

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания
по выполнению практических работ по дисциплине
«Дополнительный курс по математике»
для студентов направления подготовки
Направление подготовки 19.03.01 Биотехнология
Направленность (профиль) Промышленная биотехнология

Ставрополь. 2026г.

Содержание

Практическое занятие 1. Векторное и смешанное произведение векторов.

Практическое занятие 2. Аналитическая геометрия в пространстве

Практическое занятие 3. Функции одной переменной.

Практическое занятие 4. Предел функции

Практическое занятие 5. Техника дифференцирования

Практическое занятие 6. Приложения дифференциального исчисления.

Практическое занятие 7. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования.

Практическое занятие 8. Интегрирование рациональных дробей.

Практическое занятие 9. Определенный интеграл.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

ВВЕДЕНИЕ

Цель освоения дисциплины: «Дополнительный курс по математике» является формирование соответствующих компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки

19.03.01 Биотехнология

Задачи освоения дисциплины:

- формирование математической культуры бакалавров;
- получение базовых знаний по высшей математике;
- овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в решении теоретических и прикладных задач в профессиональной деятельности.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дополнительный курс по математике» входит в блок «ФТД. Факультативы».

Её освоение происходит в 1 семестре.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ.

Цель: решение задач на выполнение аксиом векторного (линейного) пространства, изучить нелинейные операции над векторами.

Знать: нелинейные операции над векторами.

Уметь: применять аппарат векторной алгебры для решения различных практических задач на скалярное произведение векторов, приложения скалярного произведения, векторное и смешанное произведение.

Владеть: алгебраическими методами решения геометрических задач.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:

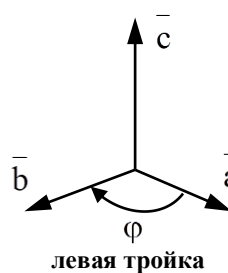
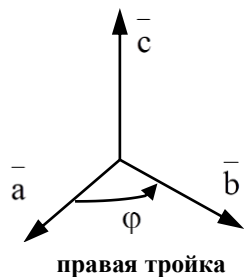
ОПК-1. Способен изучать, анализировать, использовать биологические объекты и процессы, основываясь на законах и закономерностях математических, физических, химических и биологических наук и их взаимосвязях

Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение векторными величинами такими как сила, скорость, ускорение, которые определяются не только своим числовым значением, но и направлением - векторные величины.

Теоретическая часть

Правые и левые тройки векторов

0. Упорядоченная тройка некопланарных векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ называется **правой** (**левой**), если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму вектору виден совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).



Определение и свойства векторного произведения векторов

0. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 3) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначения: $\vec{a} \times \vec{b}$; $[\vec{a}; \vec{b}]$.

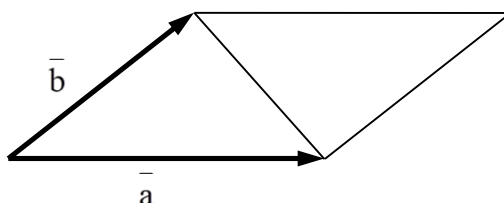
Геометрические свойства векторного произведения

1. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно $\vec{0}$:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}).$$

Следствие. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$.

2. Модуль векторного произведения двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ численно равен площади S параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$.



Следствие. Площадь параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу неколлинеарных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна половине модуля векторного произведения этих векторов:

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Алгебраические свойства векторного произведения

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Данные свойства имеют фундаментальное значение. Они позволяют при векторном перемножении векторных многочленов выполнять действия почленно и производить сочетание числовых множителей (но при этом необходимо либо сохранять порядок векторных множителей, либо при изменении этого порядка менять знак на противоположный).

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ с ортонормированным базисом $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Для векторов этого базиса справедливы соотношения:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Т. Векторное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими прямоугольными декартовыми координатами, выражается формулой:

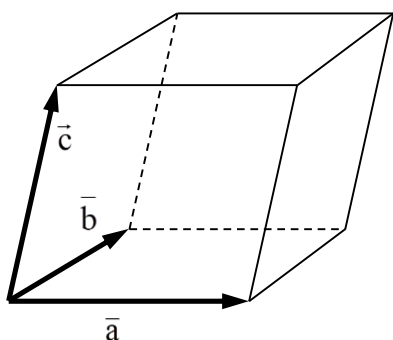
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

где $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Следствие. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, т.е. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}}$.

0. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Обозначение: $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$, $[\vec{a} \vec{b}] \vec{c}$.



Таким образом, $\boxed{\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}$.

Смешанное произведение $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ равно объему V параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятому со знаком «+», если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – правая, и со знаком «–», если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – левая.

Следствия.

1. Объем V параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, определяется по формуле $\boxed{V = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|}$.

2. Объем $V_{\text{пир}}$ треугольной пирамиды, построенной на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, определяется по формуле $\boxed{V = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|}$.

3. Справедливо равенство $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

4. Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$.

5. Смешанное произведение трех векторов, два из которых совпадают, равно 0.

Алгебраические свойства смешанного произведения

1. При циклической перестановке векторов смешанное произведение не меняется т.е.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{c} \vec{a} \vec{b}.$$

2. При перестановке двух сомножителей знак смешанного произведения меняется на противоположный:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a}.$$

Выражение смешанного произведения в координатах

Т. Смешанное произведение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, заданных своими прямоугольными декартовыми координатами, определяется формулой:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

где $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Следствие. Для того чтобы векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ были компланарны необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Примеры решения задач

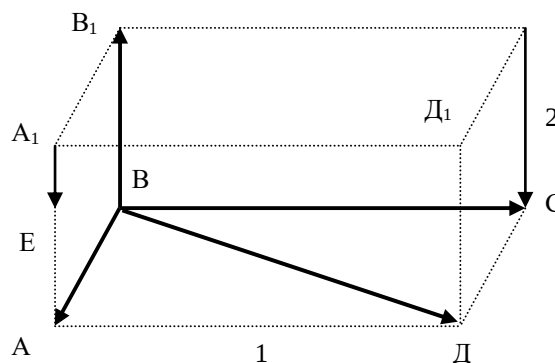
Задача 1. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 5 кв.ед. Верно ли утверждение $\vec{AB} \times \vec{AD} = 5$?

Ответ: нет; $\left| \vec{AB} \times \vec{AD} \right| = 5.$

Задача 8. $ABCD$ - квадрат,

$$|BB_1| = 2; \quad |\vec{AD}| = 1; \quad |\vec{A_1E}| = |\vec{EA}|.$$

C_1



Какой из векторов $\vec{BB_1}; \vec{CC_1}; \vec{A_1E}; \vec{BD}$ является векторным произведением $\vec{BC} \times \vec{BA}$?

Ответ: $\vec{A}_I \vec{T}$.

1. Что происходит с векторным произведением при перестановке его сомножителей?
2. В наших случаях векторное произведение равно нулю?
3. Чему равен векторный квадрат?

Задача 2. Сила $\vec{F} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ приложена к точке $M(1; 2; -1)$. Найти момент силы относительно точки $A(2; 1; -3)$.

Решение

Из механического смысла векторного произведения

$$m_A \vec{F} = \vec{AM} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Найдем $\vec{AM}$; $\vec{AM} = \{-1; 1; 2\}$, а $\vec{F} = \{3; -1; 2\}$, тогда

$$m_A \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}.$$

А как найти величину момента силы?

Задача 3. Даны точки $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$.

Вычислить $S_{\Delta ABC}$ и h_B .

Решение

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\square} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|, \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \{-12; -24; 8\}.$$

$$\Delta S = \frac{1}{2} \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 14 \text{ кв.ед.}$$

$$h_B = \frac{2S_{\Delta}}{|\vec{AC}|} = \frac{28}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 6^2}} = \frac{28}{2\sqrt{13}} = \frac{14\sqrt{13}}{13}.$$

1. Дайте определение смешанного произведения. Что является результатом: вектор, скаляр?

2. Рассказать по плакату о геометрическом смысле смешанного произведения.

Задача 4. Лежат ли точки

$$A(-4; 0; 1), B(9; -2; 1), C(1; 3; -1), D(3; 0; 5)$$

в одной плоскости?

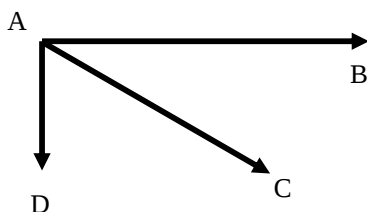
Решение

Условие компланарности $\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD} = 0$. Найдем

$$\vec{AB} = \{13; -2; 0\},$$

$$\vec{AC} = \{5; 3; -2\},$$

$$\vec{AD} = \{8; 0; 4\}.$$



Подсчитаем смешанное произведение

$$\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \notin$$

одной плоскости, а следовательно A, B, C, D принадлежит одной плоскости.

Резерв. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами в точках

$$D(3; -1; 2), A(3; 2; 0), B(-1; 2; 3), C(2; 1; -3).$$

Ответ: $V = 8 \frac{5}{6} e d^3$.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, для которых $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 6$ и $\varphi = (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$. Найти:

а) $|\vec{a} \times \vec{b}|$; б) $|(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 4\vec{b})|$.

Ответ: а) 6; б) 66.

2. Найти площадь и высоту BD треугольника с вершинами A(1, -2, 8), B(0, 0, 4) и C(6, 2, 0).

Ответ: $S = 7\sqrt{5}$, $BD = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

3. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$. Выяснить, правой или левой является тройка векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.
 Ответ: $V = 51$, тройка векторов левая.
4. Построить пирамиду с вершинами $O(0, 0, 0)$, $A(5, 2, 0)$, $B(2, 5, 0)$ и $C(1, 2, 4)$.
 Вычислить:
 а) объем пирамиды;
 б) площадь грани ABC;
 в) высоту пирамиды, опущенную на грань ABC.
- Ответ: а) 14; б) $6\sqrt{3}$; в) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.
5. Вычислить произведение $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} - \vec{c})(\vec{c} - \vec{a})$.
 Ответ: 0.
6. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.
 Ответ: $D(0, 8, 0)$ или $D(0, -7, 0)$.
7. Дано: $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = 2\pi/3$. Найти: $|\vec{a} \times \vec{b}|, |(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (-\vec{a} + 3\vec{b})|$.
8. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (8, 4, 1)$ и $\vec{b} = (2, -2, 1)$.
9. При каком значении λ векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \lambda\vec{k}, \vec{b} = (0, 1, 0)$ и $\vec{c} = (3, 0, 1)$ компланарны?
10. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (1, -2, 1), \vec{b} = (3, 2, 1), \vec{c} = (1, 0, -1)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.

Цель: решать задачи на составление различных уравнений плоскости.

Знать: различные уравнения плоскости и ее алгоритм построения.

Уметь: решать задачи на составление различных уравнений плоскости.

Владеть: методами исследования уравнений плоскости.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:

ОПК-1. Способен изучать, анализировать, использовать биологические объекты и процессы, основываясь на законах и закономерностях математических, физических, химических и биологических наук и их взаимосвязях

Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение методами аналитической геометрии в пространстве.

Решение типовых задач

Задача 1. Найти уравнение плоскости параллельной оси Oz и проходящей через точки $A = (2; 3; -1)$, $B(-1; 2; 4)$

Решение

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точки A и B , то координаты этих точек удовлетворяют уравнению плоскости. Получим

$$\begin{cases} 2A + 3B + D = 0 \\ -A + 2B + D = 0. \end{cases}$$

Методические указания. Вспомнить метод решения систем однородных линейных уравнений, метод Крамера. Обратить внимание курсантов на множество решений данной системы.

$$\begin{cases} 2A + 3B = -D \\ -A + 2B = -D, \end{cases} \quad \text{пусть} \quad \begin{matrix} D = t \\ \Delta \neq 0. \end{matrix}$$

Используем формулы Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7,$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} -t & 3 \\ -t & 2 \end{vmatrix} = -2t + 3t = t; \quad \Delta B = \begin{vmatrix} 2 & -t \\ -1 & -t \end{vmatrix} = -2t - t = -3t.$$

$$A = \frac{t}{7}; \quad B = -\frac{3t}{7}; \quad D = t.$$

Тогда уравнение плоскости примет вид: $\frac{t}{7}x - \frac{3t}{7}y + t = 0$, после преобразований разделим на $t \neq 0$,

$$tx - 3ty + 7t = 0,$$

$$x - 3y + 7 = 0.$$

Ответ: $x - 3y + 7 = 0$.

Задача 2. Какие отрезки на координатных осях отсекает плоскость

$$2x + 3y - 5z + 30 = 0?$$

Проблема: Какое из известных уравнений плоскости выбрать для решения задачи?

Ответ: уравнение в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Решение

$$2x + 3y - 5z + 30 = 0;$$

$$\frac{2x}{-30} + \frac{3y}{-30} + \frac{-5z}{-30} = 1;$$

$$\frac{x}{-15} + \frac{y}{-10} + \frac{z}{6} = 1.$$

Ответ: $a = -15$; $b = -10$; $c = 6$.

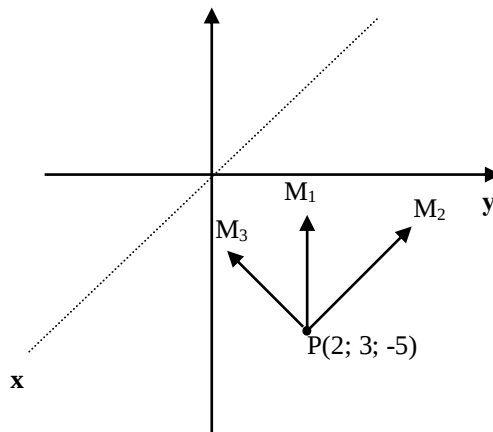
Задача 3. Из точки $P(2; 3; -5)$ на координатные плоскости опущены перпендикуляры. Найти уравнение плоскости, проходящей через их основания.

Проблема. Какими будут координаты точек, через которые нужно провести плоскость?

Какое уравнение плоскости взять для решения задачи?

Решение

Точка M_1 лежит на координатной плоскости xOy , следовательно, координата $z = 0$. $M_1(2; 3; 0)$.



Аналогично: $M_2(0; 3; -5)$, $M_3(2; 0; -5)$. Используем уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Методические указания

Сначала записать это уравнение в общем виде, затем использовать координаты точек M_1 ; M_2 ; M_3 .

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1-1 & 0-2 & 4+1 \\ -2-1 & -1-2 & 1+1 \end{vmatrix} = 0.$$

Какие методы вычисления определителей вы знаете?
Вычислим определитель одним из них.

Ответ: $x - y + 1 = 0$.

Задача 4. Через точку $M(2; 3; -1)$ провести плоскость параллельно плоскости
 $2x - 3y + 5z - 4 = 0$.

Решение

Уравнение связки плоскостей, проходящих через точку M имеет вид:

$$A(x-2) + B(y-3) + C(z+1) = 0.$$

Используем условие параллельности плоскостей

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{-3} = \frac{C}{5} = k; \quad A = 2k; \quad B = -3k; \quad C = 5k; \quad 2k(x-2) - 3k(y-3) + 5k = 0;$$

$$k \neq 0;$$

после преобразований получим $2x - 3y + 5z + 10 = 0$.

Ответ: $2x - 3y + 5z + 10 = 0$.

Задача 5. Найти угол между плоскостями

$$x + 2z - 6 = 0 \quad \text{и} \quad x + 2y - 4 = 0.$$

Решение

$$\cos \phi = \frac{1 + 0 + 0}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\phi = \pm \arccos \frac{1}{5}$.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Аналитическая геометрия в пространстве».

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(4, -4, 2)$ и параллельной плоскости Oxz .
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5, 4, 3)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, -3, 1)$, параллельно векторам $\vec{a} = (-3, 2, 1)$ и $\vec{b} = (1, 2, 3)$.
4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0, 2, 0)$, $M_2(2, 0, 0)$ и образующей угол 60° с плоскостью $x=0$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(7, 6, 7)$, $M_2(5, 10, 5)$ и $M_3(-1, 8, 9)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ.

Цель: изучить предел функции и способы его нахождения.

Знать:, определение предела функции, основные теоремы о пределах.

Уметь: находить предел и раскрывать неопределенности.

Владеть: техникой вычисления пределов.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:

ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности

Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение техникой вычисления пределов.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Определение предела функции в точке и его геометрический смысл.
2. Теорема единственности предела.
3. Свойства функции, имеющей конечный предел в точке.
4. Односторонние пределы и их геометрическая интерпретация.
5. Теорема о необходимом и достаточном условиях существования предела функции в точке.
6. Предел функции на бесконечности.
7. Определение бесконечно малой величины, примеры.
8. Свойства бесконечно малых величин.
9. Определение бесконечно больших величин.
10. Сравнение бесконечно малых величин.

Примеры решения задач

1. Найти предел функции.

Методические рекомендации:

Задача 1. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{3x} = \frac{2}{3}$.

Доказательство

$$\frac{2x+3}{3x} - \frac{2}{3} = \frac{2x+3-2x}{3x} - \frac{1}{x}; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ т.е. разность } \left(\frac{2x+3}{3x} - \frac{2}{3} \right) \text{ бесконечно}$$

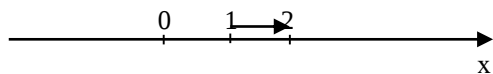
$$\text{малая величина} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Задача 2. Найти предел функции:

а) $y = \frac{5}{2-x}$ при $x \rightarrow 2-$ (слева).

Решение:

Переменная стремится к точке $x = 2$, оставаясь все время меньше 2, следовательно,

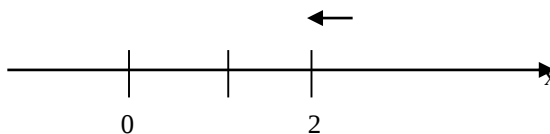


разность $2-x > 0$ и сама дробь положительна. Тогда по свойству

знакопостоянства, получим, $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{5}{2-x} = \infty$.

б) $y = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{5}{2-x}$ при $x \rightarrow 2+$ (справа).

Решение:



Переменная стремится к точке $x = 2$, оставаясь все время больше 2, следовательно, разность $2-x < 0$ и сама дробь отрицательна. Тогда по свойству знакопостоянства, получим,

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{5}{2-x} = -\infty$$

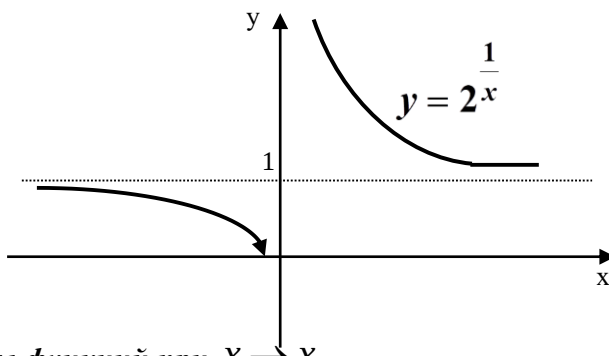
Задача 3. Найти предел функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$ при $x \rightarrow 0-;$ $x \rightarrow 0+$.

1) При $x \rightarrow 0-$ переменная $x < 0$, следовательно, $\frac{1}{x} < 0$. Преобразуем функцию

таким образом, чтобы показатель степени был положительным, получим $\frac{1}{2^{-\frac{1}{x}}}$. В

этом случае, дробь $-\frac{1}{x} > 0$, т.е. показатель степени положителен и $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{2^{-\frac{1}{x}}} = 0$,

2) $\lim_{x \rightarrow 0+} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$.



2. Найти пределы функций при $x \rightarrow x_0$.

Методические рекомендации:

Задача 1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 7x + 2}{x - 1}$.

Решение:

Замечаем, что при $x \rightarrow 1$ знаменатель $x - 1$ и числитель дроби стремятся к нулю. Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности нужно числитель и знаменатель дроби разложить на простейшие множители и сократить дробь на нулевой множитель $(x - 1)$.

Чтобы числитель разложить на множители, надо решить квадратное уравнение $5x^2 - 7x + 2 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 7x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x - 1)\left(x - \frac{2}{5}\right)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (5x - 2) = 3.$$

Задача 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{x}$;

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{x + 1})(x + \sqrt{x + 1})}{x(1 + \sqrt{x + 1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(1 + \sqrt{x + 1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1 + \sqrt{x + 1}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Найти пределы функций при $x \rightarrow \infty$:

Методические рекомендации:

Задача 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + 2x}$;

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + 2x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 0}{5 + 0} = \frac{3}{5}$$

Числитель и знаменатель дроби нужно разделить почленно на степень x наибольшую в числителе и знаменателе и воспользоваться тем, что величина обратная бесконечно большой является бесконечно малой.

4. Вычислить пределы, используя замечательные пределы и эквивалентности бесконечно малых величин.

Методические рекомендации:

Задача 1. Использовать первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t} = \frac{\pi}{2};$$

$$1-x=t; x=1-t; t \rightarrow 0.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{arcctg} x = \quad \text{ПОЛОЖИМ: } \operatorname{arcctg} x = \alpha; x = \operatorname{ctg} \alpha; \alpha \rightarrow 0.$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha = 1.$$

Задача 2. Использовать второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k; \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + k\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^k.$$

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = e^2;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + (-4x))^{-\frac{1}{4x}} \right)^{\frac{-4x(1-x)}{1-x}} = e^{-4};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{2x} = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1-2}{2x+1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{2x-1} \right)^{2x} =$$

$$\text{в) } = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2}{2x-1} \right)^{\frac{2x-1}{-2}} \right]^{\frac{-2}{2x-1} \cdot 2x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{2x-1}} = e^{-2}$$

Задача 3. Показать, что $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \rightarrow 0$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} = 1 \cdot 1 = 1$$

Задача 4. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

Решение.

Обозначим $\arcsin x = t$. Тогда $x = \sin t$ и $t \rightarrow 0$. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Следовательно, $\arcsin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$.

Задача 5. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$.

Решение. Т.к. $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$, $\sin 3x \sim 3x$ при $x \rightarrow 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$

1)	$\sin x \sim x$.
2)	$\arcsin x \sim x$.
3)	$\operatorname{tg} x \sim x$.
4)	$\operatorname{arctg} x \sim x$.
5)	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.
6)	$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$.
6')	$\ln(1+x) \sim x$.
7)	$a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$.
7')	$e^x - 1 \sim x$.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Вариант 1	
Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+x}-1}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{x})^{x+5}$.	
Вариант 2	
Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 7x \cdot \operatorname{ctg} 2x$; 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+4x}{3+4x} \right)^{2x}$	
Вариант 3	

Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-2} \right)^x$.
Вариант 4 Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^3 - 8}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{3x^2 + 2x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 3x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{4x}$
Вариант 5 Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 12x}{\operatorname{tg} 4x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x} \right)^{3x+2}$.
Вариант 6 Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 3x^3}{5x^4 + 2x^3}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \cdot \sin 3x$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt{1+x} - 1}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2} \right)^{2x+5}$
Вариант 7 Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + x - 6}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{5}}{3x^2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{9+x} - 3}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x} \right)^{x+5}$
Вариант 8 Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{18x^2 - 9x + 1}{27x^3 - 1}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 7x}{\operatorname{ctg} 2x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{(x+1)\sqrt{2+x}}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-4x}{1-4x} \right)^{2x-3}$
Вариант 9 Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 + x^2 - 2x - 8}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 5x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{2x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-8}{7x+2} \right)^{x+1}$
Вариант 10 Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x + 2}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt[3]{8-x} - \sqrt[3]{8+x}}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{1 - \cos x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+4} \right)^{4x+1}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Цель: изучить производную функции.

Знать: понятие производной, правила дифференцирования и таблицу производных основных элементарных функций

Уметь: находить производные сложных функций

Владеть: техникой дифференцирования функций, заданных неявно, заданных параметрически и степенно-показательных функций.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:

ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности

Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение понятием производной, правила дифференцирования и таблицу производных основных элементарных функций.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Дать определение производной функции.
2. Сформулировать геометрический смысл.
3. Сформулировать физический смысл производной функции.
4. Записать уравнение касательной, нормали к кривой.
5. Сформулировать необходимое условие дифференцируемости.
6. Записать формулу для производной сложной функции.
7. Дифференцирование функций, заданных неявно.
8. Дифференцирование функций заданных параметрически.
9. Дифференцирование степенно-показательной функции

Примеры решения задач

1. *Найти производную функции заданной неявно, пользуясь нужным правилом.*

Методические рекомендации:

Дифференцирование функций, заданных неявно.

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$x^2 + y^2 - 4xy - 10y + 4 = 0.$$

Решение.

I способ. $2x + 2yy' - 4y - 4xy' - 10y' = 0, \quad yy' - 2xy' - 5y' = 2y - x,$
 $y' = \frac{2y - x}{y - 2x - 5}.$

II способ. $F'_x = 2x - 4y, F'_y = 2y - 4x - 10, \quad y'_x = -\frac{2x - 4y}{2y - 4x - 10} = \frac{2y - x}{y - 2x - 5}.$

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

Методические рекомендации:

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

$$x'_t = a(-\sin t + \sin t + t \cos t) = at \cos t$$

$$y'_t = a(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t$$

$$y'_t = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{at \sin t}{at \cos t} = \operatorname{tg} t.$$

3. Найти производные степенно-показательных функций, используя логарифмическое дифференцирование: $y = x^x.$

Методические рекомендации:

Решение. $\ln y = x \ln x, \quad \frac{y'}{y} = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1, \quad y' = (\ln x + 1)x^x.$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант	5 вариант
$y = (x^2 + 1)^3$	$y = (3x^5 - x^2 + 2)^2$	$y = \sqrt{x^3 - 2}$	$y = \sqrt{x^2 + x + 1}$	$y = (2x^2 - 3x)^3$
$y = x^2 \cdot 2^x;$	$y = x^2 \cdot e^x;$	$y = \frac{1 + \sin 2x}{x^2};$	$y = xe^{\sin x};$	$y = \frac{\cos x}{\sin^2 x};$
$y = \ln \frac{e^x}{x^2 + 1};$	$y = \ln \frac{x^2}{1 - x^2};$	$y = \ln \frac{x^3 - 3}{2 + x^2};$	$y = \ln \sqrt{\frac{1 - 2x}{1 + 2x}};$	$y = \ln \frac{x^2 + 3}{x^2};$
$5x^2 + 3y - 2y^2 + 2 = 0.$	$2x^3 + 4y^2 - 7y + 5 = 0.$	$3xy + 2y^3 + 7 = 0.$	$x^4 + 3x^2y + 4y^2 - 2 = 0.$	$4x^3 + 3xy - 2y^2 - 8 = 0.$
$r = (\cos \alpha)^{\sin 2\alpha}$	$x^y = y^x, \quad y'_x = ?$	$y = (\sin x)^{\cos x}$	$r = (\cos 2\alpha)^{\sin \alpha}$	$y = (\sin 2x)^{\cos 2x}$
$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t^3 - 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 - 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 4t^3 \\ y = t^4 + 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 2t^3 - 4 \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Цель: приложения дифференциального исчисления.

Знать: раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя и исследование функций по полной схеме.

Уметь: находить исследование функций на экстремум, находить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции, асимптот графика функции.

Владеть: техникой исследования функций и построения графика.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:

ОПК-2. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности

Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение техникой исследования функций и построения графика.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

- 1) Какая функция называется убывающей, возрастающей, монотонной? Примеры.
- 2) Сформулировать признаки монотонности.
- 3) Что называется максимумом (минимум) функции в точке?
- 4) Что значит «функция имеет в точке экстремум»?
- 5) Сформулировать необходимый признак экстремума.
- 6) Какие точки называются стационарными, критическими, подозрительными на экстремум.
- 7) Сформулировать второе правило исследования на экстремум
- 8) Для какого вида неопределённости применяется правило Лопиталя?
- 9) Сформулируйте правило Лопиталя, укажите основные условия его применения.
- 10) Какая функция называется убывающей (возрастающей)?
- 11) Что называется ***max (min)*** функции?
- 12) Что можно узнать о функции и ее графике, используя элементарное исследование?
- 13) Что можно узнать о функции и ее графике, используя исследование с помощью 1-ой производной?
- 14) В каком случае график функции называется выпуклым, вогнутым?
- 15) Что называется точкой перегиба графика функции?
- 16) Что можно знать о функции и ее графике, используя исследование с помощью 2-ой производной?

Примеры решения задач

1. Найти пределы по правилу Лопиталя

Задача № 1. Неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} 3x^3 = 3.$$

Задача № 2. Неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x}{2x - 5} = \frac{8}{3}.$$

Задача № 3 . Неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x) \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2$$

Здесь правило Лопиталья применили 1 раз.

Задача № 4 . Неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + b}{cx^2 + d} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}$$

Задача № 5 . Неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Здесь правило Лопиталья применили 2 раза.

Задача № 6. Неопределённость вида $\infty - \infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x + x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Задача № 7. Неопределённость вида $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

Задача № 8. Неопределённость вида $\infty - \infty$.

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec \varphi - \operatorname{tg} \varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos \varphi}{-\sin \varphi} = 0.$$

2. Определить промежутки монотонности функции

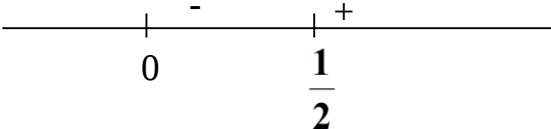
Задача №9 $f(x) = 2x^2 - \ln x$.

Решение

1. $D(f) =]0; +\infty[$.

2. $f'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$.

3. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2} \notin D(f)$; $x = \frac{1}{2}$ - критическая точка.
 $f'(x) = \infty \Rightarrow x = 0$; но $0 \notin D(f)$.

4) 

Ответ: на $]0; \frac{1}{2}[$ - функция убывает, $y' < 0$;
на $]\frac{1}{2}; \infty[$ - функция возрастает, т.к. $y' > 0$.

3. Исследовать на экстремум

Задача № 10. Дана функция $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

Решение

$D(f) =]-\infty; +\infty[$;

$y' = 2 - 2x^{-\frac{1}{3}} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 2\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x}}$;

$y' = 0$; $\sqrt[3]{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
 $y' = \infty$; $\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ } критические точки.

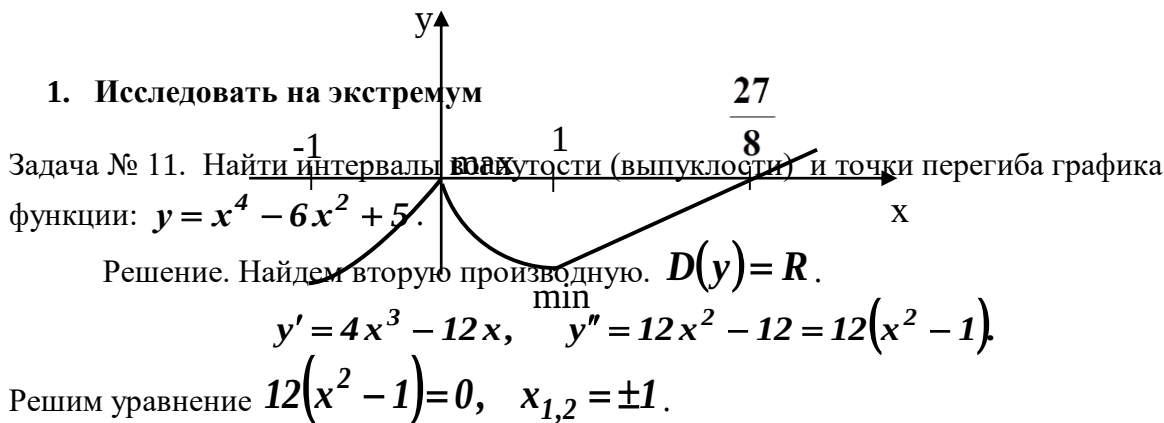
x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; 1[$	1	$]1; +\infty[$
y'	+	не сущ.	-	0	+
y		0		-1	
		max		min	

Нули функции:

1) Ось OY ; $x = 0$; $y = 0$.

2) Ось OX ; $y=0$; $2x - 3\sqrt[3]{x^2} = 0$; $\sqrt[3]{x^2}(2\sqrt[3]{x} - 3) = 0$;
 $2\sqrt[3]{x} = 3$; $x = \frac{27}{8}$.

Построение графика.



Исследуем знак второй производной в окрестности точек $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Составим таблицу.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	+	0	-	0	+
y	∪	$m.n$ 0	∩	$m.n$ 0	∪

$y(-1) = 0$; $y(1) = 0$.

Задача 12. Найти интервалы вогнутости (выпуклости) и точки перегиба графика функции: $y = x^{\frac{4}{3}}$.

Решение. $D(y) = R$. Найдем вторую производную.

$$y'' = \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}; \quad y'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}.$$

Производная y'' нигде в нуль не обращается. Приравнявая знаменатель дроби к нулю, получаем $9\sqrt[3]{x^2} = 0$; $x = 0$. В точке $x = 0$ вторая производная не существует ($y''(0) = \infty$). Исследуем знак второй производной в окрестности этой точки:

$$y''(-\infty; 0) > 0; \quad y''(0; +\infty) > 0.$$

Точек перегиба нет.

На интервале $(-\infty; +\infty)$ вогнутость кривой направлена вверх.

2. Найти асимптоты

Задача 13. Найти асимптоты функции $y = \frac{x^2 - x - 6}{x - 2}$.

Решение. $D(y) = R$, кроме $x = 2$. Данная функция имеет вертикальную асимптоту $x = 2$. Найдем односторонние пределы.

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = -\infty.$$

Определим наклонную асимптоту $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 6}{x - 2} = 1$$

$$y = x + 1.$$

3. Исследовать по полной схеме и построить график функции

Задача 14. Исследовать по полной схеме и построить график функции

$$y = \sqrt[3]{x^2} e^x.$$

1) $D(f) = R$;

2) ни четная, ни нечетная, симметрии графика нет;

3) функция положительна, график весь над осью OX .

$$4). y = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{x^2} \cdot e^x = e^x \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right) = e^x \frac{3x + 2}{3\sqrt[3]{x}};$$

$$y' = 0_x \quad \text{при} \quad x = -\frac{2}{3};$$

$$y' = \infty \quad \text{при} \quad x = 0.$$

$$5) y' = e^x \frac{9x^2 + 15x - 1}{9x\sqrt[3]{x}} = e^x \frac{9(x - 0,15)(x + 1,48)}{9x\sqrt[3]{x}};$$

$$y'' = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0,15 \quad \text{и} \quad x_2 = -1,48.$$

	$]-\infty; -1,48[$	$-1,48$	$]-1,48; -\frac{2}{3}[$	$-\frac{2}{3}$	$]-\frac{2}{3}; 0[$	0	$]0; 0,15[$	$0,15$	$]0,15; +\infty[$
y'	+	+	+	0	-	∞	+		+
y''	+	+	-		0	∞	-	0	+
y		Перегиб иб		max 		min 		Перегиб	

		$y = 0,26$		$y = 0,39$ 18		$y = 0$		$y = 0,327$ 99	
--	--	------------	--	------------------	--	---------	--	-------------------	--

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6

ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ЗАПИСАННЫМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ.

Цель: изучить действия над комплексными числами.

Знать: формы представления комплексных чисел.

Уметь: выполнять действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме, находить модуль и аргумент комплексного числа.

Владеть: техникой перевода чисел из одной формы в другую.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:

ОПК-1. Способен изучать, анализировать, использовать биологические объекты и процессы, основываясь на законах и закономерностях математических, физических, химических и биологических наук и их взаимосвязях

Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение техникой применения комплексных чисел.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Дать понятие комплексного числа в алгебраической форме.
2. Дать геометрическую интерпретацию комплексных чисел, объяснить смысл числовой сферы и стереографической проекции.
3. Модуль и аргумент комплексного числа.
4. Чем удобно определение комплексного числа как упорядоченной пары действительных чисел?
5. Какие комплексные числа называются равными, сопряженными?
6. Произведение каких комплексных чисел дает действительное число?
7. Как найти частное двух комплексных чисел?
8. Сколько существует различных значений корня степени n из комплексного числа?
9. Какие комплексные числа называются равными, сопряженными?
10. Произведение каких комплексных чисел равно действительному числу?

Примеры решения задач

1. Найти модуль и аргумент комплексного числа

Задача 1. $z_4 = 1 + i$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \quad \varphi = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

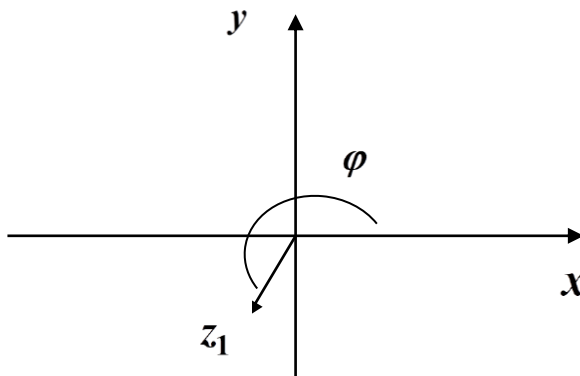
Так как z_4 принадлежит первой четверти, то $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Задача 2. $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$

Найдем модуль комплексного числа $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

и аргумент $\varphi = \arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \arctg \sqrt{3}$.

Построим число $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$



Так как $x < 0$ и $y < 0$, то число z_1 расположено в третьей четверти комплексной плоскости, тогда его аргументом будет число

$$\varphi = \arctg \sqrt{3} + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Задача 3. $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$

Модуль равен $r = \sqrt{12 + 4} = 4$; аргумент

$$\varphi = \arctg\left(\frac{-2}{2\sqrt{3}}\right) = \arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Так как $x > 0$ и $y < 0$, то число z_2 расположено в четвертой четверти и его аргументом будет число

$$\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11}{6}\pi.$$

Задача 13. $z_3 = -2\sqrt{3} + 2i$

$$r = \sqrt{12 + 4} = 4; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{-2\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right).$$

Так как $x < 0$ и $y > 0$, то число z_3 расположено во второй четверти и его аргументом будет

число $\varphi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$

Задача 14. $z_5 = 1$, т.е. $z_5 = 1 + 0 \cdot i$

$$r = 1, \quad \varphi = \operatorname{arctg} 0 = 0.$$

Для всех действительных, положительных чисел $\arg z = 0$

$$z_5 = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

Задача 15. $z_6 = i$, т.е. $z_6 = 0 + 1 \cdot i$; $r = 1$.

Для всех чисто мнимых чисел с положительной мнимой частью $\arg z = \pi/2$, значит

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad z_6 = 1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right).$$

Задача 16. $z_7 = -2$, т.е. $z_7 = -2 + 0 \cdot i$; $r = 2$.

Для всех действительных отрицательных чисел $\arg z = \pi$, значит

$$\varphi = \pi, \quad z_7 = 2(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Задача 4. $z_8 = -2i$, т.е. $z_8 = 0 - 2 \cdot i$; $r = 2$. Для всех чисто мнимых чисел с

отрицательной мнимой частью $\arg z = \frac{3}{2}\pi$, значит

$$\varphi = \frac{3\pi}{2}, \quad z_8 = 2\left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi\right).$$

Задача №5. Выполнить действие: $(1 + i)^{10}$.

Это удобно сделать в тригонометрической форме по формуле Муавра:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Переводим число $z = 1 + i$ в тригонометрическую форму

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \varphi = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ и выполним действие}$$

$$\begin{aligned} z^{10} &= (1+i)^{10} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{10} = (\sqrt{2})^{10} \left(\cos \frac{10}{4}\pi + i \sin \frac{10}{4}\pi \right) = \\ &= 2^5 \left(\cos \frac{5}{2}\pi + i \sin \frac{5}{2}\pi \right) = 32(0+i) = 32i \end{aligned}$$

Задача № 6. Найти все значения $\sqrt[5]{1}$.

Решение

Так как $1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$, то

$$\sqrt[5]{(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)} = 1 \left(\cos \frac{0 + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{5} \right)$$

($k = 0, 1, 2, 3, 4$).

Придавая к последовательно значения 0, 1, 2, 3, 4, соответственно получаем:

$$z_1 = 1; \quad z_2 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}; \quad z_3 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5};$$

$$z_4 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}; \quad z_5 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}.$$

Задача № 7. Вычислить $\sqrt[3]{i}$.

Действие извлечения корня из комплексного числа выполняется в тригонометрической форме по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$$z = i, r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \varphi = \arctg \frac{1}{0} = \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

$$k = 0, \sqrt[3]{i} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 1, \sqrt[3]{i} = \cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 2, \sqrt[3]{i} = \cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi = -i$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Вариант 1 1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{1+i}{2+3i}$. 2. Записать в тригонометрической форме $(2\sqrt{3} - 6i)$. 3. Извлечь корень $\sqrt[3]{i}$.
Вариант 2 1. Вычислить в алгебраической форме $\left(\frac{2-4i}{3+i}\right)$. 2. Записать в тригонометрической форме $(4 - 4 \cdot \sqrt{3}i)$. 3. Извлечь корень $\sqrt[3]{-1}$.
Вариант 3 1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{2-5i}{-1-2i}$. 2. Записать в тригонометрической форме $3 - 3i$. 3. Извлечь корень $\sqrt[3]{2+2i}$.
Вариант 4 1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{1+i}{2+3i}$. 2. Записать в тригонометрической форме $(2\sqrt{3} - 2i)$. 3. Извлечь корень $\sqrt{3+4i}$.
Вариант 5

1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{-1+2i}{1+3i}$.

2. Записать в тригонометрической форме $2+2\cdot\sqrt{3}i$.

3. Извлечь корень $\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}$

Вариант 6

1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{5-i}{1+i}$.

2. Записать в тригонометрической форме $-5-5\sqrt{3}i$.

3. Извлечь корень $\sqrt{3-4i}$.

Вариант 7

1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{1-i}{1+4i}$.

2. Записать в тригонометрической форме $(2\cdot\sqrt{3}-2i)$.

3. Извлечь корень $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$.

Вариант 8

1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{2-i}{3-2i}$.

2. Записать в тригонометрической форме $\sqrt{3}-i$.

3. Извлечь корень $\sqrt[3]{2+2i}$.

Вариант 9

1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{-1-3i}{2+3i}$.

2. Записать в тригонометрической форме $(-4\cdot\sqrt{3}-4i)$.

3. Извлечь корень $\sqrt[3]{2-2i}$.

Вариант 10

1. Вычислить в алгебраической форме $\left(\frac{1+2i}{3-i}\right)$.

2. Записать в тригонометрической форме $-7+7\sqrt{3}i$.

3. Извлечь корень $\sqrt[3]{-2-2i}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

Цель: изучить понятие первообразной функции и неопределенного интеграла.

Знать: основные правила интегрирования.

Уметь: интегрировать с помощью формул и простейших приемов.

Владеть: навыками интегрирования.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:

ОПК-1. Способен изучать, анализировать, использовать биологические объекты и процессы, основываясь на законах и закономерностях математических, физических, химических и биологических наук и их взаимосвязях

Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение навыками интегрирования.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Первообразная функция. Теорема об общем виде первообразной.
2. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.
3. Таблица основных интегралов.
4. Метод непосредственного интегрирования.
5. Метод интегрирования подстановкой.
6. Метод интегрирования по частям.

Решение типовых задач

Задача 1. В следующих равенствах заполнить пропущенные места:

1) $d(\quad) = 2x dx$

Решение:

Дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал независимой переменной, значит нужно найти функцию, производная которой равна $2x$. Это x^2 .

2) $d(\quad) = x^3 dx$ Ответ: $\frac{x^4}{4}$

3) $d(\quad) = \cos x dx$ Ответ: $\sin x$

4) $d(\quad) = \frac{dx}{x}$ Ответ: $\ln x$

Задача 2. Найти интегралы

$$1) \int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx$$

Решение:

Студент должен сформулировать правила интегрирования (интеграл от суммы **u** о постоянном множителе) и взять интегралы по формулам:

$$\int x^2 dx + 2 \int x dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} + \ln x + c$$

2):

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx - \int x^{-\frac{3}{4}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + c = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + c$$

3):

$$\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx = \int e^x dx - \int x^{-2} dx = e^x - \frac{x^{-1}}{-1} + c = e^x + \frac{1}{x} + c$$

4)

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + c$$

разделим числитель почленно на знаменатель

Задача 3. Вычислить интеграл $\int \cos 3x dx$

Решение:

Интеграл не является табличным. Табличный выглядит так:

$\int \cos u du$, для того, чтобы данный интеграл стал табличным, надо иметь $\int \cos 3x d3x$, но $d3x = 3dx$, т.е. внесение постоянного множителя k под знак дифференциала

увеличивает дифференциал в k раз: $dx = \frac{1}{k} d(kx)$ поэтому имеем:

$$\frac{1}{3} \int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x + c$$

Задача 4. Вычислить интеграл:

$$\int \sin \frac{x}{2} dx = 2 \int \sin \frac{x}{2} d \frac{x}{2} = -2 \cos \frac{x}{2} + c$$

Задача 5. Вычислить интеграл:

$$\int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \int e^{-3x} d(-3x) = -\frac{1}{3} e^{-3x} + c$$

Задача 6. Вычислить: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$

Решение:

Выделим полный квадрат в многочлене $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$, запишем интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 2}} = \left| \begin{array}{l} \text{заменим} \\ x+1=t, \quad dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 + 2} \right| + C =$$

вернемся к старой переменной

$$\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+2}\right|+C=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C.$$

Замечание: Такой интеграл можно вычислить и непосредственно, помня, что введение постоянного слагаемого под знак дифференциала последнего не меняет, т.е.

$$d(x+1)=dx$$

Имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+2}} = \ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right|+C =$$

В этом

$$= \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$$

случае не нужно возвращаться к старой переменной и время решения сокращается.

Задача 7. Вычислить: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-(x^2+2x+1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}} = \left| \begin{array}{l} x+1=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

Задача 8. Вычислить: $\int x e^{2x} dx$

Решение:

Видим, что из двух множителей x и e^{2x} , первый упрощается после дифференцирования, а второй не изменяется, ни от дифференцирования, ни от интегрирования, получим:

$$\int x e^{2x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^{2x} dx & v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Непосредственное интегрирование».

1. Вычислить интегралы:

- | | | | |
|------------------------------------|------------------------------|---|--|
| 1) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7} dx$ | 2) $\int \frac{dx}{1-10x}$ | 3) $\int \frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}} dx$ | 4) $\int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x}$ |
| 5) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ | 6) $\int \sin^2 x \cos x dx$ | 7) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}$ | 8) $\int e^{\cos x} \sin x dx$ |
| 9) $\int e^{x^3} x^2 dx$ | 10) $\int \sqrt{x^2+1} x dx$ | 11) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ | 12) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$ |

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Методы интегрирования».

1. Вычислить интегралы подстановкой:

$$\text{a) } \int \frac{x^2 dx}{4 + x^6} \quad \text{б) } \int \frac{x dx}{\sqrt{3 - x^4}}.$$

2. . Вычислить интегралы по частям:

$$\text{a) } \int e^x \sin x dx \quad \text{б) } \int x \arctg x dx$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №8

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ.

Цель: научиться интегрировать рациональные дроби.

Знать: основные методы интегрирования рациональных дробей.

Уметь: интегрировать рациональные дроби.

Владеть: методом неопределенных коэффициентов, методом частных значений и комбинированным методом.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:

ОПК-1. Способен изучать, анализировать, использовать биологические объекты и процессы, основываясь на законах и закономерностях математических, физических, химических и биологических наук и их взаимосвязях

Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение навыками интегрирования.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Первообразная функция. Теорема об общем виде первообразной.
2. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.
3. Таблица основных интегралов.
4. Метод непосредственного интегрирования.
5. Метод интегрирования подстановкой.
6. Метод интегрирования по частям.

Решение типовых задач

Задача 1. Вычислить интеграл: $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx$

Решение:

Находя корни знаменателя, видим, что действительных корней нет, т.к. $D = -16$, т.е. знаменатель сам является простым множителем с действительными коэффициентами. Данный интеграл представляет из себя простейшую дробь III типа. Решая этот пример, нужно выделить в числителе производную знаменателя, т.е.

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+2)-7}{x^2+2x+10} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+10} dx - 7 \int \frac{dx}{(x-1)^2+9} = \\ &= \frac{5}{2} \ln|x^2+2x+10| - \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C \end{aligned}$$

Задача 2. Вычислить интеграл: $\int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 - x} dx$

Решение:

Разложим знаменатель под интегральной дроби на простые множители:

$\frac{3x^2 + 2x - 3}{x(x-1)(x+1)}$ и представим эту правильную дробь как сумму простейших дробей с

неопределенными коэффициентами $\frac{3x^2 + 2x - 3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$

Подберем коэффициенты **A, B, C** так, чтобы сумма дробей была равна исходной дроби, для этого приведем к общему знаменателю правую часть выражения и учитывая, что дроби равны, знаменатели равны, приравняем числители дробей:

$$3x^2 + 2x - 3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

Для нахождения **A, B, C** применим **метод частных значений**:

пусть $x = 0$; $-3 = -A$, откуда $A = 3$

пусть $x = 1$; $2 = 2B$, откуда $B = 1$

пусть $x = -1$; $-2 = 2C$, откуда $C = -1$

Данный интеграл можно теперь представить в виде суммы трех интегралов от простейших дробей, имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 - x} dx &= 3 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= 3 \ln|x| + \ln|x-1| - \ln|x+1| + \ln C = \ln \frac{Cx^3(x-1)}{x-1} \end{aligned}$$

Замечание: C - произвольная постоянная, поэтому в качестве C можно взять $\ln C$ - что тоже является произвольной постоянной. Воспользовавшись свойством логарифма, ответ можно записать компактнее.

Задача 3. Вычислим интеграл: $\int \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx$

Решение:

Группируя члены в знаменателе, разложим его на простые множители

$$x^2(x+1) + 4(x+1) = (x+1)(x^2 + 4).$$

Второй множитель второй степени не имеет действительных корней и на линейные множители не разлагается.

$$\text{Имеем: } \frac{2x^2 + x + 4}{(x+1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^2 + 4}$$

$$2x^2 + x + 4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)(x+1) \quad (*)$$

Для нахождения **A, B, C** применим **метод неопределенных коэффициентов**, т.е. условие того, что, если многочлены равны, то равны коэффициенты при одинаковых степенях переменного. Приравняем коэффициенты при x^2 , x , x^0 справа и слева в выражении **(*)**

$$x^2 \quad 2 = A + B$$

$$x \quad 1 = B + C$$

$$x^0 \quad 4 = 4A + C$$

Получили систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными, решив ее, получим значения коэффициентов **A, B, C**.

Наиболее удобен **комбинированный метод**, т.е. частных значений и неопределенных коэффициентов. Если в равенстве (*) положить **x = -1** получим **5 = 5A**, **A = 1**. Подставляя **A = 1** в систему уравнений, получим **B = 1**, **C = 0**.

Используя значения **A, B, C**, имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx &= \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x}{x^2 + 4} dx = \ln|x+1| + \int \frac{x dx}{x^2 + 4} = \\ &= \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4| + \ln C = \ln C |x+1| \sqrt{x^2 + 4} \end{aligned}$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Интегрирование рациональных функций».

1) Вычислить интеграл: $\int \frac{7x-15}{x^3-2x+5x} dx$

Ответ: $3 \ln \frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|} + 2 \operatorname{arc} tg \frac{x-1}{2} + C$

2) Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{x^3+8}$

Ответ: $\frac{1}{24} \ln \frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arc} tg \frac{x-1}{\sqrt{3}} + c$

3) Вычислить интеграл: $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$

Ответ: $\ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} - \frac{1}{x+1} - \operatorname{arc} tg x + C$

4) Вычислить интеграл: $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx$

Ответ: $\ln Cx(x-1) + \frac{2}{x-1}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №9

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

Цель: изучить понятие первообразной функции и определенного интеграла

Знать: основные правила интегрирования определенного интеграла, формулу Ньютона-Лейбница.

Уметь: интегрировать с помощью формул и простейших приемов.

Владеть: навыками интегрирования.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:

ОПК-1. Способен изучать, анализировать, использовать биологические объекты и процессы, основываясь на законах и закономерностях математических, физических, химических и биологических наук и их взаимосвязях

Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение навыками интегрирования.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Геометрический и физический смысл определенного интеграла.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Оценки определенного интеграла. Теорема о среднем.
4. Определенный интеграл как функция верхнего предела.
5. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
6. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
7. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
8. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Примеры решения задач

Задача 1. Вычислить:

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x \, dx.$$

Решение:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x \, dx = -\frac{1}{4} \cos 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} 2. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 x \, dx}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \operatorname{tg} x)^{-2} d(1 + \operatorname{tg} x) = -\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= -\left(\frac{1}{1 + \sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1 + \sqrt{3} - 2}{2(1 + \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}(0^3 - 1^3) = \frac{1}{3}.$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x 2 \sin x \cos x dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x d(\cos x) =$$

$$= -2 \frac{\cos^7 x}{7} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{7} (0^7 - 1^7) = \frac{2}{7}.$$

Задача 2. Вычислить подстановкой:

1)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad t_1 = -1; t_2 = 1 \end{array} \right| = \int_{-1}^1 \frac{2dt}{(1+t^2) \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} =$$

$$= 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2 + 1-t^2} = 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{2} = \int_{-1}^1 dt = t \Big|_{-1}^1 = 1+1 = 2.$$

$$2). \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \quad 1-x^2 = \cos^2 t \\ dx = \cos t \quad t_1 = 0; \quad t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos t)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2t}{2} \right)^2 dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{1}{8} \left(t + \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} 0 - 0 - 0 \right) = \frac{\pi}{16}.$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Методы интегрирования в определённом интеграле».

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$$

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}$$

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Перечень основной литературы:

1. Баврин, И. И. Математическая обработка информации / И.И. Баврин. - Москва: Прометей, 2026.
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва: Издательство Юрайт, 2026. — 479 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00211-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/598377>
3. Шипачев, В. С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 2 : учебник для вузов / В. С. Шипачев ; под редакцией А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 305 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07891-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/584496>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебник для вузов / В. Е. Гмурман. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 395 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-21643-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/598376>
2. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд., испр. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2015. - 816 с

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

1. Методические указания для проведения практических занятий по дисциплине "Дополнительный курс по математике": Направление 19.03.01 Биотехнология, электронная версия, 2026 г.
2. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов по дисциплине "Дополнительный курс по математике": Направление 19.03.01 Биотехнология, электронная версия, 2026 г.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.
4. <http://www.mat>

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
по дисциплине**

"Дополнительный курс по математике":

Направление подготовки 19.03.01 Биотехнология

Направленность (профиль) Промышленная биотехнология

Форма обучения очная

Год начала обучения 2026

Реализуется в 1 семестре

Ставрополь, 2026

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1. Цель и задачи освоения дисциплины (модуля)

Цель освоения дисциплины: «Дополнительный курс по математике» является формирование соответствующих компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 19.03.03 Продукты питания животного происхождения.

Задачи освоения дисциплины:

- формирование математической культуры бакалавров;
- получение базовых знаний по высшей математике;
- овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач в профессиональной деятельности.

2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дополнительный курс по математике» входит в модуль «ФТД. Факультативы».

Ее освоение происходит в 1 семестре.

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ОПК-1. Способен изучать, анализировать, использовать биологические объекты и процессы, основываясь на законах и закономерностях математических, физических, химических и биологических наук и их взаимосвязях	ИД-1 ОПК-1. Понимает сущность физических, химических, биохимических, биотехнологических, микробиологических, теплофизических процессов, происходящих при производстве биотехнологической продукции для пищевой промышленности	Способен применять законы и методы алгебры, геометрии, математического анализа, теории вероятности и математической статистики для решения задач профессиональной деятельности.
	ИД-2 ОПК-1. Способен изучать, анализировать и использовать конкретные виды биологических объектов в реальных процессах и превращениях; использовать для анализа знания математических, физических, химических, биологических законов, закономерностей и их взаимосвязей	Владеет математическими методами для анализа реальных биологических процессов.
	ИД-3 ОПК-1. Может изучать и анализировать основные типы биологических объектов, использовать их в отдельных процессах и превращениях; владеет методиками и методами,	Владеет методиками для анализа реальных биологических объектов, использования их в отдельных процессах и превращениях, основанными на математических закономерностях

	основанными на математических, физических, химических, биологических законах и закономерностях как для изучения самых биологических объектов, так и для процессов с их участием	
--	--	--

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа как важнейшая форма учебного процесса.

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования - "подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности".

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:

- изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;
- подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ;
- участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.

Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.

Цели и основные задачи СРС

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой специалиста и бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3. Виды самостоятельной работы

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации, содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.):

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателей являются:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание рефератов;
- подготовка к семинарам и лабораторным работам, их оформление;

- составление аннотированного списка статей из соответствующих журналов по отраслям знаний (педагогических, психологических, методических и др.);
- подготовка рецензий на статью, пособие;
- выполнение микроисследований;
- подготовка практических разработок;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов.

(В зависимости от особенностей факультета перечисленные виды работ могут быть расширены, заменены на специфические).

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

- текущие консультации;
- коллоквиум как форма контроля освоения теоретического содержания дисциплин: (в часы консультаций, предусмотренных учебным планом);
- прием и разбор домашних заданий (в часы практических занятий);
- прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р);
- выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин (руководство, консультирование и защита курсовых работ (в часы, предусмотренные учебным планом);
- выполнение учебно-исследовательской работы (руководство, консультирование и защита УИРС);
- прохождение и оформление результатов практик (руководство и оценка уровня сформированности профессиональных умений и навыков);
- выполнение выпускной квалификационной работы (руководство, консультирование и защита выпускных квалификационных работ) и др.

Организация СРС

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Организацию самостоятельной работы студентов обеспечивают: факультет, кафедра, учебный и методический отделы, преподаватель, библиотека, ТСО, ИВТ, издательство и др.

Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя студент должен:

- освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем в соответствии с Государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования (ГОС ВПО/ГОС СПО) по данной дисциплине.

- планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем.

- самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя.

- выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

студент может:

- сверх предложенного преподавателем (при обосновании и согласовании с ним) и минимума обязательного содержания, определяемого ФГОС ВО по данной дисциплине:

- самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;

- предлагать дополнительные темы и вопросы для самостоятельной проработки;

- в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;

- предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;

- использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;

- использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего специалиста, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий.

Общие рекомендации по организации самостоятельной работы

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;

б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Владение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы – это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия требуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления исследователя и специалиста

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не только к моральным, нравственным свойствам человека, но и в особенности, постоянно возрастающие требования в области образования – обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной мыслью и языком науки является необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для реализации этой задачи. Ибо во время учебы в

вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этого пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения (лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контролирования за их деятельностью. Отметим, что нельзя ограничиваться только приобретением знаний предусмотренных программой изучаемой дисциплины, надо постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т.е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность методов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать его, чтобы изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебы с будущей профессиональной деятельности

Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы.

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно – выучу!»), а когда приходит пора экзаменов, материала, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться в оставшийся промежуток времени.

Работа с книгой.

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и

систематический каталоги. Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода). При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связанное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;
2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;
3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;
4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;
5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;
2. Выделите главное, составьте план;
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;
4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.
5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и

выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

Практические занятия.

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка.

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ТЕМА 1 ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Векторы. Линейные операции над векторами Координаты вектора. Проекция вектора на ось. Системы координат. Скалярное произведение векторов. Векторное и смешанное произведение векторов. Виды уравнений прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

В рамках темы 1 предусмотрено проведение самостоятельной работы.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$ и $8x + 4y + 9 = 0$ параллельно прямой $x + 3y = 0$.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2,3,4)$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a = 1$ и $b = -1$.
3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1,3,-2)$ и образующей с осями Ox , Oy и Oz углы 120° , 60° и 45° соответственно.

ТЕМА 2. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Определение и способы задания функции. Область определения, область значения, график функции. Предел функции. Односторонние и бесконечные пределы. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции. Непрерывные функции и их свойства. Точки разрыва и их классификация.

В рамках темы 2 предусмотрено проведение одной самостоятельной работы.

Типовой вариант самостоятельной работы №2

Задание №1. Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{4x^2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 2}{4x^2 - 1} \right)^{5x^2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5 + 5}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5};$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти наименьший период функций:

$$\text{а) } y = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right); \quad \text{б) } y = \sin 3x \cos 3x; \quad \text{в) } y = \sin \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x.$$

2. С помощью преобразований построить графики функций:

$$\text{а) } y = (x-5)^2 - 5(x-5) + 6; \quad \text{б) } y = 2 \log_2(x+1); \quad \text{в) } y = 2 \sin(-3x - \pi) + 1.$$

3. Найти пределы последовательностей:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - n^2}{3 - n^2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 5n^2 - 1}{10n^3 - 3n + 2}; \quad \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n); \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n}}{3 + n}.$$

4. Найти пределы функций при $x \rightarrow x_0$:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 3x - 4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 - 9}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}.$$

5. Найти пределы функций при $x \rightarrow \infty$:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 2x^3 - 1}{3x^2 - 2x^4 + x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x});$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2}{1-x^2} + 4^{\frac{1}{x}} \right);$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{4x-2}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{16x^2-x}}.$$

6. Вычислить пределы с помощью первого замечательного предела:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x-5) \sin\left(\frac{1}{x-5}\right); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \cdot \operatorname{tg} 2x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

7. Вычислить пределы с помощью второго замечательного предела:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{5x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^3-5}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{2x}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\ln x - \ln 4}{2x - 8}.$$

$$8. \text{ Найти пределы: а) } \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{3}{4-2x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3}{4-2x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{4-2x}.$$

9. Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, найти пределы:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{e^{5x}-1}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 3x}.$$

10. Пользуясь определением непрерывности функции, доказать непрерывность следующих функций в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } y = 4x^2 + 3; \quad \text{б) } y = \cos x.$$

11. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функций. Указать характер разрыва:

$$\text{a) } y = \frac{1}{1+e^x}; \quad \text{б) } y = \frac{x^2+2}{x-2}; \quad \text{в) } y = \begin{cases} x-2, & x < 2, \\ x+2, & x \geq 2. \end{cases}$$

ТЕМА 3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Понятие производной и ее геометрический и механический смысл. Производная сложной функции. Правила дифференцирования. Таблица основных производных. Дифференциал функции. Производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталю. Возрастание и убывание функции, необходимое и достаточные условия. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба: определение, необходимые и достаточные условия. Асимптоты плоских кривых. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

В рамках темы 3 предусмотрено проведение двух самостоятельных работ, выполнение одного индивидуального домашнего задания, проведение контрольной работы и сдача коллоквиума.

Типовой вариант самостоятельной работы №4

Задание №1. Применяя правило Лопиталю, вычислить пределы.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^2 x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right).$$

Задание №2. Исследовать функции и построить их графики.

$$\text{а) } y = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1}; \quad \text{б) } y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить приближенно: а) $\ln 1.02$; б) $\lg 44^0$.
2. Найти пределы, используя правила Лопиталю:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2} - 2}{x^2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln(e^{x^2} + 1)}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right); \\ \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x \cdot \ln x); & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}; & \text{е) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}. \end{array}$$

3. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 4)$.
4. Найти экстремумы функций:

$$\text{а) } y = x^3 - 9x^2 + 15x; \quad \text{б) } y = \frac{\ln x}{x}; \quad \text{в) } y = \frac{e^{2x}}{1 + x}.$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 2x\sqrt{x} + x - 4$ на отрезке $[0;4]$.

6. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графиков функций:

а) $y = 0.5x^3 + 3x^2 - 18x + 20$;

б) $y = xe^x$;

в) $y = x - \ln x$.

7. Найти асимптоты графиков функций:

а) $y = \frac{3x^5}{2+x^4}$;

б) $y = \frac{x^2+3}{x^2-9}$;

в) $y = xe^x$.

8. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = \frac{x^3}{4-x^2}$;

б) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;

в) $y = (x-1)e^x$;

г) $y = x \ln x$.

ТЕМА 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Первообразная функция, неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных интегралов. Методы интегрирования: непосредственное, метод замены переменной, интегрирование по частям. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования, интегралы от неограниченных функций.

В рамках темы 5 предусмотрено проведение самостоятельной работы.

Типовой вариант самостоятельной работы №5

Задание №1. Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

а) $\int \frac{(2\sqrt[3]{x} + 1)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$; б) $\int \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} dx$; в) $\int \frac{x^5 + x^3 - 1}{x^2 + 1} dx$.

Задание №2. Применяя метод подстановки (метод замены переменной), найти интегралы:

а) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$; б) $\int \sqrt[3]{2+\cos 3x} \cdot \sin 3x dx$.

Задание №3. Преобразуя дифференциал, вычислить определенные интегралы:

а) $\int_2^5 \frac{dx}{2x-3}$; б) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Задание №4. Используя метод интегрирования по частям, найти определенные интегралы:

а) $\int_1^e x^2 \cdot \ln x dx$; б) $\int_0^2 (3-2x) \cdot e^{-3x} dx$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а)} \int (2 \sin x - 3^{x+2} + 5) dx; \quad \text{б)} \int \frac{(2\sqrt[3]{x} + 1)^2}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad \text{в)} \int \frac{x^5 + x^3 - 1}{x^2 + 1} dx; \\ \text{г)} \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx; \quad \text{д)} \int \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} dx. \end{aligned}$$

2. Преобразуя дифференциал, вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \frac{dx}{(4x + 3)^5}; \quad \text{б)} \int \frac{x^2}{x^6 + 1} dx; \quad \text{в)} \int x \cdot \sin(1 - x^2) dx; \quad \text{г)} \int \sin^3 6x \cdot \cos 6x dx.$$

3. Применяя метод подстановки (метод замены переменной), найти интегралы:

$$\text{а)} \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx; \quad \text{б)} \int \sqrt[3]{2 + \cos 3x} \cdot \sin 3x dx; \quad \text{в)} \int \frac{e^{-x}}{1 - e^{-2x}} dx.$$

4. Используя метод интегрирования по частям найти интегралы:

$$\text{а)} \int x^3 \cdot e^{2x} dx; \quad \text{б)} \int x^2 \cdot \operatorname{arctg} 3x dx; \quad \text{в)} \int e^{3x} \cdot \sin 2x dx.$$

5. Найти интегралы от рациональных функций:

$$\text{а)} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}; \quad \text{б)} \int \frac{x - 4}{(x - 2)(x - 3)} dx; \quad \text{в)} \int \frac{x + 2}{x^2 + 5x - 6} dx; \quad \text{г)} \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx.$$

6. Найти интегралы от тригонометрических функций:

$$\text{а)} \int \sin^3 x dx; \quad \text{б)} \int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx; \quad \text{в)} \int \sin x \cdot \sin 3x dx; \quad \text{г)} \int \frac{dx}{4 - 5 \sin x}.$$

7. Найти интегралы с помощью тригонометрических подстановок:

$$\text{а)} \int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx; \quad \text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}.$$

8. Найти интегралы от иррациональных функций:

$$\text{а)} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + 1}} dx; \quad \text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x + 1)^2 - \sqrt{2x + 1}}}; \quad \text{в)} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}; \quad \text{г)} \int \frac{(x - 2)dx}{\sqrt{x^2 - 10x + 29}}.$$

9. Используя непосредственное интегрирование, вычислить определенные интегралы:

$$\text{а)} \int_1^2 \frac{3x^4 - 5x^2 + 7}{x} dx; \quad \text{б)} \int_0^1 \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} dx.$$

10. Преобразуя дифференциал, вычислить определенные интегралы:

$$\text{а)} \int_2^5 \frac{dx}{2x - 3}; \quad \text{б)} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

11. Используя подстановку, найти определенные интегралы:

$$\text{а)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x + 1}}; \quad \text{б)} \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}.$$

12. Используя метод интегрирования по частям, найти определенные интегралы:

$$\text{а)} \int_1^e x^2 \cdot \ln x dx; \quad \text{б)} \int_0^2 (3 - 2x) \cdot e^{-3x} dx.$$

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Перечень основной литературы:

1. Баврин, И. И. Математическая обработка информации / И.И. Баврин. - Москва: Прометей, 2026.
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва: Издательство Юрайт, 2026. — 479 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00211-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/598377>
3. Шипачев, В. С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 2 : учебник для вузов / В. С. Шипачев ; под редакцией А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 305 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07891-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/584496>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для прикладного бакалавриата : для студентов вузов / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - Москва : Юрайт, 2026. - 405 с.
2. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд., испр. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2015. - 816 с

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

1. Методические указания для проведения практических занятий по дисциплине «Дополнительный курс по математике»: Направление 19.03.01 Биотехнология, электронная версия, 2026 г.
2. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов по дисциплине «Дополнительный курс по математике»: Направление 19.03.01 Биотехнология, электронная версия, 2026 г.
1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.
4. <http://www.mat>