

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ  
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
по выполнению практических работ  
по дисциплине «Математический анализ»  
для студентов направления подготовки  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Ставрополь  
2026

## Введение

1. Различные операции над числовыми множествами. Решение уравнений и неравенств с модулем
2. Метод математической индукции в решении различных задач (доказательство делимости, доказательство равенств-неравенств, вычисление сумм)
3. Элементарное исследование функций (нахождение области определения, множества значений, монотонность, ограниченность)
4. Основные элементарные функции, их свойства и графики
5. Геометрический смысл предела числовой последовательности
6. Вычисление пределов числовых последовательностей
7. Вычисление пределов функций
8. Использование замечательных пределов при раскрытии неопределенностей
9. Исследование непрерывности функций, классификация точек разрыва. Использование эквивалентностей при вычислении пределов функций
10. Непосредственное вычисление производной. Вычисление производных элементарных функций с использованием правил дифференцирования и таблицы производных
11. Дифференцирование сложных функций
12. Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически. Способ логарифмического дифференцирования
13. Вычисление дифференциала функции, его приложения в приближенных вычислениях
14. Вычисление производных и дифференциалов высших порядков. Формула Лейбница
15. Основные теоремы о дифференцируемых функций
16. Вычисление пределов функций с помощью правила Лопиталья
- 17-18. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций и построению их графиков
1. Непосредственное интегрирование функций
2. Вычисление интегралов методом введения новой переменной (метод подстановки)
3. Метод интегрирования по частям
4. Вычисление интегралов от простейших дробей
5. Вычисление интегралов от рациональных функций общего вида
6. Вычисление интегралов от иррациональных функций. Вычисление интегралов от тригонометрических функций
7. Вычисление определенных интегралов
8. Вычисление площадей произвольных фигур, длин дуг, объемов тел вращения, площадей поверхности вращения в декартовых координатах, полярных координатах и в случае параметрического задания функции
9. Исследование сходимости несобственных интегралов первого и второго рода, их геометрические приложения
10. Вычисление суммы числового ряда. Исследование числовых рядов на сходимость (необходимый признак сходимости, достаточные признаки –

признаки сравнения)

11. Исследование числовых рядов на сходимость с помощью признака Даламбера и радикального и интегрального признаков Коши

12. Определение области сходимости для функциональных и степенных рядов

13. Приложения функциональных и степенных рядов в задачах с приближенными вычислениями

14-15. Разложение в ряд Фурье различных функций (четных и нечетных, с произвольным периодом, непериодических)

16. Представление функций интегралом Фурье, нахождение преобразования Фурье функций

## Введение

Настоящие методические указания к практическим занятиям полностью освещают содержание учебной дисциплины «Математический анализ» в соответствии с учебной программой для студентов университета, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, Профиль подготовки Вычислительная математика и математическое моделирование.

**Актуальность и значимость дисциплины «Математический анализ».** Курс математического анализа является одним из основных курсов, на которых основано все математическое образование, поскольку понятия, теоремы и методы, изучаемые в математическом анализе, используются во всех математических дисциплинах. Главная цель преподавания курса «Математический анализ» - изучение основных понятий и теорем, необходимых любому специалисту, применяющему математику в своей деятельности. Объектами изучения в данной дисциплине являются, прежде всего, функции. С их помощью могут быть сформулированы как законы природы, так и разнообразные процессы, происходящие в различных видах деятельности человека. Отсюда объективная важность математического анализа как средства изучения функций.

**Роль и место учебной дисциплины «Математический анализ» в структуре учебного курса.** Дисциплина «Математический анализ» относится к базовой части математического и естественнонаучного цикла, её освоение происходит в 1-4 семестрах.

**Цель и задачи освоения дисциплины «Математический анализ»** - развитие у обучающихся личностных качеств, а также формирование общекультурных и профессиональных компетенций будущего бакалавра путем освоения возможностей использования средств и методов математического анализа для решения прикладных задач.

### **Основные задачи дисциплины:**

- познакомить студентов с начальными знаниями по теории математического анализа;
- сформировать основные понятия математического анализа;

- показать универсальный характер основных понятий математического анализа для получения комплексного представления о подходах к созданию математических моделей.

**Характеристика междисциплинарных связей.** Для успешного освоения дисциплины необходимы базовые школьные знания по алгебре и началам анализа. Знания и практические навыки, полученные при изучении дисциплины «Математический анализ», будут использованы студентами при изучении других дисциплин: «Комплексный анализ», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Экономико-математические методы и модели», «Методы математической статистики в исследованиях социально-экономической сферы», «Математические и компьютерные методы обработки информации», «Исследование операций в задачах экономики», «Математические методы прогнозирования», «Высокопроизводительные вычисления и технологии параллельного программирования», и др.

**Реализуемые компетенции.** Успешное освоение дисциплины «Математический анализ» позволит студентам полноценно осуществлять свою будущую профессиональную деятельность, в частности, обладать профессиональными и общекультурными компетенциями согласно учебному плану.

## 1. Различные операции над числовыми множествами. Решение уравнений и неравенств с модулем

### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 1.** Решить неравенство  $|x+3|+4x > |2x-8|$ .

Так как значение выражения стоящего под знаком модуля меняет свой знак при переходе от положительных к отрицательным значениям, то найдем эти критические точки:  $x+3=0$ ,  $2x-8=0$ , следовательно  $x_1=-3$ ,  $x_2=4$ . Разобьем числовую прямую этими точками на интервалы  $(-\infty-3]$ ,  $(-3,4)$ ,  $[4,+\infty)$  и на каждом интервале раскроем модули в исходном неравенстве по определению:

$$\begin{aligned} 1). & \begin{cases} x \in (-\infty-3], \\ -x-3+4x > -2x+8 \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty-3], \\ 5x > 11 \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty-3], \\ x > 2,2 \end{cases} x \in \emptyset; \\ 2). & \begin{cases} x \in (-3,4], \\ x+3+4x > -2x+8 \end{cases} \begin{cases} x \in (-3,4], \\ 7x > 5 \end{cases} \begin{cases} x \in (-3,4], \\ x > \frac{5}{7} \end{cases} x \in \left(\frac{5}{7}, 4\right]; \\ 3). & \begin{cases} x \in (4,+\infty], \\ x+3+4x > 2x-8 \end{cases} \begin{cases} x \in (4,+\infty], \\ 3x > -11 \end{cases} \begin{cases} x \in (4,+\infty], \\ x > -\frac{11}{3} \end{cases} x \in (4,+\infty]; \end{aligned}$$

Решением данного неравенства являются значения  $x \in \left(\frac{5}{7}, +\infty\right]$ .

### Задания для самостоятельной работы

1. С помощью диаграмм Эйлера – Венна показать справедливость следующих утверждений:

а).  $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ ;

б).  $(A \cup C) \setminus B = (A \setminus B) \cup (C \setminus B)$ ;

в).  $(A \setminus B) \cup C = (A \setminus C) \setminus B$ ;

г).  $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$ .

2. Задать перечислением всех элементов множества определенные с помощью следующих характеристических свойств:

а).  $A = \{x \in N \mid x \leq 5\};$

б).  $B = \{x \in N \mid x < 0\};$

в).  $C = \{x \in Z \mid |x| \leq 2\};$

г).  $D = \{x \in Z \mid (x-3)(x^2-1)=0; \quad x \geq 0\}.$

3. Определить множества  $A \cup B; A \cap B; A \setminus B; B \setminus A$ , если

а).  $A = \{x \in Z \mid |x| \leq 2\}, B = \{x \in Z \mid x^2 - 5x < 0\};$

б).  $A = \{x \in Z \mid |x-2| < 1\}, \quad B = \{x \in Z \mid (-1; 2]\};$

в).  $A = \{x \in Z \mid |x-1| < 2\}, B = \{x \in Z \mid |x-2| < 3\};$

г).  $A = \{x \in R \mid |x-1| < 2\}, \quad B = \{x \in R \mid |x-1| + |x-2| < 3\};$

д).  $A = \{x \in R \mid x^2 + x - 20 < 0\}, B = \{x \in R \mid x^2 - 7x + 12 < 0\}.$

4. Решить уравнения

а).  $2|x+3| - 4|x+5| + |x-2| = 0;$

б).  $|x+2| - 3|x-1| + 5|x-4| = 0;$

в).  $|x+5| + 4|x+3| - |x-1| = 0;$

г).  $|x-1| + 5|x+5| - 3|x-2| = 4.$

**2. Метод математической индукции в решении различных задач  
(доказательство делимости, доказательство равенств-неравенств,  
вычисление сумм)**

**Задания, решаемые в аудитории**

**Пример 2.** Доказать что для любого натурального  $n$  верно тождество:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- 1). Проверим равенство при  $n=1$ :  $1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ;  $1 = \frac{6}{6} = 1$  - верно.
- 2). Предположим, что равенство верно при  $n=k$ , то есть  $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$  - верно.
- 3). Докажем, истинность равенства и при  $n=k+1$ , то есть докажем

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Преобразуем левую часть этого равенства, заменив первые  $k$  слагаемых правой частью равенства из пункта 2):

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали равенство пункта 3), используя равенство пункта 2), согласно ММИ, данное утверждение справедливо  $\forall n \in N$ .

**Пример 3.** Доказать, что  $2^n > 2n+1$  при любом натуральном  $n \geq 3$ .

- 1). При  $n=3$  неравенство верно:  $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$ .
- 2). Предположим, что  $2^k > 2k+1$  ( $k \geq 3$ ).
- 3). Докажем, что верно неравенство  $2^{k+1} > 2(k+1)+1$ .

В самом деле,  $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot (2k+1) = (2k+3) + (2k-1)$ . Но  $2k-1 > 0$  при любом натуральном  $k$ . Значит,  $2^{k+1} > 2k+3$ . Отсюда следует, что неравенство  $2^n > 2n+1$  справедливо при всех натуральных  $n \geq 3$ .

**Пример 4.** Доказать что  $(3^{2n+1} + 40n - 67) : 64$  для любого натурального  $n$ .

- 1). Если  $n=1$ , то  $3^3 + 40 - 67 = 0$ , а  $0 : 64$ .
- 2). Предположим, что при  $n=k$   $(3^{2k+1} + 40k - 67) : 64$ .
- 3). Докажем истинность утверждения при  $n=k+1$ , то есть что  $(3^{2k+3} + 40(k+1) - 67) : 64$ .

$$\begin{aligned} \text{В самом деле, } 3^{2k+3} + 40(k+1) - 67 &= 9 \cdot 3^{2k+1} + 40k + 40 - 67 = \\ &= 9 \cdot (3^{2k+1} + 40k - 67) - 8 \cdot (40k - 67) + 40 = 9 \cdot (3^{2k+1} + 40k - 67) - 320k + 576 = \\ &= 9 \cdot (3^{2k+1} + 40k - 67) + 64 \cdot (9 - 5k), \end{aligned}$$

но первое слагаемое делится на 64 по предположению, а второе слагаемое делится на 64, так как один из множителей равен 64. Следовательно, и сумма разделится на 64. Таким образом, мы доказали, что  $(3^{2n+1} + 40n - 67) : 64$  для любого натурального числа  $n$ .

### Задания для самостоятельной работы

С помощью метода математической индукции докажите равенства

$$\text{а). } 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1) \cdot n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12};$$

$$\text{б). } 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3};$$

$$\text{в). } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2, n \in N;$$

$$\text{г). } 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

6. С помощью метода математической индукции докажите следующие неравенства

$$\text{а). } 2^n > n^3, \forall n \geq 10;$$

$$\text{б). } 2^{n-1} > n(n+1) \quad \forall n \geq 7;$$

$$\text{в). } 4^n \geq 3^n + n^2 \quad \forall n \in N;$$

$$\text{г). } 3^n > 5n + 1 \quad \forall n \geq 3.$$

7. Докажите, что при любом натуральном  $n$   $9^{n+1} - 8n - 9$  кратно 16.

8. Докажите, что при любом натуральном  $n$   $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$  кратно 19.

9. Докажите, что при любом натуральном  $n$   $n(2n^2 - 3n + 1)$  кратно 6.

### 3. Элементарное исследование функций (нахождение области определения, множества значений, монотонность, ограниченность)

#### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 5.** Найти область определения функции

$$y = \sqrt{x^2 - 7x + 12} + \frac{2x - 3}{x - 5}.$$

Область определения этой функции состоит из тех значений  $x$ , при которых оба слагаемых принимают действительные значения. Поэтому

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 \geq 0 \\ x - 5 \neq 0. \end{cases}$$

Решая квадратное неравенство  $x^2 - 7x + 12 \geq 0$ , получим  $x \leq 3$  и  $x \geq 4$ . Таким образом, область определения данной функции состоит из совокупности трех промежутков:  $x \leq 3$ ;  $x \geq 4$ ;  $x \neq 5$  (рис. 6).

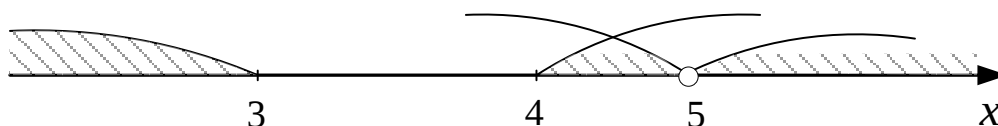


Рис. 6

Следовательно,  $D(y) = (-\infty; 3] \cup [4; 5) \cup (5; +\infty)$ .

**Пример 6.** Установить четность или нечетность функции  $y = x^3 \cos 2x$ .

$D(y) = (-\infty; +\infty)$ , то есть область определения функции есть симметричное множество,

$$f(x) = x^3 \cos 2x, \quad f(-x) = (-x)^3 \cos 2(-x) = -x^3 \cos 2x. \quad \text{Следовательно,}$$

$f(-x) = -f(x)$ , то есть данная функция нечетная.

### Задания для самостоятельной работы

Найти область определения функции

а).  $y = 3x^3 + 5x^2 - 7x + 2$ ;

б).  $y = \frac{1}{7x - 2}$ ;

$$в). y = \frac{x-1}{x^2-7x+12};$$

$$г). y = \frac{x^2-5x+4}{x^2+x+1};$$

$$д). y = \frac{5}{\sqrt{x-4}};$$

$$е). y = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}};$$

$$ж). y = \sqrt{4-x^2};$$

$$з). y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}};$$

$$и). y = \lg(x^3-3);$$

$$к). y = \sin(2x+3);$$

$$л). y = \operatorname{tg} 2x;$$

$$м). y = \arcsin(5x-8);$$

$$н). y = \frac{1}{\sqrt{-x^2+x+2}} + \lg(x-1);$$

$$о). y = \log_2(x-1) + x^2;$$

$$п). y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x+3};$$

$$р). y = 2x^2 + \lg(x-1) + \frac{1}{x-3};$$

$$с). y = \frac{\sin x}{\lg(x^2-4)};$$

$$т). y = \lg \frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1};$$

$$у). y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2};$$

$$ф). y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5};$$

$$х). y = \arcsin \frac{x-3}{2} - \lg \sqrt{4-x};$$

$$ч). y = \arccos \frac{x-4}{x}.$$

11. Найти область значений функции

$$а). y = \frac{1}{2 - \cos 3x};$$

$$б). y = \frac{x^2+8}{x};$$

$$в). y = \frac{x+2}{x-3};$$

$$г). y = \frac{x^2-4}{x-1}.$$

12. Какие из указанных ниже функций чётны, какие нечётны, какие не являются ни чётными, ни нечётными

$$а) y = x^2 - 2x^2;$$

$$б) y = x - x^2;$$

$$в) y = \cos x;$$

$$г) y = x - \frac{x^2}{6} + \frac{x^5}{120};$$

$$д) y = \sin x - \cos x;$$

$$е) f(x) = x + \sin x;$$

$$\text{ж) } y = \frac{x^2}{\sqrt{3x^2 - 2}}; \quad \text{з) } q(x) = \sqrt{1 - x^2}; \quad \text{и) } s(t) = \lg \frac{1-t}{1+t};$$

$$\text{к) } f(x) = x^3, \quad x \in [-4; 7].$$

## 5. Геометрический смысл предела числовой последовательности

### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 7.** Последовательность  $\{(-1)^{n+1}\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$  ни к какому пределу не стремится.

В самом деле, допустим, что эта последовательность имеет предел равный числу  $a$ . Пусть  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ . Рассмотрим окрестность этой точки

$$\left(a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3}\right).$$

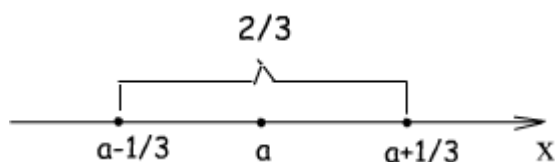


Рис. 21

Длина ее равна  $2/3$ , то есть  $\rho\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \left|-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}$ . Очевидно, что эта окрестность не может содержать в себе одновременно и точку 1 и точку (-1), потому что  $\rho(-1; 1) = 2$ , а  $2 > 2/3$ . Для определенности будем считать, что точка 1 не принадлежит нашей окрестности. Но  $x_n = 1$  при,  $n = 1, 3, 5, \dots$  то есть вне нашей окрестности имеется бесконечное число элементов последовательности.

Таким образом, точка  $a$  не может быть пределом нашей последовательности, и так как эта точка произвольная, то данная последовательность предела не имеет, то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} = \infty$ .

**Пример 8.** Доказать, что последовательность  $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \dots$  при  $n \rightarrow \infty$  имеет пределом число  $\frac{1}{2}$ .

Пусть  $\varepsilon$  – произвольное положительное число. Требуется доказать, что существует такое число  $N = N(\varepsilon)$ , что при  $n > N$  выполняется неравенство  $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ .

Составим разность по модулю  $\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{1}{2(2n+1)} \right| = \frac{1}{2(2n+1)}$ .

Таким образом, неравенство  $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$  выполняется, если  $\frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$ ,

откуда  $2(2n+1)\varepsilon > 1$  или  $n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$ . Понятно, что в качестве числа  $N$  можно

взять целую часть числа  $\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$ , то есть  $N = \left[ \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right]$ , что и требовалось доказать.

Зададим  $\varepsilon = \frac{1}{80}$ , тогда  $n > \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{80}} - \frac{1}{2} = 19\frac{1}{2}$ . Следовательно, начиная с номера

$n = 20$ , будет выполняться неравенство  $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ , то есть  $\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{80}$ , что

означает  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$ . С геометрической точки зрения это означает, что вне интервала  $\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{80}, \frac{1}{2} + \frac{1}{80} \right)$  находятся 19 первых членов данной последовательности  $u_1, u_2, \dots, u_{19}$ , а начиная с двадцатого, все члены последовательности будут попадать в указанный интервал.

**Пример 9.** Последовательность  $x_n = (-1)^n$  ограничена, так как  $|x_n| = 1$ , но является расходящейся, потому что предела не имеет.

### Задания для самостоятельной работы

1. Пользуясь определением предела числовой последовательности доказать, что

$$\text{а). } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{3n-1} = 1;$$

$$\text{б). } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-5}{3n+1} = \frac{2}{3};$$

$$\text{в). } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-3n}{n+1} = -3;$$

$$\text{г). } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3n^2}{n^2+2} = -3.$$

2. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ . Укажите номер, начиная с которого, все члены последовательности  $\{u_n\}$  находятся в  $\varepsilon$  – окрестности точки  $a$ , если

$$\text{а). } u_n = \frac{6n+7}{11-2n}, \quad a = -3, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$\text{б). } u_n = \frac{3n^2+2}{5n^2+4}, \quad a = \frac{3}{5}, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

### 6. Вычисление пределов числовых последовательностей

#### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 10.** Вычислить предел каждой числовой последовательности

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{35n^4 + 7n^3 - 4n + 2}{5n^4 + 3n^2 - 150n - 4} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{35 + \frac{7}{n} - \frac{4}{n^3} + \frac{2}{n^4}}{5 + \frac{3}{n^2} - \frac{150}{n^3} - \frac{4}{n^4}} = \frac{35}{5} = 7;$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25n^4 + 5n^3 - 7n + 4}{n^5 + n - 9} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{25}{n} + \frac{5}{n^2} - \frac{7}{n^4} + \frac{4}{n^5}}{1 + \frac{1}{n^4} - \frac{9}{n^5}} = \frac{0}{1} = 0;$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{30 - n + 8n^2 + 5n^5}{15n + 4n^2 + n^3} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{30}{n^5} - \frac{1}{n^4} + \frac{8}{n^3} + 5}{\frac{15}{n^4} + \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\downarrow 0} = \infty.$$

Из приведенного решения следует сделать вывод:

1. Если старшие степени в числителе и знаменателе равны, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях;
2. Если степень числителя меньше степени знаменателя, то предел равен 0;
3. Если степень числителя больше степени знаменателя, то предел равен  $\infty$ .

**Пример 11.** Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n+1)!}{(n+2)!}$ .

Воспользуемся свойством  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n$ , тогда числитель и знаменатель можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n+1)!}{(n+2)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!(1 + n(n+1))}{(n-1)!n(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0 \end{aligned}$$

**Пример 12.** Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n-3)} - (n+2))$ .

Избавимся от разности бесконечно больших величин, для этого умножим и разделим на выражение, сопряженное данному, получая при этом разность квадратов

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n(n-3)} - (n+2))(\sqrt{n(n-3)} + (n+2))}{\sqrt{n(n-3)} + n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n(n-3) - (n+2)^2)}{\sqrt{n(n-3)} + 2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n - n^2 - 4n - 4}{\sqrt{n(n-3)} + 2+n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n-4}{\sqrt{n(n-3)} + 2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7 - \frac{4}{n}}{\sqrt{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n}} + 1} = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

**Пример 13.** Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+3}{2n-1} \right)^{3n}$ .

Воспользуемся пределом  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ , поскольку, подставляя предельное значение  $n$ , будем иметь неопределенность вида  $(1^\infty)$ , получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+3}{2n-1} \right)^{3n} = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-1+4}{2n-1} \right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{2n-1} \right)^{3n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{2n-1} \right)^{\frac{2n-1}{4} \cdot \frac{4}{2n-1} \cdot 3n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{2n-1} \cdot 3n} = e^6.$$

### Задания для самостоятельной работы

1. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ , если

а).  $u_n = \frac{n}{n^2 + 1};$

б).  $u_n = \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}{n + 2};$

в).  $u_n = \frac{(n+3)!}{2(n+1)! - (n+2)!};$

г).  $u_n = \left( n - \sqrt[3]{n^3 - n^2} \right).$

2. Вычислить предел числовой последовательности:

а).  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + n!}{(n+2)!};$

д).  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 5}{7 + n\sqrt{n}};$

б).  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-2)(n-1)}{n^4 + 5n + 3};$

е).  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n + \sqrt[3]{1 - n^3} \right);$

в).  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n});$

ж).  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}.$

г).  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1 + 2 + \dots + n}{n+1} - \frac{n}{6} \right];$

## 7. Вычисление пределов функций

### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 14.** Вычислить предел функции  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1}.$

Так как  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5 \neq 0$ , то применим теорему о пределе частного

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = \frac{4 + 2 - 2}{4 + 1} = \frac{4}{5}.$$

**Пример 15.** Вычислить предел функции  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x}.$

Воспользуемся правилом, раскладывая числитель и знаменатель дроби

на множители, получим  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x} = \frac{0}{1} = 0$ .

**Пример 16.** Вычислить предел функции  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

**Пример 17.** Вычислить предел функции  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = -2.$$

**Пример 18.** Вычислить предел функции  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x}$ .

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x} &= \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2 - 1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} = \frac{2}{-1 \cdot (1+1)} = -1. \end{aligned}$$

**Пример 19.** Вычислить предел функции  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+3} - 2}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+3} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1-2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x+3-4)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1+3} + 2}{\sqrt{1+1} + \sqrt{2}} = \frac{2+2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

## 8. Использование замечательных пределов при раскрытии неопределенностей

## Задания, решаемые в аудитории

**Пример 20.** Вычислить предел функции  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2} \cdot 2} \right)^2 = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Пример 21.** Вычислить предел функции  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \frac{5}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} = \frac{5}{7}.$$

**Пример 22.** Вычислить предел функции  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\pi/4 - x)}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\sin(\pi/4 - x)}{2\sqrt{2}(\pi/4 - x)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

**Пример 23.** Вычислить предел функции  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$ .

Вычислим предел, используя замену переменной  $y = \pi/2 - x$ , откуда

$x = \pi/2 - y$  и  $\pi - 2x = \pi - \pi + 2y$ , тогда

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi/2 - y)}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}.$$

**Пример 24.** Вычислить предел функции  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{x-1} \right)^{x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{4} \cdot \frac{4}{x-1} \cdot (x+3)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{x-1} \right) \cdot (x+3)} = e^4 \end{aligned}$$

## Задания для самостоятельной работы

Вычислить предел функции:

а).  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2};$

б).  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 1};$

в).  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 4}{x^3 - x^2 - 3x - 1};$

г).  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4};$

д).  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1};$

е).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4};$

ж).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{1 - \sqrt{1+x}};$

з).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{6x};$

и).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 10x};$

к).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{15x};$

л).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 3x};$

м).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{ctg} 4x \sin 5x};$

н).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{6x^2};$

о).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\sin^2 4x};$

п).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x \sin 5x}{(1 - \cos 4x) \operatorname{tg} 2x};$

р).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x \sin^2 5x}{x^3 \sin 4x};$

с).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x};$

т).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{\cos 2x - \cos 8x};$

у).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sqrt{x+4} - 2};$

ф).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 4x}.$

## 9. Исследование непрерывности функций, классификация точек разрыва. Использование эквивалентностей при вычислении пределов функций

### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 25.** Дана функция. Найти ее точки разрыва, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва:

1)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4};$

2)  $f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 + 2x + 10};$

3)  $f(x) = \frac{x - 8}{x^2 - 11x + 24};$

4)  $f(x) = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}.$

1) Нули знаменателя функции  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$  определяются из уравнения  $x^2 - 4 = 0$ , откуда следуют возможные точки разрыва  $x = \pm 2$ . Для проверки: являются ли эти точки действительно точками разрыва, вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty.$$

В результате легко видеть, что точки  $x = -2$  и  $x = 2$  являются точками разрыва второго рода.

2) Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 + 2x + 10}$ . Найдем нули знаменателя из уравнения  $x^2 + 2x + 10 = 0$ . Нетрудно убедиться, что оно не имеет действительных корней. Таким образом, функция  $f(x)$  непрерывна на всей числовой прямой.

3) Точками разрыва в данном случае могут быть нули знаменателя, то есть  $x = 8$  и  $x = 3$ . В точке  $x = 8$  функция не определена, так как при подстановке  $x = 8$  в дробь имеем неопределенность  $\left(\frac{0}{0}\right)$ , вычислим предел функции при  $x \rightarrow 8$ :

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{x^2 - 11x + 24} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{x^2 - 11x + 24} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{(x - 8)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{5},$$

следовательно точка  $x = 8$  является точкой устранимого разрыва. Исследуем точку  $x = 3$ , для этого вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x - 8}{x^2 - 11x + 24} = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x - 3} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x - 8}{x^2 - 11x + 24} = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x - 3} = +\infty,$$

на основании чего делаем вывод, что точка  $x = 3$  является точкой бесконечного разрыва (второго рода).

4) Вначале рассмотрим функцию  $f(y) = \operatorname{arctg} y$ . Поскольку областью определения этой функции является вся числовая прямая, и она нигде не обращается в бесконечность, функция  $f(y)$  является непрерывной на всей

области определения. Поэтому единственной возможной точкой разрыва функции  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$  может быть точка  $x=0$ , для того, чтобы проверить: действительно ли здесь функция  $f(x)$  испытывает разрыв, вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg}(-\infty) = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg}(+\infty) = 0.$$

В результате имеем, что при  $x=0$  функция  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$  терпит разрыв первого рода, совершая скачок  $d = f(+0) - f(-0) = -\pi$ .

**Пример 26.** Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \leq x \leq 1. \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2$$

Таким образом, в точке  $x = -1$  функция непрерывна, точка  $x = 1$  - точка разрыва первого рода, определим скачок функции в этой точке  $d = f(x_0+0) - f(x_0-0) = 2 - 3 = -1$  (рис. 23).

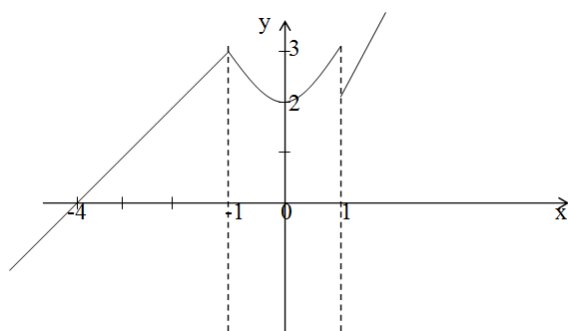


Рис. 23

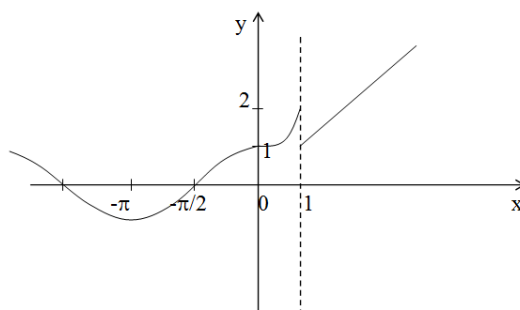


Рис. 24

**Пример 27.** Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1. \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1.$$

Приходим к заключению, что в точке  $x = 0$  функция непрерывна, точка  $x = 1$  - точка разрыва первого рода, определим скачок функции в этой точке  $d = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = 1 - 2 = -1$  (рис. 24).

### Задания для самостоятельной работы

Исследовать данные функции на непрерывность

а).  $f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}} + 1;$

б).  $f(x) = \frac{x-5}{x+3};$

в).  $f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}} + 2;$

г).  $f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}}.$

3. Исследовать данные функции на непрерывность, построить графики функций

а).  $f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$

б).  $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$

в).  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases}$

$$\text{г). } f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

### 10. Непосредственное вычисление производной. Вычисление производных элементарных функций с использованием правил дифференцирования и таблицы производных

#### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 28.** Используя определение производной функции (способ непосредственного дифференцирования), найти производную для  $y = \frac{2}{x+3}$ .

**1. Находим приращенное значение функции:**  $y + \Delta y = \frac{2}{x + \Delta x + 3}$ .

**2. Находим приращение функции  $\Delta y$ :**

$$\Delta y = \frac{2}{x + \Delta x + 3} - \frac{2}{x + 3} = \frac{2x + 6 - 2x - 2 \cdot \Delta x - 6}{(x + \Delta x + 3) \cdot (x + 3)} = \frac{-2 \cdot \Delta x}{(x + \Delta x + 3) \cdot (x + 3)}.$$

**3. Составляем разностное отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ :**  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{(x + \Delta x + 3) \cdot (x + 3)}$ .

**4. Находим предел отношения  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ :**

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2}{(x + \Delta x + 3) \cdot (x + 3)} = -\frac{2}{(x + 3)^2}.$$

**Следовательно, производная  $y' = -\frac{2}{(x + 3)^2}$ .**

**Пример 29.** Пользуясь формулами дифференцирования, найти производные следующих функций

1)  $y = x^2 - 5x + 4$ ;

2)  $y = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3}$ ;

3)  $z = x^5 \left( 2 - \frac{x}{3} + 3x^2 \right)$ ;

4)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ .

$$1) y' = (x^2 - 5x + 4)' = (x^2)' - (5x)' + (4)' = 2x - 5.$$

2) Преобразуем данную функцию, используя дробные и отрицательные показатели степени

$$y = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3} = x^{1/2} + 5x^{-1/3} - x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3}.$$

$$y' = \left( x^{1/2} + 5x^{-1/3} - x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3} \right)' = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{5}{3}x^{-4/3} + 2x^{-3} + \frac{1}{3}(-3)x^{-4} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}$$

3) 1-й способ. Воспользуемся формулой производной произведения

$$z' = (x^5)' \left( 2 - \frac{x}{3} + 3x^2 \right) + x^5 \left( 2 - \frac{x}{3} + 3x^2 \right)' = 5x^4 \left( 2 - \frac{x}{3} + 3x^2 \right) + x^5 \left( -\frac{1}{3} + 6x \right) = 10x^4 - \frac{5}{3}x^5 + 15x^6 - \frac{1}{3}x^5 + 6x^6 = 21x^6 - 2x^5 + 10x^4$$

2-й способ. Вначале преобразуем исходное выражение, а затем выполним дифференцирование

$$z = 2x^5 - \frac{1}{3}x^6 + 3x^7, \quad z' = 10x^4 - 2x^5 + 21x^6.$$

Легко видеть, что в ряде задач этот способ быстрее приводит к результату.

4) Вычислим производную как производную частного

$$f'(x) = \left( \frac{x^2}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(x^2)'(x^2 + 1) - (x^2 + 1)'x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x \cdot x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

### Задания для самостоятельной работы

1. Найти производные указанных функций способом непосредственного дифференцирования

$$\text{а). } y = x^3 - 2x + 3; \quad \text{б). } y = \frac{x+1}{x-3};$$

$$\text{в). } y = \sqrt{2x-3}; \quad \text{г). } y = \ln x.$$

2. Используя формулы дифференцирования, найти производные следующих функций

$$\text{а). } y = x + 3x^2 - \frac{x^2}{3};$$

$$\text{ж). } y = -3\cos t \operatorname{ctg} t;$$

$$\text{б). } y = x - 2\sqrt{x};$$

$$\text{з). } r = \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi};$$

$$\text{в). } s = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2};$$

$$\text{и). } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}; \text{ вычислить } f'(1);$$

$$\text{г). } z = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} + 4;$$

$$\text{к). } r(\varphi) = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi; \text{ вычислить } r'(\pi);$$

$$\text{д). } u = \frac{2t}{t+3};$$

$$\text{л). } u(r) = \frac{r^2}{2x^2} - \frac{2x^2}{r^2}; \text{ вычислить } \left( \frac{du}{dr} \right)_{r=x};$$

$$\text{е). } v = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3};$$

$$\text{м). } z = (y^2 - 2y) \operatorname{tg} y; \text{ вычислить } z'(0).$$

## 11. Дифференцирование сложных функций

### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 30.** Найти производную для каждой функции

$$1). y = x \cos x \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x.$$

Сначала выполним преобразования  $y = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x$ ,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} x 2 \cos 2x + \frac{1}{2} 2 \cos x (-\sin x) = \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x + x \cos 2x - \sin x \cos x = x \cos 2x. \end{aligned}$$

$$2). y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2 + 1}.$$

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2 + 1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2xe^{x^2}(x^4 + 1 + x^2)}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$3). y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}.$$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x - \sin x + x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{x \cos x}{\sin^2 x}.$$

$$4). y = \operatorname{arctg} \frac{2x^4}{1-x^8}.$$

$$y' = \frac{1}{\left(1 + \frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3 - 8x^{11} + 16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3 + 8x^{11}}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}.$$

$$5). y = x^2 e^{x^2} \ln x.$$

$$y' = \left(x^2 e^{x^2}\right)' \ln x + x^2 e^{x^2} \frac{1}{x} = \left(2xe^{x^2} + x^2 e^{x^2} 2x\right) \ln x + xe^{x^2} =$$

$$= 2xe^{x^2}(1+x^2) \ln x + xe^{x^2} = xe^{x^2}(1+2\ln x + 2x^2 \ln x).$$

### Задания для самостоятельной работы

Найти производные указанных функций

$$а). y = \sin(x^3 + 3x);$$

$$б). y = (2x^4 - 5x + 1)^3;$$

$$в). y = 5^{\cos x};$$

$$г). y = \ln(1 + \sin x);$$

$$\text{д). } y = \arcsin \sqrt{x};$$

$$\text{е). } y = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \cos^3 x;$$

$$\text{ж). } y = \ln \sin 5x;$$

$$\text{з). } y = e^{\cos x^2};$$

$$\text{и). } y = e^{\arcsin \frac{1}{x}};$$

$$\text{к). } y = \arccos \sqrt{1-x^2};$$

$$\text{л). } y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2});$$

$$\text{м). } y = (2^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} + 1)^3;$$

$$\text{н). } y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\text{о). } y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$\text{п) } y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}), \text{ вычислить } y'(0).$$

## 12. Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически. Способ логарифмического дифференцирования

### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 31.** Найти производную  $y'$  функции  $y$ , определяемой уравнением  $x^3 + x^2y + y^2 = 0$ .

Дифференцируем по переменной  $x$  обе части равенства, считая, что  $y$  есть функция от  $x$ :  $3x^2 + 2xy + x^2y' + 2yy' = 0$ , разрешаем полученное уравнение относительно искомой производной  $y'$ :  $y'(x^2 + 2y) = -3x^2 - 2xy$ ,  

$$y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y}.$$

**Пример 32.** Пользуясь способом логарифмического дифференцирования, найти производную функции  $y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2 + 1}}$ .

Логарифмируя обе части равенства, получим

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{3} \cdot \ln x^2 - \frac{1}{3} \cdot \ln(x^2 + 1) = \ln x + \frac{2}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot \ln(x^2 + 1),$$

$$\text{или } \ln y = \frac{5}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot \ln(x^2 + 1).$$

Дифференцируя обе части полученного равенства, имеем

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}; \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{5x^2 + 5 - 2x^2}{3x \cdot (x^2 + 1)};$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{3x^2 + 5}{3x \cdot (x^2 + 1)},$$

$$\text{откуда следует, что } y' = y \cdot \frac{3x^2 + 5}{3x \cdot (x^2 + 1)} \Rightarrow y' = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2 + 1}} \cdot \frac{3x^2 + 5}{3x \cdot (x^2 + 1)}.$$

### Задания для самостоятельной работы

1. Найти производную  $y'$  функции  $y$ , заданной в неявной форме

а).  $x^3 + x^2 y + y^2 = 0;$

б).  $\operatorname{tg} y - xy = 0;$

в).  $\cos(x - y) - y = 0;$

г).  $x^2 y + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = 0;$

д).  $e^{x+y} - \ln \sin \frac{y}{x} = 0.$

2. Пользуясь способом логарифмического дифференцирования, найти производные указанных функций

а)  $y = \frac{x \cdot (1 + x^2)^2}{\sqrt{1 - x^2}};$

б)  $y = x^3 \cdot \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 + x}};$

в)  $y = \sqrt[3]{\frac{x \cdot (x^3 + 1)}{\cos^2 x}};$

г)  $y = \frac{e^{\sin^2 x} \cdot \sqrt[3]{\arcsin x}}{(1 + x)^3}.$

3. Пользуясь способом логарифмического дифференцирования, найти производные показательно – степенных функций

а)  $y = x^x;$

б)  $y = (\cos x)^{\sin x};$

в)  $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x};$

г)  $y = (1 - x^2)^{\arccos x};$

д)  $y = (\operatorname{arctg} x)^{\arcsin^2 x}.$

### 13. Вычисление дифференциала функции, его приложения в приближенных вычислениях

#### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 33.** Найти дифференциал  $dy$  функции  $y = e^{x^2+1}$ .

Исходя из определения дифференциала, имеем

$$dy = y' \cdot dx = (e^{x^2+1})' \cdot dx = e^{x^2+1} \cdot 2x \cdot dx.$$

Данную функцию можно представить так:  $y = e^u$ , где  $u = x^2 + 1$ , тогда будем иметь  $dy = e^u \cdot du = e^{x^2+1} \cdot d(x^2 + 1) = e^{x^2+1} \cdot 2x \cdot dx$ .

**Пример 34.** Найти дифференциал  $dy$  функции  $y = \operatorname{arctg} e^{\sin 3x}$ .

Найдем производную  $y'$ , пользуясь правилом дифференцирования

сложной функции:  $y' = \frac{1}{1 + (e^{\sin 3x})^2} \cdot e^{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3$ , тогда

$$dy = \frac{1}{1 + (e^{\sin 3x})^2} \cdot e^{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3 \cdot dx.$$

Дифференциал  $dy$  можно найти также непосредственно

$$\begin{aligned} dy &= d(\operatorname{arctg} e^{\sin 3x}) = \frac{1}{1 + (e^{\sin 3x})^2} \cdot d(e^{\sin 3x}) = \\ &= \frac{1}{1 + (e^{\sin 3x})^2} \cdot e^{\sin 3x} \cdot d(\sin 3x) = \frac{1}{1 + (e^{\sin 3x})^2} \cdot e^{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3 \cdot dx. \end{aligned}$$

**Пример 35.** Найти дифференциал  $dy$  функции  $y$ , заданной в неявном виде уравнением  $x \cdot \sin y + y^2 \cdot \cos x - 1 = 0$ .

Найдем производную  $y'$ , для этого дифференцируем обе части уравнения по  $x$ , считая при этом  $y$  функцией от аргумента  $x$

$$\sin y + x \cdot \cos y \cdot y' + 2y \cdot y' \cdot \cos x - y^2 \cdot \sin x = 0.$$

Из полученного равенства выразим  $y'$

$$y' \cdot (x \cdot \cos y + 2y \cdot \cos x) = y^2 \cdot \sin x - \sin y; \quad y' = \frac{y^2 \cdot \sin x - \sin y}{x \cdot \cos y + 2y \cdot \cos x}.$$

Следовательно, дифференциал  $dy = \frac{y^2 \cdot \sin x - \sin y}{x \cdot \cos y + 2y \cdot \cos x} \cdot dx$ .

**Пример 36.** Найти приближенное значение функции  $f(x) = \sqrt{x^2 + 7}$  при  $x = 3,02$ , исходя из ее точного значения при  $x = 3$ .

Пусть  $x_1=3$ , а  $x_2=3,02$ . Применяя приближенное равенство (5.7), получаем:  $f(3,02)=\sqrt{(3,02)^2+7}\approx\sqrt{3^2+7}+f'(3)\cdot(3,02-3)\approx 4+f'(3)\cdot 0,02$ .

Чтобы найти  $f'(3)$ , надо предварительно продифференцировать данную функцию и затем найти численное значение производной при  $x=3$ .

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+7}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}, \quad f'(3)=\frac{3}{4}.$$

Таким образом,  $\sqrt{(3,02)^2+7}\approx 4+\frac{3}{4}\cdot 0,02=4,015$ .

**Пример 37.** Найти приближенное значение величины  $\operatorname{tg} 47^\circ$ .

Рассмотрим функцию  $y = \operatorname{tg} x$ . Известно, что  $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ . Поэтому удобно положить  $x_1 = 45^\circ$  и  $x_2 = 47^\circ$ . Чтобы воспользоваться приближенным равенством (5.7), необходимо найти предварительно значение функции

$$y = \operatorname{tg} x \text{ и ее производной } y' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ при } x_1 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}: y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

Выразим в радианной мере разность

$$x_2 - x_1 = \frac{\pi}{180} \cdot 47 - \frac{\pi}{4} = \frac{47\pi - 45\pi}{180} = \frac{\pi}{90} = 0,035.$$

Следовательно,  $\operatorname{tg} 47^\circ \approx 1 + 2 \cdot 0,035 = 1,070$ .

**Пример 38.** Найти приближенное значение величины  $A = \sqrt[3]{26,46}$ .

Рассмотрим функцию  $y = \sqrt[3]{x}$ . Так как при  $x=27$  функция  $y=3$ , то удобно положить  $x_1=27$  и  $x_2=26,46$ . Вычислим значение производной  $y' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$  при

$$x_1=27: y'(27) = \frac{1}{3 \cdot 3^2} = \frac{1}{27}. \text{ Применяя приближенное равенство (5.7), будем}$$

$$\text{иметь } A = \sqrt[3]{26,46} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{27} \cdot (26,46 - 27) = 3 - 0,02 = 2,98.$$

**Задания для самостоятельной работы**

1. Найти дифференциалы функций

а).  $y = \sin 5x - 5 \cdot e^{-x^2}$ ;

б).  $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$ ;

в).  $y = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x}{4} \right)$ ;

г).  $y = 5^{\sqrt{\operatorname{arctg}(x^2)}}$ .

2. Пользуясь приближенным равенством (5.7), вычислить приближенно значение указанных функций при указанных значениях аргумента

а).  $y = \sqrt{x^3 - 2}$ ,  $x=3,02$ ; б).  $y = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$ ,  $x=0,02$ ; в).  $y = e^{1-x^2}$ ,  $x=1,05$ .

3. Пользуясь приближенным равенством (5.7), вычислить приближенно значение указанных величин

а).  $\cos 61^\circ$ ; б).  $\operatorname{tg} 44^\circ$ ; в).  $e^{0,2}$ ; г).  $\sqrt[3]{7,76}$ ; д).  $\operatorname{arctg} 1,05$ ; е).  $\operatorname{arcsin} 0,54$ .

#### 14. Вычисление производных и дифференциалов высших порядков. Формула Лейбница

##### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 39.** Для данных функций найти производные указанного порядка

1)  $y = x^5 - 7x^3 + 2$ ;  $y''' = ?$

2)  $y = \ln x$ ;  $y^{(5)} = ?$

3)  $s = \operatorname{arctg} 2x$ ;  $s'''(-1) = ?$

1) Выполним последовательное дифференцирование функции  $y$

$$y' = (x^5 - 7x^3 + 2)' = 5x^4 - 21x^2,$$

$$y'' = (5x^4 - 21x^2)' = 20x^3 - 42x,$$

$$y''' = (20x^3 - 42x)' = 60x^2 - 42;$$

2) Выполняя последовательное дифференцирование функции  $y = \ln x$ ,

имеем

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3},$$

$$y^{(4)} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{6}{x^4}, \quad y^{(5)} = \left(-\frac{6}{x^4}\right)' = \frac{24}{x^5};$$

3) Вначале выполним последовательное дифференцирование функции  $s = \operatorname{arctg} 2x$ :

$$s' = (\operatorname{arctg} 2x)' = \frac{1}{1+(2x)^2} 2 = \frac{2}{1+4x^2},$$

$$s'' = \left(\frac{2}{1+4x^2}\right)' = -\frac{2}{(1+4x^2)^2} (1+4x^2)' = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2},$$

$$\begin{aligned} s''' &= \left(-\frac{16x}{(1+4x^2)^2}\right)' = -\frac{(16x)'(1+4x^2)^2 - 16x((1+4x^2)^2)'}{(1+4x^2)^4} = \\ &= -\frac{16(1+4x^2)^2 - 16x \cdot 2(1+4x^2) \cdot 8x}{(1+4x^2)^4} = -\frac{16 + 64x^2 - 256x^2}{(1+4x^2)^3} = \frac{192x^2 - 16}{(1+4x^2)^3}. \end{aligned}$$

Подставляя значение аргумента  $x = -1$ , имеем

$$s'''(-1) = \frac{192 \cdot (-1)^2 - 16}{(1+4(-1)^2)^3} = \frac{192 - 16}{(1+4)^3} = \frac{176}{125}.$$

**Пример 40.** Найти производную четвертого порядка от функции  $y = x^3 \cdot \sin x$ .

Полагая в формуле Лейбница (5.12)  $n = 4$ , будем иметь  $(u \cdot v)^{(IV)} = u^{(IV)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(IV)}$ . Пусть  $u = x^3$ ,  $v = \sin x$ ,

$$u = x^3, u' = 3x^2, u'' = 6x, u''' = 6, u^{IV} = 0;$$

$$v = \sin x, v' = \cos x, v'' = -\sin x, v''' = -\cos x, v^{IV} = \sin x,$$

тогда

$$\begin{aligned} (x^3 \cdot \sin x)' &= 4 \cdot 6 \cdot \cos x + 6 \cdot 6x \cdot (-\sin x) + 4 \cdot 3x^2 \cdot (-\cos x) + x^3 \cdot \sin x = \\ &= 24 \cos x - 36x \sin x - 12x^2 \cos x + x^3 \sin x. \end{aligned}$$

**Пример 41.** Найти общее выражение производной  $n$ -го порядка для функции  $y = \ln x$ .

Найдем несколько первых производных

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3},$$

$$y^{(4)} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \quad y^{(5)} = \left(-\frac{6}{x^4}\right)' = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5},$$

откуда становится очевидна производная  $n$ -го порядка функции  $y = \ln x$

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

**Пример 42.** Найти производную второго порядка функции  $y$ , заданной в неявном виде уравнением  $x^2 + 2x + y^2 - 5 = 0$ .

Дифференцируя обе части равенства по переменной  $x$  и считая при этом  $y$  некоторой функцией от  $x$ , будем иметь  $2x + 2 + 2y \cdot y' = 0$ , откуда

$$y' = -\frac{x+1}{y} \quad (1). \text{ Дифференцируя обе части равенства (1) по переменной } x,$$

$$\text{рассматривая при этом } y \text{ как функцию от } x, \text{ получим } y'' = -\frac{y - (x+1) \cdot y'}{y^2} \quad (2).$$

Заменив в правой части (2)  $y'$  его выражением из равенства (1), получим

$$y'' = -\frac{y + \frac{(x+1)^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + (x+1)^2}{y^3}.$$

**Пример 43.** Найти  $y'''$ , если функция задана уравнением  $e^y + y - x = 0$ .

$$e^y \cdot y' + y' - 1 = 0, \quad y' = \frac{1}{e^y + 1},$$

$$y'' = -\frac{e^y \cdot y'}{(e^y + 1)^2}, \quad y'' = -\frac{e^y}{(e^y + 1)^3},$$

$$y''' = -\frac{e^y \cdot y' \cdot (e^y + 1)^3 - e^y \cdot 3 \cdot (e^y + 1)^2 \cdot e^y \cdot y'}{(e^y + 1)^6} =$$

$$= -\frac{e^y \cdot y' \cdot (e^y + 1 - 3 \cdot e^y)}{(e^y + 1)^4} = -\frac{e^y \cdot (1 - 2e^y)}{(e^y + 1)^5}.$$

**Пример 44.** Найти производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ , если функция  $y$

аргумента  $x$  задана параметрическими уравнениями  $\begin{cases} x = r \cdot \cos t, \\ y = r \cdot \sin t \end{cases}$ .

Найдем производную первого порядка  $\frac{dy}{dx} = y'_x$ . Так как  $\frac{dx}{dt} = -r \cdot \sin t$ , а

$\frac{dy}{dt} = r \cdot \cos t$ , то  $y'_x = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} t$ . Чтобы найти производную второго

порядка  $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(y'_x)}{dx}$ , рассматриваем производную первого порядка  $y'_x$

как функцию параметра  $t$  и снова применяем формулу (5.12). Так как

$$\frac{d(y'_x)}{dt} = \frac{d(-\operatorname{ctg} t)}{dt} = \frac{1}{\sin^2 t}, \text{ а } \frac{dx}{dt} = -r \cdot \sin t,$$

то

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 t} \div (-r \cdot \sin t) = -\frac{1}{r \cdot \sin^3 t}.$$

**Пример 45.** Найти  $\frac{d^3 y}{dx^3}$ , если  $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3 \end{cases}$ .

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{(t^3)'}{(\ln t)'} = \frac{3t^2}{\frac{1}{t}} = 3t^3; \quad y''_x = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(3t^3)'}{(\ln t)'} = \frac{9t^2}{\frac{1}{t}} = 9t^3;$$

$$y'''_x = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{(9t^3)'}{(\ln t)'} = \frac{27t^2}{\frac{1}{t}} = 27t^3.$$

**Задания для самостоятельной работы**

1. Найти дифференциалы функций, заданных в неявном виде

а).  $x^3 + y^2 + xy = 0$ ;                      б).  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ .

2. Пользуясь формулой Лейбница, найти производную четвертого порядка для функций

а).  $y = x^3 \cdot e^x$ ;                      б).  $y = x^4 \cdot \ln x$ .

3. Найти  $y''$  от функции  $y$ , заданной в неявном виде

а).  $\operatorname{arctg} y - y + x = 0$ ;                      б).  $x - y + e^x - e^y = 0$ .

4. Найти производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  от функции  $y$ , заданной в параметрическом виде

а).  $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$ ;                      б).  $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$ .

## 15. Основные теоремы о дифференцируемых функций

### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 46.** Функция  $f(x) = -x^2 + 8x$  дифференцируема на отрезке  $[2; 6]$  и на концах отрезка принимает равные значения:  $f(2) = -4 + 16 = 12$ ,  $f(6) = -36 + 48 = 12$ . Следовательно, по теореме Ролля на интервале  $(2; 6)$  найдется по крайней мере одно значение аргумента  $x$ , при котором производная  $f'(x)$  обращается в нуль. Действительно,  $f'(x) = -2x + 8$ , откуда видно, что при  $x = 4$  производная  $f'(x)$  обращается в нуль. При этом  $2 < 4 < 6$ .

**Пример 47.** Определить значение  $\xi$  в формуле Лагранжа для функции  $f(x) = \ln x$  на отрезке  $[1; e]$ .

Согласно условию задачи, имеем:  $a=1$ ,  $b=e$ ,  $f(a)=\ln 1=0$ ,  $f(b)=\ln e=1$ ,

$f(x)=\ln x$ ,  $f'(x)=\frac{1}{x}$ ,  $f'(\xi)=\frac{1}{\xi}$ . Применяя теорему Лагранжа, будем иметь:

$$1-0=\frac{1}{\xi} \cdot (e-1), \text{ откуда } \xi=e-1.$$

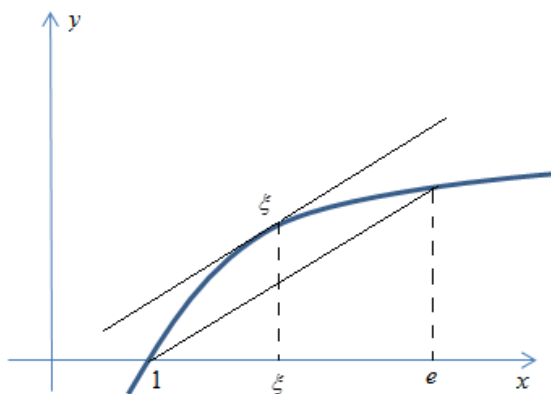


Рис. 25

**Пример 48.** Написать формулу Коши для функций  $f(x)=x^3$  и  $g(x)=x^2$  и определить значение  $\varepsilon$  на отрезке  $[-2;1]$ .

По условию имеем  $f(a)=(-2)^3=-8$ ,  $f(b)=1^3=1$ ,  $g(a)=(-2)^2=4$ ,  $g(b)=1^2=1$ . Далее,  $f'(x)=3x^2$ ,  $f'(\varepsilon)=3\varepsilon^2$ ,  $g'(x)=2x$ ,  $g'(\varepsilon)=2\varepsilon$ .

Подставляя в формулу Коши, получим  $\frac{1-(-8)}{1-4}=\frac{3\varepsilon^2}{2\varepsilon}$ , откуда  $\varepsilon=-2$ .

### Задания для самостоятельной работы

1. Показать, что между двумя корнями функции  $f(x)=x^2-x-6$  содержится корень производной  $f'(x)$ .
2. На параболе  $y=x^2+3x-4$  даны две точки:  $A(-4, 0)$  и  $B(2,6)$ . Найти на дуге  $AB$  точку  $C$ , в которой касательная параллельна хорде  $AB$ .
3. Определить значение  $c$  в формуле Лагранжа для функций
  - а).  $f(x)=\ln x$  на отрезке  $[1,2]$ ;
  - б).  $f(x)=\arcsin x$  на отрезке  $[0,1]$ ;
  - в).  $f(x)=\operatorname{arctg} x$  на отрезке  $[0,1]$ .

4. Написать формулу Коши и найти  $c$  для указанных функций

а).  $f(x) = \sin x$  и  $\varphi(x) = \cos x$  на отрезке  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ;

б).  $f(x) = \cos x$  и  $\varphi(x) = x - \sin x$  на отрезке  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

## 16. Вычисление пределов функций с помощью правила Лопиталья

### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 49.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$ .

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида  $\left(\frac{0}{0}\right)$ . Функции, входящие в числитель и

знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталья:

$f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ ;  $g'(x) = e^x$ ; поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e}.$$

**Пример 50.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin 3x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)'}{(\sin 3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{3\cos 3x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 3x \sqrt{1+x}} = \frac{1}{6}.$$

**Пример 51.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2\arctg x}{\frac{3}{e^x} - 1}$ .

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}; \quad g'(x) = e^{\frac{3}{x}} \cdot \frac{-3}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ -\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)} \right] = \frac{-2}{(0+1) \cdot 1 \cdot (-3)} = \frac{2}{3}.$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и так далее, пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

**Пример 52.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$ .

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}x\right); \quad g'(x) = 1 + e^x;$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4 + x); \quad g''(x) = e^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4 + x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}(4 + x)}{e^{\frac{x}{2}}};$$

$$f'''(x) = \frac{1}{4}; \quad g'''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}} = 0.$$

Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталя может быть использован и какой – либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

**Пример 53.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ .

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2; \quad g'(x) = 1 - \cos x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) -$$

опять получилась неопределенность. Применим правило Лопиталя еще раз:

$f''(x) = e^x - e^{-x}$ ;  $g''(x) = \sin x$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{1-1}{0} = \left(\frac{0}{0}\right)$  - применяем правило

Лопиталя еще раз  $f'''(x) = e^x + e^{-x}$ ;  $g'''(x) = \cos x$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$ .

Неопределенности вида  $(0^0)$ ;  $(1^\infty)$ ;  $(\infty^0)$  можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида  $y = [f(x)]^{g(x)}$ ,  $f(x) > 0$  вблизи точки  $a$  при  $x \rightarrow a$ . Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции  $\ln y = g(x) \ln f(x)$ .

**Пример 54.** Найти предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x$ .

Здесь  $y = x^x$ ,  $\ln y = x \ln x$ , тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln y = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1/x}{-1/x^2} = - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0.$$

Следовательно  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln y = \ln \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} y = 0$ ;  $\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} y = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x = 1$ .

**Пример 55.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$ .

$f'(x) = 2x$ ;  $g'(x) = 2e^{2x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$  - получили неопределенность.

Применяем правило Лопиталя еще раз  $f''(x) = 2$ ;  $g'(x) = 4e^{2x}$ ;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

### Задания для самостоятельной работы

Пользуясь правилом Лопиталя, вычислить пределы функций

$$1). \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}; \quad 2). \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}; \quad 3). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 2x)};$$

- 4).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ ;      5).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$ ;      6).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$ ;
- 7).  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$ ;      8).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$ ;      9).  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$ ;
- 10).  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(1+x)}$ ;      11).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x}$ ;      12).  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$ ;
- 13).  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln \sin x)$ ;      14).  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \cdot \operatorname{tg} x$ ;      15).  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x - 1) \cdot \operatorname{tg} \pi x$ ;
- 16).  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right]$ ;      17).  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$ ;      18).  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^{\ln x}$ ;
- 19).  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$ ;      20).  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ .

## 17-18. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций и построению их графиков

### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 56.** Исследовать функцию  $y = x^3 + 3x^2 + 3x$  на возрастание и убывание.

Найдем сначала производную данной функции  $y' = 3x^2 + 6x + 3$ , затем промежутки знакопостоянства функции, для чего определим нули функции  $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2$ ,  $3(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$ , отметим их на множестве ее определения и расставим знаки производной в каждом из полученных промежутков

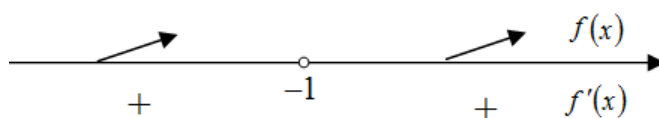


Рис. 26

Из рисунка видно, что на всей области определения функция  $y = x^3 + 3x^2 + 3x$  является возрастающей.

**Пример 57.** Исследовать на экстремум функцию  $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2$ .

Определим критические точки функции:  $y' = x^2 - 2x - 3$ ,  $x^2 - 2x - 3 = 0$ , откуда  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 3$  - критические точки. Определим знаки первой производной вблизи найденных критических точек. Для этого удобно производную представить в виде произведения сомножителей  $y' = (x+1)(x-3)$ . Видим, что на интервале  $(-\infty; -1)$  производная  $y' > 0$ , на интервале  $(-1; 3)$  производная  $y' < 0$ , а на интервале  $(3; +\infty)$  производная  $y' > 0$ . Следовательно, в критической точке  $x_1 = -1$  максимум. В критической точке  $x_2 = 3$  производная  $y'$  меняет свой знак с минуса на плюс, в этой точке функция имеет минимум

$$y_{\max} = y(-1) = -\frac{1}{3} - (-1)^2 + 3 + 2 = 3\frac{2}{3},$$

$$y_{\min} = y(3) = 9 - 9 - 9 + 2 = -7.$$

Экстремальные точки:  $A\left(-1; 3\frac{2}{3}\right)$  и  $B(3; -7)$ .

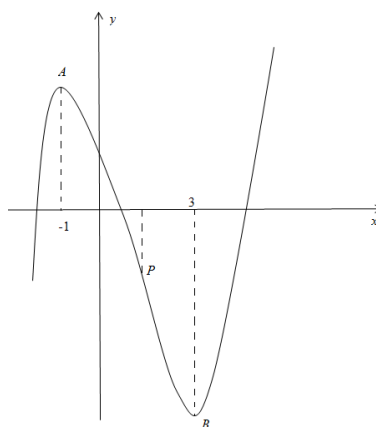


Рис. 27

**Пример 58.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 3$  на отрезке  $[-1, 2]$ .

Находим критические точки, принадлежащие интервалу  $(-1, 2)$ , и значения функции в этих точках  $y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$ ,  $5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 3$ .

Критическая точка  $x_3 = 3$  не принадлежит заданному отрезку. Вычислим значения функции в двух критических точках  $y(0) = 3$ ,  $y(1) = 4$ . Вычислим значения функции на концах заданного отрезка  $y(-1) = -8$ ,  $y(2) = -5$ . Сравнивая полученные результаты, имеем: наибольшее значение функции  $M = y(1) = 4$ , а наименьшее  $m = y(-1) = -8$ .

**Пример 59.** Найти точки перегиба и определить интервалы выпуклости и вогнутости кривой  $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2$ .

Найдем вторую производную функции  $y' = x^2 - 2x - 3$ ,  $y'' = 2x - 2$ . Определим критические точки второго рода  $2x - 2 = 0$ , откуда видно, что точка  $x_0 = 1$  разбивает всю область определения данной функции на два интервала  $(-\infty; 1)$  и  $(1; +\infty)$ ; в первом интервале вторая производная отрицательна, а во втором – положительна. Следовательно, точка  $P\left(1; -\frac{5}{3}\right)$  – точка перегиба графика функции. Кривая является выпуклой на интервале  $(-\infty; 1)$  и вогнутой на интервале  $(1; +\infty)$ .

**Пример 60.** Найти асимптоты и построить график функции  $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$ .

1) Вертикальные асимптоты:  $y \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow 0-0$ :  $y \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow 0+0$ , следовательно,  $x = 0$  – вертикальная асимптота.

2) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1,$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{1}{x} \right) = 2.
 \end{aligned}$$

Таким образом, прямая  $y = x + 2$  является наклонной асимптотой.

Построим график функции.

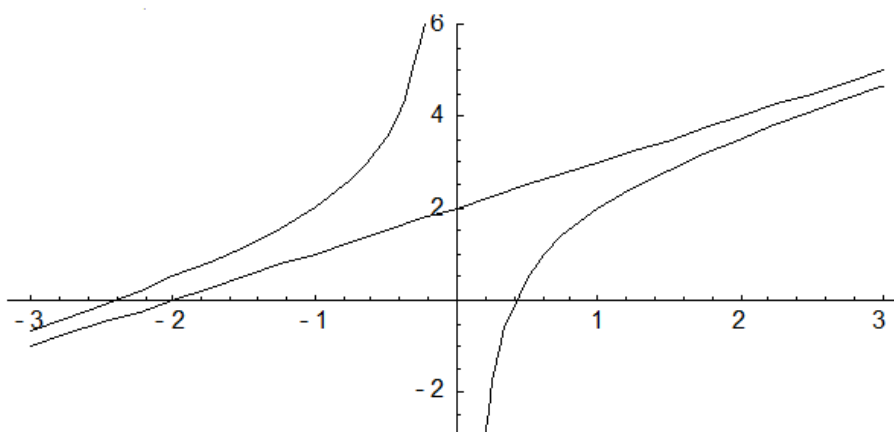


Рис. 28

**Пример 61.** Найти асимптоты и построить график функции  $y = \frac{9x}{9 - x^2}$ .

Прямые  $x = 3$  и  $x = -3$  являются вертикальными асимптотами кривой.

Найдем наклонные асимптоты  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{9 - x^2} = 0,$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x}{9 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = 0.$$

$y = 0$  – горизонтальная асимптота.

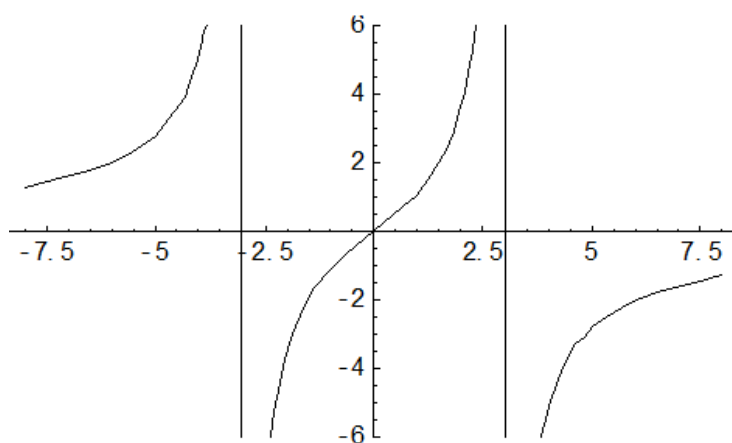


Рис. 29

**Пример 62.** Найти асимптоты и построить график функции

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}.$$

Прямая  $x = -2$  является вертикальной асимптотой кривой.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2x}{x + 2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -4.$$

Итак, прямая  $y = x - 4$  является наклонной асимптотой.

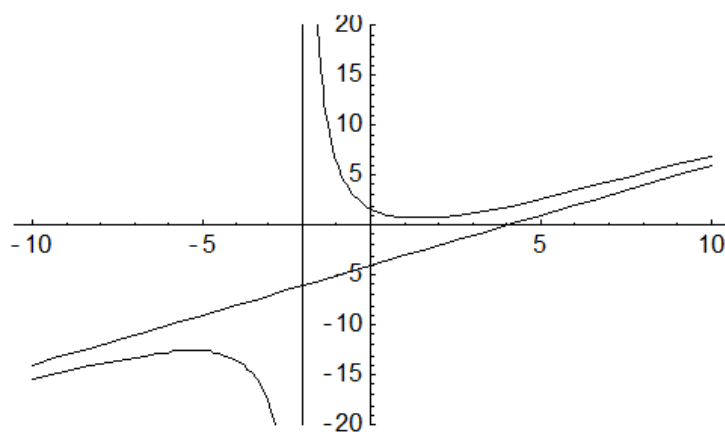


Рис. 30

**Пример 63.** Исследовать функцию  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$  и построить ее график.

Находим **область определения** функции:  $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ . В свою очередь, видно, что прямые  $x = 1$ ,  $x = -1$  являются **вертикальными асимптотами** кривой, так как **точками разрыва второго рода** функции являются точки  $x = 1$ ,  $x = -1$ . **Областью значений** данной функции является интервал  $(-\infty; \infty)$ . Если  $x = 0$ , то  $y = 0$ , то есть точка  $(0; 0)$  принадлежит графику. Данная функция не является ни четной, ни нечетной.

Определим **критические точки**, для этого найдем производную функции:

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Критические точки:  $x = 0$ ;  $x = -\sqrt{3}$ ;  $x = \sqrt{3}$ ;  $x = -1$ ;  $x = 1$ . Установим промежутки **возрастания** и **убывания** функции, для этого определим знаки производной функции на промежутках:

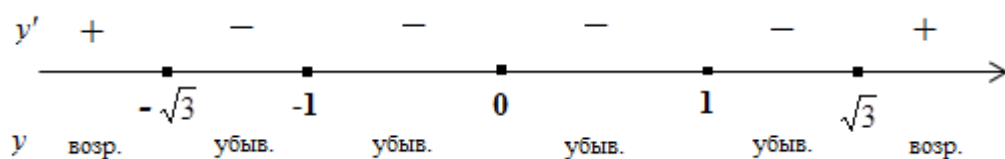


Рис. 31

$-\infty < x < -\sqrt{3}$ ,  $y' > 0$ , функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$-1 < x < 0$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$0 < x < 1$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$\sqrt{3} < x < \infty$ ,  $y' > 0$ , функция возрастает

Видно, что точка  $x = -\sqrt{3}$  является точкой **максимума**, а точка  $x = \sqrt{3}$  является точкой **минимума**. Значения функции в этих точках равны соответственно  $3\sqrt{3}/2$  и  $-3\sqrt{3}/2$ , иначе говоря, **экстремальные точки** –  $A(-\sqrt{3}; 3\sqrt{3}/2)$  и  $B(\sqrt{3}; -3\sqrt{3}/2)$ .

Далее ищем вторую производную функции:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Итак, **критические точки второго рода**:  $x = 0$ ;  $x = -1$ ;  $x = 1$ . Определим **выпуклость и вогнутость** кривой на промежутках:

|       |      |          |                |         |               |          |       |
|-------|------|----------|----------------|---------|---------------|----------|-------|
| $x$   | -2   | -1       | $-\frac{1}{2}$ | 0       | $\frac{1}{2}$ | 1        | 2     |
| $y''$ | -    | $\infty$ | +              | 0       | -             | $\infty$ | +     |
| $y$   | вып. | разрыв   | вогн.          | перегиб | вып.          | разрыв   | вогн. |

$-\infty < x < -1$ ,  $y'' < 0$ , кривая выпуклая,

$-1 < x < 0$ ,  $y'' > 0$ , кривая вогнутая,

$0 < x < 1$ ,  $y'' < 0$ , кривая выпуклая,

$1 < x < \infty$ ,  $y'' > 0$ , кривая вогнутая.

Точка перегиба  $P(0;0)$ .

Про **вертикальные асимптоты** было сказано выше. Теперь найдем **наклонные асимптоты**

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Таким образом, уравнение наклонной асимптоты –  $y = x$ . Построим **график** функции, основываясь на результатах проведенного исследования.

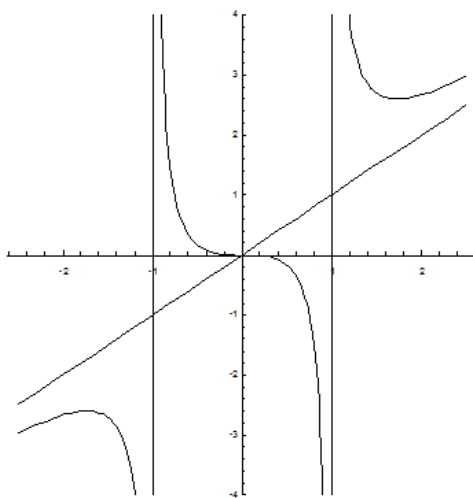


Рис. 32

### Задания для самостоятельной работы

Определить интервалы возрастания и убывания следующих функций

а).  $y = x^2 - 2x + 3$ ;

б).  $y = x^3 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x$ ;

в).  $y = -2 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 1$ ;

г).  $y = \frac{x}{x-2}$  ;

д).  $y = x + \sin x$ ;

е).  $y = x^2 \cdot e^{-x}$ .

7. Найти стационарные точки функций

а).  $y = x^2 - 6x - 4$ ;

б).  $y = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 36 \cdot x + 5$ .

8. Найти критические точки функций

а).  $y = \sqrt{x}$ ;

б).  $y = (x-1) \cdot \sqrt[3]{x^2}$ ;

в).  $y = \sqrt[3]{2x^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$ ;

г).  $y = \frac{e^{2x^2}}{x}$ .

9. Исследовать на экстремум функции

а).  $y = 2x^2 - 4x + 5$ ;

б).  $y = \frac{4x}{4+x^2}$ ;

в).  $y = 3 - 2 \cdot \sqrt[3]{x-4}$ ;

г).  $y = \sqrt{e^{x^2} + 8}$ ;

д).  $y = \ln x + \frac{1}{x}$ ;

е).  $y = x - \arctg x$ .

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке

а).  $y = x^3 e^{x+1}$ ,  $[-4; 0]$ ;

б).  $y = \frac{x}{9-x^2}$ ,  $[-2; 2]$ ;

в).  $y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$ ,  $[-3; 3]$ ;

г).  $y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}$ ,  $[-1; 2]$ ;

д).  $y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59$ ,  $[2; 4]$ ;

е).  $y = x^2 - 2x + \frac{16}{x-1} - 13$ ,  $[2; 5]$ .

11. Найти точки перегиба и определить интервалы выпуклости и вогнутости заданных кривых

а).  $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$ ;

б).  $y = \frac{x^3}{x^2+12}$ ;

в).  $y = \sqrt[3]{x^2-1}$ ;

г).  $y = x^2 \cdot \ln x$ .

12. Найти асимптоты указанных кривых

а).  $y = x \cdot \arctg x$ ;

б).  $y = \frac{2x^2-9}{x+2}$ ;

в).  $y = \sqrt[3]{x^3-6x^2}$ ;

г).  $y = x \cdot e^{-x}$ .

## 2 семестр

### 1. Непосредственное интегрирование функций

#### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 64.**  $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$ , то есть  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ .

**Пример 65.**  $\int \sin x dx = -\cos x + C$ ,  $\int \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx = -\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + C$ .

**Пример 66.** Вычислить  $\int \frac{3x^2 + 2x - 4}{x^2} dx$ .

Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 2x - 4}{x^2} dx &= \int \frac{3x^2}{x^2} dx + \int \frac{2x}{x^2} dx - \int \frac{4}{x^2} dx = 3 \int dx + 2 \int \frac{dx}{x} - 4 \int x^{-2} dx = \\ &= 3x + 2 \ln|x| - 4 \frac{x^{-1}}{-1} + C = 3x + 2 \ln|x| + \frac{4}{x} + C. \end{aligned}$$

Здесь использовались формулы 2) – 4) таблицы неопределенных интегралов.

**Пример 67.** Вычислить  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ . Представим  $dx = 1 \cdot dx$ . Применяя

основное тригонометрическое тождество  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , получим

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + C.$$

### 2. Вычисление интегралов методом введения новой переменной (метод подстановки)

#### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 68.** Вычислить интеграл  $\int \frac{\cos x}{4 + \sin^2 x} dx$ .

Положим  $t = \sin x$ ,  $dt = d(\sin x) = \cos x dx$ , тогда

$$\int \frac{\cos x}{4 + \sin^2 x} dx = \int \frac{dt}{4 + t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{2} + C.$$

**Пример 69.** Вычислить интегралы 1)  $\int \operatorname{tg} x dx$ ; 2)  $\int \operatorname{ctg} x dx$ .

Имеем

$$1) \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C;$$

$$2) \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C.$$

**Пример 70.** Вычислить  $\int \frac{e^{\operatorname{arctgt}}}{1+t^2} dt$ .

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctgt}}}{1+t^2} dt = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{arctgt} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int e^x dx = e^x + C = e^{\operatorname{arctgt}} + C.$$

**Пример 71.** Вычислить интеграл  $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$ .

Сделаем замену  $t = \sin x$ ,  $dt = \cos x dx$ :  $\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C$ .

**Пример 72.** Вычислить интеграл  $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$ .

Выполним замену  $t = x^2 + 1$ ;  $dt = 2x dx$ ;  $dx = \frac{dt}{2x}$ , которая, как и в предыдущем примере приводит к табличному интегралу для степенной функции

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C.$$

### Задания для самостоятельной работы

Вычислить интегралы, используя подходящую подстановку

а).  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 3}} dx.$

б).  $\int \frac{(\ln x)^2 + 1}{x} dx.$

ва).  $\int \operatorname{tg} x dx.$

г).  $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$

д).  $\int \frac{3x^2}{x^2 + 1} \ln(x^3 + 1) dx.$

е).  $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx.$

ж).  $\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

з).  $\int \frac{\ln x - 3}{x \sqrt{\ln x}} dx.$

и).  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 - 2}}.$

к).  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}.$

л).  $\int \frac{3^x dx}{1 + 3^{2x}}.$

м).  $\int x^3 \sqrt{2x^4 - 3} dx.$

$$\text{н). } \int \frac{e^x \sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}} dx.$$

$$\text{о). } \int \frac{x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$\text{п). } \int \frac{\cos x}{\sqrt{2-\sin^2 x}} dx.$$

### 3. Метод интегрирования по частям

#### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 73.** Вычислить  $\int x \cos x dx$ .

Пусть

$$\left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x & v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right|.$$

Следовательно, по формуле (3.4) имеем

$$\int x \cos x dx = -x \sin x + \int \sin x dx = -x \sin x - \cos x + C.$$

**Пример 74.** Вычислить  $\int x^2 \ln x dx$ .

Поскольку подынтегральная функция представляет произведение алгебраической функции на логарифмическую, согласно второму практическому совету будем иметь

$$\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx; v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C.$$

**Пример 75.** Вычислить  $\int x^2 \sin x dx$ .

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & dv = \sin x dx \\ du = 2x dx & v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \sin x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2[x \sin x - \int \sin x dx] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. \end{aligned}$$

**Пример 76.** Вычислить  $\int e^x \sin x dx$ .

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = e^x; du = e^x dx \\ dv = \sin x dx; v = -\cos x \end{array} \right| = -e^x \cos x + \int \cos x e^x dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = e^x; du = e^x dx \\ dv = \cos x dx; v = \sin x \end{array} \right| = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x e^x dx. \end{aligned}$$

В правой части равенства содержится такой же интеграл, что и в левой части, но с другим знаком, тогда приведем их как подобные члены

$$2\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C_1, \text{ тогда } \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C, \text{ где } C = \frac{C_1}{2}.$$

**Пример 77.** Вычислить  $\int e^{2x} \cos x dx$ .

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = e^{2x} \quad du = 2e^{2x} dx \\ dv = \cos x dx \quad v = \sin x \end{array} \right| = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = e^{2x} \quad du = 2e^{2x} dx \\ dv = \sin x dx \quad v = -\cos x \end{array} \right| = e^{2x} \sin x - 2 \left[ -e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx \right] = \\ &= e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx. \end{aligned}$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x),$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

### Задания для самостоятельной работы

Вычислить интегралы, применяя метод интегрирования по частям

- |                                   |                                   |                                 |
|-----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|
| а). $\int \sqrt{x} \ln x dx$      | б). $\int \arcsin x dx$           | в). $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ |
| г). $\int x^2 e^{-x} dx$          | д). $\int (x^2 + 1) \cos x dx$    | е). $\int \sin(\ln x) dx$       |
| ж). $\int (x^2 + x)^2 \sin 5x dx$ | з). $\int (x^2 + 2)^2 \sin 5x dx$ | и). $\int \arctg \sqrt{x} dx$   |
| к). $\int \sqrt{1 - x^2} dx$      |                                   |                                 |

#### 4. Вычисление интегралов от простейших дробей

##### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 78.** Вычислить интеграл  $\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4} dx$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4} dx &= \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48} dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23} dx = \left. \begin{array}{l} u = 6x-5 \\ x = \frac{u+5}{6} \\ du = 6dx \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{14u+70-24}{u^2+23} du = \frac{7}{3} \int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3} \int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6} \ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{23}} + C = \\ &= \frac{7}{6} \ln|36x^2-60x+48| + \frac{\sqrt{23}}{3} \operatorname{arctg} \frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C. \end{aligned}$$

**Пример 79.** Вычислить интеграл  $\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40} dx$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-3}{x^2+6x-40} dx &= \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49} dx = \left. \begin{array}{l} u = x+3 \\ x = u-3 \\ du = dx \end{array} \right| = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49} du = 5 \int \frac{udu}{u^2-49} - \\ &- 18 \int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2} \ln|u^2-49| - \frac{18}{14} \ln \left| \frac{u-7}{u+7} \right| + C = \frac{5}{2} \ln|x^2+6x-40| - \frac{9}{7} \ln \left| \frac{x-4}{x+10} \right| + C. \end{aligned}$$

**Пример 80.** Вычислить интеграл  $\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}} dx$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}} dx &= \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}} dx = \left. \begin{array}{l} u = x-3 \\ x = u+3 \\ du = dx \end{array} \right| = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}} du = 3 \int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} + \\ &+ 13 \int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13 \arcsin \frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2+6x} + 13 \arcsin \frac{x-3}{4} + C. \end{aligned}$$

**Пример 81.** Вычислить интеграл  $\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2} dx$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2} dx &= \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2} dx = \left. \begin{array}{l} u = x-2 \\ du = dx \\ x = u+2 \end{array} \right| = \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2} du = 3 \int \frac{udu}{(u^2+3)^2} + 11 \int \frac{du}{(u^2+3)^2} = \\ &= \left. \begin{array}{l} t = u^2+3 \\ dt = 2udu \end{array} \right| = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2} + 11 \left[ \frac{u}{3 \cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{du}{u^2+3} \right] = -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{3}} + C = \end{aligned}$$

$$= -\frac{3}{2(x^2 - 4x + 7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2 - 4x + 7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

### Задания для самостоятельной работы

Вычислить интегралы от элементарных дробей

$$\begin{array}{llll} 1. \int \frac{2dx}{x+5}, & 2. \int \frac{-7dx}{4-3x}, & 3. \int \frac{4dx}{3-5x}, & 4. \int \frac{2dx}{(x-4)^5}, \\ 5. \int \frac{6dx}{(3-2x)^3}, & 6. \int \frac{3x+2}{x^2+2x+3} dx, & 7. \int \frac{3x-1}{x^2-x+1} dx, & \\ 8. \int \frac{x+2}{x^2+6x+10} dx, & 9. \int \frac{3x+2}{x^2-3x+8} dx, & 10. \int \frac{2x-7}{x^2+4x+15} dx. & \end{array}$$

### 5. Вычисление интегралов от рациональных функций общего вида

#### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 82.** Вычислить интеграл  $\int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)} dx$ .

Дробь правильная, раскладываем первый сомножитель знаменателя, ему соответствуют действительные различные корни  $(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4) = (x-2)(x-4)(x^2 + 4)$ , поэтому сумма простых дробей для исходной функции примет следующий вид

$$\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x-2)(x-4)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Приводим правую часть к общему знаменателю и приравниваем числители

$$A(x-4)(x^2 + 4) + B(x-2)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 - 6x + 8) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88,$$

далее из равенства двух многочленов составим систему уравнений из коэффициентов при одинаковых степенях переменной и решим ее

$$(A + B + C)x^3 + (-4A - 2B - 6C + D)x^2 + (4A + 4B + 8C - 6D)x +$$

$$+(-16A-8B+8D)=9x^3-30x^2+28x-88.$$

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases} \quad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{cases} \quad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 50-10B+5B=35 \end{cases} \quad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ B=3 \end{cases} \quad \begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{x-2} dx + \int \frac{3}{x-4} dx + \int \frac{x+2}{x^2+4} dx &= 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \int \frac{x}{x^2+4} dx + \int \frac{2}{x^2+4} dx = \\ &= 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

**Пример 83.** Вычислить интеграл  $\int \frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6} dx$ .

Так как дробь неправильная, то предварительно следует выделить целую часть

$$\begin{array}{r|l} -\frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{6x^5-8x^4-34x^3+12x^2} & \frac{3x^3-4x^2-17x+6}{2x^2+3} \\ \hline \frac{9x^3+8x^2-76x-7}{9x^3-12x^2-51x+18} & \\ \hline \frac{20x^2-25x-25}{20x^2-25x-25} & \end{array}$$

$$\int \left[ 2x^2+3 + \frac{20x^2-25x-25}{3x^3-4x^2-17x+6} \right] dx = \int 2x^2 dx + \int 3 dx + 5 \int \frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6} dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x +$$

$$+ 5 \int \frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6} dx.$$

Разложим знаменатель полученной дроби на множители. Видно, что при  $x=3$  знаменатель дроби превращается в нуль, тогда

$$\begin{array}{r|l}
 -3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 & x-3 \\
 \underline{3x^3 - 9x^2} & 3x^2 + 5x - 2 \\
 5x^2 - 17x & \\
 \underline{5x^2 - 15x} & \\
 -2x + 6 & \\
 \underline{-2x + 6} & \\
 0 & 
 \end{array}$$

Таким образом,  $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = (x-3)(3x^2 + 5x - 2) = (x-3)(x+2)(3x-1)$ , то есть случай действительных различных корней, что позволяет записать следующую сумму простых дробей

$$\frac{4x^2 - 5x - 5}{(x-3)(x+2)(3x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-1},$$

$$A(x+2)(3x-1) + B(x-3)(3x-1) + C(x-3)(x+2) = 4x^2 - 5x - 5.$$

$$\begin{cases} 40A = 16 \\ 35B = 21 \\ C = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2/5 \\ B = 3/5 \\ C = 1 \end{cases}$$

Получаем окончательный ответ

$$\begin{aligned}
 \int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx &= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3 \int \frac{dx}{x+2} + 2 \int \frac{dx}{x-3} + 5 \int \frac{dx}{3x-1} = \\
 &= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3 \ln|x+2| + 2 \ln|x-3| + \frac{5}{3} \ln|3x-1| + C.
 \end{aligned}$$

### Задания для самостоятельной работы

#### Вычислить интегралы от рациональных функций

$$1. \int \frac{3x^4 + 4}{x^2(x^2 + 1)^3} dx, \quad 2. \int \frac{x^9}{(x^4 - 1)^2} dx, \quad 3. \int \frac{2x dx}{(1+x)(x^2 + 1)^2},$$

$$4. \int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(x^2 + 1)}, \quad 5. \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}, \quad 6. \int \frac{x^2}{1-x^4} dx,$$

$$7. \int \frac{3x^2 + 1}{(x^2 - 1)^3} dx, \quad 8. \int \frac{dx}{x^3 + 1}, \quad 9. \int \frac{dx}{(x^2 + 9)^3},$$

$$10. \int \frac{(x^4 + 1)dx}{x^3 - x^2 + x - 1}, \quad 11. \int \frac{(x^3 + x - 1)dx}{(x^2 + 2)^2}, \quad 12.$$

$$\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4},$$

$$\begin{aligned}
 13. \int \frac{x dx}{x^4 - 3x^2 + 2}, & \quad 14. \int \frac{(x^2 - 1)^2 dx}{(1+x)(1+x^2)^3}, & 15. \int \frac{dx}{x^4(x^3 + 1)^2}, \\
 16. \int \frac{9 dx}{5x^2(3 - 2x^2)^3}.
 \end{aligned}$$

## 6. Вычисление интегралов от иррациональных функций. Вычисление интегралов от тригонометрических функций

### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 84.** Вычислить интеграл  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1-x)^2}$ .

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1-x)^2} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t, \frac{1-x}{1+x} = t^2, \\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2}, \\ 1-x = \frac{2t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int t \cdot \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2} \cdot \left( \frac{1+t^2}{2t^2} \right)^2 = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

**Пример 85.** Вычислить интеграл  $\frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}}$ .

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} &= \left| \begin{array}{l} \sqrt[4]{1-2x} = t, x = \frac{1-t^4}{2}, \\ dx = -2t^3 dt \end{array} \right| = \int \frac{-2t^3 dt}{t^2 - t} = -2 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = \\
 &= -2 \int \left( t + \frac{t}{t-1} \right) dt = -2 \int t dt - 2 \int \frac{t}{t-1} dt = -t^2 - 2 \int \left( 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\
 &= -t^2 - 2t - 2 \ln|t-1| + C = -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2 \ln|\sqrt[4]{1-2x} - 1| + C.
 \end{aligned}$$

**Пример 86.** Вычислить интеграл  $\int \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(1 + \sqrt[6]{x-1})} dx$ .

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(1 + \sqrt[6]{x-1})} dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt[12]{x-1} = t, x-1 = t^{12}, \\ x = t^{12} + 1, dx = 12t^{11} dt \end{array} \right| = \int \frac{(t^4 + t^3)12t^{11} dt}{t^{12}(1+t^2)} = 12 \int \frac{t^3 + t^2}{t^2 + 1} dt = \\
 &= 12 \left( \int \frac{t^3}{t^2 + 1} dt + \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt \right) = 12 \left( \int \left( t - \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt + \int \left( 1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 12 \int t dt - 12 \int \frac{tdt}{t^2+1} + 12 \int dt - 12 \int \frac{dt}{1+t^2} = 6t^2 + 12t - 6 \ln(t^2+1) - 12 \operatorname{arctg} t + C = \\
&= 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} - 6 \ln(\sqrt[6]{x-1}+1) - 12 \operatorname{arctg} \sqrt[12]{x-1} + C.
\end{aligned}$$

**Пример 87.** Вычислить интеграл  $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}$ .

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2 \int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \\
&= \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} + C.
\end{aligned}$$

**Пример 88.** Вычислить интеграл  $\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x}$ .

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x} &= \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right| = \int \frac{(1-t^2)^3}{t^4} dt = \int \frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4} dt = \\
&= \int \frac{dt}{t^4} - 3 \int \frac{dt}{t^2} + 3 \int dt - \int t^2 dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3} t^3 = -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3 \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.
\end{aligned}$$

**Пример 89.** Вычислить интеграл  $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 16 \cos^2 x}$ .

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 16 \cos^2 x} &= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg} x - 16} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = d(\operatorname{tg} x) = dt \end{array} \right| = \\
&= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 3 - 5}{\operatorname{tg} x + 3 + 5} \right| + C = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8} \right| + C.
\end{aligned}$$

**Пример 90.** Вычислить интеграл  $\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx$ .

$$\begin{aligned}
\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx &= \int \sin 10x [\cos 7x \cos 4x] dx = \\
&= \frac{1}{2} \int \sin 10x \cos 11x dx + \frac{1}{2} \int \sin 10x \cos 3x dx = \frac{1}{4} \int \sin 21x dx - \frac{1}{4} \int \sin x dx + \\
&= \frac{1}{4} \int \sin 13x dx + \frac{1}{4} \int \sin 7x dx = -\frac{1}{84} \cos 21x - \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{52} \cos 13x - \frac{1}{28} \cos 7x + C.
\end{aligned}$$

**Задания для самостоятельной работы**

### 1. Вычислить интегралы от иррациональных функций

1.  $\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^5}} dx,$

2.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}},$

3.  $\int \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx,$

4.  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x},$

5.  $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})},$

6.  $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}},$

7.  $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}},$

8.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{3x + \sqrt[3]{x^2}},$

9.  $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})},$

10.  $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{3x+1}} dx,$

11.  $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} dx,$

12.  $\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}},$

13.  $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} dx,$

14.  $\frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1 + \sqrt[3]{3x+4}} dx,$

15.  $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1+x)^2}.$

### 2. Вычислить биномиальные интегралы

1.  $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^5}},$

2.  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx,$

3.  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx,$

4.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}},$

5.  $\int \frac{dx}{x^{11} \sqrt{x^4+1}},$

6.  $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5} dx,$

7.  $\int \frac{\sqrt{1-x^{-\frac{1}{3}}}}{\sqrt{x}} dx,$

8.  $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}},$

9.  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x} dx,$

10.  $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2} dx,$

11.  $\int x^2 \sqrt{x^2+1} dx.$

### 3. Вычислить интегралы от тригонометрических функций

1.  $\int \frac{dx}{5+4\sin x};$

2.  $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x};$

3.  $\int \frac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x} dx;$

4.  $\int \frac{\sin x \cos x}{(3+\cos x)^2} dx;$

5.  $\int \frac{\cos^3 x}{4\sin^2 x - 1} dx;$

6.  $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx;$

7.  $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin x};$

8.  $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x};$

9.  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx;$

10.  $\int \sin^2 x \cos^2 x dx;$

11.  $\int \sin^3 x dx;$

12.  $\int \sqrt{1+\sin x} dx;$

13.  $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x};$

14.  $\int \frac{1}{2+3\cos^2 x} dx;$

15.  $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx.$

## 7. Вычисление определенных интегралов

### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 91.** Вычислить определенный интеграл  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ .

Представим подынтегральную функцию в виде  $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x$ , далее используя для первого множителя основное тригонометрическое тождество и подводя синус под знак дифференциала в виде косинуса, получим по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = \left( -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\cos \frac{\pi}{2} + \frac{\cos^3 \frac{\pi}{2}}{3} + \cos 0 - \frac{\cos^3 0}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**Пример 92.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + 2 \cos x}{2}} dx$ .

Преобразуем подынтегральную функцию, применив известную формулу понижения степени:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + 2 \cos x}{2}} dx &= \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

**Пример 93.** Вычислить интеграл  $\int_4^9 \left( \frac{2x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$ .

На основании свойств 4 и 5 определенного интеграла и формулы Ньютона – Лейбница, получим

$$\begin{aligned}\int_4^9 \left( \frac{2x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx &= \frac{2}{5} \int_4^9 x dx + \int_4^9 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_4^9 + \sqrt{x} \Big|_4^9 = \\ &= \frac{1}{5} (81 - 16) + (\sqrt{9} - \sqrt{4}) = \frac{1}{5} \cdot 65 + 1 = 14.\end{aligned}$$

**Пример 94.** Вычислить интеграл  $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$ .

Преобразуем подынтегральную функцию, подводя под знак дифференциала функцию  $\frac{1}{x}$  в виде натурального логарифма, проинтегрируем по переменной  $\ln x$ :

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x) \Big|_e^{e^2} = \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

**Пример 95.** Вычислить интеграл  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$ .

Здесь положим  $\ln x = t$ , тогда  $\frac{dx}{x} = dt$ ; если  $x=1$ , то  $t=0$ ; если  $x=e$ , то

$$t=1. \text{ Следовательно, } \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$$

**Пример 96.** Вычислить интеграл  $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$ .

Положим  $x = 2 \sin t$ , тогда  $dx = 2 \cos t dt$ . Если  $x=0$ , то  $t=0$ ; если  $x=2$ , то  $t = \frac{\pi}{2}$ . Поэтому

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 t \cdot \sqrt{4-4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sin^2 2t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = 2 \left( t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \sin 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = 2 \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi.\end{aligned}$$

**Пример 97.** Вычислить  $\int_1^e x \ln x dx$ .

Относительно подынтегральной функции положим

$$\left[ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right].$$

Применяя формулу (9.9), получим

$$\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

**Пример 98.** Вычислить  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ .

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin x dx &= \int_0^{\pi} x d(-\cos x) = x(-\cos x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \sin x \Big|_0^{\pi} = \\ &= -(\pi \cos \pi - 0 \cdot \cos 0) + (\sin \pi - \sin 0) = \pi. \end{aligned}$$

### Задания для самостоятельной работы

Вычислить определенные интегралы

1.  $\int_2^4 (x^3 + x) dx$ .

2.  $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ .

3.  $\int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right) dx$ .

4.  $\int_{-1}^7 \frac{dt}{\sqrt{3t+4}}$ .

5.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$ .

6.  $\int_4^9 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ .

7.  $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$ .

8.  $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$ .

9.  $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}$ .

10.  $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$

$$11. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$$

$$12. \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$$

$$13. \int_0^4 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$14. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx.$$

$$15. \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$16. \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$17. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

$$18. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + 2 \sin^2 x}.$$

$$19. \int_0^3 x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$20. \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

$$21. \int_1^2 x \ln x dx.$$

$$22. \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx.$$

**8. Вычисление площадей произвольных фигур, длин дуг, объемов тел вращения, площадей поверхности вращения в декартовых координатах, полярных координатах и в случае параметрического задания функции**

### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 99.** Вычислить площадь, ограниченную параболой  $y = x^2$ , прямыми  $x = -1$  и  $x = 2$  и осью абсцисс (рис. 40).

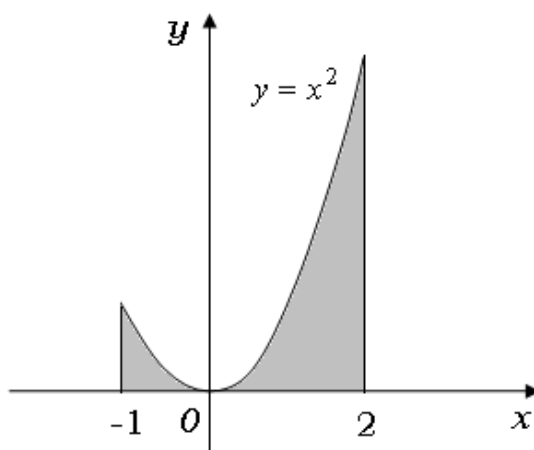


Рис. 40

Искомая площадь вычисляется по формуле (9.13)

$$S = \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 = 3 \text{ (кв.ед.)}.$$

**Пример 100.** Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой  $y = -x$  от параболы  $y = 2x - x^2$ .

Построим данную параболу и прямую, для этого выделением полного квадрата упростим уравнение параболы:

$$y = -(x^2 - 2x);$$

$$y = -(x^2 - 2x + 1) + 1;$$

$$y - 1 = -(x - 1)^2;$$

отсюда видно, что парабола симметрична относительно прямой  $x = 1$ , ветвями направлена вниз и вершина ее лежит в точке  $(1; 1)$  (рис.41).

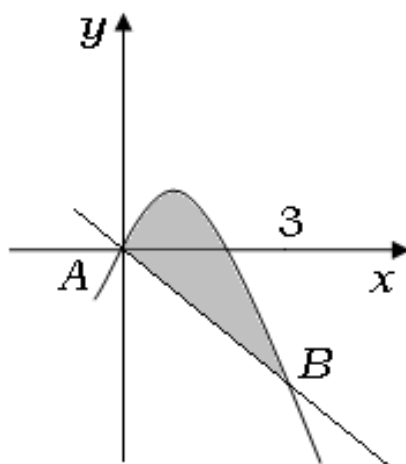


Рис. 41

Совместным решением уравнений параболы и прямой определяем абсциссы точек  $A$  и  $B$ . Имеем

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, & 3x - x^2 = 0, \\ y = -x, & x(3 - x) = 0, \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 3. \end{cases}$$

Теперь по формуле (9.16) вычисляем искомую площадь сегмента при  $f_1(x) = -x$ ;  $f_2(x) = 2x - x^2$ ;  $a = 0$ ;  $b = 3$ .

$$S = \int_0^3 [(2x - x^2) - (-x)] dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left( \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_0^3 = \frac{9}{2} \text{ (кв.ед.)}.$$

**Пример 101.** Найти площадь фигуры, ограниченную первой аркой циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

и отрезком оси абсцисс (рис. 42).

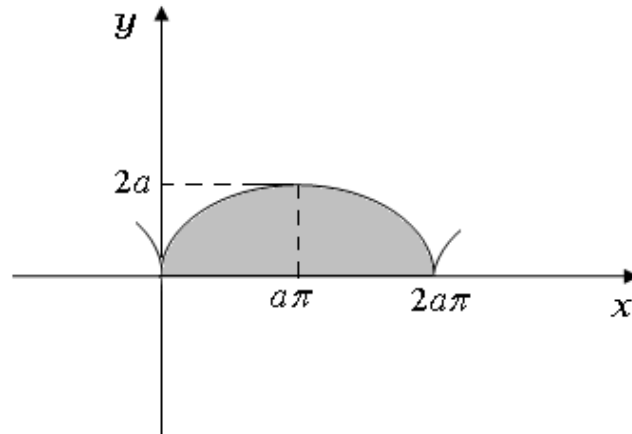


Рис. 42

Точкам  $O$  и  $A$  соответствуют значения параметра  $\alpha = 0$  и  $\beta = 2\pi$ , поэтому по формуле (4.20) искомая площадь

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) [a(t - \sin t)]' dt = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.
 \end{aligned}$$

**Пример 102.** Вычислить площадь, ограниченную кардиоидой  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ .

Кардиоида симметрична относительно полярной оси (рис. 45).

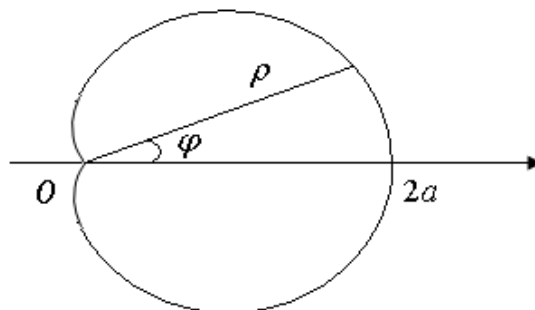


Рис. 45

Поэтому искомая площадь равна удвоенной площади криволинейного сектора  $OAB$ . Дуга  $ABO$  описывается концом полярного радиуса  $r$  при изменении полярного угла  $\varphi$  от 0 до  $\pi$ . Поэтому согласно формуле (9.21)

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi \rho^2 d\varphi = a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^\pi (1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= a^2 \left[ \int_0^\pi d\varphi + 2 \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \right]_0^\pi = \\ &= a^2 \left( \frac{3}{2} \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^\pi = \frac{3}{2} \pi a^2. \end{aligned}$$

**Пример 103.** Вычислить длину дуги полукубической параболы  $y = \sqrt{x^3}$  от точки  $O(0;0)$  до точки  $A(4;8)$ .

Находим  $y'$  и, подставляя в формулу (9.22), получаем

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

**Пример 104.** Найти длину дуги кривой  $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$  от  $\varphi_1 = 0$  до  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Имеем  $r' = \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}$ . Следовательно, используя формулу (9.25),

получим

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^6 \frac{\varphi}{3} + \left(\sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}\right)^2} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos \frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \varphi - \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} (2\pi - 3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

**Пример 105.** Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  $xy = 4$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$  вокруг оси  $Ox$ .

Из уравнения кривой  $xy = 4$  находим  $y = \frac{4}{x}$ , следовательно, по формуле

(9.26) получим:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2} dx = -16\pi \frac{1}{x} \Big|_1^4 = -4\pi + 16\pi = 12\pi \text{ (куб.ед.)}.$$

**Пример 106.** Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  вокруг оси  $Oy$ .

Если у данного эллипса  $b < a$ , то при вращении его вокруг малой оси получается эллипсоид вращения (рис. 49).

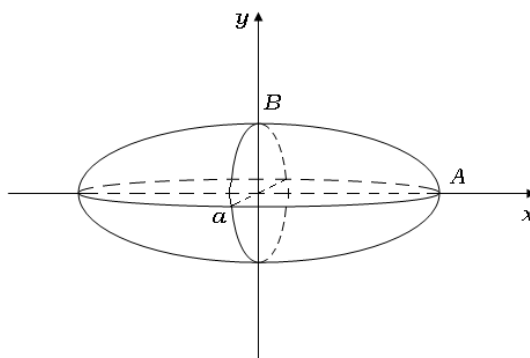


Рис. 49

Вычислим объем  $V_1$  этого тела по формуле (9.27):

$$V_1 = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi a^2 \int_{-b}^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 2\pi a^2 \left(y - \frac{y^3}{3b^2}\right) \Big|_0^b = \frac{4}{3} \pi a^2 b \text{ (куб.ед.)}.$$

При вращении эллипса вокруг его большой оси получается удлинённый эллипсоид вращения, объем которого  $V_2 = \frac{4}{3} \pi ab^2$ . Очевидно,  $V_1 > V_2$ .

**Пример 107.** Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$  вокруг полярной оси.

Полярная ось делит плоскую фигуру, ограниченную кардиоидой на две равные части (рис. 45), поэтому по формуле (9.29) получаем

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{3} \pi a^3 \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi = \\
 &= \frac{2}{3} \pi a^3 \int_{\pi}^0 (1 + \cos \varphi)^3 d(\cos \varphi) = \frac{2}{3} \pi a^3 \frac{1}{4} (1 + \cos \varphi)^4 \Big|_{\pi}^0 = \frac{8}{3} \pi a^3.
 \end{aligned}$$

### Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить площадь, ограниченную одной полуволной синусоиды  $y = \sin x$  и осью  $Ox$ .
2. Найти площадь, ограниченную кривыми  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$  и прямой  $x = 1$ .
5. Найти площадь, ограниченную параболой  $y^2 = 2px$  и  $x^2 = 2py$ .
6. Вычислить площадь эллипса, используя его параметрические уравнения  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ .
7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ .
8. Найти площадь, заключенную внутри лемнискаты Бернулли  $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ .
9. Найти площадь одного лепестка кривой  $\rho = 4 \sin^2 \varphi$ .
10. Вычислить длину дуги полукубической параболы  $y^2 = (x - 1)^3$  между точками  $A(2; -1)$  и  $B(5; -8)$ .
11. Вычислить длину дуги кривой  $y = \ln \sin x$  от  $x = \pi/3$  до  $x = \pi/2$ .
12. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ .
13. Вычислить длину дуги кривой  $\rho = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$ .
14. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ , где  $x \geq 0$  вокруг: а). оси  $Ox$ ; б). оси  $Oy$ .

15. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{x}$  вокруг оси  $Ox$ .
16. Найти объем тела, полученного вращением одной арки циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ .
17. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси  $Ox$  дуги кривой  $y = x^3$  от  $x = 0$  до  $x = \frac{1}{2}$ .
18. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси  $Ox$  одной арки циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ .
19. Найти площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты  $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ .

## 9. Исследование сходимости несобственных интегралов первого и второго рода, их геометрические приложения

### Задания, решаемые в аудитории

**Пример 108.** Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ .

Осуществляя предельный переход, получим

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-2} dx = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \Big|_1^b = -(0 - 1) = 1,$$

следовательно, несобственный интеграл сходится.

**Пример 109.** Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость  $\int_{-\infty}^0 \cos x dx$ .

$$\int_{-\infty}^0 \cos x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \cos x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin x \Big|_a^0 = 0 - \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin a,$$

интеграл расходится, так как при  $a \rightarrow -\infty$  предел  $\lim_{a \rightarrow -\infty} \sin a$  не существует.

**Пример 110.** Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ .

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = \infty,$$

интеграл расходится.

В некоторых задачах нет необходимости вычислять интеграл; достаточно лишь знать, сходится ли он или нет.

**Пример 111.** Показать, что несобственный интеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$  сходится.

По определению  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$ . Так как

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

то несобственный интеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$  сходится.

**Пример 112.** Вычислить несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$ .

Согласно определению  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^3} dx$ . К последнему интегралу

применим формулу интегрирования по частям. Введем следующие обозначения:

$$\left( \begin{array}{ll} u = \ln x & \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^{-3} dx & \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right),$$

тогда, возвращаясь к последнему равенству, получим

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^3} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{\ln x}{2x^2} \Big|_1^b + \frac{1}{2} \int_1^b \frac{dx}{x^3} \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{\ln x}{2x^2} \Big|_1^b - \frac{1}{4x^2} \Big|_1^b \right) =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{\ln b}{2b^2} - \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{2b} \right) = \frac{1}{4}.$$

Здесь для нахождения предела последнего слагаемого применено правило Лопиталя.

**Пример 113.** Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (\alpha \neq -1).$$

По определению

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right).$$

Существование последнего предела зависит от величины  $\alpha$ . Рассмотрим возможные случаи.

Если  $\alpha > 1$ , то

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right) = \frac{1}{\alpha-1},$$

то есть несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (\alpha \neq -1)$  сходится.

Если  $\alpha < 1$ , то

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right) = +\infty,$$

что говорит о расходимости несобственного интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (\alpha \neq -1)$ . При  $\alpha = 1$  интеграл также расходится.

**Пример 114.** Вычислить интеграл  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ .

Подынтегральная функция  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}}$  неограниченна в

окрестности точек  $x=1$  и  $x=3$ , поэтому, исходя из определения, запишем

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}.$$

Здесь вместо точки  $x = 2$  можно взять любую другую внутреннюю точку отрезка  $[1; 3]$ . Вычислим теперь каждое слагаемое в отдельности:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-2)^2}} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin(x-2) \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [0 - \arcsin(\varepsilon - 1)] = \frac{\pi}{2}; \\ \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_2^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-2)^2}} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin(x-2) \Big|_2^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\arcsin(\varepsilon - 1) - 0] = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ .

**Пример 115.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$ .

Подынтегральная функция  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$  неограниченна в окрестности точки  $x = \frac{\pi}{2}$  и интегрируема на любом отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$  как непрерывная функция. Поэтому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \infty.$$

Таким образом, данный несобственный интеграл является расходящимся.

### Задания для самостоятельной работы

1. Найти следующие несобственные интегралы

$$1. \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}; \quad 2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5};$$

$$3. \int_0^{\infty} x \sin x dx;$$

$$4. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x + x^3};$$

$$5. \int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(4x^2 + 1)^3}};$$

$$6. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)};$$

$$7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 10};$$

$$8. \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx;$$

$$9. \int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2 - 4}};$$

$$10. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2};$$

$$11. \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}};$$

$$12. \int_{-2}^2 \frac{xdx}{x^2 - 1}.$$

## Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 1. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

#### 1.1. Перечень основной литературы:

1. Боронина, Е. Б. Математический анализ Электронный ресурс : Учебное пособие / Е. Б. Боронина. - Математический анализ, 2020-02-05. - Саратов : Научная книга, 2019. - 159 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-9758-1745-7

2. Макусева, Т. Г. Математический анализ. Основные методы интегрирования Электронный ресурс : Учебное пособие / Т. Г. Макусева, А. Г. Багоутдинова, О. В. Шемелова. - Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2019. - 235 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-4497-0068-1

3. Рощенко, О.Е. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения Электронный ресурс / Рощенко О.Е., Лебедева Е.А.: учебно-методическое пособие. – Новосибирск: НГТУ, 2019. – 76 с. – экземпляров неограничено

4. Калитвин, А.С. Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных Электронный ресурс / Калитвин А.С. – Липецк: Липецкий ГПУ, 2019. – 81 с. - экземпляров неограничено

5. Будаев, В.Д. Математический анализ. Функции нескольких переменных Электронный ресурс / Будаев В.Д., Якубсон М.Я. – Санкт-Петербург: Лань, 2017. – 456 с. - экземпляров неограничено

6. Твердохлебова, Е. В. Математический анализ: неопределенные интегралы Электронный ресурс: Задачник / Е. В. Твердохлебова. - Математический анализ: неопределенные интегралы, 2021-05-14. - Москва :

Издательский Дом МИСиС, 2018. - 100 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 2227-8397

### **1.2. Перечень дополнительной литературы:**

1. Математический анализ : учебное пособие (практикум) : направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика; Профиль подготовки Математическое моделирование и вычислительная математика. Бакалавриат / авт.-сост. Е. П. Ярцева; ФГАОУ ВО Сев.-Кав. федер. ун-т. - Ставрополь : СКФУ, 2018. - 339 с. : ил.

2. Веретенников, В. Н. Сборник задач по математике. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной Электронный ресурс / В. Н. Веретенников. - Сборник задач по математике. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной, 2023-06-06. - Санкт-Петербург: Российский государственный гидрометеорологический университет, 2011. - 340 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 2227-8397

3. Полькина, Е. А. Сборник заданий по высшей математике с образцами решений (математический анализ): учебно-методическое пособие / Е.А. Полькина, Н.С. Стакун. - Москва: Прометей, 2013. - 199 с. - <http://biblioclub.ru/>. - ISBN 978-5-7042-2490-7

4. Туганбаев, А.А. Функции нескольких переменных и кратные интегралы: учебное пособие / А.А. Туганбаев. – 3-е изд., стереотип. – Москва: Издательство «Флинта», 2017. – 66 с. - экземпляров неограничено

5. Хузиахметова, Р.Н. Теория функций нескольких переменных. Дифференциальное и интегральное исчисление Электронный ресурс: Учебное пособие / Р.Н. Хузиахметова, Е.М. Романова, Д.Г. Субханкулова. – Казань: Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2008. – 106 с. – Премиум-версия ЭБС, экземпляров неограничено

8.2. Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

1. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы по дисциплине «Математический анализ» (электронный вариант)

2. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математический анализ» (электронный вариант)

**Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля):**

<http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика

<http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт

<http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

Основные разделы: журналы, персоналии, организации, конференции, семинары, видеотека, библиотека  
<http://www.mcsme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования