

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ
по дисциплине «Математический анализ»
для студентов направления подготовки
09.03.03 «Прикладная информатика»
Направленность (профиль)
«Прикладная информатика в экономике»

Ставрополь
2026

Оглавление

Введение

Раздел I. Введение в анализ

Раздел II. Дифференциальное исчисление для функций одной переменной

Раздел III. Интегральное исчисление для функций одной переменной

Раздел IV. Дифференциальное исчисление для функций нескольких переменных

Раздел V. Интегральное исчисление для функций нескольких переменных

Раздел VI. Ряды

ВВЕДЕНИЕ

Цель освоения дисциплины:

Целью изучения дисциплины «Математический анализ» в соответствии с общими целями ОП ВО является формирование набора общекультурных и профессиональных компетенций будущего бакалавра, путем освоения возможностей использования средств и методов математического анализа для решения прикладных задач.

Задачами учебного курса являются:

- знакомство студентов с начальными знаниями по теории математического анализа;
- формирование основных понятий математического анализа;
- показать универсальный характер основных понятий математического анализа для получения комплексного представления о подходах к созданию математических моделей.

• формирование исследовательской позиции и исследовательского поведения, развитие мыслительных операций;

- расширение и углубление знаний, умений и навыков, определяемых содержанием базовых дисциплин, умение проводить обработку и анализ полученных результатов при проведении экспериментов по заданной методике;

• воспитание математической и профессиональной культуры, расширение математического кругозора студентов;

• научное обоснование фундаментальных понятий: теории вещественных чисел; основных методов вычисления пределов, производных, неопределенных, определенных интегралов, кратных интегралов, числовых и функциональных рядов.

ПЛАНЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1 семестр

Раздел I. Введение в анализ

Занятие № 1. Множества. Метод математической индукции. Неравенство Бернулли

Цель занятия: определить содержание понятия «множество», научиться выполнять различные действия над множествами, отработать классификацию числовых множеств. Познакомиться с методом математической индукции, используемым при доказательстве математических высказываний, использовать неравенство Бернулли при доказательстве неравенств.

Вопросы для обсуждения:

1. Определение множества, операции над множествами, их изображение с помощью диаграмм Эйлера - Венна.
2. Числовые множества.
3. Метод математической индукции, неравенство Бернулли.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 1. Решить неравенство .

Так как значение выражения стоящего под знаком модуля меняет свой знак при переходе от положительных к отрицательным значениям, то найдем эти критические точки: , следовательно . Разобьем числовую прямую этими точками на интервалы и на каждом интервале раскроем модули в исходном неравенстве по определению:

- 1). ;
- 2). ;
- 3). ;

Решением данного неравенства являются значения .

Задания для самостоятельной работы

1. С помощью диаграмм Эйлера – Венна показать справедливость следующих утверждений:
 - а). ;
 - б).;
 - в). ;
 - г). .
2. Задать перечислением всех элементов множества определенные с помощью следующих характеристических свойств:
 - а). ;
 - б). ;
 - в). ;
 - г). .
3. Определить множества ; ; ; , если
 - а). ;
 - б). ;
 - в). ;
 - г). ;
 - д). .
4. Решить уравнения
 - а). ;
 - б). ;
 - в). ;
 - г). .

Задания, решаемые в аудитории

Пример 2. Доказать что для любого натурального верно тождество:

- 1). Проверим равенство при : - верно.
- 2). Предположим, что равенство верно при , то есть - верно.
- 3). Докажем, истинность равенства и при , то есть докажем

Преобразуем левую часть этого равенства, заменив первые k слагаемых правой частью равенства из пункта 2):

Таким образом, мы доказали равенство пункта 3), используя равенство пункта 2), согласно ММИ, данное утверждение справедливо .

Пример 3. Доказать, что при любом натуральном .

- 1). При неравенство верно: .
- 2). Предположим, что .
- 3). Докажем, что верно неравенство .

В самом деле, . Но при любом натуральном . Значит, . Отсюда следует, что неравенство справедливо при всех натуральных .

Пример 4. Доказать что для любого натурального .

- 1). Если , то , а .
- 2). Предположим, что при .
- 3). Докажем истинность утверждения при , то есть что .

В самом деле,

но первое слагаемое делится на 64 по предположению, а второе слагаемое делится на 64, так как один из множителей равен 64. Следовательно, и сумма разделится на 64. Таким образом, мы доказали, что для любого натурального числа .

Задания для самостоятельной работы

С помощью метода математической индукции докажите равенства

- а). ;
- б). ;
- в). ;
- г). .

6. С помощью метода математической индукции докажите следующие неравенства

- а). ;
- б). ;
- в). ;
- г). .

7. Докажите, что при любом натуральном n кратно 16.

8. Докажите, что при любом натуральном n кратно 19.

9. Докажите, что при любом натуральном n кратно 6.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 2. Функция действительной переменной

Цель занятия: определить содержание понятия «действительная функция действительного аргумента», основные свойства функций, их простейшую классификацию.

Вопросы для обсуждения:

1. Простейшая классификация функций действительной переменной: монотонные, четные и нечетные, периодические, ограниченные и неограниченные функции.
2. Способы задания функций.
3. Арифметические действия над функциями.
4. Основные элементарные функции, их свойства, графики.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 5. Найти область определения функции .

Область определения этой функции состоит из тех значений x , при которых оба слагаемых принимают действительные значения. Поэтому

Решая квадратное неравенство , получим и . Таким образом, область определения данной функции состоит из совокупности трех промежутков: ; ; (рис. 6).

Рис. 6

Следовательно, .

Пример 6. Установить четность или нечетность функции .

то есть область определения функции есть симметричное множество, . Следовательно, , то есть данная функция нечетная.

Задания для самостоятельной работы

Найти область определения функции

а). $y = 3x^3 + 5x^2 - 7x + 2$;

б). $y = \frac{1}{7x - 2}$;

в). $y = \frac{x - 1}{x^2 - 7x + 12}$;

г). $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x + 1}$;

$$д). y = \frac{5}{\sqrt{x-4}};$$

$$е). y = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}};$$

$$ж). y = \sqrt{4-x^2};$$

$$з). y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}};$$

$$и). y = \lg(x^3 - 3);$$

$$к). y = \sin(2x + 3);$$

$$л). y = \operatorname{tg} 2x;$$

$$м). y = \arcsin(5x - 8);$$

$$н). y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}} + \lg(x - 1);$$

$$о). y = \log_2(x - 1) + x^2;$$

$$п). y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x+3};$$

$$р). y = 2x^2 + \lg(x - 1) + \frac{1}{x-3};$$

$$с). y = \frac{\sin x}{\lg(x^2 - 4)};$$

$$т). y = \lg \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 1};$$

$$у). y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2};$$

$$ф). y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5};$$

$$х). y = \arcsin \frac{x-3}{2} - \lg \sqrt{4-x};$$

$$ч). y = \arccos \frac{x-4}{x}.$$

11. Найти область значений функции

а). ;

б). ;

в). ;

г). .

12. Какие из указанных ниже функций чётны, какие нечётны, какие не являются ни чётными, ни нечётными

а) $y = x^2 - 2x^2;$

б) $y = x - x^2;$

в) $y = \cos x;$

г) $y = x - \frac{x^2}{6} + \frac{x^5}{120};$

д) $y = \sin x - \cos x;$

е) $f(x) = x + \sin x;$

ж) $y = \frac{x^2}{\sqrt{3x^2 - 2}};$

з) $q(x) = \sqrt{1 - x^2};$

и) $s(t) = \lg \frac{1-t}{1+t};$

к) $f(x) = x^3, x \in [-4; 7].$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 3. Вычисление предела последовательности

Цель занятия: рассмотреть основные понятия теории числовых последовательностей и их пределов, научиться вычислять пределы числовых последовательностей.

Вопросы для обсуждения:

1. Предел числовой последовательности и его геометрический смысл.
2. Свойства сходящихся последовательностей.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, связь между ними.
4. Вычисление пределов числовой последовательности: неопределенность вида „
5. Число e и натуральные логарифмы.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 7. Последовательность x_n ни к какому пределу не стремится.

В самом деле, допустим, что эта последовательность имеет предел равный числу a . Пусть $U(a)$ – окрестность точки a . Рассмотрим окрестность этой точки a .

Рис. 21

Длина ее равна $2/3$, то есть $1/3$. Очевидно, что эта окрестность не может содержать в себе одновременно и точку 1 и точку (-1) , потому что 1 . Для определенности будем считать, что точка 1 не принадлежит нашей окрестности. Но $1/3$ при $n \rightarrow \infty$ то есть вне нашей окрестности имеется бесконечное число элементов последовательности.

Таким образом, точка a не может быть пределом нашей последовательности, и так как эта точка произвольная, то данная последовательность предела не имеет, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не существует.

Пример 8. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ при $n \rightarrow \infty$ имеет пределом число 0 .

Пусть ε – произвольное положительное число. Требуется доказать, что существует такое число N , что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - 0| < \varepsilon$.

Составим разность по модулю $|x_n - 0| = \frac{1}{n}$. Таким образом, неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$ выполняется, если $n > \frac{1}{\varepsilon}$, откуда $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Понятно, что в качестве числа N можно взять целую часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$, то есть $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$, что и требовалось доказать.

Зададим $\varepsilon = 1/19$, тогда $N = 19$. Следовательно, начиная с номера $n = 20$, будет выполняться неравенство $|x_n - 0| < 1/19$, то есть $-1/19 < x_n < 1/19$, что означает $0 - 1/19 < x_n < 0 + 1/19$. С геометрической точки зрения это означает, что вне интервала $(-1/19, 1/19)$ находятся 19 первых членов данной последовательности, а начиная с двадцатого, все члены последовательности будут попадать в указанный интервал.

Пример 9. Последовательность $x_n = n$ ограничена, так как $x_n \leq n$, но является расходящейся, потому что предела не имеет.

Задания для самостоятельной работы

1. Пользуясь определением предела числовой последовательности доказать, что
 - а). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$;
 - б). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$;
 - в). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$;
 - г). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} = 0$.
2. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Укажите номер, начиная с которого, все члены последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ находятся в ε – окрестности точки a , если
 - а). $\varepsilon = 1/10$;
 - б). $\varepsilon = 1/100$.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 10. Вычислить предел каждой числовой последовательности

1. $x_n = \frac{1}{n}$;
2. $x_n = \frac{1}{n^2}$;
3. $x_n = \frac{1}{n^3}$.

Из приведенного решения следует сделать вывод:

1. Если старшие степени в числителе и знаменателе равны, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях;
2. Если степень числителя меньше степени знаменателя, то предел равен 0;
3. Если степень числителя больше степени знаменателя, то предел равен ∞ .

Пример 11. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}$.

Воспользуемся свойством $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, тогда числитель и знаменатель можно привести к виду:

Пример 12. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}$.

Избавимся от разности бесконечно больших величин, для этого умножим и разделим на выражение, сопряженное данному, получая при этом разность квадратов

Пример 13. Вычислить предел .

Воспользуемся пределом , поскольку, подставляя предельное значение n , будем иметь неопределенность вида , получим

Задания для самостоятельной работы

1. Найти , если

а). ;

б). ;

в). ;

г). .

2. Вычислить предел числовой последовательности:

а). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+n!}{(n+2)!}$;

д). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-5}{7+n\sqrt{n}}$;

б). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-2)(n-1)}{n^4+5n+3}$;

е). $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \sqrt[3]{1-n^3} \right)$;

в). $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$;

ж). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}$.

г). $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+2+\dots+n}{n+1} - \frac{n}{6} \right]$;

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 4. Вычисление предела функции

Цель занятия: познакомиться с основными понятиями теории пределов функций, научиться вычислять пределы функций, использовать правило раскрытия неопределенности.

Вопросы для обсуждения:

1. Предел функции в точке и его свойства.
2. Правило раскрытия неопределенности при вычислении предела функции.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 14. Вычислить предел функции .

Так как , то применим теорему о пределе частного

Пример 15. Вычислить предел функции .

Воспользуемся правилом, раскладывая числитель и знаменатель дроби на множители, получим .

Пример 16. Вычислить предел функции .

Пример 17. Вычислить предел функции .

Пример 18. Вычислить предел функции .

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю .

Пример 19. Вычислить предел функции .

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 5. Замечательные пределы

Цель занятия: научиться вычислять пределы функций, используя первый и второй замечательные пределы, их следствия, а также замечательные пределы, связанные с показательной и логарифмической функциями.

Вопросы для обсуждения:

1. Первый замечательный предел, следствия.
2. Второй замечательный предел, следствия.
3. Замечательные пределы, связанные с показательной и логарифмической функциями.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 20. Вычислить предел функции .

Пример 21. Вычислить предел функции .

Пример 22. Вычислить предел функции .

Пример 23. Вычислить предел функции .

Вычислим предел, используя замену переменной , откуда и , тогда .

Пример 24. Вычислить предел функции .

Задания для самостоятельной работы

Вычислить предел функции:

а). $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2};$

в). $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 4}{x^3 - x^2 - 3x - 1};$

д). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1};$

ж). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{1 - \sqrt{1+x}};$

и). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 10x};$

л). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 3x};$

н). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{6x^2};$

п). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x \sin 5x}{(1 - \cos 4x) \operatorname{tg} 2x};$

с). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x};$

б). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 1};$

г). $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4};$

е). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4};$

з). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{6x};$

к). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{15x};$

м). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{ctg} 4x \sin 5x};$

о). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\sin^2 4x};$

р). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x \sin^2 5x}{x^3 \sin 4x};$

т). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{\cos 2x - \cos 8x};$

$$y). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sqrt{x+4}-2};$$

$$\phi). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}.$$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 6. Непрерывность функции

Цель занятия: научиться исследовать функции на непрерывность, определять классификацию точек разрыва функции.

Вопросы для обсуждения:

1. Понятие непрерывности функции.
2. Точки разрыва функции и их классификация.
3. Свойства функций, непрерывных в точке.
4. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 25. Дана функция. Найти ее точки разрыва, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва:

- 1);
- 2);
- 3);
- 4).

1) Нули знаменателя функции определяются из уравнения, откуда следуют возможные точки разрыва. Для проверки: являются ли эти точки действительно точками разрыва, вычислим односторонние пределы:

В результате легко видеть, что точки и являются точками разрыва второго рода.

2) Рассмотрим функцию. Найдем нули знаменателя из уравнения. Нетрудно убедиться, что оно не имеет действительных корней. Таким образом, функция непрерывна на всей числовой прямой.

3) Точками разрыва в данном случае могут быть нули знаменателя, то есть и. В точке функция не определена, так как при подстановке в дробь имеем неопределенность, вычислим предел функции при:

следовательно точка является точкой устранимого разрыва. Исследуем точку, для этого вычислим односторонние пределы:

на основании чего делаем вывод, что точка является точкой бесконечного разрыва (второго рода).

4) Вначале рассмотрим функцию. Поскольку областью определения этой функции является вся числовая прямая, и она нигде не обращается в бесконечность, функция является непрерывной на всей области определения. Поэтому единственной возможной точкой разрыва функции может быть точка, для того, чтобы проверить: действительно ли здесь функция испытывает разрыв, вычислим односторонние пределы:

В результате имеем, что при функция терпит разрыв первого рода, совершая скачок.

Пример 26. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть

Найдем односторонние пределы:

Таким образом, в точке $x = -1$ функция непрерывна, точка $x = 1$ - точка разрыва первого рода, определим скачок функции в этой точке (рис. 23).

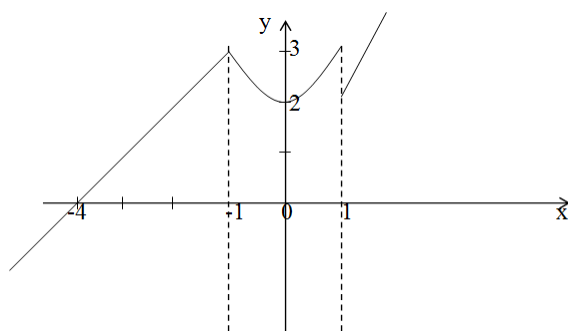


Рис. 23

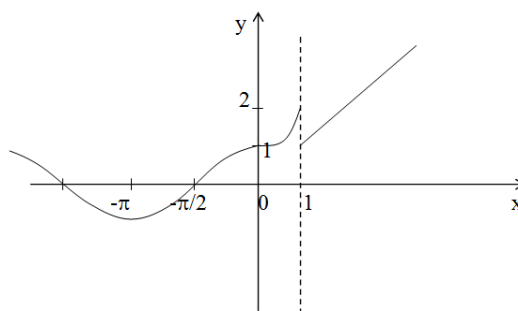


Рис. 24

Пример 27. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть

Найдем односторонние пределы:

Приходим к заключению, что в точке $x = 0$ функция непрерывна, точка $x = 1$ - точка разрыва первого рода, определим скачок функции в этой точке (рис. 24).

Задания для самостоятельной работы

Исследовать данные функции на непрерывность

- а). ; б). ;
 - в). ; г). .
3. Исследовать данные функции на непрерывность, построить графики функций
- а).
 - б).
 - в).
 - г).

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Раздел II. Дифференциальное исчисление для функций одной переменной

Занятие № 7. Вычисление производной по определению

Цель занятия: дать определение производной функции как предел разностного отношения, освоить технику нахождения таких пределов для элементарных функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Определение производной, ее геометрический и механический смысл.
2. Непрерывность дифференцируемой функции.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 28. Используя определение производной функции (способ непосредственного дифференцирования), найти производную для .

1. Находим приращенное значение функции: .

2. Находим приращение функции :

3. Составляем разностное отношение : .

4. Находим предел отношения при :

Следовательно, производная .

Пример 29. Пользуясь формулами дифференцирования, найти производные следующих функций

- 1); 2);
3); 4) .

1) .

2) Преобразуем данную функцию, используя дробные и отрицательные показатели степени

3) 1-й способ. Воспользуемся формулой производной произведения

2-й способ. Вначале преобразуем исходное выражение, а затем выполним дифференцирование

Легко видеть, что в ряде задач этот способ быстрее приводит к результату.

4) Вычислим производную как производную частного

Задания для самостоятельной работы

1. Найти производные указанных функций способом непосредственного дифференцирования

- а). ; б). ;
в). ; г). .

2. Используя формулы дифференцирования, найти производные следующих функций

- а). $y = x + 3x^2 - \frac{x^2}{3}$; ж). $y = -3\cos t \operatorname{ctg} t$;
б). $y = x - 2\sqrt{x}$; з). $r = \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi}$;
в). $s = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}$; и). $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$; вычислить $f'(1)$;
г). $z = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} + 4$; к). $r(\varphi) = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi$; вычислить $r'(\pi)$;
д). $u = \frac{2t}{t+3}$; л). $u(r) = \frac{r^2}{2x^2} - \frac{2x^2}{r^2}$; вычислить $\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=x}$;
е). $v = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$; м). $z = (y^2 - 2y) \operatorname{tg} y$; вычислить $z'(0)$.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 8. Техника нахождения производных

Цель занятия: дать определение производной функции, освоить технику нахождения производных элементарных и сложных функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных.

Вопросы для обсуждения:

1. Правила дифференцирования. Таблица производных.
2. Производная сложной функции.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 30. Найти производную для каждой функции

1) .

Сначала выполним преобразования ,

2). .

3). .

4). .

5). .

Задания для самостоятельной работы

Найти производные указанных функций

- | | | |
|------------------|-------|-------|
| а). ; | б). ; | |
| в). ; | | г). ; |
| д). ; | е). ; | |
| ж). ; | з). ; | |
| и). ; | | к). ; |
| л). ; | м). ; | |
| н). ; | о). ; | |
| п) , вычислить . | | |

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 9. Дифференцирование сложных функций

Цель занятия: освоить технику нахождения производных сложных функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных.

Вопросы для обсуждения:

1. Производная сложной и обратной функции.
2. Дифференцирование неявных функций. Логарифмическое дифференцирование.
3. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Свойства дифференциала.
4. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 31. Найти производную функции , определяемой уравнением .

Дифференцируем по переменной x обе части равенства, считая, что y есть функция от x : , разрешаем полученное уравнение относительно искомой производной : , .

Пример 32. Пользуясь способом логарифмического дифференцирования, найти производную функции .

Логарифмируя обе части равенства, получим

или .

Дифференцируя обе части полученного равенства, имеем

;

откуда следует, что .

Задания для самостоятельной работы

1. Найти производную функции y , заданной в неявной форме

- | | |
|-------|-------|
| а). ; | б). ; |
| в). ; | г). ; |

- д). .
2. Пользуясь способом логарифмического дифференцирования, найти производные указанных функций
- а) ; б) ;
в) ; г) .
3. Пользуясь способом логарифмического дифференцирования, найти производные показательно – степенных функций
- а) ; б) ; в) ;
г) ; д) .

Задания, решаемые в аудитории

Пример 33. Найти дифференциал dy функции .

Исходя из определения дифференциала, имеем

Данную функцию можно представить так: $y=eu$, где $u=x^2+1$, тогда будем иметь .

Пример 34. Найти дифференциал dy функции .

Найдем производную , пользуясь правилом дифференцирования сложной функции: , тогда

Дифференциал dy можно найти также непосредственно

Пример 35. Найти дифференциал dy функции y , заданной в неявном виде уравнением .

Найдем производную , для этого дифференцируем обе части уравнения по x , считая при этом y функцией от аргумента x

Из полученного равенства выразим

; .

Следовательно, дифференциал .

Пример 36. Найти приближенное значение функции при $x=3,02$, исходя из ее точного значения при $x=3$.

Пусть $x_1=3$, а $x_2=3,02$. Применяя приближенное равенство (5.7), получаем: .

Чтобы найти , надо предварительно продифференцировать данную функцию и затем найти численное значение производной при $x=3$.

Таким образом, .

Пример 37. Найти приближенное значение величины .

Рассмотрим функцию . Известно, что . Поэтому удобно положить и . Чтобы воспользоваться приближенным равенством (5.7), необходимо найти предварительно значение функции и ее производной при : . Выразим в радианной мере разность .

Следовательно, .

Пример 38. Найти приближенное значение величины .

Рассмотрим функцию . Так как при $x=27$ функция $y=3$, то удобно положить $x_1=27$ и $x_2=26,46$. Вычислим значение производной при $x_1=27$: . Применяя приближенное равенство (5.7), будем иметь .

Задания для самостоятельной работы

- Найти дифференциалы функций
а). ; б). ;
в). ; г). .
- Пользуясь приближенным равенством (5.7), вычислить приближенно значение указанных функций при указанных значениях аргумента
а). , $x=3,02$; б). , $x=0,02$; в). , $x=1,05$.
- Пользуясь приближенным равенством (5.7), вычислить приближенно значение указанных величин
а). ; б). ; в). ; г). ; д). ; е). .

Задания, решаемые в аудитории

Пример 39. Для данных функций найти производные указанного порядка

1) ; 2) ;

3) ;

1) Выполним последовательное дифференцирование функции

,

,

- 2) Выполняя последовательное дифференцирование функции, имеем
- 3) Вначале выполним последовательное дифференцирование функции :

Подставляя значение аргумента, имеем

Пример 40. Найти производную четвертого порядка от функции .
Полагая в формуле Лейбница (5.12), будем иметь . Пусть ,

тогда

Пример 41. Найти общее выражение производной -го порядка для функции .
Найдем несколько первых производных

откуда становится очевидна производная -го порядка функции

Пример 42. Найти производную второго порядка функции y , заданной в неявном виде уравнением .
Дифференцируя обе части равенства по переменной x и считая при этом y некоторой функцией от x , будем иметь , откуда (1). Дифференцируя обе части равенства (1) по переменной x , рассматривая при этом y как функцию от x , получим (2). Заменив в правой части (2) его выражением из равенства (1), получим .

Пример 43. Найти , если функция задана уравнением .

Пример 44. Найти производную второго порядка , если функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями .

Найдем производную первого порядка . Так как , а , то . Чтобы найти производную второго порядка , рассматриваем производную первого порядка как функцию параметра t и снова применяем формулу (5.12). Так как

то

Пример 45. Найти , если .

Задания для самостоятельной работы

- Найти дифференциалы функций, заданных в неявном виде
а). ; б). .
- Пользуясь формулой Лейбница, найти производную четвертого порядка для функций
а). ; б). .
- Найти от функции y , заданной в неявном виде
а). ; б). .
- Найти производную второго порядка от функции y , заданной в параметрическом виде
а). ; б). .

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 10. Основные теоремы дифференциального исчисления

Цель занятия: освоить основные теоремы дифференциального исчисления, их геометрический смысл, научиться применять правило Лопитала при вычислении пределов функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Теорема Ферма, ее геометрический смысл.
2. Теорема Ролля, ее геометрический смысл.
3. Теорема Лагранжа, ее геометрический смысл.
4. Теорема Коши о конечных приращениях, ее геометрический смысл.
5. Правило Лопитала для раскрытия неопределенностей.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 46. Функция дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает равные значения: $f(a) = f(b)$. Следовательно, по теореме Ролля на интервале (a, b) найдется по крайней мере одно значение аргумента x , при котором производная обращается в нуль. Действительно, $f'(c) = 0$, откуда видно, что при $x = c$ производная обращается в нуль. При этом $c \in (a, b)$.

Пример 47. Определить значение ξ в формуле Лагранжа для функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[1, e]$.

Согласно условию задачи, имеем: $a=1$, $b=e$, $f(a)=1$, $f(b)=e^2$, $f'(x)=2x$. Применяя теорему Лагранжа, будем иметь: $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$, откуда $\xi = \frac{e^2 - 1}{2(e - 1)}$.

Рис. 25

Пример 48. Написать формулу Коши для функций $f(x) = \sin x$ и $g(x) = x$ и определить значение ξ на отрезке $[0, \pi/2]$.

По условию имеем $f(0) = 0$, $f(\pi/2) = 1$, $g(0) = 0$, $g(\pi/2) = \pi/2$. Далее, $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = 1$. Подставляя в формулу Коши, получим $1 - 0 = \cos(\xi)(\pi/2 - 0)$, откуда $\xi = \frac{2}{\pi}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Показать, что между двумя корнями функции содержится корень производной.
2. На параболе $y = x^2 + 3x - 4$ даны две точки: $A(-4, 0)$ и $B(2, 6)$. Найти на дуге AB точку C , в которой касательная параллельна хорде AB .
3. Определить значение ξ в формуле Лагранжа для функций
 - а). $f(x) = \ln x$ на отрезке $[1, 2]$;
 - б). $f(x) = \arcsin x$ на отрезке $[0, 1]$;
 - в). $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на отрезке $[0, 1]$.
4. Написать формулу Коши и найти ξ для указанных функций
 - а). $f(x) = \sin x$ и $g(x) = x$ на отрезке $[0, \pi/2]$;
 - б). $f(x) = \cos x$ и $g(x) = x$ на отрезке $[0, \pi/2]$.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 49. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопитала: $f(x) = \sin x$; $g(x) = x$; поэтому $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$.

Пример 50. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Пример 51. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

;;.

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и так далее, пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Пример 52. Найти предел .

;;
;;
;
;;.

Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталя может быть использован и какой – либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Пример 53. Найти предел .

;; - опять получилась неопределенность. Применим правило Лопиталя еще раз: ;; - применяем правило Лопиталя еще раз ; ; .

Неопределенности вида можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида , $f(x) > 0$ вблизи точки a при $x \rightarrow a$. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции $\ln y = g(x) \ln f(x)$.

Пример 54. Найти предел .

Здесь $y = x^x$, $\ln y = x \ln x$, тогда

.

Следовательно .

Пример 55. Найти предел .

; - получили неопределенность. Применяем правило Лопиталя еще раз ; .

Задания для самостоятельной работы

Пользуясь правилом Лопиталя, вычислить пределы функций

- | | | |
|--------|--------|--------|
| 1). ; | 2). ; | 3). ; |
| 4). ; | 5). ; | 6). ; |
| 7). ; | 8). ; | 9). ; |
| 10). ; | 11). ; | 12). ; |
| 13). ; | 14). ; | 15). ; |
| 16). ; | 17). ; | 18). ; |
| 19). ; | 20). . | |

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Цель занятия: научиться применять аппарат дифференциального исчисления при исследовании функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Признаки возрастания и убывания функций.
2. Экстремум функции.
3. Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке.
4. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба графика функции.
5. Асимптоты графика функции.

Задания, решаемые в аудитории

Пример 56. Исследовать функцию на возрастание и убывание.

Найдем сначала производную данной функции, затем промежутки знакопостоянства функции, для чего определим нули функции, отметим их на множестве ее определения и расставим знаки производной в каждом из полученных промежутков

Рис. 26

Из рисунка видно, что на всей области определения функция является возрастающей.

Пример 57. Исследовать на экстремум функцию.

Определим критические точки функции: , откуда и - критические точки. Определим знаки первой производной вблизи найденных критических точек. Для этого удобно производную представить в виде произведения сомножителей. Видим, что на интервале производная, на интервале производная, а на интервале производная. Следовательно, в критической точке максимум. В критической точке производная меняет свой знак с минуса на плюс, в этой точке функция имеет минимум

,

.

Экстремальные точки: и.

Рис. 27

Пример 58. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Находим критические точки, принадлежащие интервалу, и значения функции в этих точках, , , , .

Критическая точка не принадлежит заданному отрезку. Вычислим значения функции в двух критических точках, . Вычислим значения функции на концах заданного отрезка, . Сравнивая полученные результаты, имеем: наибольшее значение функции, а наименьшее.

Пример 59. Найти точки перегиба и определить интервалы выпуклости и вогнутости кривой.

Найдем вторую производную функции, . Определим критические точки второго рода, откуда видно, что точка разбивает всю область определения данной функции на два интервала и; в первом интервале вторая производная отрицательна, а во втором – положительна. Следовательно, точка - точка перегиба графика функции. Кривая является выпуклой на интервале и вогнутой на интервале.

Пример 60. Найти асимптоты и построить график функции.

1) Вертикальные асимптоты: y^+ , $x_0=0$: y^- , $x_0=0$, следовательно, $x = 0$ -вертикальная асимптота.

2) Наклонные асимптоты:

,

.

Таким образом, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой. Построим график функции.

Рис. 28

Пример 61. Найти асимптоты и построить график функции .

Прямые $x = 3$ и $x = -3$ являются вертикальными асимптотами кривой. Найдем наклонные асимптоты , .
 $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

Рис. 29

Пример 62. Найти асимптоты и построить график функции .

Прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой кривой. Найдем наклонные асимптоты:

,

.

Итак, прямая $y = x - 4$ является наклонной асимптотой.

Рис. 30

Пример 63. Исследовать функцию и построить ее график.

Находим область определения функции: $(-; -1)$ $(-1; 1)$ $(1;)$. В свою очередь, видно, что прямые $x = 1$, $x = -1$ являются вертикальными асимптотами кривой, так как точками разрыва второго рода функции являются точки $x = 1$, $x = -1$. Областью значений данной функции является интервал $(-;)$. Если , то , то есть точка $(0; 0)$ принадлежит графику. Данная функция не является ни четной, ни нечетной.

Определим критические точки, для этого найдем производную функции:

.

Критические точки: $x = 0$; $x = -$; $x =$; $x = -1$; $x = 1$. Установим промежутки возрастания и убывания функции, для этого определим знаки производной функции на промежутках:

Рис. 31

- $< x < -$, $y > 0$, функция возрастает
 - $< x < -1$, $y < 0$, функция убывает
 $-1 < x < 0$, $y < 0$, функция убывает
 $0 < x < 1$, $y < 0$, функция убывает
 $1 < x <$, $y < 0$, функция убывает
 $< x <$, $y > 0$, функция возрастает

Видно, что точка $x = -$ является точкой максимума, а точка $x =$ является точкой минимума. Значения функции в этих точках равны соответственно $3/2$ и $-3/2$, иначе говоря, экстремальные точки – $A(-; 3/2)$ и $B(; -3/2)$.

Далее ищем вторую производную функции:

Итак, критические точки второго рода: $x = 0$; $x = -1$; $x = 1$. Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y''	-	∞	+	0	-	∞	+
y	вып.	разрыв	вогн.	перегиб	вып.	разрыв	вогн.

- $x < -1$, $y < 0$, кривая выпуклая,
 $-1 < x < 0$, $y > 0$, кривая вогнутая,
 $0 < x < 1$, $y < 0$, кривая выпуклая,
 $1 < x < 2$, $y > 0$, кривая вогнутая.

Точка перегиба .

Про вертикальные асимптоты было сказано выше. Теперь найдем наклонные асимптоты

Таким образом, уравнение наклонной асимптоты – $y = x$. Построим график функции, основываясь на результатах проведенного исследования.

Рис. 32

Задания для самостоятельной работы

Определить интервалы возрастания и убывания следующих функций

- а). ; б). ;
- в). ; г). ;
- д). ; е). .
7. Найти стационарные точки функций
 - а). ; б). .
8. Найти критические точки функций
 - а). ; б). ;
 - в). ; г). .
9. Исследовать на экстремум функции
 - а). ; б). ;
 - в). ; г). ;
 - д). ; е). .
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке
 - а). , ; б). , ;
 - в). ; г). ;
 - д). ; е). .
11. Найти точки перегиба и определить интервалы выпуклости и вогнутости заданных кривых
 - а). ; б). ;
 - в). ; г). .
12. Найти асимптоты указанных кривых
 - а). ; б). ;
 - в). ; г). .

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.
 Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 12. Полное исследование функции и построение графика

Цель занятия: проводить полное исследование функции по отработанной ранее схеме и выполнять построение ее графика.

Вопросы для обсуждения:

1. Схема полного исследования функции и построение ее графика.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Раздел III. Интегральное исчисление для функций одной переменной

Занятие № 13. Неопределенный интеграл и его свойства

Цель занятия: освоить понятия первообразной и неопределенного интеграла, основных свойств неопределенного интеграла.

Вопросы для обсуждения:

1. Первообразная и неопределенный интеграл.
2. Геометрический смысл неопределенного интеграла, его свойства.
3. Метод непосредственного интегрирования (используя свойства неопределенного интеграла и таблицу).

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 14. Метод замены переменной

Цель занятия: освоить метод интегрирования - метод замены переменной (метод подстановки).

Вопросы для обсуждения:

1. Метод замены переменной (метод подстановки).

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 15. Метод интегрирования по частям

Цель занятия: освоить метод интегрирования по частям.

Вопросы для обсуждения:

1. Метод интегрирования по частям.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 16. Интегрирование рациональных функций

Цель занятия: освоить интегрирование различных рациональных функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Интегрирование элементарных дробей.
2. Интегрирование рациональностей с помощью разложения на сумму простых дробей (метод неопределенных коэффициентов).

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 17. Интегрирование иррациональных функций

Цель занятия: освоить интегрирование различных иррациональных функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Интеграл вида $\int x^n dx$, где n - натуральное число.
2. Интегрирование биномиальных дифференциалов.
3. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 18. Интегрирование тригонометрических функций

Цель занятия: освоить интегрирование различных тригонометрических функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Интеграл вида $\int \sin x dx$.
2. Интеграл вида $\int \cos x dx$, если функция R является нечетной относительно $\cos x$.
3. Интеграл вида $\int \sin x dx$, если функция R является нечетной относительно $\sin x$.
4. Интеграл вида $\int \cos x dx$, функция R четная относительно $\sin x$ и $\cos x$.
5. Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

2 семестр

Занятие № 19. Определенный интеграл и его свойства

Цель занятия: освоить понятие определенного интеграла, изучить его основные свойства, научиться вычислять определенный интеграл с использованием формулы Ньютона-Лейбница.

Вопросы для обсуждения:

1. Понятие определённого интеграла, его геометрический и физический смысл.

2. Основные свойства определенного интеграла.
3. Связь определенного интеграла с неопределенным, формула Ньютона-Лейбница.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 20. Методы вычисления определенного интеграла

Цель занятия: освоить методы вычисления определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница, отработать метод замены переменной и метод интегрирования по частям в определенном интеграле.

Вопросы для обсуждения:

1. Связь определенного интеграла с неопределенным, формула Ньютона-Лейбница.
2. Метод замены переменной в определенном интеграле.
3. Метод интегрирования по частям в определенном интеграле.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 21. Приложения определенного интеграла

Цель занятия: познакомиться с приложениями определённого интеграла.

Вопросы для обсуждения:

1. Вычисление площади плоской фигуры.
2. Вычисление длины дуги плоской кривой.
3. Вычисление объема тела вращения.
4. Вычисление площади поверхности вращения.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 22. Несобственные интегралы

Цель занятия: научиться вычислять несобственные интегралы первого и второго типа в случае их сходимости или устанавливать их расходимость.

Вопросы для обсуждения:

1. Несобственные интегралы первого типа.
2. Несобственные интегралы второго типа.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Раздел IV. Дифференциальное исчисление для функций нескольких переменных

Занятие № 23. Функции нескольких переменных. Основные понятия, область определения

Цель занятия: освоить определение функции нескольких переменных, научиться выполнять их общее исследование, находить область определения.

Вопросы для обсуждения:

1. Определение функции нескольких переменных.
2. Основные понятия, область определения функции нескольких переменных.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 24. Частные производные функции нескольких переменных

Цель занятия: научиться вычислять частные производные и частные дифференциалы функции нескольких переменных.

Вопросы для обсуждения:

1. Частные производные функций нескольких переменных.
2. Частные дифференциалы функций нескольких переменных.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 25. Полный дифференциал функции нескольких переменных

Цель занятия: выработать навыки нахождения полного дифференциала функции нескольких переменных.

Вопросы для обсуждения:

1. Полный дифференциал и его связь с частными производными функции нескольких переменных.
2. Инвариантность формы полного дифференциала. Геометрический смысл частной производной и полного дифференциала.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 26. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Цель занятия: научиться вычислять частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

Вопросы для обсуждения:

1. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 27. Дифференцирование сложных функций

Цель занятия: освоить дифференцирование сложных функций нескольких переменных в зависимости от вида функции (рассмотреть три случая).

Вопросы для обсуждения:

1. Дифференцирование сложных функций нескольких переменных, случай 1.
2. Дифференцирование сложных функций нескольких переменных, случай 2.
3. Дифференцирование сложных функций нескольких переменных, случай 3.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 28. Экстремум функции нескольких переменных

Цель занятия: освоить определение экстремума функции нескольких переменных, необходимое и достаточное условия существования точек экстремума.

Вопросы для обсуждения:

1. Экстремум функции нескольких переменных.
2. Необходимое и достаточное условия существования точек экстремума функции нескольких переменных.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 29. Наибольшее и наименьшее значение функции нескольких переменных

Цель занятия: освоить технику решения задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции нескольких переменных, определения производной функции по заданному направлению, вычислять градиент функции нескольких переменных.

Вопросы для обсуждения:

1. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных.
2. Производная по направлению. Градиент функции.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Раздел V. Интегральное исчисление для функций нескольких переменных

Занятие № 30. Вычисление двойных интегралов двукратным интегрированием

Цель занятия: освоить определение двойного интеграла, необходимое условие его существования, технику вычисления двойного интеграла в декартовых координатах приведением к повторному интегралу.

Вопросы для обсуждения:

1. Определение двойного интеграла, необходимое условие его существования. Критерий существования двойного интеграла.
2. Классы интегрируемых функций.
3. Свойства двойного интеграла.
4. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах приведением к повторному интегралу.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 31. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Цель занятия: освоить определение двойного интеграла, необходимое условие его существования, технику вычисления двойного интеграла в декартовых координатах приведением к повторному интегралу.

Вопросы для обсуждения:

1. Свойства двойного интеграла.
2. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах приведением к повторному интегралу.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 32. Переход к полярным координатам в двойных интегралах

Цель занятия: освоить замену переменных под знаком двойного интеграла, вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

Вопросы для обсуждения:

1. Замена переменных под знаком двойного интеграла.
2. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 33. Геометрические приложения двойных интегралов

Цель занятия: научиться решать задачи на вычисление площадей криволинейных областей, объемов тел произвольной формы с помощью двойного интеграла.

Вопросы для обсуждения:

1. Геометрические приложения двойного интеграла.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 34. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Цель занятия: познакомиться с понятием «тройной интеграл», освоить технику его вычисления в декартовых координатах сведением к трехкратному интегралу.

Вопросы для обсуждения:

1. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 35. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Цель занятия: отработать вычисление тройных интегралов в цилиндрических координатах.

Вопросы для обсуждения:

1. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 36. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах

Цель занятия: отработать вычисление тройных интегралов в сферических координатах.

Вопросы для обсуждения:

1. Тройной интеграл в сферических координатах.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 37. Геометрические приложения тройных интегралов

Цель занятия: решать геометрические задачи на приложение тройных интегралов.

Вопросы для обсуждения:

1. Геометрические приложения тройного интеграла.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Раздел VI. Ряды

Занятие № 38. Понятие числового ряда с положительными членами

Цель занятия: освоить основные понятия и определения теории числовых рядов с положительными членами.

Вопросы для обсуждения:

1. Числовой ряд и его частичные суммы, сходящиеся и расходящиеся числовые ряды.
2. Простейшие свойства сходящихся рядов. Остаток ряда.
3. Необходимые условия сходимости числовых рядов.
4. Гармонический ряд.
5. Критерий Коши сходимости числовых рядов.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 39. Признаки сравнения сходимости числового ряда, признак Даламбера

Цель занятия: отработать применение признаков сравнения, признака Даламбера исследования сходимости числовых рядов с положительными членами.

Вопросы для обсуждения:

1. Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.
2. Предельный признак сравнения рядов с неотрицательными членами.
3. Признак Даламбера сходимости рядов с неотрицательными членами.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 40. Радикальный и интегральный признаки Коши сходимости числового ряда

Цель занятия: отработать применение радикального и интегрального признаков Коши исследования сходимости числовых рядов с положительными членами.

Вопросы для обсуждения:

1. Радикальный признак Коши сходимости рядов с неотрицательными членами.
2. Интегральный признак Коши сходимости рядов с неотрицательными членами.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 41. Знакопередающие ряды. Признак Лейбница

Цель занятия: освоить понятие знакопередающего ряда и научиться исследовать его сходимость с помощью признака Лейбница.

Вопросы для обсуждения:

1. Знакопередающие ряды, признак Лейбница.
2. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.
3. Перестановка членов в абсолютно сходящихся рядах.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 42. Исследование сходимости функциональных рядов

Цель занятия: освоить понятие функционального ряда и изучить вопросы исследования его сходимости.

Вопросы для обсуждения:

1. Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей.
2. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.
3. Функциональные ряды, область их сходимости.
4. Равномерная сходимость функциональных рядов, признак Вейерштрасса.

5. Предельный переход под знаком интеграла. Почленное интегрирование функциональных рядов.
6. Предельный переход под знаком производной. Почленное дифференцирование функциональных рядов.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 43. Исследование сходимости степенных рядов

Цель занятия: освоить определение степенного ряда и изучить вопросы исследования его сходимости.

Вопросы для обсуждения:

1. Понятие степенного ряда, теорема Абеля.
2. Интервал и радиус сходимости степенного ряда, формула Коши-Адамара.
3. Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда.
4. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
5. Задачи разложения функции в степенной ряд, существование разложения функции в ряд Тейлора.
6. Разложение в степенные ряды элементарных функций.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 44. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Цель занятия: освоить понятие тригонометрического ряда Фурье и технику разложения четных и нечетных функций в ряд Фурье.

Вопросы для обсуждения:

1. Тригонометрический ряд Фурье. Коэффициенты Фурье.
2. Достаточные признаки разложимости в ряд Фурье.
3. Разложение в ряд Фурье непериодической функции.
4. Ряд Фурье для четных и нечетных функций.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

Занятие № 45. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом

Цель занятия: решать задачу разложения в ряд Фурье функций с произвольным периодом.

Вопросы для обсуждения:

1. Ряды Фурье для функций любого периода.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-4

Интернет-ресурсы: 1-4

