

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению лабораторных работ по дисциплине
«МАТЕМАТИКА»

для студентов направления подготовки

15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных
производств
направленность (профиль) «Технология машиностроения»

Ставрополь 2026

ТЕМА. Интегральное исчисление функции одной переменной.

При решении задач этой темы необходимо знать:

1. Определение и свойства неопределенного интеграла.
2. Таблицу основных интегралов.
3. Основные методы интегрирования.
4. Стандартные методы интегрирования наиболее часто встречающихся классов функций.
5. Определение, свойства и способы вычисления определенного интеграла.
6. Несобственные интегралы и их свойства.
7. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

Таблица основных интегралов

$$1 \quad \int dx = x + C;$$

$$2 \quad \int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1;$$

$$3 \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$4 \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad 4a \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$5 \quad \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$6 \quad \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$7 \quad \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$8 \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$9 \quad \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$10 \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| \sqrt{x^2 \pm a^2} + x \right| + C;$$

$$11 \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$12 \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб. для вузов: в 3 т.-5-е изд., стер. - М.: Дрофа .- (Высшее образование. Современный учебник). Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. - 2003. - 509 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. - 22-е изд., перераб.- СПб: Профессия, 2003. - 432 с.
3. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.-6-е изд.- М.: ОНИКС 21 век, ч.2. -2002.-416 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т.- Изд. стер. –М.: Интеграл – Пресс. Т.1. -2001.- 415 с.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике, 1 часть. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 288 с.: ил.

Образец решения варианта

Задание 1: Вычислить интеграл:

а) $\int \left(x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7 \right) dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}};$

в) $\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx;$

г) $\int 3^{2-7x} dx;$

д) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx;$

е) $\int e^x \cdot \sin e^x dx;$

ж) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx;$

з) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}} dx;$

и) $\int \frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x} dx;$

к) $\int x \cdot \operatorname{tg} x^2 dx;$

л) $\int \frac{3^x}{9^x+4} dx;$

м) $\int x^2 \cdot \cos x dx;$

н) $\int \arccos x dx;$

о) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x} dx;$

п) $\int \frac{x^6}{x^2-x+1} dx;$

р) $\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)};$

с) $\int \frac{3x dx}{\sqrt{3x^2-2} + \sqrt[4]{3x^2-2}};$

т) $\int \cos 3x \cos 5x dx;$

у) $\int \sin^4 x dx;$

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}};$

Решение:

а) Найдем интеграл, применив свойства неопределенного интеграла и формулы (1) и (2) табличного интегрирования:

$$\begin{aligned}\int \left(x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7 \right) dx &= \int \left(x^5 + 4 \cdot x^{-3} - x^{\frac{2}{3}} - 7 \right) dx = \int x^5 dx + 4 \int x^{-3} dx - \int x^{\frac{2}{3}} dx - 7 \int dx = \\ &= \frac{x^{5+1}}{5+1} + 4 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - 7x + C = \frac{x^6}{6} + 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 7x + C = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{x^2} - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5} - 7x + C;\end{aligned}$$

Интегралы (б – л) решим методом замены переменной.

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}} \left| \begin{array}{l} t = 1 + 2x; \\ dt = 2dx; \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt[4]{t^3}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{3}{4}} dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + C = 2(1+2x)^{\frac{1}{4}} + C = 2\sqrt[4]{1+2x} + C;$$

$$\text{в) } \int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^5 \\ dt = 5x^4 dx \\ x^4 dx = \frac{1}{5} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{5} dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{\sin^2 t} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (12)}

$$= -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} t + C = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} x^5 + C;$$

$$\text{г) } \int 3^{2-7x} dx = \left| \begin{array}{l} t = 2 - 7x, \\ dt = -7dx, \\ dx = -\frac{1}{7} dt \end{array} \right| = \int 3^t \cdot \left(-\frac{1}{7} \right) dt = -\frac{1}{7} \int 3^t dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (4)}

$$= -\frac{1}{7} \cdot \frac{3^t}{\ln 3} + C = -\frac{1}{7} \cdot \frac{3^{2-7x}}{\ln 3} + C;$$

$$\text{д) } \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{1}{1+x^2} dx \end{array} \right| = \int t dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$= \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C;$$

$$\text{е) } \int e^x \cdot \sin e^x dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \sin t dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (5)}

$$= -\cos t + C = -\cos e^x + C;$$

$$\text{ж) } \int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (8)}

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2} + C;$$

$$\text{з) } \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{(e^x)^2 - (\sqrt{7})^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x, \\ dt = e^x dx, \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - (\sqrt{7})^2}} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (10)}

$$= \ln \left| \sqrt{t^2 - (\sqrt{7})^2} + t \right| + C = \ln \left| \sqrt{e^{2x} - 7} + e^x \right| + C;$$

$$\text{и) } \int \frac{\sin 5x dx}{9 - \cos^2 5x} = \left| \begin{array}{l} t = \cos 5x \\ dt = -5 \sin 5x dx \\ \sin 5x dx = -\frac{1}{5} dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{5} dt}{9-t^2} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2-3^2} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (9)}

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3} \right| + C = \frac{1}{30} \ln \left| \frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3} \right| + C;$$

$$\text{к) } \int x \cdot \operatorname{tg} x^2 dx = \int \frac{x \sin x^2}{\cos x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x^2 \\ dt = -2x \sin x^2 dx \\ x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (3)}

$$= -\frac{1}{2} \ln |t| + C = -\frac{1}{2} \ln |\cos x^2| + C;$$

$$\text{л) } \int \frac{3^x}{9^x + 4} dx = \int \frac{3^x}{(3^x)^2 + 2^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = 3^x \\ dt = 3^x \ln 3 dx \\ 3^x dx = \frac{1}{\ln 3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{dt}{t^2 + 2^2} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (7)}

$$= \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2 \ln 3} \operatorname{arctg} \frac{3^x}{2} + C;$$

Найдем интегралы (м – н) методом интегрирования по частям, используя формулу $\int U \cdot V' dx = U \cdot V - \int U' \cdot V dx$ (13):

$$\begin{aligned} \text{м) } \int x^2 \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} U = x^2; \quad U' = 2x \\ V' = \cos x; \quad V = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} U = 2x; \quad U' = 2 \\ V' = \sin x; \quad V = -\cos x \end{array} \right| = x^2 \cdot \sin x - (2x \cdot (-\cos x) - \int 2 \cdot (-\cos x) dx) = \end{aligned}$$

{для нахождения интеграла применим формулу (6)}

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C;$$

$$\text{н) } \int \arccos x dx = \left| \begin{array}{l} U = \arccos x; \quad U' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ V' = 1; \quad V = x \end{array} \right| = x \cdot \arccos x - \int x \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

{второе слагаемое вычислим с помощью замены, применив формулу (2)}

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ -x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\text{в итоге получаем } \int \arccos x dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C;$$

$$\text{о) } \int \frac{x^2 + 3x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx.$$

Под знаком интеграла правильная рациональная дробь. Разложим её на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} &= \frac{x^2 + 3x + 6}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} = \\ &= \frac{A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 2Cx}{x(x-2)(x-3)}; \end{aligned}$$

Перейдем к равенству числителей:

$$x^2 + 3x + 6 = Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 2Cx.$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{array}{l} x^2: 1 = A + B + C \\ x^1: 3 = -5A - 3B - 2C \\ x^0: 6 = 6A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 + B + C \\ 8 = -3B - 2C \\ A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -8, \\ C = 8. \end{cases}$$

Тогда $\frac{x^2 + 3x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{1}{x} - \frac{8}{x-2} + \frac{8}{x-3}$.

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя свойства неопределённого интеграла, получим:

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{8}{x-2} + \frac{8}{x-3} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - 8 \int \frac{dx}{x-2} + 8 \int \frac{dx}{x-3} =:$$

{для нахождения интегралов применим формулу (3)}

$$= \ln|x| - 8\ln|x-2| + 8\ln|x-3| + C;$$

п) $\int \frac{x^6}{x^2 - x + 1} dx$.

Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть этой дроби путем деления числителя на знаменатель:

$$\frac{x^6}{x^2 - x + 1} = x^4 + x^3 - x - 1 + \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Выделим полный квадрат в знаменателе правильной рациональной дроби:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим:

$$\int \left(x^4 + x^3 - x - 1 + \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right) dx = \int x^4 dx + \int x^3 dx - \int x dx - \int 1 dx + \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \{ \text{для}$$

нахождения первых трёх интегралов применим формулу (2), для четвёртого – формулу (1), последний интеграл найдем с помощью формулы (7)}

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C;$$

р) $\int \frac{dx}{\sin x (2 + \cos x - 2 \sin x)}$.

Найдем интеграл используя универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} \right)} = \int \frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)} dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)} &= \frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t-3} = \\ &= \frac{A(t-1)(t-3) + Bt(t-3) + Ct(t-1)}{t(t-1)(t-3)} \end{aligned}$$

Перейдем к равенству числителей:

$$1+t^2 = At^2 - 4At + 3A + Bt^2 - 3Bt + Ct^2 - Ct.$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} t^2: 1 &= A + B + C \\ t^1: 0 &= -4A - 3B - C \\ t^0: 1 &= 3A \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3}, \\ B = -1, \\ C = \frac{5}{3}, \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)} = \frac{1}{3t} - \frac{1}{t-1} + \frac{5}{3(t-3)}.$$

Интегрируя почленно полученное равенство, получим::

$$\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t-1} + \frac{5}{3} \int \frac{dt}{t-3} =$$

{для нахождения интегралов применим формулу (3)}

$$= \frac{1}{3} \ln|t| - \ln|t-1| + \frac{5}{3} \ln|t-3| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| + \frac{5}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \right| + C;$$

$$\text{с) } \int \frac{3xdx}{\sqrt{3x^2-2} + \sqrt[4]{3x^2-2}}.$$

$$\text{Произведем замену: } 3x^2 - 2 = t, \quad dt = 6xdx, \quad 3xdx = \frac{1}{2} dt.$$

$$\text{Получим: } \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t} + \sqrt[4]{t}} =$$

Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ есть 4, поэтому введем следующую замену:

$$\begin{aligned} \left| \begin{aligned} t &= z^4 \\ dt &= 4z^3 dz \\ z &= \sqrt[4]{t} \end{aligned} \right| &= \frac{1}{2} \int \frac{4z^3 dz}{\sqrt{z^4} + \sqrt[4]{z^4}} = 2 \int \frac{z^2}{z^2 + z} dz = 2 \int \frac{z^2}{z(z+1)} dz = 2 \int \frac{z}{z+1} dz = \\ &= 2 \int \left(1 - \frac{1}{z+1} \right) dz = 2 \int dz - 2 \int \frac{dz}{z+1} = \end{aligned}$$

{для нахождения интегралов применим формулы (1) и (3)}

$$= 2z - 2 \ln|z+1| + C = 2\sqrt[4]{3x^2-2} - 2 \ln \sqrt[4]{3x^2-2} + C;$$

$$\text{т) } \int \cos 3x \cos 5x dx.$$

Найдем интеграл, используя формулу тригонометрических преобразований

$$\cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} (\cos(3x - 5x) + \cos(3x + 5x)) = \frac{1}{2} (\cos(-2x) + \cos 8x) = \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 8x)$$

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя формулу (6), получим:

$$\int \frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} (-\sin 8x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (-\sin 2x) + C = -\frac{1}{16} \sin 8x - \frac{1}{4} \sin 2x + C;$$

$$\begin{aligned} \text{у) } \int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \\ &= \int \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} dx = \int \left(\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int dx - 2 \cdot \frac{1}{4} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int \cos 4x dx = \\ &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{3}{8} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \end{aligned}$$

{для нахождения интегралов применим формулы (1) и (6)}

$$= \frac{3}{8} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + C = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C;;$$

$$\text{ф) } \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} =:$$

$$\left| \begin{array}{l} t = \sqrt{e^{2x} - 1}, \\ e^{2x} = t^2 + 1, \\ x = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1), \\ dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{t^2 + 1} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{t^2 + 1} dt}{t} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (7)}

$$= \arctg t + C = \arctg \sqrt{e^{2x} - 1} + C.$$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4}};$$

$$\text{б) } \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$$

Решение:

а) Несобственный интеграл I рода.

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \left. \begin{array}{l} t = x^2 + 4 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \\ x_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 4 \\ x_2 = -\infty \Leftrightarrow t_2 = \infty \end{array} \right| = \int_4^{\infty} \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_4^b \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(t^{\frac{1}{2}} \Big|_4^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\sqrt{t} \Big|_4^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} (\sqrt{b} - 2) = \infty \quad - \text{ интеграл расходится.}$$

б) Несобственный интеграл II рода.

$x = 4$ является точкой разрыва подынтегральной функции, поэтому:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4^2 - x^2}} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (8)}

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\arcsin \frac{x}{4} \Big|_0^{4-\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\arcsin \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} \right) - \arcsin 0 \right) = \frac{\pi}{2} \quad - \text{ интеграл сходится.}$$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$;

б) длину дуги кривой:

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

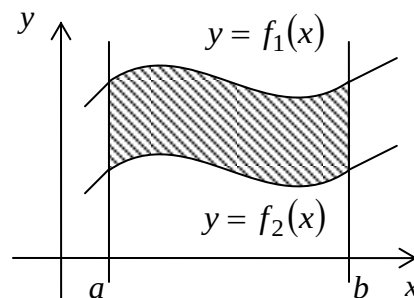
в) объем тела, полученного вращением фигуры $y = \sin x$; $y = 0$; $0 \leq x \leq \pi$, вокруг оси Ox .

Решение:

а) Существуют несколько формул для вычисления площадей плоских фигур.

■ Площадь фигуры, заданной в декартовой системе координат, ограниченной линиями $y = f_1(x)$ - сверху, $y = f_2(x)$ - снизу, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$ определяется

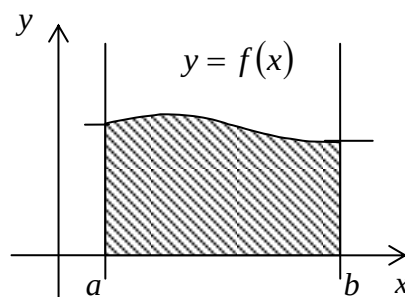
формулой
$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx \quad (14);$$



■ Площадь фигуры, ограниченной кривой заданной параметрически уравнениями

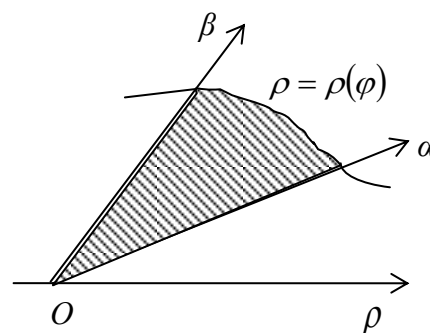
$$(y = f(x), x \in [a; b]) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} t \in [\alpha; \beta],$$

определяется формулой
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt \quad (15);$$



■ Площадь фигуры, заданной в полярной системе координат, ограниченной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, определяется формулой:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi \quad (16).$$

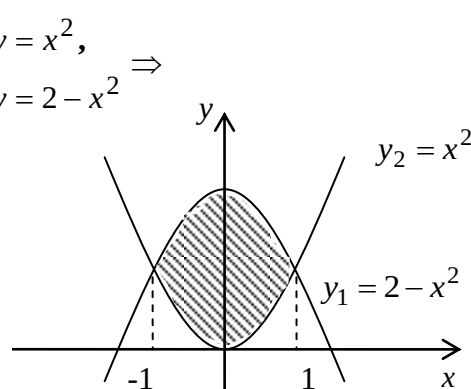


В нашем случае линии, ограничивающие фигуру, заданы в декартовых координатах, поэтому мы будем использовать формулу (14).

Найдем координаты точек пересечения линий: $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow$

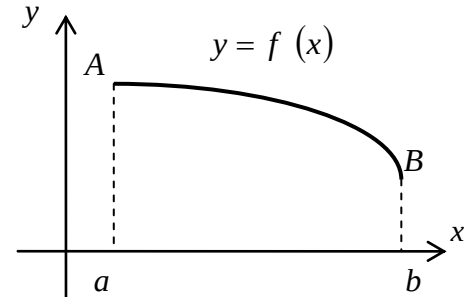
$$x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = -1; \quad x_2 = 1 \Rightarrow a = -1; \quad b = 1.$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 ((2 - x^2) - x^2) dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \\ &= 2 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) = \frac{8}{3}; \end{aligned}$$

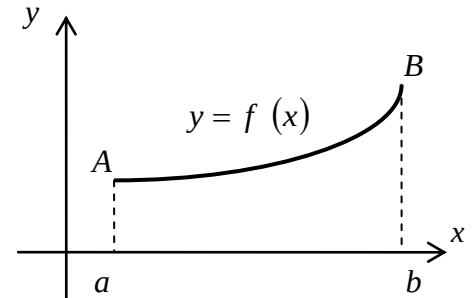


б) В зависимости от способа задания уравнения кривой существуют следующие формулы нахождения длины дуги кривой.

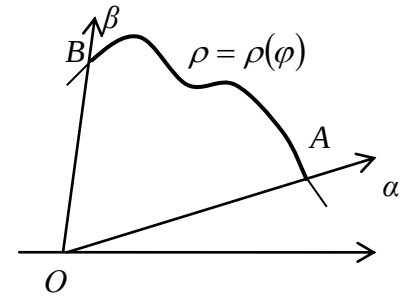
▪ Для кривой, заданной в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$ $x \in [a; b]$ длина дуги находится по формуле $l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ (17);



▪ Для кривой, заданной параметрически уравнениями $(y = f(x), x \in [a; b]) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} t \in [\alpha; \beta]$ длина дуги находится по формуле $l_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ (18);



▪ Для кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ $\varphi \in [\alpha; \beta]$ длина дуги находится по формуле $l_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi$ (19).

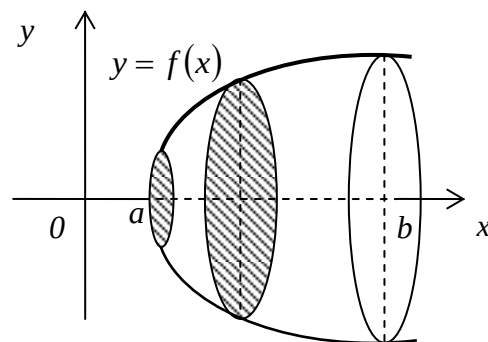


В нашем случае кривая задана параметрически, поэтому для вычисления её длины мы применим формулу (18).

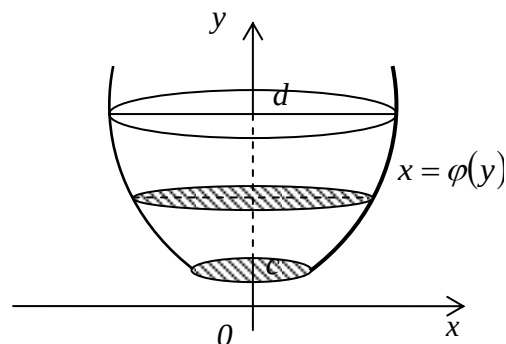
$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), & x'(t) = 3(1 - \cos t), \\ y = 3(1 - \cos t); & y'(t) = 3 \cdot \sin t. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\pi} \sqrt{(3(1 - \cos t))^2 + (3 \sin t)^2} dt = 3 \int_0^{\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \{\cos^2 t + \sin^2 t = 1\} = \\ &= 3 \int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 3 \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \left\{ 1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right\} = 3 \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right)} dt = \\ &= 6 \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -6 \cdot 2 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} = -12 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = -12 \cdot (0 - 1) = 12; \end{aligned}$$

в) Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a; b]$. Тогда объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу Ox , определяется формулой: $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ (20).

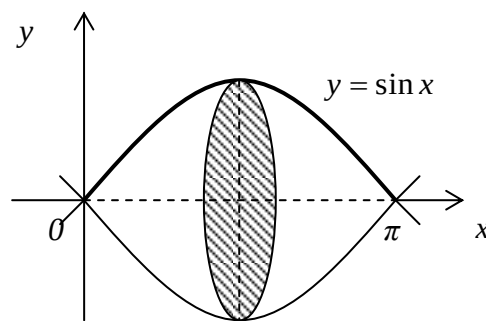


Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ ($c < d$), то объём тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy , по аналогии с формулой (20), равен: $V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy$ (21).



В условиях нашей задачи $y = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$.

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \left\{ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right\} = \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^\pi dx - \int_0^\pi \cos 2x dx \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} \left(\left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$



Вариант 1.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^2 - 2x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}};$

в) $\int \frac{x^2}{(1+3x^3)^2} dx;$

г) $\int \frac{x}{1+3x^2} dx;$

д) $\int \frac{\cos x}{1-2\sin x} dx;$

е) $\int e^{-x^2} x dx;$

ж) $\int \sin 2x dx;$

з) $\int \left(\cos \frac{x}{3} + 1 \right) dx;$

и) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}};$

к) $\int \frac{3^x}{3^{2x}+1} dx;$

л) $\int \frac{dx}{x^2-2x+4};$

м) $\int x e^{-2x} dx;$

н) $\int x^2 \ln x dx;$

о) $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2} dx;$

п) $\int \frac{x^4+2}{x^3+3x} dx;$

р) $\int \frac{dx}{1+3\cos x};$

с) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx;$

т) $\int \sin x \cos 2x dx;$

у) $\int \cos^2 x dx;$

ф) $\int (e^x + 2)^3 dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x};$

б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной параболой: $y = \frac{x^2}{2} - x + 1$ и $y = -\frac{x^2}{2} + 3x + 6;$

б) длину дуги кривой: $y = \ln x$ от точки с абсциссой $x_1 = \frac{3}{4}$ до точки $x_2 = 2,4;$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{6}{x}$, осью OY и прямыми $y = 1$ и $y = 6.$

Вариант 2.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int x \arccos x \, dx;$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}};$	в) $\int \frac{x dx}{(5x^2+1)^2};$
г) $\int 7^x \sqrt{3 \cdot 7^x + 4} dx;$	д) $\int \frac{x^2}{1+3x^3} dx;$	е) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+4} dx;$
ж) $\int \sin 5x \, dx;$	з) $\int \frac{dx}{1+3x^2};$	и) $\int \operatorname{tg} 3x \, dx;$
к) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}};$	л) $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x - 3};$	м) $\int (x+3)e^{2x} dx;$
н) $\int x \arccos x \, dx;$	о) $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x} dx;$	п) $\int \frac{x^3+1}{x^2-4} dx;$
р) $\int \frac{dx}{2-2\sin x};$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}};$	т) $\int \cos 3x \sin 2x dx;$
у) $\int \sin^4 x \cdot \cos x^5 \, dx;$	ф) $\int \sqrt{e^x+1} dx.$	

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}};$	б) $\int_0^\infty \frac{x dx}{x^2+4}.$

Задание 3: Вычислить:

- а) площадь фигуры, заключенной между кривой $y = 4 - x^2$ и осью Ox ;
- б) длину дуги кривой $y = 1 - \ln \cos x$ в пределах от $x_1 = 0$ до $x_2 = \frac{\pi}{4}$;
- в) объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{2}{1+x^2}$.

Вариант 3.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^2 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x} - 3 \right) dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}};$

в) $\int \frac{x^2}{(1-4x^3)^2} dx;$

г) $\int \frac{x dx}{x^2 + 5};$

д) $\int \frac{\cos 3x}{1 + \sin 3x} dx;$

е) $\int e^{-2x^2} \cdot x dx;$

ж) $\int a^{3x} dx;$

з) $\int (2 + \sin 2x) dx;$

и) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx;$

к) $\int 2^x \operatorname{tg} 2^x dx;$

л) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx;$

м) $\int x e^x dx;$

н) $\int x \arcsin 5x dx;$

о) $\int \frac{x^2 + 2x - 2}{x^3 - 9x} dx;$

п) $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 2x} dx;$

р) $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x};$

с) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt{x}} dx;$

т) $\int \cos 4x \cdot \cos 5x dx;$

у) $\int \sin^3 x dx;$

ф) $\int (e^x - 4)^2 dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx;$

б) $\int_0^1 \ln x dx.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линией $y = x^2 - 5$, осью Ox и осью Oy ($y < 0$);

б) длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}$ между точками пересечения её с Ox ;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = 3x^2 + 1$ и прямой $y = 3x + 7$.

Вариант 4.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(1 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{7}{x^4}\right) dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}};$

в) $\int \frac{x dx}{(3+x^2)^3};$

г) $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx;$

д) $\int \frac{x^2}{1+4x^3} dx;$

е) $\int \frac{e^x}{1-2e^x} dx;$

ж) $\int e^{-x^3} x^2 dx;$

з) $\int \sin 2x dx;$

и) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x};$

к) $\int \frac{x dx}{\sin x^2};$

л) $\int \frac{dx}{5+4x^2};$

м) $\int (x+2)\cos 5x dx;$

н) $\int \arcsin 4x dx;$

о) $\int \frac{x-3}{x^3+8} dx;$

п) $\int \frac{x^3-2}{x^3+2x^2+x} dx;$

р) $\int \frac{dx}{2+\sin x};$

с) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}} dx;$

т) $\int \sin x \cdot \cos 3x dx;$

у) $\int \cos^4 x dx;$

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+e^x}}.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2 - 4$ и прямыми $y = 0$, $x = -1$ ($x \geq -1$);

б) длину одной арки циклоиды: $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases};$

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{1}{4}x^2$, прямой $x = 4$ и осью Ox .

Вариант 5.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^4 - \frac{1}{2}x + \sqrt[3]{3x} \right) dx;$	б) $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^5};$	в) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}};$
г) $\int \frac{dx}{x+3};$	д) $\int \frac{\cos x}{1+3\sin x} dx;$	е) $\int e^{2x} dx;$
ж) $\int 2^{-x^2} x dx;$	з) $\int (1-\sin 3x) dx;$	и) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x};$
к) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx;$	л) $\int \operatorname{tg} 3x dx;$	м) $\int (x+5)e^{2x} dx;$
н) $\int x^7 \ln x dx;$	о) $\int \frac{x+2}{x^3-x^2-2x} dx;$	п) $\int \frac{x^4-3}{x^2-25} dx;$
р) $\int \frac{dx}{\cos x + 3\sin x};$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1} + \sqrt[4]{3x+1}};$	т) $\int \cos 3x \sin 2x dx;$
у) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx;$	ф) $\int \sqrt{4+e^x} dx.$	

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{x^2+4};$	б) $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$

Задание 3: Вычислить:

- а) площадь фигуры, ограниченной гиперболой $xy=9$, осью OX и прямыми $x=3$ и $x=6$;
- б) длину дуги одного оборота спирали Архимеда $\rho=3\varphi$;
- в) объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной полуэллипсом $y=3\sqrt{1-x^2}$, параболой $x=\sqrt{1-y}$ и осью Oy .

Вариант 6.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(2x^7 - \frac{3}{\sqrt{x}} + e^x \right) dx;$	б) $\int \frac{x^2 dx}{(1+3x^3)^3};$	в) $\int \sqrt{1-5x} dx;$
г) $\int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx;$	д) $\int \frac{e^x}{e^x+4} dx;$	е) $\int e^{\sin 2x} \cos 2x dx;$
ж) $\int 2^{-x^2} x dx;$	з) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x};$	и) $\int \operatorname{tg} 2x dx;$
к) $\int \frac{e^x}{\sin e^x} dx;$	л) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}};$	м) $\int x \cos 2x dx;$
н) $\int 3x^2 \ln(x+2) dx;$	о) $\int \frac{2-3x}{x^3-4x} dx;$	п) $\int \frac{x^3+2}{x^2-2x+3} dx.$
р) $\int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x};$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-4} + \sqrt[4]{5x^2-4}};$	т) $\int \sin 2x \cdot \cos 7x dx;$
у) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx;$	ф) $\int (5+e^x)^2 dx.$	

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}};$

б) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+1)^4}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$ и осью Oy ;

б) длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = 12$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{\arctg x}$ и прямыми $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \sqrt{3}$.

Вариант 7.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$а) \int \frac{x^3 - 2\sqrt{x^3} + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx;$$

$$б) \int \frac{x^2 dx}{(1 - 2x^3)^2};$$

$$в) \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$г) \int \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} dx;$$

$$д) \int \frac{x}{4x^2 - 3} dx;$$

$$е) \int e^{\cos 3x} \sin 3x dx;$$

$$ж) \int 2^{-3x^2} x dx;$$

$$з) \int \sin \frac{x}{5} dx;$$

$$и) \int \frac{dx}{\cos^2 3x};$$

$$к) \int tg(1 - x) dx;$$

$$л) \int \frac{2^x dx}{4^x + 1};$$

$$м) \int x \sin 3x dx;$$

$$н) \int x \cdot \arctg x dx;$$

$$о) \int \frac{x + 3}{x^3 + 10x^2 + 25x} dx;$$

$$п) \int \frac{x^5 + 3x^2}{x^2 + x} dx;$$

$$р) \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx.$$

$$с) \int \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} dx;$$

$$т) \int \sin x \cdot \sin 3x dx;$$

$$у) \int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx;$$

$$ф) \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 9}}.$$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8};$$

$$б) \int_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$;

б) длину дуги полукубической параболы $ay^2 = x^3$ от начала координат до точки с абсциссой $x = 5a$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной волной синусоиды $y = \sin 4x$ и осью Ox .

Вариант 8.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\text{a)} \int \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} + 1 \right) dx;$$

$$\text{б)} \int \sqrt{2x+3} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{x}{(1+4x^2)^2} dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{dx}{5-x};$$

$$\text{д)} \int \frac{dx}{4x - x \ln x};$$

$$\text{е)} \int x e^{x^2-3} dx;$$

$$\text{ж)} \int x \cos 2x^2 dx;$$

$$\text{з)} \int \left(1 - \sin \frac{x}{5} \right) dx;$$

$$\text{и)} \int \operatorname{ctg} 2x dx;$$

$$\text{к)} \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx;$$

$$\text{л)} \int \frac{x dx}{4+x^4};$$

$$\text{м)} \int e^{2x} \cos x dx;$$

$$\text{н)} \int \operatorname{arctg} 3x dx;$$

$$\text{о)} \int \frac{x^2 - x + 2}{x^3 + 4x^2 + 3x} dx;$$

$$\text{п)} \int \frac{x^2 - x + 2}{x^3 + 4x^2 + 3x} dx;$$

$$\text{р)} \int \frac{dx}{3-2\cos x};$$

$$\text{с)} \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+2\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{т)} \int \sin x \cdot \sin 3x dx;$$

$$\text{у)} \int \cos^2 \frac{x}{2} dx;$$

$$\text{ф)} \int \sqrt{e^x - 3} dx.$$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{а)} \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}.$$

$$\text{б)} \int_e^\infty \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}.$$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной параболой: $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$;

б) длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{(x-2)^3}$ от точки $A(2; 0)$ до точки $B(6; 8)$;

в) объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ вокруг оси Oy .

Вариант 9.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$а) \int \left(2 - 3\sqrt[5]{x^4} + \frac{1}{x^3} \right) dx;$$

$$б) \int \frac{x dx}{(1 + 3x^2)^5};$$

$$в) \int \sqrt{1 - 2x} dx;$$

$$г) \int \frac{x^2}{1 + 2x^3} dx;$$

$$д) \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3} dx;$$

$$е) \int e^{-x^3} x^2 dx;$$

$$ж) \int \sqrt{3^x} \sqrt{5^x} dx;$$

$$з) \int \frac{x^3}{\sin^2 x^4} dx;$$

$$и) \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos x} dx;$$

$$к) \int \frac{dx}{\sin^2 4x};$$

$$л) \int (2 - 3\cos 2x) dx;$$

$$м) \int (1 - x^2) \sin 3x dx;$$

$$н) \int \ln(x^2 + 5) dx;$$

$$о) \int \frac{x^2 + 4x}{x - x^2 - 2x^3} dx;$$

$$п) \int \frac{x^4}{1 - x^2} dx;$$

$$р) \int \frac{dx}{a \sin x + 3 \cos x};$$

$$с) \int \frac{\sqrt{x}}{4 - \sqrt[4]{x}} dx;$$

$$т) \int \sin 2x \cdot \sin 8x dx;$$

$$у) \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx;$$

$$ф) \int \frac{dx}{\sqrt{16 - e^x}}.$$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а) \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx;$$

$$б) \int_0^1 \frac{dx}{x + x^2}.$$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 2x + 5$, $y = \frac{x^2}{6}$;

б) длину дуги кардиоиды $\rho = 5(1 + \cos \varphi)$;

в) объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{1}{2}x^2$, прямой $y = 4 - x$, $x = 0$ вокруг оси Oy .

Вариант 10.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$a) \int \left(\sqrt{x} - 2x^3 - \frac{1}{x^2} \right) dx;$$

$$б) \int (1 - \sin 2x)^5 \cos 2x dx;$$

$$в) \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$г) \int \frac{x^3 dx}{1+4x^4};$$

$$д) \int \frac{\sin x}{1+2 \cos x} dx;$$

$$е) \int 2^{-x^3} x^2 dx;$$

$$ж) \int (e^x + 1)^2 dx;$$

$$з) \int e^x \sin e^x dx;$$

$$и) \int \cos 3x dx;$$

$$к) \int \frac{dx}{\sin^2(1-x)};$$

$$л) \int \cos 2x \sin 3x dx;$$

$$м) \int e^{-2x} (2x+5) dx;$$

$$н) \int (\sin^2 x + 1) x dx;$$

$$о) \int \frac{x+4}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx;$$

$$п) \int \frac{x^4 + x}{27 + x^3} dx;$$

$$р) \int \frac{\cos x}{1 + \cos x - \sin x} dx;$$

$$с) \int \frac{\sqrt{x}}{1 + 3\sqrt[4]{x}} dx;$$

$$т) \int \sin 5x \cdot \cos 8x dx;$$

$$у) \int \cos^5 x dx;$$

$$ф) \int (e^x - 3)^2 dx.$$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$a) \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$б) \int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}.$$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$ и прямыми $x = e$, $x = e^2$ и $y = 0$;

б) площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox параболы $y^2 = 2x+1$ от $x_1 = 1$ до $x_2 = 7$;

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Вариант 11.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$a) \int (4x+1)^2 dx$$

$$б) \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$$

$$в) \int \frac{2x}{(5+x^2)^2} dx$$

$$г) \int \frac{\arctg^2 3x}{1+9x^2}$$

$$д) \int \frac{x^4}{1+5x^5} dx$$

$$е) \int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^6}} dx$$

$$ж) \int \frac{\text{ctg}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} dx$$

$$з) \int \cos 5x \cdot dx$$

$$и) \int \frac{dx}{\sin^2 2x}$$

$$\text{к) } \int \frac{x \cdot dx}{\cos 2x^2}$$

$$\text{л) } \int \frac{dx}{6 + 3x^2} dx$$

$$\text{м) } \int e^{-2x} \cdot x \cdot dx$$

$$\text{н) } \int (x-3) \cdot \cos 3x dx$$

$$\text{о) } \int \frac{x^3}{x^2 + 2x - 1} dx$$

$$\text{п) } \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$$

$$\text{р) } \int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$$

$$\text{с) } \int \frac{\sqrt{x}}{2 + 3\sqrt{x}} dx$$

$$\text{т) } \int \sin x \cdot \cos 2x dx$$

$$\text{у) } \int \cos^4 2x dx$$

$$\text{ф) } \int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x} + 1}}$$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} e^x dx$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = \frac{2}{x}, y = 5 \cdot e^x, y = 2, y = 5.$$

б) длину дуги кривой:

$$\begin{cases} x = \cos t + t \cdot \sin t \\ y = \sin t - t \cdot \cos t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

в) Объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, y = 0.$$

Вариант 12.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int \left(x^5 - \frac{1}{x^2} + 5 \right) dx$

б) $\int \frac{dx}{\sin(5x+1)}$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

г) $\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx$

д) $\int \frac{x^2}{1+4x^3} dx$

е) $\int \frac{3 \operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}$

ж) $\int \frac{dx}{\sin^2(5x-1)}$

з) $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x-1)^2} dx$

и) $\int \frac{2dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$

к) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$

л) $\int \frac{dx}{3+2x^2} dx$

м) $\int (x+1) \cdot \cos 2x dx$

н) $\int e^{-5x} \cdot x \cdot dx$

о) $\int \frac{x^2}{x^2+x-1} dx$

п) $\int \frac{dx}{x^2+4x+2}$

р) $\int \operatorname{tg}(3x) dx$

с) $\int \frac{4x dx}{\sqrt{2x^2-1} + \sqrt[4]{2x^2-1}}$

т) $\int \sin 2x \cdot \cos 2x dx$

у) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{4x}-1}}$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} \cos x \cdot dx$

б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = \cos x, y = \sin x, x = 0, (x \geq 0).$

б) длину дуги кривой:

$y = x^2 - 1$, отсеченной осью Ox .

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:

$y = x^3, y = 1, x = 0.$

Вариант 13.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int (3x - e^{2x} + 1) dx$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$

в) $\int \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx$

г) $\int \frac{dx}{2+x}$

д) $\int \frac{\cos 3x}{1+\sin 3x} dx$

е) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

ж) $\int 3^{x^2} \cdot x \cdot dx$

з) $\int \operatorname{tg}(8x) dx$

и) $\int \frac{dx}{\sin^2(2x)}$

к) $\int \frac{dx}{x^2+6x-1}$

л) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}$

м) $\int (x^2+1) \cdot \ln x dx$

н) $\int (x+5) \cdot e^x dx$

о) $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2} dx$

п) $\int \frac{x-1}{2-x} dx$

р) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$

с) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} + \sqrt[4]{2x-1}}$

т) $\int \sin x \cdot \cos 5x dx$

у) $\int \cos^2 3x dx$

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{5x}-1}}$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

б) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{x}, x = 16.$

б) длину дуги кривой:

$y = x^{3/2}, 0 \leq x \leq 4.$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy области, ограниченной графиками функций:

$y = x^3, y = 1, x = 0.$

Вариант 14.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{x} dx$

б) $\int \frac{dx}{3-x}$

в) $\int \frac{\sqrt{3}}{9x^2 - 3} dx$

г) $\int \sin(4-x) dx$

д) $\int e^{5x+1} dx$

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$

ж) $\int \frac{\sin x}{1+5\cos x} dx$

з) $\int e^{4x^2} \cdot x \cdot dx$

и) $\int \frac{2^x}{1+2^{2x}} dx$

к) $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}$

л) $\int \frac{5+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

м) $\int (x+1) \cdot \ln x dx$

н) $\int x \cdot \cos 2x dx$

о) $\int \frac{x^2 + 2}{x(x+2)(x+1)} dx$

п) $\int \frac{x+5}{x-4} dx$

р) $\int \sin^2 2x dx$

с) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx$

т) $\int \sin 4x \cdot \cos x dx$

у) $\int \cos^3 5x dx$

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{6x} - 1}}$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} dx$

б) $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = x^2 - 4x + 3, \quad y = -x^2 + 2x + 3$

б) длину дуги кривой:

$y = \ln x, \quad 2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{6}$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:

$y = x^3, \quad y = \sqrt{x}.$

Вариант 15.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int \frac{3\sqrt{x} + 4x^2 - 5}{2x^2} dx$

б) $\int \frac{dx}{1-4x}$

в) $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}$

г) $\int \sin(5-3x) dx$

д) $\int e^{2x-2} dx$

е) $\int \frac{dx}{10x^2-1}$

ж) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

з) $\int e^{x^2} \cdot x \cdot dx$

и) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

к) $\int \frac{4^x}{3+4^{2x}} dx$

л) $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$

м) $\int (x+1) \cdot e^{-x} dx$

н) $\int (x+1)^2 \cdot \ln x dx$

о) $\int \frac{3x+1}{x+2} dx$

п) $\int \frac{-2x^2+x+2}{x^3(x+2)} dx$

р) $\int \frac{dx}{2-2\sin x}$

с) $\int \frac{x+\sqrt{2+x}}{\sqrt[3]{2+x}} dx$

т) $\int \sin 2x \cdot \cos 4x dx$

у) $\int \sin^2 10x dx$

ф) $\int \sqrt{e^{4x}-1} dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$

б) $\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = -4x, \quad y = 32 - x^2$

б) длину дуги кривой:

$y = \ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:

$y = -x^2 + 1, \quad y = 0.$

Вариант 16.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int \left(4 - \frac{5}{x^2} + e^{2x} \right) dx$

б) $\int \frac{x^2}{(1+6x^3)^3} dx$

в) $\int \sqrt{4x+1} dx$

г) $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

д) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 5} dx$

е) $\int \frac{dx}{10x^2 - 1}$

ж) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

з) $\int \frac{5tg^2 4x}{\cos^2 2x} dx$

и) $\int ctg 7x \cdot dx$

к) $\int \frac{e^{2x}}{\cos e^{2x}} dx$

л) $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$

м) $\int (x-1) \cdot \ln x dx$

н) $\int (x-1) \cdot \cos \frac{x}{3} dx$

о) $\int \frac{4-5x}{1-x} dx$

п) $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)^2(x+1)} dx$

р) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

с) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-x} dx$

т) $\int \sin x \sin 3x dx$

у) $\int \cos^2 3x dx$

ф) $\int \sqrt{e^{5x}-1} dx$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$

б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = e.$$

б) длину дуги кривой:

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:

$$y = e^x, \quad y = 1, \quad x = 1.$$

Вариант 17.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int \left(4x^3 - \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x} \right) dx$

б) $\int \sin 2x \cdot (1 + \cos 2x)^4 dx$

в) $\int \frac{3^x}{2 + 3^{2x}} dx$

г) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x + 1)}$

д) $\int x^2 \cdot e^x dx$

е) $\int (x + 1) \cdot 3^x dx$

ж) $\int (3 + e^x)^2 dx$

з) $\int \frac{\frac{1}{4^x}}{x^2} dx$

и) $\int \operatorname{tg} 5x \cdot dx$

к) $\int (\cos x^2 + 1) \cdot x dx$

л) $\int \frac{dx}{2x + x \cdot \ln x}$

м) $\int \operatorname{arctg} 7x dx$

н) $\int x \cos 6x dx$

о) $\int \frac{x^2 - 2}{1 - x^2} dx$

п) $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x} dx$

р) $\int \cos^3 7x dx$

с) $\int \frac{\sqrt{x}}{1 - 6\sqrt{x}} dx$

т) $\int \sin 3x \cdot \cos x dx$

у) $\int \cos^4 x dx$

ф) $\int \sqrt{e^{4x} - 1} dx$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

б) $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = 4 - x^2, \quad y = 0.$

б) длину дуги кривой:

$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:

$y = x^2, \quad y = 2x.$

Вариант 18.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int \left(2 + \frac{5}{x^3} + 10\sqrt{x} \right) dx$

б) $\int \sqrt{3x+6} dx$

в) $\int \frac{x}{1+4x^2} dx$

г) $\int \frac{dx}{5x+4}$

д) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$

е) $\int x \cdot e^{2x^2+1} dx$

ж) $\int 4x \cdot \sin 5x^2 dx$

з) $\int (3 + \sin x) \cdot dx$

и) $\int \operatorname{tg} 2x \cdot dx$

к) $\int \frac{e^{4x}}{\cos^2 e^{4x}} dx$

л) $\int \sin \frac{x}{3} \cdot \cos^2 \frac{x}{3} dx$

м) $\int (x^2 + 1) \cdot \cos x dx$

н) $\int \operatorname{arctg} 4x \cdot dx$

о) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$

п) $\int \frac{x^3 - x - 2}{x^3(x-2)} dx$

р) $\int \frac{x+5}{2-x} dx$

с) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+5\sqrt{x}} dx$

т) $\int \sin 2x \cdot \cos x dx$

у) $\int \cos^3 \frac{x}{2} dx$

ф) $\int \sqrt{e^x - 1} dx$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_1^{\infty} \frac{1 + \ln x}{x} dx$

б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$

б) длину дуги кривой:

$y = 2\sqrt{x}, \quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{8}.$

в) Объем тела, полученного вращением вокруг оси Оу фигуры, ограниченной линиями :

$y = \frac{x^3}{3}, x = 2, x = 0, y = 0.$

Вариант 19.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int \left(2x + \frac{1}{x^2} - 4 \cos x \right) dx$	б) $\int \frac{x}{(5 + 2x^2)^3} dx$	в) $\int \sqrt{4x + 1} dx$
г) $\int \frac{x^2}{6x^3 + 1} \cdot dx$	д) $\int \frac{e^x}{3 + e^{2x}} dx$	е) $\int x^3 \cdot e^{-x^4} dx$
ж) $\int 2^x \cdot 3^x dx$	з) $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3}}{\sin^2 \frac{x}{3}} \cdot dx$	и) $\int \operatorname{tg} 6x \cdot dx$
к) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$	л) $\int (5 - 2 \cos x) \cdot dx$	м) $\int \operatorname{arctg} 2x \cdot dx$
н) $\int (x^2 + 1) \cdot \sin 2x dx$	о) $\int \frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3 (x^2 + 1)} dx$	п) $\int \frac{x^2 + 2}{1 - x^2} dx$
р) $\int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x}$	с) $\int \frac{\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} dx$	т) $\int \sin x \sin 4x dx$
у) $\int \sin^2 2x dx$	ф) $\int \sqrt{e^{7x} - 1} dx$	

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2}}$	б) $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = \sin 3x, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$$

б) длину дуги кривой:

$$y = e^x, \quad \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}.$$

в) Объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sin x, \quad y = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Вариант 20.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int \left(4x^3 + \frac{1}{x} - 1 \right) dx$

б) $\int \sqrt{4x+3} dx$

в) $\int \frac{x}{1+3x^2} dx$

г) $\int \frac{dx}{2x+3}$

д) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$

е) $\int \frac{5^x}{1+5^{2x}} dx$

ж) $\int x \cdot \sin 4x^2 dx$

з) $\int \left(1 - \cos \frac{x}{5} \right) \cdot dx$

и) $\int \operatorname{tg} 3x \cdot dx$

к) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x-1)}$

л) $\int \frac{x}{16-x^4} dx$

м) $\int x e^{-2x} dx$

н) $\int (x^2 + 3) \cdot \cos 2x dx$

о) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 1}$

п) $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} dx$

р) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

с) $\int \frac{2 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} dx$

т) $\int \sin x \cdot \cos 5x dx$

у) $\int \cos^3 x dx$

ф) $\int \sqrt{e^{6x} + 1} dx$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$

б) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} 2x dx$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = \sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \frac{3}{2}.$

б) длину дуги кривой:

$y = \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:

$y = e^x, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0.$

Вариант 21.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{7}{x} + 3 \right) dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+6}};$

в) $\int \frac{dx}{(x+2)};$

г) $\int \frac{e^x}{e^x+7} dx;$

д) $\int \cos x \cdot (\sin^2 x + 1) dx;$

е) $\int 3^{-x+1} dx;$

ж) $\int \sin^2(x+7) dx;$

з) $\int (\sin(7x-5) - \sqrt{x}) dx;$

и) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}};$

к) $\int \sin(e^x - 7) \cdot e^x dx;$

л) $\int \frac{dx}{e^{8x-9}};$

м) $\int \sin 3x \cdot x^2 dx;$

н) $\int x \cdot \ln x dx;$

о) $\int \frac{3x^2 - 9}{27x - 3x^3} dx;$

п) $\int \frac{3x+2}{3x-2} dx;$

р) $\int \frac{dx}{\sin x};$

с) $\int \frac{\sqrt[3]{x} \cdot dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}};$

т) $\int \sin 7x \cdot \sin 5x dx;$

у) $\int \sin x \cos x dx;$

ф) $\int (2^x - 3^{2x})^2 dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx;$

б) $\int_{-3}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3 + 2$, $y = x - 2$, $x = 2$;

б) длину дуги кривой $y = \ln x$, $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{12}{5}$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $x^2 - y = 0$, $y = 0$, $x = -1$.

Вариант 22.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int (3x+5)^7 dx;$	б) $\int 3\sin(7x-1) dx;$	в) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx;$
г) $\int \frac{5x}{(7x^2+3)^4} dx;$	д) $\int \frac{x^3}{8-x^4} dx;$	е) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx;$
ж) $\int (e^x + x)^2 dx;$	з) $\int \frac{7}{x-8} dx;$	и) $\int \ln 2x dx;$
к) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4}};$	л) $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos^2 3x} dx;$	м) $\int \frac{dx}{x^2-2x+1};$
н) $\int e^x \cdot x^2 \cdot dx;$	о) $\int \frac{dx}{(x+2)(x-1)};$	п) $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx;$
р) $\int \frac{dx}{\sin 2x+3};$	с) $\int \frac{\sqrt{x-7}+7}{\sqrt[3]{x-7}} dx;$	т) $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx;$
у) $\int \sin^2 3x dx;$	ф) $\int \frac{2-3x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$	

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x};$	б) $\int_4^5 \frac{dx}{(x-4)^2}.$

Задание 3: Вычислить:

- а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3x^2 - 4y = 0$, $2x - 4y + 1 = 0$;
- б) длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ от точки $x_1 = 1$ до точки $x_2 = 2$;
- в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиком функции $x^2 + y = 0$ и прямыми $y = -1$, $x = 0$.

Вариант 23.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \left(\frac{x}{7} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 3 \right) dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{7x-1}};$

в) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{3x^2-1}} dx;$

г) $\int \frac{x-3}{x^2+5} dx;$

д) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + e^{-2x}} dx;$

е) $\int 8^{x^2} \cdot x dx;$

ж) $\int 2^{-4x} dx;$

з) $\int (2 - 5^{3x}) dx;$

и) $\int \sin(e^x) \cdot e^x dx;$

к) $\int \frac{x^3}{x^4+7} dx;$

л) $\int \sin x \cdot e^{\cos x} dx;$

м) $\int 2^x (4x+6) dx;$

н) $\int \sin x \cdot x^3 dx;$

о) $\int \frac{x^2-7}{x^3-8} dx;$

п) $\int \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} dx ;$

р) $\int \cos^3 x dx;$

с) $\int \frac{\sqrt[4]{2x-7} \cdot dx}{1-\sqrt{2x-7}} ;$

т) $\int \sin 8x \cdot \sin 2x dx ;$

у) $\int \sin^4 x dx;$

ф) $\int (2^x + 7)^3 dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5};$

б) $\int_1^2 \frac{x \cdot dx}{x-1}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $4y + x^2 = 0, 4y - 2x + 1 = 0;$

б) длину дуги кривой $y = \sqrt{1-x^2} - \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{7}{9};$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $y = 1 + 8x^3, y = 1, x = -\frac{1}{2}.$

Вариант 24.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int (x^3 + 1) dx;$	б) $\int \frac{x^3}{16 - x^8} dx;$	в) $\int \frac{3x - 1}{x^2 + 6x + 10} dx ;$
г) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{9 - e^{6x}}} dx;$	д) $\int \cos(3 + 2x) dx;$	е) $\int (x + 1) \cdot \sin^2(x + 2x) dx$;
ж) $\int \cos 3x \cdot e^{\sin 3x} dx;$	з) $\int \frac{\sin 3x}{\sin(\cos 3x)} dx;$	и) $\int \frac{3x - 2}{\sqrt{x^2 + 13x + 43}} dx;$
к) $\int \frac{x + 7}{x^3} dx;$	л) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x - 3}} ;$	м) $\int e^{2x} \cdot x^2 dx;$
н) $\int \ln x dx;$	о) $\int \frac{dx}{(x - 3)(x + 1)} ;$	п) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 1} dx;$
р) $\int \frac{x}{\cos(x^2 + 5)} dx;$	с) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx;$	т) $\int \sin 7x \sin 3x dx;$
у) $\int \sin^2 4x dx;$	ф) $\int \frac{\sin 4x}{\cos 4x} dx.$	

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(3x - 1)^3} ;$	б) $\int_{-\pi/2}^0 \operatorname{tg} x \cdot dx .$

Задание 3: Вычислить:

- а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $2x + 3y^2 = 0$, $2x + 2y + 1 = 0$;
- б) длину дуги кривой $y = \ln \frac{5x}{2}$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$;
- в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $y = -4x^3$, $y = -4$, $x = 0$.

Вариант 25.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 7 \right) dx;$

б) $\int \frac{3^x}{1+3^{2x}} dx;$

в) $\int \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x^2} dx;$

г) $\int \frac{x^4}{9-x^{10}} dx;$

д) $\int e^{\operatorname{ctg} 2x} \frac{dx}{\sin^2(2x)};$

е) $\int \operatorname{tg}(3-x) dx;$

ж) $\int \frac{x \cdot dx}{\cos^2(x^2+5)};$

з) $\int \frac{\arcsin^3 4x}{\sqrt{1-16x^2}} dx;$

и) $\int \frac{\operatorname{ctg}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} dx;$

к) $\int \frac{x^2 \cdot dx}{\sin^2(x^3+1)};$

л) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-7}};$

м) $\int e^{7x} \cdot (2x-3) dx;$

н) $\int (x-1) \cdot \sin x dx;$

о) $\int \frac{dx}{x^2-x-2};$

п) $\int \frac{3x^2-2x-2}{x^2+x+2} dx;$

р) $\int \frac{\sin 3x}{\sin 3x + \cos 3x} dx;$

с) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{1+\sqrt{x-1}} dx;$

т) $\int \cos x \cos 4x dx;$

у) $\int \cos^2 x dx;$

ф) $\int (x^2+x) \cdot \sin 7x dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{9x^2+1};$

б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3x^2-4y=0$, $2x+4y-1=0$;

б) длину дуги кривой $y = -\ln \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной кубической параболой $y = -4x^3$ и прямыми $x=1$, $y=0$.

Вариант 26.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int (2^x + e^x + x^2) dx;$	б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{7+x^3}} dx;$	в) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x} + 5) dx;$
г) $\int \frac{dx}{7-x};$	д) $\int 3^{\sin x} \cdot \cos x dx;$	е) $\int e^{2x+2} dx;$
ж) $\int 3^x \cdot \cos 3^x dx;$	з) $\int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 7x}\right) dx;$	и) $\int \operatorname{ctg}(3x) dx;$
к) $\int \frac{2^x \cdot dx}{\sin^2(2^x)};$	л) $\int 2^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx;$	м) $\int (x^2 - 1) \cdot \ln x dx;$
н) $\int (x-1) \cdot \sin(x-1) dx;$	о) $\int \frac{3-2x}{(1+x)(2+x)} dx ;$	п) $\int \frac{x^2 + x + 3}{x^2 + 3x + 7} dx;$
р) $\int \cos^3(x-8) dx;$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + 3\sqrt{x+1}} ;$	т) $\int \cos 7x \cos 3x dx;$
у) $\int \cos^2 2x \cdot \sin^2 2x dx;$	ф) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+12x+9}} dx .$	

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{+\infty} e^{-5x} dx ;$	б) $\int_0^1 \frac{3x+2}{\sqrt[3]{x}} dx .$

Задание 3: Вычислить:

- а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3x^2 + 4y = 0$, $2x + 4y + 1 = 0$;
- б) длину дуги кривой $y = e^x + 4$, $\ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$;
- в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной параболой $y = x^2 + 2$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$.

Вариант 27.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \left(\frac{3x+7}{\sqrt{x}} \right) dx;$

б) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 4^{\sqrt{x}} dx;$

в) $\int \frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x} dx;$

г) $\int \frac{(x^2+1) \cdot dx}{\sin(x^3+3x)};$

д) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}+15) dx;$

е) $\int \frac{16x+3\cos 3x}{8x^2+\sin 3x} dx ;$

ж) $\int \frac{x^3}{9-x^8} dx;$

з) $\int \left(3 + \sin \frac{7x}{8} \right) dx;$

и) $\int \frac{dx}{x \cdot (\ln^2 x + 4)};$

к) $\int e^{\operatorname{tg} 2x} \frac{dx}{\cos^2(2x)};$

л) $\int \frac{3^x}{9+9^x} dx;$

м) $\int x \cdot \operatorname{arctg}(x-1) dx;$

н) $\int (x+8) \cdot \sin 3x dx;$

о) $\int \frac{x+5}{(4+x)(3+x)} dx ;$

п) $\int \frac{x^3+4}{x^2+x+4} dx;$

р) $\int \frac{3}{3-\sin 3x} dx;$

с) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} ;$

т) $\int \cos x \cdot \sin 8x dx;$

у) $\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x dx;$

ф) $\int \frac{(1-\sin 2x)^2}{\cos^2 x} dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+1} ;$

б) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}} .$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $2x-3y^2=0$, $2x+2y-1=0$;

б) длину дуги кривой $y = 2 + \sqrt{x-x^2}$, $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $y = 1+8x^3$, $y = 9$, $x = 0$.

Вариант 28.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3 \right) dx;$

б) $\int \frac{\cos x \cdot dx}{9 - \sin^2 x};$

в) $\int \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x^2} dx;$

г) $\int \frac{(x+1) \cdot dx}{\cos^2(x^2 + 2x)};$

д) $\int \frac{2^{\ln x}}{x} dx;$

е) $\int 3^{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x};$

ж) $\int x^3 \cdot \sin(x^4 + 2) dx;$

з) $\int \left(1 - \cos \frac{x-7}{8} \right) dx;$

и) $\int \frac{\cos(2x-3)}{\sin(2x-3)} dx;$

к) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 4} dx;$

л) $\int \frac{x^2}{27 + x^3} dx;$

м) $\int (x^2 + 3)e^{5x} dx;$

н) $\int e^x \cdot \sin x dx;$

о) $\int \frac{3x^2 + 3}{x^3 + 3x - 4} dx ;$

п) $\int \frac{x^2 + x + 7}{x^2 - 2x - 3} dx;$

р) $\int \frac{\cos 4x - 3}{\sin(6x + 5)} dx;$

с) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(5x+1)^3} + 2\sqrt{5x+1}} ;$

т) $\int \sin 2x \cdot \sin 4x dx;$

у) $\int \sin^2(3x - 4) dx;$

ф) $\int \frac{x - 3 \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{16x^2 + 1} ;$

б) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{(1+x)^5}} .$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3x^2 - 2y = 0$, $2x - 2y + 1 = 0$;

б) длину дуги кривой $y = \ln(x^2 - 1)$, $2 \leq x \leq 3$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $x - y^2 = 0$, $y = 1$, $x = 0$.

Вариант 29.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \left(2 - 5 \cos x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx;$	б) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{3 - \ln^2 x}} dx;$	в) $\int \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{3}{x} dx;$
г) $\int e^x \cdot \operatorname{cose}^x dx;$	д) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x - 5}} dx;$	е) $\int \frac{\sin 3x \cdot \cos 3x}{5 + \sin^2 3x} dx;$
ж) $\int \operatorname{tg}(7 - 2x) dx;$	з) $\int \frac{x^4}{16 - x^{10}} dx;$	и) $\int 5^x \frac{dx}{\sin^2(5^x)};$
к) $\int \sqrt{2^x} \cdot \sqrt{7^x} \cdot dx;$	л) $\int \frac{x}{x^2 + 25} dx ;$	м) $\int \arccos(4x - 1) dx;$
н) $\int x \cdot \operatorname{arctg} 3x dx;$	о) $\int \frac{x + 3}{x^2 + 6x + 7} dx ;$	п) $\int \frac{x^3}{9 - x^2} dx ;$
р) $\int \frac{dx}{\cos(7x + 5) - 1};$	с) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx ;$	т) $\int \sin 13x \cos 3x dx;$
у) $\int \cos^4 3x dx;$	ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{64 - x^2}}.$	

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_{14}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}} ;$	б) $\int_{-5}^{-4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+5)^4}}.$

Задание 3: Вычислить:

- а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3y^2 + 4x = 0$, $4x + 2y + 1 = 0$;
- б) длину дуги кривой $y = \arccos x$, $0 \leq x \leq \frac{8}{9}$;
- в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $x - 2y^3 = 0$, $y = 0$, $x = 1$.

Вариант 30.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{7}{x^3} \right) dx;$	б) $\int x^2 \cdot \sin x^3 dx;$	в) $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt[3]{1-3x^2}} ;$
г) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{3-\ln x}} dx;$	д) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{4-e^{4x}}} dx;$	е) $\int e^{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x} ;$
ж) $\int (1+2x) \cdot \operatorname{ctg}(x^2+x) dx;$	з) $\int \frac{\sin(7-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx;$	и) $\int \sin(7x-1) dx;$
к) $\int \frac{1}{x^5} \cdot \sin \frac{1}{x^4} dx;$	л) $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{x-3}} ;$	м) $\int \cos 3x e^{5x-3} dx;$
н) $\int (x^2-x) \cdot e^{3x} dx;$	о) $\int \frac{dx}{x^2-x} ;$	п) $\int \frac{x^2+7x+3}{x^2-5x-1} dx;$
р) $\int \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x} dx;$	с) $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+3}} dx ;$	т) $\int \cos x \cos(3x+2) dx;$
у) $\int \cos^4(4x+7) dx;$	ф) $\int (2^x-3)^2 dx .$	

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{+\infty} e^{-3x} dx ;$

б) $\int_0^1 \frac{4x+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} dx .$

Задание 3: Вычислить:

- а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3x^2 - 2y = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$;
- б) длину дуги кривой $y = \frac{1}{2}e^x + 2$, $0 \leq x \leq 1$;
- в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $y + x^2 = 0$, $y = 0$, $x = 1$.

Лабораторная работа
Обыкновенные
дифференциальные уравнения

ТЕМА . Обыкновенные дифференциальные уравнения.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка.
2. Дифференциальные уравнения высших порядков.
3. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. - СПб.: Иван Федоров, 2003. - 287 с.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений: Учеб. для вузов. - 8-е изд., стер. - М.: Едиториал УРСС, 2004. - 486 с.
3. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие. - 7-е изд., доп. - СПб.: Лань, 2002. - 431 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т.- Изд. стер. –М.: Интеграл – Пресс. Т.1. -2001.- 415 с. Т.2.- 2002.- 544 с.

Решение типового варианта.

Задание 1. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

а) $(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0$.

Решение. Попробуем разделить переменные интегрирования. Для этого вынесем за скобки общий множитель: $y(x+1)dx + x(y+1)dy = 0$, разнесем слагаемые: $y(x+1)dx = -x(y+1)dy$; выражая $\frac{dy}{dx}$ из полученного уравнения

убедимся в том, что $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$ и, значит, наше уравнение является дифференциальным уравнением в разделяющихся переменных. Разделим переменные. $\left(\frac{1}{x} + 1\right)dx = -\left(\frac{1}{y} + 1\right)dy$.

Проинтегрируем получившееся выражение по соответствующим переменным:

$$\int \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx = -\int \left(\frac{1}{y} + 1\right)dy.$$

Получим $\ln|x| + x = -\ln|y| - y + \ln C$, $\Rightarrow \ln|xy| + \ln e^{x+y} = \ln C$.

Таким образом, мы убедились в том, что $xye^{x+y} = C$ - общий интеграл заданного уравнения.

Ответ: $xye^{x+y} = C$.

$$\text{б) } xy' = x \sin \frac{y}{x} + y.$$

Решение. Убедимся в том, что переменные разделить не удастся. Поэтому поделим обе части уравнения на x .

$y' = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$ - Убедимся в том, что производная $\frac{dy}{dx}$ в представленном уравнении зависит только от отношения $\frac{y}{x}$, то есть $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ и, значит, это однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Будем решать его с помощью соответствующей замены.

Введем новую переменную $\frac{y}{x} = U$; $y' = U'x + U$.

$$U'x + U = \sin U + U;$$

$$U'x = \sin U;$$

$$\frac{dU}{\sin U} = \frac{dx}{x}; \text{ проинтегрируем выражение}$$

$$\int \frac{dU}{\sin U} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{U}{2} \right| = \ln |x| + \ln C;$$

$$\left| \operatorname{tg} \frac{U}{2} \right| = |x|C;$$

$$\left| \operatorname{tg} \frac{y}{2x} \right| = |x|C;$$

$y = 2x \cdot \operatorname{arctg} xC$ - общее решение уравнения.

Ответ: $y = 2x \cdot \operatorname{arctg} xC$.

$$\text{в) } y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение. Начинаем вновь с проверки не разделятся ли переменные интегрирования. Убеждаемся, что это не так, и, кроме того, однородным оно тоже не является. Это линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка, так как имеет структуру вида: $P(x)y' + Q(x)y = F(x)$. Будем решать его с помощью стандартной в этом случае, замены: $y = UV$; $\Rightarrow y' = U'V + V'U$.

$$U'V + V'U + UV \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x};$$

$$U'V + U(V' + V \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x};$$

$$V' + V \operatorname{tg} x = 0;$$

$$\frac{dV}{V} = -\operatorname{tg} x dx;$$

$$\ln |V| = \ln |\cos x|;$$

$$|V| = |\cos x|;$$

$$U' \cos x = \frac{1}{\cos x};$$

$$dU = \frac{1}{\cos^2 x} dx;$$

$$U = \operatorname{tg} x + C;$$

$y = \cos x(\operatorname{tg} x + C)$ - общее решение уравнения.

Ответ: $y = \cos x(\operatorname{tg} x + C)$.

Задание 2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

Решение. $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$ - неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами 2-ого порядка. Решение будем искать в виде суммы решений: общего решения однородного уравнения $\bar{y}$ и частного решения неоднородного уравнения y^* , которое будем искать по виду правой части. Начнем с отыскания $\bar{y}$.

$y'' + 2y' - 3 = 0$ Составим характеристическое уравнение:
 $k^2 + 2k - 3 = 0$; $k_1 = 1$; $k_2 = -3$.

Следовательно, общее решение однородного уравнения: $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$.

y^* будем искать в виде $A \cdot e^{2x}$. y^* - частное решение уравнения, поэтому оно превращает его в верное числовое тождество. Подставим его в уравнение и вычислим A . $(y^*)' = 2Ae^{2x}$; $(y^*)'' = 4Ae^{2x}$.

$4Ae^{2x} + 4Ae^{2x} - 3Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow A = 0,2$. Значит $y^* = 0,2e^{2x}$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения $y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + 0,2e^{2x}$. Для вычисления частного решения определим значения констант исходя из начальных условий:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + 0,2e^{2x}; y' = C_1 e^x - 3C_2 e^{-3x} + 0,4e^{2x}; y(0) = 1; y'(0) = 1;$$

$$1 = C_1 e^0 + C_2 e^{-3 \cdot 0} + 0,2e^{2 \cdot 0}; 1 = C_1 e^0 - 3C_2 e^{-3 \cdot 0} + 0,4e^{2 \cdot 0};$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + 0,2 \\ 1 = C_1 - 3C_2 + 0,4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0,75 \\ C_2 = 0,05 \end{cases}$$

Ответ: $y = 0,75e^x + 0,05e^{-3x} + 0,2e^{2x}$.

Задание 3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$$

Решение. Сведем предложенную систему к одному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами второго порядка. Для этого продифференцируем первое уравнение системы по t :

$x'' = -7x' + y'$ и заменим y' воспользовавшись для этого вторым уравнением системы:

$x'' = -7x' - 2x - 5y$, $y = x' + 7x$. Окончательно $x'' = -7x' - 2x - 5(x' + 7x)$.

$x'' + 12x' + 37x = 0$ - однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 12k + 27 = 0$; $k_{1,2} = -6 \pm i$.

Следовательно, решение: $x(t) = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$. Из первого уравнения $y = x' + 7x$, поэтому

$$y = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + 7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t);$$

$$y = e^{-6t}(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t)).$$

Ответ: $x(t) = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$; $y = e^{-6t}(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t))$.

Задание 4. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(0,1)$, для которой треугольник, образованный осью Oy , касательной к кривой в произвольной её точке и радиус-вектором точки касания, равнобедренный (причем основанием его служит отрезок касательной от точки касания до оси Oy).

Решение. Пусть $f(x)$ искомое уравнение кривой. Проведем касательную MN в произвольной точке $M(x,y)$ кривой до пересечения с осью Oy в точке N . Согласно условию, должно выполняться равенство $|ON| = |OM|$, но $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $|ON|$ найдем из уравнения $Y - y = y'(X - x)$, полагая $X=0$, то есть $y = |ON| = y - xy'$.

Итак, приходим к однородному уравнению $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$.

Полагая $y = tx$ ($y' = t'x + t$), получим $\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{dx}{x}$ или $\ln(t + \sqrt{1+t^2}) = \ln C - \ln x$,

откуда $x^2 = C(C - 2y)$ - данное решение представляет собой семейство парабол, осью которых является ось Oy .

Определим значение константы C исходя из того, что кривая проходит через точку $A(0,1)$. Подставляя координаты заданной точки в вышенайденное общее решение, получим $0 = C(C - 2)$; из двух значений $C=0$ и $C=2$ нас устраивает лишь второе, так как при $C=0$ парабола оказывается вырожденной. Итак, искомое решение $x^2 = 2(2 - 2y) = 4(1 - y)$, или $y = 1 - x^2 / 4$.

Ответ: $y = 1 - x^2 / 4$.

Задание 5.

а) Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = x^2$.

Решение. Так как производная в данном случае является функцией, зависящей только от переменной x , то его решение может быть получено в результате последовательного интегрирования:

$$y'' = x^2 \Rightarrow y' = x^3 / 3 + C_1 \Rightarrow y = x^4 / 12 + C_1 x + C_2.$$

Ответ. $y = x^4 / 12 + C_1 x + C_2$.

б) Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' + y' = (y')^2$.

Решение. Поскольку данное уравнение не содержит в явном виде переменной y , то замена $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$ позволяет преобразовать его в уравнение первого порядка с разделяющимися переменными $xp' + p = p^2$.

$$x \frac{dp}{dx} = p^2 - p, \quad \frac{dp}{p^2 - p} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dp}{p^2 - p} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln \left| \frac{p - 0,5 - 0,5}{p - 0,5 + 0,5} \right| = \ln x + \ln C_1 = \ln C_1 x;$$

$$p(1 - C_1 x) = 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - C_1 x}, \quad y = -\frac{1}{C_1} \ln \left| x - \frac{1}{C_1} \right| + C_2. \text{ Учтя, что } C_1 \text{ — произвольная}$$

постоянная, то полученное решение можно упростить: $y = C_1 \ln |x + C_1| + C_2$.

Ответ. $y = C_1 \ln |x + C_1| + C_2$.

в) Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = (y')^2$.

Решение. Так как решаемое уравнение не содержит явно переменной x , будем получать его решение с помощью введения новой переменной $y' = p(y)$, откуда $y'' = p'_y p$, так как в этом случае мы вычисляем производную сложной функции.

Заданное уравнение в результате такой замены будет иметь вид: $p'_y p = p^2$.

Решение $p = 0$ является особым, и, делая обратную замену в этой ситуации, запишем: $y' = 0 \Rightarrow y = C = \text{const}$. Оставшееся уравнение $p'_y = p$ является

уравнением в разделяющихся переменных: $p'_y = p \Rightarrow \frac{dp}{dy} = p \Rightarrow \frac{dp}{p} = dy$.

Интегрируя последнее равенство, получим $\ln p = y + C_1$. Выразим теперь функцию p : $p = e^{y+C_1} = e^y e^{C_1} = e^y C_1$. Делая вновь обратную замену $y' = p(y)$,

получим: $y' = e^y C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^y C_1$. В данном уравнении можно разделить

переменные: $\frac{dy}{dx} = e^y C_1 \Rightarrow e^{-y} dy = C_1 dx$. Интегрируя последнее выражение, получим

$-e^{-y} = Cx + C_1$. Получившаяся неявная функция также является решением заданного дифференциального уравнения.

Ответ. $y = C = \text{const}$; $e^{-y} = C_1 x + C_2$.

Задание 6. Решить уравнение $y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$.

Решение. Правая часть уравнения представляет собой дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Выпишем общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - y' = 0$. Так как корнями соответствующего характеристического уравнения $k^2 - k = 0$ являются числа $k = 0, k = 1$, то общее решение данного уравнения, как известно, имеет вид

$\bar{y} = C_1 e^x + C_2$. Правая часть исходного уравнения $\frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$ не позволяет найти

частное решение y^* неоднородного уравнения методом подбора (или неопределенных коэффициентов) поэтому воспользуемся для его нахождения методом вариации произвольных постоянных. Поэтому будем искать частное решение y^* в виде: $y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, предполагая, что здесь $y_1 = 1$ и $y_2 = e^x$ (мы воспользовались видом найденной фундаментальной системы решений однородного уравнения), а $C_1(x)$ и $C_2(x)$ решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases} \text{ таким образом } \begin{cases} C_1' \cdot 1 + C_2' e^x = 0 \\ C_1' \cdot 0 + C_2' e^x = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} \end{cases}.$$

Из второго уравнения выпишем $C_2'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. Проинтегрировав, получим

$C_2(x) = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \arcsin e^x$ (постоянную интегрирования будем полагать равной нулю). Теперь, подставляя значение $C_2(x)$ в первое уравнение системы, получим дифференциальное уравнение для функции $C_1(x)$:

$$C_1'(x) = -C_2'(x) \cdot e^x = -\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}. \quad \text{Вновь интегрируя, запишем:}$$

$$C_1(x) = -\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \sqrt{1-e^{2x}}.$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид $y^* = C_1(x) \cdot 1 + C_2(x) \cdot e^x = \sqrt{1-e^{2x}} + e^x \cdot \arcsin e^x$, выпишем общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 + \sqrt{1-e^{2x}} + e^x \cdot \arcsin e^x$$

Ответ. $y = C_1 e^x + C_2 + \sqrt{1-e^{2x}} + e^x \cdot \arcsin e^x$.

Вариант 1.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$;	в) $2xyy' = (y')^2 - 1$;
б) $xy' - y = x^2$;	г) $xy' + y = 3$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 4y' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}.$$

4. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(5;2)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке в 3 раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей точку A с началом координат.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \sin x$

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - y = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

Вариант 2.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $xy' = y \ln(y/x)$;	в) $x^3 y' + x^2 y = 1$;
б) $ydx - 2x dy = 2y^4 dy$;	г) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}.$$

4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(10, 10)$ и, обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси абсцисс касательной, проведенной в любой точке кривой, равен кубу абсциссы точки касания.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \frac{1}{x}$

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x}$.

Вариант 3.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$;	в) $y'x \ln x = y$;

$$\text{б) } xy' + y = y^2;$$

$$\text{г) } xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 6y' - 7y = x^2 - x$; $y(0) = 1, y'(0) = 1$.
3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 3y \end{cases}.$$
4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(1, 4)$ и, обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен удвоенной абсциссе точки касания.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = y'e^y$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + y = \operatorname{ctg}^2 x$.

Вариант 4.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$$\text{а) } xy' + y = 5;$$

$$\text{в) } y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y};$$

$$\text{б) } y' - y(1 + x) = x;$$

$$\text{г) } x(y' - y) = e^x.$$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 4y' = e^{-2x}$; $y(0) = 1, y'(0) = -2$.
3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}.$$
4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $B(3, 4)$ и, обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен удвоенному модулю радиус-вектора точки касания.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.

Вариант 5.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $xy' + xe^{y/x} - y = 0$;	в) $(1 + x^2)y' = 2xy$;
б) $dy + ydx = e^{-x}dx$;	г) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 4y = x^2 - 3$; $y(0) = 2, y'(0) = -1$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}.$$

4. В силу закона Ньютона скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Если температура воздуха равна 20° и тело в течение часа охлаждается от 100° до 30° , то через сколько минут (с момента начала охлаждения) его температура понизится до 60° ?

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \frac{6}{x^3}$

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

Вариант 6.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $x^2y' - y^2 = x^2$;	в) $(x^2 + 2x + 1)y' - (x + 1)y = x - 1$;
б) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;	г) $y' = x^2 + 2x - 2y$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 4y' + 4y = e^{2x}$; $y(0) = -1$, $y'(0) = -1$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}.$$

4. Определить путь, Тело массой $m=1$ движется прямолинейно. На него действует сила, пропорциональная времени, протекшему от момента, когда $V=0$ (коэффициент пропорциональности 2). Кроме того, тело испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости (коэффициент пропорциональности 3). Найти скорость в момент $t=3$ сек.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $2xy'y'' = y'^2 - 1$
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + 4y = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Вариант 7.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $xy' = y \ln(y/x)$;	в) $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$;
б) $(1 + e^x)yy' = e^x$;	г) $4x^2 - xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + y = \cos 3x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 4$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 5y \\ \dot{y} = -4x - 4y \end{cases}.$$

4. Найти уравнение кривой, проходящей через т. $A(9, 9)$ и, обладающей тем свойством, что угловой коэффициент любой касательной к ней вдвое меньше углового коэффициента радиус-вектора точки касания.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y'tgx = \sin 2x$
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - y' = e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}}$.

Вариант 8.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x + 2y)dx + xdy = 0$;	в) $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$;
б) $ydx - 2xdy = 2y^4 dy$;	г) $xy' - 2\sqrt{x^3 y} = y$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$.
3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4y + x \end{cases}$$
4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(2, 0)$ и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ОУ любой касательной, равен удвоенной абсциссе точки касания.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $(y')^2 + 2yy'' = 0$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + y' = \cos^2 x$.

Вариант 9.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$;	в) $2xy' - y = 3x^2$;
б) $xy' = \sqrt{y^2 - x^2} + y$;	г) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$, $y(0) = \frac{4}{3}$, $y'(0) = \frac{1}{27}$.
3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = 2x - 4y \end{cases}$$
4. Тело массой $m=1$ движется прямолинейно. На него действует сила, пропорциональная времени, протекшему от момента, когда $V=0$ (коэффициент пропорциональности 2). Кроме того, тело испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости (коэффициент пропорциональности 3). Найти скорость в момент $t=3$ сек.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $(1 - x^2)y'' = xy'$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + 3y = x \cdot \sin^2 x$.

Вариант 10.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(1 - x^2)y' = xy$;	в) $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$;
б) $y'x + y = x + 1$;	г) $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.
3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 4x - 3y \end{cases}$$
4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $B(3, 4)$ и, обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен удвоенному модулю радиус-вектора точки касания.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $1 + (y')^2 + yy'' = 0$
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + y = ctgx$.

Вариант 11.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y' \cos x = (y + 1) \sin x$;	в) $x(y' - y) = e^x$;
б) $y'x - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$;	г) $xy' + 2x^2 \sqrt{y} = 4y$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
- $$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = -3x - 4y \end{cases}$$
4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(4, 4)$ и, обладающей тем свойством, что отрезок любой касательной, заключенный между точкой касания и осью абсцисс, делится осью ординат пополам.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' \tan x = \sin 2x$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - 6y' = \tan x$.

Вариант 12.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $\sin xy' = y \cos x + 2 \cos x$;	в) $xy' + y = -xy^2$;
б) $y^2 + x^2 y' = xy y'$;	г) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 9y' = 6e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
- $$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 2y - x \end{cases}$$
4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(9,9)$ и, обладающей тем свойством, что угловой коэффициент любой касательной к ней вдвое меньше углового коэффициента радиус-вектора точки касания.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' + 2y' = x^3$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.

Вариант 13.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$;	в) $2xyy' = (y')^2 - 1$;
б) $xy' - y = x^2$;	г) $xy' + y = 3$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + y = 2\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
- $$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y \\ \dot{y} = x \end{cases}.$$

4. Скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству. Найти зависимость массы X радия от времени t , если известно, что по истечении 1600 лет остается половина первоначального количества, равного 2.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y'tgx = \sin x$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

Вариант 14.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$;	в) $y'x \ln x = y$;
б) $xy' + y = y^2$;	г) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
- $$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 4y - 2x \end{cases}.$$

4. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости. Найти угловую скорость диска через 3 минуты после начала вращения, если известно, что диск, начав вращаться со скоростью 200 оборотов в минуту, по истечении одной минуты, вращается со скоростью 120 оборотов в минуту.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $2yy'' + (y')^3 + (y')^4 = 0$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - 2y = 4x^2e^{x^2}$.

Вариант 15.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $xy' + y = 5$;	в) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$;
б) $y' - y(1+x) = x$;	г) $x(y' - y) = e^x$.

- Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
- Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 8y - x \\ \dot{y} = y + x \end{cases}.$$
- Найти давление P воздуха на высоте $h = 1000$ м, если известно, что давление воздуха равно 1 кг на 1 см^2 над уровнем моря ($h = 0$) и 0,92 кг на 1 см^2 на высоте $h = 500$ м.
- Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + (1/x)y' = x^2$.
- Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x}$.

Вариант 16.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $x^2 y' - y^2 = x^2$;	в) $(x^2 + 2x + 1)y' - (x + 1)y = x - 1$;
б) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;	г) $y' = x^2 + 2x - 2y$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + y' - 2y = \cos x - 3 \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
- $$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 5y \\ \dot{y} = -4x - 4y \end{cases}$$
4. Катер движется в спокойной воде со скоростью $V_0 = 10$ км/час. На полном ходу его мотор был выключен, и, через 2 мин, скорость катера уменьшилась до $V_1 = 0,5$ км/час. Найти скорость, с которой двигался катер через 40 секунд после выключения мотора, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения катера.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $(1 + y)y'' - 5(y')^2 = 0$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$.

Вариант 17.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $4(x^2y + y)dy + \sqrt{5 + y^2}dx = 0;$	в) $xy' + y\left(\ln \frac{y}{x} - 1\right) = 0;$
б) $ydx - 2xdy = 2y^4dy;$	г) $x^2y' - y^2 = x^2.$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
- $$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = 2x - 4y \end{cases}$$
4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(3,1)$ и, обладающей тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью ОХ делится пополам в точке пересечения с осью ОУ.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Вариант 18.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y' = e^{x^2} x(1 + y^2);$	в) $x'y + x = 4y^3 + 3y^2;$
б) $y - xy' = x \sec \frac{y}{x};$	г) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$, $y(0) = 4/3$, $y'(0) = 1/27$.
3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
- $$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4y + x \end{cases}$$
4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $B(1, 0)$ и, обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый касательной на оси ОУ, равен радиус-вектору точки касания.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $3yy'' + (y')^2 = 0$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

Вариант 19.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $xy' = y \ln(y/x)$;	в) $x^3 y' + x^2 y = 1$;
б) $ydx - 2x dy = 2y^4 dy$;	г) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 4y = e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
- $$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$$
4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $B(1,1)$ и, обладающей тем свойством, что угловой коэффициент касательной в любой точке кривой вдвое больше углового коэффициента радиус-вектора точки касания.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \cos 3x$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + y' = \frac{1}{\sin x}$.

Вариант 20.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$;	в) $2xyy' = (y')^2 - 1$;
б) $xy' - y = x^2$;	г) $xy' + y = 3$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
- $$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 4x - 3y \end{cases}$$
4. Найти уравнение кривой, проходящей через т. $A(1, 2)$ и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен абсциссе точки касания.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \frac{1}{x+2}$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - 2y' + y = x^{-1}e^x$.

Вариант 21.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $xy' + y = 5$;	в) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$;
б) $y' - y(1+x) = x$;	г) $x(y' - y) = e^x$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}.$$

4. Тело массой $m=1$ движется прямолинейно. На него действует сила, пропорциональная времени, прошедшему от момента, когда $V=0$ (коэффициент пропорциональности 2). Кроме того, тело испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости (коэффициент пропорциональности 3). Найти скорость в момент $t=2$ сек.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = y'e^y$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}$.

Вариант 22.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$;	в) $2xy' - y = 3x^2$;
б) $xy' = \sqrt{y^2 - x^2} + y$;	г) $xy' + y = 3$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = -3x - 4y \end{cases}.$$

4. Найти уравнение кривой, проходящей через т. $A(-1, -1)$ и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси абсцисс касательной,

проведенной в любой точке кривой, равен квадрату абсциссы точки касания.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \frac{1}{\sin^2 x}$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}}$.

Вариант 23.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x + 2y)dx + xdy = 0$;	в) $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$;
б) $ydx - 2xdy = 2y^4 dy$;	г) $xy' - 2\sqrt{x^3 y} = y$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 2y - x \end{cases}$$

4. Материальная точка массой $m = 1$ без начальной скорости ($V_0 = 0$) медленно погружается в жидкость. Найти путь, пройденный точкой, за время $t = 1$ сек, считая, что при медленном погружении сила сопротивления жидкости пропорциональна скорости погружения (коэффициент пропорциональности равен 2).

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \frac{4}{x^3}$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - 3y' = \frac{e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$.

Вариант 24.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$;	в) $y'x \ln x = y$;
б) $xy' + y = y^2$;	г) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 4y' = 6x^2 + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

4. На тело массой $m=1$, движущееся прямолинейно, действует сила, пропорциональная квадрату времени (коэффициент пропорциональности 3). Кроме того, тело испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости (коэффициент пропорциональности 1). Найти зависимость пути от времени.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $2xy'y'' = y'^2 - 1$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + 2e^x}$.

Вариант 25.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y' = e^{x^2} x(1 + y^2)$;	в) $x'y + x = 4y^3 + 3y^2$;
б) $y - xy' = x \sec \frac{y}{x}$;	г) $x^2 y' - y^2 = x^2$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 2y' + y = 16e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 4y - 2x \end{cases}$$
4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(17, 17)$ и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси OX касательной, проведенной в любой точке кривой, равен кубу абсциссы точки касания.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y'tgx = \sin 2x$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - y = \frac{1}{1 + 2e^x}$.

Вариант 26.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $4(x^2 y + y)dy + \sqrt{5 + y^2} dx = 0$;	в) $xy' + y\left(\ln \frac{y}{x} - 1\right) = 0$;
б) $ydx - 2x dy = 2y^4 dy$;	г) $x^2 y' - y^2 = x^2$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.
3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
- $$\begin{cases} \dot{x} = 8y - x \\ \dot{y} = y + x \end{cases}.$$
4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $B(1, 3)$ и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ОУ любой касательной, равен удвоенной абсциссе точки касания.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $(y')^2 + 2yy'' = 0$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}$.

Вариант 27.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y' = e^{x^2} x(1 + y^2)$;	в) $x'y + x = 4y^3 + 3y^2$;
б) $y - xy' = x \sec \frac{y}{x}$;	г) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.
3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
- $$\begin{cases} \dot{x} = 3y + 6x \\ \dot{y} = -5y - 8x \end{cases}.$$
4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(2, 0)$ и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ОУ любой касательной, равен удвоенной абсциссе точки касания.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $(1 - x^2)y'' = xy'$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Вариант 28.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x + 2y)dx + xdy = 0$;	в) $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$;
б) $ydx - 2xdy = 2y^4dy$;	г) $xy' - 2\sqrt{x^3y} = y$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
- $$\begin{cases} \dot{x} = y + 3x \\ \dot{y} = y + 8x \end{cases}$$

4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $B(9, 1)$ и обладающей тем свойством, что отрезок любой касательной, заключенный между точкой касания и осью OX , делится пополам осью OY .

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $1 + (y')^2 + yy'' = 0$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}$.

Вариант 29.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $xy' = y \ln(y/x)$;	в) $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$;
б) $(1 + e^x)yy' = e^x$;	г) $4x^2 - xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + y = \cos 3x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 4$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
- $$\begin{cases} \dot{x} = -5y - x \\ \dot{y} = -3y - 7x \end{cases}$$

4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $B(16, 1)$ и обладающей тем свойством, что угловой коэффициент любой касательной вдвое меньше углового коэффициента радиус-вектора точки касания.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - 3y' = \frac{e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$.

Вариант 30.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $x^2 y' - y^2 = x^2$;	в) $(x^2 + 2x + 1)y' - (x + 1)y = x - 1$;
б) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;	г) $y' = x^2 + 2x - 2y$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + y = 2\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 5y - 7x \\ \dot{y} = -8y + 4x \end{cases}$$

4. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $V_0 = 9$ км/час. На полном ходу ее мотор был выключен и через 20 секунд скорость лодки уменьшилась до 4,5 км/час. Определить путь, пройденный лодкой за 50 секунд (с момента выключения мотора).

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' + 2y' = x^3$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - y = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

Контрольная работа № 10

Ряды

Лабораторная работа Ряды.

4. Числовые ряды.
5. Функциональные ряды.
6. Степенные ряды.
7. Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям.
8. Ряды Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб. для вузов: в 3 т. - 5-е изд., стер. - М.: Дрофа. - (Высшее образование. Современный учебник). т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. - 2003. - 509 с.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т. - Изд. стер. - М.: Интеграл – Пресс. Т.1. - 2001. - 415 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Учеб. для вузов: в 3-х томах. - 8-е изд. - М.: Физматлит. т.1 - 2001. - 697 с.
9. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. - 22-е изд., перераб. - СПб: Профессия, 2003. - 432 с.
10. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Учеб. для вузов: В 3-х томах. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Дрофа. Т.1. - 2003. - 703 с.
11. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Учеб. для вузов в 2-х частях. - 6-е изд. стер. - М. Физматлит, 2002, - 646 с.
12. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч. / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. - 6-е изд. - М.: ОНИКС 21 век, ч.2. - 2002. - 416 с.

Решение типового варианта контрольной работы.

Пример 1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 4n + 3}{100n^2 + 1} \right)^2.$$

б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 4n + 5}{3^n \cdot (n+1)}.$$

в)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n \cdot (2n+3)}$$

г)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{15n^2 + 6n + 4}{3n + 2 + 12n^2} \right)^n.$$

д)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}.$$

$$\text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt[3]{n^7} + n}.$$

$$\text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \right)$$

$$\text{з) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3 + 5}}.$$

Решение.

$$\text{а) В данном случае } a_n = \left(\frac{n^2 - 4n + 3}{100n^2 + 1} \right)^2.$$

$$\text{Вычислим } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 4n + 3}{100n^2 + 1} \right)^2 = \left(\frac{1}{100} \right)^2 \neq 0.$$

Следовательно, ряд расходится.

б) Поскольку в записи общего члена ряда есть показательная функция 3^n , то используем признак Даламбера.

Для рассматриваемого ряда

$$a_n = \frac{n^2 - 4n + 5}{3^n \cdot (n+1)}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 4(n+1) + 5}{3^{n+1} \cdot ((n+1)+1)}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - 4(n+1) + 5}{3^{n+1} \cdot ((n+1)+1)} : \frac{n^2 - 4n + 5}{3^n \cdot ((n+1)+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - 4(n+1) + 5}{n^2 - 4n + 5} \cdot \frac{3^n \cdot (n-1)}{3^{n+1} \cdot ((n+1)+1)} = \frac{1}{3} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, по признаку Даламбера, исходный ряд сходится.

в) Так как в записи общего члена ряда есть факториал ($n!$), то используем признак Даламбера. Для исследуемого ряда

$$a_n = \frac{n!}{5^n \cdot (2n+3)}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1} \cdot (2(n+1)+3)}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{5^{n+1} \cdot (2(n+1)+3)} : \frac{n!}{5^n \cdot (2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{5^n}{5^{n+1}} \cdot \frac{2n+3}{(2(n+1)+3)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)}{n! \cdot 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{5} = \infty. \end{aligned}$$

В пределе получили бесконечность, следовательно, исследуемый ряд расходится.

$$\text{г) Воспользуемся радикальным признаком Коши. Здесь } a_n = \left(\frac{15n^2 + 6n + 4}{3n + 2 + 12n^2} \right)^n.$$

Вычислим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{15n^2 + 6n + 4}{3n + 2 + 12n^2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{15n^2 + 6n + 4}{3n + 2 + 12n^2} \right) = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} > 1.$$

Полученное значение больше 1, следовательно, ряд расходится.

д) Исследуем данный ряд с помощью интегрального признака Коши. Составим соответствующий интеграл и вычислим его

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx = \left. \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ x = 2 \Rightarrow t = \ln 2 \\ x = b \Rightarrow t = \ln b \end{array} \right| = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t^2} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} \Big|_{\ln 2}^{\ln b} \right) =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Интеграл сходится, следовательно, исследуемый ряд сходится.

е) Составим ряд, эквивалентный исходному, оставив в числителе и знаменателе лишь старшие степени n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{2\sqrt[3]{n^7}+n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{n^{7/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/3-1/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/6}}.$$

Полученный ряд эквивалентен исходному, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}+3}{2\sqrt[3]{n^7}+n} : \frac{1}{n^{11/6}} = \frac{1}{2} \neq 0, \neq \infty$$

Таким образом, исходный ряд и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/6}}$ сходятся и расходятся

одновременно. Т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/6}}$ $\left(\frac{11}{6} > 1 \right)$ сходится, следовательно, исходный ряд также сходится.

ж) Так как $\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{n^{4/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}}$ расходится $\left(\frac{5}{6} < 1 \right)$, следовательно, исходный ряд также расходится.

з) Оценим общий член ряда:

$$0 < \sin^2 n < 1 \Rightarrow 0 < \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3}+5} < \frac{1}{\sqrt{n^3}+5}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+5}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится $\left(\frac{3}{2} > 1\right)$, следовательно, эквивалентный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+5}}$ также сходится. Т.к. из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего, то исходный ряд сходится.

Пример2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n}{(x-2)^n n^3}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \cdot 3^{n+1}}{|x-2|^{n+1} \cdot (n+1)^3} : \frac{(n+1) \cdot 3^n}{|x-2|^n \cdot n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \cdot 3^{n+1} \cdot |x-2|^n \cdot n^3}{(n+1)3^n \cdot |x-2|^{n+1} \cdot (n+1)^3} = \frac{3}{|x-2|}.$$

Ряд сходится, если $\frac{3}{|x-2|} < 1 \Rightarrow |x-2| > 3$

$$x-2 > 3 \text{ или } x-2 < -3;$$

$$x > 5 \text{ или } x < -1,$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty).$$

Ряд расходится, если $\frac{3}{|x-2|} > 1 \Rightarrow x \in (-1; 5)$.

Неопределенный случай: $\frac{3}{|x-2|} = 1$, т.е. $x=5$ или $x=-1$,

Пусть $x=5$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)3^n}{3^n n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - сходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^3}$ сходится как эквивалентный сходящемуся ряду.

Пусть $x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)3^n}{(-3)^n n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n^3}$.

Этот ряд – знакочередующийся. Исследуя его на абсолютную сходимость (рассматриваем ряд, состоящий из абсолютных величин), получим ряд как и при $x=5$, а он сходится. Т.к. ряд, состоящий из абсолютных величин, сходится, то данный ряд сходится абсолютно.

Получили, что $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$ - область сходимости ряда.

Пример 3. Вычислить с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ интеграл $\int_0^1 x \cdot \sin \sqrt{x} dx$.

Решение. Запишем разложение функции $y = x \cdot \sin \sqrt{x}$ в ряд Маклорена:

$$\sin \sqrt{x} = \left| t = \sqrt{x} \right| = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} - \dots + \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots =$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{1!} - \frac{\sqrt{x^3}}{3!} + \frac{\sqrt{x^5}}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n-1}{2}}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$x \sin \sqrt{x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1!} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n-1}{2}+1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^1 x \cdot \sin \sqrt{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1!} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{3! \cdot \frac{7}{2}} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{5! \cdot \frac{9}{2}} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n+1}{2}+1}}{(2n-1)! \left(\frac{2n+1}{2}+1\right)} + \dots \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6 \cdot \frac{7}{2}} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2}} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{11}{2}} - \dots =$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{1}{21} + \frac{1}{540} - \frac{1}{27720} - \dots \approx \frac{2}{5} - \frac{1}{21} + \frac{1}{540} (\pm 10^{-3}) =$$

$$= \frac{1512-180+7}{3780} = \frac{1339}{3780} = 0,354 (\pm 10^{-3}).$$

Заметим, что при вычислении интеграла получаем знакочередующийся ряд. Мы отбрасываем при вычислении все слагаемые, начиная со слагаемого, меньшего по абсолютной величине заданной точности $\left(\frac{1}{27720} < 10^{-3} \right)$.

Пример 4. Найти три первые (отличные от 0) члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши $y' - e^{-x}y = 2x$, $y(0) = 1$.

Решение.

Для представления решения в виде ряда Маклорена необходимо найти первые три отличные от нуля значения $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, ... По условию задачи $y(0) = 1$. Выразим из уравнения y' :

$$y' = e^{-x}y + 2x; \quad (*)$$

$$y'(0) = e^{-0} \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1.$$

Найдем y'' , продифференцировав обе части равенства (*) по x :

$$y'' = (e^{-x}y + 2x)' = -e^{-x}y + e^{-x}y' + 2;$$

$$y''(0) = -e^{-0} \cdot 1 + e^{-0} \cdot 1 + 2 = 2.$$

Окончательно получим:

$$y = 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{2}{2!} x^2 = 1 + x + x^2.$$

Пример 5. Разложить данную функцию в ряд Фурье

а) $f(x) = \begin{cases} 1; & -2 < x \leq 0 \\ x; & 0 < x < 2 \end{cases}$ в интервале $(-2, 2)$:

б) $f(x) = \begin{cases} x; & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x; & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$ по синусам на интервале $[0, \pi]$.

Решение.

Разложение периодической (период $2l$) функции имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \frac{\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k \frac{\pi x}{l};$$

а) В нашем примере $l=2$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \frac{\pi x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k \frac{\pi x}{2}; \quad (**)$$

$$\text{где } a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos k \frac{\pi x}{2} dx;$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin k \frac{\pi x}{2} dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 1 dx + \int_0^2 x dx \right) = \frac{1}{2} \left(x \Big|_{-2}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \right) = \frac{1}{2} (2 + 2) = 2$$

$$a_k = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 \cos \frac{k\pi}{2} x dx + \int_0^2 x \cdot \cos \frac{k\pi}{2} x dx \right)$$

Вычислим значения интегралов-слагаемых по отдельности.

$$\int_{-2}^0 \cos \frac{k\pi x}{2} dx = \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_{-2}^0 = 0;$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_0^2 x \cdot \cos \frac{k\pi x}{2} dx = \left| \begin{array}{l} V = x; \quad V' = 1 \\ U' = \cos \frac{k\pi x}{2}; U = \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{k\pi} x \cdot \sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{2} dx =$$

$$= \left(\frac{2}{k\pi} \right)^2 \cos \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2 = \left(\frac{2}{k\pi} \right)^2 (\cos k\pi - \cos 0) = \left(\frac{2}{k\pi} \right)^2 ((-1)^k - 1);$$

$$a_k = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{k\pi} \right)^2 ((-1)^k - 1) = \frac{2}{(k\pi)^2} ((-1)^k - 1).$$

$$b_k = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 \sin \frac{k\pi x}{2} dx + \int_0^2 x \cdot \sin \frac{k\pi}{2} x dx \right)$$

Вычислим значения интегралов-слагаемых по отдельности.

$$\int_{-2}^0 \sin \frac{k\pi}{2} x dx = \frac{-2}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} x \Big|_{-2}^0 = \frac{-2}{k\pi} (\cos 0 - \cos(-k\pi)) = -\frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k)$$

Аналогично предыдущему

$$\int_0^2 x \sin \frac{k\pi}{2} x dx = \left| \begin{array}{l} V = x; \quad V' = 1 \\ U' = \sin \frac{k\pi}{2} x; U = \frac{-2}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{2}{k\pi} x \cos \frac{k\pi}{2} x \Big|_0^2 - \int_0^2 -\frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} x dx = -\frac{2}{k\pi} (2 \cdot \cos k\pi - 0) +$$

$$+ \left(\frac{2}{k\pi} \right)^2 \sin \frac{k\pi}{2} x \Big|_0^2 = -\frac{4 \cdot (-1)^k}{k\pi}$$

и окончательно получим:

$$b_k = \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{k\pi} + \frac{2}{k\pi} (-1)^k - \frac{4}{k\pi} (-1)^k \right) = -\frac{1}{k\pi} - \frac{(-1)^k}{k\pi}$$

Подставляя полученные значения a_0, a_k, b_k в разложение (**), получим:

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k\pi} - \frac{(-1)^k}{k\pi} \right) \sin \frac{k\pi x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k\pi)^2} ((-1)^k - 1) \cos \frac{k\pi x}{2} =$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2}{2m\pi} \sin \frac{2m\pi x}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{((2m+1)\pi)^2} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2}$$

б) Продолжим функцию на отрезок $[-\pi, 0]$ нечетным образом (рис. 1).

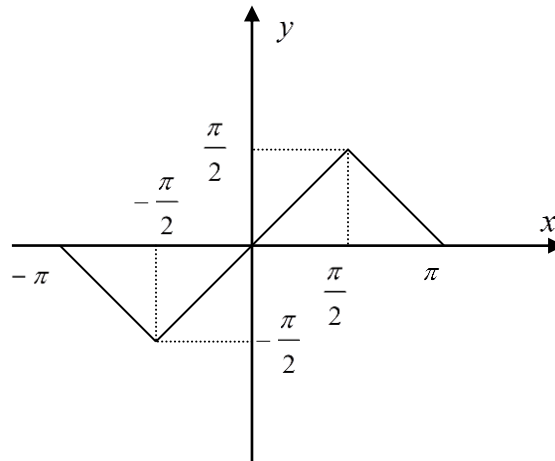


Рис. 1

Тогда получим нечетную функцию, ряд Фурье которой содержит только синусы, т.е. $a_0 = a_k = 0$.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx;$$

Найдем коэффициенты b_k , используя формулу:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin kx dx$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin kx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \cdot \sin kx dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin kx dx + \frac{2}{\pi} \cdot \pi \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \sin kx dx \right) - \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} x \cdot \sin kx dx =$$

Для вычисления первого и третьего интегралов используем метод интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{l} V = x; \quad V' = 1 \\ U' = \sin kx; \quad U = -\frac{1}{k} \cos kx \end{array} \right| = \\
&= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x \cdot \cos kx}{k} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \cos kx \, dx \right) + 2 \left(-\frac{\cos kx}{k} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) - \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x \cdot \cos kx}{k} \Big|_{\pi/2}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos kx \, dx \right) = \\
&= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi \cdot \cos \frac{\pi k}{2}}{2k} + \frac{\sin kx}{k^2} \Big|_0^{\pi/2} \right) + 2 \left(-\frac{\cos k\pi}{k} + \frac{\cos \frac{\pi k}{2}}{k} \right) - \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi \cdot \cos k\pi}{k} + \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi k}{2} + \frac{\sin kx}{k^2} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \\
&= \frac{4 \sin \frac{\pi \cdot k}{2}}{\pi \cdot k^2} = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{\pi \cdot (2n-1)^2}, & k = 2n-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Таким образом, $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

Вариант 1.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{2n^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^2}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5 + 3n + 6}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 4n + 5}{3^n \cdot (n+1)} \cdot (3x-1)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 \cos \sqrt[3]{x} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' + 2y^2 = e^x, \quad y(0) = 0$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \pi - |x|$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Вариант 2.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n-1} \right)^{n-1}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{5}{\sqrt{n^3}}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^7 + 4n^2 + 5}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n (x-1)^n}.$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 x^2 \sin x^2 dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' + x \cdot y = 2e^{y^2}, \quad y(0) = 0$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \pi - \frac{x}{2}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Вариант 3.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+3} \right)^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin \frac{1}{n^3}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4 + 2n + 9}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n (x-3)^n}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x^2} \cdot \cos x \, dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' + 3x \cdot y^3 = x^3, \quad y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = 1 + |x|$ в ряд Фурье в интервале $(-1, 1)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 4.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-2}{3n+1} \right)^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n^7+1}}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{7}{\sqrt[3]{n^4+2}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (2x+3)^n}{n^2+1}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' - x \cdot y = y^2, \quad y(0) = 0,1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } -\pi < x \leq 0 \\ 0, & \text{при } 0 < x < \pi \end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 5.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{n^2}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n!}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n+6n+7}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (2x-1)^n}{n^3}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5} \operatorname{arctg} x^2 dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' + x \cdot y^2 = 2 \cos x, \quad y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = 2x - 1$ в ряд Фурье в интервале $(-2, 2)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 6.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 - 3n + 8}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^3 + 7}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (3x+1)^n}{2^n}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{3}} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' - x^2 = y^2, \quad y(0) = 0,1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{при } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{при } 0 \leq x < \pi \end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 7.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n^2+n+1)^n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(x-5)^{2n}}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^3}$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' - e^x y^2 = 0, \quad y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = |1-x|$ в ряд Фурье в интервале $(-2, 2)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 8.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{2n} \right)^n$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{4^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^6} + n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{\sqrt{n^7 + 1}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+1} \cdot (2x+1)^n.$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5} \ln(1 + \sqrt{x}) dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' - 0,5y^2 = \sin x, \quad y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } -1 \leq x < 0 \\ 1-x, & \text{при } 0 \leq x < 1 \end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(-1, 1)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 9.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{2^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+3} \right)^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{(n-1)^3}}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 6}{6^n} \cdot (x - 6)^n.$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5} x \ln(1 - x^2) dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' - e^{-x}y = 2x, \quad y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = |x| - 1$ в ряд Фурье в интервале $(-1, 1)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 10.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4}{n!}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+5}{n+2} \right)^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^3}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n^7} + 3}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n \cdot (n+1)}}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' - x \cdot y = 2x^2, \quad y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = x^2 + 1$ в ряд Фурье в интервале $(-2, 2)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 11.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{n^3}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2n - 1}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^{2n}}{\ln(2n-1)}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' - 2x \cdot y = 3x^2 - 2x^4, \quad y(1) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 12.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{4^n} \cdot (2x+3)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' + x^2 y = y^3, \quad y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = |x|$ в ряд Фурье в интервале $(-1,1)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 13.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5} \right)^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \sqrt{n}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3n+1)}{(x+2)^n}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1+x^4} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$x \cdot y' - 2y = 2x^4, \quad y(1) = 0$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, 1)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 14.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 2^n - 3}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 2n + 1} \right)^n$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{\ln(4n+2)}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' + y \cdot \cos x = e^{\cos x}, \quad y(0) = 0$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 15.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

- а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 2}{n^4 + 5n}$
- б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (n+1)!}{n^n}$
- в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{4n+3} \right)^{2n}$
- г) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{2}{\sqrt{n^5}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 4}{4^n} (x - 4)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2/4} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' + 2y = e^x \cdot y^2, \quad y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ в ряд Фурье по косинусам в интервале $(0, \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 16.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4+n^2}{4n^2+1} \right)^{n/2}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{7^{n-1}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-1}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{\sqrt[3]{n^4-2}}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{2/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}}$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' + y = x \cdot y^2, \quad y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 17.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n+4}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot n!}{4^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{3n^2} \right)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5 + 4n + 1}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^n (x - e)^n}{\ln(n - e)}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$x \cdot y' + y = -x^2 \cdot y^2, \quad y(1) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ в ряд Фурье по косинусам в интервале $(0, \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 18.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2+1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot n!}{n^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n^9+6}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{(n^2+3)(x+3)^n}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cdot \cos x dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$x \cdot y' + y = y^2 \cdot \ln x, \quad y(1) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье по косинусам в интервале $(0, l)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 19.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+6}{3n} \right)^n$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2(n+1)}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2 \cdot n!}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 5}{5^n} (5x - 1)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \cos x, \quad y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \pi - 2x$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 20.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^5 + 2n}{3 + n^6} \right)^n$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln n}}{n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^{n+1}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{5^n} \cdot \left(\frac{x}{5} - 1 \right)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$x \cdot y' + y = y^2 \cdot x, \quad y(1)=1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \pi - 2x$ в ряд Фурье по косинусам в интервале $(0, \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 21.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3-1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{7^n}$

в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \cdot \ln(n+3)}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-5}{5n^3+4} (7x+1)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-0,4}^0 \sin \frac{5x^2}{2} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = \cos x + y^2, \quad y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{при } -\pi < x \leq 0 \\ 0, & \text{при } 0 < x < \pi \end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Вариант 22.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-2}{3n^3+1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{3}{6^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{\ln n}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{4n^2 + 7n - 10} (9x - 1)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-0,25}^0 \frac{\sin 2x}{x} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = e^x + y^2, \quad y(0) = 0$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} x - \pi, & \text{при } -\pi \leq x < 0 \\ -x - \pi, & \text{при } 0 < x \leq \pi \end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 23.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

- а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+4}{2n^3-3}$
- б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-8)^n}{3^n}$
- в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n + \ln^2 n)}$
- г) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg(n-1)$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^{2n} 10^n}{\ln(3n+1)}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{\frac{1}{3}}^0 \frac{1 - \cos 3x}{x^2} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = y + y^2, \quad y(0) = 3$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Вариант 24.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^2+1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n^2-1)(x-2)^n}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-0,25}^0 \cos \frac{4x^2}{3} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = 2e^y + x \cdot y, \quad y(0) = 0$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{при } 0 \leq x < \pi \end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Вариант 25.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$

в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n^2}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{8n^3 - 1}{8^n} \cdot (x - 2)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-0,3}^0 \cos \frac{10x^2}{3} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = \sin x + y^2, \quad y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = x^3$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Вариант 26.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$

в) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+8} \right)^{2n^2}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^2 \frac{1}{n}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(3n-4)}{2^n (x-4)^n}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-0,2}^0 \frac{\ln(1-2x^3)}{x} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = e^x + y, \quad y(0) = 4$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = |x|$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Вариант 27.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n-1)}$

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^{n/2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{n^2}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)(3x-1)^n}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-0,2}^0 e^{-5x^2} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 2$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = x^2 + 1$ в ряд Фурье в интервале $(-2, 2)$.

Вариант 28.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

- а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2 + 1}$
- б) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}$
- в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$
- г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{2^n(n^2+1)} \cdot \left(\frac{x}{2} + 4 \right)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,16} e^{-\sqrt{x}} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = \sin x + 0,5y^2, \quad y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } -\pi < x < 0 \\ x, & \text{при } 0 \leq x < \pi \end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Вариант 29.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{3^n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n(n-1)(x-1)^n}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-1}^0 \sin \frac{x^2}{5} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = 2e^y + x \cdot y, \quad y(0) = -1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье в интервале $(-2\pi, 2\pi)$.

Вариант 30.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n+1}{3n+1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^{n^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (1 + \ln n)}$

г) $\sum_{n=8}^{\infty} \operatorname{arctg}^3 \frac{2}{n-7}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} \cdot \left(\frac{x}{3} - 3 \right)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-0,5}^0 \operatorname{arctg} x^3 dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = x + x^2 + y^2, \quad y(0) = 5$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{при } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{при } 0 \leq x < \pi \end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению практических работ по дисциплине
«МАТЕМАТИКА»
для студентов направления подготовки
15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств
направленность (профиль) «Технология машиностроения»

Ставрополь 2026

Содержание.

Раздел 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема 1. Матрицы. Операции над матрицами

Тема 2. Умножение матриц

Тема 3. Детерминант матрицы

Тема 4. Обратная матрица. Системы линейных уравнений

Тема 5 Метод Гаусса для решения систем уравнений

Тема 6. Правило Крамера

Тема 7. Аналитическая геометрия (плоскость)

Тема 8. Аналитическая геометрия (пространство)

Раздел 2. Основы математического анализа

Тема 9. Пределы

Тема 10. Производная и дифференциал функции

Тема 11. Применение производной

Тема 12. Применение производной к исследованию функции

Тема 13. Построение графиков функций

Тема 14. Функция нескольких переменных. Производная и дифференциал функции нескольких переменных

Раздел 3. Интегральное исчисление функции

одной переменной

3

Тема 15. Неопределенный интеграл. Таблица интегралов

Тема 16. Методы интегрирования

Тема 17. Интегрирование тригонометрических функций

Тема 18. Определенный интеграл. Вычисление определенного интеграла

Тема 19. Применение определенного интеграла

Тема 20. Несобственный интеграл

Раздел 4. Интегральное исчисление функции нескольких переменных

Тема 21. Кратные интегралы

Тема 22. Поверхностный интеграл

Раздел 5. Дифференциальные уравнения

Тема 23. Основы дифференциальных уравнений

Тема 24. Линейные дифференциальные уравнения

Раздел 6. Ряды

Тема 25. Числовые ряды. Сравнительный тест. Признак Даламбера. Признак Коши. Признаки сходимости рядов

Тема 26, Ряды Маклорена и Тейлора. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Тема 27. Применение рядов

Лекционные материалы

Тема 1. Матрицы. Действия над матрицами

Определение. Матрицей размера $m \times n$, где m - число строк, n - число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij} , где i - номер строки, а j - номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Основные действия над матрицами.

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m=n$), то матрица называется **квадратной**.

Определение. Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется **единичной матрицей**.

Определение. Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**.

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

Определение. Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется

диагональной матрицей.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Определение. Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$$C = A + B = B + A.$$

Операция умножения (деления) матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha (A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$

$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$$

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти $2A + B$.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Тема 2 Умножение матриц

Операция умножения матриц.

Определение: Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C;$$
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

Свойства операции умножения матриц.

1) Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение $AB=BA$ выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными**.

Самым характерным примером может служить [единичная](#) матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

Очевидно, что для любых матриц выполняется следующее свойство:

$$A \cdot O = O; O \cdot A = O,$$

где O – нулевая матрица.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна**, т.е. если определены произведения AB и $(AB)C$, то определены BC и $A(BC)$, и выполняется равенство:

$$(AB)C = A(BC).$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения $A(B+C)$ и $(A+B)C$, то соответственно:

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = (2 \ 4 \ 1)$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 4 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Тема 3 Определитель матриц

Определители. (детерминанты).

Определение. Определителем квадратной матрицы $A =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
 называется число, которое может быть вычислено по

элементам матрицы по формуле:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}, \quad \text{где}$$

M_{1k} – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Определитель единичной матрицы равен 1.

Для указанной матрицы A число M_{1k} называется **дополнительным минором** элемента матрицы a_{1k} . Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

Определение. **Дополнительный минор** произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Свойство 1. Важным свойством определителей является следующее соотношение:

$$\det A = \det A^T;$$

Свойство 2. $\det (A \pm B) = \det A \pm \det B.$

Свойство 3. $\det (AB) = \det A \cdot \det B$

Свойство 4. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 5. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Определение: Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

Свойство 6. Если в матрице A строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

Свойство 7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

Свойство 9. Если для элементов какой-либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$
$$= -5 + 18 + 6 = 19.$$

Пример:. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $\det(AB)$.

1-й способ: $\det A = 4 - 6 = -2$; $\det B = 15 - 2 = 13$; $\det(AB) = \det A \cdot \det B = -26$.

2-й способ: $AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$, $\det(AB) = 7 \cdot 18 - 8 \cdot 19 =$
 $126 -$
 $- 152 = -26$.

Тема 4 Обратная матрица. Системы линейных уравнений

Миноры.

Выше было использовано понятие дополнительного минора матрицы.
Дадим определение минора матрицы.

Определение. Если в матрице A выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный

из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется **минором** матрицы A . Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s .

Заметим, что вышесказанное применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным.

Если вычеркнуть из исходной квадратной матрицы A выделенные строки и столбцы, то определитель полученной матрицы будет являться дополнительным минором.

Алгебраические дополнения.

Определение. Алгебраическим дополнением минора матрицы называется его дополнительный минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$ в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы.

В частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его дополнительный минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Теорема Лапласа. Если выбрано s строк матрицы с номерами $i_1, \dots, i_s$, то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.

Обратная матрица.

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

Определение. Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A , то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1} .

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы.

Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

$$AX = E \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij} \text{ , i=(1,n), j=(1,n),}$$

$$e_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$e_{ij} = 1, \quad i = j.$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \dots + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ \vdots \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \dots + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \dots + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases},$$

Решив эту систему, находим элементы матрицы X .

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1} .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Однако, такой способ не удобен при нахождении обратных матриц больших порядков, поэтому обычно применяют следующую формулу:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},$$

где M_{ji} - [дополнительный минор](#) элемента a_{ji} матрицы A .

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1} .

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$M_{11}=4; \quad M_{12}= 3; \quad M_{21}= 2; \quad M_{22}=1$$

$$x_{11}= -2; \quad x_{12}= 1; \quad x_{21}= 3/2; \quad x_{22}= -1/2$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Свойства обратных матриц.

Укажем следующие свойства обратных матриц:

$$1) (A^{-1})^{-1} = A;$$

$$2) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$3) (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T.$$

Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$

Систему уравнений можно записать:

$$A \cdot X = B.$$

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Для применения данного метода необходимо находить [обратную матрицу](#), что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} .

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$\begin{aligned}
 a_{11}^{-1} &= \frac{5}{30}; & a_{12}^{-1} &= \frac{1}{30}; & a_{13}^{-1} &= \frac{1}{30}; \\
 a_{21}^{-1} &= -\frac{10}{30}; & a_{22}^{-1} &= -\frac{14}{30}; & a_{23}^{-1} &= \frac{16}{30}; \\
 a_{31}^{-1} &= \frac{5}{30}; & a_{32}^{-1} &= \frac{19}{30}; & a_{33}^{-1} &= -\frac{11}{30};
 \end{aligned}
 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: $x=1$; $y=2$; $z=3$.

Тема 5 Системы алгебраических уравнений, Алгебраические преобразования. Метод Жордана-Гаусса.

Метод Гаусса.

(Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик)

Метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Разделим обе части 1-го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

- 1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения
- 2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения

И Т.Д.

Получим:

[illegible]

$$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j} \quad i = 2, 3, \dots, n; \quad j = 2, 3, \dots, n+1.$$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } x_3 = 2; x_2 = 5; x_1 = 1.$$

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = 40 \\ 6z = 18 \end{cases}, \text{откуда получаем: } z = 3; y = 2; x = 1.$$

Тема 6 Системы уравнений.

Определение. Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

[illegible]

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Определение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

Определение. Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если более одного.

Определение. Для системы линейных уравнений матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ называется матрицей системы, а матрица}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ называется расширенной матрицей системы}$$

Определение. Если $b_1, b_2, \dots, b_m = 0$, то система называется **однородной**.
однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

Элементарные преобразования систем.

К элементарным преобразованиям относятся:

- 1) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.
- 2) Перестановка уравнений местами.
- 3) Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x .

Теорема Кронекера – Капелли.

(условие совместности системы)

(Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик)

Теорема: Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.
$$\text{Rg}A = \text{Rg}A^*.$$

Очевидно, что система (1) может быть записана в виде:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Доказательство.

1) Если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы A , а значит добавление этого столбца в матрицу, т.е. переход $A \rightarrow A^*$ не изменяют ранга.

2) Если $\text{Rg}A = \text{Rg}A^*$, то это означает, что они имеют один и тот же [базисный минор](#). Столбец свободных членов – линейная комбинация столбцов базисного минора, те верна запись, приведенная выше.

Пример. Определить [совместность](#) системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0 \quad \text{Rg}A = 2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Rg}A^* = 3.$$

Система несовместна.

Пример. Определить **совместность** системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0; \quad \text{Rg}A = 2;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \quad \text{RgA}^* = 2.$$

Система совместна. Решения: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

Тема 7 Правило Крамера

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. Система из n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

$\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i .

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \Delta_1 / \det A; \quad x_2 = \Delta_2 / \det A; \quad x_3 = \Delta_3 / \det A;$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$x_2 = \Delta_2 / \Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$$x_3 = \Delta_3 / \Delta = 3.$$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным [выше](#) матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10; \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases} \quad \text{Ответ: } x = 0; y = 0; z = -2.$$

Тема 8 Аналитическая геометрия

Уравнение линии на плоскости.

Как известно, любая точка на плоскости определяется двумя координатами в какой-либо системе координат. Системы координат могут быть различными в зависимости от выбора базиса и начала координат.

Определение. Уравнением линии называется соотношение $y = f(x)$ между координатами точек, составляющих эту линию.

Отметим, что уравнение линии может быть выражено параметрическим способом, то есть каждая координата каждой точки выражается через некоторый независимый параметр t .

Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

Уравнение прямой на плоскости.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$\boxed{Ax + By + C = 0},$$

причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой**.

В зависимости от значений постоянных A, B и C возможны следующие частные случаи:

- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ { $By + C = 0$ }- прямая параллельна оси Ox
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ { $Ax + C = 0$ } – прямая параллельна оси Oy
- $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Oy
- $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали.

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор s компонентами (A, B) перпендикулярен прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.

Составим при $A = 3$ и $B = -1$ уравнение прямой: $3x - y + C = 0$. Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки A .

Получаем: $3 - 2 + C = 0$, следовательно $C = -1$.

Итого: искомое уравнение: $3x - y - 1 = 0$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$.

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$; т.е. $y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k** .

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2)$, компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ называется направляющим вектором прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку $A(1, 2)$.

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: $Ax + By + C = 0$. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$$1 \cdot A + (-1) \cdot B = 0, \text{ т.е. } A = B.$$

Тогда уравнение прямой имеет вид: $Ax + Ay + C = 0$, или $x + y + C/A = 0$.

при $x = 1, y = 2$ получаем $C/A = -3$, т.е. искомое уравнение:

$$x + y - 3 = 0$$

Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ $C \neq 0$, то, разделив на $-C$, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ где}$$

$$a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ox , а b – координатой точки пересечения прямой с осью Oy .

Пример. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$$C = 1, \quad -\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$$

Нормальное уравнение прямой.

Если обе части уравнения $Ax + By + C = 0$ разделить на число $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, которое называется **нормирующим множителем**, то получим

$$\boxed{x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0}$$

нормальное уравнение прямой.

Знак $\pm$ нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы $\mu \cdot C < 0$.

p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ – угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox .

Пример. Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 65 = 0$. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

уравнение этой прямой в отрезках:

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$

$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

нормальное уравнение прямой:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13} \quad \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0; \quad \cos \varphi = 12/13; \sin \varphi = -5/13; p = 5.$$

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2 .

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a = b = 1$; $ab/2 = 8$; $a = 4$; -4 .

$a = -4$ не подходит по условию задачи.

Итого: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ или $x + y - 4 = 0$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, -3)$ и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x - 0}{-2 - 0} = \frac{y - 0}{-3 - 0}; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \quad 3x - 2y = 0.$$

Тема 9. Пределы

Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

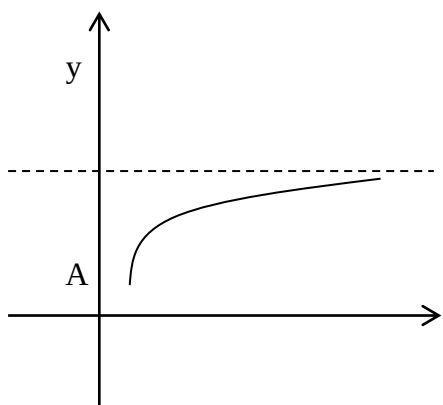
Определение. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x , $|x| > M$ выполняется неравенство

$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в окрестности бесконечности.

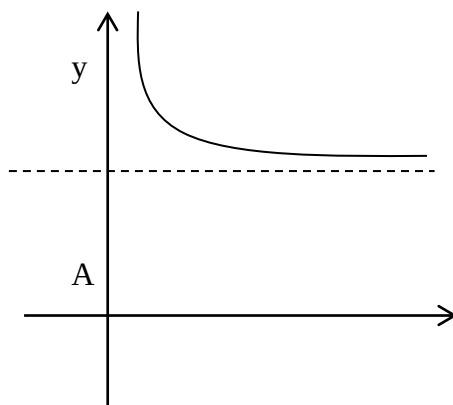
Записывают: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Графически можно представить:



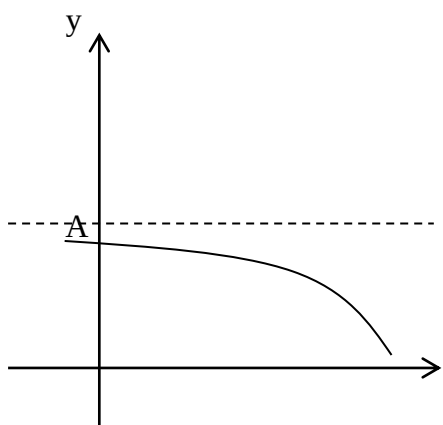
0

x



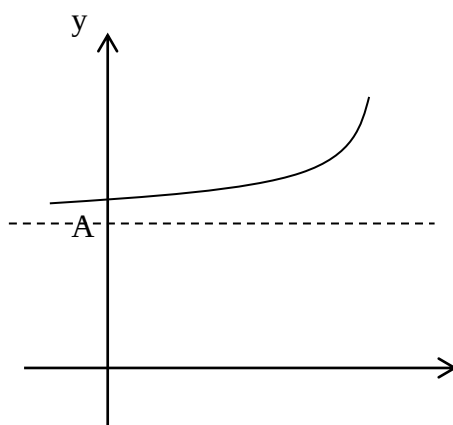
0

x



0

x



0

x

Аналогично можно определить пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ для любого $x > M$ и

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ для любого $x < M$.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim_{x \rightarrow a} C = C$, где $C = \text{const.}$

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \rightarrow a$.

Теорема 2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Следствие. $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Теорема 4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ при $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. Если $f(x) > 0$ вблизи точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то $A > 0$.

Аналогично определяется знак предела при $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Теорема 6. Если $g(x) \leq f(x) \leq u(x)$ вблизи точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} u(x) = A$, то и

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **ограниченной** вблизи точки $x = a$, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| < M$ вблизи точки $x = a$.

Теорема 7. Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \rightarrow a$, то она ограничена вблизи точки $x = a$.

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, т.е. $|f(x) - A| < \varepsilon$, тогда

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| \text{ или}$$

$$|f(x)| < \varepsilon + |A|, \text{ т.е.}$$

$$|f(x)| < M, \text{ где } M = \varepsilon + |A|$$

Теорема доказана.

Бесконечно малые функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow a$, где a может быть числом или одной из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x . При различных значениях a функция может быть бесконечно малой или нет.

Пример. Функция $f(x) = x^n$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ и не является бесконечно малой при $x \rightarrow 1$, т.к. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ при $x \rightarrow a$ имела предел, равный A , необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки $x = a$ выполнялось условие

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$ ($\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$).

Свойства бесконечно малых функций:

- 1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ тоже бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.
- 2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ тоже бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.
- 3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow a$.
- 4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Используя понятие бесконечно малых функций, приведем доказательство некоторых теорем о пределах, приведенных выше.

Доказательство теоремы 2. Представим $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad B = \lim_{x \rightarrow a} g(x), \text{ тогда}$$

$$f(x) \pm g(x) = (A + B) + \alpha(x) + \beta(x)$$

$A + B = \text{const}$, $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая, значит

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A + B = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Представим $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad B = \lim_{x \rightarrow a} g(x), \text{ тогда}$$

$$f(x) \cdot g(x) = A \cdot B + A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x)$$

$A \cdot B = \text{const}$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые, значит

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} A \cdot B + 0 = A \cdot B = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Теорема доказана.

Бесконечно большие функции и их связь с

бесконечно малыми.

Определение. Предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, где a - число, **равен бесконечности**, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что неравенство

$$|f(x)| > M$$

выполняется при всех x , удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \Delta$$

Записывается $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

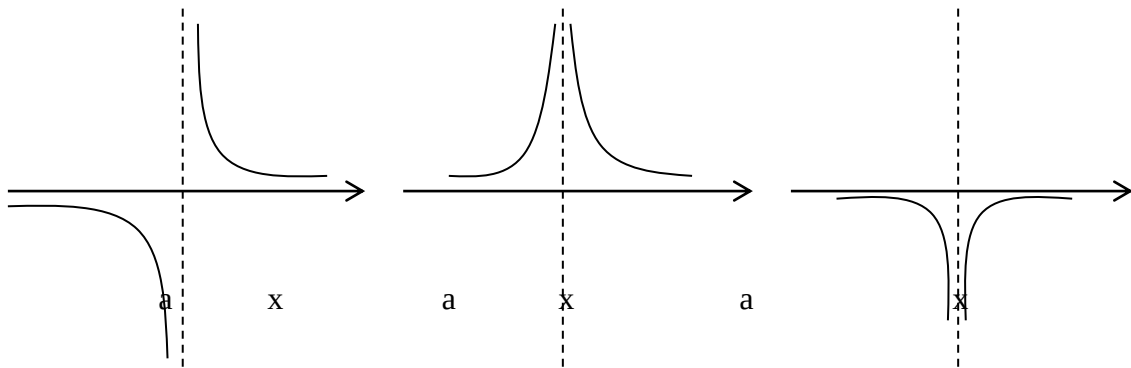
Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)| > M$ на $f(x) > M$, то получим:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

а если заменить на $f(x) < M$, то:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



Определение. Функция называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow a$, где a – число или одна из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. Если $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ (если $x \rightarrow \infty$) и не обращается в ноль, то

$$y = \frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty$$

Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$. Будем обозначать эти функции α , β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по скорости их убывания, т.е. по скорости их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $f(x) = x$.

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция β .

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = A$, $A \neq 0$, $A = \text{const}$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают $\alpha \sim \beta$.

Пример. Сравним бесконечно малые при $x \rightarrow 0$ функции $f(x) = x^{10}$ и $f(x) = x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{10}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^9 = 0$$

т.е. функция $f(x) = x^{10}$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $f(x) = x$.

Определение. Бесконечно малая функция α называется **бесконечно малой порядка k** относительно бесконечно малой функции β , если предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Пример. Если $\alpha = x \sin x$, $\beta = x$, то при $x \rightarrow 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^2} = 1$, т.е. функция α – бесконечно малая порядка 2 относительно функции β .

Пример. Если $\alpha = x \sin \frac{1}{x}$, $\beta = x$, то при $x \rightarrow 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta}$ не существует, т.е. функция α и β несравнимы.

Свойства эквивалентных бесконечно малых.

$$1) \alpha \sim \alpha, \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \right)$$

$$2) \text{ Если } \alpha \sim \beta \text{ и } \beta \sim \gamma, \text{ то } \alpha \sim \gamma, \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \right)$$

$$3) \text{ Если } \alpha \sim \beta, \text{ то } \beta \sim \alpha, \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = 1 \right)$$

$$4) \text{ Если } \alpha \sim \alpha_1 \text{ и } \beta \sim \beta_1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k, \text{ то и } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = k \text{ или } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Следствие: а) если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta}$

б) если $\beta \sim \beta_1$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta_1}$

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$

Так как $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$ и $\sin 7x \sim 7x$ при $x \rightarrow 0$, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x}$.

Так как $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2$ при $x \rightarrow 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$.

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \infty$.

Если α и β - бесконечно малые при $x \rightarrow a$, причем β - бесконечно малая более высокого порядка, чем α , то $\gamma = \alpha + \beta$ - бесконечно малая, эквивалентная α . Это можно доказать следующим равенством $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) = 1$.

Тогда говорят, что α - **главная часть** бесконечно малой функции γ .

Пример. Функция $x^2 + x$ - бесконечно малая при $x \rightarrow 0$, x - главная часть этой функции. Чтобы показать это, запишем $\alpha = x^2$, $\beta = x$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1.$$

Некоторые замечательные пределы.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ где } P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

$Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right)}{x^m \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m} \right)} = x^{n-m} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$$

Итого: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{при } n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{при } n = m \\ \infty, & \text{при } n > m \end{cases}$

Первый замечательный предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Второй замечательный предел.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{(x - x_0) \cos x \cos x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\cos x \cos x_0} = 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\pi/4 - x)}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\sin(\pi/4 - x)}{2\sqrt{2}(\pi/4 - x)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \left\{ \begin{array}{l} y = \pi/2 - x \\ x = \pi/2 - y \\ \pi - 2x = \pi - \pi + 2y \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi/2 - y)}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}$$

Пример. Найти предел.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x+3} = \left\{ \begin{array}{l} y = x-1 \\ x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y+4}{y} \right)^{y+4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^y \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^4 = \\ &= \left\{ z = \frac{y}{4} \right\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{4z} = \left(\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z \right)^4 = e^4 \end{aligned}$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$$x^2 - 6x + 8 = 0;$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0;$$

$$\begin{aligned} D &= 36 - 32 = 4; \\ x_1 &= (6 + 2)/2 = 4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 64 - 48 = 16; \\ x_1 &= (8 + 4)/2 = 6; \end{aligned}$$

$$x_2 = (6 - 2)/2 = 2;$$

$$x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x} \quad \text{умножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное}$$

$$\text{выражение: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2 - 1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} =$$

$$= \frac{2}{-1 \cdot (1+1)} = -1.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \{x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)\} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}.$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3), \text{ т.к.}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad | \quad x - 1 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ x^2 - 5x + 6 \\ \underline{-x^2 + 5x} \\ 6x - 6 \\ \underline{-6x + 6} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = -2$

Пример. Найти предел.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2h) - 2\sin(a+h) + \sin a}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{2a+2h}{2} \cos \frac{2h}{2} - 2\sin(a+h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin(a+h)(\cosh-1)}{h^2} = \\ &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \sin(a+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2} = 2\sin a \cdot (-1/2) = -\sin a \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x - 2)}{(x - 2)^3(3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{(x - 2)(3x + 2)} - \text{не определен, т.к. при}$$

стремлении x к 2 имеют место различные односторонние пределы $-\infty$ и $+\infty$.

Методические указания для проведения практических занятий

Содержание

Раздел 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема 1. Матрицы. Действия над матрицами

Тема 2 Умножение матриц

Тема 3 Определитель матриц

Тема 4 Обратная матрица. Системы линейных уравнений

Тема 5 Системы алгебраических уравнений, Алгебраические преобразования. Метод Жордана-Гаусса.

Тема 6 Системы уравнений.

Тема 7 Правило Крамера

Тема 8 Аналитическая геометрия

Раздел 2. Основы математического анализа

Тема 9. Пределы

Матрицы. Действия над матрицами

Пример 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, необходимо найти $2A$

+ B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Реши и проверь себя по ответам:

1. если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, а $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, тогда $2A+B$?

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 11 \\ -3 & -2 & 14 \end{pmatrix}$

2. если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, а $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, тогда $4A-8B$?

Ответ : $\begin{pmatrix} -20 & 4 \\ -8 & -32 \end{pmatrix}$

3. если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, тогда $2A-4B$?

Ответ: $\begin{pmatrix} -22 & -12 & -8 & -10 \\ 16 & -6 & 18 & 10 \end{pmatrix}$

4. Найти сумму и разность матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \text{ вычислить матрицу}$$

$2A$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Умножение матриц

Пример 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$.

Вам нужно найти транспонированную матрицу и $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = (2 \ 4 \ 1)$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 4 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = (2 \ 4 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример 3. Найти произведение матриц $A = (1 \ 2)$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (3 + 10 \quad 4 + 12) = (13 \ 16).$$

Реши и проверь себя с помощью ответов:

Если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, а $B = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, тогда BA

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}$

Определитель матрицы

Пример 1. Вычислить определители второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-6) - (-5) \cdot 3 = -24 + 15 = -9$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Пример 2. Для вычисления определителя четвертого порядка, разложим его по элементам 1-й строки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 15 \\ -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 15 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 15 \\ 6 & -8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix} = (-90 - 360 - 14 + 80 +$$

$$+ 210 + 27) + (45 + 270 + 56 - 60 - 105 - 108) + 2(-9 - 180 - 64 + 12 + 72 + 120) - 2(-7 - 60 - 96 + 18 + 40 + 56) = -147 + 98 + 2(-49) - 2(-49) = -49.$$

Вычислим этот определитель, предварительно преобразовав его так, чтобы на 1-й строке получить нули, кроме элемента a_{11} , чтобы уйти из определителя 4-го порядка к одному определителю 3-го порядка

Для этого сложите 1-й столбец со 2-м, далее 1-й столбец, умноженный на (-2) и последовательно сложите с 3-м и 4-м столбцами

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 7 \\ 6 & -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 7 \\ -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -9 - 14 + 0 - 0 - 35 + 9 = -49.$$

Мы получили тот же результат.

Пример 3. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

$$= -5 + 18 + 6 = 19.$$

Пример 4. Пусть даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти определитель $\det(AB)$.

1-й метод: $\det A = 4 - 6 = -2$; $\det B = 15 - 2 = 13$; $\det(AB) = \det A \cdot \det B = -26$.

$$2\text{-й метод: } AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix},$$

$$\det(AB) = 7 \cdot 18 - 8 \cdot 19 = 126 - 152 = -26.$$

Пример 5. Найти определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6 - 4) - 1(9 - 1) + 2(12 - 2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0 - 2) - 1(0 - 6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значением определителя является $-10 + 6 - 40 = -44$.

Реши и проверь себя по ответам:

Если $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$, тогда $2\Delta_1 + \Delta_2$?

Ответ: 24.

Определение. Ранг матрицы-это заказ из крупнейших ненулевой минор.

Обозначим: $r(A)$, $R(A)$, $\text{Rang } A$.

Пример 6.

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Потому что все миноры равны ноль, тогда $r(A)=0$.

Пример 7.

Найти ранг матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Матрица содержит один ненулевой элемент — $b_{11}=1$, который является минором 1-го порядка. Все детерминанты более высокого порядка, составленные из элементов этой матрицы будут содержать 0-е строки, и, следовательно, равны 0. Поэтому, $r(B)=1$.

Пример 8.

Найти ранг матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

минор определитель матрицы 3 –го порядка равна 0, потому что он содержит пропорциональные столбцы, поэтому, $r(C) < 3$.

Для того, чтобы доказать, что $r(C)=2$, достаточно найти по крайней мере один минор 2-го порядка, не 0, на пример, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. so, $r(C)=2$.

Пример 9.

Найти ранг матрицы $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\Delta_E = 1 \neq 0$, отсюда, $r(E)=3$.

Пример 10.

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Теоретически, ранг этой матрицы может принимать значения от 1 до 4, потому что из элементов матрицы можно создать миноры до 4-го порядка включительно. Но вместо вычисления всех возможных миноров 4-го, 3-го и др. порядка, применим к матрице и эквивалентное преобразование. Во-первых, убедимся в том, что в первом столбце все элементы, кроме первого, будут равны 0. Для этого мы пишем вместо второй строки сумму с первой, и вместо третьего разницу между третьей и первой удвоенной:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда из третьей строки вычтем вторую и четвертую добавим ко второй:

$$\approx \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После вычеркивания нулевых строк получим матрицу размерности 2×5 , для которой максимальное значение порядка минора, и, следовательно, максимальное значение-ранг 2:

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Минор матрицы $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, следовательно,, $r(\tilde{\tilde{A}}) = r(A) = 2$.

Реши и проверь себя по ответам:

1. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Ответ: 2

2. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ответ: 2

3. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Ответ: 3

Обратная матрица и системы линейных уравнений

Пример 1. для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу.

Решение. Находим сначала детерминант матрицы A

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0, \text{ Итак, обратная матрица существует и мы ее}$$

можем найти по формуле: $A^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где A_{ij} ($i, j=1,2,3$) -

алгебраические дополнения элементов a_{ij} заданной матрицы. тогда:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 2) = -6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 2) = -6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6,$$

$$\text{В результате } A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти обратную матрицу A^{-1} .

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$\begin{array}{llll} M_{11}=4; & M_{12}=3; & M_{21}=2; & M_{22}=1 \\ x_{11}=-2; & x_{12}=1; & x_{21}=3/2; & x_{22}=-1/2 \end{array}$$

$$\text{отсюда, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} .

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$\begin{aligned} a_{11}^{-1} &= \frac{5}{30}; & a_{12}^{-1} &= \frac{1}{30}; & a_{13}^{-1} &= \frac{1}{30}; \\ a_{21}^{-1} &= -\frac{10}{30}; & a_{22}^{-1} &= -\frac{14}{30}; & a_{23}^{-1} &= \frac{16}{30}; \\ a_{31}^{-1} &= \frac{5}{30}; & a_{32}^{-1} &= \frac{19}{30}; & a_{33}^{-1} &= -\frac{11}{30}; \end{aligned} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Давайте проверим:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Найдем матрицу X .

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Окончательно решение системы: $x = 1; y = 2; z = 3$.

Реши и проверь себя по ответам:

1. найти обратную матрицу для матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\{1, 2, 3, 4\}$.

3. Решить систему матричным методом

$$x_1 - x_2 + x_3 = 6,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 5.$$

Ответ: $\{1, -2, 3\}$

Системы алгебраических уравнений, Алгебраические преобразования.

Метод Жордана-Гаусса

Пример 1. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = -40, \text{ получим: } z = 3; y = 2; x = 1. \\ 6z = 18 \end{cases}$$

Пример 2. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Подготовить расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}, \text{отсюда: } x_3 = 2; x_2 = 5; x_1 = 1.$$

Реши и проверь себя по ответам:

Решить систему, состоящую из уравнений $x + y - 3z = 2$, $3x - 2y + z = -1$, $2x + y - 2z = 0$ by Gauss:

Ответ: $\{-0,7; -1,2; -1,3\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right., \quad (1)$$

Для решения системы, состоящей из уравнений:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{основная матрица системы,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{—столбец неизвестных,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{— столбец свободных членов.}$$

Теорема (теорема Kronecker-Kapelly). Система (1) имеет решение, тогда и только тогда если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

Пример 1.

Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 5y = -9 \end{cases}.$$

Единственным решением является пара чисел $x = 1, y = 2$.

Пример 2.

Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}.$$

Решением этой системы будут любые два числа x и y , удовлетворяющих условию $y = 3 - x$. Например, $x=1, y=2$; $x=0, y=3$ и т. д.

Пример 3.

Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

Очевидно, что эта система не имеет решений, поскольку разность двух чисел не может принять два значения разницы.

Пример 4.

Используя теорему Кронекера-Капелли:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8, \end{cases}$$

Используя элементарные преобразования для преобразования расширенной

матрицы этой системы $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \right) \sim$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 1 & 16 & -11 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 16 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \end{array} \right) \begin{array}{c} \textcircled{4} \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 16 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 54 & -36 & 18 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 16 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & -6 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ :6 \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 16 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 16 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ \textcircled{8} \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 16 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -39 & 78 \end{array} \right) \quad \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 16 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$\text{Rang } A = \text{Rang } A_1 = 4$, тогда система уравнений имеет решение.

[illegible]

Обратите внимание, что эта система всегда совместна, потому что она имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, названное тривиальным.

Когда $r < n$, система является неопределенной

Реши и проверь себя по ответам:

Найти сумму корней системы уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

Ответ: 2

Правило Крамера

Пример 1. Найти решение системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$x_2 = \Delta_2 / \Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$$x_3 = \Delta_3 / \Delta = 3.$$

Реши и проверь себя по ответам:

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{Ответ: } \{1, 2, 3, 4\}.$$

2 Решить методом Крамера следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Ответ: $\{1, 2, 3, -1\}$

Аналитическая геометрия.

Линейные операции над векторами в координатах.

Пусть дан набор векторов в прямоугольной системе координат,
 $\vec{a}(x_A, y_A, z_A); \vec{b}(x_B, y_B, z_B)$, тогда линейные операции над ними в координатах
имеют вид: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B); \quad \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_A; \alpha y_A; \alpha z_A)$

Пример 1 : Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a}(0,1,1); \vec{b}(1,1,0)$

Решение: находим координаты вектора $2\vec{b}$. Умножим каждую координату вектора $\vec{b}$ на число 2. получим вектор $(2,2,0)$. Складывая соответствующие координаты векторов, получим вектор $\vec{c}(2,3,1)$.

Реши и проверь себя по ответам:

1. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a}(0,-1,1); \vec{b}(-1,1,0)$. Ответ (-2, 1, 1)
2. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$, если $\vec{a}(0,-1,1); \vec{b}(-1,1,0)$. Ответ (2, -3, 1)
3. Найти координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a}(0,-1,1); \vec{b}(-1,1,0)$. Ответ (-1, -1, 2)
4. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a}(0,-1,1); \vec{b}(-1,0,0)$. Ответ (-2, -1, 1)
5. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a}(0,-1,3); \vec{b}(-1,1,0)$. Ответ (-2, 1, 3)

Solve:

1. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0,-1,1); \vec{b}(-1,1,0)$.
2. Найти координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0,-1,1); \vec{b}(-1,1,0)$.
3. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0,-1,15); \vec{b}(-1,7,0)$.
4. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0,-1,8); \vec{b}(-1,1,4)$.
5. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 7\vec{b}$, если $\vec{a}(0,-1,1); \vec{b}(-1,1,0)$.

6. Найти координаты вектора $\vec{c} = 13\vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.
7. Find the coordinates of the vector $\vec{c} = 6\vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.
8. Найти координаты вектора $\vec{c} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.
9. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 7); \vec{b}(-3, 1, 0)$.
10. Найти координаты вектора $\vec{c} = 5\vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.
11. Найти координаты вектора $\vec{c} = 12\vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.
12. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 5); \vec{b}(7, 1, 0)$.
13. Найти координаты вектора $\vec{c} = 4\vec{a} - 8\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.
14. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -6, 1); \vec{b}(-1, 6, 0)$.
15. Найти координаты вектора $\vec{c} = 13\vec{a} - 6\vec{b}$, если $\vec{a}(0, -1, 1); \vec{b}(-1, 1, 0)$.

Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением векторов и называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

Если мы рассмотрим векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a); \vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в прямоугольной системе координат, тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;$$

С помощью получившегося равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};$$

Пример 2. Вычислить $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \perp \vec{b}$.

$$10\vec{a} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13,$$

Поскольку $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4$, $\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Пример 3. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$,

$$\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}.$$

$$\vec{a} = (1, 2, 3), \quad \vec{b} = (6, 4, -2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8:$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}.$$

$$\cos \varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \quad \varphi = \arccos \frac{2}{7}.$$

Пример 4. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \pi/3$.

$$15\vec{a} \cdot \vec{a} - 18\vec{a} \cdot \vec{b} - 10\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{b} \cdot \vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos \frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15 \cdot 16 - 28 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} +$$

$$+ 12 \cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$$

Пример 5. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$,

$$\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}.$$

$$\text{that is } \vec{a} = (3, 4, 5), \quad \vec{b} = (4, 5, -3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 + 20 - 15 = 17:$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}.$$

$$\cos \varphi = \frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{17}{50}; \quad \varphi = \arccos \frac{17}{50}.$$

Пример 6. при каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны?

$$\vec{a} = (m, 1, 0); \quad \vec{b} = (3, -3, -4)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3m - 3 = 0; \Rightarrow m = 1.$$

Пример 7. Найти скалярное произведение $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} (2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c})(5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}) &= 10\vec{a} \cdot \vec{a} + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 14\vec{a} \cdot \vec{c} + 15\vec{a} \cdot \vec{b} + 18\vec{b} \cdot \vec{b} + 21\vec{b} \cdot \vec{c} + \\ &+ 20\vec{c} \cdot \vec{a} + 24\vec{b} \cdot \vec{c} + 28\vec{c} \cdot \vec{c} = 10\vec{a} \cdot \vec{a} + 27\vec{a} \cdot \vec{b} + 34\vec{a} \cdot \vec{c} + 45\vec{b} \cdot \vec{c} + 18\vec{b} \cdot \vec{b} + 28\vec{c} \cdot \vec{c} = 10 + \\ &+ 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547. \end{aligned}$$

Пример 8. Найти угол между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$, где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ - единичные векторы и угол между $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ равен 120° .

$$\begin{aligned} \text{Решение.: let } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}) \cdot (\mathbf{m} - \mathbf{n}) = 2\mathbf{m}^2 - 4\mathbf{n}^2 + 2\mathbf{m}\mathbf{n} = \\ &= 2 - 4 + 2\cos 120^\circ = -2 + 2(-0.5) = -3; \mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{a}^2}; \mathbf{a}^2 = (2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}) \cdot (2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}) = \\ &= 4\mathbf{m}^2 + 16\mathbf{m}\mathbf{n} + 16\mathbf{n}^2 = 4 + 16(-0.5) + 16 = 12, \text{ so } \mathbf{a} = \sqrt{12}. \mathbf{b} = \sqrt{\mathbf{b}^2}; \mathbf{b}^2 = \\ &= (\mathbf{m} - \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{m} - \mathbf{n}) = \mathbf{m}^2 - 2\mathbf{m}\mathbf{n} + \mathbf{n}^2 = 1 - 2(-0.5) + 1 = 2, \text{ so } \mathbf{b} = \sqrt{2}. \text{ В итоге: } \cos \varphi = \frac{-3}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{2}} \\ &= -1/2, \Rightarrow \varphi = 120^\circ. \end{aligned}$$

Реши и проверь себя по ответам:

1. Косинус угла между векторами $\vec{a} \{2;1;3\}$ и $\vec{b} \{0;1;1\}$ is...

$$\text{Ответ: } \frac{4}{\sqrt{28}}$$

2. Косинус угла между векторами $\vec{a} \{-2;1;3\}$ и $\vec{b} \{0;1;1\}$ is...

$$\text{Ответ: } \frac{4}{\sqrt{28}}$$

3. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - единичные векторы, и $\left| \vec{a} - \vec{b} \right| = \sqrt{3}$, тогда скалярное

произведение $\left(3\vec{a} - 4\vec{b} \right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} \right)$ это...

Ответ: $-\frac{1}{2}$

4. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - единичные векторы, и $\left| \vec{a} + \vec{b} \right| = \sqrt{3}$, тогда скалярное произведение $\left(3\vec{a} - 4\vec{b} \right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} \right)$ это...

Ответ: $-\frac{3}{2}$

5. Работа силы $\vec{F} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ для прямолинейного движения материальной точки из положения А (-1; 2; 0) в положение (2; 1; 3) будет равно...

Ответ: 3

6. Работа силы $\vec{F} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ для прямолинейного движения материальной точки из положения А (-1; 3; -3) в положение В (2; 1; 3) будет равно...

...Ответ: 3

7. Косинус угла между векторами $\vec{a} \{2;1;0\}$ и $\vec{b} \{0;-1;1\}$ равен

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{10}}$

8. Косинус угла между векторами $\vec{a} \{2;-1;0\}$ и $\vec{b} \{0;1;1\}$ is...

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{10}}$

9. Если $\left| \vec{a} \right| = 2$, $\left| \vec{b} \right| = \sqrt{3}$, и $\left| \vec{a} + \vec{b} \right| = 3$ тогда скалярное произведение $\left(\vec{a} + 2\vec{b} \right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b} \right)$ есть...

Ответ: -1

10. Если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, и $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$ тогда скалярное произведение $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ есть...

Ответ : -3.

Векторное произведение векторов

Определение. Векторным произведением векторов и называется вектор, удовлетворяющий следующим условиям:

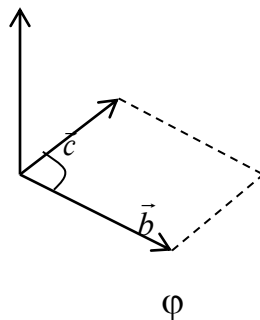
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\sin \varphi \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ правая тройка векторов.

обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ or $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.



Если векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в Декартовой прямоугольной системе координат, единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, тогда



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

Геометрический смысл векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример 9. Найти векторное произведение двух векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

отсюда, $\vec{a} = (2, 5, 1)$; $\vec{b} = (1, 2, -3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Пример 10. Зная векторы $\vec{AB}(-3,-2,6)$ и $\vec{BC}(-2,4,4)$, вычислить длину высоты AD в треугольнике ABC .

Решение. Обозначив площадь треугольника ABC через S , получим: $S = 1/2$

$BC \cdot AD$. Тогда $AD = 2S/BC$, $BC = \sqrt{BC^2} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4^2} = 6$,

$S = 1/2 |\vec{AB} \times \vec{AC}|$. $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$, отсюда, вектор $\vec{AC}$ имеет координаты

$$\vec{AC}(-5,2,10). \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & 6 \\ -5 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \vec{i} (-20 - 12) - \vec{j} (30 - 30) + \vec{k} (-6 - 10) =$$

$$= -16(2\vec{i} + \vec{k}). |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{16^2(2^2 + 1)} = 16\sqrt{5}; S = 8\sqrt{5},$$

$$AD = \frac{16\sqrt{5}}{6} = \frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

Реши и проверь себя по ответам:

1. найти площадь основания BCD пирамиды $ABCD$ если вершины имеют координаты $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$.

Ответ: $\sqrt{510}/2$ кв.ед.

2. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2, 2, 2)$, $B(4, 0, 3)$, $C(0, 1, 0)$.

Ответ: $S_{\Delta} = \frac{\sqrt{65}}{2}$ (units²).

3. Чтобы найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $\vec{a} \wedge \vec{b} = 30^\circ$.

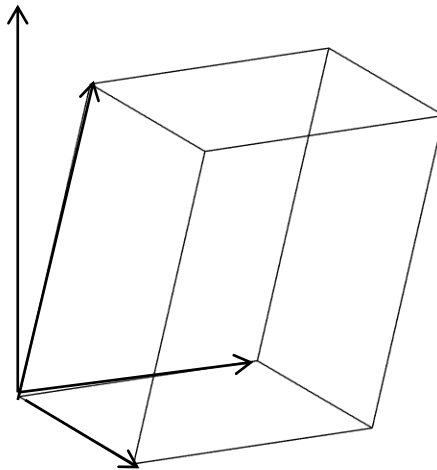
Ответ: 4.

Смешанное произведение векторов.

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, это число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ and $\vec{c}$

обозначается: $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ or $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ это значение по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равен

$$\frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

Пример 11. Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -6; 1)$$

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AC} = (4; -3; -2)$

$$\overrightarrow{AD} = (-4; -2; 2)$$

Найдем смешанное произведение векторов:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример 12. Найти объем пирамиды и длину высоты, размещенной на грани BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

$$\overrightarrow{BA} = (-2; -3; -4)$$

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BD} = (1; 4; -3)$

$$\overrightarrow{BC} = (4; -1; -2)$$

Объем пирамиды равен:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (-2(-8-3) + 3(-2+12) - 4(-1-16)) = \\ = \frac{1}{6} (22 + 30 + 68) = 20 \text{ (units}^3\text{)}$$

Чтобы найти длину высоты пирамиды будем сначала находить площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8-3) - \vec{j}(-2+12) + \vec{k}(-1-16) = -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$

$$|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{11^2 + 10^2 + 17^2} = \sqrt{121 + 100 + 289} = \sqrt{510}$$

$$S_{\text{осн}} = \sqrt{510} / 2 \text{ (units}^2\text{)}$$

$$\text{Поскольку, } V = \frac{S_{\text{осн}} \cdot h}{3}; \quad h = \frac{3V}{S_{\text{осн}}} = \frac{120}{\sqrt{510}} = \frac{4\sqrt{510}}{17} \text{ (units)}$$

Реши и проверь себя по ответам:

1. Даны векторы $a(11,10,2)$ and $b(4,0,3)$. Найти единичный вектор c ортогональный векторам a и b и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов a, b, c являлась правой.

$$\text{Ответ: } x = \frac{6}{5\sqrt{5}}, y = -\frac{1}{\sqrt{5}}, z = -\frac{8}{5\sqrt{5}}.$$

2. Найти объем пирамиды ABCD если $A(3,4,5)$, $B(1,2,1)$, $C(-2,-3,6)$, $D(3,-6,-3)$.

Ответ: 42.

3. Найти объем пирамиды ABCD если $A(-7,-5,6)$, $B(-2,5,-3)$, $C(3,-2,4)$, $D(1,2,2)$. Ответ: 77/3

4. Найти объем пирамиды ABCD если $A(1,3,1)$, $B(-1,4,6)$, $C(-2,-3,4)$, $D(3,4,-4)$.

Ответ: 3

5. Найти объем пирамиды ABCD если $A(2,4,1)$, $B(-3,-2,4)$, $C(3,5,-2)$, $D(4,2,-3)$.

Ответ: 25/3.

Различные типы уравнений прямых

Пример 13. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.

Когда $A = 3$ и $B = -1$, то уравнение прямой линии: $3x - y + C = 0$. Для нахождения коэффициента C подставляем в выражение координаты заданной точки A . Получим: $3 - 2 + C = 0$, hence $C = -1$. Итого: искомое уравнение: $3x - y - 1 = 0$.

Пример 14. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$.

Применяя формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

Пример 15: Линия задана общим уравнением прямой $12x - 5y - 65 = 0$. Необходимо записать различные уравнения прямой

уравнение линии в отрезках:

$$\frac{\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1}{\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1}$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (разделить на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

нормальное уравнение прямой:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13} \quad \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0; \quad \cos\varphi = 12/13; \sin\varphi = -5/13; p = 5.$$

Реши и проверь себя по ответам:

1. Написать уравнение прямой, проходящую через точку $A(3, 1)$ и наклоненную к линии $2x + 3y - 1 = 0$ под углом 45° .

Ответ: $x - 5y + 2 = 0$ и $5x + y - 16 = 0$.

2. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2, -3)$ и $O(0,0)$.

Ответ: $\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0}; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \quad 3x - 2y = 0.$

3. Прямые отсекает на координатных осях равные положительные сегменты.

Записать уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного

этими линиями, равен 8см^2 . Ответ: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ or $x + y - 4 = 0.$

4. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $(1, -1)$ и проходящей через точку $A(1, 2)$. Ответ: $x + y - 3 = 0$

5. Установлено общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение линии

в отрезках. Ответ: $-\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$

6. найти угловой коэффициент прямой $2x - y + 3 = 0$. Ответ 2.

7. Сумма отрезков, отсекаемых прямой $-\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ на координатных осях равна...? Ответ: -7

8. Угловой коэффициент прямой $3x - 2y + 3 = 0$ is? Ответ: $\frac{3}{2}$

9. Сумма отрезков, отсекаемых прямой $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ на координатных осях равна...? Ответ 6.

10. Каков угловой коэффициент прямой линии $4x - y = 0$? Ответ: 4.

Условия параллельности, перпендикулярности прямых, расстояние от точки до прямой

Угол между прямыми на плоскости

Определение. Если заданы линии $y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2$, тогда острый угол между прямыми линиями, определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Напомним, что прямые, заданные общими уравнениями, параллельны, если коэффициенты при x и y пропорциональны друг другу!

Расстояние от точки до прямой.

Теорема. если дана точка $M(x_0, y_0)$, тогда расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример. Показать. Что линии $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.

Найдем: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1 k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны

Пример. Найти угол между прямыми: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

$$k_1 = -3; \quad k_2 = 2 \quad \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2 - (-3)}{1 - (-3)2} \right| = 1; \quad \varphi = \pi/4.$$

Реши и проверь себя по ответам:

1. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(3, 1)$ и наклоненной к прямой линии $2x + 3y - 1 = 0$ под углом 45° . Ответ: $x - 5y + 2 = 0$ и $5x + y - 16 = 0$.

2. При каком значении параметра t прямые линии, определяемые уравнениями $3tx - 8y + 1 = 0$ и $(1+t)x - 2ty = 0$ параллельны? Ответ: $t_1 = 2$, $t_2 = -2/3$.

3. Даны вершины треугольника ABC : $A(4; 3)$, $B(-3; -3)$, $C(2; 7)$.

Расстояние от точки A до прямой BC это число ...? Ответ: $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

4. Найти расстояние между параллельными прямыми $2x + y - 2 = 0$ and

$6x + 3y + 1 = 0$. Ответ: $\frac{7}{3\sqrt{5}}$.

5. Имеют ли прямые $3x - 2y + 1 = 0$ и $2x + 5y - 12 = 0$ общую точку? Ответ: yes.

Пределы

Предел функции в точке и на бесконечности.

Одной из основных операций в теории функций-это операция, лимитирующая процесс (операция нахождения предела переменных). Это действие основано на понятии предела функции в точке или на бесконечности.

Дана функция $y = f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки x_0 и в точке x_0 может быть определена или не определена.

Определение. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех x таких, что

$$0 < |x - a| < \Delta$$

верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Определение. Если $f(x) \rightarrow A_1$ при $x \rightarrow a$ только при $x < a$, то $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = a$ **слева**, а если $f(x) \rightarrow A_2$ при $x \rightarrow a$ только при $x > a$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = a$ **справа**.

Определение. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x , $|x| > M$ выполняется неравенство

$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Лимит от постоянной величины я в любой точке равен этой константе.

Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Основные теоремы о пределах.

Рассмотрим класс функций $y = f(x)$ которые в предельной точке x_0 стремятся к нулю.

Определение. Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow a$, где a может быть числом или одной из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x . При различных значениях a функция может быть бесконечно малой или нет.

Аналогично определяется бесконечно малая величина в $x \rightarrow x_0 + 0$; $x \rightarrow x_0 - 0$;
 $x \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$.

Пример : $\alpha_1(x) = x^2$ если $x \rightarrow 0$, $\alpha_2(x) = x - 2$ если $x \rightarrow 2$; $\alpha_3(x) = \sin x$ если $x \rightarrow \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\alpha_4(x) = \frac{1}{2x-3}$ если $x \rightarrow \infty$.

Отношение двух бесконечно малых величин называется неопределенным выражением или неопределенностью типа $\left[\frac{0}{0} \right]$

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется **бесконечно малой** более высокого порядка, чем функция β .

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = A, A \neq 0, A = const$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают $\alpha \sim \beta$.

Замечательные пределы

При раскрытии неопределенностей удобно использовать следующие Замечательные пределы

1. Первый замечательный предел. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Эта формула позволяет раскрывать неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Например: вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x} = \left[\frac{0}{0} \right]$, Используя первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \cdot \frac{6x}{4x} = \frac{6}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = \frac{6}{4} \cdot 1 = \frac{3}{2} = 1,5$.

При раскрытии неопределенностей если под знаком предела бесконечно-малые величины, то вы можете заменить их эквивалентными. Это упрощает раскрытие неопределенностей $\left[\frac{0}{0}\right]$.

В предыдущем примере $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x}$ функция $\sin 6x$ заменена эквивалентной функцией $6x$, получаем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$.

2. Второй замечательный предел записывается как $\lim(1 + \frac{1}{n})^n = e$, $\lim(1 + \frac{1}{x})^x = e$

$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{1/y} = e$ (4.6); or $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$, $e \approx 2,718281$

Второй замечательный предел используется для раскрытия неопределенности вида $[1^\infty]$. Например: 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = [1^\infty]$ тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2$.

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^2 = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^2 = e^2$.

Вычислить пределы функций.

a) Find $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 1}{7x^5 + 2x + 3}$.

Решение. Прежде всего, найдем пределы числителя и знаменателя дроби.

Функции $5x^2 + 1$ и $7x^5 + 2x + 3$ бесконечно большие. Следовательно,

$\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2 + 1) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (7x^5 + 2x + 3) = \infty$.

Поэтому, имеем дело с неопределенностью типа $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Для раскрытия этой неопределенности выделим в числителе и в знаменателе X в старшей степени в качестве множителя и уменьшим

$$\text{степень } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 1}{7x^5 + 2x + 3} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 \left(\frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5} \right)}{x^5 \left(7 + \frac{2}{x^4} + \frac{3}{x^5} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}}{7 + \frac{2}{x^4} + \frac{3}{x^5}} = \frac{0}{7} = 0.$$

Ответ. 0.

b) Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}.$

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ в этом случае, нужно

разложить числитель и знаменатель на множитель и сократить дробь на общий множитель (найти квадратные корни квадратного трехчлена с использованием дискриминанта и применить теорему о разложении квадратного трехчлена на множители).

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+16}{x-4} = \frac{2+16}{2-4} = -9.$$

Ответ. -9.

c) Найти $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}.$

решение. Чтобы вычислить этот предел, подставим значение аргумента в функцию, стоящую под знаком предела.

$$\text{Получим } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(-1)^2 + 14 \cdot (-1) - 32}{(-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 8} = \frac{-45}{15} = -3.$$

Ответ. -3.

d) Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2}.$

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, Вам необходимо умножить числитель и знаменатель на выражение сопряженное числителю, и тогда сократить дробь на общий множитель.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

е) Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, Вам необходимо выбрать первый замечательный предел: $\lim_{A \rightarrow 0} \frac{\sin A}{A} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \sin kx}{kx} = k \cdot 1 = k.$$

Ответ. k

ф) Найти $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\{0 \cdot \infty\}$ в этом случае произведение должно быть преобразовано в частное, то есть изменить неопределенность $\{0 \cdot \infty\}$ на неопределенность $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} &= \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \left[\sin \frac{\pi x}{2} = 1, \text{ при } x=1 \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \\ &= \left[\begin{array}{l} y = x-1, \\ y \rightarrow 0, x = y+1 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{\cos \frac{\pi}{2}(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{\cos \left(\frac{\pi}{2}y + \frac{\pi}{2} \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{-\sin \frac{\pi}{2}y}. \end{aligned}$$

Выделим первый замечательный предел, то есть, умножим числитель и знаменатель на $\frac{\pi}{2}$. получим

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\frac{\pi}{2}y}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}y} = \frac{1}{1} = \frac{2}{\pi}.$$

Ответ. $\frac{2}{\pi}$.

i) **Найти** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\{1^\infty\}$ в этом случае, Вам необходимо выбрать второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{x-1}{x+1} - 1 \right) \right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{-2}{x+1} \right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[1 + \frac{1}{\frac{x+1}{-2}} \right]^{\frac{-2}{x+1}x} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x+1}} = e^{-2}.$$

Ответ. e^{-2} .

g) **Найти** $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{1}{x-2}}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\{1^\infty\}$ in this case, в этом случае, Вам необходимо выбрать второй замечательный предел: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{1}{x-2}} = \left[\begin{array}{l} y = x-2, \\ x = y+2, y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} (3(y+2)-5)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+3y)^{\frac{1}{y} \cdot 3} = e^3.$$

Ответ. e^3 .

h) **Найти** $\lim_{x \rightarrow 5/2} (3x-5)^{\frac{1}{x-2}}$.

Решение. Подставим значение $x = \frac{5}{2}$ в функцию, стоящую под знаком

предела. Получим $\lim_{x \rightarrow 5/2} (3x-5)^{\frac{1}{x-2}} = \left(3 \cdot \frac{5}{2} - 5\right)^{\frac{1}{5/2-2}} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Ответ. $\frac{25}{4}$.

Содержание.

Тема 10. Производная и дифференциал функции

Тема 11. Применение производных к исследованию функции

Раздел 3. Дифференциальное исчисление функции многих переменных

Тема 12. Функция нескольких переменных. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Раздел 4. Интегральное исчисление функций одной переменной

Тема 13. Неопределенный интеграл

Тема 14. Методы интегрирования

Тема 15. Определенный интеграл Вычисление определенного интеграла

Тема 16. Приложения определенного интеграла Несобственные интегралы

Раздел 5. Интегральное исчисление функции многих переменных

Тема 17. Кратные интегралы

Тема 18. Криволинейные и поверхностные интегралы

Раздел 6. Дифференциальные уравнения

Тема 19. Простейшие дифференциальные уравнения

Тема 20. Линейные дифференциальные уравнения

Тема 10. Производная и дифференциал функции

Пример .

Найти производные заданных функций

а) $y = 4x^3 + 3\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$;

Решение:

$$y = 4x^3 + 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-2};$$

$$y' = 4 \cdot 3x^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - 2(-2)x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3}.$$

б) $y = \sin x \cdot e^x$;

Решение:

Используем формулу $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

$$y' = (\sin x)' \cdot e^x + \sin x \cdot (e^x)' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x.$$

в) $y = \frac{x^2}{\cos x}$;

Решение:

Используем формулу $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$y' = \frac{(x^2)' \cos x - x^2 (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}.$$

г) $y = \sin(x^2 + 3)$;

Решение:

Используем формулу $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

$$y = \sin u, \text{ где } u = x^2 + 3;$$

$$y' = (\sin u)'_u \cdot u' = \cos u \cdot 2x = \cos(x^2 + 3) \cdot 2x.$$

д) $y = (x^2 + e^x)^{10}$;

Решение:

Используем формулу $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

$$y = u^{10}, \text{ где } u = x^2 + e^x;$$

$$y' = 10u^9 \cdot (x^2 + e^x)' = 10(x^2 + e^x)^9 \cdot (2x + e^x).$$

е) $y = x^2 \cdot e^{\sin x}$;

Решение:

$$y' = (x^2)' e^{\sin x} + x^2 (e^{\sin x})' = 2x e^{\sin x} + x^2 e^{\sin x} (\sin x)' = 2x e^{\sin x} + x^2 e^{\sin x} \cos x.$$

Пример .

Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

а) $y = \ln(\cos x)$;

Решение:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x;$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = (-\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\cos^2 x}.$$

б) $y = x e^x$.

Решение:

$$y' = e^x + x e^x,$$

$$y'' = e^x + e^x + x e^x = 2e^x + x e^x.$$

Пример .

Найти дифференциал функции y , если $y = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

Решение:

Воспользуемся свойством логарифма частного для упрощения формулы:

$$y = \ln(\sin x) - \ln x.$$

Используем формулу $dy = y' \cdot dx$.

$$y' = \frac{1}{\sin x} (\sin x)' - \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x};$$

$$dy = \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) dx.$$

Самостоятельно: Найти производную сложной функции

$$y = \frac{x^2 - 7x + 3}{(x-1)^2}; \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = ?$$

$$y = \sqrt[3]{4x} - \frac{5}{\sqrt{x}} - \ln 5$$

$$y = \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^2 5x$$

$$y = e^{-x} \arcsin x$$

$$y = -\frac{1}{60(1-3\cos x)^2}$$

$$y = \frac{1}{5^{x^2}}$$

$$y = \ln^2(\sqrt{1+e^x} - 1)$$

$$y = 2^{\arctg x^3}$$

$$y = e^{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2x}}$$

$$y = \arccos \ln \frac{1}{x^2}$$

Тема 11. Применение производных к исследованию функции

На отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ может достигать наименьшего или наибольшего значения либо в критических точках, либо на концах отрезка $[a, b]$.

Пример. Найти экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$.

Решение. Так как $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3)$, то критические точки функции $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Экстремумы могут быть только в этих точках. Так как при переходе через точку $x_1 = 2$ производная меняет знак плюс на минус, то в этой точке функция имеет максимум. При переходе через точку $x_2 = 3$ производная меняет знак минус на плюс, поэтому в точке $x_2 = 3$ у функции минимум. Вычислив значения функции в точках $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, найдем экстремумы функции: максимум $f(2) = 14$ и минимум $f(3) = 13$.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что областью определения функции является область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

В свою очередь, видно, что прямые $x = 1$, $x = -1$ являются вертикальными асимптотами кривой.

Областью значений данной функции является интервал $(-\infty; \infty)$.

Точками разрыва функции являются точки $x = 1$, $x = -1$.

Находим критические точки.

Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

Критические точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$.

Найдем вторую производную функции

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$0 < x < 1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

Находим промежутки возрастания и убывания функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает

$$\begin{aligned}
-\sqrt{3} < x < -1, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\
-1 < x < 0, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\
0 < x < 1, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\
1 < x < \sqrt{3}, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\
\sqrt{3} < x < \infty, & \quad y'' > 0, \text{ функция возрастает}
\end{aligned}$$

Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой максимума, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой минимума. Значения функции в этих точках равны соответственно $-3\sqrt{3}/2$ и $3\sqrt{3}/2$.

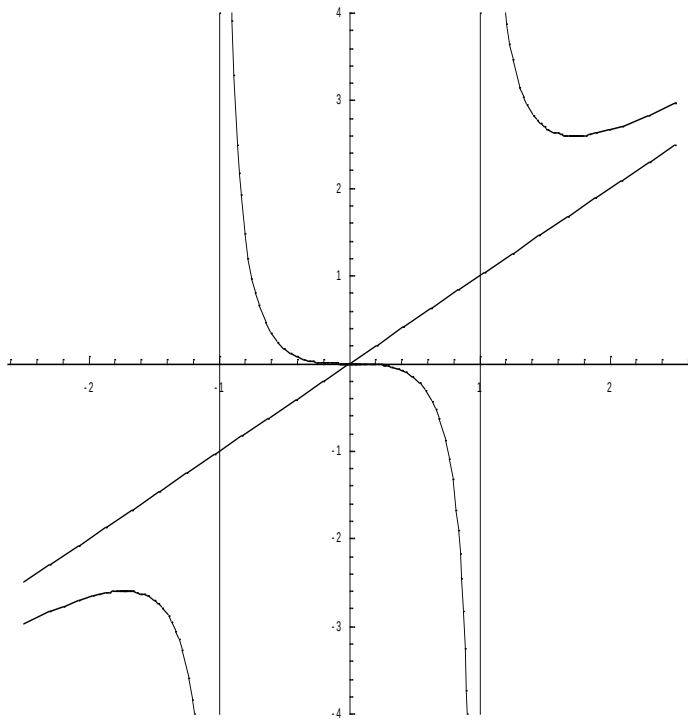
Про вертикальные асимптоты было уже сказано выше. Теперь найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты — $y = x$.

Построим график функции:



Пример .

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3x - x^3$ на отрезке $[0; 3]$.

Решение. Функция достигает наибольшего и наименьшего значения либо в критических точках, принадлежащих заданному отрезку, либо на концах этого отрезка. Найдем критические точки (т.е. точки в которых производная равна нулю или не существует):

$$y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$$

$$y' = 0 \text{ при } x = 1 \in [0; 3] \text{ и } x = -1 \notin [0; 3]$$

Найдем значение функции в этих точках и на концах отрезка

$$y(1) = 2; \quad y(0) = 0; \quad y(3) = -18$$

Выберем из предложенных значений наибольшее и наименьшее.

Итак, наибольшее значение функции на заданном отрезке равно 2 и достигается при $x = 1$, $y_{\text{наиб}}(1) = 2$, а наименьшее значение равно -18 при $x = 3$, $y_{\text{наим}}(3) = -18$.

Пример .

Исследовать функцию $y = \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение.

Общая схема исследования функций:

Найти область определения функции.

Исследовать поведение функции на концах области определения. Найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в этих точках. Найти вертикальные асимптоты.

Выяснить, является функция четной, нечетной, периодической.

Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.

Найти наклонные асимптоты графика функции.

Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.

Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.

Построить схематический график функции, используя все полученные результаты.

1. Функция не определена, если $x-1=0$, ($x=1$)

Область определения: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$

2. Т.к. $x=1$ - точка разрыва функции исследуем поведение функции в этой точке слева и справа

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty$$

Т.к. пределы равны ∞ значит $x=1$ точка разрыва второго рода.

Следовательно, прямая $x=1$ - вертикальная асимптота.

Проверим функцию на четность, нечетность. Напомним, что функция $y = f(x)$ называется четной (нечетной) если выполнены два условия:

Область определения симметрична относительно начала координат

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

Если $y = f(x)$ четная, то график симметричен относительно оси ординат, а для нечетной – относительно начала координат.

$$f(-x) = \frac{(-x+2)^3}{4(-x-1)^2} = -\frac{(x-2)^3}{4(x+1)^2}$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. общего вида.

Функция не является периодической

4. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат

с ОХ: $y = 0$ при $x = -2$;

с ОУ: $x = 0$ при $y = 2$;

Найдем промежутки знакопостоянства функции

$$y < 0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} < 0 \Rightarrow x+2 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2);$$

$$y > 0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} > 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x \in (-2; 1) \cup (1; +\infty)$$

5. Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^3}{4x(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{4};$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4}x \right] = [\infty - \infty] = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 2 \end{aligned}$$

$y = \frac{1}{4}x + 2$ – наклонная асимптота.

Для $x \rightarrow -\infty$ k и b вычисляются аналогично

6. Найдем точки экстремума функции и промежутки монотонности.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной y' : если в некотором интервале $y' > 0$, то в этом интервале функция возрастает, а если $y' < 0$, то функция убывает в этом интервале.

Функция $y = f(x)$ может иметь экстремум только в тех точках, которые принадлежат области определения и в которых ее производная равна нулю или не существует. Если y' меняет знак с “+” на “-” при переходе через исследуемую точку, то эта точка максимума, если y' меняет знак с “-” на “+” при переходе через исследуемую точку, то эта точка является точкой минимума. Если y' не меняет знак при переходе через точку x_0 , в этой точке экстремума нет.

Найдем все точки из области определения функции $y = f(x)$, в которых производная (y') обращается в ноль или не существует.

$$y' = \frac{3(x+2)^2(x-1)^2 - 2(x-1)(x+2)^3}{4(x-1)^4} = \frac{(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^3}.$$

$$y' = 0 \text{ при } x_1 = -2, x_2 = 7;$$

$$y' \text{ не существует при } x = 1$$

Составим таблицу

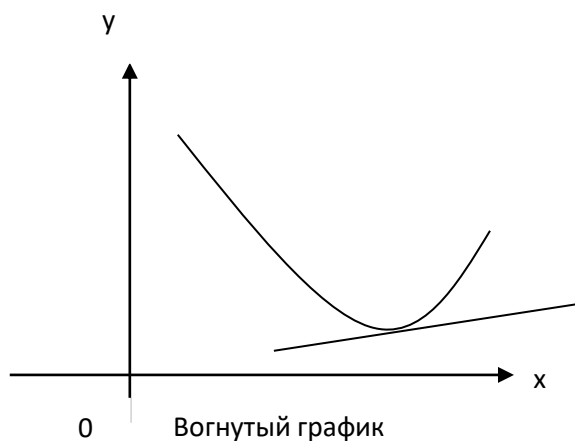
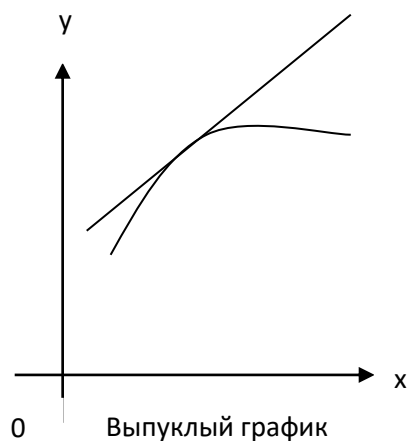
x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 7)$	7	$(7; +\infty)$
y'	+	0	+	не существует	-	0	+
y		0		не существует		≈ 5	
	возрастает		возрастает		убывает	min	возрастает

Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$, $(7; +\infty)$ и убывает на интервале $(1; 7)$. Точка $x = 7$ есть точка минимума $y_{\min} = y(7) = \frac{729}{144}$

7. Найдем точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости функции

Напомним, что график функции $y = f(x)$ называется выпуклым на интервале $(a; b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит ниже

любой своей касательной. График функции $y = f(x)$ называется вогнутым на интервале $(a; b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит выше любой своей касательной.



Точки, в которых функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называются точками перегиба.

Перегиб возможен в точках, в которых y'' равна нулю или не существует. Если $y'' < 0$ на интервале $(a; b)$, то график функции является выпуклым $(\cap)$ на этом интервале, если же $y'' > 0$, то на интервале $(a; b)$ график вогнутый $(\cup)$.

Найдем точки перегиба $y = f(x)$:

$$y'' = \frac{[2(x+2)(x-7) + (x+2)^2](x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^6} = \frac{54(x+2)}{4(x-1)^4} = \frac{27(x+2)}{2(x-1)^4}$$

$$y'' = 0 \text{ при } x = -2$$

$$y'' \text{ не существует при } x = 1$$

Составим таблицу

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	-	0	+	не существует	+
y	$\cap$	0	$\cup$	не существует	$\cup$

Точка $(-2; 0)$ - точка перегиба.

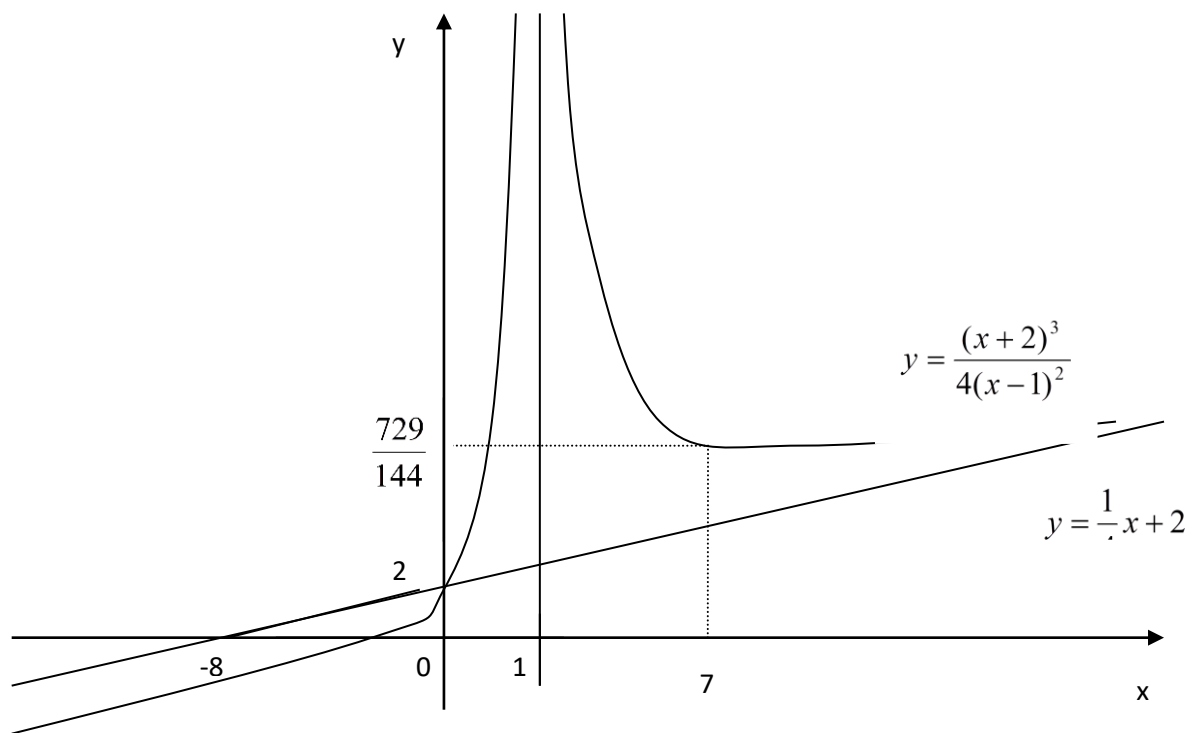
Дополнительные точки:

$$y(-3) \approx -0,01$$

$$y(3) \approx 7,8$$

$$y(-6) \approx -0,3$$

8. Построим график функции, используя результаты исследования.



Замечание:

При построении графика масштабы по оси OX и OY могут не совпадать.

Самостоятельно найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = 2x - x^2 \text{ на отрезке } [0; 1].$$

Тема 13. Неопределенный интеграл

- 1 $\int dx = x + C;$
- 2 $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1;$
- 3 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$
- 4 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$ 4a $\int e^x dx = e^x + C;$
- 5 $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
- 6 $\int \cos x dx = \sin x + C;$
- 7 $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$
- 8 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$
- 9 $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$
- 10 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| \sqrt{x^2 \pm a^2} + x \right| + C;$
- 11 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
- 12 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

Задание 1: Вычислить интеграл:

а) $\int \left(x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7 \right) dx;$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}};$	в) $\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx;$
г) $\int 3^{2-7x} dx;$	д) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx;$	е) $\int e^x \cdot \sin e^x dx;$
ж) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx;$	з) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}} dx;$	и) $\int \frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x} dx;$
к) $\int x \cdot \operatorname{tg} x^2 dx;$	л) $\int \frac{3^x}{9^x+4} dx;$	м) $\int x^2 \cdot \cos x dx;$
н) $\int \arccos x dx;$	о) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x} dx;$	п) $\int \frac{x^6}{x^2-x+1} dx;$

$$\begin{array}{lll} \text{p)} \int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2 \sin x)}; & \text{с)} \int \frac{3x dx}{\sqrt{3x^2 - 2} + \sqrt[4]{3x^2 - 2}}; & \text{т)} \int \cos 3x \cos 5x dx; \\ \text{y)} \int \sin^4 x dx; & \text{ф)} \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}; & \end{array}$$

Решение:

а) Найдем интеграл, применив свойства неопределенного интеграла и формулы (1) и (2) табличного интегрирования:

$$\begin{aligned} \int \left(x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7 \right) dx &= \int \left(x^5 + 4 \cdot x^{-3} - x^{\frac{2}{3}} - 7 \right) dx = \int x^5 dx + 4 \int x^{-3} dx - \int x^{\frac{2}{3}} dx - 7 \int dx = \\ &= \frac{x^{5+1}}{5+1} + 4 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - 7x + C = \frac{x^6}{6} + 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 7x + C = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{x^2} - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5} - 7x + C; \end{aligned}$$

Интегралы (б – л) решим методом замены переменной.

$$\text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}} \left| \begin{array}{l} t = 1 + 2x; \\ dt = 2dx; \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt[4]{t^3}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{3}{4}} dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + C = 2(1+2x)^{\frac{1}{4}} + C = 2\sqrt[4]{1+2x} + C;$$

$$\text{в)} \int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^5 \\ dt = 5x^4 dx \\ x^4 dx = \frac{1}{5} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{5} dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{\sin^2 t} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (12)}

$$= -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} t + C = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} x^5 + C;$$

$$г) \int 3^{2-7x} dx = \left| \begin{array}{l} t = 2 - 7x, \\ dt = -7dx, \\ dx = -\frac{1}{7} dt \end{array} \right| = \int 3^t \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) dt = -\frac{1}{7} \int 3^t dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (4)}

$$= -\frac{1}{7} \cdot \frac{3^t}{\ln 3} + C = -\frac{1}{7} \cdot \frac{3^{2-7x}}{\ln 3} + C;$$

$$д) \int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \arctg x \\ dt = \frac{1}{1+x^2} dx \end{array} \right| = \int t dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$= \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} \arctg^2 x + C;$$

$$е) \int e^x \cdot \sin e^x dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \sin t dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (5)}

$$= -\cos t + C = -\cos e^x + C;$$

$$ж) \int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (8)}

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2} + C;$$

$$з) \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{(e^x)^2 - (\sqrt{7})^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x, \\ dt = e^x dx, \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - (\sqrt{7})^2}} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (10)}

$$= \ln \left| \sqrt{t^2 - (\sqrt{7})^2} + t \right| + C = \ln \left| \sqrt{e^{2x} - 7} + e^x \right| + C;$$

$$\text{и) } \int \frac{\sin 5x \, dx}{9 - \cos^2 5x} = \left| \begin{array}{l} t = \cos 5x \\ dt = -5 \sin 5x \, dx \\ \sin 5x \, dx = -\frac{1}{5} dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{5} dt}{9 - t^2} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2 - 9} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2 - 3^2} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (9)}

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3} \right| + C = \frac{1}{30} \ln \left| \frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3} \right| + C;$$

$$\text{к) } \int x \cdot \operatorname{tg} x^2 \, dx = \int \frac{x \sin x^2}{\cos x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x^2 \\ dt = -2x \sin x^2 \, dx \\ x \sin x^2 \, dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (3)}

$$= -\frac{1}{2} \ln |t| + C = -\frac{1}{2} \ln |\cos x^2| + C;$$

$$\text{л) } \int \frac{3^x}{9^x + 4} \, dx = \int \frac{3^x}{(3^x)^2 + 2^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 3^x \\ dt = 3^x \ln 3 \, dx \\ 3^x \, dx = \frac{1}{\ln 3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{dt}{t^2 + 2^2} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (7)}

$$= \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2 \ln 3} \operatorname{arctg} \frac{3^x}{2} + C;$$

Самостоятельно: Найти интегралы, приводящиеся к табличным:

а) $\int (4 + 3x^2)^6 x \, dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}};$

в) $\int 2^x \sin 2^x \, dx;$

г) $\int \frac{x^3}{9 + x^8} dx;$

д) $\int \cos(5 - 2x) dx;$

е) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx;$

ж) $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} dx;$

Тема 14. Методы интегрирования

Задание 1: Вычислить интеграл:

в) $\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx;$

е) $\int e^x \cdot \sin e^x dx;$

и) $\int \frac{\sin 5x}{4 - \cos^2 5x} dx;$

н) $\int \arccos x dx;$

о) $\int \frac{x^2 + 3x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx;$

п) $\int \frac{x^6}{x^2 - x + 1} dx;$

р) $\int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2 \sin x)};$

с) $\int \frac{3x dx}{\sqrt{3x^2 - 2} + \sqrt[4]{3x^2 - 2}};$

т) $\int \cos 3x \cos 5x dx;$

у) $\int \sin^4 x dx;$

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}};$

м) $\int x^2 \cdot \cos x dx;$

Найдем интегралы (м – н) методом интегрирования по частям, используя формулу $\int U \cdot V' dx = U \cdot V - \int U' \cdot V dx$ (13):

$$\begin{aligned} \text{м) } \int x^2 \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} U = x^2; \quad U' = 2x \\ V' = \cos x; \quad V = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} U = 2x; \quad U' = 2 \\ V' = \sin x; \quad V = -\cos x \end{array} \right| = x^2 \cdot \sin x - (2x \cdot (-\cos x) - \int 2 \cdot (-\cos x) dx) = \end{aligned}$$

{для нахождения интеграла применим формулу (6)}

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C;$$

$$\text{н) } \int \arccos x dx = \left| \begin{array}{l} U = \arccos x; \quad U' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ V' = 1; \quad V = x \end{array} \right| = x \cdot \arccos x - \int x \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

{второе слагаемое вычислим с помощью замены, применив формулу (2)}

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ -x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\text{в итоге получаем } \int \arccos x dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C;$$

Самостоятельно вычислить интеграл $\int 2x \cos x dx$

Тема 15. Определенный интеграл Вычисление определенного интеграла

Пример. Вычислить определенный интеграл.

Решение. Поскольку при решении определенного интеграла используются табличные интегралы и правила как и при решении неопределенного интеграла, то результат вычислений данного задания получим как разность между полученной первообразной, вычисленной при значениях верхнего и нижнего пределов интегрирования.

$$\int_1^4 (x - x^2 + 4x - 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right) \Big|_1^4 = 4,5$$

Самостоятельно вычислить определенные интегралы:

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^2} dx;$$

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)^6 x dx;$$

Найти верхний предел, если $\int_1^* e^x dx = 1 - e.$,

Найти нижний предел интегрирования, если $\int_*^2 2\pi dx = 4\pi.$,

Найти нижний предел интегрирования, если $\int_*^3 (3x + 3) dx = \frac{45}{2}.$,

Найти нижний предел интегрирования, если $\int_*^2 3e^x dx = 3.$,

Найти путь, пройденный телом за 3 сек. от начала движения, если скорость тела $v(t) = 3t + 5$.

Найти верхний предел, если $\int_{-2}^* \frac{dx}{4 + x^2} = \frac{\pi}{4}.$

Найти верхний предел, если $\int_0^* 3x^2 dx = 27$.

Найти верхний предел, если $\int_{-3}^* (x+3)^2 dx = \frac{8}{3}$.

Найти верхний предел, если $\int_0^* (x+3)^2 dx = \frac{98}{3}$.

Найти верхний предел, если $\int_{-1}^* (4-5x) dx = 4,5$.

Найти нижний предел интегрирования, если $\int_*^3 x^2 dx = 9$.

Найти путь, пройденный телом за промежуток времени $[0;1]$ сек., если скорость тела $v(t) = 3t^2 + 2t + 1$ (м/с).

Найти путь, пройденный телом за промежуток времени $[0;2]$ сек., если скорость тела $v(t) = 4t^3 + 1$ (м/с).

Вычислить:

в) $\int_0^1 \frac{x dx}{(5x^2 + 1)^2};$

е) $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 4} dx$

и) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg 3x \, dx;$

Тема 16. Приложения определенного интеграла Несобственные интегралы

Задание: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$a) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4}};$$

Решение:

a) Несобственный интеграл I рода.

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \left. \begin{array}{l} t = x^2 + 4 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \\ x_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 4 \\ x_2 = -\infty \Leftrightarrow t_2 = \infty \end{array} \right\} = \int_4^{\infty} \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_4^b \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(t^{\frac{1}{2}} \Big|_4^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\sqrt{t} \Big|_4^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} (\sqrt{b} - 2) = \infty$$

- интеграл расходится.

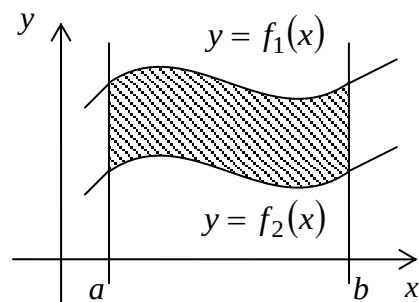
Задание : Вычислить:

a) площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$;

Решение:

a) Существуют несколько формул для вычисления площадей плоских фигур.

Площадь фигуры, заданной в декартовой системе координат, ограниченной линиями $y = f_1(x)$ - сверху, $y = f_2(x)$ - снизу, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$



определяется формулой

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx \quad (14);$$

В нашем случае линии, ограничивающие фигуру, заданы в декартовых координатах, поэтому мы будем использовать формулу (14).

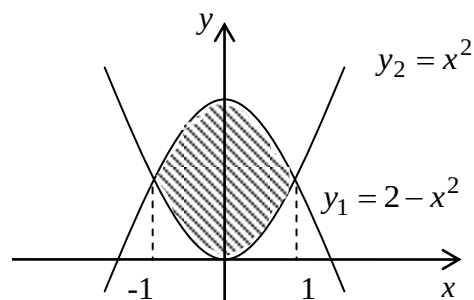
Найдем координаты точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 1 \Rightarrow a = -1; \quad b = 1.$$

$$S = \int_{-1}^1 ((2 - x^2) - x^2) dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx =$$

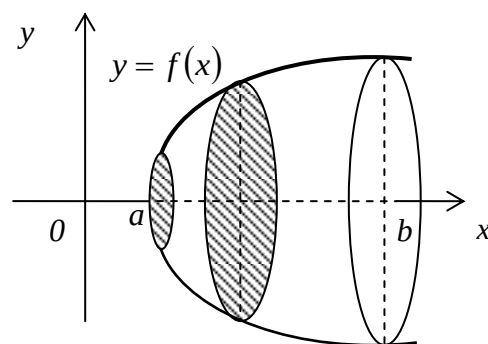
$$= 2 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) = \frac{8}{3};$$



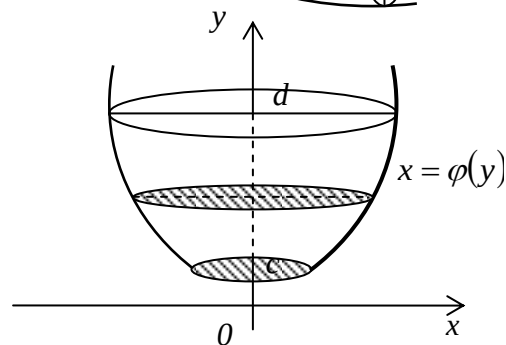
Задание: Вычислить: объем тела, полученного вращением фигуры $y = \sin x$; $y = 0$; $0 \leq x \leq \pi$, вокруг оси Ox .

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a; b]$. Тогда объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу Ox , определяется

формулой:
$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (20).$$



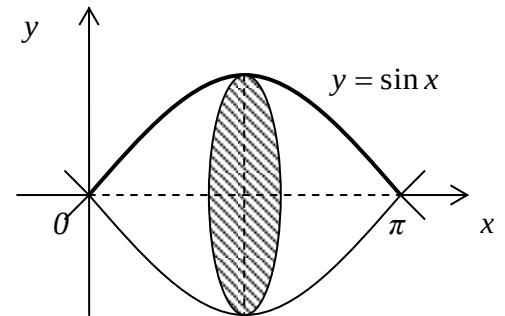
Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ ($c < d$), то объём тела, образованного вращением этой трапеции



вокруг оси Oy , по аналогии с формулой (20), равен:

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy \quad (21).$$

В условиях нашей задачи $y = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$.



$$\begin{aligned} V_x &= -\pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \left\{ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right\} = \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^\pi dx - \int_0^\pi \cos 2x dx \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} \left(\left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Самостоятельно.: 1) Вычислить площади фигур, ограниченные линиями:

$$y = x^2, \quad y = 2 - x^2;$$

2) Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

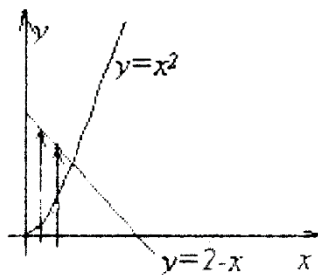
$$\int_0^\infty x \cdot e^{-x^2} dx$$

Тема 17. Кратные интегралы

Задача1. Записать двойной интеграл в виде повторного и изменить порядок интегрирования, если область интегрирования $D: y = x^2; y = 2 - x; x \geq 0$.

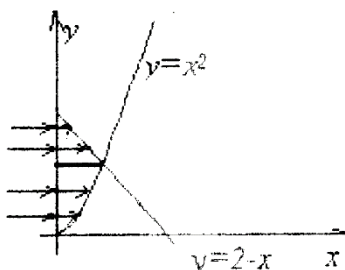
Решение. Область интегрирования D является правильной (простой) в направлении оси OY , т.к. любая прямая, параллельная оси OY , пересекает границу области D не более чем двух точках. Первую точку пересечения с линией $y = x^2$ назовем точкой входа, а линию - линией входа, ее уравнение $y = x^2$. Вторую точку пересечения с линией $y = 2 - x$ назовем точкой выхода, а линию - линией выхода. Тогда повторный интеграл в правой части составлен

из двух определенных: первый берется по переменному y , оси которого OY параллельны секущие прямые, он называется внутренним. Пределы интегрирования в нем зависят от x и совпадают с ординатами точек пересечения секущих с линией входа (нижний предел) и линией выхода (верхний предел интегрирования). При внутреннем интегрировании переменное x считается постоянным, поэтому его результатом является функция, которая после подстановки пределов интегрирования зависит от x . Второй интеграл по x берется от этой функции по переменному x , а пределы интегрирования в нем равны наименьшему (для нижнего) и наибольшему (для верхнего) значению проекций точек области D на ось OX :



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy$$

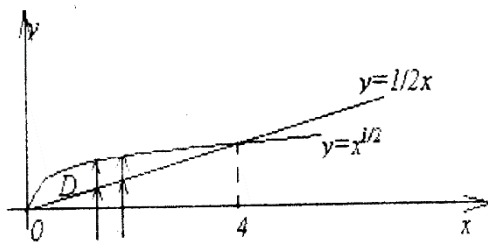
При изменении порядка интегрирования линия входа в область D имеет уравнение $x=0$, а линия выхода разбивается на две части, одна из которых имеет уравнение $\tilde{o} = \sqrt{o}$, а вторая – уравнение $\tilde{o} = 2 - o$. По свойству аддитивности двойного интеграла он разбивается на два, в каждом из которых сделана замена на повторный с внутренним интегрированием по переменному x , а внешним интегрированием по переменному y :



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{2-y}^2 f(x, y) dx$$

Задача 2. Вычислить двойной интеграл по области D , ограниченной графиками данных функций

$$\iint_D (x^2 - xy) dx dy, \quad y = \sqrt{x}; \quad y = \frac{1}{2}x.$$



Решение. Область интегрирования D является правильной (простой) в направлении оси OY , поэтому заменяем двойной интеграл повторным с внутренним интегралом по y , а внешним – по x . Линией входа в D является прямая $y = \frac{1}{2}x$, линией выхода – парабола $y = \sqrt{x}$. Вычисляем внутренний интеграл при постоянном x , применяя формулу Ньютона-Лейбница с нижним пределом $\frac{1}{2}x$ и верхним пределом $\sqrt{x}$. Находим точки пересечения параболы и прямой из решения системы

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x} \\ y &= \frac{1}{2}x \end{aligned} \quad \sqrt{x} = \frac{1}{2}x, \quad x^2 - 4x = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 4$$

Полученные абсциссы точек пересечения и дают пределы интегрирования во внутреннем интеграле.

Процесс сведения двойного интеграла к двухкратному сводится к следующему:

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2 - xy) dx dy &= \int_0^4 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} (x^2 - xy) dy = \int_0^4 \left(x^2 y - x \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} dx = \\ &= \int_0^4 \left(x^2 \sqrt{x} - x \frac{x}{2} - \left(x^2 \frac{1}{2} x - x \frac{1}{2} \frac{1}{4} x^2 \right) \right) dx = \int_0^4 \left(x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{8} x^3 \right) dx = \\ &= \left(\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{6} x^3 - \frac{3}{32} x^4 \right) \Big|_0^4 = \frac{2}{7} 128 - \frac{1}{6} 64 - \frac{3}{32} 256 = \frac{40}{21}.\end{aligned}$$

Самостоятельно

1. Изменить порядок интегрирования $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f(x, y) dx$.
2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy dx dy$ по области D, определяемой условиями $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = \frac{5}{2} \end{cases}$.

Тема 18. Криволинейные и поверхностные интегралы

Пример

1) Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода:

$$\int_L (x^3 + y) dl, \text{ где } L: y = x^3; 0 \leq x \leq 1.$$

Решение. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода может быть сведено к вычислению определенного интеграла, причем способ такого сведения зависит от представления кривой интегрирования L. Если L задана уравнением $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$, где функция $y = \varphi(x)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(x)$ для $\tilde{\delta} \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$$

Если L задана параметрически: $\tilde{o} = \tilde{o}(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$, где функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные $\tilde{o}'(t), y'(t)$, для $x \in [\alpha, \beta]$ то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Если L задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$ и функция $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную $\rho'(\varphi)$ для $\varphi \in [\alpha, \beta]$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi$$

В рассмотренном примере используется явное задание кривой L уравнением $y = x^3$. Поэтому, используя первый способ сведения интеграла по длине дуги к определенному, получим:

$$\int_L (x^3 + y) dl = \int_0^1 (x^3 + x^3) \sqrt{1 + \left((x^3)'\right)^2} dx = 2 \int_0^1 (x^3 + y) dl \sqrt{1 + \left((x^3)'\right)^2} dx =$$

$$= 2 \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \left. \begin{array}{l} t^2 = 1 + 9x^4 \\ 2tdt = 36x^3 dx \\ x_1 = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x_2 = 1 \Rightarrow t = \sqrt{10} \end{array} \right| =$$

$$2 \int_1^{\sqrt{10}} \frac{1}{18} t \sqrt{t^2} dt = \frac{1}{9} \int_1^{\sqrt{10}} t^2 dt = \frac{1}{9} \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{10}} = \frac{1}{27} (\sqrt{1000} - 1)$$

2) Вычислить работу силы $\vec{F} = x^2 \vec{i} + (x - y) \vec{j}$ при перемещении материальной точки по кривой $y = x^2$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

Решение. Работа переменной силы $\vec{F}(P(x, y), Q(x, y))$ по перемещению материальной точки по плоской кривой L с уравнением $y = \varphi(x)$ вычисляется с помощью криволинейного интеграла 2-го рода по координатам

$$A = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

который сводится к определенному интегралу с учетом способа задания кривой L. В приведенном примере кривая L задана явно уравнением $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$. Поэтому, по аналогии с переходом к определенному интегралу в предыдущем примере, достаточно заменить:

$y = x^2, dy = 2xdx$. Получим:

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_L x^2 dx + (x - y)dy = \int_0^1 x^2 dx + (x - x^2)2xdx = \\ = \int_0^1 (3x^2 - 2x^3)dx = \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример

Найти поверхностный интеграл 2-го рода $I = \iint_{\sigma} z^2 dydz + xz dydz + ydxdy$, где замкнутая поверхность σ состоит из внешней стороны части поверхности параболоида $\sigma_1: x^2 + y^2 = 4 - z, z \geq 0$, а также из части плоскости $\sigma_2: z = 0$.

Решение. Применяем формулу Остроградского-Гаусса к поверхностному интегралу 2-го рода I:

$$I = \iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

В векторной форме формула Остроградского-Гаусса имеет вид:

$$\vec{I} = \iint_{\sigma} \vec{a}_n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV,$$

где в левой части – поток Π векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность σ , а

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Но тогда $I = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a}(M) dV$, где векторное поле $\vec{a}(M)$ имеет вид:

$$\vec{a}(M) = z^2 \vec{i} + xz \vec{j} + y \vec{k}. \text{ Но } \operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial z^2}{\partial x} + \frac{\partial (xz)}{\partial y} + \frac{\partial y^2}{\partial z} = 0.$$

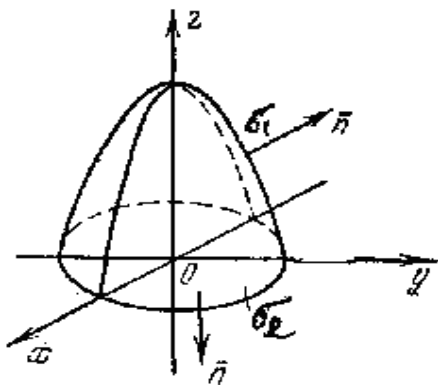


Рис. 3.

Следовательно, $I = \iiint_V 0 dV = 0$.

Пример Выяснить, является ли векторное поле

$\vec{a}(M) = (x+y)\vec{i} + (z-y)\vec{j} + 2(x+z)\vec{k}$ потенциальным.

Решение. Векторное поле $\vec{a}(M)$ – потенциально, если в каждой точке M из области определения поля $\text{rot } \vec{a}(M) = \vec{0}$. Находим

$$\text{rot } \vec{a}(M) = [\nabla, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k},$$

В этой формуле для удобства запоминания метода вычисления ротора использован формальный оператор Гамильтона «набла»:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

действующий по правилу нахождения векторного произведения в прямоугольных декартовых координатах.

Для других типов полей, исследуемых в задании 8, приведем их определения:

Соленоидальное поле $\vec{a}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ в каждой точке M области V удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M) = 0.$$

Гармоническое поле $\vec{a}(M)$ является в каждой точке области V одновременно потенциальным и соленоидальным, то есть $\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \vec{0}$ и $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$

В нашем случае $\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0.$ Тогда

$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = (0-1)\vec{i} + (0-2)\vec{j} + (0-1)\vec{k} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \neq \vec{0},$ следовательно, поле $\vec{a}(M)$ не является потенциальным.

Самостоятельно: Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L \frac{x}{y} d\ell,$

если L – дуга окружности $x = 2 \sin t, y = 2 \cos t, \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$

Тема 19. Простейшие дифференциальные уравнения

Пример. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{ydy}{y^2+1} = \frac{-xdx}{1-x^2}.$

Решение. Поскольку в уравнении переменные уже разделены. То достаточно проинтегрировать его правую и левую части. Получим

$$\int \frac{ydy}{y^2+1} = -\int \frac{xdx}{1-x^2}, \ln(y^2+1) = 0.5 \ln|x^2-1| + 0.5 \ln c \quad \text{Ответ: } y = \pm \sqrt{c|x^2-1|-1}$$

Пример. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$$

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду $y(1-x^2)dy = -x(y^2+1)dx.$ Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{ydy}{y^2+1} = \frac{-xdx}{1-x^2}. \quad \text{Интегрируем обе части последнего равенства:}$$

$\int \frac{ydy}{y^2+1} = -\int \frac{x dx}{1-x^2}, \ln(y^2+1) = 0.5 \ln|x^2-1| + 0.5 \ln c$. На основе свойств логарифмов и

метода потенцирования, получаем ответ $y = \pm \sqrt{c|x^2-1|-1}$

Пример. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

а) $(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0$.

Решение. Попробуем разделить переменные интегрирования. Для этого вынесем за скобки общий множитель: $y(x+1)dx + x(y+1)dy = 0$, разнесем слагаемые: $y(x+1)dx = -x(y+1)dy$; выражая $\frac{dy}{dx}$ из полученного уравнения

убедимся в том, что $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$ и, значит, наше уравнение является дифференциальным уравнением в разделяющихся переменных. Разделим переменные. $\left(\frac{1}{x} + 1\right)dx = -\left(\frac{1}{y} + 1\right)dy$.

Проинтегрируем получившееся выражение по соответствующим переменным: $\int \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx = -\int \left(\frac{1}{y} + 1\right)dy$.

Получим $\ln|x| + x = -\ln|y| - y + \ln C$, $\Rightarrow \ln|xy| + \ln e^{x+y} = \ln C$.

Таким образом, мы убедились в том, что $xye^{x+y} = C$ - общий интеграл заданного уравнения.

Ответ: $xye^{x+y} = C$.

б) $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$.

Решение. Убедимся в том, что переменные разделить не удастся. Поэтому поделим обе части уравнения на x .

$y' = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$ - Убедимся в том, что производная $\frac{dy}{dx}$ в представленном уравнении зависит только от отношения $\frac{y}{x}$, то есть $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ и, значит, это однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Будем решать его с помощью соответствующей замены.

Введем новую переменную $\frac{y}{x} = U$; $y' = U'x + U$.

$$U'x + U = \sin U + U;$$

$$U'x = \sin U;$$

$$\frac{dU}{\sin U} = \frac{dx}{x}; \text{ проинтегрируем выражение}$$

$$\int \frac{dU}{\sin U} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{U}{2} \right| = \ln |x| + \ln C;$$

$$\left| \operatorname{tg} \frac{U}{2} \right| = |x|C;$$

$$\left| \operatorname{tg} \frac{y}{2x} \right| = |x|C;$$

$y = 2x \cdot \operatorname{arctg} xC$ - общее решение уравнения.

Ответ: $y = 2x \cdot \operatorname{arctg} xC$.

Задание 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = x^2$.

Решение. Так как производная в данном случае является функцией, зависящей только от переменной x , то его решение может быть получено в результате последовательного интегрирования:

$$y'' = x^2 \Rightarrow y' = x^3 / 3 + C_1 \Rightarrow y = x^4 / 12 + C_1 x + C_2.$$

Ответ. $y = x^4 / 12 + C_1 x + C_2$.

Решить самостоятельно и проверить себя по ответу:

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1.

1.1. $e^x + 3y dy = x dx$. (Ответ: $e^{3y} = 3(C - xe^{-x} - e^{-x})$.)

1.2. $y' \sin x = y \ln y$. (Ответ: $\ln y = C \operatorname{tg}(x/2)$.)

1.3. $y' = (2x - 1) \operatorname{ctg} y$. (Ответ: $\ln |\cos y| = x - x^2 + C$.)

1.4. $\sec^2 x \operatorname{tg} y dy + \sec^2 y \operatorname{tg} x dx = 0$. (Ответ: $C = \operatorname{tg} y \operatorname{tg} x$.)

Тема 20. Линейные дифференциальные уравнения

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

Решение. $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$ - неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами 2-ого порядка. Решение будем искать в виде суммы решений: общего решения однородного уравнения $\bar{y}$ и частного решения неоднородного уравнения y^* , которое будем искать по виду правой части. Начнем с отыскания $\bar{y}$.

$y'' + 2y' - 3 = 0$ Составим характеристическое уравнение:
 $k^2 + 2k - 3 = 0$; $k_1 = 1$; $k_2 = -3$.

Следовательно, общее решение однородного уравнения: $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$.

y^* будем искать в виде $A \cdot e^{2x}$. y^* - частное решение уравнения, поэтому оно превращает его в верное числовое тождество. Подставим его в уравнение и вычислим A . $(y^*)' = 2Ae^{2x}$; $(y^*)'' = 4Ae^{2x}$.

$4Ae^{2x} + 4Ae^{2x} - 3Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow A = 0,2$. Значит $y^* = 0,2e^{2x}$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения $y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + 0,2e^{2x}$. Для вычисления частного решения определим значения констант исходя из начальных условий:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + 0,2e^{2x}; y' = C_1 e^x - 3C_2 e^{-3x} + 0,4e^{2x}; y(0) = 1; y'(0) = 1;$$

$$1 = C_1 e^0 + C_2 e^{-3 \cdot 0} + 0,2e^{2 \cdot 0}; 1 = C_1 e^0 - 3C_2 e^{-3 \cdot 0} + 0,4e^{2 \cdot 0};$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + 0,2 \\ 1 = C_1 - 3C_2 + 0,4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0,75 \\ C_2 = 0,05 \end{cases}$$

Ответ: $y = 0,75e^x + 0,05e^{-3x} + 0,2e^{2x}$.

Самостоятельно:

1) $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$

2) $y''' + 3y'' + 2y' = 0$

Раздел 7. Элементы теории поля

Тема 21. Теория поля.

Скалярное и векторное поля. Поверхности уровня и градиент скалярного поля. Векторное поле, векторные линии. Дивергенция векторного поля.

Циркуляция и ротор векторного поля

Раздел 8. Ряды

Тема 22. Числовые ряды

Числовой ряд. Сумма ряда. Необходимый признак сходимости ряда. Остаток ряда. Знакопостоянные ряды. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости. Признак сравнения. Признак Даламбера. Признак Коши. Интегральный признак Коши. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.

Тема 23. Степенные и функциональные ряды

Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена.

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора

Раздел 9. Элементы Теории функции комплексного переменного

Тема 24. Теория функции комплексного переменного

Понятие комплексного числа, основные определения. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Геометрическое изображение комплексных чисел. Действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме. Элементарные функции комплексного переменного.

Раздел 10. Основы вероятностного анализа

Тема 25. Теория вероятностей

Основные определения. Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики. Операции над событиями и основные теоремы. Формула

полной вероятности и формула Байеса. Повторные независимые испытания.
Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин.

Тема 26. Элементы математической статистики

Доверительные интервалы. Генеральная совокупность. Приложения.
Статистические таблицы.

Тема 21. Теория поля.

Пример 1. а) Найти величину и направление наибольшего изменения поля

$$U(M) = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2 \quad \text{в точке } M_0(1,1,1).$$

Решение. Доказано, что скалярное поле $U(M)$ имеет в данной точке M_0 максимальную производную по направлению $\frac{\partial U}{\partial l}(M_0)$, которая равна модулю градиента поля U в этой точке:

$$\max \frac{\partial U}{\partial l}(M_0) = |\text{grad}U(M_0)|,$$

если за вектор $\vec{l}$, указывающий направление дифференцирования, взять направление вектора $\text{grad}U(M_0)$. Поэтому в задаче требуется найти сам вектор

$$\text{grad}U(M_0) = \frac{\partial U}{\partial x}(M_0)\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)\vec{k}.$$

Приведем соответствующие вычисления:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(M) = 10xyz - 7y^2z + 5yz^2, \quad \frac{\partial U}{\partial x}(M_0) = 10 - 7 + 5 = 8,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(M) = 5x^2z - 14xyz + 5xz^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(M_0) = 5 - 14 + 5 = -4,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(M) = 5x^2y - 7xy^2 + 10xyz, \quad \frac{\partial U}{\partial z}(M_0) = 5 - 7 + 10 = 8,$$

$$\text{grad}U(M_0) = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \text{grad}U}(M_0) = \max \frac{\partial U}{\partial l}(M_0) = |\text{grad}U(M_0)| = \sqrt{8^2 + (-4)^2 + 8^2} = 12$$

б) Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}(M) = (x+y)\vec{i} + (z-y)\vec{j} + 2(x+z)\vec{k}$ потенциальным.

Решение. Векторное поле $\vec{a}(M)$ – потенциально, если в каждой точке M из области определения поля $\text{rot } \vec{a}(M) = \vec{0}$. Находим

$$\text{rot } \vec{a}(M) = [\nabla, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k},$$

В этой формуле для удобства запоминания метода вычисления ротора использован формальный оператор Гамильтона «набла»:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

действующий по правилу нахождения векторного произведения в прямоугольных декартовых координатах.

Для других типов полей, исследуемых в задании 8, приведем их определения:

Соленоидальное поле $\vec{a}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ в каждой точке M области V удовлетворяет условию

$$\text{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M) = 0.$$

Гармоническое поле $\vec{a}(M)$ является в каждой точке области V одновременно потенциальным и соленоидальным, то есть $\text{rot} \vec{a}(M) = \vec{0}$ и $\text{div} \vec{a}(M) = 0$

В нашем случае $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial R}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial R}{\partial y} = 0$. Тогда

$rot \vec{a}(M) = (0-1)\vec{i} + (0-2)\vec{j} + (0-1)\vec{k} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \neq \vec{0}$, следовательно, поле $\vec{a}(M)$ не является потенциальным.

Пример 2: Найти производную скалярного поля

$U(x, y, z) = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2}$ в точке $M(3; 1; 4)$ по направлению

- вектора $\vec{s} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$
- нормали к поверхности $\sigma: x^2 + 6x + 9y^2 + z^2 = 4z$, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz
- перпендикулярному к поверхности уровня функции $U(x, y, z)$, проходящей через точку $M_1(0, 0, 1)$.

Решение:

Производную по направлению ищем по формуле:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = (\text{grad} U \cdot \vec{l}^0) = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \cos \gamma$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{1+x^2+y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_M = \frac{6}{11} - \frac{3}{5} = -\frac{3}{55}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_M = \frac{2}{11}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_M = -\frac{4}{5}$$

а. Найдем вектор $\vec{l}^0 = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}$, т.е. $\vec{l}^0 = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$,

т.к. $|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$, тогда получаем $\vec{l}^0 = \left\{ \frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}} \right\}$.

Таким образом

$$\left. \frac{\partial U}{\partial l} \right|_M = -\frac{3}{55} \cdot \frac{2}{\sqrt{17}} + \frac{2}{11} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{17}} \right) - \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{17}} \right) = \frac{52}{55\sqrt{17}} = \frac{52\sqrt{17}}{935}.$$

б. Найдем вектор $\vec{l}^0 = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$, т.е. $\vec{l}^0 = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$, где $\vec{N}$ - вектор нормали к поверхности σ .

$$F(x, y, z) = x^2 + 6x + 9y^2 + z^2 - 4z = 0$$

$$\text{Тогда } \vec{N} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\},$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_M = (2x + 6)|_M = 12$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_M = 18y|_M = 18$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_M = (2z - 4)|_M = 4$$

$$\text{Получаем } \vec{N} = \{12, 18, 4\}, |\vec{N}| = \sqrt{12^2 + 18^2 + 4^2} = 22, \vec{l}^0 = \left\{ \frac{6}{11}, \frac{9}{11}, \frac{2}{11} \right\}.$$

Заметим, что $\cos\gamma > 0$, то найденный вектор образует острый угол с осью Oz , следовательно, требование задачи выполнено.

Таким образом

$$\left. \frac{\partial U}{\partial l} \right|_M = -\frac{3}{55} \cdot \frac{6}{11} + \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{11} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{11} = -\frac{16}{605}.$$

в. Найдем поверхность уровня функции $U(x, y, z)$, проходящей через точку M_1 :

$$U(x, y, z) = C = \ln(1 + 0 + 0) - \sqrt{0 + 1} = -1.$$

$$\text{Получаем поверхность } \sigma_1: \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2} = -1.$$

Аналогично предыдущему пункту находим вектор $\vec{l}^0 = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$, где $\vec{N}$ - вектор

перпендикулярный поверхности уровня σ_1

$$F(x, y, z) = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2} + 1 = 0$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_M = \frac{6}{11} - \frac{3}{5} = -\frac{3}{55},$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_M = \frac{2}{11},$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_M = -\frac{4}{5}$$

$$\vec{N} = \left\{ -\frac{3}{55}, \frac{2}{11}, -\frac{4}{5} \right\}, |\vec{N}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{55}\right)^2 + \left(\frac{2}{11}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{2045}}{55},$$

$$\vec{l}^0 = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{2045}}, \frac{10}{\sqrt{2045}}, -\frac{44}{\sqrt{2045}} \right\}$$

Таким образом

$$\left. \frac{\partial U}{\partial l} \right|_M = \left(-\frac{3}{55}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{2045}}\right) + \frac{2}{11} \cdot \frac{10}{\sqrt{2045}} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{44}{\sqrt{2045}}\right) = \frac{2045}{55\sqrt{2045}} = \frac{\sqrt{2045}}{55}.$$

Пример 3. Найти градиент скалярного поля $U(x, y, z)$

а. $U(x, y, z) = x^2 - y^2 + y \cdot z - x$

б. $U(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Построить поверхности уровня для заданных значений $U(x, y, z) = 0, \pm 1$.

Решение

а. По определению градиента скалярного поля $\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{k}$.

Находим частные производные функции $U(x, y, z)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x - 1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -2y + z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = y$$

Таким образом $\text{grad}U = (2x - 1) \cdot \vec{i} + (-2y + z) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$.

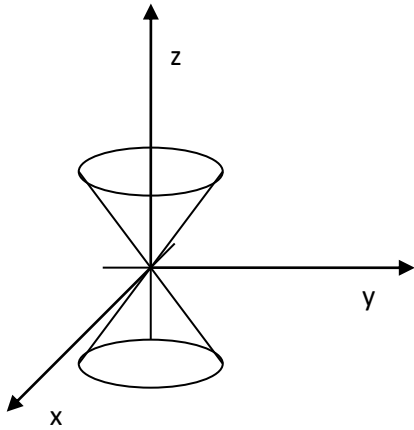
б. Аналогично пункту а), получим:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -2z$$

Таким образом $\text{grad}U = 2x \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} - 2z \cdot \vec{k}$.

Построим поверхности уровня: $U(x, y, z) = 0$

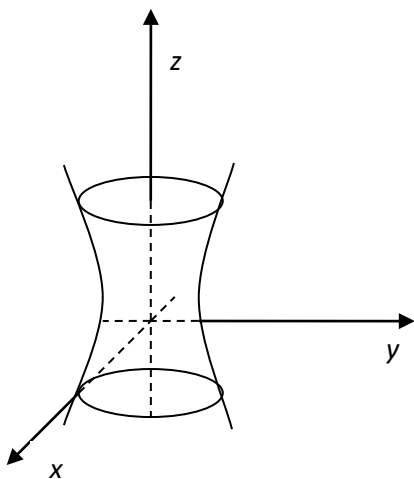
Тогда $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 = z^2$ - конус с вершиной в начале координат.



Если $U(x, y, z) = \pm 1$, то $x^2 + y^2 = z^2 \pm 1$:

$$U(x, y, z) = 1$$

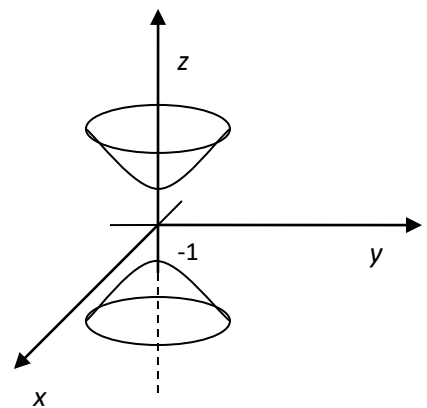
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$



Однополостный
гиперболоид вращения
вокруг оси Oz

$$U(x, y, z) = -1$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1$$



Двуполостный
гиперболоид вращения
вокруг оси Oz

Пример 4. Доказать, что векторное поле $\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ является потенциальным.

Решение:

Необходимым и достаточным условием потенциальности поля является равенство нулю вихря поля. В нашем случае

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1)\vec{i} - (1-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = \vec{0}.$$

Таким образом, поле является потенциальным.

Тема 22. Числовые ряды

Пример 1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 4n + 3}{100n^2 + 1} \right)^2.$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 4n + 5}{3^n \cdot (n+1)}.$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n \cdot (2n+3)}.$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{15n^2 + 6n + 4}{3n + 2 + 12n^2} \right)^n.$

д) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}.$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt[3]{n^7} + n}.$

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \right)$

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3} + 5}.$

Решение.

а) В данном случае $a_n = \left(\frac{n^2 - 4n + 3}{100n^2 + 1} \right)^2.$

Вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 4n + 3}{100n^2 + 1} \right)^2 = \left(\frac{1}{100} \right)^2 \neq 0.$

Следовательно, ряд расходится.

б) Поскольку в записи общего члена ряда есть показательная функция 3^n , то используем признак Даламбера.

Для рассматриваемого ряда

$$a_n = \frac{n^2 - 4n + 5}{3^n \cdot (n+1)}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 4(n+1) + 5}{3^{n+1} \cdot ((n+1)+1)}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - 4(n+1) + 5}{3^{n+1} \cdot ((n+1)+1)} : \frac{n^2 - 4n + 5}{3^n \cdot ((n+1)+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - 4(n+1) + 5}{n^2 - 4n + 5} \cdot \frac{3^n \cdot (n-1)}{3^{n+1} \cdot ((n+1)+1)} = \frac{1}{3} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, по признаку Даламбера, исходный ряд сходится.

в) Так как в записи общего члена ряда есть факториал ($n!$), то используем признак Даламбера. Для исследуемого ряда

$$a_n = \frac{n!}{5^n \cdot (2n+3)}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1} \cdot (2(n+1)+3)}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{5^{n+1} \cdot (2(n+1)+3)} : \frac{n!}{5^n \cdot (2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{5^n}{5^{n+1}} \cdot \frac{2n+3}{(2(n+1)+3)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)}{n! \cdot 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{5} = \infty. \end{aligned}$$

В пределе получили бесконечность, следовательно, исследуемый ряд расходится.

г) Воспользуемся радикальным признаком Коши. Здесь

$$a_n = \left(\frac{15n^2 + 6n + 4}{3n + 2 + 12n^2} \right)^n.$$

Вычислим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{15n^2 + 6n + 4}{3n + 2 + 12n^2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{15n^2 + 6n + 4}{3n + 2 + 12n^2} \right) = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} > 1.$$

Полученное значение больше 1, следовательно, ряд расходится.

д) Исследуем данный ряд с помощью интегрального признака Коши.
Составим соответствующий интеграл и вычислим его

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx = \left. \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ x = 2 \Rightarrow t = \ln 2 \\ x = b \Rightarrow t = \ln b \end{array} \right| = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t^2} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} \Big|_{\ln 2}^{\ln b} \right) =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Интеграл сходится, следовательно, исследуемый ряд сходится.

е) Составим ряд, эквивалентный исходному, оставив в числителе и знаменателе лишь старшие степени n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{2\sqrt[3]{n^7}+n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{n^{7/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/3-1/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/6}}.$$

Полученный ряд эквивалентен исходному, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}+3}{2\sqrt[3]{n^7}+n} : \frac{1}{n^{11/6}} = \frac{1}{2} \neq 0, \neq \infty$$

Таким образом, исходный ряд и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/6}}$ сходятся и расходятся

одновременно. Т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/6}} \left(\frac{11}{6} > 1 \right)$ сходится, следовательно, исходный ряд также сходится.

ж) Так как $\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{n^{4/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}}$ расходится $\left(\frac{5}{6} < 1 \right)$, следовательно, исходный ряд также расходится.

3) Оценим общий член ряда:

$$0 < \sin^2 n < 1 \Rightarrow 0 < \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3} + 5} < \frac{1}{\sqrt{n^3} + 5}.$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3} + 5} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ сходится } \left(\frac{3}{2} > 1 \right), \text{ следовательно, эквивалентный ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3} + 5}$$

также сходится. Т.к. из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего, то исходный ряд сходится.

Пример2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n}{(x-2)^n n^3}.$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \cdot 3^{n+1}}{|x-2|^{n+1} \cdot (n+1)^3} : \frac{(n+1) \cdot 3^n}{|x-2|^n \cdot n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \cdot 3^{n+1} \cdot |x-2|^n \cdot n^3}{(n+1)3^n \cdot |x-2|^{n+1} \cdot (n+1)^3} = \frac{3}{|x-2|}.$$

$$\text{Ряд сходится, если } \frac{3}{|x-2|} < 1 \Rightarrow |x-2| > 3$$

$$x-2 > 3 \text{ или } x-2 < -3;$$

$$x > 5 \text{ или } x < -1,$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty).$$

$$\text{Ряд расходится, если } \frac{3}{|x-2|} > 1 \Rightarrow x \in (-1; 5).$$

$$\text{Неопределенный случай: } \frac{3}{|x-2|} = 1, \text{ т.е. } x=5 \text{ или } x=-1,$$

$$\text{Пусть } x=5: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)3^n}{3^n n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \text{сходится.}$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^3} \text{ сходится как эквивалентный сходящемуся ряду.}$$

$$\text{Пусть } x=-1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)3^n}{(-3)^n n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n^3}.$$

Этот ряд – знакочередующийся. Исследуя его на абсолютную сходимость (рассматриваем ряд, состоящий из абсолютных величин), получим ряд как и при $x = 5$, а он сходится. Т.к. ряд, состоящий из абсолютных величин, сходится, то данный ряд сходится абсолютно.

Получили, что $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$ - область сходимости ряда.

Тема 23. Степенные и функциональные ряды

Пример 1. Найти три первые (отличные от 0) члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши $y' - e^{-x}y = 2x$, $y(0) = 1$.

Решение.

Для представления решения в виде ряда Маклорена необходимо найти первые три отличные от нуля значения $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0), \dots$. По условию задачи $y(0) = 1$. Выразим из уравнения y' :

$$\begin{aligned} y' &= e^{-x}y + 2x; \\ y'(0) &= e^{-0} \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1. \end{aligned} \quad (*)$$

Найдем y'' , продифференцировав обе части равенства $(*)$ по x :

$$\begin{aligned} y'' &= (e^{-x}y + 2x)' = -e^{-x}y + e^{-x}y' + 2; \\ y''(0) &= -e^{-0} \cdot 1 + e^{-0} \cdot 1 + 2 = 2. \end{aligned}$$

Окончательно получим:

$$y = 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{2}{2!} x^2 = 1 + x + x^2.$$

Пример 2. Вычислить с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ интеграл $\int_0^1 x \cdot \sin \sqrt{x} dx$.

Решение. Запишем разложение функции $y = x \cdot \sin \sqrt{x}$ в ряд Маклорена:

$$\sin \sqrt{x} = \left| t = \sqrt{x} \right| = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} - \dots + \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots =$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{1!} - \frac{\sqrt{x^3}}{3!} + \frac{\sqrt{x^5}}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n-1}{2}}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$x \sin \sqrt{x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1!} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n-1}{2}+1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^1 x \cdot \sin \sqrt{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1!} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{3! \cdot \frac{7}{2}} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{5! \cdot \frac{9}{2}} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n+1}{2}+1}}{(2n-1)! \left(\frac{2n+1}{2} + 1 \right)} + \dots \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6 \cdot \frac{7}{2}} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2}} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{11}{2}} - \dots =$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{1}{21} + \frac{1}{540} - \frac{1}{27720} - \dots \approx \frac{2}{5} - \frac{1}{21} + \frac{1}{540} (\pm 10^{-3}) =$$

$$= \frac{1512 - 180 + 7}{3780} = \frac{1339}{3780} = 0,354 (\pm 10^{-3}).$$

Заметим, что при вычислении интеграла получаем знакочередующийся ряд.

Мы отбрасываем при вычислении все слагаемые, начиная со слагаемого,

меньшего по абсолютной величине заданной точности $\left(\frac{1}{27720} < 10^{-3} \right)$.

Тема 24. Теория функции комплексного переменного

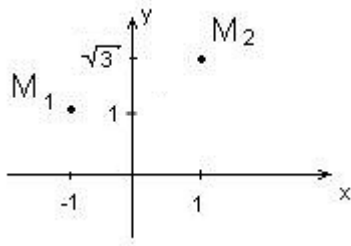
Задание 1.

1) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

2) Найти: а). $\bar{z}_1 \cdot z_2^2$; б). $\frac{z_2}{z_1}$; в). $\sqrt[3]{z_1}$

Решение.

1) Изобразим числа на комплексной плоскости. При этом числу $z_1 = -1 + i$ будет соответствовать точка $M_1(-1; 1)$, числу $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ - точка $M_2(1; \sqrt{3})$.



Для нахождения модуля и аргумента заданных чисел воспользуемся формулами:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ и } \varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{при } x > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{при } x < 0, y > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{при } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Получим:

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi_1 = \arg z_1 = \operatorname{arctg} \frac{-1}{1} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4},$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2, \quad \varphi_2 = \arg z_2 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической и показательной применим формулы:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ и } z = re^{i\varphi}.$$

Используя ранее полученные результаты, получим:

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right),$$

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}},$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$z_2 = 2 e^{i \frac{\pi}{3}}.$$

$$2) \text{ а) } \bar{z}_1 \cdot z_2^2 = (-1-i) \cdot (1+\sqrt{3}i)^2 = (-1-i) \cdot (1^2 + 2\sqrt{3}i + (\sqrt{3}i)^2) = (-1-i) \cdot (1 + 2\sqrt{3}i - 3) =$$

$$= (-1-i) \cdot (2\sqrt{3}i-2) = -2\sqrt{3}i+2-2\sqrt{3}i^2+2i = -2\sqrt{3}i+2+2\sqrt{3}+2i = \\ = (2+2\sqrt{3}) + (2-2\sqrt{3})i;$$

$$\text{б) } \frac{z_2}{z_1} = \frac{1+\sqrt{3}i}{-1+i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-i-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i^2}{(-1)^2-i^2} = \frac{-1-i-\sqrt{3}i+\sqrt{3}}{1+1} = \\ = \frac{-1+\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i;$$

в) Применим формулу $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$, $k = 0, 1, \dots, (n-1)$.

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right)$$

$$\text{при } k=0: \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi/4}{3} + i \sin \frac{3\pi/4}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right);$$

$$\text{при } k=1: \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right);$$

$$\text{при } k=2: \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 4\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 4\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) = \\ = \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{12} \right) \right).$$

Задание 2. Определить вид кривой $z = 5tgt - 3i \operatorname{sect}$.

Решение.

$$z(t) = x(t) + iy(t) = 5tgt - 3i \operatorname{sect}.$$

$$\text{Откуда } \begin{cases} x = 5tgt, \\ y = -3 \operatorname{sect}. \end{cases}$$

$$\text{Выразим } t \text{ из каждого уравнения: } \begin{cases} t = \operatorname{arctg} \frac{x}{5}, \\ t = \operatorname{arccos} \left(-\frac{3}{y} \right). \end{cases}$$

Исключим t из уравнений:

$$\operatorname{arccos} \left(-\frac{3}{y} \right) = \operatorname{arctg} \frac{x}{5}.$$

$$\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{y}\right)\right) = \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{5}\right),$$

$$\cos\left(\pi - \arccos\frac{3}{y}\right) = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5^2}}, \quad -\frac{3}{y} = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5^2}},$$

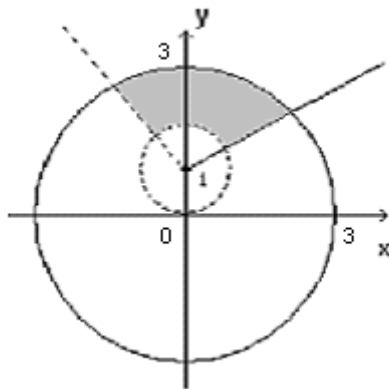
$$\frac{25y^2}{9} = x^2 + 25,$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1 \text{ - уравнение гиперболы.}$$

Задание 3. Построить область плоскости z , определяемую данными неравенствами:

$$\begin{cases} 1 < |z - i| \leq 3, \\ \frac{\pi}{6} \leq \arg(z - i) < \frac{2\pi}{3}; \end{cases}$$

Искомым множеством является пересечение кольца $1 < |z - i| \leq 3$ и внутренней части угла $\frac{\pi}{6} \leq \arg(z - i) < \frac{2\pi}{3}$:



Тема 25. Теория вероятностей

Задача 1. Бросается 4 монеты. Какова вероятность того, что три раза выпадет «решка»?

Решение. Подбрасывание монеты будем считать одним опытом. По условию задачи производится 4 одинаковых испытания. Вероятность успеха

(выпадение «решки») в каждом испытании равна $p = 0.5$; $q = 1 - p = 0.5$.

Требуется найти, что среди проведенных испытаний будет $k = 3$ успешных.

Для решения задачи воспользуемся формулой биномиального закона

распределения дискретной случайной величины. $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. В условиях

нашей задачи $P_4(3) = C_4^3 0.5^3 0.5^{4-3} = 4 * 0.5^4 = 0.25$.

Ответ: 0.25.

Задача 2. Монета подброшена 5 раз. Какова вероятность, что герб появится не более 2 раз?

Решение: В этой задаче $n = 5$, $p = 0.5$. По формуле Бернулли находим вероятность события $m \leq 2$.

$$P(m \leq 2) = P(m = 0 \text{ или } m = 1 \text{ или } m = 2) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = \\ = C_5^0 (0.5)^0 (0.5)^5 + C_5^1 (0.5)^1 (0.5)^4 + C_5^2 (0.5)^2 (0.5)^3 = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} = 0.5.$$

Задача 3. Вероятность поражения мишени при каждом выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах мишень будет поражена ровно 8 раз. Изменится ли вероятность попадания, если число выстрелов и поражений мишени увеличится в 10 раз?

Решение. Вероятность поражения мишени при одном выстреле постоянна $p = 0.75 \Rightarrow q = 1 - 0.75 = 0.25$; $n = 10$; $k = 8$. Воспользовавшись формулой Бернулли, найдем:

$$P_{10}(8) = \frac{10!}{8!2!} 0.75^8 0.25^2 = 45 * 0.1001 * 0.0625 = 0.281;$$

Тема 26. Элементы математической статистики

Задача 1. Дан ряд распределения дискретной случайной величины Y .

Определить значение x и вычислить математическое ожидание дискретной случайной величины Y .

Y	5	6	7	10
p	0,1	0,1	x	0,3

Решение. Найдем значение x из условия $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, $0,1 + 0,1 + x + 0,3 = 1 \Rightarrow x = 0,5$.

Зная x , становится возможным вычисление математического ожидания.

$$M(Y) = \sum_{i=1}^n Y_i p_i = 5 * 0,1 + 6 * 0,1 + 7 * 0,5 + 10 * 0,3 = 7,6$$

Ответ: $x = 0,5$; $M(Y) = 7,6$.

Задача 2. $DX = 3$. Используя свойства дисперсии, найдите $D(4X-2)$.

Решение. $D(AX + B) = A^2 D(X) \rightarrow D(4X - 2) = 4^2 D(X) = 16 \cdot 3 = 48$.

Ответ: 48.

Мода – значение признака, наиболее часто встречающееся в ряду распределения. Мода определяется различными способами в зависимости от вида вариационного ряда. В дискретном вариационном ряду мода – вариант с максимальной частотой в изучаемой совокупности.

Пример 3. По данным статистического наблюдения получены значения величины $X = \{5, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 5, 2, 1, 4, 2, 1, 1, 6\}$. Определить моду.

Построим вариационный ряд

X	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	4	4	5
	5	6											

Соответствующий сгруппированный вариационный ряд имеет вид:

X	1	2	3	4	5	6
F	6	3	1	2	2	1

Значение признака X , имеющего наибольшую частоту (6) равно 1.

Следовательно, для данного вариационного ряда мода = 1.

Пример 4. Даны 5 наблюдений над случайной величиной скорости автомобилей на одном из участков шоссе (км/ч):

$X_1 = 85.9; X_2 = 89.1; X_3 = 72.3; X_4 = 82.5; X_5 = 70.6$. Требуется вычислить дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Решение. Из условия известно, что $n = 5; X_1 = 85.9; X_2 = 89.1;$

$X_3 = 72.3; X_4 = 82.5; X_5 = 70.6$. По имеющимся данным вычислим:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{5} (85.9 + 89.1 + 72.3 + 82.5 + 70.6) = 80.8,$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{5} \cdot 271.49 = 54.29,$$

$$\sqrt{S_X^2} = \sqrt{54.29} = 7.37.$$

Задача 5. Случайная величина X - число лет, которые служащие проработали в торговой компании; Y - сколько отпусков за это время они брали в этой компании. Результаты наблюдений над случайными величинами X и Y : приведены в следующей таблице:

X	2	3	4	5
Y	3	4	6	8

Построить уравнения прямых регрессий Y по X и X по Y . Найти выборочный коэффициент линейной корреляции r_{XY}^* .

Решение. Из условия находим:

$$n = 4; \bar{X} = \frac{1}{4} (2 + 3 + 4 + 5) = 3.5; \bar{Y} = \frac{1}{4} (3 + 4 + 6 + 8) = 5.25; \overline{XY} = \frac{1}{4} (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 8) = 20.5;$$

$$S_X^2 = \frac{1}{4} [(2 - 3.5)^2 + (3 - 3.5)^2 + (4 - 3.5)^2 + (5 - 3.5)^2] = 1.25;$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{4} [(3 - 5.25)^2 + (4 - 5.25)^2 + (6 - 5.25)^2 + (8 - 5.25)^2] = 3.69;$$

Воспользовавшись предложенными формулами, вычислим коэффициенты прямых регрессий Y по X и X по Y .

$$\rho_{Y/X} = \frac{20.5 - 3.5 \cdot 5.25}{1.25} = 1.7; \rho_{X/Y} = \frac{20.5 - 3.5 \cdot 5.25}{3.69} = 0.58.$$

И по формулам построим уравнения прямых регрессий и выборочный коэффициент линейной корреляции.

$$Y_X - 5.25 = 1.7(X - 3.5) \Rightarrow Y_X = 1.7X - 0.7;$$

$$X_Y - 3.5 = 0.58(Y - 5.25) \Rightarrow X_Y = 0.58Y + 0.45.$$

$$r_{XY}^* = \sqrt{1.7 \cdot 0.58} = 0.99.$$

Пример 6: Фермер имеет 9 коров, количество отелов которых представлено в таблице.

Определить медиану.

Расчёт медианы осуществляется на основании следующего алгоритма:

Коровы	1	2	3	4	5	6	7	8	9
№ п/п									
Количество отелов	4	2	1	5	2	3	4	3	1

Решение задачи начинается с определения вида ряда. Поскольку варианты принимают значения отдельных чисел, ряд будет дискретным.

Внимание! Наиболее распространенной ошибкой является то, что медиана находится для неранжированного ряда, т.о. медиана, равная двум отелам (корова №5), не будет правильным решением.

Для дискретного ряда необходимо построить ранжированный ряд. Он будет иметь вид: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5

Если количество членов ряда нечетное, в ранжированном ряду находится его середина, чтобы количество вариантов по обе стороны было одинаковым. В

примере это будет варианта № 5 (3 отела), справа и слева от которой расположено по 4 варианты.

Методические рекомендации для самостоятельной работы студентов

Содержание

Раздел 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема 1. Матрицы. Действия над матрицами

Тема 2 Умножение матриц

Тема 3 Определитель матриц

Тема 4 Обратная матрица. Системы линейных уравнений

Тема 5 Системы алгебраических уравнений, Алгебраические преобразования. Метод Жордана-Гаусса.

Тема 6 Системы уравнений.

Тема 7 Правило Крамера

Тема 8 Аналитическая геометрия

Тема 9 Пределы

Матрицы. Действия над матрицами

Упражнения: Сложить матрицы

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 11 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 22 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 31 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 31 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
6) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 31 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
7) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 32 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
8) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \\
9) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 24 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 14 & 2 \end{pmatrix} \\
10) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 13 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Умножение матриц

Пример. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Начнем решать по действиям:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*1+2*1+3*2 & 1*2+2*1+3*4 & 1*3+2*3+3*5 \\ 1*1+1*1+3*2 & 1*2+1*1+3*4 & 1*3+1*3+3*5 \\ 2*1+4*1+5*2 & 2*2+4*1+5*4 & 2*3+4*3+5*5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 16 & 24 \\ 8 & 15 & 21 \\ 16 & 28 & 43 \end{pmatrix}.$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \\ 6 & 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 16 & 24 \\ 8 & 15 & 21 \\ 16 & 28 & 43 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \\ 6 & 5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}.$

Упражнения: Умножьте матрицы

1) $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 76 & 10 & 21 \\ 75 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 11 & 21 \\ 15 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 130 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 10 & 10 & 21 \\ 35 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 36 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 67 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 11 & 21 \\ 15 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$

$$7) \begin{pmatrix} 90 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 11 & 21 \\ 15 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

$$8) \begin{pmatrix} 88 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 98 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 90 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

$$9) \begin{pmatrix} 65 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 19 & 23 & 28 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 90 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

$$10) \begin{pmatrix} 87 & 10 & 21 \\ 5 & 62 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 65 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 19 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

Определитель матриц

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Решение. Для вычисления определителя третьего порядка, мы будем использовать известную формулу Саррюса (или треугольников), который может быть написан по следующей формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{23}a_{12} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{33}a_{21}a_{12} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1*5*9 + 7*6*2 + 3*8*4 - 7*5*3 - 9*4*2 - 1*8*6 = 0$$

Ответ: 0.

Упражнения: Вычислить определитель матриц

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

$$6) \begin{pmatrix} 67 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 0 & 11 & 21 \\ 15 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

$$7) \begin{pmatrix} 90 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 130 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

$$8) \begin{pmatrix} 88 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 98 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 10 & 10 & 21 \\ 35 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

$$9) \begin{pmatrix} 65 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 19 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

$$5) \begin{pmatrix} 36 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

$$10) \begin{pmatrix} 87 & 10 & 21 \\ 5 & 62 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица и системы линейных уравнений

Пример. Решить систему матричным методом.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение:

Для использования матричного метода вычислим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \text{ где } A_{ij} - \text{ это алгебраические дополнения к}$$

$$\text{элементам матрицы } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 5 - 1 + 10 - 6 = 12 \neq 0$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(10 - 2) = -8$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3 + 1) = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 5) = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 5 = 8$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \cdot 12 & 3 \cdot 3 & (-3) \cdot 3 \\ -8 \cdot 12 & 5 \cdot 3 & (-1) \cdot 3 \\ 4 \cdot 12 & (-4) \cdot 3 & 8 \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ -84 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Упражнения. Решить систему используя обратную матрицу .

$$1 \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} 2x + 2y - 4z = 6 \\ x + 3y - 5z = 6 \\ 3x - 2y + 6z = 6 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 22 \\ x - 3y - 6z = -9 \\ 2x + 4y - 4z = 10 \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} 2x - 7y + 5z = 9 \\ x + 5y - 5z = -2 \\ 4x - 2y + 7z = 24 \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} 2x - y - z = 14 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} x + 3y + 4z = 17 \\ 2x - 3y + 5z = 16 \\ 3x + 4y - z = 7 \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Системы алгебраических уравнений, Алгебраические преобразования. Метод Жордана-Гаусса.

Пример. Решить систему методом Гаусса, для этого сделаем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольной форме.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right)$$

Таким образом, данная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + \frac{5}{4}x_3 = -\frac{3}{4} \\ -3x_3 = -15 \end{cases}, \text{ вычисляем } x_3 = 5, \quad x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \cdot 5 = -\frac{28}{4} = -7$$

$$x_1 = 12 - 7 - 5 = 0$$

Ответ : $x_1 = 0$, $x_2 = -7$, $x_3 = 5$

Упражнения. Решить систему методом Гаусса.

$$1 \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} 2x + 2y - 4z = 6 \\ x + 3y - 5z = 6 \\ 3x - 2y + 6z = 6 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 22 \\ x - 3y - 6z = -9 \\ 2x + 4y - 4z = 10 \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} 2x - 7y + 5z = 9 \\ x + 5y - 5z = -2 \\ 4x - 2y + 7z = 24 \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} 2x - y - z = 14 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} x + 3y + 4z = 17 \\ 2x - 3y + 5z = 16 \\ 3x + 4y - z = 7 \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Правило Крамера

Пример. Решить систему методом Крамера.

Главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \text{ Запишем определитель по первой строке элементов с помощью}$$

$$\text{формулы: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

Запишем и вычислим вспомогательные детерминанты

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 12 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} +$$
$$+ 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} +$$
$$+ 12 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 12 \cdot 8 + 12 = -84$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 12 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 + 12 + 12 \cdot 4 = 60$$

$$\text{So } x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{0}{12} = 0 \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = -\frac{84}{12} = -7 \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{60}{12} = 5$$

Ответ: (0; -7; 5)

Упражнения. Решить систему методом Крамера

$$1 \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 22 \\ x - 3y - 6z = -9 \\ 2x + 4y - 4z = 10 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} 2x - 7y + 5z = 9 \\ x + 5y - 5z = -2 \\ 4x - 2y + 7z = 24 \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} 2x - y - z = 14 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} x + 3y + 4z = 17 \\ 2x - 3y + 5z = 16 \\ 3x + 4y - z = 7 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} 2x + 2y - 4z = 6 \\ x + 3y - 5z = 6 \\ 3x - 2y + 6z = 6 \end{cases}$$

Аналитическая геометрия

Пример 1. Доказать, что векторы перпендикулярны $\vec{a} = \{-7; 1; 2\}, \vec{b} = \{3; 2; -1\}$?

Решение: два вектора перпендикулярны, если их скалярное произведение равно 0, скалярное произведение векторов определяется проекциями на оси координат, вычисляется по формуле:

$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$ где $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\} \Rightarrow$ вычислим скалярное произведение: $(\vec{a}, \vec{b}) = -7 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -21 \neq 0 \Rightarrow$ векторы не перпендикулярны

Пример 2. Доказать, что векторы компланарны

$\vec{a} = \{-1; 2; -1\}, \vec{b} = \{0; 2; 1\}, \vec{c} = \{2; 0; 3\}$?

Пример 2. Доказать, что векторы компланарны

Решение: три вектора компланарны, если смешанное произведение векторов равно 0, смешанное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \text{ где } \vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}, \vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\} \Rightarrow \text{ВЫЧИСЛИМ}$$

смешанное произведение векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 4 + 0 - (-4) - 0 - 0 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{векторы не компланарны.}$$

Упражнения. Вычислить скалярное и векторное произведение двух заданных трех элементов векторов.

1) $\vec{a} = \{1; 3; -1\}, \vec{b} = \{3; -2; 3\}.$

2) $\vec{a} = \{2; 1; 4\}, \vec{b} = \{4; 1; 3\}.$

3) $\vec{a} = \{0; 1; 2\}, \vec{b} = \{1; 3; -2\}.$

4) $\vec{a} = \{1; 2; 1\}, \vec{b} = \{3; 1; 2\}.$

5) $\vec{a} = \{2; 1; 7\}, \vec{b} = \{2; 4; -3\}.$

6) $\vec{a} = \{-4; 1; 5\}, \vec{b} = \{1; 3; 1\}.$

7) $\vec{a} = \{3; -1; 2\}, \vec{b} = \{2; 3; -1\}.$

8) $\vec{a} = \{-4; -1; 5\}, \vec{b} = \{1; -3; 1\}.$

9) $\vec{a} = \{9; 1; 2\}, \vec{b} = \{-1; 1; 4\}.$

10) $\vec{a} = \{8; 2; 3\}, \vec{b} = \{-2; 8; 0\}.$

Пределы

Вычислить пределы функций

Вариант 1

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^5 - 4x^4 + 2}{3x^5 - 2x - 1};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 7x + 10}; \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 7x + 10};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x+4} - 3}{\sqrt{2x-1} - 1};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{4x};$$

Вариант 2

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 4x^2 + 6}{3x^3 + 10x^2 + 5x};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 13x - 7}{x^2 - 9x + 14}; \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 13x - 7}{x^2 - 9x + 14};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{4x+1} - 3};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x;$$

Вариант 3

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{5x^4 - 3x - 2}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 40x + 128}{x - 8}; \lim_{x \rightarrow 8} \frac{3x^2 - 40x + 128}{x - 8};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{4x^2};$$

Вариант 4

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 6}{2x^3 + 10x^2 + 5x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 + x - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{4}{3}} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 + x - 4};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{1+x} - 3}{2 - \sqrt[3]{x}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{3x};$$

Вариант 5

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{5x^4 + 8x - 6};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 51x + 10}{x - 10}; \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{5x^2 - 51x + 10}{x - 10};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x};$$

Вариант 6

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 - 3x^2 + 1}{3x^5 - 2x + 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{2x-1} - 3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 8x}{2x};$$

Вариант 7

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 6}{3x^3 + 10x^2 + 4x};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 6x + 5}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 6x + 5};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \operatorname{tg} 2x};$$

Вариант 8

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x - 2}{5x^3 + 3x^2 - 1};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \frac{2x^2 - 7x + 3}{5x^2 - 16x + 3}; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{5x^2 - 16x + 3};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{\sqrt{x-2} - 1};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$$

Вариант 9

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3 + (x-1)^3}{x^3 + 1};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{3x^2 + 5x - 2}{2x^2 + 3x - 2}; \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{2x^2 + 3x - 2};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1}}{x};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$$

Вариант 10

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x - 4}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8}{2x - 4};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 5x}{\arcsin 4x};$$

Содержание.

Тема 10. Производная и дифференциал функции

Тема 11. Применение производных к исследованию функции

Раздел 3. Дифференциальное исчисление функции многих переменных

Тема 12. Функция нескольких переменных. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Раздел 4. Интегральное исчисление функций одной переменной

Тема 13. Неопределенный интеграл

Тема 14. Методы интегрирования

Тема 15. Определенный интеграл. Вычисление определенного интеграла

Тема 16. Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы

Раздел 5. Интегральное исчисление функции многих переменных

Тема 17. Кратные интегралы

Тема 18. Криволинейные и поверхностные интегралы

Раздел 6. Дифференциальные уравнения

Тема 19. Простейшие дифференциальные уравнения

Тема 20. Линейные дифференциальные уравнения

Тема 10. Производная и дифференциал функции

Вариант 1

1. Найти производные

$$а) y = 3x^2 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} + 3,$$

$$б) y = \sin x \cdot \arctg x,$$

$$в) y = \frac{\cos x}{x - \sqrt[3]{x}},$$

$$г) y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 + 1}},$$

$$д) y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x,$$

$$е) y = \arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}},$$

$$ж) y = (1 + \ln \sin x)^2,$$

$$з) y = 2^{\frac{1}{\ln x}},$$

$$и) y = x \arctg \sqrt{x},$$

$$к) y = e^{\sin x},$$

$$л) y = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$м) y = \operatorname{ctg} e^x.$$

$$2. \text{ Найти } \frac{dy}{dx}:$$

$$а) x^3 + \arctg(e^y) + y(x-1) = 0,$$

$$3. \text{ Найти } \frac{d^2 y}{dx^2}:$$

$$y = x \cos 2x$$

1. Найти производные

$$а) y = 4x^5 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{x^3} - \sqrt[3]{3},$$

$$б) y = \sqrt{x} \sin x,$$

$$в) y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x},$$

$$г) y = \operatorname{ctg}(2x \sin \frac{1}{2}),$$

$$д) y = (\arccos x + \arcsin x)^2,$$

$$е) y = \arctg \ln(2x+3),$$

$$ж) y = \operatorname{tg} \frac{e^x}{x},$$

$$з) y = \sin 3x \cos 5x,$$

$$и) y = \ln(1 + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$к) y = \operatorname{tg}^2 6x - 2^x,$$

$$л) y = x \cdot 10^{\sqrt{x}},$$

$$м) y = x + e^{\sin x},$$

$$2. \text{ Найти } \frac{dy}{dx}:$$

$$y \sin x = \cos xy$$

$$3. \text{ Найти } \frac{d^2 y}{dx^2}:$$

$$y = \sqrt{1+x^2}$$

Вариант 2

Вариант 3

1. Найти производные

$$а) y = x^{10} - 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{2},$$

$$б) y = e^x \operatorname{tg} x,$$

$$в) y = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x-1}},$$

$$г) y = \operatorname{tg} \frac{x+1}{2},$$

$$д) y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2},$$

е) $y = \ln(1 - 2x)$,

ж) $y = \sin 2^x + 3^{\sin x}$,

з) $y = \frac{1}{x^2} \ln x$,

и) $y = \arctg x \cdot \ln x$,

к) $y = e^{-x^2}$,

л) $y = 10^{x \lg x}$,

м) $y = \sin 3x \cos 5x$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $e^{x-y} = \frac{x}{y}$,

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:
 $y = \ln(\lg x)$

1. Найти производные

а) $y = 7x^4 - \sqrt[7]{x^2} - \frac{1}{x^4} + \sqrt{7}$,

б) $y = e^x \operatorname{ctg} x$,

в) $y = \frac{\sqrt[3]{x} + 7}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$,

г) $y = \cos x - \frac{1}{3} \sin 2x$,

д) $y = \frac{x-1}{\ln x}$,

е) $y = x^2 e^x$,

ж) $y = \lg^2 6x - e^{\frac{1}{x}}$,

з) $y = \ln \frac{\sin x}{\cos 2x}$,

Вариант 4

и) $y = x \arcsin \frac{2x-1}{5}$,

к) $y = (e^{-\sqrt{x}} + 1)(1 + e^{2x})$,

л) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} e^x}$,

м) $y = 3x^3 \arcsin x + (x^2 + 2)\sqrt{x}$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $x^2 y = \arcsin yx$,

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:
 $y = x^2 a^x$

1. Найти производные

а) $y = 8x^3 - 3\sqrt[5]{x^4} - \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{3}$,

б) $y = x \arctg x$,

в) $y = \frac{x}{\sin x}$,

г) $y = \lg \sqrt{x} + \frac{1}{\operatorname{ctg}(2x-1)}$,

д) $y = \ln \frac{x}{e^x}$,

е) $y = \arcsin \sqrt{x} \cdot \ln x$,

ж) $y = x^2 10^{-x+2}$

з) $y = \arctg(x^2 - 3x + 1)$,

и) $y = \arcsin x \cdot 9^{-x}$,

Вариант 5

к) $y = \operatorname{ctg} \frac{\ln x + 1}{2 - \ln x}$,

л) $y = (1 + \sqrt{1+x})^2$

м) $y = \cos^3 \sqrt{e^x}$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $\arcsin \frac{x}{y} - yx = 0$,

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:
 $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Вариант 6

1. Найти производные:

а) $y = x^{10} - 3\sqrt[3]{x^7} + \frac{1}{x^2} - \sqrt[3]{10}$

б) $y = e^x \arcsin x$

в) $y = \frac{e^x}{\cos x}$

г) $y = 3\sin(3x - 1)$

д) $y = (1 - 2\sqrt[3]{x})^2$

е) $y = \frac{1}{4}tg^4 x + \frac{1}{2}tg^2 x$

ж) $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln 2x}$

з) $y = 10^{1 - \sin 2x}$

и) $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$

к) $y = \sin^2 2x \cos \frac{x}{2}$

л) $y = 3^{\arctg 3x}$

м) $y = \ln \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $\frac{y}{x} = \arctg(xy)$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:
 $y = \ln \sin x$

Вариант 7

1. Найти производные:

а) $y = 10x^5 - \frac{1}{4x^4}$

б) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \sin x$

в) $y = \frac{tg x}{\sqrt{x}}$

г) $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

д) $y = \ln(1 - ctgx)$

е) $y = e^{-x} + 10^{\ln x}$

ж) $y = \arctg \frac{1+x}{1-x}$

з) $y = \sin^2 3x \cos^3 2x$

и) $y = \arcsin e^x + \arccos \frac{1}{2^x}$

к) $y = tg 3^{\ln x}$

л) $y = x \sqrt{\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}}$

м) $y = \arctg x^2 - \ln \sin x$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $xy = \ln(e^{x+y} - 2)$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$y = \frac{x^3}{x-1}$$

Вариант 8

1.

Найти производные:

а) $y = 7x^5 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{2}$

б) $y = \sqrt[3]{x} \cos x$

в) $y = \frac{\sin x}{\cos x + 1}$

г) $y = \frac{1}{\cos^2 2x}$

д) $y = (\arctg x + x)^2$

е) $y = tg 5x \sin 7x$

ж) $y = \cos^2 2x \sin^2 3x$

з) $y = (1 + \arcsin x)^2$

и) $y = \frac{10^x + 10^{-x}}{2x}$

к) $y = \ln(x^2 - 4x)$

л) $y = ctg(\ln 2x)$

м) $y = e^{\sin x + \cos x}$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $e^x tgy - x^2 + y^3 = 0$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = \frac{\ln x}{x}$

Вариант 9

1. Найти производные:

а) $y = 3x^{12} + 4\sqrt[3]{x^7} - \frac{1}{x^2} + \sqrt[4]{10}$

б) $y = (\sqrt{x} - 4) \sin x$

в) $y = \frac{e^x}{\arctg x}$

г) $y = \sin(3x - 5)$

д) $y = e^{x^2-3} tg x$

е) $y = \ln \frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}$

ж) $y = \arctg \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

з) $y = e^x tg \frac{e^x}{\sqrt{x^4-1}}$

и) $y = \sin^2 x^2$

к) $y = 3^{\ln(x+1)}$

л) $y = \frac{\arcsin(\ln x)}{\ln(\arcsin x)}$

м) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $\frac{x}{y} = \arcsin xy$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = x\sqrt{1+x^2}$

Вариант 10

1. Найти производные:

а) $y = 7x^3 + \frac{1}{2x^2} + \sqrt{x} + \sqrt[3]{5}$

б) $y = (x^3 + 1) \sin x$

в) $y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

г) $y = \frac{tg x}{\sin x + 3}$

д) $y = 2^{x+\sin x}$

е) $y = \arccos \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

ж) $y = \ln(tg^2 2x)$

з) $y = e^{-\sqrt{x}+x}$

и) $y = \arctg(e^{x+2})$

к) $y = \sin^2 x^2$

л) $y = \arctg \sqrt[3]{x^2 - 2}$

м) $y = x^4 e^{\sqrt{x^2+4}}$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $\ln y = \cos xy - 7$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:
 $y = x \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$

Вариант 11

1. Найти производные:

а) $y = 5x^7 + \sqrt[6]{x^5} - \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{3}$

б) $y = (\sqrt[3]{x} + 1) \arctg x$

в) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt[5]{x} - x}$

г) $y = \arccot(4x^2 + 1)$

д) $y = \sin^3 x + 2 \sin x + x^3$

е) $y = \arcsin \frac{x+1}{x}$

ж) $y = 3^{\arctg(x^2+1)} + \sqrt{2}$

з) $y = \cos \ln(x^2 + 1)$

и) $y = x \arcsin \sqrt{x}$,

к) $y = 2^{\sin x}$,

л) $y = \frac{e^x + 2e^{-x}}{4}$,

м) $y = \tg(\cos x)$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = x \sin 3x$

Вариант 12

1. Найти производные:

а) $y = 4x^9 - \sqrt[7]{x^3} + \frac{1}{x^4} - \sqrt[7]{2}$

б) $y = e^x \arctg x$

в) $y = \frac{\ctg x}{x - x^3}$

г) $y = \sin\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$

д) $y = (\arctg x + e^x)^2$

е) $y = \log_2 \frac{x+1}{\sqrt{3}}$

ж) $y = \arcsin(\tg^2 x)$

з) $y = \log_2(x^2 + 4x - 2)$

и) $y = \ln(3 - \sqrt{x^2 + 1})$,

к) $y = \ctg^2 7x + (\sqrt{7})^x$,

л) $y = x^6 \cdot 2^{\sqrt{x}}$,

м) $y = x + 5e^{\tg x}$,

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $2y \ln y = x$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = \sqrt{1 - 3x^2}$

Вариант 13

1. Найти производные:

а) $y = 9x^5 - 7\sqrt[3]{x^8} + \frac{3}{x^8} - 2\sqrt[4]{5}$

- б) $y = \sqrt{x} \cos x$
 в) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{e^x - \sin x}$
 г) $y = \log_7 \sin x$
 д) $y = \sqrt{1 - \sin x} + 2$
 е) $y = 2^{\log_3 x}$
 ж) $y = \operatorname{arctg} \frac{3-x}{x-2}$
 з) $y = e^{\operatorname{arctg} x^2}$
 и) $y = \arcsin x \cdot \lg x,$

- к) $y = 3^{-x^2},$
 л) $y = 2^{x \operatorname{ctg} x},$
 м) $y = \sin x \cos 2x$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = x + y$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = \ln(\operatorname{ctg} x)$

Вариант 14

1. Найти производные:

- а) $y = -7x^3 + 2\sqrt[5]{x^3} + \frac{4}{x^8} - 3\sqrt[3]{4}$
 б) $y = e^x \operatorname{ctg} x$
 в) $y = \frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\arcsin x}$
 г) $y = \log_5 (\sqrt[3]{x} + 2x)$
 д) $y = (\sin x + \sqrt[3]{x^2})^2$
 е) $y = \log_2 \sin x$
 ж) $y = \sin \frac{\ln x}{x}$
 з) $y = e^{\sqrt[4]{2-3x}}$

и) $y = x \arccos \frac{2x+1}{9},$

к) $y = (e^{\sqrt{x}} - 2)(1 + e^{3x}),$

л) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} 2^x},$

м) $y = 2x^3 \arcsin x - (x^3 - 1)\sqrt{x}.$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $y = 1 + xe^y + \sin e^y$

Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = x^4 3^x$

Вариант 15

1. Найти производные:

- а) $y = -5x^4 - 3\sqrt[4]{x^5} + \frac{5}{x^7} - \sqrt[5]{6}$
 б) $y = e^x \operatorname{arctg} x$
 в) $y = \frac{e^x}{\operatorname{arctg} x}$
 г) $y = \sin(5x^2 + 1)$
 д) $y = \ln(1 + 2 \sin x)$
 е) $y = \operatorname{arctg} \ln x$
 ж) $y = \arcsin \frac{\sqrt{1-3x}}{x}$
 з) $y = \sin \sqrt{1+x^2}$
 и) $y = 3^{-x} \arccos x,$

к) $y = \operatorname{tg} \frac{\ln x}{2-x},$

л) $y = (1 - 2\sqrt{1+x})^3$

м) $y = \sin^4 \sqrt{e^x}$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $x = \sin(xy) + \operatorname{arctg} y$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

Тема 11. Применение производных к исследованию функции

Вариант 1

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x+6}{x^2+13}; [-5;5]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x}{(x-1)^2}$$

Вариант 2

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x}{2} + \cos x; [0; \pi]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^3 + 16}{x}$$

Вариант 3

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x-3}{x^2+16}; [-5;10]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2}$$

Вариант 4

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x+3}{x^2+7}; [-3;7]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x-1}{x^2-2x}$$

Вариант 5

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x}{2} - \sin x; \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

Вариант 6

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x}{x^2 + 16}; [-3; 7]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Вариант 7

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}} - \cos x; [-\pi; \pi]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$$

Вариант 8

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x - 4}{x^2 + 6}; [-4; 6]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{4x^2}{x^3 - 1}$$

Вариант 9

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \cos x; [-\pi; \pi]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x}{3 + x^2}$$

Вариант 10

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \cos x - \frac{x}{\sqrt{2}}; \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{2x}{1 + x^2}$$

Вариант 11

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = 3x + x^3 - 1 - 3x^2; [-1; 2]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^3 + 3}{x}$$

Вариант 12

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = x^2 e^{-x} + \sqrt{3}; [-1; 4]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^2 + 4}{x}$$

Вариант 13

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{1}{2} + x^5 - \frac{5}{3}x^3; [0; 2]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$$

Вариант 14

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x^2}{1+x} - \sqrt{2}; [-\frac{1}{2}; 4]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x}{x^2 + 5}$$

Вариант 15

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = 2x^2 - \ln x + \frac{1}{2}; [\frac{1}{4}; 1]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{2x - 8}{(x - 3)^3}$$

Тема 12. Функция нескольких переменных. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Тема 13. Неопределенный интеграл

Вариант 1.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^2 - 2x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}};$

в) $\int \frac{x^2}{(1+3x^3)^2} dx;$

г) $\int \frac{x}{1+3x^2} dx;$

д) $\int \frac{\cos x}{1-2\sin x} dx;$

е) $\int e^{-x^2} x dx;$

ж) $\int \sin 2x dx;$

з) $\int \left(\cos \frac{x}{3} + 1 \right) dx;$

и) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}};$

Вариант 2.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^4 - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3} - 11 \right) dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}};$

в) $\int \frac{x dx}{(5x^2+1)^2};$

г) $\int 7^x \sqrt{3 \cdot 7^x + 4} dx;$

д) $\int \frac{x^2}{1+3x^3} dx;$

е) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+4} dx;$

ж) $\int \sin 5x dx;$

з) $\int \frac{dx}{1+3x^2};$

и) $\int \operatorname{tg} 3x dx;$

Вариант 3.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^2 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x} - 3 \right) dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}};$

в) $\int \frac{x^2}{(1-4x^3)^2} dx;$

г) $\int \frac{x dx}{x^2+5};$

д) $\int \frac{\cos 3x}{1+\sin 3x} dx;$

е) $\int e^{-2x^2} \cdot x dx;$

ж) $\int a^{3x} dx;$

з) $\int (2 + \sin 2x) dx;$

и) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx;$

Вариант 4.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$а) \int \left(1 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{7}{x^4} \right) dx;$$

$$б) \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}};$$

$$в) \int \frac{xdx}{(3+x^2)^3};$$

$$г) \int \frac{\arctg 2x}{1+4x^2} dx;$$

$$д) \int \frac{x^2}{1+4x^3} dx;$$

$$е) \int \frac{e^x}{1-2e^x} dx;$$

$$ж) \int e^{-x^3} x^2 dx;$$

$$з) \int \sin 2x dx;$$

$$и) \int \frac{dx}{\cos^2 3x};$$

Вариант 5.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$а) \int \left(x^4 - \frac{1}{2}x + \sqrt[3]{3x} \right) dx;$$

$$б) \int \frac{xdx}{(1+x^2)^5};$$

$$в) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}};$$

$$г) \int \frac{dx}{x+3};$$

$$д) \int \frac{\cos x}{1+3\sin x} dx;$$

$$е) \int e^{2x} dx;$$

$$ж) \int 2^{-x^2} x dx;$$

$$з) \int (1-\sin 3x) dx;$$

$$и) \int \frac{dx}{\cos^2 4x};$$

Вариант 6.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$а) \int \left(2x^7 - \frac{3}{\sqrt{x}} + e^x \right) dx;$$

$$б) \int \frac{x^2 dx}{(1+3x^3)^3};$$

$$в) \int \sqrt{1-5x} dx;$$

$$г) \int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx;$$

$$д) \int \frac{e^x}{e^x+4} dx;$$

$$е) \int e^{\sin 2x} \cos 2x dx;$$

$$ж) \int 2^{-x^2} x dx;$$

$$з) \int \frac{dx}{\sin^2 3x};$$

$$и) \int \operatorname{tg} 2x dx;$$

Вариант 7.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$а) \int \frac{x^3 - 2\sqrt{x^3} + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx;$$

$$б) \int \frac{x^2 dx}{(1-2x^3)^2};$$

$$в) \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$г) \int \frac{\cos 2x}{1-\sin 2x} dx;$$

$$д) \int \frac{x}{4x^2-3} dx;$$

$$е) \int e^{\cos 3x} \sin 3x dx;$$

$$\text{ж)} \int 2^{-3x^2} x dx;$$

$$\text{з)} \int \sin \frac{x}{5} dx;$$

$$\text{и)} \int \frac{dx}{\cos^2 3x};$$

Вариант 8.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} + 1 \right) dx;$$

$$\text{б)} \int \sqrt{2x+3} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{x}{(1+4x^2)^2} dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{dx}{5-x};$$

$$\text{д)} \int \frac{dx}{4x-x \ln x};$$

$$\text{е)} \int x e^{x^2-3} x dx;$$

$$\text{ж)} \int x \cos 2x^2 dx;$$

$$\text{з)} \int \left(1 - \sin \frac{x}{5} \right) dx;$$

$$\text{и)} \int \operatorname{ctg} 2x dx;$$

Вариант 9.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \left(2 - 3\sqrt[5]{x^4} + \frac{1}{x^3} \right) dx;$$

$$\text{б)} \int \frac{x dx}{(1+3x^2)^5};$$

$$\text{в)} \int \sqrt{1-2x} dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{x^2}{1+2x^3} dx;$$

$$\text{д)} \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx;$$

$$\text{е)} \int e^{-x^3} x^2 dx;$$

$$\text{ж)} \int \sqrt{3^x} \sqrt{5^x} dx;$$

$$\text{з)} \int \frac{x^3}{\sin^2 x^4} dx;$$

$$\text{и)} \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos x} dx;$$

Вариант 10.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \left(\sqrt{x} - 2x^3 - \frac{1}{x^2} \right) dx;$$

$$\text{б)} \int (1 - \sin 2x)^5 \cos 2x dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{г)} \int \frac{x^3 dx}{1+4x^4};$$

$$\text{д)} \int \frac{\sin x}{1+2 \cos x} dx;$$

$$\text{е)} \int 2^{-x^3} x^2 dx;$$

$$\text{ж)} \int (e^x + 1)^2 dx;$$

$$\text{з)} \int e^x \sin e^x dx;$$

$$\text{и)} \int \cos 3x dx;$$

Вариант 11.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int (4x+1)^2 dx$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$	в) $\int \frac{2x}{(5+x^2)^2} dx$
г) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 3x}{1+9x^2}$	д) $\int \frac{x^4}{1+5x^5} dx$	е) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^6}} dx$
ж) $\int \frac{\operatorname{ctg}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} dx$	з) $\int \cos 5x \cdot dx$	и) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x}$

Вариант 12.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int \left(x^5 - \frac{1}{x^2} + 5 \right) dx$	б) $\int \frac{dx}{\sin(5x+1)}$	в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$
г) $\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx$	д) $\int \frac{x^2}{1+4x^3} dx$	е) $\int \frac{3\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}$
ж) $\int \frac{dx}{\sin^2(5x-1)}$	з) $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x-1)^2} dx$	и) $\int \frac{2dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$

Вариант 13.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int (3x - e^{2x} + 1) dx$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$	в) $\int \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx$
г) $\int \frac{dx}{2+x}$	д) $\int \frac{\cos 3x}{1+\sin 3x} dx$	е) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$
ж) $\int 3^{x^2} \cdot x \cdot dx$	з) $\int \operatorname{tg}(8x) dx$	и) $\int \frac{dx}{\sin^2(2x)}$

Вариант 14.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{x} dx$	б) $\int \frac{dx}{3-x}$	в) $\int \frac{\sqrt{3}}{9x^2-3} dx$
г) $\int \sin(4-x) dx$	д) $\int e^{5x+1} dx$	е) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$
ж) $\int \frac{\sin x}{1+5\cos x} dx$	з) $\int e^{4x^2} \cdot x \cdot dx$	и) $\int \frac{2^x}{1+2^{2x}} dx$

Вариант 15.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int \frac{3\sqrt{x} + 4x^2 - 5}{2x^2} dx$

б) $\int \frac{dx}{1-4x}$

в) $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}$

г) $\int \sin(5-3x) dx$

д) $\int e^{2x-2} dx$

е) $\int \frac{dx}{10x^2-1}$

ж) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

з) $\int e^{x^2} \cdot x \cdot dx$

и) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

Тема 14. Методы интегрирования

Вариант 1.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int x e^{-2x} dx;$$

$$\int x^2 \ln x dx;$$

Вариант 2.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int (x+3)e^{2x} dx;$$

$$\int x \arccos x dx;$$

Вариант 3.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int x e^x dx;$$

$$\int x \arcsin 5x dx;$$

Вариант 4.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int (x+2) \cos 5x dx;$$

$$\int \arcsin 4x dx;$$

Вариант 5.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int (x+5)e^{2x} dx;$$

$$\int x^7 \ln x dx;$$

Вариант 6.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int x \cos 2x dx;$$

$$\int 3x^2 \ln(x+2) dx;$$

Вариант 7.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int x \sin 3x dx;$$

$$\int x \cdot \arctg x dx;$$

Вариант 8.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int e^{2x} \cos x dx;$$

$$\int \arctg 3x dx;$$

Вариант 9.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int (1-x^2) \sin 3x dx;$$

$$\int \ln(x^2+5) dx;$$

Вариант 10.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int e^{-2x} (2x+5) dx;$$

$$\int (\sin^2 x + 1) x dx;$$

Вариант 11.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int e^{-2x} \cdot x \cdot dx$$

$$\int (x-3) \cdot \cos 3x \, dx$$

Вариант 12.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int (x+1) \cdot \cos 2x \, dx$$

$$\int e^{-5x} \cdot x \cdot dx$$

Вариант 13.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int (x^2 + 1) \cdot \ln x \, dx$$

$$\int (x+5) \cdot e^x \, dx$$

Вариант 14.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int (x+1) \cdot \ln x \, dx$$

$$\int x \cdot \cos 2x \, dx$$

Вариант 15.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int (x+1) \cdot e^{-x} \, dx$$

$$\int (x+1)^2 \cdot \ln x \, dx$$

Тема 15. Определенный интеграл **Вычисление определенного интеграла**

Вариант 1.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x}};$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - 2 \sin x} dx;$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{x}{3} + 1 \right) dx;$$

Вариант 2.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}};$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+3x^3} dx;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+3x^2};$$

Вариант 3.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_0^1 a^{3x} dx;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 + \sin 2x) dx;$$

$$\int_1^a \frac{\cos(\ln x)}{x} dx;$$

Вариант 4.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}};$$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(3+x^2)^3};$$

Вариант 5.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(1+x^2)^5};$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}};$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1+3\sin x} dx;$$

Вариант 6.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x+3};$$

$$\int_0^3 \left(x^4 - \frac{1}{2}x + \sqrt[3]{3x} \right) dx;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 4x};$$

Вариант 7.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \sin 3x) dx;$$

$$\int_1^2 e^{2x} dx$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x+3};$$

Вариант 8.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+4x^3} dx;$$

$$\int_0^1 2^{-x^2} x dx$$

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(1+x^2)^5};$$

Вариант 9.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_0^1 e^{-x^3} x^2 dx;$$

$$\int_1^2 \left(1 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{7}{x^4} \right) dx;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \, dx;$$

Вариант 10.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 3x};$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1-2e^x} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3x}{1 + \sin 3x} dx;$$

Вариант 11.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int_1^2 \frac{x}{x^2 + 5} dx;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3x}{1 + \sin 3x} dx;$$

$$\int_0^1 e^{-2x^2} \cdot x dx$$

Вариант 12.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int_0^1 \left(x^2 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x} - 3 \right) dx; \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+3}};$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1-4x^3)^2} dx;$$

Вариант 13.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int_0^1 \left(x^4 - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3} - 11 \right) dx;$$

$$\int_1^2 7^x \sqrt{3 \cdot 7^x + 4} dx;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x \, dx;$$

Вариант 14.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int_0^1 \left(x^2 - 2x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx;$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2} dx;$$

$$\int_1^2 \sin 2x \, dx;$$

Вариант 15.

Задание 1: Вычислить интегралы

$$\int_0^2 \frac{x^2}{(1+3x^3)^2} dx;$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} x dx$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}};$$

Тема 16. Приложения определенного интеграла Несобственные интегралы

Вариант 1.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x};$$

$$б) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Вариант 2.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}};$$

$$б) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4}.$$

Вариант 3.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а) \int_0^{\infty} e^{-x} dx;$$

$$б) \int_0^1 \ln x dx$$

Вариант 4.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}.$

Вариант 5.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4};$

б) $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$

Вариант 6.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}};$

б) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+1)^4}.$

Вариант 7.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8};$

б) $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}.$

Вариант 8.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}.$

б) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}.$

Вариант 9.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx;$

б) $\int_0^1 \frac{dx}{x + x^2}.$

Вариант 10.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{a) } \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$\text{б) } \int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}.$$

Вариант 11.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} e^x dx$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Вариант 12.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \cos x \cdot dx$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$$

Вариант 13.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\text{б) } \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

Вариант 14.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx$$

$$\text{б) } \int_1^e \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$$

Вариант 15.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$a) \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$$

$$б) \int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$$

Тема 17. Кратные интегралы

Вариант 1.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_{-1}^0 dx \int_{-8x^2}^{-2x+6} f(x, y) dy$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D xy^2 dx dy$, $D: y = x^2, y = 2x$

Вариант 2.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D xy^3 dx dy$, $D: y = x^3, y \geq 0, y = 4x$

Вариант 3.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_0^1 dy \int_{-4y-4}^{-8y^3} f(x, y) dx$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D (x+y) dx dy$, $D: y^2 = x, y = x$

Вариант 4.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_0^1 dx \int_{8x^3}^{4x+4} f(x, y) dy$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D (x^3 - 2y) dx dy$, $D: y = x^2 - 1, y = 0$

Вариант 5.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_{-1}^0 dy \int_{2y-6}^{8y^3} f(x, y) dx$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D (1+y) dx dy$, $D: y^2 = x, 5y = x$

Вариант 6.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_{-1}^0 dx \int_{4x-4}^{8x^3} f(x, y) dy$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D (x + y) dx dy$, $D : y = x^2 - 1, y = -x^2 + 1$

Вариант 7.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_0^1 dy \int_{8y^3}^{2y+6} f(x, y) dx$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D x(y-1) dx dy$, $D : y = 5x, y = x, x = 3$

Вариант 8.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_0^1 dx \int_{-2x-6}^{-8x^3} f(x, y) dy$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D (x-2) dx dy$,

$D : y = x, y = \frac{1}{2}x, x = 2$

Вариант 9.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_{-1}^0 dy \int_{-8y^3}^{-4y+4} f(x, y) dx$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D xy dx dy$, $D : y = x^3, y = 0, x = 2$

Вариант 10.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_0^1 dx \int_{-4x-4}^{-8x^3} f(x, y) dy$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D (x + y) dx dy$,

$D : y = x^3, y = 8, y = 0, x = 3$

Вариант 11.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_{-1}^0 dy \int_{4y-4}^{8y^3} f(x, y) dx$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D xy^2 dx dy$, $D : y = x, y = 0, x = 1$

Вариант 12.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_{-5}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{-6y-y^2}} f(x,y) dx$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D e^y dx dy$, $D: y = \ln x, y = 0, x = 2$

Вариант 13.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_3^5 dx \int_{-\sqrt{8x-x^2}}^0 f(x,y) dy$

2. Вычи Вариант 14.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_{-3}^{-1} dy \int_{-\sqrt{-4y-y^2}}^0 f(x,y) dx$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D xy dx dy$, $D: y = \sqrt{x}, y = 0, x + y = 2$

слить двойной интеграл по области $D \iint_D y(1+x^2) dx dy$, $D: y = x^3, y = 3x$

Вариант 15.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж

области интегрирования $\int_1^7 dy \int_0^{\sqrt{8y-y^2}} f(x,y) dx$

2. Вычислить двойной интеграл по области $D \iint_D (x^3 + 3y) dx dy$,

$D: x + y = 1, y = x^2 - 1, x \geq 0$

Тема 18. Криволинейные и поверхностные интегралы

Подготовить рефераты по данной теме с обязательным разбором решения примера на нахождение криволинейного или поверхностного интеграла.

Тема 19. Простейшие дифференциальные уравнения

Вариант 1.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$(x^2 - y^2)y' = 2xy;$
$y'' = \sin x$

Вариант 2.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

a) $xy' = y \ln(y/x);$
б) $ydx - 2x dy = 2y^4 dy;$

Вариант 3.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2;$
$y'' = \frac{1}{x}$

Вариант 4.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$xy' + y = 5;$
$y' - y(1 + x) = x;$

Вариант 5.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$xy' + xe^{y/x} - y = 0;$
$y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Вариант 6.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$x^2y' - y^2 = x^2;$	$y'' = \frac{6}{x^3}$

Вариант 7.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$xy' = y \ln(y/x);$
$(1 + e^x)yy' = e^x;$

Вариант 8.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$(x + 2y)dx + xdy = 0;$
$ydx - 2xdy = 2\delta^4 dy;$

Вариант 9.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2};$	
$y'' = 3\sin x$	

Вариант 10.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$(1 - x^2)y' = xy;$	$y'' = \frac{-4}{x^3}$

Вариант 11.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$y' \cos x = (y + 1)\sin x;$	$y'' = \frac{3}{\cos^2 x}$

Вариант 12.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$\sin xy' = y \cos x + 2 \cos x;$	$y'' = -\frac{2}{\cos^2 x};$

Вариант 13.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$(x^2 - y^2)y' = 2xy;$	$y'' = \frac{1}{x}$

Вариант 14.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$a)(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2;$	$y'' = \frac{4}{x}$

Вариант 15.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$xy' + y = 5;$	$y'' = \sin 3x$

Тема 20. Линейные дифференциальные уравнения

Найти решение дифференциального уравнения, и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

Вариант 1.

$$y'' - 6y' - 7y = 0$$

$$y'' - 6y' - 7y = x^2 - x; y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Вариант 2.

$$y'' + 4y = 0$$

$$y'' + 4y = x^2 - 3; y(0) = 2, y'(0) = -1.$$

Вариант 3.

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

$$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3, \quad y(0) = \frac{4}{3}, \quad y'(0) = \frac{1}{27}.$$

Вариант 4.

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

$$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3, \quad y(0) = 4/3, \quad y'(0) = 1/27.$$

Вариант 5.

$$y'' - 4y' + 13y = 0,$$

$$y'' - 4y' + 13y = 26x + 5, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Вариант 6.

$$y'' - 4y' = 0,$$

$$y'' - 4y' = 6x^2 + 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

Вариант 7.

$$y'' - 2y' = 0,$$

$$y'' - 4y' = 6x^2 + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Вариант 8.

$$y'' + 4y = 0$$

$$y'' + 4y = x^2 - 5; y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

Вариант 9.

$$y'' + 4y = 0$$

$$y'' + 4y = x^2 - 7; y(0) = 0, y'(0) = -1.$$

Вариант 10.

$$y'' - 3y' = 0,$$

$$y'' - 3y' = 6x^2 + 1, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Вариант 11.

$$y'' - 6y' - 7y = 0$$

$$y'' - 6y' - 7y = x^2 - 2x; y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Вариант 12.

$$y'' + 2y = 0$$

$$y'' + 4y = x^2 - 3; y(0) = -2, y'(0) = -1.$$

Вариант 13.

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

$$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 1, y(0) = 1/3, y'(0) = 1/2.$$

Вариант 14.

$$y'' - 4y' + 13y = 0,$$

$$y'' - 4y' + 13y = 6x + 4, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Вариант 15.

$$y'' - 2y' = 0,$$

$$y'' - 4y' = 6x^2 + 1, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по организации самостоятельной работы обучающихся по дисциплине
«МАТЕМАТИКА»

для студентов направления подготовки

15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение

машиностроительных производств

направленность (профиль) «Технология машиностроения»

Ставрополь 2026

Оглавление

Общая характеристика самостоятельной работы	5
План-график выполнения самостоятельной работы	8
Контрольные точки и виды отчетности по ним	17
Методические рекомендации по изучению теоретического материала.....	30
Методические указания по видам работ, предусмотренных рабочей программой дисциплины.....	37
Список рекомендуемой литературы.....	39

Введение

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования – «подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности».

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:

- изучение и систематизацию официальных государственных документов – законов, постановлений, указов, нормативно-инструкционных и справочных материалов с использованием информационно-поисковых систем «Консультант-плюс», «Гарант», глобальной сети «Интернет»;
- изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;
- подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ;
- участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.

Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.

Общая характеристика самостоятельной работы

Цели и основные задачи СРС

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой специалиста и бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных

занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

Виды самостоятельной работы

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации, содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.).

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателей являются:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание рефератов;
- подготовка к семинарам и лабораторным работам, их оформление;
- составление аннотированного списка статей из соответствующих журналов по отраслям знаний (педагогических, психологических, методических и др.);
- подготовка рецензий на статью, пособие;
- выполнение микроисследований;
- подготовка практических разработок;

- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;

- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов.

(В зависимости от особенностей факультета перечисленные виды работ могут быть расширены, заменены на специфические).

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

- текущие консультации;
- коллоквиум как форма контроля освоения теоретического содержания дисциплин: (в часы консультаций, предусмотренных учебным планом);

- прием и разбор домашних заданий (в часы практических занятий);
- прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р);
- выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин (руководство, консультирование и защита курсовых работ (в часы, предусмотренные учебным планом);

- выполнение учебно-исследовательской работы (руководство, консультирование и защита УИРС);

- прохождение и оформление результатов практик (руководство и оценка уровня сформированности профессиональных умений и навыков);

- выполнение выпускной квалификационной работы (руководство, консультирование и защита выпускных квалификационных работ) и др.

План-график выполнения самостоятельной работы

Технологическая карта самостоятельной работы обучающегося

Организация СРС

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Организацию самостоятельной работы студентов обеспечивают: факультет, кафедра, учебный и методический отделы, преподаватель, библиотека, ТСО, ИВТ, издательство и др.

Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя студент должен:

- освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем в соответствии с Государственными образовательными стандартами высшего образования (ФГОС ВО) по данной дисциплине.

- планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем.

- самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя.

- выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

студент может:

сверх предложенного преподавателем (при обосновании и согласовании с ним) и минимума обязательного содержания, определяемого ФГОС ВО по данной дисциплине:

- самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;

- предлагать дополнительные темы и вопросы для самостоятельной проработки;

- в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;

- предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;

- использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;

– использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего специалиста, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий.

Общие рекомендации по организации самостоятельной работы

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

- а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;
- б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение – это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним.

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков – важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность – способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;
- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;
- привычная последовательность и систематичность деятельности;
- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является *утреннее время* (с 8 до 14 часов), причем максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1 – 1,5 часа нужны перерывы по 10 – 15 мин, через 3 – 4 часа работы отдых должен быть продолжительным – около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Физически здоровый молодой человек, обладающий хорошей подготовкой и нормальными способностями, должен, будучи студентом, отдавать *учению 9 – 10 часов в день* (из них 6 часов в вузе и 3 – 4 часа дома). Любой предмет нельзя изучить за несколько дней перед экзаменом. Если студент в году работает систематически, то он быстро все вспомнит, восстановит забытое. Если же подготовка шла аврально, то у студента не будет даже общего представления о предмете, он забудет все сданное.

Следует взять за правило: *учиться ежедневно, начиная с первого дня семестра.*

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр.

Ритм в работе – это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы – это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во

время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут – работа, 5 – 10 минут – перерыв; после 3 часов работы перерыв – 20 – 25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

Самостоятельная работа студента – необходимое звено становления исследователя и специалиста

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не только к моральным, нравственным свойствам человека, но и в особенности, постоянно возрастающие требования в области образования – обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной мыслью и языком науки является необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для

реализации этой задачи. Ибо во время учебы в вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этого пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения (лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контролирования за их деятельностью. Отметим, что нельзя ограничиваться только приобретением знаний предусмотренных программой изучаемой дисциплины, надо постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т.е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность методов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать его, чтобы изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебы с будущей профессиональной деятельности.

Технологическая карта самостоятельной работы обучающегося

Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов)	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателям	Всего
2 семестр					
ИД-2 _{УК-1}	Выполнение контрольной работы	Контрольная работа	9	1	10
ИД-2 _{УК-1}	Подготовка к лекциям	конспект	1,6	0,2	1,8
ИД-2 _{УК-1}	Подготовка к практическим работам	Собеседование	3,2	0,4	3,6
ИД-2 _{УК-1}	Самостоятельное изучение литературы	Собеседование	13,1	1,5	4,6
ИД-2 _{УК-1}	Самостоятельное решение задач из лабораторных работ	отчет	25,4	10,6	16
Итого за 1 семестр			43,3	12,7	26
Итого			43,3	12,7	26
					82

Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация в форме экзамена предусматривает проведение обязательной экзаменационной процедуры

Типовые контрольные задания и иные материалы, характеризующие этапы формирования компетенций

Вопросы для собеседования по дисциплине «Математика»

Базовый уровень

Тема 5. Функции одной переменной и числовые последовательности.

1. Дайте определение функции.
2. Что называется областью определения функции?
3. Что называется областью значений функции?
4. Дайте определение графика функции $y=f(x)$.
5. Дайте определение возрастающей и убывающей функции.
6. Какая функция называется монотонной?
7. Дайте определение четной и нечетной функции.
8. Какая функция называется периодической?
9. Определите нули функции.
10. Что называется промежутком знакопостоянства функции?
11. Какая функция называется ограниченной?
12. Какие Вы знаете способы задания функций?

Тема 6. Предел функции. Непрерывность функции.

1. Что называется пределом функции в точке?
2. Определите предел функции на бесконечности.
3. Чему равен предел постоянной величины?
4. Чему равен предел: а) суммы; б) разности; в) произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$?
5. Чему равен предел частного функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ($x \rightarrow a$)?
 1. Запишите первый замечательный предел и следствия из него.
 2. Запишите второй замечательный предел и следствия из него.
6. Что называется приращением аргумента?
7. Что называется приращением функции?
8. Какая функция называется непрерывной в точке x_0 ?
9. Какая функция называется непрерывной на интервале?
10. Что называется точкой разрыва функции?

Тема 7. Производная функции. Правила дифференцирования. Дифференциал функции.

1. Какие задачи, приводящие к понятию производной, Вам известны?
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Чему равна производная:
 - а) постоянной; б) алгебраической суммы дифференцируемых функций;

в) произведения двух дифференцируемых функций; г) дроби; д) сложной функции; е) обратной функции?

1. Запишите формулы для нахождения производных основных элементарных функций.
2. Дайте определение дифференциала функции.
3. Сформулируйте основные свойства дифференциалов.

Тема 8. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.

1. Запишите формулу логарифмического дифференцирования. Когда применяется формула логарифмического дифференцирования?
2. Дайте определение неявного задания функции. Приведите примеры. Как от неявного задания перейти к явному заданию функции? Всегда ли это можно сделать. Приведите примеры.
3. Как проводят дифференцирование неявной функции?
4. Дайте определение параметрически заданной функции. Приведите примеры. Расскажите как от параметрического задания функции перейти к явному заданию функции.

Тема 9. Приложения производной.

1. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов функции.
2. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов функции.
3. Расскажите о формуле Тейлора и формуле Маклорена. Для чего эти формулы могут использоваться?
4. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на некотором промежутке. Как найти интервалы монотонности функции?
5. Дайте определения экстремумов функции.
6. Определите наибольшее и наименьшее значения функции.
7. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
8. Какие точки называются критическими?
9. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.
10. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции? Укажите порядок решения этой задачи.
11. Определите понятия выпуклость и вогнутость графика функции. Какую точку называют точкой перегиба? Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции? Как определить точки перегиба?

Повышенный уровень

Тема 5. Функции одной переменной и числовые последовательности.

1. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции.
2. Определите функцию обратную по отношению к функции $y=f(x)$.

3. Определите целую рациональную функцию.
4. Какая функция называется линейной? Что является ее графиком?
5. Какая функция называется квадратичной? Что является ее графиком?
6. Определите дробно-рациональную функцию.
7. Какую функцию называют степенной? Графики каких степенных функций Вы можете построить?
8. Определите показательную функцию. Постройте в тетради графики функций $y = 2^x$, $y = (1/2)^x$.
9. Какую функцию называют логарифмической? Постройте в тетради графики функций $y = \log_2 x$, $y = \lg x$, $y = \log_{1/2} x$.
10. Какие тригонометрические функции Вы знаете? Постройте графики основных тригонометрических функций в тетради.
11. Назовите обратные тригонометрические функции. Постройте их графики.
12. Вспомните основные преобразования графиков функций (параллельный перенос на вектор, растяжение или сжатие от координатных осей), приведите примеры.

Тема 6. Предел функции. Непрерывность функции.

1. Дайте определение предела функции слева (справа).
2. Может ли функция $f(x)$ иметь два различных предела при $x \rightarrow a$?
3. Как можно избавиться от неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, если числитель и знаменатель дроби содержат многочлены?
4. Как разложить квадратный трехчлен на линейные множители? Сформулируйте теорему Виета.
5. Как можно избавиться от неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$, если числитель и (или) знаменатель содержат иррациональные выражения? Запишите формулы сокращенного умножения, помогающие определить сопряженные выражения для данных.
6. Сформулируйте правила вычисления пределов дроби при $x \rightarrow \infty$, если числитель и знаменатель содержат многочлены.
7. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
8. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
9. Какова простейшая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?
10. Какова простейшая связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой величиной?
11. Что значит сравнить две бесконечно малые величины?
12. Какие две бесконечно малые величины называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных величин.
13. Как эквивалентные бесконечно малые величины могут быть использованы при вычислении пределов функций?

14. Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке. Что можно сказать о непрерывности этой функции в точке x_0 ?
15. Какая точка называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$?
16. Какая точка называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$?
17. Сформулируйте теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями.
18. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции, составленной из непрерывных функций.
19. Сформулируйте теорему о непрерывности основных элементарных функций.
20. Сформулируйте свойства функции, непрерывной на замкнутом интервале.

Тема 7. Производная функции. Правила дифференцирования. Дифференциал функции.

1. Как найти производную функции $y=f(x)$ по определению?
2. В чем состоит механический смысл производной?
3. Как связаны между собой дифференцируемость функции в некоторой точке с непрерывностью функции в этой точке?
4. Приведите пример непрерывной функции, не имеющей производной в некоторой точке.
5. Дайте определение сложной функции. Приведите примеры.
6. Сформулируйте теорему для нахождения производной сложной функции.
7. Составьте таблицу нахождения производных для функций вида $f(u)$, где f - одна из элементарных функций, $u = u(x)$.
8. Запишите формулу для вычисления дифференциала первого и последующих порядков.
9. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала? Дифференциалы каких порядков обладают указанным свойством?
10. Расскажите о геометрическом смысле дифференциала первого порядка.
11. Как используется дифференциал в приближенных вычислениях?
12. Выведите формулу приближенного вычисления значений функций. Как определить погрешность приближения?
13. Дайте определение производной второго порядка, производной n -го порядка.

Тема 8. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.

1. Расскажите о дифференцировании показательной-степенной функции.
2. Расскажите о нахождении производных высших порядков от неявно заданных функций.
3. Запишите формулы для нахождения производных первого и второго порядков от параметрически заданной функции.

Тема 9. Приложения производной.

1. Выведите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2. Сколько раз подряд можно применять правило Лопиталя и когда это правило неприменимо?
3. Как можно раскрыть неопределенность вида $0 \cdot \infty$ при вычислении предела функции?
4. Что нужно сделать при вычислении предела функции, если он содержит неопределенность вида $\infty - \infty$?
5. Какой прием применяют для применения правил Лопиталя, если предел функции содержит неопределенность вида 0^0 , или ∞^0 , или 1^∞ ?

6. Разложите по формуле Тейлора (Маклорена) функции $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.
7. Как ведется исследование функции на экстремум с помощью второй производной?
8. Укажите порядок исследования функции на возрастание и убывание и экстремумы.
9. Что называется асимптотой кривой $y = f(x)$?
10. Как найти асимптоту $y = ax + b$ кривой $y = f(x)$, т.е. как найти a и b ?
11. По какой схеме следует проводить исследование функции и построение ее графика?
12. Для решения каких вопросов исследования функции и построения ее графика:
 - а) не нужны теория пределов и дифференциальное исчисление?
 - б) необходимо уметь вычислять пределы?
 - в) нужна первая производная?
 - г) нужна вторая производная?

Базовый уровень

Тема 10. Неопределенный интеграл, основные методы интегрирования.

1. Дайте определение первообразной функции для данной функции $f(x)$ на данном промежутке. Как связаны между собой две первообразные для функции $f(x)$ в некотором промежутке?
2. Что называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$?
3. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла (правила интегрирования).
4. Составьте таблицу основных интегралов.
5. В чем суть метода непосредственного интегрирования?
6. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле. Когда целесообразно применять замену переменной интегрирования?
7. Запишите формулу интегрирования по частям. Когда целесообразно применение способа интегрирования по частям?
8. Интегралы какого вида можно вычислять с помощью формулы интегрирования по частям?

Тема 11. Классы интегрируемых функций.

1. Расскажите о нахождении интегралов вида $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$; $\int \frac{(Ax + B)dx}{ax^2 + bx + c}$.
2. Как находится интеграл от целой рациональной функции?
3. Какая рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется правильной?
4. Рациональные дроби, какого вида называются элементарными? Как связана правильная рациональная дробь с элементарными дробями? Расскажите, как составляется схема разложения правильной дроби на основные элементарные дроби.
5. Какой способ применяется для разложения правильной рациональной дроби на сумму элементарных дробей?
6. Интегрирование иррациональных функций, содержащих квадратный трехчлен.
7. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов:

$$\int R\left(x, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{s}{t}}\right) dx; \quad \int R\left(x, (ax + \beta)^{\frac{p}{q}}, \dots, (ax + \beta)^{\frac{s}{t}}\right) dx;$$

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{s}{t}} \right) dx, \text{ где } R - \text{рациональная функция, } p, q, \dots, s, t - \text{целые}$$

числа.

8. Расскажите о нахождении интегралов от четной степени синуса или косинуса.
9. Расскажите о нахождении интегралов от нечетной степени синуса или косинуса.
10. Приведите примеры «неберущихся» интегралов.

Тема 12. Определенный интеграл.

1. Что называется определенным интегралом от a до b от функции $f(x)$?
2. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
3. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
4. Запишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.
5. Запишите формулу замены переменной в определенном интеграле.

Тема 13. Приложения определённого интеграла.

1. Что называется площадью плоской фигуры? Как найти площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла?
2. Что называется объемом тела? Как найти объем тела вращения?
3. Что называется длиной дуги? Как найти длину дуги: если функция задана в декартовых координатах?
4. Какие еще приложения определенных интегралов Вы знаете?

5. Повышенный уровень

Тема 10. Неопределенный интеграл, основные методы интегрирования.

1. Сформулируйте теорему об инвариантности формул интегрирования.
2. Расскажите, как применяется формула замены переменной в неопределенном интеграле. Что необходимо сделать после сведения интеграла к табличному?
3. Что принимается за u для интегралов вида $\int P(x)e^{ax} dx$, $\int P(x)\sin ax dx$, $\int P(x)\cos ax dx$ ($P(x)$ - многочлен)?
4. Что принимается за u для интегралов вида $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arctg x dx$, $\int P(x)\operatorname{arccot} x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$ ($P(x)$ - многочлен)?
5. Как вычисляются интегралы $\int a^{kx} \sin nxdx$ и $\int a^{kx} \cos nxdx$?

Тема 11. Классы интегрируемых функций.

1. Как интегрируются правильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от правильной рациональной дроби.
2. Как интегрируются неправильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от неправильной рациональной дроби.
3. Всегда ли можно найти интеграл от рациональной функции?
4. Вычисление интегралов $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$,
 $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$.
5. Интегралы от дифференциального бинома $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, случаи интегрирования в элементарных функциях.

6. Сформулируйте порядок отыскания интеграла от функции, содержащей квадратный корень из квадратного трехчлена в знаменателе дроби и линейную функцию в числителе.
7. Какие способы нахождения интеграла вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ можете указать?
8. Расскажите о применении подстановок Эйлера при вычислении интегралов $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$. Сколько существует подстановок Эйлера? В каком случае может применяться каждая из них? Без какой из подстановок можно было бы обойтись? Объясните почему?
9. Какие формулы применяются для вычисления следующих интегралов:
 - а) $\int \sin ax \cos bxdx, \int \cos ax \cos bxdx, \int \sin ax \sin bxdx$, где $a \neq b$.
 - б) $\int \sin^m x dx, \int \cos^n x dx$, где m и n положительные целые числа.
 - в) Какие случаи необходимо рассмотреть при нахождении интегралов вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$.
10. Какую замену следует сделать при нахождении интегралов вида $\int tg^n x dx, \int ctg^n x dx$?
11. Какой способ нахождения интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx, \int R(tgx)dx, \int R(e^x)dx$ Вы можете предложить? К какому типу интегралов они сводятся?
12. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов:
 - а) $\int f(\sin x) \cos x dx$;
 - б) $\int f(\cos x) \sin x dx$;
 - в) $\int f(tgx) \frac{dx}{\cos^2 x}$ или $\int f(tgx) dx$;
 - г) $\int f(ctgx) \frac{dx}{\sin^2 x}$ или $\int f(ctgx) dx$;
 - д) $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R - рациональная функция.

Тема 12. Определенный интеграл.

1. На что следует обращать внимание при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной по сравнению с неопределенным интегралом?
2. Определите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования. Когда несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся (расходящимся)?
3. Для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
4. Определите несобственный интеграл от разрывной функции. Для несобственного интеграла от разрывной функции запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
5. Сформулируйте теорему сравнения для несобственных интегралов.
6. Дайте определение абсолютно сходящегося интеграла.

Тема 13. Приложения определённого интеграла.

1. На что следует обращать внимание при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной по сравнению с неопределенным интегралом?
2. Определите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования.
3. Когда несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся (расходящимся)?
4. Для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
5. Определите несобственный интеграл от разрывной функции.
6. Когда несобственный интеграл от разрывной функции называется сходящимся (расходящимся)?
7. Для несобственного интеграла от разрывной функции запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
8. Сформулируйте теорему сравнения для несобственных интегралов.
9. Дайте определение абсолютно сходящегося интеграла. Дайте определение полярной системы координат. Установите формулы, связывающие полярные и прямоугольные координаты точки.
10. Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры в полярных координатах. Как найти длину дуги: если функция задана в полярных координатах; параметрически?

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка **"отлично"** выставляется, если студент при ответе на вопросы как базового так и повышенного уровня показывает глубокое и всестороннее знание предмета, обязательной и дополнительной литературы, аргументировано и логически стройно излагает материал, пользуясь математической символикой, может применять знания для анализа конкретных ситуаций, свободно ориентируется в межпредметных связях.

Оценка **«хорошо»** ставится, если при ответе на вопросы базовой части студент показывает знание предмета, обязательной литературы, знакомстве с дополнительной литературой, аргументировано излагает материал, умеет применять знания для анализа конкретных ситуаций, однако незначительно нарушает последовательность изложения материала, дает недостаточно полное, хотя и верное определение понятий.

Оценка **«удовлетворительно»** ставится, если студент при ответе на вопросы базовой части показал, что он в основном знает предмет, обязательную литературу, может практически применять свои знания, но программный материал излагает фрагментарно и непоследовательно, допускает отдельные ошибки и погрешности при применении математической символики и понятий, слабо ориентируется в межпредметных связях;.

Оценка **«неудовлетворительно»** ставится, если студент не отвечает на предлагаемые ему вопросы базовой или его ответ показывает, что не усвоено основное содержание предмета, обнаруживается незнание большей части учебного материала, допускаются грубые ошибки при формулировке теорем, определении основных понятий, неправильно используется математическая символика.

2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя как теоретический опрос, так и практическое решение задач.

Предлагаемые студенту задания позволяют проверить компетенции ПК-7 (ИД-1). Для подготовки к данному оценочному мероприятию необходимо прочитать лекционный материал, найти ответы на поставленные вопросы, изучить дополнительную литературу, установить взаимосвязи между изучаемыми понятиями, запомнить основные определения, свойства, теоремы, продумать, где они могут применяться. Рекомендуется готовиться к данному

контрольному мероприятию в течение семестра, разбирая теоретические задания для оценки сформированности компетенций к каждому практическому занятию. Эти задания предлагаются в УМК дисциплины «Математика», представленном на кафедре вычислительной математики и кибернетики.

Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты, прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

При оценке в первую очередь учитываются показанные студентами знания и умения (их полноту, глубину, прочность, использование). Оценка также зависит от наличия и характера погрешностей. Среди погрешностей выделяют ошибки и недочеты. Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или об отсутствии знаний, не считающихся основными в соответствии с программой. Недочетами также являются: погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного студентом задания или способа его выполнения, неаккуратная запись, небрежное выполнение чертежа, графика.

Комплект заданий для контрольной работы

Типовой вариант контрольной работы № 1

Базовый уровень

Задание 1 Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задание 2 Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Задание 3. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ если
 $A(3,1,4), \quad B(-1,6,1), \quad C(-1,1,6)$

Задание 4. Найти площадь треугольника ABC , если
 $A(3,1,4), \quad B(-1,6,1), \quad C(-1,1,6)$

Задание 5 Даны вершины треугольника $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3, -1)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC .

Повышенный уровень

Задание 1 Исследовать систему линейных уравнений и в случае совместности решить ее методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Задание 2. Найти координаты точки M_2 , симметричной точке $M_1(-3; 4)$ относительно прямой $4x - y - 1 = 0$.

Типовой вариант контрольной работы № 2

Базовый уровень

Задание 1. Вычислить пределы функций: а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 4x^2 + 3x^3}{x^3 - 7x - 10}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x - 3} - 3}{x^2 - 9}$; в)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 + 5x}{3 + 2x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Задание 2. Вычислить пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции и

правило Лопиталя: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\arcsin 3x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 2x + 1}{x^{20} - 4x + 3}$.

Задание 3. Найти производные: а) сложной функции; б) функции, заданной неявно; в) используя логарифмическую производную:

$$\text{а) } y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; \quad \text{б) } y = e^{xy} - \cos(x^2 + y^2); \quad \text{в) } y = x^{\arctg x}.$$

Повышенный уровень

Задание 1. Исследовать функцию на непрерывность в указанных точках:

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}} + 1; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

Задание 2. Найти производные y' и y'' функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases}$

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка **«отлично»** выставляется, если студент при ответе на вопросы как базового, так и повышенного уровня показывает глубокое и всестороннее знание предмета, обязательной и дополнительной литературы, аргументировано и логически стройно излагает материал, пользуясь математической символикой, может применять знания для анализа конкретных ситуаций, свободно ориентируется в межпредметных связях.

Оценка **«хорошо»** ставится, если при ответе на вопросы базовой части студент показывает знание предмета, обязательной литературы, знакомстве с дополнительной литературой, аргументировано излагает материал, умеет применять знания для анализа конкретных ситуаций, однако незначительно нарушает последовательность изложения материала, дает недостаточно полное, хотя и верное определение понятий.

Оценка **«удовлетворительно»** ставится, если студент при ответе на вопросы базовой части показал, что он в основном знает предмет, обязательную литературу, может практически применять свои знания, но программный материал излагает фрагментарно и непоследовательно, допускает отдельные ошибки и погрешности при применении математической символики и понятий, слабо ориентируется в межпредметных связях.

Оценка **«неудовлетворительно»** ставится, если студент не отвечает на предлагаемые ему вопросы базовой части или его ответ показывает, что не усвоено основное содержание предмета, обнаруживается незнание большей части учебного материала, допускаются грубые ошибки при формулировке теорем, определении основных понятий, неправильно используется математическая символика.

2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в проверку умения применять теоретические знания к практическим задачам по изученным темам. Каждому студенту предлагается решить набор задач. Сначала студент решает задания базового уровня. При успешном решении ему предлагается решить задание повышенного уровня, что позволяет преподавателю определить уровень владения материалом.

Предлагаемые студенту задания позволяют проверить компетенции ОПК-5, ОПК-8. Для подготовки к данному оценочному мероприятию необходимо прочитать лекционный материал, выполнить соответствующие типы задач из ИДЗ, изучить дополнительную литературу, установить взаимосвязи между изучаемыми понятиями, запомнить основные определения, свойства, теоремы, продумать, где они могут применяться. Рекомендуется готовиться к данному контрольному мероприятию в течение семестра, разбирая теоретические задания для оценки сформированности компетенций к каждому практическому занятию, вовремя выполняя индивидуальные домашние задания (ИДЗ). Эти задания предлагаются в УМК дисциплины «Корректирующий курс по математике», представленном на кафедре вычислительной математики и кибернетики.

Для выполнения заданий данного оценочного мероприятия отводится 2 часа. При решении задач студенту разрешается пользоваться своими тетрадями с ИДЗ, никакими другими справочными материалами пользоваться не разрешается.

Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты, прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

При оценке в первую очередь учитываются показанные студентами знания и умения (их полноту, глубину, прочность, использование). Оценка также зависит от

наличия и характера погрешностей. Среди погрешностей выделяют ошибки и недочеты. Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или об отсутствии знаний, не считающихся основными в соответствии с программой. Недочетами также являются: погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного студентом задания или способа его выполнения, неаккуратная запись, небрежное выполнение чертежа, графика.

Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы.

С первых же сентябрьских дней на студента обрушивается громадный объем информации, которую необходимо усвоить. Нужный материал содержится не только в лекциях (запомнить его – это только малая часть задачи), но и в учебниках, книгах, статьях. Порой возникает необходимость привлекать информационные ресурсы Интернет.

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно – выучу!»), а когда приходит пора экзаменов, материала, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться в оставшийся промежуток времени.

Работа с книгой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой – это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на

бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Различают два вида чтения; первичное и вторичное. *Первичное* – это внимательное, неторопливое чтение, при котором можно остановиться на трудных местах. После него не должно остаться ни одного непонятого олова. Содержание не всегда может быть понятно после первичного чтения.

Задача *вторичного* чтения – полное усвоение смысла целого (по счету это чтение может быть и не вторым, а третьим или четвертым).

Правила самостоятельной работы с литературой

Как уже отмечалось, самостоятельная работа с учебниками и книгами (а также самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях) – это важнейшее условие

формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

- Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать» (Селье, 1987. С. 325).

- Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

- Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).

- Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.

- При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...

- Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

- Если книга – Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора (это очень

хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).

- Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать), и это может занять немалое время (у кого-то – до нескольких недель и даже месяцев); опыт показывает, что после этого студент каким-то «чудом» начинает буквально заглатывать книги и чуть ли не видеть «сквозь обложку», стоящая это работа или нет...

- «Либо читайте, либо перелистывайте материал, но не пытайтесь читать быстро... Если текст меня интересует, то чтение, размышление и даже фантазирование по этому поводу сливаются в единый процесс, в то время как вынужденное скорочтение не только не способствует качеству чтения, но и не приносит чувства удовлетворения, которое мы получаем, размышляя о прочитанном», – советует Г. Селье (Селье, 1987. – С. 325-326).

- Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент (или молодой ученый) будет как бы искать аргументы «за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Проблема лишь в том, как найти «свою» идею...

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того насколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать

материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют *четыре основные установки в чтении научного текста*:

1. информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)
2. усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)
3. аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)
4. творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких *видов чтения*:

1. библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
2. просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
3. ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;

4. изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

5. аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;

3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;

4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;

5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие

виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта.

2. Выделите главное, составьте план.

3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора.

4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

**Методические указания по видам работ, предусмотренных рабочей
программой дисциплины**
Практические занятия

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала – умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

[illegible][illegible]

2015. - 562 с. : табл., граф., схем., ил. - <http://biblioclub.ru/>. - Библиогр.: с. 552-553. - ISBN 978-5-394-02261-6
- 4 Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. / Д.Т. Письменный, Ч. 1. - 17-е изд. - М. : АЙРИС-пресс, 2019. - 288 с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3
- 5 Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2-х ч. / Д.Т. Письменный, Ч. 2. - 13-е изд. - М. : АЙРИС-пресс, 2019. - 256 с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6044-7
- 6 Сборник задач по высшей математике с контрольными работами / К. Н. Лунгу и др., Ч. 1. - 10-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 574 с. : ил. - ISBN 978-5-8112-6174-1
- 7 Фоминых, Е. И. Корректирующий курс по математике : практикум учебное пособие / Е.И. Фоминых. - Минск : РИПО, 2017. - 440 с. - <http://biblioclub.ru/>. - Библиогр.: с. 320. - ISBN 978-985-503-702-7

1. Корректирующий курс по математике: практикум : учебное пособие / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации ; Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Северо-Кавказский федеральный университет», Часть 2. - Ставрополь : СКФУ, 2018. - 284 с. : ил. - <http://biblioclub.ru/>. - Библиогр. в кн

- 1 <http://eqworld.ipmnet.ru> (EqWorld – Мир математических уравнений)
- 2 <http://graphfunk.narod.ru> (Графики функций)
- 3 <http://Math-Net.ru/> (Общероссийский математический портал)
- 4 <http://mcsme.ru> (Московский центр непрерывного математического образования)
- 5 <http://tasks.ceemat.ru> (Задачник для подготовки к олимпиадам по математике)
- 6 <http://www.allmath.ru> (Allmath.ru – вся Корректирующий курс по математике в одном месте)
- 7 <http://www.exponenta.ru> (Exponenta.ru – образовательный математический сайт)
- 8 <http://www.math.ru> (Корректирующий курс по математике и образование)
- 9 <http://www.mathem.h1.ru> (Корректирующий курс по математике on-line справочная информация в помощь студенту)
- 10 <http://www.neive.by.ru> (Геометрический портал)