)$

2. Если вектор $b = (5, 9, 5) \in L(a_1, a_2, a_3)$, то его можно представить в виде

$$b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$$

$$(5, 9, 5) = x_1(1, 1, 1) + x_2(1, 2, 1) + x_3(2, 3, 3)$$

В результате получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow r = 3, n = 3 - \text{система совместна и имеет единственное}$$

решение

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 1 \cdot a_1 + 4 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3$$

Вывод: вектор $b = (5, 9, 5) \in L(a_1, a_2, a_3)$

Пример 6. Найти какую-либо фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение

1. Решим данную систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-3} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$r = 2$ – ранг матрицы системы (число главных неизвестных);

$n = 5$ – число неизвестных $\Rightarrow r < n$;

$n - r = 3$ – число решений ФСР (число свободных неизвестных).

Пусть x_1, x_2 – главные неизвестные, а x_3, x_4, x_5 – свободные неизвестные.

Найдем общее решение системы. Для этого выразим главные неизвестные через свободные.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}$$

Общее решение: $(-x_3 - x_4 - 5x_5, -2x_3 - 2x_4 - 6x_5, x_3, x_4, x_5)$

2. Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Найдем ФСР. Результаты вычислений запишем в виде таблицы.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
X_1	1	-2	1	0	0

X_2	1	-2	0	1	0
X_3	5	-6	0	0	1

ФСР состоит из решений:

$$X_1 = (1, -2, 1, 0, 0), \quad X_2 = (1, -2, 0, 1, 0), \quad X_3 = (5, -6, 0, 0, 1).$$

4. В этом случае общее решение системы можно записать в виде

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = \lambda_1 (1, -2, 1, 0, 0) + \lambda_2 (1, -2, 0, 1, 0) + \lambda_3 (5, -6, 0, 0, 1), \text{ где } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

Пример 7. Найти размерность и вектор сдвига линейного многообразия решений системы

$$\text{линейных уравнений} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}. \text{ Записать уравнение многообразия, т.е. общее}$$

решение данной системы.

Решение

1. Найдем частное решение X_0 неоднородной системы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 4 & 5 \\ 1 & 17 & 4 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\downarrow + \\ \downarrow + \\ \downarrow +}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & 1 \\ 0 & -14 & -2 & 2 \\ 0 & 14 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$n = 3, r = 2, n - r = 1 \Rightarrow x_1, x_2$ – главные неизвестные; x_3 – свободное неизвестное.

$$\text{Отсюда} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 7x_2 + x_3 = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{11}{7}x_3 + \frac{10}{7} \\ x_2 = -\frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{7} \end{cases}.$$

Пусть $x_3 = 0$, тогда $X_0 = \left(\frac{10}{7}, -\frac{1}{7}, 0 \right)$ – частное решение данной системы (**вектор сдвига линейного многообразия решений**).

$$2. \text{ Соответствующая однородная система имеет вид } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Найдем ФСР соответствующей однородной системы и запишем ее решение. Сначала выразим ее общее решение, используя пункт 1 решения.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 7x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{11}{7}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{7}x_3 \end{cases} \Rightarrow X = \left(-\frac{11}{7}x_3, -\frac{1}{7}x_3, x_3 \right)$$

Найдем ФСР.

Так как $n - r = 1$, то ФСР будет состоять из одного решения. Отсюда следует, что **размерность линейного многообразия решений** неоднородной системы равна 1 (числу решений, входящих в ФСР).

Пусть $\Delta = 7$. Тогда ФСР состоит из решения $X_1 = (-11, -1, 7)$.

Таким образом, $X = \lambda X_1 = \lambda(-11, -1, 7)$ – общее решение соответствующей однородной системы

4. Уравнение линейного многообразия решений данной системы линейных уравнений (ее общее решение) имеет вид: $X_n = X_0 + X \Rightarrow X_n = \left(\frac{10}{7}, -\frac{1}{7}, 0\right) + \lambda(-11, -1, 7)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$

Задачи для самостоятельного решения

Линейные пространства

1. Выяснить, является ли линейным пространством над полем $\mathbb{R}$:
 - а) множество векторов на плоскости, выходящих из начала координат и расположенных в первой четверти с обычными операциями сложения векторов и умножения их на действительные числа;
 - б) множество действительных чисел с обычными операциями сложения и умножения.
2. В некотором базисе заданы векторы $a_1 = (-2, 0, 1)$, $a_2 = (1, -1, 0)$, $a_3 = (0, 1, 2)$. Выяснить, является ли вектор $a_4 = (2, 3, 4)$ линейной комбинацией векторов a_1 , a_2 , a_3 .
3. Выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов:
 - а) $a_1 = (1, -1, 2, 1)$, $a_2 = (1, -1, 1, 2)$, $a_3 = (1, -1, 4, -1)$;
 - б) $a_1 = (5, 4, 3)$, $a_2 = (3, 3, 2)$, $a_3 = (8, 1, 3)$.
4. Найти базис и ранг системы векторов:
 $a_1 = (4, -5, 2, 6)$, $a_2 = (2, -2, 1, 3)$, $a_3 = (6, -3, 3, 9)$, $a_4 = (4, -1, 5, 6)$.

Базис пространства. Координаты вектора

5. Найти координаты вектора $a = (1, 0, 4)$ в базисе $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, где
 $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 1)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.
6. Показать, что векторы $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 2)$, $e_3 = (1, 2, 3)$ образуют базис и найти координаты вектора $x = (6, 9, 14)$ в этом базисе.
7. В линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ даны два базиса:
 $B = \{e_1 = (1, 2, 3), e_2 = (2, 1, 2), e_3 = (0, 1, 1)\}$, $B' = \{e'_1 = (0, 1, 1), e'_2 = (1, 0, 1), e'_3 = (1, 1, 0)\}$.
Найти:
 - а) матрицу перехода от базиса B к базису B' ;
 - б) матрицу обратного перехода;
 - в) координаты векторов e_1 и e'_3 в каждом из базисов;
 - г) координаты вектора $y = 2e_1 + 3e_2 - e_3$ в базисе B' .**Указание:** для нахождения координат векторов базиса B' в базисе B воспользоваться решением задачи 6.

8. Найти координаты вектора a в базисе

$$B' = \{e'_1 = e_1 + e_2 + 5e_3, e'_2 = \frac{5}{4}e_1 - e_2, e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3\},$$

если в базисе B он имеет координаты $(1, 4, 8)$.

Линейные подпространства. Линейное многообразие

9. Найти базис и размерность линейной оболочки системы векторов
 $a_1 = (2, 1, -3, 1)$, $a_2 = (2, 2, -6, 2)$, $a_3 = (6, 3, -9, 3)$, $a_4 = (1, 1, 1, 1)$.
10. Найти базис и размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений
- $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$
11. Найти ФСР для системы
- $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$
12. Записать уравнение линейного многообразия:
- $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 7. \end{cases}$$

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы:

- Ивлева, А. М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / А. М. Ивлева, П. И. Прилуцкая, И. Д. Черных. - 5-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2019. - 183 с. - ISBN 978-5-7782-3868-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/98793.html>
- Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2011. - 265 с. - ISBN 978-985-536-229-7. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28035.html>

Перечень дополнительной литературы:

- Пономарёв, К. Н. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия и комплексные числа: учебное пособие / К. Н. Пономарёв, И. А. Сажин. - 2-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2022. - 127 с. - ISBN 978-5-7782-4735-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/126500.html>
- Чеголин, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / А. П. Чеголин. - Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/68568.html>
- Алания, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Алания, С. М. Гусейн-Заде, И. А. Дынников. - Москва: Логос, 2005. - 376 с. - ISBN 5-94010-375-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/9121.html>

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

- Бобылева, Т. Н. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие / Т. Н. Бобылева, Л. В. Кирьянова, Т. Н. Титова. - Москва: МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 144 с. - ISBN 978-5-7264-1909-1. - Текст: элек-

тронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/80626.html>

2. Лебедева, Е. А. Практические занятия по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебно-методическое пособие / Е. А. Лебедева, О. Е. Рощенко, Т. И. Ерзина. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2013. - 130 с. — ISBN 978-5-7782-2275-5. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/45428.html>

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине

«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
направленность (профиль):
«Информатика и математика»

Ставрополь, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Общая характеристика самостоятельной работы обучающегося при изучении дисциплины «Алгебра и геометрия»

План – график выполнения самостоятельной работы

Контрольные точки и виды отчетности по ним

Методические рекомендации по изучению теоретического материал

Методические указания по видам работ, предусмотренных рабочей программой дисциплины

Методические указания по подготовке к экзамену

Список рекомендуемой литературы

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студента).

Самостоятельная работа студента является важным видом учебной и научной деятельности студента. Федеральным государственным образовательным стандартом предусматривается значительный объем времени из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу. В связи с этим, обучение включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому самостоятельная работа должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования – подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности.

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

Самостоятельная работа студента предполагает, прежде всего, его научно-исследовательскую и практическую деятельность, поскольку именно эти виды учебной работы в первую очередь готовят к самостоятельному выполнению профессиональных задач. Конечной целью самостоятельной работы является организация самостоятельной познавательной деятельности, формирование умения самостоятельно анализировать информацию, выделять главное и второстепенное.

Основными формами самостоятельной работы студентов по дисциплине **«Алгебра и геометрия»** является подготовка к практическим занятиям, выполнение индивидуальных домашних заданий, подготовка к экзамену.

В результате освоения дисциплины **«Алгебра и геометрия»** формируется профессиональная компетенция ПК-1, в соответствии с которой студент должен:

Знать:

фундаментальные основы алгебры и геометрии, способен на научной основе применять данные знания для построения и функционирования образовательного процесса в области преподавания математики.

Уметь:

использовать основные положения алгебры и геометрии в будущей профессиональной деятельности.

Владеть:

методами линейной алгебры и аналитической геометрии для осуществления учебной и проектной деятельности обучающихся.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»

Самостоятельная работа проводится в виде подготовки к практическим занятиям, выполнения индивидуальных домашних заданий по темам дисциплины **«Алгебра и геометрия»** и подготовки к экзамену во 2 семестре. Основной целью этих видов самостоятельной работы является улучшение профессиональной подготовки бакалавров высшей квалификации, направленное на формирование действенной системы фундаментальных и профессиональных знаний, умений и навыков, которые они могли бы свободно и самостоятельно применять в практической деятельности.

Цели самостоятельной работы:

- научить студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свою квалификацию.
- закрепление, расширение и углубление знаний, умений и навыков, полученных студентами на аудиторных занятиях под руководством преподавателей;
- изучение студентами дополнительных материалов по изучаемым дисциплинам и умение выбирать необходимый материал из различных источников; воспитание у студентов самостоятельности, организованности, самодисциплины, творческой активности, потребности развития познавательных способностей и упорства в достижении поставленных целей.

Предлагаемый подход к освоению материала усиливает мотивацию к аудиторной и внеаудиторной активности, что обеспечивает необходимый уровень знаний по изучаемым дисциплинам и позволяет повысить готовность студентов к сдаче экзаменов.

Приступая к изучению учебной дисциплины **«Алгебра и геометрия»**, студенты должны ознакомиться с учебной программой, учебной, научной и методической литературой, имеющейся в библиотеке, получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

В ходе лекционных занятий вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

В ходе подготовки к практическим занятиям изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях: журналах, газетах и т.д. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой. После подведения итогов практического занятия устранить недостатки, отмеченные преподавателем.

При подготовке к экзамену (в конце семестра) повторять пройденный материал в строгом соответствии с учебной программой, примерным перечнем учебных вопросов, выносящихся на экзамен и содержащихся в данной программе. Использовать конспект лекций и литературу, рекомендованную преподавателем. Обратить особое внимание на

темы учебных занятий, пропущенных студентом по разным причинам. При необходимости обратиться за консультацией и методической помощью к преподавателю.

В ходе организации самостоятельной работы **решаются следующие задачи:**

- углублять и расширять их профессиональные знания;
- формировать у них интерес к учебно-познавательной деятельности;
- развивать у бакалавров самостоятельность, активность, ответственность;
- развивать познавательные способности специалистов.

Учебный процесс в высшем учебном заведении в значительной степени строится на самостоятельной работе студентов, без которой трудно в полной мере овладеть сложным программным материалом и научиться, в дальнейшем, постоянно совершенствовать приобретенные знания и умения.

Самостоятельная работа является внеаудиторной и предназначена для самостоятельного ознакомления студента с определенными разделами дисциплины **«Алгебра и геометрия»** по рекомендованным преподавателем материалам и подготовки к выполнению индивидуальных заданий.

ПЛАН – ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вид деятельности студентов	Итоговый продукт самостоятельной работы	Средства и технологии оценки	Примерные сроки выполнения
1 семестр			
Изучение лекционного материала, рекомендуемой литературы, подготовка к практическим занятиям	Выполнение ИДЗ №1	Собеседование	5 неделя
Изучение лекционного материала, рекомендуемой литературы, подготовка к практическим занятиям	Выполнение ИДЗ №2	Собеседование	11 неделя
Изучение лекционного материала, рекомендуемой литературы, подготовка к практическим занятиям	Конспект	Собеседование	17 неделя
2 семестр			
Изучение лекционного материала, рекомендуемой литературы, подготовка к практическим занятиям	Выполнение ИДЗ №3	Собеседование	5 неделя
Изучение лекционного материала, рекомендуемой литературы, подготовка к практическим занятиям	Выполнение ИДЗ №4	Собеседование	10 неделя
Изучение лекционного материала, рекомендуемой литературы, подготовка к практическим занятиям	Выполнение ИДЗ №5	Собеседование	15 неделя

КОНТРОЛЬНЫЕ ТОЧКИ И ВИДЫ ОТЧЕТНОСТИ ПО НИМ

Подготовка к написанию студентом индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) осуществляется на **практических занятиях**. Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что решение задач проводится по вычитанному на лекциях материалу и связано, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка. После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации. Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

**Индивидуальные домашние задания по дисциплине
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»**

**Индивидуальное задание №1 по теме
“МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ”**

1. Вычислить определитель матрицы A (таблица 1).

2. Найти произведение матриц A и B (таблица 2): $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} R_1 & 2 & -1 \\ -1 & R_2 & 3 \\ -2 & 4 & R_3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

3. Дана матрица A (таблица 3). Найти A^{-1} (двумя способами: с помощью присоединенной матрицы и с помощью элементарных преобразований) и установить, что $AA^{-1} = E$.

4. Найти ранг матрицы A (таблица 4).

Таблица 1

Варианты задания 1

№	Матрица A	№	Матрица A	№	Матрица A
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 10 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 11 & 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 10 & 2 & 5 & 3 & 11 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 10 & -7 & -2 \\ -3 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 7 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 3 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 6 & 13 & 12 \\ 2 & -2 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

10	$\begin{pmatrix} 3 & 12 & -6 & -1 & 2 \\ -3 & -10 & 6 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & -10 & 10 & -9 & 15 \\ 9 & -7 & -4 & -4 & 9 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & 10 \\ 6 & 6 & 13 & 3 & 13 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ -2 & 7 & 3 & 5 & -1 \\ -4 & -2 & 5 & -2 & -4 \\ -6 & 4 & 5 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 & 3 & 10 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 & 2 \\ -1 & -7 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -8 & 12 & 7 & 4 \\ 7 & 9 & 17 & 27 & -6 \\ 8 & 3 & 6 & 2 & 37 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 & 11 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 13 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 7 & 2 & -5 \\ -2 & 7 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} -2 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & -9 & -2 \\ 3 & -13 & -2 & 8 & -7 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & 7 & 11 & 1 \end{pmatrix}$

Таблица 2

Варианты задания 2

№	R_1	R_2	R_3	№	R_1	R_2	R_3
1	-5	7	-3	16	-2	7	3
2	2	5	-3	17	1	5	3
3	-2	3	1	18	2	3	4
4	4	3	-3	19	3	1	2
5	2	3	-2	20	2	5	3
6	4	-4	-3	21	1	2	7
7	-1	-2	3	22	-3	-4	4
8	2	-4	1	23	3	3	-4
9	3	-5	2	24	5	4	2
10	5	2	-3	25	3	-4	2
11	1	3	-1	26	3	2	5
12	2	2	-1	27	-1	0	4
13	3	-4	5	28	0	-1	2
14	2	-3	1	29	2	1	0
15	3	4	3	30	-3	2	-1

Таблица 3

Варианты задания 3

№	Матрица A	№	Матрица A	№	Матрица A	№	Матрица A
1	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 9 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 17 & 10 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 10 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$				

Таблица 4

Варианты задания 4

№	Матрица A	№	Матрица A	№	Матрица A	№	Матрица A
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 9 & 8 & -2 \\ 1 & 12 & -7 & -2 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 13 & 16 \\ 1 & -3 & 9 & 11 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 0 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 15 & 17 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 8 & -3 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -11 & -1 & 19 \\ 1 & 12 & 2 & -16 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 3 & 9 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 1 & -23 & 4 & 4 \\ 3 & 21 & 2 & 7 \\ 5 & -27 & 10 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$				

**Индивидуальное задание №2 по теме
«ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ»**

ЗАДАНИЕ 1.

Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Указание: Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны (в этом случае они образуют базис).

Вариант	Векторы	Вариант	Векторы
1	$\vec{a} = (5, 4, 1), \vec{b} = (-3, 5, 2),$ $\vec{c} = (2, -1, 3), \vec{d} = (7, 23, 4)$	14	$\vec{a} = (4, 2, 3), \vec{b} = (-3, 1, -8),$ $\vec{c} = (2, -4, 5), \vec{d} = (-12, 14, -31)$
2	$\vec{a} = (2, -1, 4), \vec{b} = (-3, 0, -2),$ $\vec{c} = (4, 5, -3), \vec{d} = (0, 11, -14)$	15	$\vec{a} = (-2, 1, 3), \vec{b} = (3, -6, 2),$ $\vec{c} = (-5, -3, -1), \vec{d} = (31, -6, 22)$
3	$\vec{a} = (-1, 1, 2), \vec{b} = (2, -3, -5),$ $\vec{c} = (-6, 3, -1), \vec{d} = (28, -19, -7)$	16	$\vec{a} = (1, 3, 6), \vec{b} = (-3, 4, -5),$ $\vec{c} = (1, -7, 2), \vec{d} = (8, 47, 65)$
4	$\vec{a} = (1, 3, 4), \vec{b} = (-2, 5, 0),$ $\vec{c} = (3, -2, -4), \vec{d} = (13, -5, -4)$	17	$\vec{a} = (7, 2, 1), \vec{b} = (5, 1, -2),$ $\vec{c} = (-3, 4, 5), \vec{d} = (26, 11, 1)$
5	$\vec{a} = (1, -1, 1), \vec{b} = (-5, -3, 1),$ $\vec{c} = (2, -1, 0), \vec{d} = (-15, -10, 5)$	18	$\vec{a} = (3, 5, 4), \vec{b} = (-2, 7, -5),$ $\vec{c} = (6, -2, 1), \vec{d} = (6, -9, 22)$
6	$\vec{a} = (3, 1, 2), \vec{b} = (-7, -2, -4),$ $\vec{c} = (-4, 0, 3), \vec{d} = (16, 6, 15)$	19	$\vec{a} = (5, 3, 2), \vec{b} = (2, -5, 1),$ $\vec{c} = (-7, 4, -3), \vec{d} = (36, 1, 15)$

7	$\bar{a} = (-3, 0, 1), \bar{b} = (2, 7, -3),$ $\bar{c} = (-4, 3, 5), \bar{d} = (-16, 33, 13)$	20	$\bar{a} = (11, 1, 2), \bar{b} = (-3, 3, 4),$ $\bar{c} = (-4, -2, 7), \bar{d} = (-5, 11, -15)$
8	$\bar{a} = (5, 1, 2), \bar{b} = (-2, 1, -3),$ $\bar{c} = (4, -3, 5), \bar{d} = (-45, 15, -66)$	21	$\bar{a} = (9, 5, 3), \bar{b} = (-3, 2, 1),$ $\bar{c} = (4, -7, 4), \bar{d} = (-10, -13, 8)$
9	$\bar{a} = (0, 2, -3), \bar{b} = (4, -3, -2),$ $\bar{c} = (-5, -4, 0), \bar{d} = (-19, -5, -4)$	22	$\bar{a} = (7, 2, 1), \bar{b} = (3, -5, 6),$ $\bar{c} = (-4, 3, -4), \bar{d} = (-1, 18, -16)$
10	$\bar{a} = (3, -1, 2), \bar{b} = (-2, 3, 1),$ $\bar{c} = (4, -5, -3), \bar{d} = (-3, 2, -3)$	23	$\bar{a} = (1, 2, 3), \bar{b} = (-5, 3, -1),$ $\bar{c} = (-6, 4, 5), \bar{d} = (-4, 11, 20)$
11	$\bar{a} = (5, 3, 1), \bar{b} = (-1, 2, -3),$ $\bar{c} = (3, -4, 2), \bar{d} = (-9, 34, -20)$	24	$\bar{a} = (-2, 5, 1), \bar{b} = (3, 2, -7),$ $\bar{c} = (4, -3, 2), \bar{d} = (-4, 22, -13)$
12	$\bar{a} = (3, 1, -3), \bar{b} = (-2, 4, 1),$ $\bar{c} = (1, -2, 5), \bar{d} = (1, 12, -20)$	25	$\bar{a} = (3, 1, 2), \bar{b} = (-4, 3, -1),$ $\bar{c} = (2, 3, 4), \bar{d} = (14, 14, 20)$
13	$\bar{a} = (6, 1, -3), \bar{b} = (-3, 2, 1),$ $\bar{c} = (-1, -3, 4), \bar{d} = (15, 6, -17)$	26	$\bar{a} = (3, -1, 2), \bar{b} = (-2, 4, 1),$ $\bar{c} = (4, -5, -1), \bar{d} = (-5, 11, 1)$
27	$\bar{a} = (4, 5, 1), \bar{b} = (1, 3, 1),$ $\bar{c} = (-3, -6, 7), \bar{d} = (19, 33, 0)$	28	$\bar{a} = (1, -3, 1), \bar{b} = (-2, -4, 3),$ $\bar{c} = (0, -2, 3), \bar{d} = (-8, -10, 13)$

ЗАДАНИЕ 2.

Даны векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Необходимо:

- вычислить смешанное произведение трех векторов;
- найти модуль векторного произведения;
- вычислить скалярное произведение двух векторов;
- проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора;
- проверить, будут ли компланарны три вектора

Вариант	Данные	Вариант	Данные
1	$\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}, \bar{b} = \bar{j} + 4\bar{k},$ $\bar{c} = 5\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$ а) $\bar{a}, 3\bar{b}, \bar{c}$ б) $3\bar{a}, 2\bar{c}$ в) $\bar{b}, -4\bar{c}$ г) $\bar{a}, \bar{c}$ д) $\bar{a}, 2\bar{b}, 3\bar{c}$	14	$\bar{a} = -4\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}, \bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k},$ $\bar{c} = -\bar{i} + 5\bar{j} - 3\bar{k}$ а) $5\bar{a}, 7\bar{b}, 2\bar{c}$ б) $-4\bar{b}, 11\bar{a}$ в) $3\bar{a}, -7\bar{c}$ г) $\bar{a}, \bar{b}$ д) $3\bar{a}, 7\bar{b}, -2\bar{c}$
2	$\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}, \bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 7\bar{k},$ $\bar{c} = 3\bar{i} - 6\bar{j} + 21\bar{k}$ а) $5\bar{a}, 2\bar{b}, \bar{c}$ б) $4\bar{b}, 2\bar{c}$ в) $\bar{a}, \bar{c}$ г) $\bar{b}, \bar{c}$ д) $2\bar{a}, -3\bar{b}, \bar{c}$	15	$\bar{a} = -4\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}, \bar{b} = -3\bar{j} + 5\bar{k},$ $\bar{c} = 6\bar{i} + 6\bar{j} - 4\bar{k}$ а) $5\bar{a}, -\bar{b}, 3\bar{c}$ б) $-7\bar{a}, 4\bar{c}$ в) $3\bar{a}, 9\bar{b}$ г) $\bar{a}, \bar{c}$ д) $3\bar{a}, -9\bar{b}, 4\bar{c}$
3	$\bar{a} = 2\bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k}, \bar{b} = 7\bar{i} + 3\bar{j},$ $\bar{c} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 7\bar{k}$ а) $\bar{a}, 2\bar{b}, 3\bar{c}$ б) $3\bar{a}, -7\bar{b}$	16	$\bar{a} = -3\bar{i} + 8\bar{j}, \bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k},$ $\bar{c} = 8\bar{i} + 12\bar{j} - 8\bar{k}$ а) $4\bar{a}, -6\bar{b}, 5\bar{c}$ б) $-7\bar{a}, 9\bar{c}$

	в) $-2\bar{a}, \bar{c}$ г) $\bar{a}, \bar{c}$ д) $2\bar{a}, -3\bar{b}, \bar{c}$		в) $3\bar{b}, -8\bar{c}$ г) $\bar{b}, \bar{c}$ д) $4\bar{a}, -6\bar{b}, 9\bar{c}$
4	$\bar{a} = -7\bar{i} + 2\bar{k}, \bar{b} = 2\bar{i} - 6\bar{j} + 4\bar{k},$ $\bar{c} = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ а) $\bar{a}, -2\bar{b}, -7\bar{c}$ б) $4\bar{b}, 3\bar{c}$ в) $2\bar{a}, -7\bar{c}$ г) $\bar{b}, \bar{c}$ д) $2\bar{a}, 4\bar{b}, 3\bar{c}$	17	$\bar{a} = 2\bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k}, \bar{b} = -9\bar{i} + 2\bar{k},$ $\bar{c} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 7\bar{k}$ а) $7\bar{a}, 5\bar{b}, -\bar{c}$ б) $-5\bar{a}, 4\bar{b}$ в) $3\bar{b}, -8\bar{c}$ г) $\bar{a}, \bar{c}$ д) $7\bar{a}, 5\bar{b}, -\bar{c}$
5	$\bar{a} = -4\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}, \bar{b} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 2\bar{k},$ $\bar{c} = \bar{j} + 5\bar{k}$ а) $\bar{a}, 6\bar{b}, 3\bar{c}$ б) $2\bar{b}, \bar{a}$ в) $\bar{a}, -4\bar{c}$ г) $\bar{a}, \bar{b}$ д) $\bar{a}, 6\bar{b}, 3\bar{c}$	18	$\bar{a} = 9\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}, \bar{b} = 3\bar{i} - 15\bar{j} + 21\bar{k},$ $\bar{c} = \bar{i} - 5\bar{j} + 7\bar{k}$ а) $2\bar{a}, -7\bar{b}, 3\bar{c}$ б) $-6\bar{a}, 4\bar{c}$ в) $7\bar{a}, 5\bar{b}$ г) $\bar{b}, \bar{c}$ д) $2\bar{a}, -7\bar{b}, 4\bar{c}$
6	$\bar{a} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}, \bar{b} = 2\bar{j} - 3\bar{k},$ $\bar{c} = -3\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ а) $\bar{a}, -3\bar{b}, 2\bar{c}$ б) $5\bar{a}, 3\bar{c}$ в) $-2\bar{a}, 4\bar{b}$ г) $\bar{a}, \bar{c}$ д) $5\bar{a}, 4\bar{b}, 3\bar{c}$	19	$\bar{a} = -2\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}, \bar{b} = 5\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k},$ $\bar{c} = 7\bar{i} + 4\bar{j} - \bar{k}$ а) $\bar{a}, -6\bar{b}, 2\bar{c}$ б) $-8\bar{b}, 5\bar{c}$ в) $-9\bar{a}, 7\bar{c}$ г) $\bar{a}, \bar{b}$ д) $\bar{a}, -6\bar{b}, 5\bar{c}$
7	$\bar{a} = 4\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}, \bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 5\bar{k},$ $\bar{c} = 7\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$ а) $7\bar{a}, -4\bar{b}, 2\bar{c}$ б) $3\bar{a}, 5\bar{c}$ в) $2\bar{b}, 4\bar{c}$ г) $\bar{b}, \bar{c}$ д) $7\bar{a}, 2\bar{b}, 5\bar{c}$	20	$\bar{a} = -9\bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}, \bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k},$ $\bar{c} = -5\bar{i} + 10\bar{j} - 20\bar{k}$ а) $-2\bar{a}, 7\bar{b}, 5\bar{c}$ б) $-6\bar{b}, 7\bar{c}$ в) $9\bar{a}, 4\bar{c}$ г) $\bar{b}, \bar{c}$ д) $-2\bar{a}, 7\bar{b}, 4\bar{c}$
8	$\bar{a} = 4\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}, \bar{b} = 2\bar{i} + \bar{k},$ $\bar{c} = -12\bar{i} - 6\bar{j} + 9\bar{k}$ а) $2\bar{a}, 3\bar{b}, \bar{c}$ б) $4\bar{a}, 3\bar{b}$ в) $\bar{b}, -4\bar{c}$ г) $\bar{a}, \bar{c}$ д) $2\bar{a}, 3\bar{b}, -4\bar{c}$	21	$\bar{a} = 2\bar{i} - 7\bar{j} + 5\bar{k}, \bar{b} = -\bar{i} + 2\bar{j} - 6\bar{k},$ $\bar{c} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$ а) $-3\bar{a}, 6\bar{b}, -\bar{c}$ б) $5\bar{b}, 3\bar{c}$ в) $7\bar{a}, -4\bar{b}$ г) $\bar{b}, \bar{c}$ д) $7\bar{a}, -4\bar{b}, 3\bar{c}$
9	$\bar{a} = -\bar{i} + 5\bar{k}, \bar{b} = -3\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k},$ $\bar{c} = -2\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k}$ а) $3\bar{a}, -4\bar{b}, 2\bar{c}$ б) $7\bar{a}, -3\bar{c}$ в) $3\bar{a}, 2\bar{b}$ г) $\bar{b}, \bar{c}$ д) $7\bar{a}, 2\bar{b}, -3\bar{c}$	22	$\bar{a} = 7\bar{i} - 4\bar{j} - 5\bar{k}, \bar{b} = \bar{i} - 11\bar{j} + 3\bar{k},$ $\bar{c} = 5\bar{i} + 5\bar{j} + 3\bar{k}$ а) $3\bar{a}, -7\bar{b}, 2\bar{c}$ б) $2\bar{b}, 6\bar{c}$ в) $-4\bar{a}, -5\bar{c}$ г) $\bar{a}, \bar{c}$ д) $-4\bar{a}, 2\bar{b}, 6\bar{c}$
10	$\bar{a} = 6\bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k}, \bar{b} = 9\bar{i} - 6\bar{j} + 9\bar{k},$ $\bar{c} = \bar{i} - 8\bar{k}$ а) $2\bar{a}, -4\bar{b}, 3\bar{c}$ б) $3\bar{b}, -9\bar{c}$ в) $3\bar{a}, -5\bar{c}$ г) $\bar{a}, \bar{b}$ д) $3\bar{a}, -4\bar{b}, -9\bar{c}$	23	$\bar{a} = 4\bar{i} - 6\bar{j} - 2\bar{k}, \bar{b} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k},$ $\bar{c} = 3\bar{i} - 5\bar{j} + 7\bar{k}$ а) $6\bar{a}, 3\bar{b}, 8\bar{c}$ б) $-7\bar{b}, 6\bar{a}$ в) $-5\bar{a}, 4\bar{c}$ г) $\bar{a}, \bar{b}$ д) $-5\bar{a}, 3\bar{b}, 4\bar{c}$

11	$\bar{a} = 5\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}, \bar{b} = 2\bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k},$ $\bar{c} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 7\bar{k}$ а) $\bar{a}, -4\bar{b}, 2\bar{c}$ б) $-2\bar{b}, 4\bar{c}$ в) $-3\bar{a}, 6\bar{c}$ г) $\bar{b}, \bar{c}$ д) $\bar{a}, -2\bar{b}, 6\bar{c}$	24	$\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}, \bar{b} = -\bar{i} + 5\bar{j} - 4\bar{k},$ $\bar{c} = 6\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$ а) $4\bar{a}, -7\bar{b}, -2\bar{c}$ б) $6\bar{a}, -4\bar{c}$ в) $-2\bar{a}, 5\bar{b}$ г) $\bar{a}, \bar{c}$ д) $6\bar{a}, -7\bar{b}, -2\bar{c}$
12	$\bar{a} = -4\bar{i} + 3\bar{j} - 7\bar{k},$ $\bar{b} = 4\bar{i} + 6\bar{j} - 2\bar{k}, \bar{c} = 6\bar{i} + 9\bar{j} - 3\bar{k}$ а) $-2\bar{a}, \bar{b}, -2\bar{c}$ б) $4\bar{b}, 7\bar{c}$ в) $5\bar{a}, -3\bar{b}$ г) $\bar{b}, \bar{c}$ д) $-2\bar{a}, 4\bar{b}, 7\bar{c}$	25	$\bar{a} = -3\bar{i} - \bar{j} - 5\bar{k}, \bar{b} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 8\bar{k},$ $\bar{c} = 3\bar{i} + 7\bar{j} - \bar{k}$ а) $2\bar{a}, -\bar{b}, 3\bar{c}$ б) $-9\bar{a}, 4\bar{c}$ в) $5\bar{b}, -6\bar{c}$ г) $\bar{b}, \bar{c}$ д) $2\bar{a}, 5\bar{b}, -6\bar{c}$
13	$\bar{a} = -5\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}, \bar{b} = 7\bar{i} - 5\bar{k},$ $\bar{c} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$ а) $2\bar{a}, 4\bar{b}, -5\bar{c}$ б) $-3\bar{b}, 11\bar{c}$ в) $8\bar{a}, -6\bar{c}$ г) $\bar{a}, \bar{c}$ д) $8\bar{a}, -3\bar{b}, 11\bar{c}$	26	$\bar{a} = -3\bar{i} + 2\bar{j} + 7\bar{k}, \bar{b} = \bar{i} - 5\bar{k},$ $\bar{c} = 6\bar{i} + 4\bar{j} - \bar{k}$ а) $-2\bar{a}, \bar{b}, 7\bar{c}$ б) $5\bar{a}, -2\bar{c}$ в) $3\bar{b}, \bar{c}$ г) $\bar{a}, \bar{c}$ д) $-2\bar{a}, 3\bar{b}, 7\bar{c}$
27	$\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}, \bar{b} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k},$ $\bar{c} = \bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$ а) $-3\bar{a}, 4\bar{b}, -5\bar{c}$ б) $6\bar{b}, 3\bar{c}$ в) $\bar{a}, 4\bar{c}$ г) $\bar{b}, \bar{c}$ д) $-3\bar{a}, 4\bar{b}, -5\bar{c}$	28	$\bar{a} = 4\bar{i} - 5\bar{j} - 4\bar{k}, \bar{b} = 5\bar{i} - \bar{j},$ $\bar{c} = 2\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}$ а) $\bar{a}, 7\bar{b}, -2\bar{c}$ б) $-5\bar{a}, 4\bar{b}$ в) $-3\bar{a}, 8\bar{c}$ г) $\bar{a}, \bar{c}$ д) $-3\bar{a}, 4\bar{b}, 8\bar{c}$

ЗАДАНИЕ 3.

Вершины пирамиды находятся в точках А, В, С и D. Вычислить:

- площадь указанной грани;
- площадь сечения, проходящего через середину ребра p и две вершины пирамиды;
- объем пирамиды ABCD.

Вариант	Данные	Вариант	Данные
1	A(3,4,5), B(1,2,1), C(-2,-3,6), D(3,-6,-3) а) ACD б) p = AB, C и D	14	A(-4,-5,-3), B(3,1,2), C(5,7,-6), D(6,-1,5) а) ACD б) p = BC, A и D
2	A(-7,-5,6), B(-2,5,-3), C(3,-2,4), D(1,2,2) а) BCD б) p = CD, A и B	15	A(5,2,4), B(-3,5,-7), C(1,-5,8), D(9,-3,5) а) ABD б) p = BD, A и C
3	A(1,3,1), B(-1,4,6), C(-2,-3,4), D(3,4,-4) а) ACD б) p = BC, A и D	16	A(-6,4,5), B(5,-7,3), C(4,2,-8), D(2,8,-3) а) ACD б) p = AD, B и C
4	A(2,4,1), B(-3,-2,4), C(3,5,-2), D(4,2,-3) а) ABD б) p = AC, B и D	17	A(5,3,6), B(-3,-4,4), C(5,-6,8), D(4,0,-3) а) BCD б) p = BC, A и D
5	A(-5,-3,-4), B(1,4,6), C(3,2,-2), D(8,-2,4)	18	A(5,-4,4), B(-4,-6,5), C(3,2,-7), D(6,2,-9)

	a) ACD б) $p = BC$, А и D		a) ABD б) $p = BD$, А и С
6	$A(3,4,2)$, $B(-2,3,-5)$, $C(4,-3,6)$, $D(6,-5,3)$ a) ABD б) $p = BD$, А и С	19	$A(-7,-6,-5)$, $B(5,1,-3)$, $C(8,-4,0)$, $D(3,4,-7)$ a) BCD б) $p = AD$, В и С
7	$A(-4,6,3)$, $B(3,-5,1)$, $C(2,6,-4)$, $D(2,4,-5)$ a) ACD б) $p = AD$, В и С	20	$A(7,-1,-2)$, $B(1,7,8)$, $C(3,7,9)$, $D(-3,-5,2)$ a) ACD б) $p = BD$, А и С
8	$A(7,5,8)$, $B(-4,-5,3)$, $C(2,-3,5)$, $D(5,1,-4)$ a) BCD б) $p = BC$, А и D	21	$A(5,2,7)$, $B(7,-6,-9)$, $C(-7,-6,3)$, $D(1,-5,2)$ a) ABD б) $p = AB$, С и D
9	$A(3,-2,6)$, $B(-6,-2,3)$, $C(1,1,-4)$, $D(4,6,-7)$ a) ABD б) $p = BD$, А и С	22	$A(-2,-5,-1)$, $B(-6,-7,9)$, $C(4,-5,1)$, $D(2,1,4)$ a) BCD б) $p = BC$, А и D
10	$A(-5,-4,-3)$, $B(7,3,-1)$, $C(6,-2,0)$, $D(3,2,-7)$ a) BCD б) $p = AD$, В и С	23	$A(-6,-3,-5)$, $B(5,1,7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-2,9)$ a) ACD б) $p = BC$, А и D
11	$A(3,-5,-2)$, $B(-4,2,3)$, $C(1,5,7)$, $D(-2,-4,5)$ a) ACD б) $p = BD$, А и С	24	$A(7,4,2)$, $B(-5,3,-9)$, $C(1,-5,3)$, $D(7,-9,1)$ a) ABD б) $p = BD$, А и С
12	$A(7,4,9)$, $B(1,-2,-3)$, $C(-5,-3,0)$, $D(1,-3,4)$ a) ABD б) $p = AB$, С и D	25	$A(-8,2,7)$, $B(3,-5,9)$, $C(2,4,-6)$, $D(4,6,-5)$ a) ACD б) $p = AD$, В и С
13	$A(-4,-7,-3)$, $B(-4,-5,7)$, $C(2,-3,3)$, $D(3,2,1)$ a) BCD б) $p = BC$, А и D	26	$A(4,3,1)$, $B(2,7,5)$, $C(-4,-2,4)$, $D(2,-3,-5)$ a) ACD б) $p = AB$, С и D
27	$A(-9,-7,4)$, $B(-4,3,-1)$, $C(5,-4,2)$, $D(3,4,4)$ a) BCD б) $p = CD$, А и В	28	$A(3,5,3)$, $B(-3,2,8)$, $C(-3,-2,6)$, $D(7,8,-2)$ a) ACD б) $p = BD$, А и С

Индивидуальное задание №3 по теме **«КРИВЫЕ 2-ГО ПОРЯДКА»**

Задание №1. Составить канонические уравнения:

- а) эллипса;
- б) гиперболы;
- в) параболы.

Построить кривые. Обозначения: А,В – точки, лежащие на кривой; F – фокус; а – большая (действительная) полуось; b – малая (мнимая) полуось; ε – эксцентриситет; $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы; D – директриса кривой; 2с – фокусное расстояние.

Задание №2. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке А. Построить окружность.

Задание №3. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить данную кривую.

Варианты задания №1

№	а)	б)	в)
1	$b = 15$, $F(-10,0)$	$a = 13$, $\varepsilon = 14/13$	D: $x = -4$

2	$b = 2, F(4\sqrt{2}, 0)$	$a = 7, \varepsilon = \sqrt{85} / 7$	D: $x = 5$
3	$A(3, 0), B(2, \sqrt{5} / 3)$	$k = 3/4, \varepsilon = 5/4$	D: $y = -2$
4	$\varepsilon = \sqrt{21} / 5, A(-5, 0)$	$A(\sqrt{80}, 3), B(4\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$	D: $y = 1$
5	$2a = 22, \varepsilon = \sqrt{57} / 11$	$k = 2/3, 2c = 10\sqrt{13}$	ось симметрии Ох и A(27,9)
6	$b = \sqrt{15}, \varepsilon = \sqrt{10} / 25$	$k = 3/4, 2a = 16$	ось симметрии Ох и A(4,-8)
7	$a = 4, F(3, 0)$	$b = 2\sqrt{10}, F(-11, 0)$	D: $x = -2$
8	$b = 4, F(9, 0)$	$a = 5, \varepsilon = 7/5$	D: $x = 6$
9	$A(0, \sqrt{3}), B(\sqrt{14} / 3, 1)$	$k = \sqrt{21} / 10, \varepsilon = 11/10$	D: $y = -4$
10	$\varepsilon = 7/8, A(8, 0)$	$A(4, 3/\sqrt{15}), B(\sqrt{170} / 3, 5)$	D: $y = 4$
11	$2a = 24, \varepsilon = \sqrt{22} / 6$	$k = \sqrt{2} / 3, 2c = 10$	ось симметрии Ох и A(-7,-7)
12	$b = 2, \varepsilon = 5\sqrt{29} / 29$	$k = 12/13, 2a = 26$	ось симметрии Ох и A(-5,15)
13	$a = 6, F(-4, 0)$	$b = 3, F(7, 0)$	D: $x = -7$
14	$b = 7, F(5, 0)$	$a = 11, \varepsilon = 12/11$	D: $x = 10$
15	$A(-\sqrt{17} / 3, 1/3), B(\sqrt{21} / 2, 1/2)$	$k = 1/2, \varepsilon = \sqrt{5} / 2$	D: $y = -1$
16	$\varepsilon = 3/5, A(0, 8)$	$A(\sqrt{6}, 0), B(-2\sqrt{2}, 1)$	D: $y = 9$
17	$2a = 22, \varepsilon = 10/11$	$k = \sqrt{11} / 5, 2c = 12$	ось симметрии Ох и A(-7,5)
18	$b = 5, \varepsilon = 12/13$	$k = 1/3, 2a = 6$	ось симметрии Оу и A(-9,6)
19	$a = 9, F(7, 0)$	$b = 6, F(12, 0)$	D: $x = -1/4$
20	$b = 5, F(-10, 0)$	$a = 9, \varepsilon = 4/3$	D: $x = 12$
21	$A(0, -2), B(\sqrt{15} / 2, 1)$	$k = 2\sqrt{10} / 9, \varepsilon = 11/9$	D: $y = 5$
22	$\varepsilon = 2/3, A(-6, 0)$	$A(\sqrt{8}, 0), B(2\sqrt{26} / 3, 2)$	D: $y = 1$
23	$2a = 50, \varepsilon = 3/5$	$k = \sqrt{29} / 14, 2c = 30$	ось симметрии Оу и A(4,1)
24	$b = 2\sqrt{15}, \varepsilon = 7/8$	$k = 5/6, 2a = 12$	ось симметрии Оу и A(-2, $3\sqrt{2}$)
25	$a = 13, F(-5, 0)$	$b = 4, F(-7, 0)$	D: $x = -3/8$
26	$b = 7, F(13, 0)$	$b = 4, F(-11, 0)$	D: $x = 13$
27	$A(-3, 0), B(1, \sqrt{40} / 3)$	$k = \sqrt{2} / 3, \varepsilon = \sqrt{15} / 3$	D: $y = 4$
28	$\varepsilon = 5/6, A(0, -\sqrt{11})$	$A(\sqrt{32} / 3, 1), B(\sqrt{8}, 0)$	D: $y = -3$

Варианты задания №2

№	Точки	Координаты точки А
1	Вершины гиперболы $12x^2 - 13y^2 = 156$	(0,-2)
2	Вершины гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$	(0,4)
3	Фокусы гиперболы $24x^2 - 25y^2 = -600$	(-8,0)
4	O(0,0)	А – вершина параболы

		$y^2 = 3(x - 1)$
5	Фокусы эллипса $9x^2 + 25y^2 = 1$	(0,6)
6	Левый фокус гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$	(0,-3)
7	Фокусы эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$	А – его верхняя вершина
8	Вершина гиперболы $x^2 - 16y^2 = 64$	(0,-2)
9	Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 80$	(0,-4)
10	O(0,0)	А – вершина параболы $y^2 = -(x + 5)/2$
11	Правый фокус эллипса $33x^2 + 49y^2 = 1617$	(1,7)
12	Левый фокус гиперболы $3x^2 - 5y^2 = 30$	(0,6)
13	Фокусы эллипса $16x^2 + 41y^2 = 656$	А – его нижняя вершина
14	Вершина гиперболы $2x^2 - 9y^2 = 18$	(0,4)
15	Фокусы гиперболы $5x^2 - 11y^2 = 55$	(0,5)
16	B(1,4)	А – вершина параболы $y^2 = (x - 4)/3$
17	Левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$	(-1,-3)
18	Левая вершина гиперболы $5x^2 - 9y^2 = 45$	(0,-6)
19	Фокусы эллипса $24x^2 + 25y^2 = 600$	А – его верхняя вершина
20	Правая вершина гиперболы $3x^2 - 16y^2 = 48$	(1,3)
21	Левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$	(-1,-2)
22	B(2,-5)	А – вершина параболы $x^2 = -2(y + 1)$
23	Правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$	(2,-7)
24	Правая вершина гиперболы $40x^2 - 81y^2 = 3240$	(-2,5)
25	Фокусы эллипса $x^2 + 10y^2 = 90$	А – его нижняя вершина
26	Правая вершина гиперболы $3x^2 - 25y^2 = 75$	(-5,-2)
27	Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$	(0,-6)
28	B(3,4)	А – вершина параболы $y^2 = (x + 7)/4$

Варианты задания №3

№	Уравнение кривой	№	Уравнение кривой
1	$9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y + 1 = 0$	15	$x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$
2	$4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 3 = 0$	16	$9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0$
3	$3y^2 - 12x - 6y + 11 = 0$	17	$4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 68 = 0$

4	$25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$	18	$9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0$
5	$4x^2 - y^2 - 16x + 6y + 23 = 0$	19	$-4y^2 - x + 6y - 3 = 0$
6	$3x^2 + 12x + 16y - 12 = 0$	20	$2x^2 + 8x - y + 12 = 0$
7	$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$	21	$x^2 + 4x - y + 5 = 0$
8	$4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$	22	$4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$
9	$16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$	23	$9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$
10	$9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$	24	$2y^2 + 8x + 12y - 3 = 0$
11	$-4x^2 + 8x + y - 7 = 0$	25	$x^2 - 4x - y + 3 = 0$
12	$2y^2 - x - 12y + 14 = 0$	26	$x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0$
13	$9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23 = 0$	27	$3y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$
14	$4x^2 + 9y^2 + 16x + 18y - 11 = 0$	28	$x^2 + 3y^2 + 4x - 5y = 0$

**Индивидуальное задание №4 по теме
“БАЗИС ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА”**

1. Используя определение, выяснить, являются ли линейно зависимыми векторы a_1 , a_2 , a_3 (таблица 1).

2. В некотором базисе $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ заданы четыре вектора a_1 , a_2 , a_3 , x (таблица 2).

- а) показать, что векторы a_1 , a_2 , a_3 образуют базис B' ;
- б) найти координаты вектора x в базисе $B' = \{a_1, a_2, a_3\}$;
- в) указать матрицу T перехода от базиса B к базису B' ;
- г) найти матрицу обратного перехода;
- д) найти координаты векторов базиса B , т.е. e_1, e_2, e_3 , в базисе B' .

Таблица 1

Варианты задания 1

Вариант	Вектор a_1	Вектор a_2	Вектор a_3
1	(1, 4, 6)	(1, -1, 1)	(1, 1, 3)
2	(2, -3, 1)	(3, -1, 5)	(1, -4, 3)

3	(1, 2, 3)	(4, 5, 6)	(7, 8, 9)
4	(2, 1, -1)	(1, 0, 2)	(1, -1, 1)
5	(1, 2, 3)	(2, 5, 7)	(3, 7, 10)
6	(1, 2, 1)	(-1, -3, 4)	(-5, 0, 2)
7	(2, 1, 2)	(-3, 4, 5)	(0, 2, 3)
8	(1, -1, 2)	(3, 1, 1)	(3, 1, -1)
9	(2, -1, 1)	(1, -3, 4)	(-1, 2, 4)
10	(1, 2, 2)	(1, 2, 3)	(1, 2, -2)
11	(-1, 2, 3)	(-1, -1, -1)	(2, -5, -1)
12	(4, 3, 1)	(2, -1, -3)	(-1, 4, -5)
13	(1, 1, -1)	(3, 0, -5)	(1, -3, 0)
14	(1, -3, 5)	(1, -3, 1)	(-1, -3, 13)
15	(1, 2, 3)	(3, 4, 2)	(4, 1, 2)
16	(2, 3, 5)	(1, 3, 2)	(2, 1, -2)
17	(5, 5, 5)	(4, 3, 2)	(1, 2, 3)
18	(1, 1, 1)	(1, 2, 1)	(1, 1, 3)
19	(2, -4, 3)	(1, -2, 1)	(1, -2, 4)
20	(3, -3, 5)	(1, 5, 3)	(4, 34, 0)
21	(-4, 3, -3)	(-2, 1, 5)	(-2, 4, 34)
22	(1, 2, 3)	(2, -3, 1)	(1, 9, 8)
23	(2, 3, -2)	(-3, 1, -4)	(9, 8, -2)
24	(2, 1, 11)	(1, 0, 4)	(11, 0, 56)
25	(1, 11, 2)	(0, 4, -1)	(0, 56, 5)
26	(2, 1, 3)	(4, -3, 1)	(3, 4, -2)
27	(2, 1, 1)	(1, 3, 1)	(1, 1, 5)

Таблица 2

Варианты задания 2

Вариант	Вектор a_1	Вектор a_2	Вектор a_3	Вектор x
1	(4, 5, 2)	(3, 0, 1)	(-1, 4, 2)	(5, 7, 8)
2	(3, -5, 2)	(4, 5, 1)	(-3, 0, -4)	(-4, 5, -16)
3	(-2, 3, 5)	(1, -3, 4)	(7, 8, -1)	(1, 20, 1)
4	(1, 1, 0)	(0, 1, 1)	(0, 0, 1)	(7, 3, 1)
5	(2, 1, 0)	(1, 1, 1)	(0, 0, 1)	(4, 5, -8)
6	(2, 3, 1)	(1, 2, -1)	(0, 1, 2)	(7, 8, -2)
7	(3, 4, 1)	(0, 1, 0)	(2, 0, 1)	(6, -2, 13)
8	(1, 1, 1)	(0, 0, 1)	(1, 0, 1)	(13, 2, -4)
9	(1, 1, 1)	(1, 2, 3)	(1, 0, 1)	(4, 7, -3)
10	(3, 3, -1)	(2, 0, 1)	(1, -2, 2)	(17, 2, -3)
11	(5, -1, 3)	(4, -1, 2)	(0, 0, 1)	(7, -5, 10)
12	(2, 3, -1)	(5, 1, -3)	(0, 3, 0)	(17, -1, -3)
13	(2, 1, -1)	(1, 0, 2)	(1, -1, 1)	(3, 4, 5)
14	(3, 2, 3)	(-4, -3, -5)	(5, 1, -1)	(2, 7, 0)
15	(2, 2, -1)	(2, -1, 2)	(-1, 2, 2)	(1, 2, 1)
16	(1, 0, 1)	(2, 1, 0)	(-3, 2, 4)	(1, 2, 3)
17	(1, -1, 1)	(0, 1, -1)	(0, 1, 1)	(1, 1, 0)
18	(1, 4, -5)	(2, 3, -4)	(1, -2, -1)	(1, 3, 1)
19	(2, 1, 2)	(1, -1, 2)	(0, 1, -1)	(4, 1, -5)
20	(1, 2, 4)	(1, -3, 1)	(1, 1, -5)	(3, 2, 10)

21	(1, 3, 2)	(1, -2, -1)	(0, 1, 1)	(-11, 0, 1)
22	(4, -4, -3)	(-8, 7, 5)	(-5, -1, 1)	(1, 1, 1)
23	(3, 1, 2)	(1, 2, 1)	(0, 0, 1)	(2, 4, 3)
24	(1, 2, 4)	(1, -3, 1)	(1, 1, -5)	(1, -2, 1)
25	(1, 1, 1)	(0, 1, 2)	(0, 1, 3)	(3, 0, 3)
26	(1, 0, 1)	(2, 1, 0)	(-3, 2, 4)	(-10, 11, 0)
27	(2, 1, 1)	(3, 2, 1)	(0, 0, 1)	(4, -2, 3)
28	(5, -1, 2)	(2, 3, 0)	(-2, 1, 1)	(1, 4, -1)
29	(1, 1, 1)	(1, 2, 3)	(1, 0, 1)	(2, 1, -3)
30	(2, 1, -1)	(-1, 0, -2)	(1, -1, 1)	(1, -1, 7)

**Индивидуальное задание №5 по теме
«МНОГООБРАЗИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ»**

Найти линейное многообразие решений систем неоднородных линейных уравнений, составленных:

- 1) из первых трех уравнений;
- 2) из первых двух уравнений;
- 3) из первого уравнения предложенной системы линейных уравнений.

№ вари- анта	система	№ варианта	система
1	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 = -2, \\ 14x_1 + 13x_2 + 16x_3 + 10x_4 = -5, \\ 25x_1 + 24x_2 + 30x_3 + 20x_4 = -9. \end{cases}$	16	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41. \end{cases}$	17	$\begin{cases} x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 265x_4 = -48, \\ 4x_2 + 18x_3 + 48x_4 = -10, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 29, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 12, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$	19	$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 - 3x_3 = -4 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 16, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 11. \end{cases}$

6	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases}$	21	$\begin{cases} 10x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 10x_4 = -5, \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = -3. \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 = -10, \\ x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = -48. \end{cases}$	22	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12. \end{cases}$
8	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 17, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$	23	$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 25, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 19, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$	24	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 13x_4 = 11, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 14x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 13. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_3 + 6x_4 = 8, \\ 2x_2 + 5x_4 = 9. \end{cases}$	25	$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 9x_3 - 5x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 14x_1 + 13x_2 + 16x_3 + 10x_4 = -5, \\ 25x_1 + 24x_2 + 30x_3 + 20x_4 = -9, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 10x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -2. \end{cases}$	26	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$
12	$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 8x_3 + x_4 = 15, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40. \end{cases}$	27	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 21x_3 + 52x_4 = -8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = -48. \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 25, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 29, \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + x_4 = 41, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 30, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$
14	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 14x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$	29	$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

15	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 5. \end{cases}$	30	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 16. \end{cases}$
-----------	---	-----------	---

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Как уже отмечалось, самостоятельная работа по изучению теоретического материала (а также самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях) – это важнейшее условие формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

- Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать».

- Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

- Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).

- Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.

- При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...

- Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

- Если книга – Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора (это очень хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).

- Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать), и это может занять немалое время (у кого-то – до нескольких недель и даже месяцев); опыт показывает, что после этого студент каким-то «чудом» начинает буквально заглатывать книги и чуть ли не видеть «сквозь обложку», стоящая это работа или нет...

- «Либо читайте, либо перелистывайте материал, но не пытайтесь читать быстро... Если текст меня интересует, то чтение, размышление и даже фантазирование по этому поводу сливаются в единый процесс, в то время как вынужденное скорочтение не только не способствует качеству чтения, но и не приносит чувства удовлетворения, которое мы получаем, размышляя о прочитанном», – советует Г. Селье (Селье, 1987. – С. 325-326).

- Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент (или молодой ученый) будет как бы искать аргументы «за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Проблема лишь в том, как найти «свою» идею...

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные све-

дения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют четыре основные установки в чтении научного текста:

1. **информационно-поисковый** (задача – найти, выделить искомую информацию)
2. **усваивающая** (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)
3. **аналитико-критическая** (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)
4. **творческая** (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких видов чтения:

1. **библиографическое** – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
2. **просмотровое** – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
3. **ознакомительное** – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;
4. **изучающее** – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;
5. **аналитико-критическое и творческое чтение** – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВИДАМ РАБОТ, ПРЕДУСМОТРЕННЫХ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Проверка знаний материала лекционных и практических занятий проводится в виде экзамена (во 2 семестре). Предполагается, что отдельные вопросы тем дисциплины изучаются студентами самостоятельно. Знания указанных вопросов проверяется наличием конспектов и собеседованием. Ниже приведены вопросы для собеседования по всем темам дисциплины «**Алгебра и геометрия**». Ответы на теоретические вопросы в рамках каждого практического занятия (собеседование) показывают умения и навыки студентов анализировать теоретический материал и готовность к применению теоретических знаний в практической деятельности.

Данное оценочное мероприятие проводится на каждом практическом занятии на основании материалов и знаний, полученных на лекциях, а также при изучении основной и дополнительной литературы.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования материалами лекций, основной и дополнительной литературы, а также интернет-ресурсов.

При проверке задания оцениваются:

- правильность ответов;
- чёткое знание терминологии;
- умение грамотно, четко и последовательно излагать материал;
- использование дополнительной литературы при подготовке;
- умение анализировать теоретический материал и сопоставлять его с практикой;
- умение приводить конкретные примеры.

В процессе самостоятельного изучения отдельных вопросов тем дисциплины рекомендуется работа с литературой, перечень которой приведен в конце методических указаний.

Вопросы для собеседования

Собеседование №1

Матрицы, определители, системы линейных уравнений

Базовый уровень

1. Алгебраические операции и их свойства. Алгебры.
2. Понятие матрицы.
3. Виды матриц.
4. Операции над матрицами и их свойства.
5. Ранг матрицы.
6. Элементарные преобразования матриц. Ступенчатый вид матрицы.
7. Определители малых порядков и их вычисление.
8. Свойства определителей.
9. Миноры и алгебраические дополнения.
10. Разложение определителя по строке или столбцу.
11. Обратная матрица. Критерий обратимости матрицы
12. Основные понятия и определения систем линейных уравнений.
13. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
14. Теорема Крамера.
15. Теорема Кронекера-Капелли и следствия из нее.
16. Системы линейных однородных уравнений.

Повышенный уровень

1. Gruppoиды. Понятия изоморфизма.
2. Полугруппы и группы.
3. Кольца и поля.
4. Перестановки. Построение определителя n -го порядка.
5. Способы вычисления обратной матрицы.
6. Метод Гаусса.

Собеседование №2

Элементы векторной алгебры

Базовый уровень

1. Основные понятия векторной алгебры.
2. Линейные операции над векторами и их свойства.
3. Линейная зависимость векторов.
4. Линейная зависимость векторов на плоскости и в пространстве.
5. Базис и координаты вектора.
6. Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме.
7. Проекция вектора на ось.
8. Основные свойства проекций.
9. Аффинная система координат.
10. Прямоугольная декартова система координат.
11. Полярная система координат.
12. Скалярное произведение векторов и его свойства.
13. Векторное произведение векторов и его свойства.
14. Смешанное произведение векторов и его свойства.

Повышенный уровень

1. Преобразование прямоугольных декартовых координат на плоскости и в пространстве.
2. Приложения скалярного произведения.
3. Приложения векторного произведения.
4. Приложения смешанного произведения.

Собеседование №3

Алгебраические линии и поверхности первого порядка

Базовый уровень

1. Понятие об уравнении линии на плоскости. Алгебраические линии.
2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору.
3. Общее уравнение прямой. Неполные уравнения прямой.
4. Уравнение прямой в отрезках.
5. Каноническое и параметрические уравнения прямой на плоскости.
6. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки.
7. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
8. Расстояние от точки до прямой.
9. Понятие об уравнении поверхности. Алгебраические поверхности.
10. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору.

11. Общее уравнение плоскости. Неполные уравнения плоскости.
12. Уравнение плоскости в отрезках.
13. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.
14. Расстояние от точки до плоскости.
15. Уравнения линии в пространстве.
16. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве.
17. Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки.
18. Общие уравнения прямой в пространстве.
19. Переход от общих уравнений прямой к ее каноническим уравнениям.
20. Условие принадлежности двух прямых к одной плоскости.

Повышенный уровень

1. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
2. Взаимное расположение двух плоскостей.
3. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
4. Взаимное расположение прямой и плоскости.
5. Пересечение прямой и плоскости.

Собеседование №4

Алгебраические линии и поверхности второго порядка

Базовый уровень

1. Окружность.
2. Эллипс. Вывод канонического уравнения.
3. Исследование формы и расположения эллипса по его каноническому уравнению.
4. Директрисы и эксцентриситет эллипса.
5. Гипербола. Вывод канонического уравнения.
6. Исследование формы и расположения гиперболы по ее каноническому уравнению.
7. Директрисы и эксцентриситет гиперболы.
8. Равносторонняя и сопряженная гиперболы.
9. Парабола. Вывод канонического уравнения.
10. Исследование формы и расположения параболы по ее каноническому уравнению.
11. Виды парабол.
12. Поверхности вращения.
13. Метод параллельных сечений.
14. Сфера.
15. Эллипсоид.
16. Однополостный гиперболоид.
17. Двуполостный гиперболоид.
18. Эллиптический параболоид.
19. Гиперболический параболоид.
20. Цилиндрические поверхности.
21. Цилиндры второго порядка.
22. Конические поверхности.
23. Конус второго порядка.

Повышенный уровень

1. Полярные уравнения кривых второго порядка.
2. Оптические свойства кривых второго порядка.
3. Уравнения кривых второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям

4. Инварианты уравнения поверхности второго порядка.
5. Центр поверхности второго порядка.
6. Классификация центральных поверхностей второго порядка.
7. Классификация нецентральных поверхностей второго порядка.
8. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.

Собеседование №5

Элементы высшей алгебры

Базовый уровень

1. Поле комплексных чисел.
2. Алгебраическая форма комплексного числа.
3. Геометрическое изображение комплексных чисел.
4. Модуль и аргумент комплексного числа.
5. Тригонометрическая форма комплексного числа.
6. Формула Муавра.
7. Извлечение корней из комплексных чисел.
8. Кольцо многочленов. Операции над многочленами.
9. Делимость многочленов. Теорема о делении с остатком.
10. Деление на двучлен. Схема Горнера.
11. НОД многочленов. Алгоритм Евклида.
12. Приводимые и неприводимые многочлены. Каноническое разложение многочлена.
13. Корни многочлена. Теорема Безу.

Повышенный уровень

1. Алгебраические операции и их свойства. Алгебры.
2. Gruppoиды. Понятия изоморфизма и гомоморфизма.
3. Полугруппы, группы.
4. Кольца.
5. Поля.
6. Многочлены над числовыми полями.

Собеседование №6

Линейные пространства

Базовый уровень

1. Определение, примеры и свойства линейных пространств.
2. Линейная зависимость векторов.
3. Свойства систем векторов.
4. Базис и ранг системы векторов.
5. Базис и размерность линейного пространства.
6. Координаты вектора.
7. Понятие линейного подпространства.
8. Линейная оболочка системы векторов.
9. Линейное многообразие.
10. Пространство решений системы линейных однородных уравнений.
11. Фундаментальная система решений.
12. Линейное многообразие решений системы линейных неоднородных уравнений.
13. Скалярное произведение векторов и его свойства.
14. Определение и примеры евклидовых пространств.
15. Неравенство Коши-Буняковского.

16. Основные метрические понятия: норма вектора, угол и расстояние между векторами.
17. Ортогональные и ортонормированные базисы.
18. Примеры и свойства ортонормированных базисов.
19. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Повышенный уровень

1. Преобразование координат вектора при переходе к другому базису.
2. Изоморфизм линейных пространств.
3. Сумма и пересечение линейных подпространств.
4. Прямая сумма подпространств
5. Изометрия евклидовых пространств.

Критерии оценивания компетенций

Оценка **«отлично»** выставляется студенту, если студент показал глубокое, прочное и аргументированное освоение учебного материала по теме, при этом поставленные вопросы (включая вопросы повышенного уровня) раскрыты последовательно, четко и логически стройно, в полном исчерпывающем объеме. Основные категории, понятия и определения темы сформулированы правильно и при ответе не допущено ошибок.

Оценка **«хорошо»** выставляется студенту, если студент показал твердое знание базового учебного материала по теме, при этом поставленные вопросы раскрыты грамотно и по существу, в достаточно полном объеме. Основные категории, понятия и определения темы сформулированы правильно, но при ответе допущены отдельные неточности или одна ошибка.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется студенту, если студент показал знание только базовой части темы, при этом поставленные вопросы раскрыты с нарушением логической последовательности или не в полном объеме. В ходе ответа были допущены неточные формулировки основных определений, понятий и теорем заданной темы, а также ошибки (не более двух) или ряд незначительных неточностей, не исказивших существенно суть ответа.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется студенту, если студент не знает значительной части вопросов темы, допускает существенные ошибки (более двух) и существенно искажает суть излагаемого материала. Оценка неудовлетворительно выставляется также, если студент отказался проходить собеседование.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЭКЗАМЕНУ

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается экзаменом. Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

Экзаменационная сессия - это серия экзаменов, установленных учебным планом. Между экзаменами интервал 3-4 дня. Не следует думать, что 3-4 дня достаточно для успешной подготовки к экзаменам.

В эти 3-4 дня нужно систематизировать уже имеющиеся знания. На консультации перед экзаменом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к экзаменам те же, что и при занятиях в течение семестра, но соблюдаться они должны более строго. Во-первых, очень важно соблюдение режима дня; сон не менее 8 часов в сутки, занятия заканчиваются не позднее, чем за 2-3 часа до сна. Оптимальное время занятий, особенно по математике - утренние и дневные часы. В перерывах между занятиями рекомендуются прогулки на свежем воздухе, неустойчивые занятия спортом. Во-вторых, наличие хороших собственных конспектов лекций. Даже в том случае, если была пропущена какая-либо лекция, необходимо во время ее восстановить (переписать ее на кафедре), обдумать, снять возникшие вопросы для того, чтобы запоминание материала было осознанным. В-третьих, при подготовке к экзаменам у студента должен быть хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Правила подготовки к экзамену:

- Лучше сразу сориентироваться во всем материале и обязательно расположить весь материал согласно экзаменационным вопросам (или вопросам, обсуждаемым на семинарах), эта работа может занять много времени, но все остальное – это уже технические детали (главное – это ориентировка в материале!).

- Сама подготовка связана не только с «запоминанием». Подготовка также предполагает и переосмысление материала, и даже рассмотрение альтернативных идей.

- Готовить «шпаргалки» полезно, но пользоваться ими рискованно. Главный смысл подготовки «шпаргалок» – это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету, что само по себе прекрасно – это очень сложная и важная для студента работа, более сложная и важная, чем простое поглощение массы учебной информации. Если студент самостоятельно подготовил такие «шпаргалки», то, скорее всего, он и экзамены сдавать будет более уверенно, так как у него уже сформирована общая ориентировка в сложном материале.

- Как это ни парадоксально, но использование «шпаргалок» часто позволяет отвечающему студенту лучше демонстрировать свои познания (точнее – ориентировку в знаниях, что намного важнее знания «запомненного» и «тут же забытого» после сдачи экзамена).

- Сначала студент должен продемонстрировать, что он «усвоил» все, что требуется по программе обучения (или по программе данного преподавателя), и лишь после этого он вправе высказать иные, желательно аргументированные точки зрения.

Примерные вопросы к экзамену

1. Окружность.
2. Эллипс.
3. Гипербола.
4. Парабола.
5. Уравнения кривых 2-го порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям.
6. Поверхности второго порядка. Метод параллельных сечений.
7. Сфера и эллипсоид.
8. Однополостный и двуполостный гиперболоиды.
9. Эллиптический и гиперболический параболоиды.
10. Цилиндрические поверхности. Цилиндры второго порядка.
11. Конические поверхности.
12. Классификация поверхностей второго порядка.
13. Алгебраические операции и их свойства. Алгебры.
14. Группоиды. Понятия изоморфизма и гомоморфизма.
15. Полугруппы, группы.
16. Кольца.
17. Поля.
18. Поле комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа.
19. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргумент.
20. Тригонометрическая форма комплексного числа.
21. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.
22. Кольцо многочленов. Операции над многочленами.
23. Делимость многочленов. Теорема о делении с остатком.
24. Деление на двучлен. Схема Горнера.
25. НОД многочленов. Алгоритм Евклида.
26. Приводимые и неприводимые многочлены. Каноническое разложение многочлена.
27. Корни многочлена. Теорема Безу.
28. Многочлены над числовыми полями.
29. Определение линейного пространства. Примеры линейных пространств.
30. Свойства линейного пространства.
31. Линейная зависимость векторов. Свойства систем векторов.
32. Базис и ранг системы векторов.
33. Базис линейного пространства. Координаты вектора.
34. Размерность линейного пространства.
35. Преобразование координат вектора при переходе к другому базису.
36. Изоморфизм линейных пространств.
37. Понятие линейного подпространства. Примеры.
38. Линейная оболочка системы векторов.
39. Линейное многообразие.
40. Пространство решений системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.
41. Линейное многообразие решений системы линейных неоднородных уравнений.

Критерии оценивания компетенций

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно отвечает на вопросы базового и повышенного уровней, умеет тесно увязывать теорию с практикой, не затрудняется с ответом при видоизменении

заданий, использует в ответе материал дополнительной литературы, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал как базового, так и повышенного уровней, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками сопоставления теории и практики.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только материала базового уровня, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при сопоставлении теории и практики.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Отметка «неудовлетворительно» выставляется также, если обучающийся отказался отвечать на вопросы.

Описание шкалы оценивания

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	88-100
Хороший	72-87
Удовлетворительный	53-71
Неудовлетворительный	<53

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Перечень основной литературы:

1. Ивлева, А. М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / А. М. Ивлева, П. И. Прилуцкая, И. Д. Черных. - 5-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2019. - 183 с. - ISBN 978-5-7782-3868-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/98793.html>
2. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2011. - 265 с. - ISBN 978-985-536-229-7. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28035.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Пономарёв, К. Н. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия и комплексные числа: учебное пособие / К. Н. Пономарёв, И. А. Сажин. - 2-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2022. - 127 с. - ISBN 978-5-7782-4735-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/126500.html>
2. Чеголин, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / А. П. Чеголин. - Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/68568.html>
3. Алания, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Алания, С. М. Гусейн-Заде, И. А. Дынников. - Москва: Логос, 2005. - 376 с. - ISBN 5-94010-375-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/9121.html>

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Бобылева, Т. Н. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие / Т. Н. Бобылева, Л. В. Кирьянова, Т. Н. Титова. - Москва: МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 144 с. - ISBN 978-5-7264-1909-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/80626.html>
2. Лебедева, Е. А. Практические занятия по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебно-методическое пособие / Е. А. Лебедева, О. Е. Рощенко, Т. И. Ерзина. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2013. - 130 с. — ISBN 978-5-7782-2275-5. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/45428.html>

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

<http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

<http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

<http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.

<http://www.mathedu.ru/> Электронная библиотека по математике и вопросам ее преподавания. Включает [популярные книги и пособия](#), [методические руководства](#), [учебники](#), [журналы](#), [исторические работы](#), [авторефераты](#), [диафильмы](#).

<http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

<http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).

<http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.