

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению практических занятий
по дисциплине «Математические основы цифровой обработки сигналов»
для студентов направления подготовки
10.03.01 «Информационная безопасность»
Направленность (профиль)
«Организация и технологии защиты информации (по отрасли или в сфере профессиональной
деятельности)»

Ставрополь,
2026

СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1: Общие сведения о дискретных сигналах и линейных системах.

Практическое занятие № 1 «Операции над дискретными последовательностями и схемы инвариантных к сдвигу линейных систем».....5

Тема 2: Операции над дискретными последовательностями и схемы инвариантных к сдвигу линейных систем.

Практическое занятие № 2 «Моделирование дискретных сигналов, их представление в частотной и импульсной области».....15

Тема 3: Способы представления дискретных сигналов.

Практическое занятие № 3 «Исследование метода дискретизации прямого z-преобразования».....24

Тема 4: Дискретные сигналы, их представление в частотной и импульсной области.

Практическое занятие № 4 «Исследование метода дискретизации обратного z-преобразования».....32

Тема 5: Сигналы и линейные системы.

Практическое занятие № 5 «Представление последовательностей конечной длины дискретным рядом Фурье».....42

Тема 6: Дискретизация методом прямого z-преобразования. Дискретизация методом обратного z-преобразования.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6 «Вычисление свертки двух последовательностей дискретным преобразованием Фурье».....49

Тема 7: Представление последовательностей конечной длины дискретным рядом Фурье.

Дискретное преобразование Фурье для свертки дискретных последовательностей.

Практическое занятие № 7 «Реализация двумерной линейной свертки последовательностей с помощью круговой свертки».....58

Тема 8: Вычисление свертки двух последовательностей дискретным преобразованием Фурье.

Практическое занятие № 8 «Представление цифровых фильтров в виде сигнальных графов».....65

Тема 9: Реализация двумерной линейной свертки последовательностей с помощью круговой свертки.

Практическое занятие № 9 «Представление цифровых фильтров в виде систем линейных уравнений».....72

ВВЕДЕНИЕ

1. Цель и задачи освоения дисциплины

Цели дисциплины - освоить соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач; освоить способность понимать значение информации в развитии современного общества, применять информационные технологии для поиска и обработки информации; освоить способность проводить анализ исходных данных для проектирования подсистем и средств обеспечения информационной безопасности и участвовать в проведении технико-экономического обоснования соответствующих проектных решений; освоить способность проводить эксперименты по заданной методике, обработку, оценку погрешности и достоверности их результатов, а также приобрести набор профессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 10.03.01 «Информационная безопасность»

2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ПК-1 Способен обеспечивать защиту от несанкционированного доступа сооружений и средств связи сетей электросвязи (за исключением сетей связи специального назначения) в процессе их эксплуатации	ИД-1 Способен проводить мониторинг функционирования СССЭ, защищённости от НСД сооружений и СССЭ	-Применяет методы контроля функционирования СССЭ, их защищённости от НСД -Анализирует средства мониторинга работоспособности и эффективности применяемых программных, программно-аппаратных (в том числе криптографических) и технических средств защиты СССЭ от НСД
ПК-5 Способен проводить работы по установке и техническому обслуживанию защищённых технических средств обработки информации	ИД-2 Способен к проведению работ по техническому обслуживанию защищённых технических средств обработки информации	определяет технические каналы утечки информации, возникающие за счёт побочных электромагнитных излучений и наводок от основных технических средств, за счёт наводок информационных сигналов на цепи электропитания и электрозаземления основных технических средств и систем, вспомогательные технические средства и системы, их кабельные коммуникации, а также создаваемые методом “высокочастотного облучения” основных технических средств и систем и за счёт возможно внедренных электронных устройств перехвата информации в основных технических средствах; - настраивает защищённые технические средства передачи информации; - проводит испытания защищённых технических

		средств передачи информации
--	--	-----------------------------

ПЛАНЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Тема 1. Общие сведения о дискретных сигналах и линейных системах

Практическое занятие № 1

Тема: Операции над дискретными последовательностями и схемы инвариантных к сдвигу линейных систем

Цель занятия

изучить дискретные сигналы: последовательности, операции над ними и свойства.

Формируемые компетенции: ПК-1, ПК-5.

Теоретическая часть:

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на практическое занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Основные сведения о дискретных последовательностях 35 мин

2. Рассмотрение примеров 35 мин

Проверка выполнения практического занятия 10 мин

Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Математически дискретные сигналы представляются последовательностями чисел. Числовая последовательность x , n -й член в которой обозначают через $x[n]$, формально записывается как

$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty, \quad (1)$$

где n — целое число. На практике такие последовательности возникают, например, при преобразовании аналогового сигнала в дискретную форму. В этом случае численное значение n -го члена последовательности равно величине аналогового сигнала $x_a(t)$ в момент времени nT , т.е.

$$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty. \quad (2)$$

Число T называют шагом дискретизации, а обратное к нему — частотой дискретизации. Хотя последовательность может возникать не только при преобразовании сигналов, ее член $x[n]$ удобно называть n -м отсчетом. Кроме того, обозначение последовательности (1) довольно громоздко, и мы будем говорить о «последовательности $x[n]$ », подобно выражению «аналоговый сигнал $x_a(t)$ », хотя

запись $x[n]$, строго говоря, относится к отдельному члену последовательности.

Дискретные сигналы (т. е. последовательности) обычно изображают, как показано на рис. 1.1. Абсцисса графика показана в виде непрерывной прямой, но важно отдавать себе отчет, что величина $x[n]$ определена только при целых значениях аргумента n . Неверно

думать, что $x[n]$ равно нулю, если n не является целым числом, просто при таких аргументах $x[n]$ не определено.

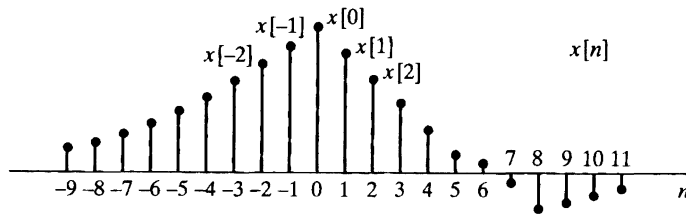


Рисунок 1.1

В качестве примера на рис. 1.2, а) показан фрагмент речевого сигнала, соответствующего вариациям акустического давления, в виде функции от времени, а на рис. 1.2, б) приведена последовательность отсчетов этого сигнала. В то время как исходный речевой сигнал определен в любой момент времени t , последовательность несет информацию об этом сигнале только в определенные моменты времени. Из теоремы о дискретном представлении (Котельникова-Найквиста), следует, что исходный сигнал можно восстановить из последовательности отсчетов с любой желаемой степенью точности, если отсчеты были произведены с достаточной частотой.

Стандартные последовательности и операции над ними

При анализе дискретных сигналов и в системах обработки сигналов над последовательностями совершается ряд основных преобразований. Произведение и сумма двух последовательностей $x[n]$ и $y[n]$ определяются почленно, т.е. $z[n] = x[n] \cdot y[n]$ — произведение, а $w[n] = x[n] + y[n]$ — сумма этих последовательностей. Произведением последовательности $x[n]$ на число a считается последовательность, получающаяся из $x[n]$ в результате умножения каждого его члена a . Последовательность $y[n]$ называют задержанной, или сдвинутой версией последовательности $x[n]$, если

$$y[n] = x[n - n_0], \quad (3)$$

где n_0 — целое число

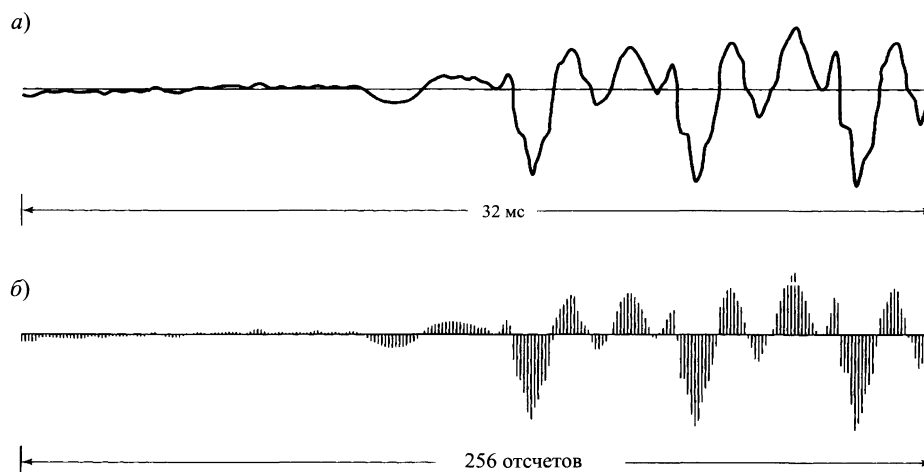


Рисунок 1.2

Некоторые из последовательностей особо важны при обсуждении теории дискретных сигналов и систем. Они представлены на рис. 1.3 и описываются ниже.

Единичный импульс (рис. 1.3, а)) определяется как

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Как мы убедимся, единичный импульс играет ту же роль в теории дискретных сигналов, что и дельта-функция Дирака в теории непрерывных сигналов. Последовательность с единственным ненулевым отсчетом удобно называть дискретным импульсом, или просто импульсом. Стоит отметить, что дискретный импульс — понятие существенно более простое и понятное, чем дельта-функция.

К одному из важных свойств единичного импульса относится тот факт, что любая последовательность может быть выражена в виде линейной комбинации сдвинутых импульсов. Например, последовательность $p[n]$ из рис. 1.4 представляется в виде:

$$p[n] = a_{-3}\delta[n+3] + a_1\delta[n-1] + a_2\delta[n-2] + a_7\delta[n-7], \quad (5)$$

а для произвольной последовательности справедливо соотношение:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]. \quad (6)$$

Формула (6) будет использована для представления дискретных линейных систем.

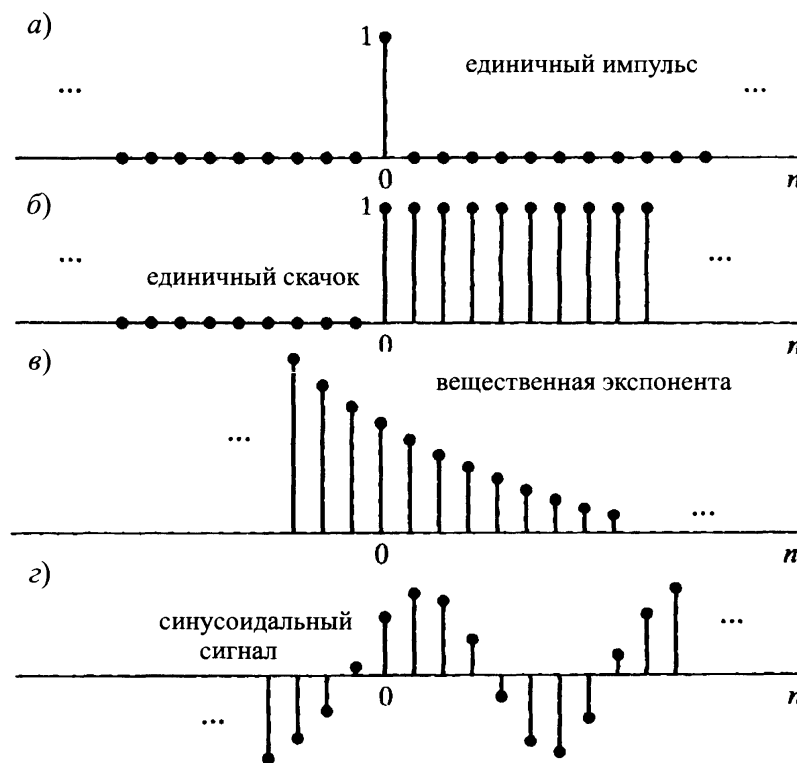


Рисунок 1.3. Некоторые стандартные последовательности

Единичный скачок (рис. 1.3, б)) определяется формулой:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Единичный скачок выражается через импульс как:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k], \quad (8)$$

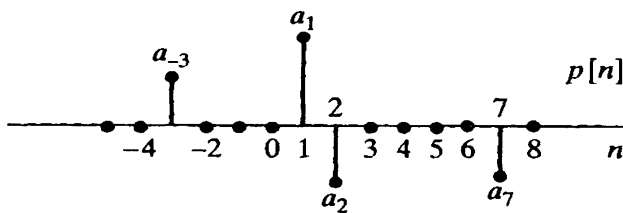


Рисунок 1.4. Пример последовательности, представляющей в виде конечной линейной комбинации сдвинутых импульсов

т.е. n -й отсчет единичного скачка равен сумме всех членов импульсной последовательности вплоть до n -го. Альтернативное представление единичного скачка в терминах импульса получается в результате суммы сдвинутых импульсов, как в уравнении (6). Все ненулевые члены единичного скачка равны 1, поэтому

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k].$$

(9)

С другой стороны, импульсная последовательность может быть выражена через единичный скачок как разность:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]. \quad (10)$$

Экспоненциальная последовательность наиболее важна при представлении и анализе линейных стационарных дискретных систем. В общем виде такие последовательности записываются как

$$x[n] = A\alpha^n. \quad (11)$$

Если A и a — вещественные числа, то соответствующая последовательность тоже называется вещественной. Если $0 < a < 1$ и A положительно, то значения последовательности положительны и убывают при росте n , как на рис. (1.3, в).

Когда $-1 < a < 0$, знаки членов последовательности чередуются, но их абсолютные значения все равно убывают. Наконец, при $|a| > 1$ последовательность возрастает по абсолютной величине с ростом n .

Пример 1. Комбинирование стандартных последовательностей.

Довольно часто стандартные последовательности комбинируются для получения новых. Экспоненциальную последовательность, члены которой равны нулю при $n < 0$, можно определить как

$$x[n] = \begin{cases} A\alpha^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (12)$$

что имеет довольно неуклюжий вид. Более просто такая последовательность задается как выражение $x[n] = A\alpha^n u[n]$.

Синусоидальная последовательность тоже играет не последнюю роль. В общей форме она имеет вид

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (13)$$

где A и φ — вещественные константы (рис. 1.3, г)).

Экспоненциальная последовательность Aa^n с комплексным a имеет вещественную и мнимую части, являющиеся взвешенными синусоидами. Более точно, если $a = |\alpha|e^{j\omega_0}$ и $A = |A|e^{j\varphi}$, то последовательность Aa^n может быть записана одним из следующих способов:

$$\begin{aligned} x[n] &= Aa^n = |A|e^{j\varphi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n} = |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = \\ &= |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \varphi). \end{aligned} \quad (14)$$

Эта последовательность осциллирует с экспоненциально растущей огибающей, если $|a| > 1$, или с экспоненциально уменьшающейся огибающей при $|a| < 1$. (В качестве простейшего примера разберите случай $\omega_0 = \pi$.) Когда $|a| = 1$, последовательность называется комплексной экспоненциальной последовательностью:

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = |A| \cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A| \sin(\omega_0 n + \varphi), \quad (15)$$

т.е. как вещественная, так и мнимая часть последовательности меняется синусоидально в зависимости от n . По аналогии со случаем непрерывного времени величину ω_0 называют (круговой) частотой комплексной синусоиды или комплексной экспоненты, а φ — ее фазой. Заметим, однако, что n — безразмерное целое число. Поэтому ω_0 должна измеряться в радианах. Если мы хотим проследивать тесную аналогию со случаем непрерывного времени, нам необходимо уточнить единицу частоты как радианы на отсчет, а n измерять в отсчетах.

Тот факт, что переменная n в формуле (15) всегда принимает только целые значения, подводит нас к некоторым важным отличиям в свойствах дискретных и непрерывных комплексных экспоненциальных и синусоидальных последовательностей. Разница между непрерывной и дискретной комплексной экспонентой особенно заметна при частоте $(\omega_0 + 2\pi)$. В этом случае

$$x[n] = Ae^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = Ae^{j\omega_0 n} e^{j2\pi n} = Ae^{j\omega_0 n}. \quad (16)$$

Более общий факт: можно легко убедиться, что комплексные экспоненциальные последовательности с частотами $(\omega_0 + 2\pi r)$ при $r \in \mathbb{Z}$ неотличимы одна от другой. Аналогичное утверждение справедливо для синусоидальных последовательностей:

$$x[n] = A \cos((\omega_0 + 2\pi r)n + \varphi) = A \cos(\omega_0 n + \varphi). \quad (17)$$

На данный момент мы просто отметим, что при рассмотрении комплексных экспоненциальных сигналов вида

$x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$ или вещественных синусоидальных сигналов типа $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ мы должны ограничиться частотами, лежащими в интервале длины 2π , например $-\pi < \omega_0 \leq \pi$ или $0 \leq \omega_0 < 2\pi$.

Следующее важное отличие дискретных комплексных экспонент и синусоид от непрерывных касается их периодичности. В непрерывном случае как синусоидальный, так и комплексный экспоненциальный сигнал является периодической функцией, период которой равен 2π , деленному на частоту. В дискретном случае последовательность считают периодической, если

$$x[n] = x[n + N], \quad \forall n, \quad (18)$$

где период N — обязательно целое число. Проверая это условие для дискретных синусоид, получим

$$A \cos(\omega_0 n + \varphi) = A \cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \varphi), \quad (19)$$

откуда

$$\omega_0 N = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

Пример 2. Периодичные и не периодичные дискретные синусоиды

Рассмотрим сигнал $x_1[n] = \cos(\pi n/4)$. Его период равен $N = 8$. Для доказательства заметим, что равенства $x[n+8] = \cos(\pi(n+8)/4) = \cos(\pi n/4 + 2\pi) = \cos(\pi n/4) = x[n]$

справедливы для всех целых n , что и требуется в определении периодичности дискретных сигналов.

Вопреки нашему интуитивному представлению, связанному с непрерывными синусоидальными сигналами, увеличение частоты дискретной синусоиды не обязательно

влечет уменьшение ее периода. Рассмотрим последовательность $x_2[n] = \cos(3\pi n/8)$, имеющую большую частоту, чем $x_1[n]$, и заметим, что период $x_2[n]$ отличен от 8. Действительно, $x_2[n+8] = \cos(3\pi(n+8)/8) = \cos(3\pi n/8 + 3\pi) = -x_2[n]$. Так же как и в случае последовательности $x_1[n]$, можно показать, что период сигнала $x_2[n]$ равен 16.

Итак, увеличение частоты от $\omega_0 = 2\pi/8$ до $\omega_0 = 3\pi/8$ ведет к увеличению периода сигнала. Это происходит из-за того, что дискретный сигнал определен лишь при целых значениях n .

Требование целостности переменной n приводит к тому, что некоторые синусоидальные сигналы вообще не имеют периода. Например, какое бы целое число $N \neq 0$ мы ни взяли, равенство $\cos(n+N) = \cos(n)$ будет нарушаться при каких-то целых значениях переменной n . Эти и другие свойства дискретных синусоид, противоречащие их непрерывным двойникам, возникают вследствие ограничения «времени» n на множество целых чисел.

Комбинируя условие (20) с предыдущим наблюдением о неразличимости частот ω_0 и $(\omega_0 + 2\pi r)$, получим, что существует ровно N различных значений частоты, при которых соответствующая последовательность имеет период N , а именно $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Это свойство комплексных экспоненциальных и синусоидальных последовательностей носит основополагающий характер как для теории, так и для разработки численных алгоритмов в дискретном анализе Фурье. Возвращаясь к различиям между непрерывными и дискретными синусоидами, необходимо отметить, что верхние и нижние частоты также по-разному проявляются в непрерывном и дискретном случаях. При росте частоты Ω_0 непрерывный сигнал $x(t) = A \cos(\Omega_0 t + \varphi)$ осциллирует все более и более быстро. Дискретный синусоидальный сигнал $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ тоже увеличивает скорость осциллирования при возрастании ω_0 от 0 до π .

Фактически, ввиду периодичности синусоидального и комплексного экспоненциального сигналов относительно частоты ω_0 и $(\omega_0 + 2\pi r)$, не отличаются друг от друга. Таким образом, частоты, близкие к 0, ничем не отличаются от частот, близких к 2π . Как следствие, для синусоидальных и комплексных экспоненциальных сигналов значения ω_0 в окрестности $2\pi k$ при любом целом k принято называть нижними (соответственно, медленно осциллирующими), в то время как ее значения в окрестности $(\pi + 2\pi k)$ называют верхними (соответственно быстро осциллирующими).

Дискретные системы

С точки зрения математики система с дискретным временем определяется как преобразование, или оператор, переводящий входную последовательность (сигнал) $x[n]$ в выходную последовательность $y[n]$ (отклик, или реакцию системы), что можно обозначить как

$$y[n] = T\{x[n]\} \quad (22)$$

и изображать графически, как показано на рис. 1.6. Соотношение (22) — это правило, или формула, по которому вычисляются значения реакции системы через отсчеты сигнала, поданного на ее вход. Необходимо подчеркнуть, что отсчет реакции системы с индексом n может зависеть от всех отсчетов входного сигнала $x[n]$. Следующие примеры знакомят с некоторыми простыми, но полезными системами.

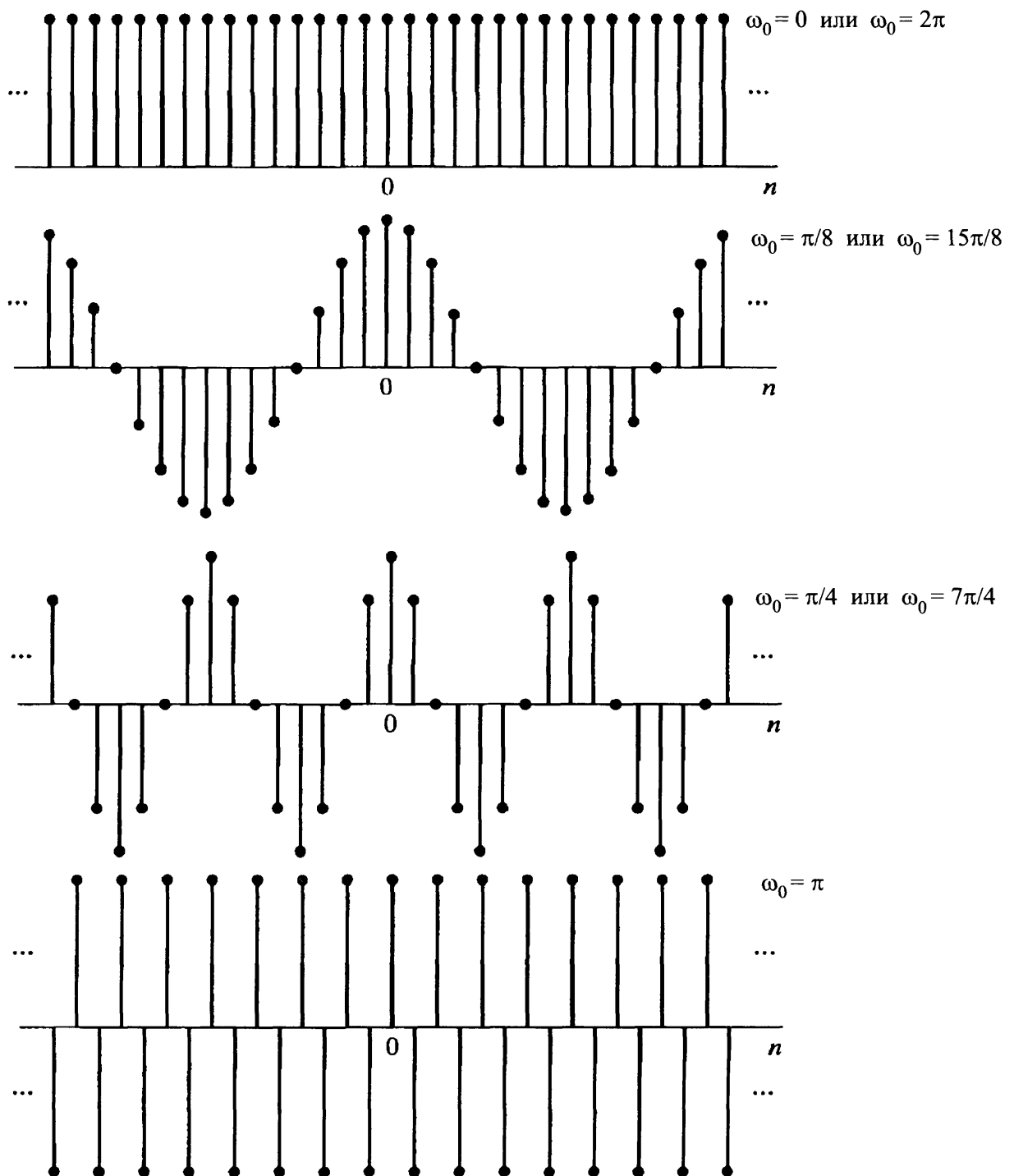


Рисунок 1.5.

Пример 3. Идеальная система задержки.

Идеальная система задержки (ИСЗ) определяется по формуле

$$y[n] = x[n - n_d], \quad -\infty < n < \infty,$$

где n_d — фиксированное натуральное число, называемое задержкой системы. Иными словами, ИСЗ сдвигает входную последовательность вправо на n_d отсчетов. Если в формуле (23) взять в качестве n_d фиксированное отрицательное целое число, то система

будет сдвигать входную последовательность влево на $|n_d|$ отсчетов, что соответствует опережению времени.

В примере 3 для вычисления отсчета отклика системы используется единственный отсчет входной последовательности. В следующем примере это не так.

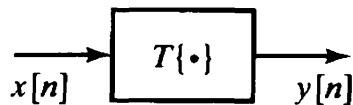


Рисунок 1.6. Графическое представление дискретной системы

Пример 4. Скользящее среднее

Общая система скользящего среднего имеет вид:

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \times (x[n + M_1] + x[n + M_1 - 1] + \dots + x[n] + \dots + x[n - M_2]). \quad (24)$$

Она вычисляет n -й отсчет входной последовательности как среднее арифметическое ($M_1 + M_2 + 1$) отсчетов входной, расположенных вокруг n -го. На рис. 1.7 изображена входная последовательность как функция от переменной k и ее отсчеты, участвующие в вычислении выходного отсчета $y[n]$ при $n = 7$, $M_1 = 0$ и $M_2 = 5$. Получающийся отсчет $y[7]$ равен $1/6$ суммы всех отсчетов, лежащих между вертикальными пунктирными линиями. Для вычисления $y[8]$ обе пунктирные линии надо сдвинуть вправо на одну позицию.

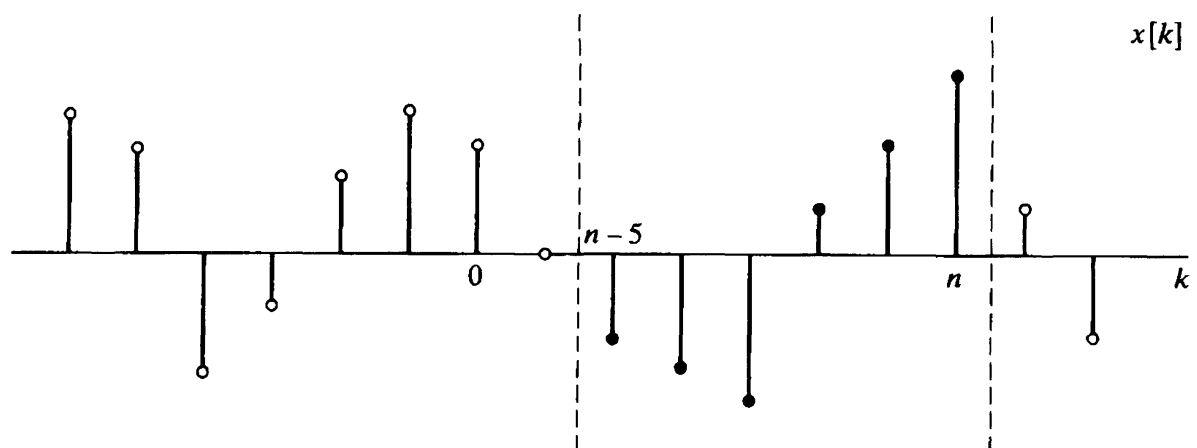


Рисунок 1.7. Члены последовательности. Участвующие в вычислении скользящего среднего

Классы систем определяют наложением определенных ограничений на свойства преобразования T . Этот процесс, как мы сможем убедиться далее, часто ведет к самым общим

математическим представлениям.

Задания для самостоятельного решения.

1.

Опираясь на определение линейности, покажите, что ИСЗ и скользящее среднее являются линейными системами.

2.

Дискретный сигнал $x[n]$ показан на рис. 1.8. Изобразите каждый из следующих сигналов:



Рисунок 1.8.

- а) $x[n] = e^{j(2\pi n/5)}$; б) $x[n - 2]$; в) $x[4 - n]$; г) $x[2n]$; д) $x[n]u[2 - n]$;
е) $x[n - 1]\delta[n - 3]$.

3.

а) Известно, что импульсная характеристика $h[n]$ линейной стационарной системы (ЛС-системы) равна нулю всюду вне отрезка $N_0 \leq n \leq N_1$. Кроме того, ненулевые отсчеты поданного на вход сигнала $x[n]$ расположены в промежутке $N_2 \leq n \leq N_3$. Как следствие, реакция системы равна нулю всюду, кроме некоторого сегмента $N_4 \leq n \leq N_5$. Выразите N_4 и N_5 через N_0 , N_1 , N_2 и N_3 .

б) Пусть $x[n]$ имеет нулевые значения, кроме N последовательных отсчетов, а $h[n] = 0$, кроме M последовательных членов. Что можно сказать о максимальном числе последовательных ненулевых отсчетов $y[n]$?

4.

Рассмотрим линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y[n] - 5y[n - 1] + 6y[n - 2] = 2x[n - 1].$$

Вычислите $y[n]$ при $n \geq 0$, если $x[n] = \delta[n]$ и $y[n] = 0$ при $n < 0$.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-3

Тема 2. Операции над дискретными последовательностями и схемы инвариантных к
сдвигу линейные систем

Практическое занятие № 2

Тема: Моделирование дискретных сигналов, их представление в частотной и импульсной области

Цель занятия

Научиться представлять линейные стационарные системы в импульсной и частотной форме. Изучить соотношение между импульсной и частотной характеристиками, как пару, связанную с преобразованием Фурье и ознакомится с основными свойствами преобразований.

Формируемые компетенции: ПК-1, ПК-5.

Теоретическая часть:

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на практическое занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Основные сведения о функциях стационарных систем 15 мин
2. Рассмотрение частотных характеристик 20 мин.
3. Рассмотрение примеров 35 мин

Проверка выполнения практического занятия 10 мин

Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Дискретные сигналы можно представлять различными способами. Например, синусоидальные и комплексные экспоненциальные сигналы играют особенно важную роль в представлении дискретных сигналов. Это происходит в связи с тем, что комплексные экспоненциальные последовательности являются собственными функциями линейных стационарных систем, а реакция этой системы на синусоидальную последовательность остается синусоидальной последовательностью с той же частотой, фаза и амплитуда которой полностью определяется системой. Фундаментальное свойство линейных стационарных систем, позволяющее представлять сигналы в терминах синусоидальных или комплексных экспоненциальных последовательностей (т.е. представление Фурье), активно используется в

теории линейных систем.

Собственные функции линейных стационарных систем

Чтобы почувствовать главное свойство комплексных экспонент в теории дискретных систем, рассмотрим входную последовательность $x[n] = e^{j\omega n}$ $-\infty < n < \infty$, т.е. комплексную экспоненту с частотой ω , измеряемой в радианах.

Из формулы

Мы видим, что соответствующая реакция линейной стационарной системы с импульсной характеристикой $h[n]$ имеет вид

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right). \quad (1)$$

Положив

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}, \quad (2)$$

получим

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}. \quad (3)$$

Следовательно, $e^{j\omega n}$ - собственная функция системы с собственным числом $H(e^{j\omega})$. Из формулы (3) вытекает, что $H(e^{j\omega})$ описывает функциональную зависимость изменения комплексной амплитуды входного сигнала от частоты ω . Собственное число $H(e^{j\omega})$ называют комплексной частотной характеристикой (КЧХ) системы (или просто частотной характеристикой), поскольку в общей ситуации величина $H(e^{j\omega})$ комплексная и может быть выписана в алгебраической форме через свою вещественную и мнимую части:

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}). \quad (4)$$

или в показательном виде в терминах модуля и аргумента (фазы):

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})}. \quad (5)$$

Пример 1. Частотная характеристика ИСЗ

Найдем КЧХ идеальной системы задержки, определенной формулой

$$y[n] = x[n - n_d], \quad (6)$$

где, n_d - фиксированное целое число. Если $x[n] = e^{j\omega n}$ - сигнал, поданный на вход системы, то по формуле (6) получаем

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d} e^{j\omega n}.$$

Итак, мы видим, что при любом значении n и выходной сигнал пропорционален входному. Причем комплексный коэффициент пропорциональности зависит от частоты ω и величины

задержки n_d . Следовательно, КЧХ ИСЗ равна

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}. \quad (7)$$

Можно и по-другому определить КЧХ системы, для чего напомним, что $h[n] = \delta[n - n_d]$

импульсная характеристика ИСЗ. Учитывая (2), имеем

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_d] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d}.$$

Вещественная и мнимая части КЧХ определяются по формулам Эйлера

$$\begin{aligned} H_R(e^{j\omega}) &= \cos(\omega n_d), \\ H_I(e^{j\omega}) &= -\sin(\omega n_d). \end{aligned} \quad (8)$$

(9)

Ее модуль и фаза равны

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= 1, \\ \angle H_I(e^{j\omega}) &= -\omega n_d. \end{aligned} \quad (10)$$

(11)

сигнал из обширного класса последовательностей может быть выражен в виде линейной комбинации экспоненциальных:

$$x[n] = \sum_k \alpha_k e^{j\omega_k n}. \quad (12)$$

По принципу суперпозиции соответствующий отклик линейной стационарной системы равен

$$y[n] = \sum_k \alpha_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n}. \quad (13)$$

Итак, если нам удалось представить $x[n]$ в виде линейной комбинации экспоненциальных последовательностей, как в (12), то выходная последовательность определяется суммой (13) с помощью КЧХ системы. Следующий простой пример иллюстрирует это фундаментальное свойство линейных стационарных систем.

Пример 2. Синусоидальное представление ЛС – систем

Поскольку синусоидальную последовательность легко записать как линейную комбинацию показательных, рассмотрим синусоидальный вход

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}. \quad (14)$$

Согласно (3) реакцией системы на сигнал $x_1[n] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n}$ служит

$$y_1[n] = H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n}, \quad (15)$$

а на сигнал $x_2[n] = \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}$

$$y_2[n] = H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}. \quad (16)$$

Следовательно, выходная последовательность имеет вид

$$y[n] = \frac{A}{2} \left(H(e^{j\omega_0}) e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n} \right). \quad (17)$$

Если отсчеты последовательности $h[n]$ вещественны, то можно доказать, что $H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0})$. Следовательно,

$$y[n] = A|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n + \varphi + \theta), \quad (18)$$

где $\theta = \angle H(e^{j\omega_0})$ - фаза КЧХ системы при частоте ω_0 , или значение фазо-частотной характеристики (ФЧХ) при $\omega = \omega_0$.

В случае идеальной задержки $|H(e^{j\omega_0})| = 1$ и $\theta = -\omega_0 n_d$, как мы убедились в примере 1. Следовательно,

$$y[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi - \omega_0 n_d) = A\cos(\omega_0(n - n_d) + \varphi), \quad (19)$$

что согласуется с результатом, непосредственно полученным из определения ИСЗ.

По существу, понятие КЧХ для непрерывных и дискретных линейных стационарных систем одно и то же. Однако имеет место и яркое отличие, которое заключается в том, что КЧХ дискретных линейных стационарных систем — всегда 2π – периодичная функция от частоты ω . Чтобы осознать этот факт, подставим $\omega + 2\pi$ в уравнение (2).

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j(\omega+2\pi)n}. \quad (20)$$

Учитывая, что $e^{\pm j2\pi n} = 1$ при целом n , получаем

$$e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j\omega n}e^{-j2\pi n} = e^{-j\omega n}.$$

Следовательно,

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = H(e^{j\omega}) \quad (21)$$

и в более общем виде

$$H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega}), \quad r \in \mathbb{Z}. \quad (22)$$

Так как функция $H(e^{j\omega})$ 2π - периодична, а частоты ω и $\omega + 2\pi$ неотличимы друг от друга, нам достаточно выяснить значения $H(e^{j\omega})$ на полуинтервале длины 2π , например $0 \leq \omega < 2\pi$ или $-\pi < \omega \leq \pi$, и по периодичности определить КЧХ всюду вне указанного полуинтервала. Для простоты и согласованности с непрерывным случаем функцию $H(e^{j\omega})$ удобно задавать на полуинтервале $-\pi < \omega \leq \pi$. При таком выборе периода нижними частотами называются частоты, близкие к нулю, а верхними — частоты, лежащие около $\pm \pi$. Вспоминая, что частоты, отличающиеся на величины, кратные 2π , неотличимы друг от друга, предыдущее утверждение можно сформулировать следующим образом: нижние частоты близки четным кратным 2π , в то время как верхние — к нечетным кратным π .

Пример 3. Идеальные частото-избирательные фильтры

Важный класс линейных стационарных систем включает в себя системы, для которых импульсная характеристика равна единице над определенными промежутками частот и нулю в остальной области. Такую характеристику имеют идеальные частотно-избирательные фильтры. КЧХ идеального фильтра нижних частот показана на рис 1.1, а).

Ввиду естественной периодичности она имеет вид характеристики многополосного фильтра, поскольку частоты, близкие к нулю, невозможно отличить от тех, которые близки к 2π . В действительности, фильтр пропускает только нижние частоты и задерживает

верхние. Поскольку КЧХ полностью определяется своим поведением на полуинтервале $-\pi < \omega < \pi$, характеристику идеального фильтра нижних частот более

правильно показывать только на этом полуинтервале, как на рис. 1.1, б). Ясно, что вне этого интервала КЧХ повторяется периодически с периодом 2π . КЧХ идеальных фильтров (задержки, пропускающего и верхних частот) представлены на рис. 1.2.

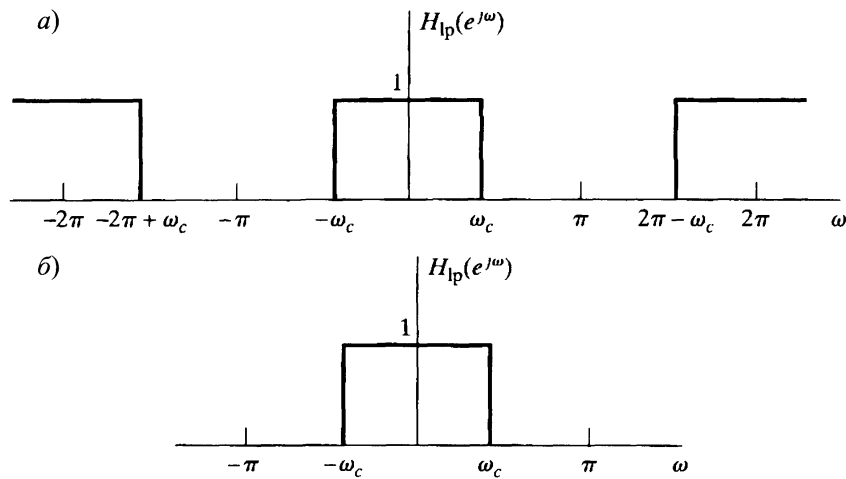


Рис. 1.1 Идеальный фильтр нижних частот.

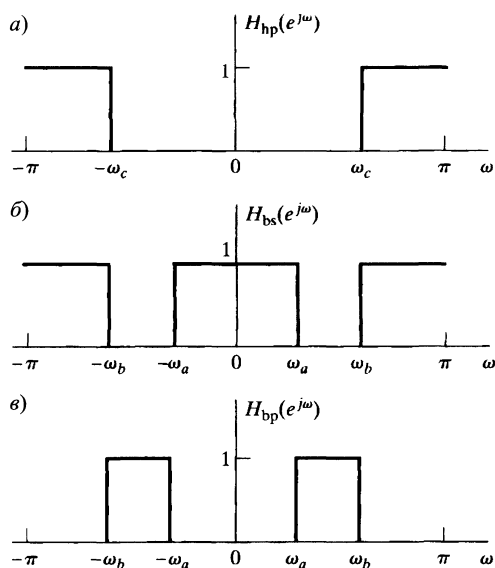


Рис. 1.2. Идеальные частотно-избирательные фильтры.

Пример 4. Определение импульсной характеристики по КЧХ

С учетом 2π -периодичности КЧХ фильтра верхних частот с задержкой равна

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_d}, & \omega_c < |\omega| < \pi, \\ 0, & |\omega| < \omega_c. \end{cases} \quad (23)$$

Перепишем ее как

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} (1 - H_{lp}(e^{j\omega})) = e^{-j\omega n_d} - e^{-j\omega n_d} H_{lp}(e^{j\omega}),$$

где $H_{lp}(e^{j\omega})$ - 2π -периодическая функция, равная

$$\begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi. \end{cases}$$

$$h[n] = \delta[n - n_d] - h_{lp}[n - n_d] = \delta[n - n_d] - \frac{\sin \omega_c(n - n_d)}{\pi(n - n_d)}.$$

Свойства преобразований Фурье

Последовательность $x[n]$	Фурье-образ $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\text{Re}\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega}))$
4. $j \text{Im}\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega}))$
5. $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	$X_R(e^{j\omega}) = \text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	$jX_I(e^{j\omega}) = j \text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$
Следующие свойства справедливы лишь для вещественных последовательностей	
7. $x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
8. $x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$
9. $x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$
10. $x[n]$	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $
11. $x[n]$	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$
12. $x_e[n]$	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$	$jX_I(e^{j\omega})$

Таблица 1 Свойства симметрии преобразования Фурье

Последовательности $x[n]$ и $y[n]$	Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ и $Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d], n_d \in \mathbb{Z}$	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
	$X^*(e^{j\omega})$, если $x[n]$ — вещественная
5. $nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$
Теоремы Парсеваля	
8.	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$
9.	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}) d\omega$

Таблица 2. Теоремы о преобразовании Фурье

Последовательность	Фурье-образ
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. $1 \quad (-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin \omega_p (n+1)}{\sin \omega_p} u[n] \quad (r < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	$\frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \varphi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\pi e^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\varphi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k))$

Таблица 3. пары, связанные преобразованием Фурье

Пример 5. Определение импульсной характеристики разностного уравнения

Здесь мы найдем импульсную характеристику устойчивой линейной стационарной системы, сигнал которой, поданный на вход, связан с соответствующей реакцией линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]. \quad (24)$$

Однако в этом примере демонстрируется единый подход различных преобразований к анализу линейных систем. Для определения импульсной характеристики положим $x[n] = \delta[n]$, а через $h[n]$ обозначим импульсную характеристику, после чего уравнение (24) переписывается в виде

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]. \quad (25)$$

Применяя преобразования Фурье к обеим частям этого уравнения, получим

$$H(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}H(e^{j\omega}) = 1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}, \quad (26)$$

Что равносильно соотношению

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \quad (27)$$

Теперь для определения $h[n]$ нам достаточно найти обратное преобразование Фурье для $H(e^{j\omega})$. Представим соотношение (27) в более удобной для этой цели форме

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \quad (28)$$

Из строки 4 таблицы 3 следует, что

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

Комбинируя это соответствие со свойством 3 таблицы 2, находим:

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

(29)

И наконец, по линейности приходим к окончательному ответу:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1].$$

(30)

Задания для самостоятельного решения.

1. Определите, какие из сигналов являются периодическими, и установите их период.

а) $(x[n]) = e^{j(\pi n/6)}$; б) $(x[n]) = e^{j(3\pi n/4)}$;

в) $(x[n]) = \frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n}$; г) $(x[n]) = e^{j\pi n/\sqrt{2}}$.

2. Рассмотрите разностное уравнение

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = \frac{1}{3}x[n-1].$$

а) Что можно сказать о частотной и импульсной характеристике, реакции на единичный скачок ЛС-системы, описываемой этим разностным уравнением?

б) Что можно сказать об общем виде однородного решения этого разностного уравнения?

в) Рассмотрите другую систему, удовлетворяющую этому же уравнению, но не относящуюся ни к детерминированным, ни к ЛС-системам. Найдите ее реакцию на сигнал $x[p] = 6[p]$, если известно, что $y[0] = y[1] = 1$.

3. Определите отклик ЛС-системы с импульсной характеристикой $h[n]$ на сигнал $x[n]$, если

а) $x[n] = u[n]$, $h[n] = a^n u[-n-1]$, $a > 1$;

б) $x[n] = u[n-4]$, $h[n] = 2^n u[-n-1]$;

в) $x[n] = u[n]$, $h[n] = 2^{n-1} u[-n]$;

г) $x[n] = u[n] - u[n-10]$, $h[n] = 2^n u[-n-1]$.

4. Импульсная характеристика ЛС-системы равна $h[n] = u[n]$. Определите ее реакцию на сигнал, изображенный на рис. 1, который описывается формулой:

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ a^n, & 0 \leq n \leq N_1, \\ 0, & N_1 < n < N_2, \\ a^{n-N_2}, & N_2 \leq n \leq N_2 + N_1, \\ 0, & N_2 + N_1 < n, \end{cases}$$

где $0 < a < 1$.

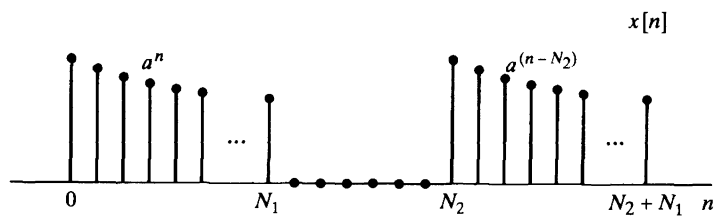


Рисунок 1.

5. КЧХ ЛС-системы равна

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega 3}, & |\omega| < \frac{2\pi}{16} \cdot \frac{3}{2}, \\ 0, & \frac{2\pi}{16} \cdot \frac{3}{2} \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Найдите отклик системы на периодическую цепочку единичных импульсов $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n + 16k]$ с периодом $N=16$.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-4

Тема 3. Способы представления дискретных сигналов

Практическое занятие № 3

Тема: Исследование метода дискретизации прямого z-преобразования

Цель занятия

Ознакомится с основными понятиями z-преобразования, изучить свойства области его определения.

Формируемые компетенции: ПК-1, ПК-5.

Теоретическая часть:

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на практическое занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Изучение методов нахождения z -преобразования 15 мин

2. Рассмотрение примеров 25 мин

3. Выполнение практического задания 30 мин

Проверка выполнения практического занятия 10 мин

Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Z-преобразование

Дискретизованное по времени преобразование Фурье последовательность $x[n]$ была определена как

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (1)$$

Z-преобразование той же последовательности вводится соотношением

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}. \quad (2)$$

Правая часть этой формулы — бесконечный степенной ряд от комплексной переменной z . Иногда сумму (2) полезно рассматривать как оператор, переводящий последовательность в функцию, обозначаемый обычно через $\mathcal{Z}\{.\}$:

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z) \quad (3)$$

С этой точки зрения оператор z -преобразования выглядит как правило, сопоставляющее последовательности $x[n]$ функцию $X(z)$ от непрерывной комплексной переменной z . Соответствие между последовательностью и ее z-преобразованием обозначается как

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z). \quad (4)$$

z –преобразование (2) часто называют двусторонним z –преобразованием, чтобы отличать его от одностороннего z –преобразования:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}. \quad (5)$$

Ясно, что одностороннее z -преобразование совпадает с двусторонним только на множестве последовательностей $x[n]$ с $x[n] = 0$ при $n < 0$.

При сравнении формул (1) и (2) становится очевидным, что между преобразованием Фурье и z -преобразованием существует тесная связь. В частности, заменяя комплексную переменную z в формуле (2) на $e^{j\omega}$ мы сводим z -преобразование к преобразованию Фурье. Это свойство мотивирует обозначение $X(e^{j\omega})$ для Фурье образа, поскольку оно совпадает с $X(z)$ при $z = e^{j\omega}$. Такая подстановка означает ограничение переменной z в z –преобразовании на единичную окружность, т.е. при $|z| = 1$ z -преобразование равно Фурье-образу. Сформулируем более общее замечание. Можно представить переменную z в показательном виде

$$z = re^{j\omega}.$$

Тогда формула (2) перепишется как

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n}$$

Или

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}. \quad (6)$$



Рисунок 1. Единичная окружность на комплексной плоскости.

Последнее равенство можно интерпретировать как преобразование Фурье произведения исходной последовательности на экспоненциальную r^{-n} . Очевидно, при $r=1$ правая часть формулы (6) дает Фурье-образ последовательности $x[n]$. z –преобразование, как функцию комплексной переменной, удобно описывать с помощью комплексной плоскости. Геометрическое место точек z на ней, удовлетворяющих условию $|z|=1$, Представляет собой окружность единичного радиуса с центром в нуле (рис.1). Эту окружность принято называть единичной окружностью. z –преобразование, вычисляемое только на единичной окружности, совпадает с преобразованием Фурье. Заметим, что ω - это величина угла между радиус-вектором точки z на единичной окружности и вещественной осью, отсчитываемого против

часовой стрелки. При вычислении $X(z)$ в точках единичной окружности, начиная с $z = 1$ (т.е. $\omega = 0$) и далее в направлении к $z = -1$ (т.е. $\omega = \pi$) через $z = j$ (т.е. $\omega = \pi/2$), мы получим Фурье-образ на промежутке $0 \leq \omega \leq \pi$. Продолжая процесс вычисления вдоль единичной окружности, мы найдем значение Фурье-образа на всем периоде. Интерпретация преобразования Фурье как ограничения z -преобразования на единичную окружность концептуально соответствует обертыванию частотной оси вокруг единичной окружности с $\omega = 0$ в точке $z = 1$ и $\omega = \pi$ в $z = -1$. При этом периодичность преобразования Фурье относительно частоты получается естественным образом, так как изменение угла на 2π радиан соответствует повороту точки единичной окружности на полный оборот, при котором любая точка переходит в себя.

Степенной ряд, представляющий Фурье-образ, сходится далеко не для всех последовательностей, т.е. значение бесконечной суммы может не быть конечным. По той же причине z -преобразование существует тоже не для всех последовательностей, или оно может оказаться определенным не при всех значениях переменной z . Множество тех значений z , при которых степенной ряд сходится, называется областью сходимости¹ (ОС). Ряд, вычисляющий Фурье-образ абсолютно суммируемых последовательностей, сходится к непрерывной функции переменной ω . Применяя это свойство к формуле (6), находим, что неравенство

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \quad (7)$$

Сходимость степенного ряда (2) зависит только от величины $|z|$, поскольку $|X(z)| < \infty$, как только

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z|^{-n} < \infty \quad (8)$$

Т.е. ОС ряда (2) состоит из всех тех точек z , для которых выполнено неравенство (8). Таким образом, вместе с каждым числом z_1 , попавшим в ОС ряда, туда же попадут все комплексные числа z с $|z| = |z_1|$.

Степенной ряд виде (2) называется рядом Лорана, очень подробно изучается в теории функций комплексного переменного. Ряд Лорана, а значит, и z -преобразование представляют аналитическую функцию в каждой точке ОС.

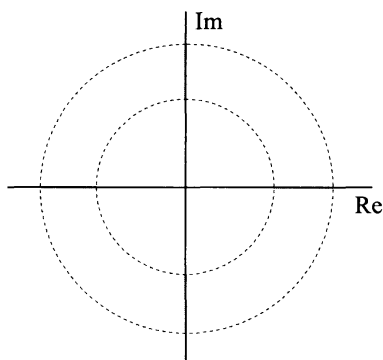


Рисунок 2. ОС представляет собой кольцо, в частных случаях внутренняя или внешняя граница ОС может вообще отсутствовать.

Как явствует из неравенства (7), равномерная сходимость z -преобразования обеспечивается абсолютной суммируемостью произведения исходной последовательности на экспоненциальную. Ни одна из последовательностей:

$$x_1[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad x_2[n] = \cos \omega_0 n, \quad -\infty < n < \infty.$$

не принадлежит классу абсолютно суммируемых. Более того, даже после умножения этих последовательностей на γ^{-n} мы не получим абсолютной суммируемости при всех значениях γ . Таким образом, z -преобразование этих последовательностей сходится не при всех значениях z . Аналогично, последовательность $x_2[n]$ не суммируется ни абсолютно, ни с квадратом, но, тем не менее, используя импульсы, ее Фурье-образ можно определить. Фурье-образы обеих последовательностей не являются непрерывными, бесконечно дифференцируемыми функциями. Следовательно, их нельзя получить как ограничение z -преобразования на единичную окружность, хотя мы и употребляем обозначение $X(e^{j\omega})$ подразумевая, что функция определена на единичной окружности.

Z -преобразование наиболее полезно, когда бесконечная сумма может быть выражена в компактном виде, т. е. когда ее можно «вычислить» и записать простой математической формулой. К наиболее важным и полезным z -преобразованиям относятся те, для которых $X(z)$ на ОС ряда записывается как рациональная функция, т.е.

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (9)$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ - многочлены переменной z .

Пример 1. Правосторонняя экспоненциальная последовательность

Рассмотрим сигнал $x[n] = a^n u[n]$. Так как его ненулевые отсчеты могут быть только при $n \geq 0$ - это пример правосторонней последовательности. Из формулы (2) получаем

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Для сходимости ряда нам достаточно неравенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$$

Таким образом, в ОС входят те значения z , для которых $|az^{-1}| < 1$ или, что тоже самое, $|z| > |a|$. Внутри ОС ряд сходится к функции

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a| \quad (10)$$

Здесь мы воспользовались знакомой формулой для суммы членов бесконечной геометрической прогрессии. ОС z -преобразования не пуста для любого конечного значения $|a|$. С другой стороны, Фурье-образ этой последовательности определен лишь для a с $|a| < 1$. Если $a=1$, наша последовательность превращается в единичный скачок с z -преобразованием

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1. \quad (11)$$

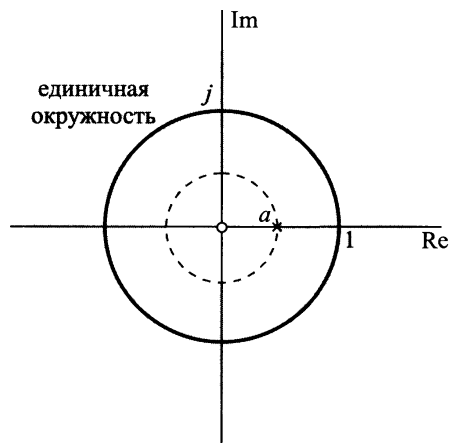


Рисунок 3. Схема нулей и полюсов в ОС.

Пример 2. Левосторонняя экспоненциальная последовательность

Пусть теперь $x[n] = -a^n u[-n-1]$. Поскольку члены последовательности отличны от нуля только при $n \leq -1$, ее называют левосторонней. В этом случае

$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n \quad (12)$$

Если $|a^{-1} z| < 1$, или $|z| < |a|$ ряд (12) сходится к функции

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = - \frac{a^{-1} z}{1 - a^{-1} z} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a| \quad (13)$$

Схема нулей и полюсов и ОС этого примера изображены на рис.4. Заметим, что при $|a| < 1$ последовательность $-a^n u[-n-1]$, и ее преобразование Фурье неопределено.



Рисунок 4. Схема нулей и полюсов в ОС.

Сравнивая между собой формулы (10), (13) и рис.3,4, мы видим, что последовательности примеров 1 и 2, а значит, и бесконечные суммы отличаются друг от друга, в то время как алгебраические формулы для $X(z)$ и схемы нулей и полюсов совпадают. Z-преобразование

этих последовательностей отличается лишь ОС. Это наблюдение подчеркивает тот факт, что для описания z-преобразования данной последовательности необходимы как алгебраическое выражение для $X(z)$, так и ОС. Кроме того, последовательности обоих примеров экспоненциальны, а их z-преобразования рациональны.

Пример 3. Сумма двух экспонент

Пусть $x[n]$ вновь определяется соотношением (14). Тогда, используя общий результат примера 1 с $a=1/2$ и $a=-1/3$, получаем z-преобразование слагаемых данной последовательности

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (16)$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (17)$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (18)$$

Что согласуется с результатом примера 3.

Область сходимости z-преобразования

Свойство 1: ОС – это кольцо или диск комплексной плоскости с центром в нуле, т.е. $0 \leq r_R < |z| < r_L \leq \infty$.

Свойство 2: преобразование Фурье последовательности $x[n]$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда ОС z-преобразования содержит единичную окружность.

Свойство 3: ОС не может содержать ни одного полюса.

Свойство 4: ОС z-преобразование сигнала ограниченной длительности, т.е. сигнала с ненулевыми отсчетами, расположенными в конечном интервале $-\infty < N_1 \leq n \leq N_2 < \infty$ – вся комплексная плоскость, за исключением, быть может, $z = 0$ и $z = \infty$.

Свойство 5: ОС z-преобразование правосторонней последовательности, т.е. последовательности с нулевыми отсчетами при $n < N_1 < \infty$, представляет собой «внешность» круга с центром в нуле (включая даже иногда $z = \infty$), на границе которого расположен полюс функции $X(z)$ с максимальным модулем.

Свойство 6: ОС z-преобразование левосторонней последовательности, т.е.

последовательности с нулевым отсчетом при $n > N_2 > -\infty$, - «внутренность» круга с центром в нуле (возможно вместе с центром), на границе которого расположен полюс функции $X(z)$ с минимальным модулем.

Последовательность	Z-преобразование	ОС
1. $\delta[n]$	1	все z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta[n - m], m > 0$	z^{-m}	все $z \neq 0$
$\delta[n - m], m < 0$	z^{-m}	все $z \neq \infty$
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
6. $-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
8. $-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
9. $u[n] \cos \omega_0 n$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $u[n] \sin \omega_0 n$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $u[n] r^n \cos \omega_0 n$	$\frac{1 - z^{-1} r \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} r \cos \omega_0 + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $u[n] r^n \sin \omega_0 n$	$\frac{z^{-1} r \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} r \cos \omega_0 + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z > 0$

Таблица 1. z-преобразование стандартных последовательностей

Свойство 7: ОС z-преобразования двусторонней последовательности, т.е. той, которая не является ни право-, ни левосторонней, представляет собой кольцо с центром в нуле, на границах которого расположены полюсы функции $X(z)$, а внутри кольца (согласно свойству 3) их нет.

Свойство 8: ОС должна быть связной.

Задания для самостоятельного решения.

1. Найдите z -преобразование, включая ОС, для каждой из следующих последовательностей:

а) $\frac{u[n]}{2^n}$; б) $\frac{-u[-n-1]}{2^n}$; в) $\frac{u[-n]}{2^n}$ г) $\delta[n]$;

д) $\delta[n-1]$; е) $\delta[n+1]$; ж) $\frac{u[n] - u[n-10]}{2^n}$.

2. Определите z -преобразование каждой из выписанных ниже последовательностей. Запишите свои ответы в максимально компактной форме и изобразите схемы нулей и полюсов и ОС на комплексной плоскости.

а) $x_\alpha[n] = \alpha^{|n|}$, $0 < |\alpha| < 1$; б) $x_b = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$

в) $x_c = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq N, \\ 2N - n, & N+1 \leq n \leq 2N \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

3. Импульсная характеристика детерминированной ЛС-системы равна $h[n]$, а ее z -преобразование имеет вид

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}$$

- а) Что можно сказать об ОС $H(z)$?
б) Является ли данная система устойчивой и почему?
в) Вычислите z -преобразование $X(z)$ входящего сигнала $x[n]$, реакция системы на который равна

$$y[n] = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3} 2^n u[-n-1]$$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Тема 4. Дискретные сигналы, их представление в частотной и импульсной области

Практическое занятие № 4

Тема: Исследование метода дискретизации обратного z -преобразования

Цель занятия

Ознакомится с такими методами вычисления z -преобразование как табличный метод и метод простых дробей. Рассмотреть основные свойства z -преобразования и научиться решать задачи.

Формируемые компетенции: ПК-1, ПК-5.

Теоретическая часть:

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на практическое занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Изучение методов нахождения z -преобразования 15 мин
 2. Рассмотрение примеров 25 мин
 3. Выполнение практического задания 30 мин
- Проверка выполнения практического занятия 10 мин
- Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Одно из важнейших приложений z -преобразования лежит в области анализа линейных систем. Часто этот анализ заключается в вычислении z -преобразования последовательности, некоторых преобразованиях соответствующего алгебраического выражения и поиске обратного z -преобразования. Есть ряд формальных и неформальных методов восстановления последовательности по алгебраическому выражению ее z -преобразования и ОС. Формальный подход к обратному z -преобразованию основывается на интегральной теореме Коши. Однако для типичных последовательностей и их z -преобразований, встречающихся при анализе дискретных линейных систем, предпочтительны менее формальные процедуры.

Табличный метод

Табличный метод состоит в использовании известных последовательностей и функций, связанных z -преобразованием. Последовательности такого типа возникают довольно часто, и поэтому полезно помнить z -преобразование

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|. \quad (1)$$

Если нам нужно найти обратное z -преобразование от функции

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad (2)$$

и мы помним о связи (1), то задача сильно упрощается $x[n] = \frac{1}{2^n} u[n]$. Если ОС в формуле (2) задана как $|z| < \frac{1}{2}$, то можно воспользоваться парой 6 из таблицы 1 и получить $x[n] = -\frac{1}{2^n} u[-n - 1]$.

Таблицы результатов z -преобразования, аналогичные табл. 1, — главный инструмент табличного метода. Если таблица достаточно велика, то, представив данную функцию как

сумму, каждое слагаемое которой содержится в таблице, можно восстановить исходную последовательность почленно.

Метод простейших дробей

Как уже было сказано, обратное z -преобразование можно вычислять, пользуясь таблицами. Иногда имеющаяся у вас таблица не содержит данную функцию $X(z)$ в явном виде. Однако не исключена возможность получить эквивалентное алгебраическое выражение, части которого в таблице присутствуют. Таким свойством обладают рациональные функции, т.е. отношения двух многочленов от переменной z^{-1} , которые довольно часто возникают при исследовании ЛС- систем.

Способ получения удобного выражения рациональной функции называется методом простейших дробей. Расскажем о нем подробно. Любую рациональную функцию от z^{-1} можно записать в виде

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}. \quad (3)$$

При этом принято считать, что $b_M \neq 0$ и $a_N \neq 0$. Предположим дополнительно, что $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$ и перепишем функцию как

$$X(z) = \frac{z^N \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}. \quad (4)$$

Теперь видно, что у функции $X(z)$ есть M нулей и N полюсов, расположенных в конечной части комплексной плоскости, не содержащей $z = 0$. Кроме того, у этой функции в точке $z = 0$ есть либо $(M - N)$ -кратный полюс, если $M > N$, либо $(N - M)$ -кратный нуль, если $N > M$. Другими словами, число нулей в конечной части комплексной плоскости функции вида С.36) совпадает с числом полюсов, причем у этой функции в точке $z = \infty$ ни нулей, ни полюсов нет.

Для разложения $X(z)$ в сумму простейших дробей необходимо заметить, что ее можно переписать как

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}, \quad (5)$$

где $c_k \neq 0$ - нули функции $X(z)$, а $d_k \neq 0$ - ее полюса. Если $N > M$ и кратность всех полюсов равна 1, то $X(z)$ представима в виде

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}. \quad (6)$$

Очевидно, общий знаменатель дробей из суммы (6) совпадает со знаменателем дроби (5). Умножая обе части равенства (6) на $(1 - d_k z^{-1})$ и вычисляя значение произведения в точке $z = d_k$, можно найти коэффициент A_k :

$$A_k = (1 - d_k z^{-1})X(z) \Big|_{z=d_k}. \quad (7)$$

Свойства z –преобразования

Многие из свойств z -преобразования оказывают реальную практическую помощь при исследовании дискретных сигналов и систем. Например, их применяют совместно с техникой, для вычисления обратного z -преобразования от довольно сложных алгебраических выражений.

Здесь мы рассматриваем наиболее часто используемые свойства. Далее $X(z)$ будет обозначать z -преобразование последовательности $x[n]$, а символом R_x мы обозначим ОС этого z -преобразования, т. е.

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \quad z \in R_x.$$

1.Линейность

Свойство линейности говорит, что

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z), \quad R_{ax_1+bx_2} \supset R_{x_1} \cap R_{x_2}.$$

Оно непосредственно следует из определения z –преобразования. Как отмечено выше, ОС линейной комбинации z -преобразований состоит по крайней мере из пересечения ОС, участвующих в комбинации z -преобразований. Предположим, что $X_i(z)$ — рациональные функции, а множество полюсов $aX_i(z) + bX_i(z)$ совпадает с объединением множеств полюсов слагаемых (т. е. ни одна из пар нуль-полюс не сократилась). Тогда ОС линейной комбинации в точности совпадает с пересечением ОС. Если же линейная комбинация такова, что у нее появляются нули, сокращающиеся с какими-то полюсами слагаемых, то ОС линейной комбинации может оказаться больше. Простейший пример такой ситуации возникает, когда последовательности $X_i[n]$ бесконечны, а их линейная комбинация конечна. Тогда ОС линейной комбинации — вся комплексная плоскость, исключая, возможно, точки $z = 0$ и $z = \infty$.

$$x[n] = a^n u[n] - a^n u[n - N].$$

Как $a^n u[n]$, так и $a^n u[n - N]$ бесконечные правосторонние последовательности, а их z -преобразования обладают простым полюсом в точке $z = a$. Следовательно, ОС z -преобразований этих последовательностей описываются одним неравенством: $|z| > |a|$.

2.Задержка

Согласно свойству задержки,

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} X(z), \quad x \in R'_x,$$

где R'_x совпадает с R_x за исключением добавления или удаления точек $z = 0$ или $z = \infty$. Число n_0 здесь, конечно, целое. Если оно положительно, исходная

последовательность $x[n]$ сдвигается вправо, а если отрицательно — то влево.

Как и в свойстве линейности, ОС при задержке может измениться, поскольку множитель z^{-n_0} может аннулировать полюс в одной из точек: $z = 0$ или $z = \infty$.

Действительно, если $y[n] = x[n - n_0]$, соответствующее z -преобразование имеет вид

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0] z^{-n}.$$

Меняя параметр суммирования на $m = n - n_0$ получаем

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-(m+n_0)} = z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m} = z^{-n_0} X(z).$$

Свойство задержки часто оказывается полезным в сочетании с другими свойствами и процедурами при вычислении обратного z-преобразования.

3. Умножение на экспоненциальную последовательность

При умножении последовательности на экспоненциальную z-преобразование меняется по правилу

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad R_{z_0 x} = |z_0| R_x$$

4. Дифференцирование

Свойство производной утверждает, что

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad R_{nx} = R_x$$

Доказательство получается с помощью дифференцирования равенства

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)x[n]z^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} = \mathcal{Z}\{nx[n]\}$$

Пример 1. Рациональная функция второй степени

Рассмотрим последовательность $x[n]$ с z-преобразованием

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}. \quad (8)$$

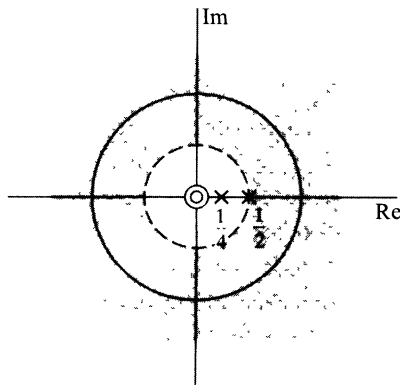


Рисунок 1. Схема нулей и полюсов ОС функции.

Схема нулей и полюсов функции $X(z)$ показана на рис. 1. Учитывая данную в условии ОС, мы видим, что $x[n]$ — правосторонняя последовательность. Поскольку оба полюса имеют кратность один, $X(z)$ можно записать в виде суммы (6):

$$X(z) = \frac{A_1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}.$$

Из (7) получаем

$$A_1 = (1 - \frac{1}{4}z^{-1})X(z) \Big|_{z=1/4} = -1,$$

$$A_2 = (1 - \frac{1}{2}z^{-1})X(z) \Big|_{z=1/2} = 2.$$

Следовательно,

$$X(z) = \frac{-1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}.$$

Ввиду того, что $x[n]$ — правосторонняя последовательность, ОС каждого из ее слагаемых — внешность круга с полюсом на границе. Из табл.1 и линейности z -преобразования находим, что

$$x[n] = \frac{2}{2^n}u[n] - \frac{1}{4^n}u[n].$$

Очевидно, что степень числителя (относительно переменной z^{-1}), получающегося при сложении дробей в равенстве (6) не превосходит $(N - 1)$. Если $M \geq N$, то к правой части равенства (6) необходимо добавить многочлен степени $(M - N)$. Поэтому при $M \geq N$ формула разложения дроби в сумму простейших выглядит как

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}. \quad (9)$$

Если дана рациональная функция вида (3) с $M \geq N$, коэффициенты B_r можно найти делением в столбик числителя на знаменатель. Степень получающегося остатка будет уже меньше степени знаменателя. После этого коэффициенты A_k можно вычислить по формуле (7).

Если $X(z)$ обладает кратным полюсом и $M \geq N$, формулу (9) необходимо модифицировать дальше. В частности, если $X(z)$ имеет полюс кратности s в точке $z = d_i$, а кратность остальных полюсов — единица, то формула (9) переписется как

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^s \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}. \quad (10)$$

Коэффициенты A_k и B_r вычисляются как и ранее, а коэффициенты C_m можно отыскать по формуле:

$$C_m = \frac{1}{(s - m)!(-d_i)^{s-m}} \left(\frac{d^{s-m}}{dw^{s-m}} ((1 - d_i w)^s X(w^{-1})) \right) \Big|_{w=d_i^{-1}}. \quad (11)$$

Формула (10) дает наиболее полный вид разложения рациональной функции от переменной z^{-1} с кратным полюсом в точке d_i в сумму многочлена и простейших дробей для случая $M \geq N$. Если существует не один, а несколько кратных полюсов, в этой формуле появятся дополнительные члены, аналогичные третьей сумме в формуле, для каждого кратного полюса. Если же кратных полюсов у функции вообще нет, формула (10) упрощается до формулы (8). Если степень знаменателя больше степени числителя ($N > M$), то полиномиальная часть формул (8) и (9) становится равной нулю.

Мы могли достичь того же результата, предполагая, что z -преобразование — рациональная функция переменной z , а не z^{-1} . Иными словами, вместо множителей $(1 - az^{-1})$ мы могли бы рассматривать множители $(z - a)$. Такая замена переменной приводит к ряду формул, аналогичных равенствам (5)-(11), которые удобнее использовать при работе с таблицами z -преобразования, выраженного как функция от z . Поскольку табл.1 заполнена функциями от переменной z^{-1} , приведенные выше формулы представляют для нас большую ценность.

В качестве примера предположим, что $X(z)$ имеет полюса только первого порядка, и можно воспользоваться равенством (9) для разложения функции $X(z)$ в сумму многочлена и

простейших дробей. Напомним, что операция z- преобразования линейна, поэтому достаточно найти обратное z -преобразование каждого слагаемого, а затем сложить результаты и получить $x[n]$.

Члены $B_r z^{-r}$ соответствуют сдвигам единичного импульса, умноженного на константу, т.е. последовательностям $B_r \delta[n-r]$. Дробные члены $\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}$ отвечают за одну из последовательностей: $(d_k)^n u[n]$ или $-(d_k)^n u[-n-1]$. Чтобы выбрать одну из них, нужно вспомнить свойства ОС. Из них следует, что если $X(z)$ имеет простые полюса (кратности 1) и ОС описывается неравенством $r_R < |z| < r_L$, то данный полюс d_k соответствует правосторонней последовательности $(d_k)^n u[n]$, если $|d_k| < r_R$ этот же полюс соответствует левосторонней последовательности, если $|d_k| > r_L$. Таким образом, можно использовать ОС для сортировки полюсов. Кратные полюсы разбиваются на две группы аналогично.

Пример 2. Метод простейших дробей в обратном z –преобразовании

Рассмотрим последовательность $x[n]$, чье z -преобразование имеет вид

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1. \quad (12)$$

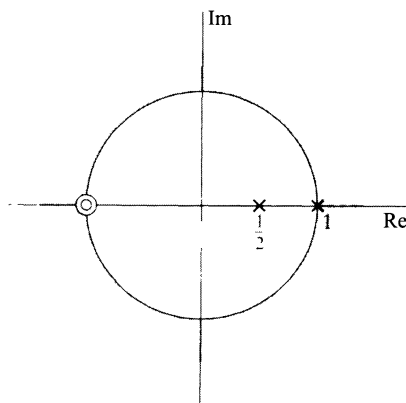


Рисунок 2. Схема нулей и полюсов z –преобразования из примера 2

Рассматривая ОС приведенную на рисунке, убеждаемся, что $x[n]$ – правосторонняя последовательность. Так как $M=N=2$, а кратность полюсов равна 1, то $X(z)$ можно переписать в виде

$$X(z) = B_0 + \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z^{-1}}$$

Константу B_0 ищем делением в столбик

$$\begin{array}{r|l} z^{-2} + 2z^{-1} + 1 & \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\ - & \\ z^{-2} - 3z^{-1} + 2 & 2 \\ \hline 5z^{-1} - 1 & \end{array}$$

Поскольку степень числителя и знаменателя в нашем примере совпадают, потребовалось лишь один шаг деления для вычисления остатка. Итак, $X(z)$ можно переписать как

$$X(z) = 2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}. \quad (13)$$

Теперь находим коэффициенты A_1 и A_2 по формулам (7-12). Учитывая (13) получаем

$$A_1 = \left(\left(2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \right) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} \right) \right) \Big|_{z=1/2} = -9,$$

$$A_2 = \left(\left(2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \right) (1 - z^{-1}) \right) \Big|_{z=1} = 8.$$

Следовательно,

$$X(z) = 2 - \frac{9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1 - z^{-1}}. \quad (14)$$

Поскольку ОС описывается неравенством $|z| > 1$ из табл.1. находим

$$2 \xleftrightarrow{z} 2\delta[n], \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \xleftrightarrow{z} \frac{1}{2^n} u[n], \quad \frac{1}{1 - z^{-1}} \xleftrightarrow{z} u[n].$$

Наконец, благодаря линейности z -преобразования получаем

$$x[n] = 2\delta[n] - \frac{9}{2^n} u[n] + 8u[n].$$

Разложение в степенные ряды

Z – преобразование определяется как ряд Лорана, коэффициентами которого служат отсчеты последовательности $x[n]$. Таким образом, если z -преобразование задано степенным рядом

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \dots + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots, \quad (15)$$

мы можем найти любой конкретный отсчет последовательности $x[n]$, глядя на коэффициент при подходящей степени z^{-1} . Мы уже применяли этот подход при поиске обратного преобразования полиномиальной части рациональной функции при $M > N$. Такой способ очень полезен при работе с последовательностями конечной длины, z - преобразование которых может и не иметь более простой формы записи, чем в виде многочлена от z^{-1} .

Пример 3. Вычисление обратного преобразования с помощью степенных рядов

Рассмотрим z –преобразование

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|. \quad (16)$$

Используя известное разложение функции $\ln(1 + x)$ в степенной ряд, который сходится при $|x| < 1$, получим

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}.$$

Следовательно,

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n}, & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0. \end{cases}$$

Пример 4. Разложение в ряд методом деления в столбик

Рассмотрим z -преобразование

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|. \quad (17)$$

Поскольку ОС — внешность круга, соответствующая последовательность будет правосторонней. Более того, так как $X(z)$ стремится к константе при стремлении z к бесконечности, последовательность является детерминированной. Поэтому, проводя деление, мы получим ряд по степеням z^{-1} :

$$\begin{array}{r} 1 \\ -1 - az^{-1} \quad \left| \begin{array}{l} 1 - az^{-1} \\ 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots \end{array} \right. \\ \hline az^{-1} \\ -az^{-1} - a^2 z^{-2} \\ \hline a^2 z^{-2} + \dots \end{array}$$

Значит, $\frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots$, откуда $x[n] = a^n u[n]$.

Задания для самостоятельного решения

1. Z -преобразование детерминированной последовательности $g[n]$ имеет вид:

$$G(z) = (1 + 3z^{-2} + 2z^{-4}) \sin z^{-1}.$$

Вычислите $g[11]$

2. Вычислите обратное Z -преобразование последовательности

$$x[n] = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ N, & N \leq n. \end{cases}$$

3. Восстановите последовательность по ее Z -преобразованию

$$X(z) = (1 + 2z)(1 + 3z^{-1})(1 - z^{-1}).$$

4. По каждому Z -преобразованию из выписанных ниже восстановите соответствующую последовательность, применяя как метод разложения в сумму простейших дробей, так и метод разложения в ряд. Выясните в каждом случае, существует ли Фурье образ.

а) $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2};$ б) $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2};$

в) $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2};$ г) $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2};$

д) $X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}, \quad |z| > |1/a|.$

5. На вход детерминированной ЛС-системы подается сигнал $x[n] = u[-n-1] + \frac{u[n]}{2^n}$. Z -преобразование реакции системы имеет вид

$$X(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + z^{-1})}.$$

а) Найдите $H(z)$, z -преобразование импульсной характеристики этой системы.
Обратите внимание на ОС.

б) Какова ОС $Y(z)$ — z -преобразования соответствующей реакции $y[n]$ системы?

в) Найдите $y[n]$.

6. Импульсная характеристика детерминированной ЛС-системы равна $h[n]$, а ее z -преобразование имеет вид

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}.$$

а) Что можно сказать об ОС $H(z)$?

б) Является ли данная система устойчивой и почему?

в) Вычислите z -преобразование $X(z)$ входящего сигнала $x[n]$, реакция системы, на который равна

$$y[n] = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3} 2^n u[-n-1].$$

г) Найдите импульсную характеристику системы.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-3

Тема 5. Сигналы и линейные системы

Практическое занятие № 5

Тема: Представление последовательностей конечной длины дискретным рядом Фурье

Цель занятия

Ознакомится с таким понятием, как Фурье-образ. Научится использовать Фурье-преобразование.

Формируемые компетенции: ПК-1, ПК-5.

Теоретическая часть:

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на практическое занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Ознакомление с Фурье преобразованием 15 мин

2. Рассмотрение примеров 25 мин

3. Выполнение практического задания 30 мин

Проверка выполнения практического занятия 10 мин

Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Преобразование Фурье

Многие из последовательностей выражаются через интеграл Фурье вида

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad (1)$$

где

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) называют представлением или преобразованием Фурье, а саму функцию $X(e^{j\omega})$ часто называют Фурье-образом последовательности $x[n]$. Формула (1), обратное преобразование Фурье, представляет $x[n]$ как суперпозицию бесконечно малых комплексных синусоид

$$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

где ω принимает значения на интервале длины 2π , а $X(e^{j\omega})$ определяется тем, какой вклад в суперпозицию вносит каждая синусоидальная компонента. Хотя ω в соотношении (1) изменяется в промежутке от $-\pi$ до $+\pi$, его можно заменить на любой сегмент длины 2π . Преобразование Фурье (2) задает правило, вычисляющее $X(e^{j\omega})$ по отсчетам последовательности $x[n]$, т.е. позволяет анализировать $x[n]$ с учетом вклада каждой частотной компоненты, формирующей последовательность посредством (1).

Фурье-образ — комплекснозначная функция от ω . Как и КЧХ, ее можно записать в алгебраической или показательной форме:

$$(3) \quad X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})} \quad (4)$$

Величины $|X(e^{j\omega})|$ и $\angle X(e^{j\omega})$ — соответственно модуль и фаза Фурье-образа. Первую из них называют иногда амплитудным спектром, а вторую — фазовым спектром. Фурье-образ часто также называют спектром Фурье или просто спектром.

Равенство (4) неоднозначно определяет фазовый спектр, так как при любом ω к фазе можно добавить $2\pi k$ с $k \in \mathbb{Z}$, не меняя значений комплексной экспоненты. Если нам важна однозначность, то будем считать, что $\angle X(e^{j\omega})$ лежит между $-\pi$ до $+\pi$, и обозначать этот угол через $\text{ARG}[X(e^{j\omega})]$. В том случае, когда нам предпочтительнее рассматривать фазу как непрерывную функцию от ω , определенную на промежутке $(0, 2\pi)$, мы будем обозначать ее через $\arg[X(e^{j\omega})]$.

Импульсная характеристика восстанавливается из КЧХ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$(5) \quad h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Мы пока еще не показали явным образом, что формулы (1) и (2) действительно взаимно обратны, но выяснили, что обширный класс сигналов может быть представлен в виде выражения (1). Чтобы продемонстрировать, что интеграл (1) действительно служит обратным преобразованием к сумме (2), мы можем найти $X(e^{j\omega})$, опираясь на определение (2), и подставить результат в формулу (1). Итак, рассмотрим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} d\omega = \hat{x}[n] \quad (6)$$

Нам нужно показать, что $\hat{x}[n] = x[n]$, если $X(e^{j\omega})$ определена формулой (2). Заметим, что индекс суммирования был изменен на m , чтобы отличать его от переменной в уравнении (2). Если бесконечный ряд в формуле (6) сходится

равномерно на множестве определения ω , то его можно почленно проинтегрировать, т. е.

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega \right) \quad (7)$$

Вычисляя интеграл в круглых скобках, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \frac{\sin \pi(n-m)}{\pi(n-m)} = \delta[n-m] = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \delta[n-m] = x[n]$$

Что и нужно было доказать.

Вопрос о представимости сигнала формулой (1) равносильен вопросу о сходимости ряда (2), точнее, нас интересуют условия, при которых ряд (2) сходится, т. е.

$$|X(e^{j\omega})| < \infty, \quad \forall \omega,$$

Где $X(e^{j\omega})$ - предел при $M \rightarrow \infty$ конечных сумм

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-j\omega n}$$

(8)

Достаточное условие сходимости можно найти следующим образом:

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |e^{-j\omega n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

Таким образом, для абсолютно суммируемой последовательности $x[n]$ Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ определен на всей числовой прямой. Более того, в этом случае по признаку Вейерштрасса можно показать, что соответствующий ряд равномерно сходится к непрерывной функции от ω . Поскольку устойчивые последовательности абсолютно суммируемы по определению, то для них преобразование Фурье имеет смысл. Кроме того, отсюда следует, что любая устойчивая система имеет конечную непрерывную КЧХ.

Пример 1. Абсолютная суммируемость мгновенно примененной экспоненты

Пусть $x[n] = a^n u[n]$. Фурье-образ этой последовательности имеет вид

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Если $|a| < 1$ Очевидно, это неравенство является критерием абсолютной суммируемости последовательности $x[n]$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1 - |a|} < \infty, \quad \text{если и только если } |a| < 1. \quad (9)$$

Абсолютная суммируемость — достаточное условие для существования преобразования Фурье, которое также гарантирует равномерную сходимость. Некоторые последовательности не принадлежат классу абсолютно суммируемых, но

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

(10)

Такие последовательности (суммируемые квадратом) можно представлять с помощью Фурье, если мы откажемся от равномерной сходимости ряда, определяющего $X(e^{j\omega})$. Более точно, в этом случае мы имеем сходимость в среднеквадратичном, т.е. если

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

(11)

и

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-j\omega n}$$

(12)

то сходимость в среднеквадратичном означает, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0$$

(13)

Другими словами, погрешность $|X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|$ может и не стремиться к нулю при $M \rightarrow \infty$ при каких-то конкретных значениях ω , но общая «энергия» убывает до нуля с неограниченным ростом M .

Пример 2. Суммируемость с квадратом для идеального фильтра нижних частот

Определим импульсную характеристику идеального фильтра нижних частот из примера 1. Его КЧХ равная на промежутке $[-\pi, \pi]$

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

(14)

Вне этого интервала вычисляется по периодичности. Импульсная характеристика $h_{lp}[n]$ находится с помощью преобразования Фурье (1):

$$\begin{aligned} h_{lp}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi j n} e^{j\omega n} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi j n} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) = \\ &= \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty. \end{aligned}$$

(15)

Мы заметили, что поскольку $h_{lp}[n] \neq 0$ при $n < 0$, идеальный фильтр нижних частот не детерминирован. Кроме того, последовательность не является абсолютно суммируемой. Члены последовательности, конечно, стремятся к нулю при неограниченном возрастании n , но не быстрее, чем $1/n$. Это происходит в результате разрыва функции $H_{lp}(e^{j\omega})$ в точке $\omega = \omega_c$. Поскольку последовательность $h_{lp}[n]$ не является абсолютно суммируемой, ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$

на всей числовой прямой сходится неравномерно. Чтобы лучше прочувствовать этот факт, рассмотрим

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

(16)

Можно показать, что $H_M(e^{j\omega})$ представляется в интегральной форме как

$$H_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin((2M+1)(\omega-\theta)/2)}{\sin(\omega-\theta)/2} d\theta.$$

Итак, наш ряд сходится к разрывной функции $\tilde{H}_{lp}(e^{j\omega})$, но неравномерно. Однако $h_{lp}[n]$, определенная уравнением (15) суммируема с квадратом, и, соответственно $H_M(e^{j\omega})$ сходится в среднеквадратичном к $H_{lp}(e^{j\omega})$, т.е.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{lp}(e^{j\omega}) - H_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0$$

Хотя погрешность между $\lim_{M \rightarrow \infty} H_M(e^{j\omega})$ и $H_{lp}(e^{j\omega})$ может показаться несущественной, поскольку эти функции отличаются лишь в точках $\omega = \pm\omega_c$, поведение конечных сумм имеет важное значение при разработке дискретных фильтров.

Пример 3. Фурье-образ постоянной последовательности

Рассмотрим последовательность $x[n] = 1$ при всех n . Она не суммируется ни абсолютно, ни с квадратом, и ряд в формуле (2) в этом случае не сходится ни равномерно, ни в среднеквадратичном. Однако можно и нужно определить Фурье-образ последовательности $x[n]$ как периодическую цепочку импульсов

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi r) \quad (17)$$

Импульсы здесь — функции от непрерывной переменной и поэтому имеют «бесконечную высоту, нулевую ширину и единичную площадь под графиком», что согласуется с тем, что ряд (2) расходится. Формулу (17) обоснованно можно называть Фурье-образом, поскольку формальная подстановка (17) в (1) дает корректный результат.

Пример 4. Преобразование Фурье комплексных экспоненциальных последовательностей

Рассмотрим последовательность $x[n]$, чье преобразование Фурье – периодическая цепочка импульсов

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \quad (18)$$

Покажем, что $x[n]$ – комплексная экспонента $e^{j\omega_0 n}$. Можно предполагать, что $-\pi < \omega_0 \leq \pi$. Если в действительности ω_0 не удовлетворяет этому условию, то перейдя к $\omega_0 + 2\pi k$ при подходящем целом k , мы попадаем в нужный интервал, оставив без изменения $X(e^{j\omega})$, поскольку импульсы повторяются с периодом 2π .

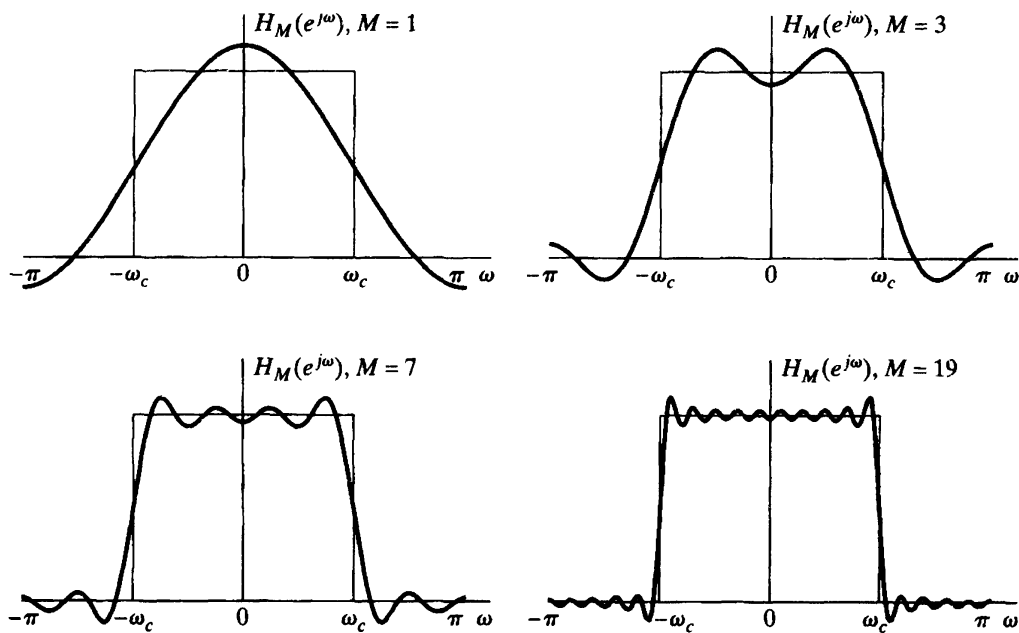


Рисунок 1. Графики частичных сумм преобразования Фурье

Последовательность $x[n]$ можно вычислить, применив к $X(e^{j\omega})$ обратное преобразование Фурье (1). Интегрирование в этой формуле происходит по отрезку $[-\pi, \pi]$, следовательно, в формуле (18) можно ограничиться членом с $r=0$ и записать

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega \quad (19)$$

Из определения δ -функции вытекает, что

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \quad \forall n.$$

При $\omega_0 = 0$ получается постоянная последовательность.

Поэтому формула

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \quad (20)$$

Нуждается в специфической интерпретации, которая приводится в теории обобщенных функций. Опираясь на эту теорию, можно строго обобщить понятие преобразование Фурье на класс последовательностей, являющихся суммой отдельных гармоник

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (21)$$

Из примера 4 вытекает, что

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \quad (22)$$

служит приемлемым Фурье-образом последовательности $x[n]$.

Другая последовательность, не относящаяся ни к абсолютно суммируемым, ни к суммируемым с квадратом, - это единичный скачок $u[n]$. Ее Фурье-образ имеет вид

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi r) \quad (23)$$

Обоснование этого факта мы опустим.

Задания для самостоятельного решения

1. Определите, какие из сигналов являются периодическими, и установите их период

а) $(x[n]) = e^{j(\pi n/6)}$; б) $(x[n]) = e^{j(3\pi n/4)}$;
в) $(x[n]) = \frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n}$; г) $(x[n]) = e^{j\pi n/\sqrt{2}}$.

2. Рассмотрите разностное уравнение

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = \frac{1}{3}x[n-1].$$

а) Что можно сказать о частотной и импульсной характеристике, реакции на единичный скачок ЛС-системы, описываемой этим разностным уравнением?

б) Что можно сказать об общем виде однородного решения этого разностного уравнения?

3. Определите, какие из следующих дискретных сигналов являются собственными для устойчивой ЛС-системы:

а) $e^{j2\pi n/3}$; б) 3^n ; в) $2^n u[-n-1]$;
г) $\cos(\omega_0 n)$; д) $(1/4)^n$; е) $(1/4)^n u[n] + 4^n u[-n-1]$.

4. а) Найдите Фурье-образ последовательности

$$r[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

б) Рассмотрите последовательность

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{M} \right) \right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-3

Тема 6. Дискретизация методом прямого z-преобразования. Дискретизация методом обратного z-преобразования

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6

Тема: Вычисление свертки двух последовательностей дискретным преобразованием Фурье

1. Цель занятия

Ознакомится с основными понятиями о линейной и циклической свертках. Изучить их свойства, и научиться решать поставленные задачи.

Формируемые компетенции: ПК-1, ПК-5.

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на практическое занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Основные сведения о вычислениях свертки 15 мин
 2. Рассмотрение циклических свертки 20 мин.
 3. Рассмотрение примеров 35 мин
- Проверка выполнения практического занятия 10 мин
Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Метод вычисления свертки двух последовательности:

1. Вычислить N-точечное ДПФ $X_1[k]$ и $X_2[k]$ двух последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$.
2. Найти произведение $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ при $0 \leq k \leq N - 1$.
3. Восстановить последовательность $X_3[n] = x_1x_2[n]$ по ее ДПФ $X_3[k]$.

Для эффективной работы многих приложений необходима возможность быстрого вычисления линейной свертки. В принципе реализация любой линейной системы сводится к свертке входного сигнала с импульсной характеристикой. Но иногда это становится особенно важным, например при дискретизации речевого или радарного сигнала и при вычислении их автокорреляционных функций. Чтобы добиться линейной свертки, мы должны быть уверенными, что циклическая свертка ведет себя как линейная. Займемся более тщательным анализом ситуации.

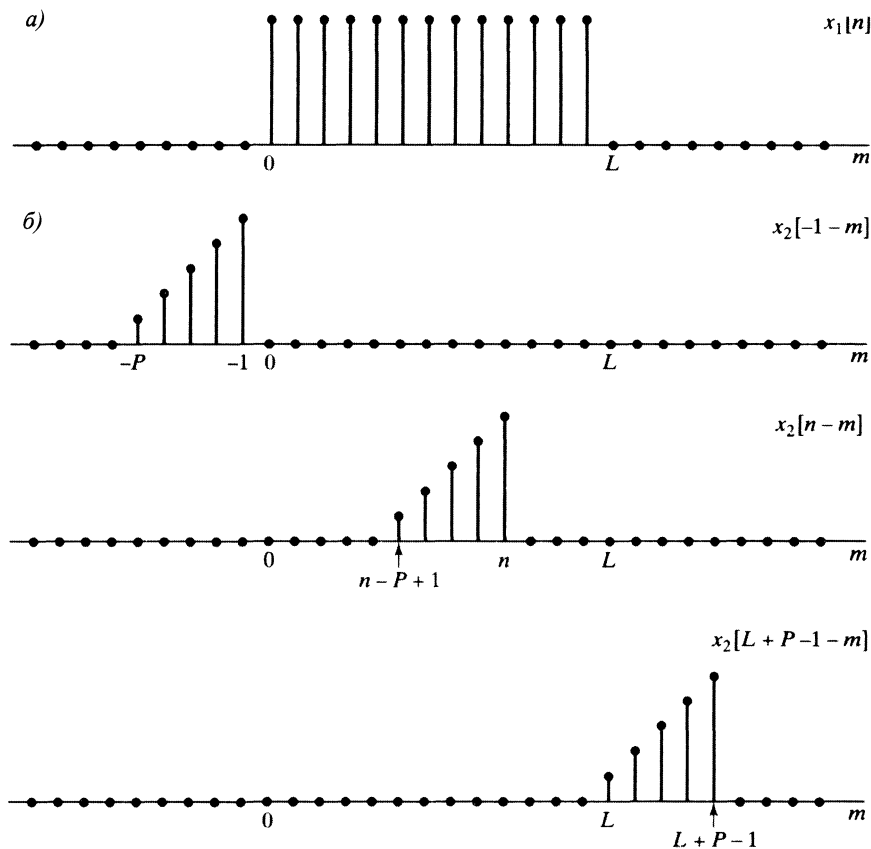


рис1. Пример линейной свёртки двух конечных последовательностей, показывающий что результат свертки равен нулю.

Линейная свертка двух конечных последовательностей

Рассмотрим L -членную последовательность $x_1[n]$ и P -членную последовательность $x_2[n]$. Напомним, что их линейная свертка определяется формулой:

$$x_3[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m] \quad (1)$$

На рисунка 1, а) представлена типичная последовательность $x_1[m]$, а элементы $x_2[n-m]$ для нескольких значений n показаны на рис. 1, б). Ясно, что произведение $x_1[m]x_2[n-m]$ будет равно нулю при $n < 0$ и $n > L + P - 2$. Таким образом, члены $x_3[n]$ могут быть отличны от нуля только при $0 \leq n \leq L + P - 2$. Следовательно, $L + P - 1$ — максимально возможная длина результата свертки последовательностей длин L и P .

Циклическая свертка как линейная с наложением во времени

Если дискретизовать Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ последовательности $x[n]$ в частотах $\omega_k = 2\pi k/N$, то получившаяся последовательность будет состоять из коэффициентов ДРФ периодической последовательности

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]$$

(2)

С другой стороны, конечная последовательность

$$X[k] = \begin{cases} X(e^{j(2\pi k/N)}), & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(3)

является ДПФ одного периода последовательности $\tilde{x}[n]$, т.е.

$$x_p[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(4)

Ясно, что если длина последовательности $x[n]$ не превосходит N , то наложения во временной области не происходит и $x_p[n] = x[n]$. Однако если количество членов последовательности $x[n]$ больше N , то ввиду суперпозиции различных отсчетов последовательности $x[n]$ последовательность $x_p[n]$ может отличаться от исходной в нескольких (или даже во всех точках). Чтобы отличать исходную последовательность от одного периода последовательности, получающейся в результате применения обратного ДПФ к дискретизованному Фурье-образу последовательности $x[n]$, мы будем использовать индекс p , который будет опускаться, если наложения не происходит и имеет место равенство $x_p[n] = x[n]$.

Фурье-образ последовательности $x_3[n]$ из свертки (1) вычисляется как произведение

$$X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

(5)

Определив ее ДПФ как

$$X_3[k] = X_3(e^{j(2\pi k/N)}), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

(6)

получим очевидное равенство

$$X_3[k] = X_1(e^{j(2\pi k/N)})X_2(e^{j(2\pi k/N)}), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (7)$$

откуда

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$$

(8)

Значит, результат применения обратного ДПФ к $X_3[k]$ имеет вид:

$$x_{3p}[n] = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n - rN], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(9)

С другой стороны, по теореме о циклической свертке

$$x_{3p}[n] = x_1[n] \circledast x_2[n]. \quad (10)$$

Таким образом, циклическая свертка двух конечных последовательностей совпадает с линейной сверткой, искаженной наложением (см. формулу (9)).

Заметим, что если N больше L или P (количества членов последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$), то $X_1[k]$ и $X_2[k]$ представляют последовательности $x_1[n]$ и $x_2[n]$ абсолютно точно, но $x_{3p}[n] = x[n]$ при всех n только тогда, когда N не меньше длины последовательности $x_3[n]$. Как было установлено в предыдущем подразделе, максимально возможное число ненулевых отсчетов последовательности $x_3[n] = x_1[n] * x_2[n]$ равно $(L + P - 1)$. Следовательно, циклическая свертка последовательностей с ДПФ, равным $X_1[k]X_2[k]$, совпадает с линейной, Фурье-образ которой — это произведение $X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$, если число точек ДПФ N удовлетворяет неравенству

$$N \geq L + P - 1.$$

Пример 1. Циклическая свертка как линейная с наложением

Заметим, что $x_1[n]$ и $x_2[n]$ — постоянные последовательности длины $L = 6$, как показано на рис. 2, а). Поэтому длина их линейной свертки равна $L + P - 1 = 11$, причем сама свертка имеет треугольную форму (рис. 2, б)). На рис. 2, в) и г) показаны сдвинутые версии последовательности $x_3[n - rN]$ из (9) при $r = \pm 1$ и $N = 6$. N -точечная циклическая свертка последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$ может быть вычислена с помощью формулы (9). Результат вычислений представлен на рис. 2, д) для $N = L = 6$, а в случае $N = 2L = 12$ — на рис. 2, е). Заметим, что при $N = L = 6$ в циклическую свертку вносит вклад как сама последовательность $x_3[n]$, так и сдвинутая ее версия $x_3[n + N]$, а при $N = 2L = 12$ — только последовательность $x_3[n]$. Так как длина линейной свертки равна $2L - 1$, 12-точечная циклическая свертка совпадает с линейной при всех $n \in [0; N - 1]$. Фактически это останется верным и при $N = 2L - 1 = 11$.

Итак, мы выяснили, что если $N \geq L + P - 1$, то при N -точечной циклической свертке двух конечных последовательностей наложения не происходит. С другой стороны, при $N = L = P$ циклическая свертка может отличаться от линейной во всех отсчетах без исключения. Однако при $P < L$ некоторые члены L -точечной циклической свертки могут совпадать с соответствующими отсчетами линейной. Лучше всего это можно понять, если вновь привлечь интерпретацию с наложением.

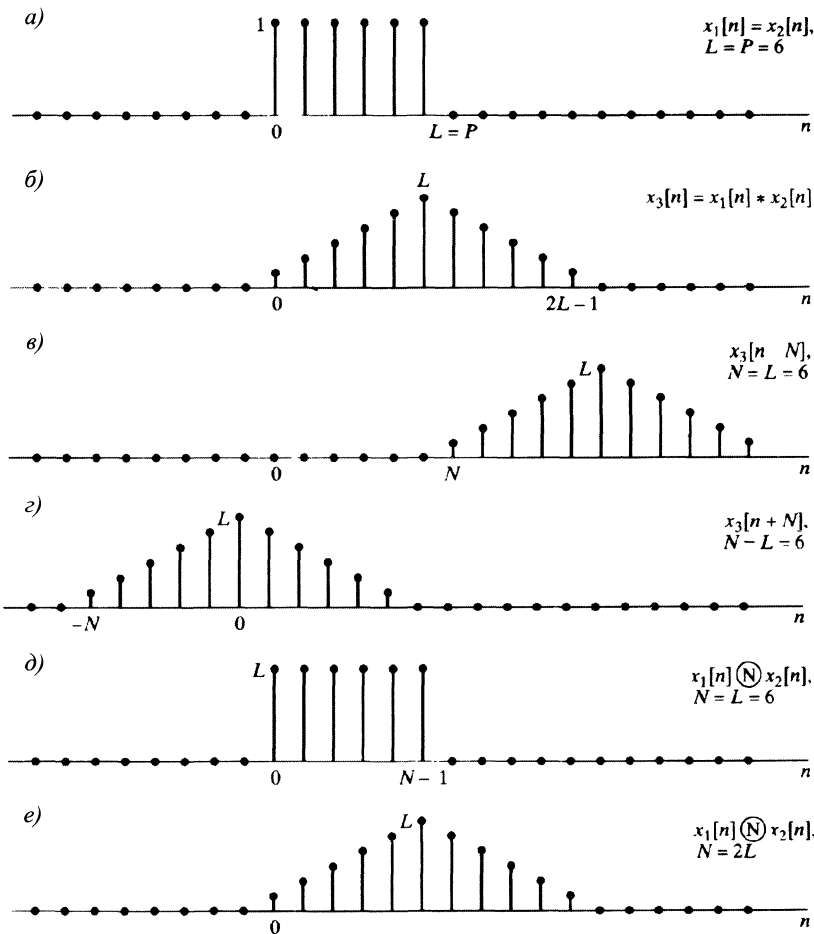


рис.2 Сравнение циклической свертки и линейной с наложением.

Рассмотрим последовательности $x_1[n]$ и $x_2[n]$, изображенные на рис.3, а) и б) соответственно. Длина L последовательности $x_1[n]$ больше количества членов P последовательности $x_2[n]$. Вычислив сначала L -точечную свертку этих последовательностей, выясним, какие из ее отсчетов совпадают с соответствующими членами линейной свертки, а какие нет. Линейная свертка последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$ представлена на рис. 3, в). Ее длина равна $(L + P - 1)$. L -точечная циклическая свертка получается по формулам (9) и (10):

$$x_{3p}[n] \begin{cases} x_1 \otimes x_2[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n - rL], & 0 \leq n \leq L - 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (11)$$

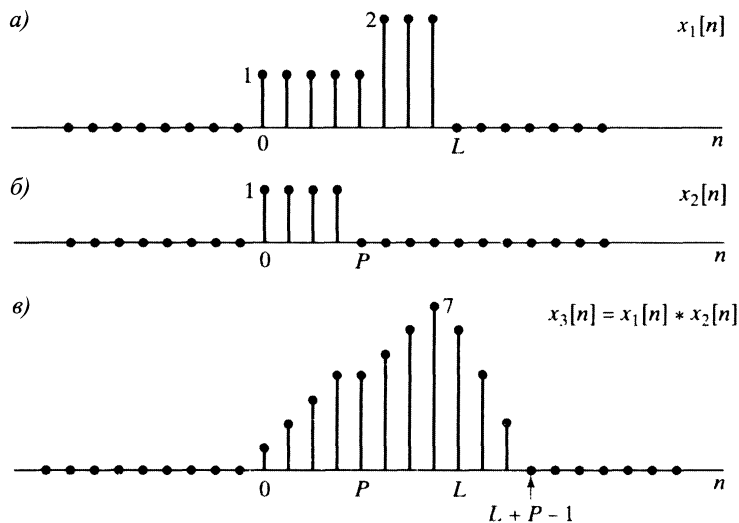


рис.3 Пример линейной свертки двух конечных последовательностей

На рис. 4, а) представлена последовательность $x_3[n - rL]$ при $r = 0$, а на рис. 4, б) и в) при $r = +1$ и $r = -1$ соответственно. На рисунке видно, что последовательность $x_{3p}[n]$ на отрезке $[0; L - 1]$ получается как сумма только двух слагаемых: $x_3[n]$ и $x_3[n + L]$.

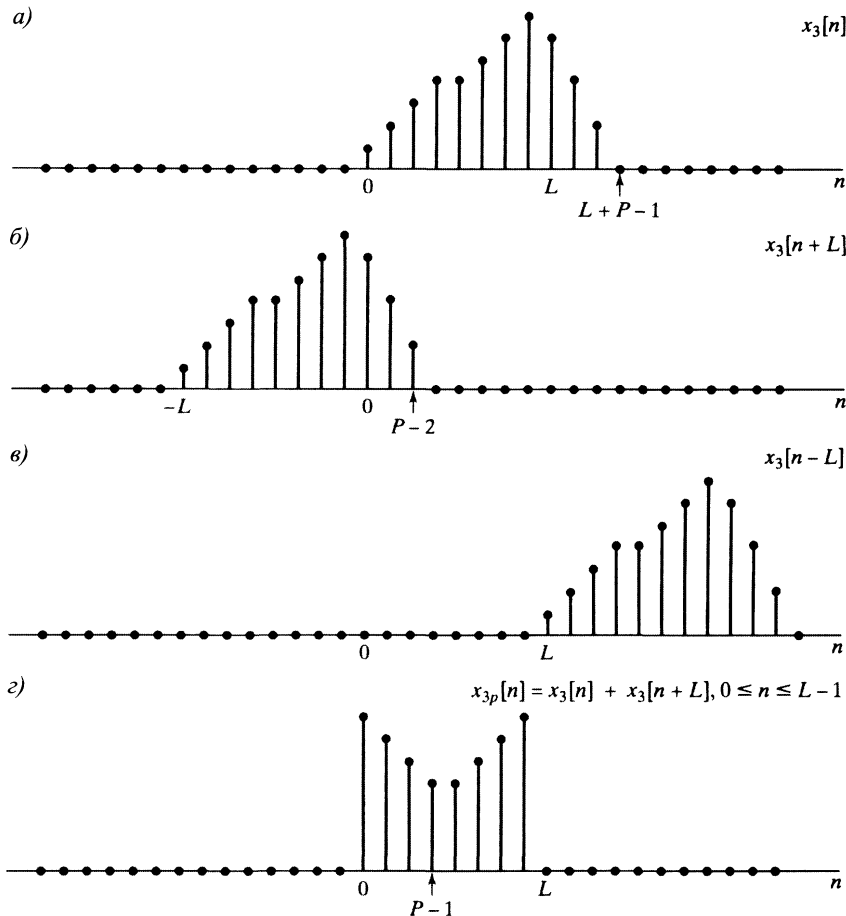


рис.4 Интерпретация циклической свертки последовательностей чрез линейную свертку с наложением.

И в общей ситуации при $P < L$ в циклическую свертку, определенную на отрезке $[0; L - 1]$, вклад вносят только две последовательности: $x_3[n]$ и $x_3[n + L]$. Суммирование происходит следующим образом: последние $(P - 1)$ отсчета последовательности $x_3[n + L]$ (от $n = 0$ до $n = P - 2$) складываются с первыми $(P - 1)$ отсчетами $x_3[n]$, а последние $(P - 1)$ члены последовательности $x_3[n]$, расположенные над отрезком $[L; L + P - 2]$, отбрасываются. Иными словами, последовательность $x_{3p}[n]$ строится по-разному на разных частях отрезка $[0; L - 1]$. Поскольку последние $(P - 1)$ члены последовательностей $x_3[n]$, и $x_3[n + L]$, идентичны, возможен альтернативный взгляд на циклическую свертку, согласно которому она получается как линейная свертка с наложением спектров из-за сложения членов последовательности $x_3[n]$, с номерами от $n = L, L + 1, \dots, L + P - 2$ с первыми отсчетами последовательности $x_3[n]$. Процесс построения циклической свертки показан на рис. 5 для случая $P = 4$ и $L = 8$. Линейная свертка $x_3[n]$ представлена на рис. 5, а). Ее отсчеты с номерами $n \geq L$ отмечены незаполненными кружочками. Обратите внимание, что только $(P - 1)$ ее членов при $n \geq L$ отличны от нуля. На рис. 5, б) показан процесс построения $x_{3p}[n]$, который кратко можно охарактеризовать как «наворачивание» последовательности $x_3[n]$ на себя. В результате первые $(P - 1)$ ее членов искажаются за счет наложения во времени, а

остальные (от $n = P - 1$ до $n = L - 1$) остаются неизменными, т. е. совпадают с соответствующими членами линейной свертки.

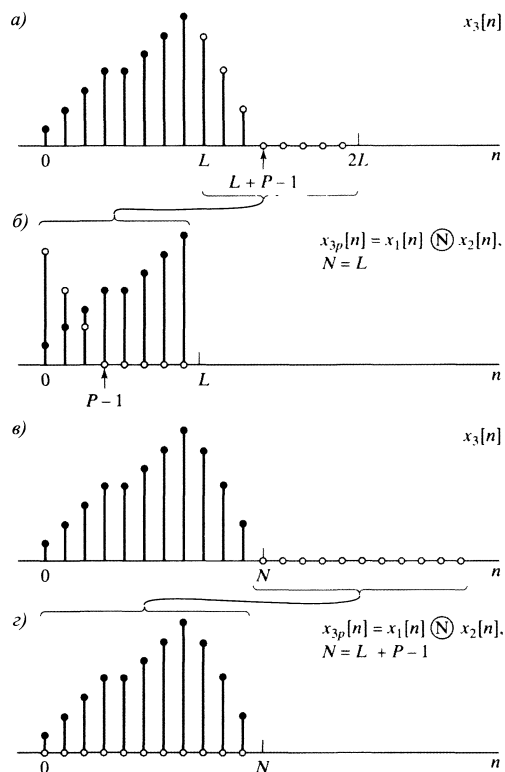


рис.5 Процесс формирования циклической свертки в результате «наворачивания»

Итак, при достаточной длине циклической свертки относительно сворачиваемых последовательностей наложения не происходит, т.е. циклическая свертка совпадает с линейной.

Задания для самостоятельного решения.

1. Пусть ряд Фурье периодического непрерывного сигнала $x_c(t)$ с периодом 1 мс имеет вид:

$$x_c(t) = \sum_{k=-9}^9 a_k e^{j(2\pi kt/10^{-3})}$$

В результате дискретизации сигнала $x_c(t)$ с шагом $T = \frac{1}{6}10^{-3}$ получается последовательность $x[n]$, т.е.

$$x[n] = x_c\left(\frac{n10^{-3}}{6}\right)$$

- Является ли последовательность $x[n]$ периодической и каков ее период?
 - Как соотносится частота дискретизации, при которой получен сигнал $x[n]$, с частотой Найквиста? Иными словами, достаточно ли мал шаг дискретизации, чтобы гарантировать отсутствие ложных частот?
2. Рассмотрите последовательность $x[n] = a^n u[n]$. Напомним, что ее периодическое продолжение $\tilde{x}[n]$ описывается формулой:

а) Вычислите Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ последовательности $x[n]$
 б) Найдите коэффициенты $\tilde{X}[k]$ ДРФ последовательности $\tilde{x}[n]$.

а) $x[n] = \delta[n]$; б) $x[n] = \delta[n - n_0]$, $0 \leq n_0 \leq N - 1$;

$$\text{в) } x[n] = \begin{cases} 1, & n - \text{четно}, \\ 0, & n - \text{нечетно}; \end{cases} \quad \text{г) } x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N/2 - 1, \\ 0, & N/2 \leq n \leq N - 1; \end{cases}$$

$$д) x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

4. ДПФ 8-членных последовательности изображены на рис.6, найдите выражение, связывающее $X_1[k]$ и $X_2[k]$

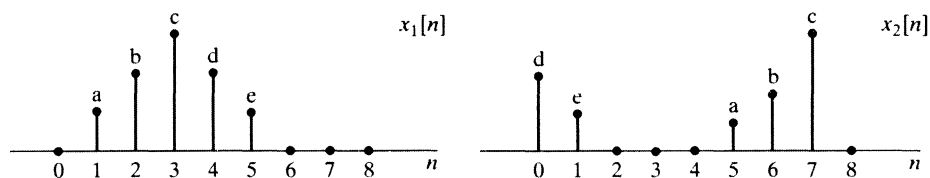


рис.6

Figure 1.1 shows two discrete-time signals, $x_1[n]$ and $x_2[n]$, plotted against n . The signal $x_1[n]$ is a sequence of impulses at $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$ with amplitudes 1, 2, 3, 4, 5, 6 respectively. The signal $x_2[n]$ is a sequence of impulses at $n=0, 1, 2$ with amplitudes 0, 0, 1 respectively.

рис.7

Основная: 1-3

Тема 7. Представление последовательностей конечной длины дискретным рядом Фурье.

Дискретное преобразование Фурье для свертки дискретных последовательностей

Практическое занятие № 7

Тема: Реализация двумерной линейной свертки последовательностей с помощью круговой свертки

Цель занятия

Научиться представлять линейные стационарные системы в импульсной и частотной форме. Изучить соотношение между импульсной и частотной характеристиками, как пару, связанную с преобразованием Фурье и ознакомиться с основными свойствами преобразований.

Формируемые компетенции: ПК-1, ПК-5.

Теоретическая часть:

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на практическое занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Основные сведения о функциях стационарных систем 15 мин
 2. Рассмотрение частотных характеристик 20 мин.
 3. Рассмотрение примеров 35 мин
- Проверка выполнения практического занятия 10 мин
Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Реализация ЛС-систем через дискретное преобразование Фурье.

Так как ЛС-система реализуется линейной сверткой, то циклическая свертка) может быть использована для реализации таких систем. Действительно, рассмотрим L -членную входную последовательность $x[n]$ и импульсную характеристику $h[n]$ длины P . Длина их линейной свертки, которую обычно обозначают через $y[n]$, не превосходит числа $(L + P - 1)$. Следовательно, N - точечная циклическая свертка входного сигнала с импульсной характеристикой совпадет с реакцией системы, если $N \geq (L + P - 1)$. Напомним, что искомая циклическая свертка вычисляется как обратное ДПФ от произведений ДПФ последовательностей $x[n]$ и $h[n]$. Поскольку это произведение должно представлять линейную свертку $x[n] * h[n]$, длина которой равна $(L + P - 1)$, количество членов вычисляемых ДПФ тоже должно быть не меньше чем $(L + P - 1)$, т.е. к этим последовательностям нужно добавить отсчеты с нулевой амплитудой так, чтобы длины сворачиваемых последовательностей стали равными искомому числу. Процесс добавления нулевых членов к конечной последовательности обычно называют продолжением нулем.

Описанная процедура позволяет вычислить линейную свертку конечных

последовательностей на основе ДПФ, т.е. реакцию КИХ-системы на конечный входной сигнал можно определить с помощью ДПФ. Во многих приложениях, таких как, например, фильтрация речевого сигнала, длина входного сигнала неопределена. Несмотря на это, с теоретической точки зрения мы могли бы сохранить полную форму сигнала и реализовать процедуру привлечения ДПФ для большого числа отсчетов, но такое ДПФ довольно трудно вычислить. Другая идея реализации фильтрации заключается в том, чтобы вычислять выходной сигнал только после того, как все отсчеты входного будут собраны вместе. Но, как правило, хотелось бы избежать неизбежной для такого подхода большой задержки. Выход из создавшегося положения дает так называемая блочная свертка, при которой фильтруемый сигнал разбивается на куски длины L . Каждый такой участок сигнала сворачивается с конечной импульсной характеристикой, после чего профильтрованные куски склеиваются вместе подходящим образом. При этом обработка каждого блока осуществляется с помощью ДПФ.

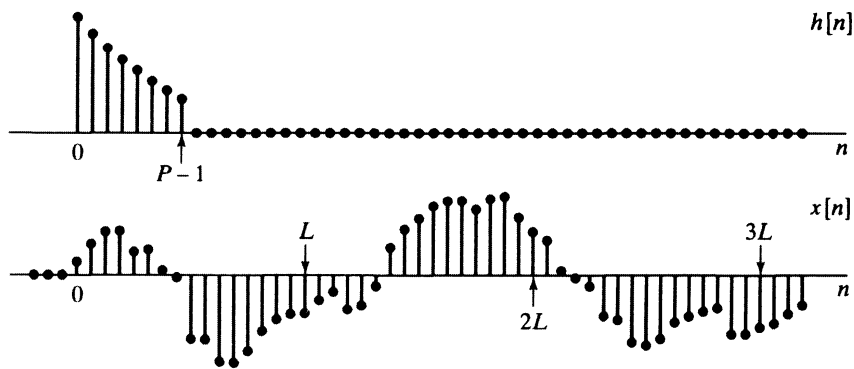


рис.1 Конечная импульсная характеристика $h[n]$ и входной сигнал $x[n]$ неопределенной длины.

Для иллюстрации метода и описания процесса склейки профильтрованных участков рассмотрим импульсную характеристику $h[n]$ длины P и входной сигнал $x[n]$, изображенные на рис. 1. Будем предполагать, что $x[n] = 0$ при $n < 0$ и длина входного сигнала много больше P . Последовательность $x[n]$ можно представить как сумму сдвинутых блоков длины L :

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL] \quad (1)$$

где

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL], & 0 \leq n \leq L - 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2)$$

Указанное разбиение последовательности $x[n]$ из рис. 1 показано на рис. 2, а). Обратите внимание, что первый отсчет каждого участка $x_r[n]$ имеет номер $n = 0$, а его значение совпадает с величиной отсчета входного сигнала под номером rL . Эта особенность отражена на рис. 2, а) тем, что график каждого участка сдвинут на свою реальную позицию.

Поскольку свертка является линейной стационарной операцией, то из формулы (1) следует, что

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL] \quad (3)$$

где

$$y_r[n] = x_r[n] * h[n] \quad (4)$$

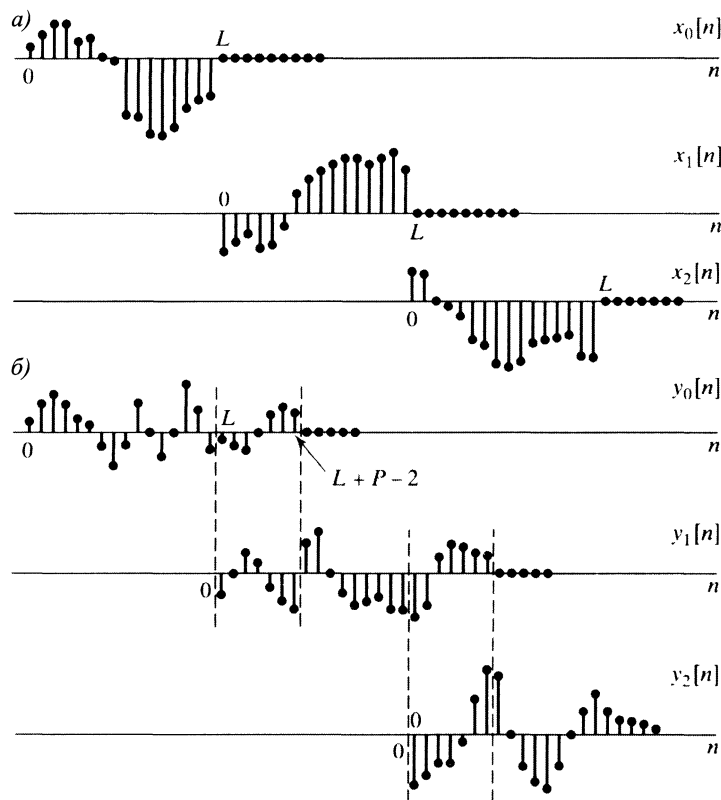


рис.2

Поскольку число отсчетов участка $x_r[n]$ равно L , а длина импульсной характеристики — P , количество членов любого участка $y_r[n] = x_r[n] * h[n]$ не превосходит $L + P - 1$. Поэтому линейную свертку $x_r[n] * h[n]$ можно вычислить с помощью ранее описанной процедуры, использующей N -точечное ДПФ с $N \geq L + P - 1$. Так как входной сигнал разбивается на участки длины L , а результат фильтрования участков имеет длину $L + P - 1$, то профильтрованные сегменты перекрываются друг с другом в $P - 1$ точках, причем для получения искомого результата налагающиеся друг на друга отсчеты необходимо просуммировать. Профильтрованные участки $y_r[n] = x_r[n] * h[n]$ показаны на рис. 2, б). Так как входной сигнал является суммой задержанных конечных участков из рис. 2, а), результат фильтрования $x[n] * h[n]$ получается как сумма задержанных профильтрованных сегментов, изображенных на рис. 2, б). Такая процедура вычисления реакции фильтра часто называется суммированием перекрытий.

Напомним, что перекрытие участков возникает потому, что линейная свертка каждого участка с импульсной характеристикой, как правило, получается длиннее, чем сворачиваемый участок. Метод суммирования перекрытий блочной свертки не привязан к ДПФ и циклической свертке. Основная его идея состоит в вычислении свертки участков входного сигнала, которые затем суммируются подходящим образом.

Другая процедура вычисления блочной свертки называется методом хранения перекрытий. Она заключается в реализации L -точечной циклической свертки P -членной импульсной характеристики с L -членным участком $x_r[n]$ и последующим выделении отсчетов циклической свертки, совпадающих со значениями линейной. Полученные таким образом куски склеиваются вместе для формирования выходного сигнала. Мы показали, что при

циклической свертке L -членной последовательности с P -членной (при $P < L$) первые $P - 1$ отсчеты результата искажены, в то время как остальные тождественны членам линейной свертки. Мы можем разделить входную последовательность $x[n]$ на L -членные сегменты таким образом, что каждый следующий участок перекрывается с предыдущим по $P - 1$ отсчету:

$$x_r[n] = x[n + r(L - P + 1) - P + 1], \quad 0 \leq n \leq L - 1. \quad (5)$$

где, как и раньше, индекс первого отсчета каждого участка равен нулю.

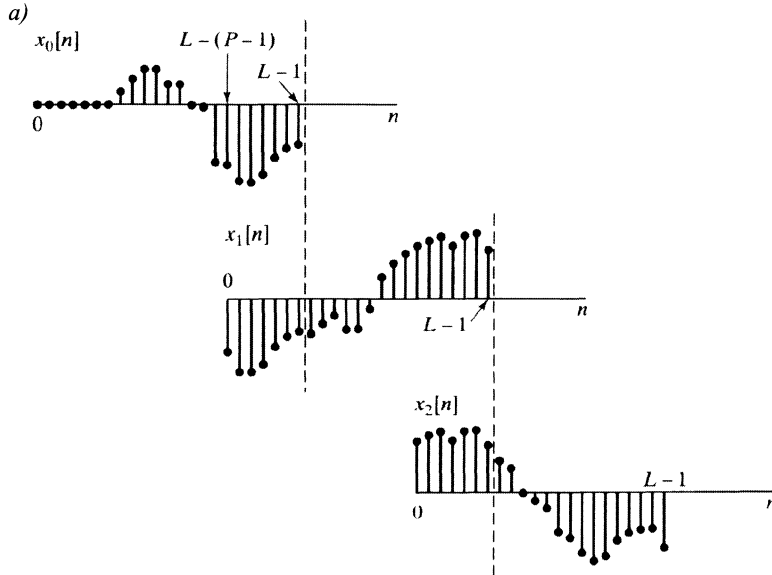


рис.3

Такой способ сегментации последовательности показан на рис. 3, а). Циклическая свертка каждого участка с $h[n]$ обозначена через $y_m[n]$ (рис. 4, б)). Дополнительный индекс r указывает, что эта последовательность получена в результате циклической свертки, в которой может присутствовать наложение по времени. Отсчеты каждого выходного сегмента, индексы которых принадлежат отрезку $[0; P - 2]$, необходимо отбросить. Оставшиеся члены каждого выходного сегмента составляются вместе, в результате чего получается искомый выходной сигнал:

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - r(L - P + 1) + P - 1] \quad (6)$$

где

$$y_r[n] = \begin{cases} y_{rp}[n], & P - 1 \leq n \leq L - 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (7)$$

Описанная процедура называется методом хранения перекрытий, поскольку сегменты входного сигнала перекрываются так, что каждый следующий участок начинается с $(P - 1)$ отсчета предыдущего и заканчивается $L - P + 1$ новыми.

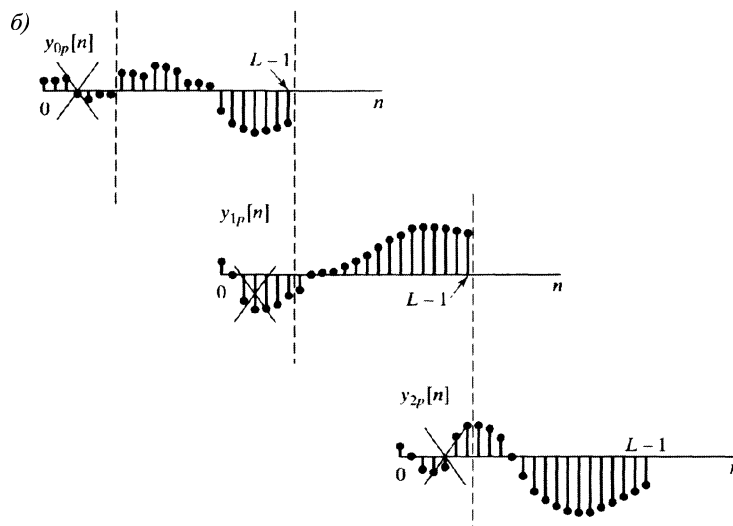


рис.4 (окончание)

Дискретное косинус-преобразование

ДПФ, возможно, наиболее типичный пример большого класса преобразований, которые в общем виде можно записать как

$$A[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \varphi_k^*[n] \quad (8)$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \varphi_k[n] \quad (9)$$

Последовательности $\varphi_k[n]$ удовлетворяют замечательному свойству попарной ортогональности:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_k[n] \varphi_m^*[n] = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & \text{иначе} \neq k \end{cases} \quad (10)$$

и называются базисными.

Базисными последовательностями в ДПФ служат комплексные экспоненты $e^{j2\pi kn/N}$, а последовательность $A[k]$ здесь имеет комплексные отсчеты даже в том случае, когда последовательность $x[n]$ вещественна. Возникает естественный вопрос: существует ли преобразование, сохраняющее вещественность? Ответ положителен. Указанным свойством обладают, например, преобразования Хаара и Адамара и преобразование Хартли [11-13]. Другим примером ортогонального преобразования вещественных последовательностей служит дискретное косинуспреобразование (ДКП) [1, 131]. Оно тесно связано с ДПФ и становится особенно полезным и важным в ряде приложений по обработке сигналов, особенно при сжатии изображений и звука.

Определение дискретного косинус-преобразования

ДКП называется преобразование вида (8) и (9), базисными последовательностями $\varphi_k[n]$ которого служат косинусы. Поскольку косинус — периодическая четная последовательность, то продолжение $x[n]$ за отрезок $[0; N - 1]$ по формуле синтеза (9) будет периодичным и четным. Иначе говоря, тогда как ДПФ содержит неявную периодичность, в ДКП заложена как периодичность, так и четность.

Определение ДПФ начиналось с периодического продолжения конечной последовательности, которое затем выражалось в виде линейной комбинации комплексных экспонент. Подход к определению ДКП полностью аналогичен. Сначала по конечной последовательности строится периодическая четная последовательность, по которой исходная восстанавливается однозначно. Ввиду большого числа способов продолжения возникает несколько различных определений ДКП.

На рис. 5 показаны 17 отсчетов четырех примеров продолжения четырехчленной последовательности. Отсчеты исходной конечной последовательности всюду обозначены черными кружочками. Все продолжения периодические (период равен 16 или меньше) и обладают свойством четности. В каждом случае конечная последовательность легко выделяется как первые четыре члена периода. Обозначим все 16 периодические последовательности, построенные по каждому из четырех примеров рис. 5, через $\tilde{x}_1[n]$, $\tilde{x}_2[n]$, $\tilde{x}_3[n]$ и $\tilde{x}_4[n]$. Заметим, что реальный период последовательности $\tilde{x}_1[n]$ равен $2N = 2 \cdot 4 = 8$, причем она обладает четной симметрией как относительно $n = 0$, так и относительно $n = N - 1 = 3$. Период последовательности $\tilde{x}_2[n]$ равен $2N = 8$, а центры ее четной симметрии расположены в точках $n = -\frac{1}{2}$ и $\frac{7}{2}$. Период последовательностей $\tilde{x}_3[n]$ и $\tilde{x}_4[n]$ состоит из 16 отсчетов. В обоих случаях период вычисляется как $16 = 4N$. Центры симметрии третьей последовательности находятся в точках $n = 0$ и $n = 8$, а четвертой — в $n = -\frac{1}{2}$ и $n = (2N - \frac{1}{2}) = \frac{15}{2}$.

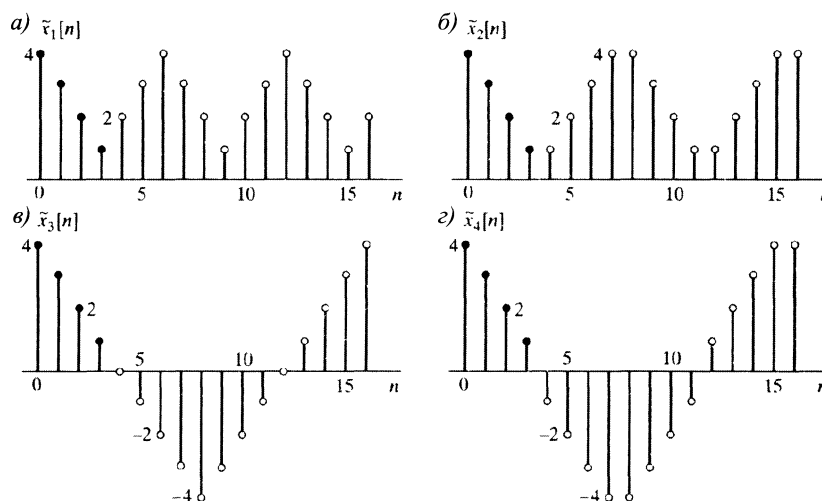


рис.5

Четыре случая, изображенные на рис. 5, иллюстрируют периодичность, неявно присутствующую в четырех типах ДКП, называемых ДКП-1, ДКП-2, ДКП-3 и ДКП-4. Можно показать, что существует еще четыре способа четного периодического продолжения последовательности $x[p]$, что влечет четыре дополнительных типа ДКП. Более того, по данной конечной последовательности можно построить восемь нечетных

периодических вещественных продолжений, ведущих к восьми типам дискретного синус-преобразования (ДСП), базисными функциями в котором служат ортонормированные последовательности синусов. Названные преобразования образуют семейство из 16 преобразований вещественных последовательностей. К наиболее используемым из них относятся ДКП-1 и ДКП-2.

Задания для самостоятельного решения

1. Рассмотрите последовательности $x_1[n]$ и $x_2[n]$ из рис. 6. Найдите наименьшее значение N , при котором справедливо равенство $x_1[n] \circledast x_2[n] = x_1[n] * x_2[n]$

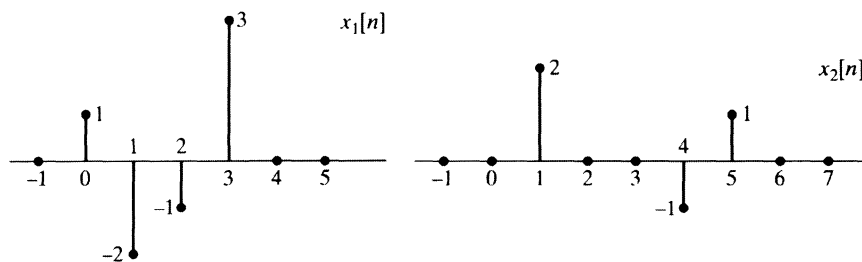


рис. 6

2. ДПФ последовательностей $x[n]$ и $x_1[n]$ изображенных на рис. 7, удовлетворяют соотношению $X_1[k] = X[k]e^{-j(2\pi km/6)}$ где m — неизвестная константа. Можно ли узнать точное значение m , основываясь на рис. 7? Единственное ли такое значение? Положительный ответ обоснуйте, а отрицательный подкрепите примером.

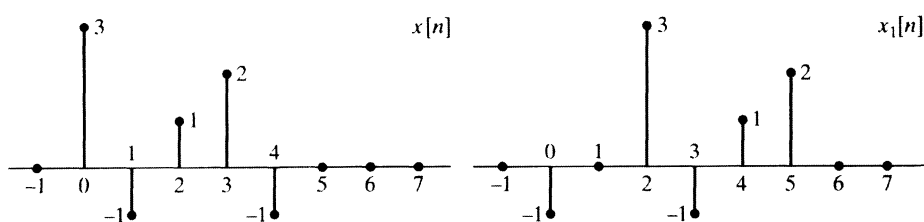


рис. 7

3. Покажите, что для любой N -членной последовательности $x[n]$ выполнено равенство

$$x[((-n))_N] = x[((N - n))_N]$$

4. Изобразите N -точечную циклическую свертку последовательностей из рис. 8 при $N = 6$ и $N = 10$.

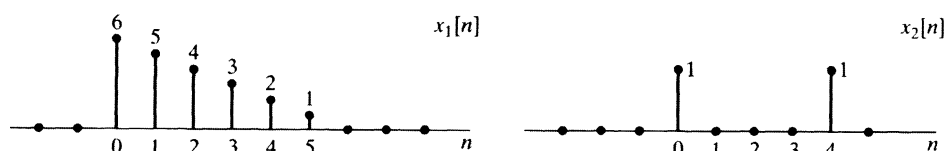


рис. 8

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-3

Тема 8. Вычисление свертки двух последовательностей дискретным преобразованием Фурье
Практическое занятие № 8

Тема: Представление цифровых фильтров в виде сигнальных графов

Цель занятия

Ознакомится с таким понятием, как потоковый граф. Научиться представлять разностные уравнения с помощью сигнальных потоковых графов аналогично блок-схемам, за исключением нескольких обозначений

Формируемые компетенции: ПК-1, ПК-5.

Теоретическая часть:

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на практическое занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Основные сведения о функциях стационарных систем 15 мин
 2. Рассмотрение частотных характеристик 20 мин.
 3. Рассмотрение примеров 35 мин
- Проверка выполнения практического занятия 10 мин
Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Представление разностных уравнений с помощью сигнальных потоковых графов аналогично блок-схемам, за исключением нескольких обозначений. С формальной точки зрения сигнальный потоковый граф — это сеть направленных ветвей, соединяющих узлы. Каждый узел обозначен переменной или меткой. Метка, соответствующая узлу k , может выглядеть как w_k , или, подчеркивая тот факт, что переменные, относящиеся к узлам, как правило — последовательности, ее обозначают через w_k . Символ (j, k) обозначает ветвь потокового графа, исходящую из узла j и заканчивающуюся в узле k (рис. 1).

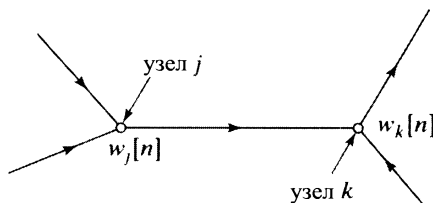


рис.1 Пример узлов и ветвей сигнального потокового графа

Каждой ветви отвечает входной и выходной сигналы. Входным сигналом для ветви (j, k) служит последовательность, взятая в качестве метки узла, т.е. $w_j[n]$. В линейном сигнальном потоковом графе, а именно такие мы и рассматриваем, выходной сигнал, соответствующий ветви, получается линейным преобразованием ее входного сигнала. Простейшим примером служит постоянное усиление, когда выходной сигнал ветви — это

входной сигнал, умноженный на константу. Линейная операция, изображаемая ветвью, обычно ставится рядом со стрелкой, указывающей ориентацию. В случае умножителя на константу, или масштабного преобразователя, эта константа просто ставится рядом со стрелкой. Ветвь, обозначение операции которой опущено, представляет собой ветвь с единичным коэффициентом усиления, или тождественное преобразование. По определению, значение каждого узла графа равно сумме всех входящих в него сигналов.

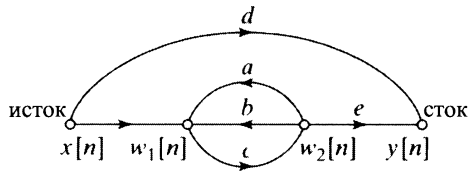


рис.2 Пример сигнального потокового графа со стоком и истоком

Для завершения определения сигнального потокового графа нам необходимо ввести два специальных типа узлов: сток и исток. Истоком называется узел, в который не входит ни одной ветви, иначе говоря, стрелки, стоящие на всех ветвях, инцидентных с ним, направлены от этого узла. Исток используется для обозначения входного сигнала всей системы или источников сигнала внутри нее. Стоком называют узел, имеющий лишь входящие ветви. Он, как правило, обозначает общий выход системы. Сток, исток и ветви с единичным коэффициентом усиления иллюстрируются рис. 2, который представляет следующие линейные соотношения:

$$\begin{aligned} w_1[n] &= x[n] + aw_2[n] + bw_2[n] \\ w_2[n] &= cw_1[n], \\ y[n] &= dx[n] + ew_2[n]. \end{aligned} \quad (1)$$

Сложение, умножение на константу и задержка — базисные операции, необходимые для реализации линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, в связи с чем алгоритмы, реализующие ЛС-системы, можно изображать сигнальными потоковыми графами, состоящими из этих элементов. Как пример такой реализации рассмотрим блок-схему из рис. 3, а), где в прямой форме Π реализована система с характеристической функцией $F.1$). Сигнальный потоковый граф, соответствующий этой системе, приведен на рис. 3, б). Узел 0 на рис. 3, б) является истоком, чьим значением служит входная последовательность $x[n]$, а узел 5 — стоком; его метка — выходной сигнал $y[n]$. Обратите внимание, для четкого выделения входа и выхода системы сток и исток соединены с остальным графом ветвями с единичным коэффициентом усиления. Очевидно, узлы 3 и 5 имеют одинаковые значения. Все ветви на рис. 3, б), за исключением одной (ветвь задержки В,4)), являются простыми ветвями усиления, т.е. выходной сигнал ветви получается из ее входного сигнала умножением на константу. Задержку во временной области представить ветвью усиления нельзя. Однако z -преобразование единичной задержки — это умножение на z^{-1} . Заменяв разностное уравнение его эквивалентом, полученным с помощью

z -преобразования, можно обозначать все ветви соответствующими характеристическими функциями. При этом каждый коэффициент ветви будет являться функцией от z . В частности, коэффициент усиления ветви единичной задержки — z^{-1} . По договоренности узлы графа обозначаются последовательностями, а не их z -преобразованиями, но рядом с задерживающей ветвью будем ставить коэффициент z^{-1} . Необходимо осознавать, что выходом этой ветви служит входная последовательность, сдвинутая на один отсчет. Граф из рис. 3, б) с учетом этого соглашения перерисован на рис. 4.

Уравнения, представляемые рис. 4, имеют следующий вид:

$$w_1[n] = aw_4[n] + x[n] \quad (2)$$

$$w_2[n] = w_1[n] \quad (3)$$

$$w_3[n] = b_0w_2[n] + b_1w_4[n] \quad (4)$$

$$w_4[n] = w_2[n - 1] \quad (5)$$

$$y[n] = w_3[n] \quad (6)$$

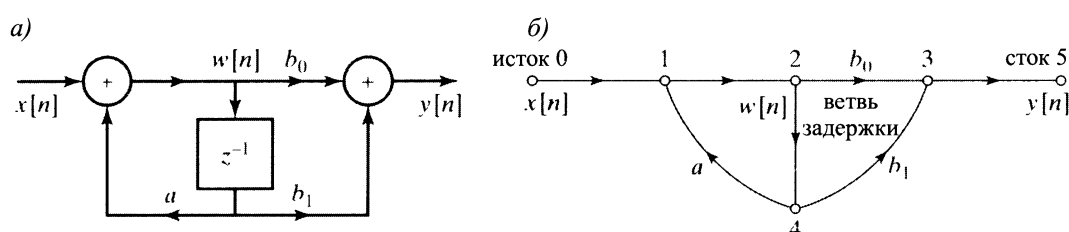


рис.3

Сравнивая рис. 3, а) и 4, легко заметить, что существует прямое соответствие между ветвями потокового графа и стрелками блок-схемы. Фактически, граф отличается от блок-схемы тем, что узлы в нем изображают как точки ветвления, так и сумматоры, в то время как в блок-схемах за сумматором закреплен определенный символ. Точка ветвления блок-схемы соответствует узлу графа, снабженному одной входящей ветвью и несколькими выходящими. Сумматор же на сигнальном потоковом графе представляется узлом с двумя (или более) входными ветвями. Таким образом, сигнальный потоковый граф полностью эквивалентен блок-схеме в смысле графического изображения разностного уравнения, но его легче рисовать. Как и в случае блок-схем, узлы и ветви потокового графа можно переставлять, не меняя свойств реализуемой ЛС-системы. Разработан большой раздел теории сигнальных потоковых графов, который можно непосредственно прилагать к дискретным системам, характеризуемым разностными уравнениями. Хотя потоковые графы в нашем учебнике

присутствуют прежде всего в иллюстративных целях, мы будем использовать

некоторые теоремы, касающиеся приложения сигнальных потоковых графов к исследованию альтернативных структур реализации линейных систем.

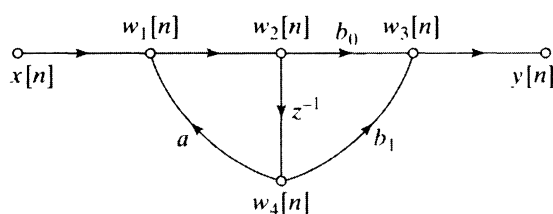


рис.4 Потоковый граф

Формулы (2-6) определяют многошаговый алгоритм, вычисляющий реакцию ЛС-системы на входной сигнал $x[n]$, и служат типичным примером соотношений, возникающих при реализации общей БИХ-системы. Очевидно, что выполнять действия, указанные в формулах, можно только в определенном порядке. В выражениях (2) и (4) осуществляется умножение и сложение, в то время как (3) и (6) — простое переобозначение переменных.

Формула (5) представляет собой «обновление» памяти системы, которое может быть реализовано замещением содержащегося в регистре памяти значения $w_4[n]$ на $w_2[n-1]$, что необходимо осуществить либо перед, либо после вычисления всех остальных величин. Условие состояния покоя в начальном положении в этом случае сводится к одному из равенств: $w_2[-1] = 0 = 0$ или $w_4[0] = 0$. Ясно, что вычисления выражений (2)-(6) должны проводиться в том порядке, в котором они выписаны, за исключением того, что два последних можно поменять местами и/или (5) поставить на первое место. Поточковый граф представляет множество разностных уравнений, по одному на каждый узел сети. В случае графа из рис. 4 мы можем довольно легко исключить некоторые переменные, оставив всего два соотношения:

$$w_2[n] = aw_2[n-1] + x[n] \quad (7)$$

$$y[n] = b_0w_2[n] + b_1w_2[n-1] \quad (8)$$

определяющих структуру прямой формы II.

Решение разностных уравнений, соответствующих потоковому графу - довольно сложная задача ввиду всевозможных задержек переменных. Чтобы ее облегчить, следует применить z-преобразование.

Пример. Вычисление характеристической функции по потоковому графу.

Рассмотрим рис. 5, где изображен граф, непосредственно по которому не удастся выписать характеристическую функцию. Однако, помня о том, что значение каждой переменной — линейная комбинация смежных узловых переменных, коэффициенты которой приписаны соответствующим ветвям, можно легко получить систему разностных уравнений.

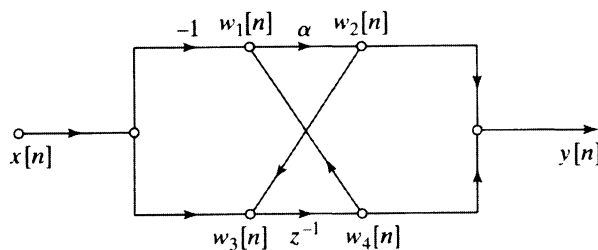


рис. 5

В нашем примере эта система имеет следующий вид:

$$w_1[n] = w_4[n] - x[n] \quad (9)$$

$$w_2[n] = \alpha w_1[n] \quad (10)$$

$$w_3[n] = w_2[n] + x[n] \quad (11)$$

$$w_4[n] = w_3[n-1],$$

(12)

$$y[n] = w_2[n] + w_4[n] \quad (13)$$

На основе уравнений можно написать вычислительный алгоритм, реализующий систему в форме, диктуемой данным графом, но нет гарантии, что этот алгоритм окажется самым эффективным. Поэтому имеет смысл попытаться найти как характеристическую функцию, так и различные эквивалентные системы уравнений. Применив к выписанным уравнениям z -преобразования, придем к системе:

$$W_1(z) = W_4(z) - X(z) \quad (14)$$

$$W_2(z) = \alpha W_1(z) \quad (15)$$

$$W_3(z) = W_2(z) + X(z) \quad (16)$$

$$W_4(z) = z^{-1} W_3(z) \quad (17)$$

$$Y(z) = W_2(z) + W_4(z) \quad (18)$$

Функции $W_1(z)$ и $W_3(z)$ можно исключить из системы уравнений, подставляя (14) в (15), а (16) в (17):

$$W_2(z) = \alpha(W_4(z) - X(z)) \quad (19)$$

$$W_4(z) = z^{-1}(W_2(z) + X(z))$$

(20)

$$Y(z) = W_2(z) + W_4(z)$$

(21)

Из первых двух уравнений находим

$$W_2(z) = \frac{\alpha(z^{-1} - 1)}{1 - \alpha z^{-1}} X(z)$$

(22)

$$W_4(z) = \frac{z^{-1}(1 - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} X(z)$$

(23)

Подставив (22) и (23) в (21), получим

$$Y(z) = \left(\frac{\alpha(z^{-1} - 1) + z^{-1}(1 - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} \right) X(z) = \left(\frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \right) X(z) \quad (24)$$

Следовательно, характеристическая функция, соответствующая потоковому графу из рис. 5, равна

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (25)$$

откуда извлекаем импульсную характеристику системы

$$h[n] = \alpha^{n-1} u[n-1] - \alpha^{n+1} u[n] \quad (26)$$

и прямую форму I потокового графа, которая приведена на рис. 6.

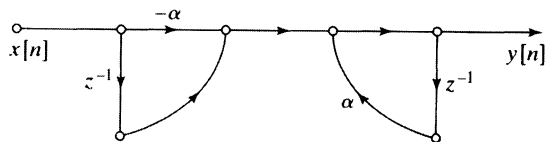


рис. 6.

Из разобранного примера видно, что трудноразрешимая система разностных уравнений, включающая в себя задержанные переменные, или обратную связь, в результате применения z -преобразования превращается в систему линейных алгебраических уравнений, решение которых легко может быть найдено стандартными методами. Кроме того, сравнивая потоковые графы 5 и 6, иллюстрирующие реализацию одной и той же дискретной системы, легко убеждаемся, что они представляют разные вычислительные алгоритмы, требующие различный объем вычислений. Так, в исходной реализации (рис. 5) нужно только одно умножение и одна задержка (т.е. один элемент памяти), в то время как для цифровой реализации прямой формы I уже потребуется два умножения и два задерживающих элемента. Заметим еще, что при реализации той же системы в прямой форме II будет задействован один элемент памяти и два умножения.

Задания для самостоятельного решения.

1. Определите характеристические функции, соответствующие сетям, приведенным на рис. 7, и покажите, что они имеют одни и те же полюса.

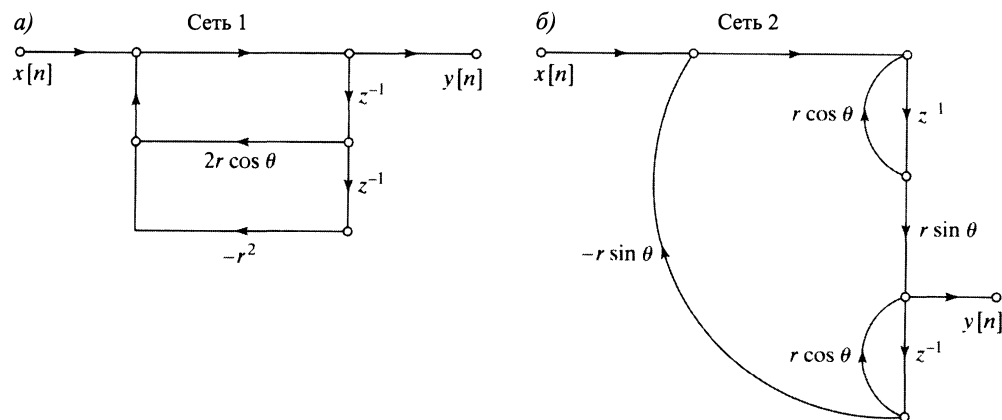
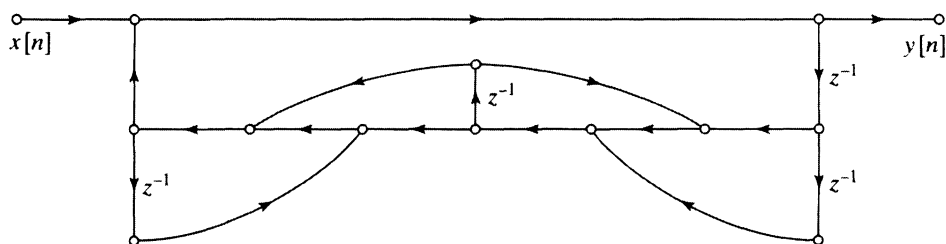
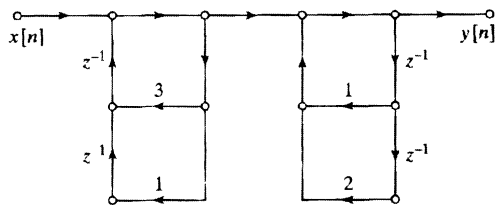


рис. 7

2. Выпишите линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами, связывающее входной сигнал и реакцию системы, представленную сигнальным потоковым графом



3. ЛС-система реализована потоковым графом



а) Выпишите разностное уравнение, соответствующее этому графу.

б) Найдите характеристическую функцию.

в) Подсчитайте количество умножений и сложений вещественных чисел, необходимых для вычисления каждого отсчета выхода при такой реализации системы, в предположениях о вещественнозначности входного сигнала $x[n]$ и не учитывая умножение на 1.

г) При реализации системы, показанной, необходимо четыре запоминающих регистра (задерживающих элементов). Можно ли уменьшить их количество, воспользовавшись эквивалентной структурой? Если да, изобразите соответствующий потоковый граф. Если нет, объясните почему.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-4

Тема 9. Реализация двумерной линейной свертки последовательностей с помощью круговой свертки

Практическое занятие № 9

Тема: Представление цифровых фильтров в виде систем линейных уравнений

Цель занятия

изучить представление цифровых фильтров в виде систем линейных уравнений.

Формируемые компетенции: ПК-1, ПК-5.

Теоретическая часть:

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на практическое занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Основные сведения о представлении цифровых фильтров в виде систем линейных уравнений 55 мин

2. Рассмотрение примера 15 мин

Проверка выполнения практического занятия 10 мин

Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Для направленного сигнального графа система линейных уравнений примет вид

$$W_k(z) = \sum_{j=1}^N V_{jk}(z) + \sum_{j=1}^M S_{jk}(z), \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (1a)$$

$$Y_k(z) = \sum_{j=1}^N R_{jk}(z), \quad k = 1, 2, \dots, P. \quad (1b)$$

Если граф представляет линейную инвариантную к сдвигу систему, то каждая ветвь может быть полностью охарактеризована ее передачей. В общем случае удобно предположить, что ветви, соединяющие узлы цепи с истоками и стоками, обладают постоянными передачами, не зависящими от z . При этом не происходит потери общности, так как, в случае необходимости, можно ввести узел цепи, связанный непосредственно с истоковым узлом, и этот узел, в свою очередь, может иметь ветви к другим узлам с непостоянной передачей. Подобная процедура может быть использована, если необходимо, и для стоковых узлов. Тогда

$$V_{jk}(z) = F_{jk}(z) W_j(z); \quad (2)$$

$$S_{jk}(z) = b_{jk} X_j(z); \quad (3)$$

$$R_{jk}(z) = c_{jk} W_j(z). \quad (4)$$

В результате подстановки (2) – (4) в (1) мы получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$W_k(z) = \sum_{j=1}^N F_{jk}(z) W_j(z) + \sum_{j=1}^M b_{jk} X_j(z); \quad (5a)$$

$$Y_k(z) = \sum_{j=1}^N c_{jk} W_j(z). \quad (5b)$$

Эти уравнения более компактно можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{F}^t(z) \mathbf{W}(z) + \mathbf{B}^t \mathbf{X}(z); \quad (6a)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}^t \mathbf{W}(z), \quad (6b)$$

где $\mathbf{W}(z)$ – вектор-столбец величин $W_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, N$; $\mathbf{X}(z)$ – вектор-столбец величин $X_j(z)$, $j = 1, 2, \dots, M$; $\mathbf{Y}(z)$ – вектор-столбец величин $Y_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, P$. Матрица $\mathbf{F}^t(z)$ является транспонированной матрицей $\mathbf{F}(z)$ (размерностью $N \times N$), определяемой выражением

$$\mathbf{F}(z) = \{F_{kj}(z)\}. \quad (7)$$

имеют нулевую передачу, соответствующий элемент в матрице $F_{kj}(z)$ будет нулевым. Матрица $\mathbf{B}^t$ является транспонированной матрицей (размерностью $N \times M$) от матрицы

$$\mathbf{B} = \{b_{kj}\} \quad (8)$$

а $\mathbf{C}^t$ – транспонированной матрицей (размерностью $P \times N$) от матрицы $\mathbf{C} = \{c_{kj}\}$. Операция транспонирования матриц, обозначенная буквой t , необходима в выражениях (6) для согласованности обозначений условными индексами графов и матриц.

Уравнение (6a) может быть решено для $\mathbf{W}(z)$ путем обращения матриц

$$\mathbf{W}(z) = [\mathbf{I} - \mathbf{F}^t(z)]^{-1} \mathbf{B}^t \mathbf{X}(z) = \mathbf{T}^t(z) \mathbf{X}(z), \quad (9a)$$

где матрица передаточной функции системы

$$\mathbf{T}^t(z) = [\mathbf{I} - \mathbf{F}^t(z)]^{-1} \mathbf{B}^t = \{T_{jk}(z)\}. \quad (9b)$$

Как следствие (9), можно записать выражение для сигнала в k -м узле:

$$W_k(z) = \sum_{j=1}^M T_{jk}(z) X_j(z), \quad (10)$$

т.е. каждая узловая переменная выражается в виде линейной комбинации сигналов истоков. Если в цепи имеются только один ненулевой истоковый узел (узел a с величиной входного сигнала $X_a(z)$) и только один стоковый узел с выходным сигналом $Y(z)$, причем $Y(z) = \mathbf{C}^t \mathbf{W}(z)$, то величина $Y(z)$ будет определяться выражением

$$Y(z) = \mathbf{C}^t \mathbf{W}(z) = \mathbf{C}^t \mathbf{T}^t X_a(z); \quad (11)$$

При этом передаточная функция будет иметь вид

$$H(z) = \mathbf{C}^t \mathbf{T}^t. \quad (12)$$

В том случае, когда передаточная функция каждой ветви цепи имеет порядок не выше первого, т.е. содержит либо умножитель на константу, либо такой умножитель совместно с

элементом единичной задержки, то элементами матрицы в (6а) будут либо постоянные числа, либо постоянные, умноженные на z^{-1} . Если отделить элементы матрицы, содержащие задержку, от элементов которые ее не содержат, то выражение для $F^t(z)$ можно представить в виде

$$F^t(z) = F_c^t + z^{-1} F_d^t, \quad (13)$$

где F_c^t и F_d^t - матрицы размера $N \times N$. С учетом обозначения (13) выражение (6а) принимает вид

$$W(z) = F_c^t W(z) + z^{-1} F_d^t W(z) + B^t X(z). \quad (14)$$

Аналогичным путем на основании (9б) получается выражение для $T^t(z)$:

$$T^t(z) = [I - F_c^t - z^{-1} F_d^t]^{-1} B^t, \quad (15)$$

где I - единичная матрица. Поскольку F_c^t и F_d^t постоянные и не зависмые от z матрицы, то в результате обратного z -преобразования (14) получим

$$w(n) = F_c^t w(n) + F_d^t w(n-1) + B^t x(n). \quad (16a)$$

В (6б) подразумевается также, что

$$y(n) = C^t w(n). \quad (16b)$$

Выражения (16) могут, конечно, быть записаны прямо из графа или обратно, можно построить граф непосредственно из системы уравнений.

Пример.

В качестве примера рассмотрим систему первого порядка, направленный сигнальный граф которой представлен на рис. 1. Этому графу соответствует система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \\ w_4(n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \\ w_4(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n-1) \\ w_2(n-1) \\ w_3(n-1) \\ w_4(n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \|x(n)\|; \\ y(n) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \\ w_4(n) \end{bmatrix} = w_3(n). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Очевидно, что вид матриц F_c^t и F_d^t зависит от порядка расположения уравнений или, что то же самое, порядка нумерации узлов. На рис. 2 показан графрис. 1 с узловыми переменными, пронумерованными в другом порядке.

Рисунок 1. Направленный сигнальный граф системы первого порядка, соответствующий выражению (17)

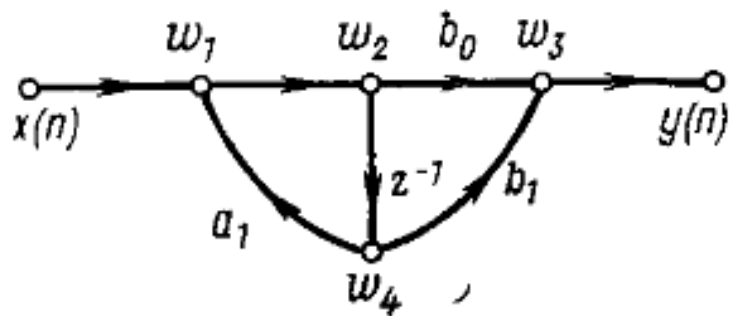
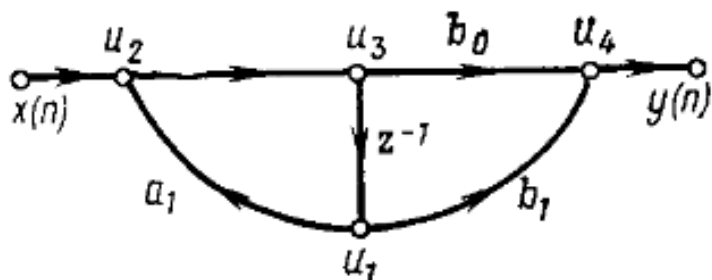


Рисунок 2. Направленный граф уеи рис. 1 с измененной нумерацией узлов



Для этого графа можно записать следующую систему уравнений:

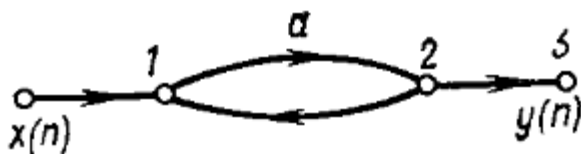
$$\begin{pmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \\ u_3(n) \\ u_4(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & b_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \\ u_3(n) \\ u_4(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(n-1) \\ u_2(n-1) \\ u_3(n-1) \\ u_4(n-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \|x(n)\|;$$

$$y(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \\ u_3(n) \\ u_4(n) \end{pmatrix} = u_4(n).$$
(18)

Из анализа графа рис. 1 или, что то же самое, уравнений (17) очевидно, что узловые переменные не могут вырабатываться последовательно, т.е. сначала ω_1 , затем ω_2 и т.д. Так, например, величина ω_4 необходима для вычисления ω_1 . С другой стороны, тот же самый граф, но с нумерацией узлов рис. 2 может быть вычислен последовательным образом.

В некоторых случаях не существует способов переупорядочения узлов в графе для того, чтобы вырабатывать узловые переменные в последовательном порядке. Граф такого вида считается **невычислимым**. Простой пример невычислимого графа показан на рис.3, где все ветви имеют постоянную передачу.

Рисунок 3. Пример невычислимого направленного графа



Необходимо подчеркнуть, что случай, когда граф оказывается невычислимым, не

означает, что система уравнений, представляющая такой граф, не может быть решена. Это значит, что они не могут быть решены непосредственно для каждой узловой переменной в последовательном порядке.

Из (18), соответствующих графу рис. 2, следует, что в матрице F_c^t нулевыми элементами являются все элементы главной диагонали и все элементы, стоящие выше нее. Этого не выполняется в уравнениях (17), соответствующих графу рис.1. Можно показать, что необходимым и достаточным условием вычислимости графа является возможность пронумеровать узлы так, чтобы в матрице F_c^t были нулевыми все элементы главной диагонали и все элементы, стоящие выше нее. Также может быть показано, что эквивалентно необходимым и достаточным условием вычислимости графа является то, чтобы в графе не было петель с ветвями, не имеющими задержки. В графе рис. 3, например, есть петля, не содержащая задержки, и, следовательно, такой граф является невычислимым.

Система уравнений (18) может быть получена из (17) путем замены узловых переменных. В матричной записи это выполняется путем линейного преобразования вектора $w(n)$ в вектор $u(n)$, т.е.

$$u(n) = Pw(n), \quad (19)$$

где P – невырожденная $N \times N$ постоянная матрица.

В предыдущем примере эта матрица имела вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

В более общем случае, если P – любая невырожденная матрица, то можно записать

$$w(n) = P^{-1} u(n) \quad (21)$$

И, подставив это выражение в (16), получить

$$\left. \begin{aligned} u(n) &= PF_c^t P^{-1} u(n) + PF_d^t P^{-1} u(n-1) + PB^t x(n); \\ y(n) &= C^t P^{-1} u(n). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Уравнения (22) записаны в той же форме, что и уравнения (16), но соответствуют другому графу или другой схеме цепи. Таким образом, существует множество способов построения цепи с одной и той же передаточной функцией.

В (16) текущие значения узловых переменных выражались через текущие и предшествовавшие величины, т.е. $w(n)$ формируется с помощью $w(n)$ и $w(n-1)$. Иногда удобно строить цепи таким образом, чтобы $w(n)$ выражались только через значения предшествовавших величин узловых переменных и текущих значений входного сигнала. Это соответствует нулевому значению матрицы F_c^t в (16). Если использована такая форма выражения величин в уравнениях цепи, то узловой вектор $w(n_1)$ для любого момента времени n_1 будет определяться узловым вектором $w(n_0)$ в момент времени n_0 и вектором входного сигнала $s(n)$ для $n_0 \leq n \leq n_1$. Такой подход к представлению цепи эквивалентен представлению ее методом переменных состояний, хотя в нашей формулировке число состояний (узлов) оказывается, как правило, больше, чем число существенных переменных состояний, необходимых для представления цепи. Представление цепи методом переменных состояний этого типа может быть получено из представления цепи в виде соотношений (16).

В частности, выражение (16а) можно записать как

$$[\mathbf{I} - \mathbf{F}_c^t] \mathbf{w}(n) = \mathbf{F}_d^t \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{B}^t \mathbf{x}(n).$$

Предполагая, что матрица $(\mathbf{I} - \mathbf{F}_c^t)$ является невырожденной, можно получить решение для $\mathbf{w}(n)$ в виде

$$\mathbf{w}(n) = [\mathbf{I} - \mathbf{F}_c^t]^{-1} \mathbf{F}_d^t \mathbf{w}(n-1) + [\mathbf{I} - \mathbf{F}_c^t]^{-1} \mathbf{B}^t \mathbf{x}(n).$$

Введя обозначения

$$\mathbf{D} = [\mathbf{I} - \mathbf{F}_c^t]^{-1} \mathbf{B}^t \quad (23a)$$

и

$$\mathbf{A} = [\mathbf{I} - \mathbf{F}_c^t]^{-1} \mathbf{F}_d^t, \quad (23b)$$

получим матричное представление величин

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{A} \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{D} \mathbf{x}(n) \quad (24a)$$

и

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}^t \mathbf{w}(n). \quad (24b)$$

Можно показать, что если система является вычислимой, то матрица

$(\mathbf{I} - \mathbf{F}_c^t)$ является невырожденной. Таким образом, можно найти матричное представление в форме соотношений (24) для любой вычислимой системы.

Отметим, что преобразование узловых переменных согласно (21) соответствует преобразованию направленного графа, т.е. это изменяет его структуру, сохраняя в то же время соотношение между входом и выходом. Поскольку существует много преобразований типа (21), то имеется и много способов построения цепи, имеющих одну и ту же передаточную функцию. Однако на практике наибольшее распространение нашли лишь некоторые из них.

Задания для самостоятельного решения.

1.

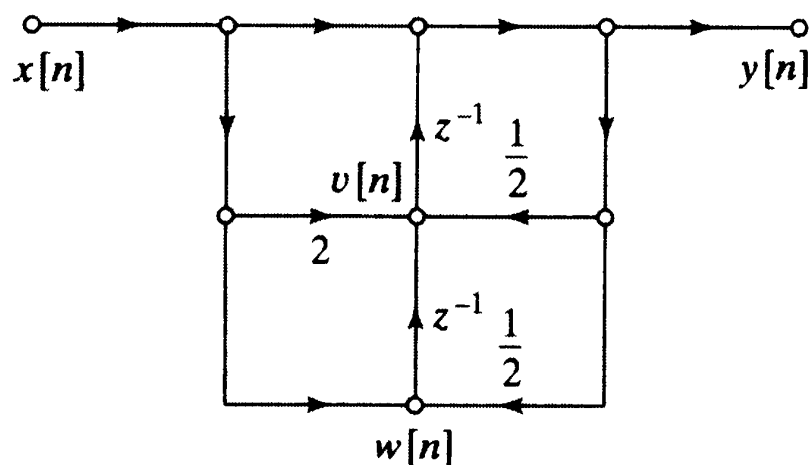
Рассмотрите сигнальный потоковый граф из рис. 4

а) Используя указанные обозначения узловых переменных, выпишите систему разностных уравнений, представленную этой сетью.

б) Нарисуйте эквивалентный потоковый граф, изображающий каскад двух подсистем первого порядка.

с) Является ли данная система устойчивой? Ответ обоснуйте.

Рисунок 4.



2.

Рассмотрите детерминированную ЛС-систему S с импульсной характеристикой $h(n)$ и характеристической функцией вида

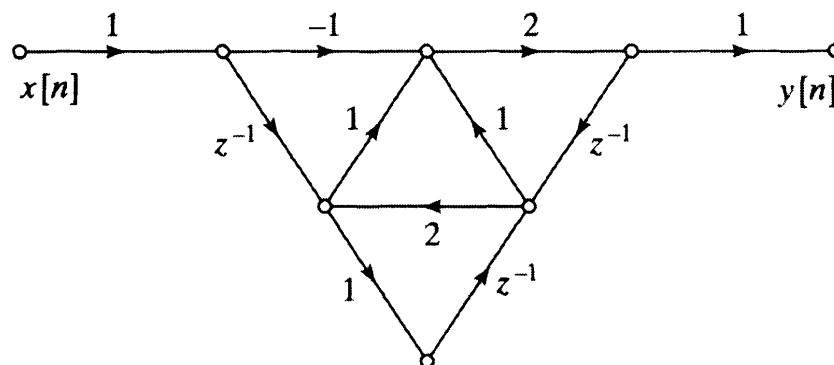
$$H(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 - 4z^{-1})}{z(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}.$$

- Нарисуйте прямую форму потокового графа системы S.
- Изобразите транспонированную форму графа из предыдущего пункта задачи.

3.

Выпишите разностное уравнение, характеризующее ЛС-систему, реализованную потоковым графом из рис. 5.

Рисунок 5.



4.

Начертите сигнальный потоковый граф в прямой форме I, реализующий ЛС-систему с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}.$$

5.

Начертите сигнальный потоковый граф в прямой форме II, реализующий ЛС-систему с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}.$$

6.

Начертите сигнальный потоковый граф в транспонированной прямой форме II , реализующий ЛС-систему с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{1 - \frac{7}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}{1 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}.$$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-3

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине «Математические основы цифровой обработки сигналов»
для студентов направления подготовки
10.03.01 «Информационная безопасность»
Направленность (профиль)
«Организация и технологии защиты информации (по отрасли или в сфере профессиональной
деятельности)»

СОДЕРЖАНИЕ

Тема. Дискретизация и квантование аналоговых сигналов
Лабораторная работы №1-3.

Тема. Кодирование дискретных сообщений
Лабораторная работа № 4-6.

ПЛАНЫ Лабораторных работ

Лабораторная работы №1-3.

Тема: Дискретизация и квантование аналоговых сигналов

Цели занятия:

1. Изучить принцип дискретизации аналоговых сигналов
2. Изучить принцип квантования аналоговых сигналов

Формируемые компетенции: ПК-1; ПК-5

Теоретическая часть:

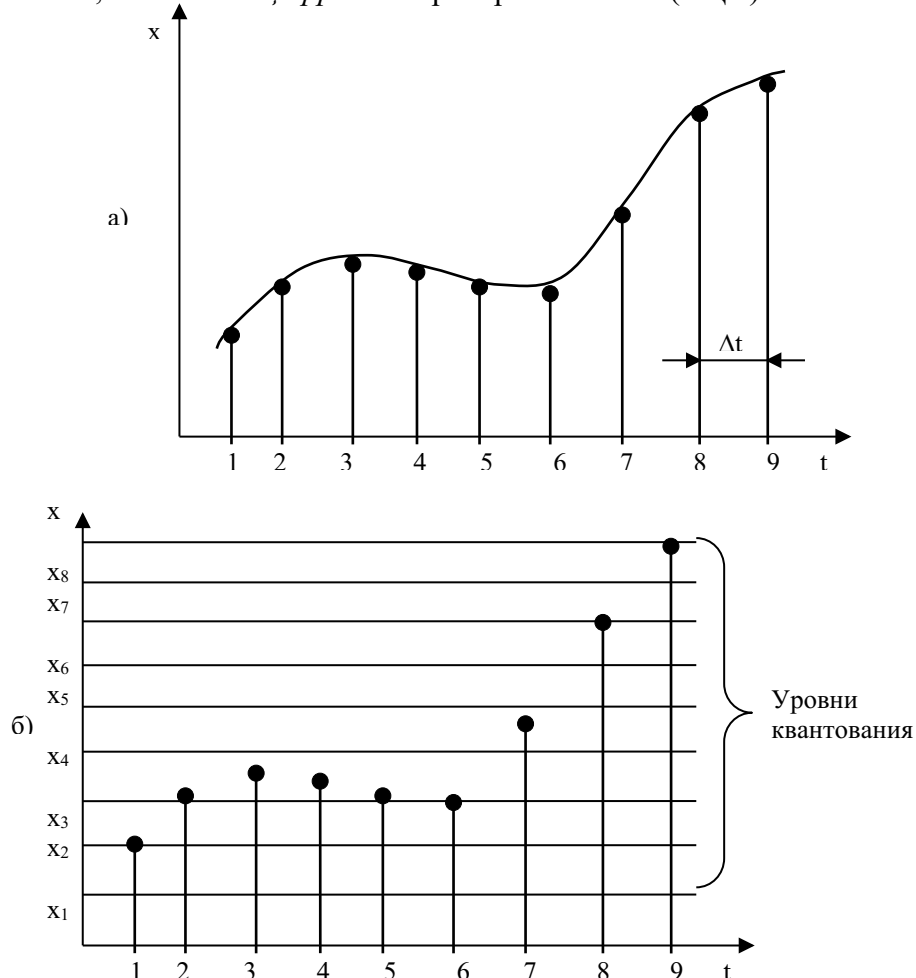
Учебно-материальное обеспечение:
компьютеры, измерительные приборы

Персональные

Учебные вопросы лекции:

1. Изучение теоретических сведений
2. Ответы на вопросы для самопроверки
3. Выполнение практической части

Цифровой измерительный прибор (ЦИП) - автоматически вырабатывает дискретные сигналы измерительной информации, показания которого представлены в цифровой форме, т. е. преобразует непрерывную во времени и по размеру измеряемую величину в цифровой код. Этот процесс, включающий в себя дискретизацию, квантование и кодирование непрерывной входной величины, называют аналого-цифровым преобразованием, а измерительный преобразователь, автоматически осуществляющий этот процесс и вырабатывающий дискретные сигналы измерительной информации о числовом значении входной величины, — аналого-цифровым преобразователем (АЦП).



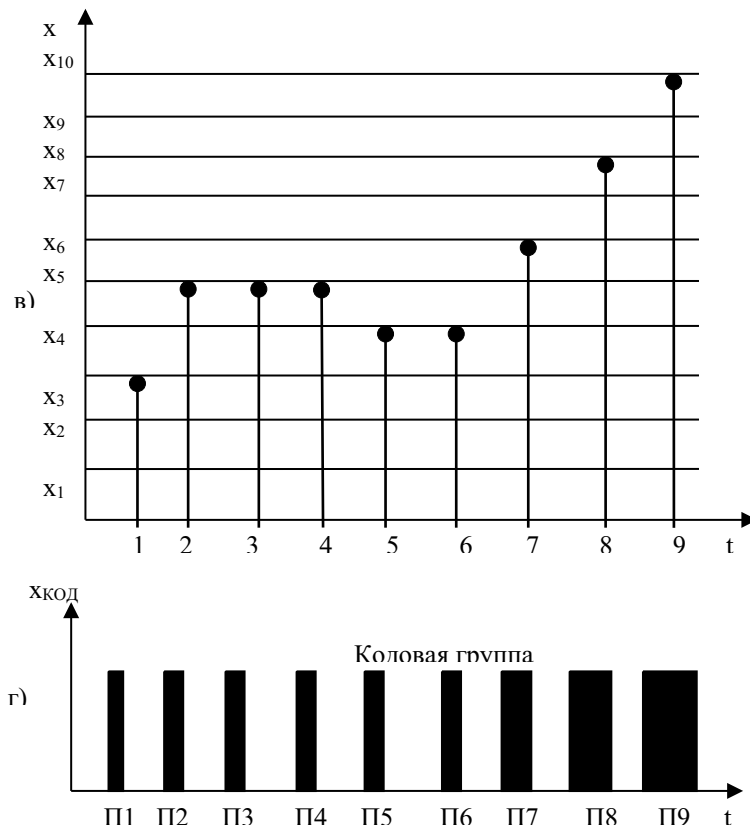


Рис. 1

Дискретизацией называется процесс-преобразования непрерывного во времени сигнала измерительной информации $x(t)$ в дискретный $x(t)$, равный мгновенным значениям исходного сигнала только в определенные моменты времени t — моменты дискретизации (рис.1). Дискретизация может выполняться путем выделения отсчетов сигнала в определённые детерминированные моменты времени. Таким образом от сигнала измерительной информации сохраняется только совокупность его отдельных значений, Промежуток времени Δt между двумя моментами дискретизации называется *шагом, дискретизации* (а обратная величина $1/\Delta t = f_d$ — частота дискретизации). Обычно моменты отсчетов на оси времени выбираются с постоянным шагом дискретизации, т. е. имеет место равномерная дискретизация. Применяется и неравномерная дискретизация.

Основным вопросом, который решается при дискретизации изменяющегося во времени сигнала $x(t)$, является правильный выбор частоты дискретизации. Результатами измерения в цифровых приборах являются значения сигнала $x\{t_i\}$ лишь в моменты дискретизации t_i . Но зачастую важная информация может быть в сигнале и между этими моментами. Очевидно, чем чаще следуют моменты дискретизации, тем легче решить эту задачу. Однако такой подход может привести к неоправданному увеличению частоты дискретизации, что с одной стороны, приведет к избыточности информации, с другой — к ужесточению требований к быстродействию АЦП и соответственно к его усложнению. Задача определения промежуточных значений сигнала $x(t)$ является интерполяционной. Под правильно выбранной частотой дискретизации следует понимать такую частоту, при которой погрешность интерполяции будет не более заданной.

Как показал В. А. Котельников, непрерывная функция $x(t)$ с ограниченным спектром частот от 0 до f_m может быть однозначно определена при шаге дискретизации $1/2 f_m$. Доказательство основано на представлении спектра функции в виде ряда Фурье, результатом обратного преобразования которого является ряд

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i\Delta t) \frac{\sin \omega_m(t - i\Delta t)}{\omega_m(t - i\Delta t)},$$

где $\Delta t = 1/2f_m$ — шаг дискретизации; f_m — верхняя граница спектра частот; $x(i \ t)$ — отсчеты функции в моменты дискретизации $t_i = i\Delta t$. Указанный ряд однозначно задает наибольший шаг дискретизации, при котором теоретически можно точно определить любые промежуточные значения функции $x(t)$ по ее отсчетам $x(i \ t) = x(t_i)$. Уменьшение же шага дискретизации ведет только к избыточности.

Однако практическое использование этого ряда наталкивается на трудности. Все реальные сигналы ограничены во времени. Следовательно, **во-первых**, ряд будет содержать лишь конечное число членов $i=0 \dots 2f_m T_c$, где T_c — длительность сигнала; **во-вторых**, спектр такого сигнала будет бесконечен, в то время как для разложения в ряд спектр должен быть ограничен. Это противоречие можно преодолеть, если выбрать наивысшую частоту спектра f_m так, что в диапазоне частот от 0 до f_m будет сосредоточена основная часть энергии спектра. Энергия «отсекаемой» части спектра будет характеризовать погрешность интерполяции. Дисперсия приведенной погрешности:

$$D = \left[\frac{1}{\pi T_c} \int_{\omega_m}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \right] / (x_{\max} - x_{\min})^2,$$

где числитель — средняя мощность отсекаемой части спектра; T_c — длительность функции $x(t)$; $x_{\max}$ и $x_{\min}$ — экстремальные значения функции. Из этого выражения можно найти m при известных значениях прочих величин. Сложность применения ряда Котельникова в качестве интерполирующего полинома в значительной мере вызвана и сложным видом входящих в него функций, что затрудняет вычислительную процедуру. Это обуславливает использование и других интерполяционных полиномов.

Простейшим видом интерполяции является ступенчатая (рис.2,а). Именно по этому закону изменяются показания ЦИП. Максимальную погрешность интерполяции Δ легко выразить через максимальную скорость изменения функции и шаг дискретизации Δt : $|\Delta|_{\max} = |x'(t)|_{\max} \Delta t$. Задаваясь допустимой погрешностью Δ , можно определить шаг и частоту дискретизации: $\Delta t = \Delta / |x'(t)|_{\max}$. Погрешность можно снизить при помощи кусочно-линейной интерполяции, для которой все точки кривой исходной функции, соответствующие моментам дискретизации, соединяются отрезками прямых (рис.2,б): $|\Delta|_{\max} = |x''(t)|_{\max} \Delta t^2 / 8$, откуда, задаваясь допустимой погрешностью, получаем шаг дискретизации $\Delta t = \sqrt{8 \Delta / |x''(t)|_{\max}}$. Можно использовать полиномы и более высокого порядка, но простота определения промежуточных значений с помощью кусочно-линейной интерполяции обуславливает ее частое использование.

Квантование — это преобразование непрерывной по размеру величины $x(t_i)$ в квантованную $X_{кв}(t_i)$ путем замены ее мгновенных значений ближайшими квантованными значениями (рис.1,а). Иначе говоря, процесс квантования сводится к округлению значений дискретного сигнала до ближайших квантованных значений—уровней квантования. Эти уровни квантования образованы по определенному закону с помощью мер. Разность Δx между двумя уровнями называют *шагом* (ступенью) *квантования*.

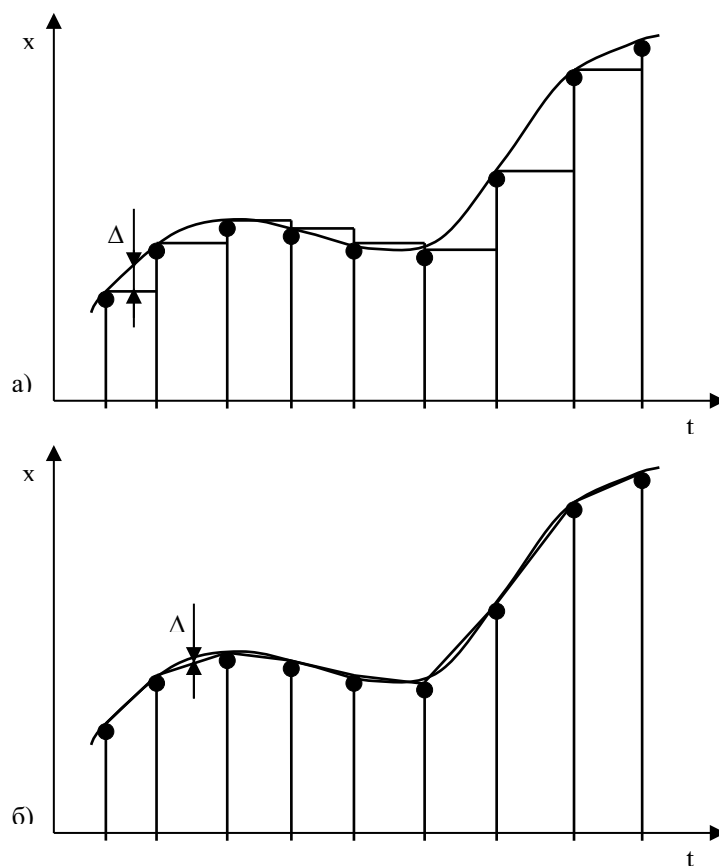


Рис. 2

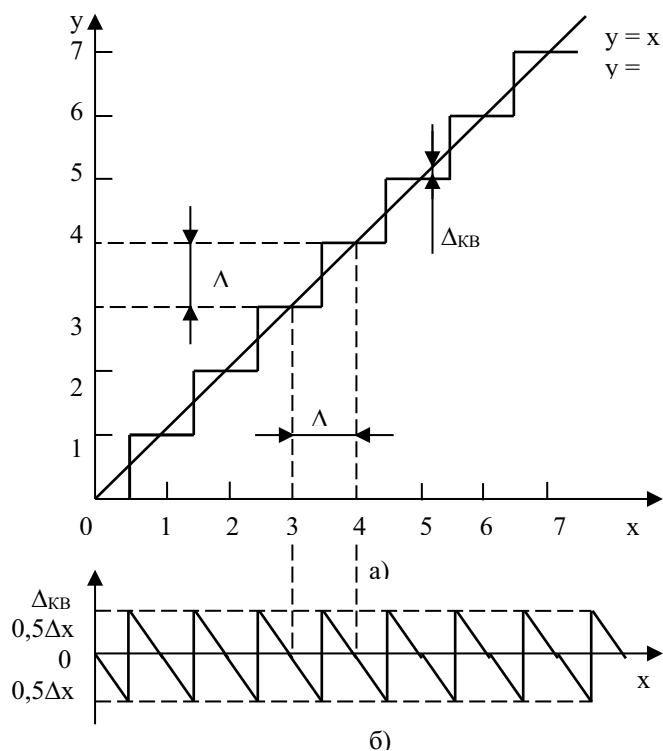


Рис. 3

Шаг квантования может быть как постоянным (равномерное квантование), так и переменным (неравномерное квантование). При равномерном квантовании значение квантованного сигнала $X_{кв}(t_i) = n x$, где $n=0 \dots N$ — номер соответствующего уровня квантования. Процесс квантования, связанный с округлением значения сигнала, всегда ведет к появлению погрешности квантования, носящей методический характер.

На рис. 3,а приведена характеристика преобразования АЦП, представляющая ступенчатую функцию $y = n\Delta x$; где Δx — шаг квантования. Из ее сравнения с идеальной функцией преобразования $y=x$ видно, что погрешность $|\Delta_{\text{кв}}| \leq 0,5\Delta x$, т. е. не превосходит половины шага квантования. Это обеспечивается, во-первых, за счет того, что „нулевой уровень квантования совпадает с нулевым значением $x(t)$, а во-вторых, тем, что первый уровень квантования, с которым сравнивается измеряемая величина, сдвинут относительно нулевого всего на половину шага квантования. В результате, когда x лежит в пределах $0,5\Delta x; \dots 1,5\Delta x$, выходной результат $y=1 \cdot x$ и т. д. Следует отметить, что, указанные условия не всегда выполнимы. Так, при измерении интервалов времени методом счета числа периодов импульсов известной частоты за этот интервал времени погрешность квантования достигает целого шага квантования: $|\Delta_{\text{кв}}| \leq \Delta x$. Для ее уменьшения необходимо синхронизировать начало временного интервала и приход первого импульса, задержав его на половину периода относительно начала этого интервала.

При квантовании сигнала x погрешность $\Delta_{\text{кв}}$, часто называемая шумом квантования, имеет характер ломаной линии (рис.3,б) и ее максимальное абсолютное значение равно $0,5 \cdot x$. Если считать, что шум квантования имеет форму зубцов с амплитудой $0,5 \cdot x$, то средняя мощность за длительность каждого зубца составит $P_{\text{ш.кв}} = x^2/12$. Данное выражение полностью характеризует среднеквадратическое значение погрешности квантования. Так как в АЦП нет однозначной связи между выходными и входными величинами, то, зная выходной код, можно говорить лишь о вероятности того или иного значения аналоговой величины в пределах одного кванта. Однако при большом числе уровней квантования плотность вероятности мгновенных значений может быть принята равномерной, что соответствует равной плотности вероятности погрешности квантования в пределах $\pm 0,5 \cdot x$. В этом случае дисперсия погрешности квантования по уровню $\sigma_{\text{кв}}^2 = (0,5 \cdot x)^2/3 = P_{\text{ш.кв}}$, а среднее квадратическое значение погрешности $\sigma_{\text{кв}} = x/2\sqrt{3}$, т. е. в $\sqrt{3}$ раз меньше максимальной.

Следующим преобразованием измерительного сигнала является кодирование. *Цифровым кодом* называют последовательность цифр или сигналов, подчиняющихся определенному закону, с помощью которой осуществляется условное представление численного значения квантованной величины (рис. 1,г). При этом число импульсов в кодовой группе равно номеру n соответствующего

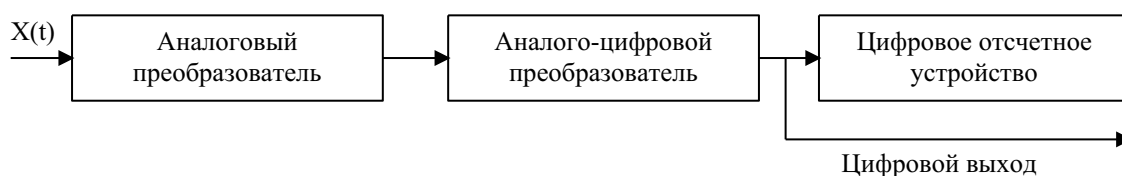


Рис. 4

уровня квантования. Например, моменту дискретизации (отсчету) t_7 соответствует уровень квантования X_6 и в кодовой группе содержится 6 импульсов. Отметим, что при кодировании получаемый цифровой код всегда однозначно соответствует номеру n выбранного уровня квантования и процесс кодирования не вносит дополнительной погрешности.

Обобщенная структурная схема цифрового измерительного прибора представлена на рис. 4. Аналоговый преобразователь преобразует измеряемую величину $x(t)$ в величину, обеспечивающую нормальный режим работы АЦП. Это могут быть масштабные преобразования (усиление, ослабление) или преобразования рода физической величины (например, сопротивления в напряжение). С выхода АЦП цифровой код поступает на цифровое отсчетное устройство и цифровой выход, позволяющий использовать цифровой измерительный прибор в качестве преобразователя, а также подключать цифровые регистрирующие устройства. Метрологические характеристики ЦИП и АЦП во многом определяются методом аналого-цифрового преобразования. Различают следующие преобразования:

- пространственное, при котором измерительный сигнал предварительно

преобразуется в перемещение, угол поворота и т. п. некоторого указателя, положение которого определяется с помощью специальной «кодовой маски» (кодовые диски и линейки, электронно-лучевые трубки и т. п.);

- число-импульсное, при котором измеряемая величина (например, частота, временной интервал) предварительно преобразуется в пропорциональное количество импульсов, число которых подсчитывается цифровым счетчиком;

- время-импульсное, при котором измеряемая величина предварительно преобразуется в интервал времени, значение которого определяется путем заполнения импульсами опорной частоты и подсчета этих импульсов цифровым счетчиком;

- частотно-импульсное, при котором измеряемая величина преобразуется в частоту электрических сигналов, определяемую подсчетом числа этих сигналов за известный интервал времени цифровым счетчиком;

- амплитудное, при котором измеряемая величина преобразуется в амплитуду электрического сигнала, определяемую сравнением с набором опорных электрических величин последовательно или одновременно;

- уравнивающее (компенсационное), при котором измеряемая величина уравнивается величиной, воспроизводимой цифро-аналоговым преобразователем (ЦАП), выполняющим роль меры измеряемой физической величины. ЦАП преобразует цифровой код в непрерывную во времени и квантованную по значению физическую величину (например, напряжение, ток, сопротивление). По алгоритму уравнивания различают развертывающее и следящее уравнивания.

В приборах, основанных на развертывающем уравнивании, шаг дискретизации Δt задается принудительно. При этом он не должен быть меньше времени, необходимого для выполнения аналого-цифрового преобразования, которое определяется как быстродействием отдельных входящих в состав прибора дискретных устройств, так и временем, необходимым для завершения переходных процессов установления сигналов в аналоговых звеньях (усилителя и т. п.). Кроме того, время преобразования существенно зависит от закона изменения уравнивающей величины на выходе ЦАП до наступления момента равновесия. При последовательном переборе всех значений в диапазоне преобразования для получения высокой точности необходимо много времени. Время уравнивания значительно (на несколько порядков) сокращается при использовании метода поразрядного уравнивания.

В приборах, основанных на принципах следящего уравнивания, дискретизация осуществляется не принудительно, а по мере изменения измеряемой величины. Быстродействие этих приборов можно характеризовать максимальным временем разового преобразования при подключении на вход измеряемой величины. Однако такая характеристика не отражает основной особенности использования следящих цифровых приборов — возможности слежения за измеряемыми величинами, изменяющимися с достаточно большими скоростями. Поэтому для оценки быстродействия следящих цифровых приборов указывается максимально допустимая скорость изменения измеряемой величины, при которой еще сохраняется гарантируемая прибором точность измерения.

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ И КОДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ЦИФРОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВАХ

Дискретизированные и квантованные значения сигнала в цифровых измерительных приборах подвергаются кодированию. На рис. 1,г был показан *унитарный код*, при котором число передаваемых импульсов пропорционально квантованному значению измеряемой величины. Поэтому такой код еще называют число-импульсным. Представление числового значения в унитарном коде имеет недостатки, в частности различное число импульсов в кодовых группах. Громоздкость данного кода привела к распространению других систем счисления и кодов. Под системой счисления понимают совокупность цифровых знаков и правил, применяемых для однозначного представления чисел. Системы счисления, коды разделяются на непозиционные и позиционные. К непозиционным кодам относят, например,

унитарный код.

Более компактно и удобно выражаются числа в позиционных системах, к которым относятся десятичная, двоичная, двоично-десятичная и др. В общем случае в позиционной системе любое число N можно представить в виде

$$N_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \dots + a_{-m} b^{-m} = \sum_{i=-m}^n a_i b^i,$$

где b — основание системы счисления, равное числу знаков в данной системе (например, для десятичной $b=10$, для двоичной $b=2$), $i = -m \dots n$ — номер разряда (позиции), b^i — весовой коэффициент i -го разряда, $a=0 \dots (b-1)$ — разрядный, коэффициент.

При записи числа N в позиционной системе используются только разрядные коэффициенты, а весовые не указываются, так как определяются порядковой позицией разрядного коэффициента. Например, число 920,1 в десятичной системе содержит 4 разрядных коэффициента с весовыми коэффициентами 10^2 , 10^1 , 10^0 и 10^{-1} :

$920,1 = 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1}$. Это делает представление информации в позиционном коде наиболее компактным. Заметим, что запись числа 920 с помощью унитарного кода потребовала бы 920 знаков.

Десятичная система используется в ЦИП для отображения результата измерения. Однако все промежуточные операции в цифровом приборе предпочитают проводить в двоичной системе счисления, поскольку электронные устройства с двумя устойчивыми состояниями отличаются простотой и высокой помехоустойчивостью. В двоичной системе для представления цифр разряда используются два символа: 0 и 1. Перевод числа, записанного в двоичной системе, в привычную для нас десятичную требует проведения вычислительной процедуры: $11011,01 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 27,25$.

Из приведенного примера видно, что в двоичной системе счисления весовой коэффициент старшего разряда превышает весовой коэффициент предыдущего (младшего) разряда в 2 раза, т. е. они образуют ряд 1, 2, 4, 8, 16, 32 и т. д.

Однако число, записанное в двоичной системе, неудобно для визуального отсчета, а перевод его в десятичное число требует затрат времени и вызывает определенные технические сложности. Поэтому в цифровых измерительных приборах широко пользуются *двоично-десятичным кодом*, который образуется путем представления каждой цифры десятичного числа соответствующим двоичным числом. Например, число 27 преобразуется следующим образом. Цифра 2 записывается как 0010, а цифра 7 — как 0111, т. е. $27_{10} = 00100111_{2/10}$. Здесь индекс 10 свидетельствует о записи в десятичной системе, а 2/10 — о записи в двоично-десятичной. Представление числа в двоично-десятичной системе менее экономно, чем в двоичной. Так, для числа 27 в двоично-десятичной системе надо иметь 8 символов, а в двоичной только пять (11011). Однако простота его преобразования в десятичный код компенсирует этот недостаток.

В двоично-десятичном коде представление каждой десятичной цифры требует четыре символа.

Меньше нельзя, так как с помощью трех символов можно получить лишь 8 комбинаций, а число возможных цифр в каждом разряде десятичного числа равно 10 ($a_{10} = 0 \dots 9$). Вместе с тем четыре символа позволяют построить 16 комбинаций, т. е. шесть комбинаций являются лишними и их можно удалить. Вполне естественным кажется удаление комбинаций, выражающих цифры более 9. Код I, содержащий 10 начальных комбинаций (табл. 1), называют кодом 8421. Он является наиболее распространенным, но не единственным возможным. Для каждой из десяти цифр допустимо совершенно произвольное закрепление кодовых комбинаций, поэтому число принципиально возможных кодов довольно велико. Код II (весовые коэффициенты 2421) имеет разрыв между цифрами 4 и 5. В этом месте проходит ось симметрии. Каждая кодовая комбинация над осью отличается от симметричной комбинации под осью инверсными значениями разрядных коэффициентов, например десятичное число 3 воспроизводится кодовой комбинацией 0110; симметрично расположенное относительно оси число 7 — комбинацией 1001, которая может быть получена

из 0110 путем замены нулей единицами и единицы нулями. Это свойство полезно при реализации арифметических операций. Находят применение и другие виды кодов.

Т а б л и ц а 1

a_{10}	I(8421)	II (2421)	a_{10}	I(8421)	II(2421)
0	0000	0000	5	010111	1011
1	0001	0001	6	0110	1100
2	0010	0010	7	0111	1101
3	0011	0011	8	1000	1110
4	0100	0100	9	1001	1111

Для многих АЦП выходным является унитарный код. Для его преобразования в двоичный код используется обычный двоичный счетчик, а для преобразования в двоично-десятичный код — двоично-десятичный счетчик. В последнем каждые четыре триггера охвачены такими обратными связями, при которых осуществляется счет не до $2^4=16$, а до 10, при этом четыре последовательно включенных триггера образуют счетную декаду.

В зависимости от способа передачи коды делятся на последовательные, параллельные и последовательно-параллельные. При последовательном коде все его разряды передаются последовательно во времени по одной цепи. При параллельном коде все разряды передаются одновременно, каждый по своей цепи. Это требует больше цепей, но соответственно сокращает время на передачу. При большой разрядности кода целесообразно компромиссное решение — последовательно-параллельная передача, при которой все разряды кода делятся на группы (например, часто в группу входит 8 бит — байт). Биты внутри группы передаются одновременно по параллельным цепям, а группы последовательно во времени.

При передаче цифровых сигналов на значительные расстояния код может искажаться под действием импульсной помехи. Для обнаружения этих ошибок можно использовать различные коды. Простейшим является применение двоичных кодов с проверкой на четность. Для этого в код вводится дополнительный разряд, которому присваивается значение 1, если сумма единиц всех остальных разрядов нечетна, и значение 0, если сумма четна. Тогда передаваемая комбинация всегда содержит четное число единиц. На приемном конце проверяется четность числа единиц в принятом коде. Отсутствие четности свидетельствует о возникшей ошибке (однократной или любой нечетной кратности).

ЦИФРОВЫЕ ИНДИКАТОРЫ И ЦИФРОВОЕ ОТСЧЕТНОЕ УСТРОЙСТВО

В настоящее время известно большое число цифровых индикаторов: газоразрядных, электролюминесцентных, светодиодных, на жидких кристаллах и др. В газоразрядных индикаторах (типа ИН) анод выполнен в виде тонкой и редкой металлической сетки, а катод в виде цифры из тонкой проволоочки (рис. 5). Катоды расположены стопкой, один под другим. Объем внутри баллона заполнен инертным газом, например неоном. Если между катодом и анодом действует достаточное напряжение, возникает тлеющий разряд, форма которого повторяет конфигурацию катода. Так как индикатор показывает цифры от 0 до 9, на цоколе необходимо иметь десять сигнальных выводов плюс один вывод для подачи напряжения на общий анод. Одновременно должна высвечиваться только одна цифра, поэтому при индикации управляющее напряжение действует только между общим выводом и одним из сигнальных. Главным недостатком газоразрядных цифровых ламп является необходимость подачи достаточно высокого управляющего напряжения.

Современная электроника создала элементы индикации, характеристики которых

совместимы с выходными характеристиками низковольтных маломощных транзисторов и интегральных микросхем. К ним относятся светодиоды и элементы на жидких кристаллах. Эти типы индикаторов имеют семи- или десятиsegmentную *рис.6* конструкцию. На *рис.6* показаны семисегментные индикаторы.

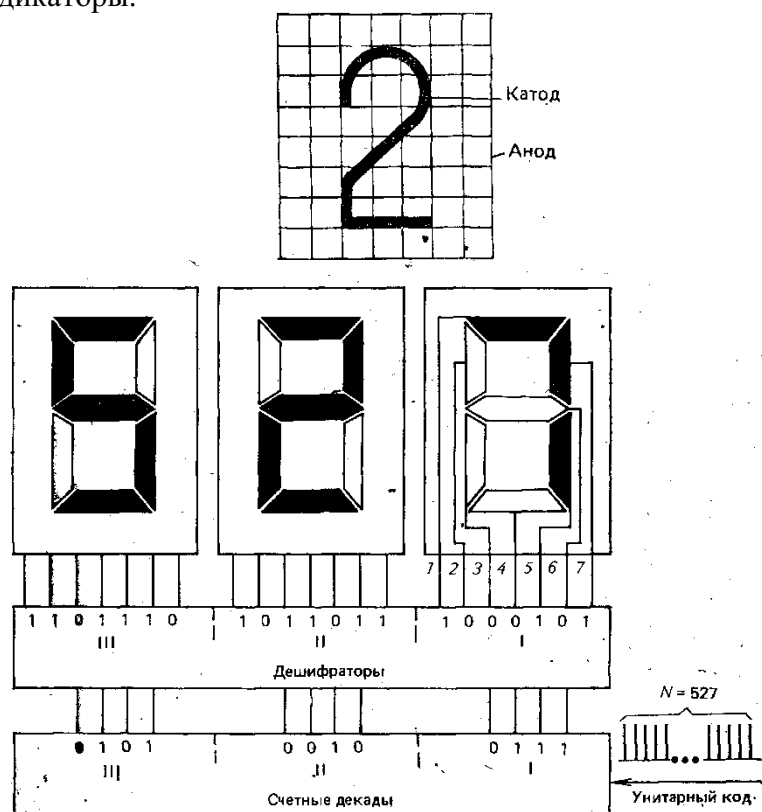


Рис. 6

Все сегменты размещены на общей подложке и имеют отдельные выводы. Как видно из *рис. 6*, для получения цифры 7 необходимо сигналы (1) подать на входы 1, 5 и 7. На остальных входах должен быть 0. Низкие управляющие напряжения, малая потребляемая мощность и долговечность привели к широкому распространению этих приборов.

На *рис. 6* показан пример построения трехразрядного цифрового отсчетного устройства на семисегментных цифровых индикаторах. Пусть входным сигналом является унитарный код. Этот код с помощью двоично-десятичного счетчика преобразуется в параллельный двоично-десятичный код. Для этого счетчик содержит три декады, каждая из которых состоит из четырех триггеров, работающих в счетном режиме и соединенных последовательно. Применение обратных связей позволяет обеспечить последовательный счет десяти импульсов, поступающих на вход декады. После десятого импульса все триггеры возвращаются в исходное состояние (0), при этом на выходе счетной декады появляется сигнал 1, который поступает на следующую декаду. Таким образом первая декада единицы, вторая — десятки, третья — сотни. На сигнальных выходах четырех триггеров имеются сигналы, состоящие из 0 и 1 и отражающие число импульсов, подсчитанных декадой. Подбирая обратные связи, можно получить отображение числа поступивших на вход импульсов в любом из кодов, представленных в табл.1. На *рис. 6* показан результат счета $N=527$ импульсов в коде 8421: 0101 0010 0111. Полученный код поступает на дешифраторы, которые преобразуют его в параллельный семиразрядный код, управляющий семисегментными индикаторами. При использовании других индикаторов, например типа ИН, необходимы другие дешифраторы, обеспечивающие получение параллельного десятичного кода.

СТРУКТУРНЫЕ МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Снижение погрешностей является наиболее важной задачей совершенствования СИ. Существующие способы ее решения можно разделить на технологические, конструктивные и структурные. Методы борьбы с погрешностями существенно зависят от характера этих погрешностей. Погрешность СИ может быть выражена через номинальную $y_n = F_n(x)$ и реальную $y = F_p(x)$ функции преобразования (рис.7): $F_p(x) = F_n(x) + \Delta$. Параллельное смещение характеристики преобразования приводит к появлению аддитивной составляющей погрешности ($\Delta_{\text{адд}} = a$), изменение ее наклона — к мультипликативной ($\Delta_{\text{мульт}} = bx$), зависимость наклона от значения измеряемой величины — к нелинейной составляющей ($\Delta_{\text{нел}} = y_3 - y_2$). Все эти составляющие могут случайным образом меняться во времени.

Технологический способ заключается в совершенствовании изготовления существующих и разработке новых элементов ИУ, имеющих меньший разброс параметров и повышенную стабильность их. Однако его возможности ограничены и, кроме того, усложнение технологии изготовления и отбраковки элементов приводит к их удорожанию.

Конструктивные способы определяют такое построение схем, узлов и самих ИУ, при котором погрешности минимальны. Их отличительной чертой является отсутствие структурной избыточности, т. е. СИ состоит только из таких измерительных преобразователей, без которых процесс измерения невозможен. К наиболее общим из конструктивных методов следует отнести применение отрицательной обратной связи (ООС) и уравнивающего (компенсационного) преобразования, при котором ООС охватывает все ИУ. Как известно, применение ООС позволяет на несколько порядков в $K > \text{раз}$, где K и — коэффициенты передачи соответственно прямой цепи и цепи ООС) уменьшить составляющие погрешности ИУ: мультипликативную путем уменьшения неустойчивости коэффициента преобразования, нелинейную путем снижения нелинейности характеристики преобразования. Введение ООС целесообразно только, когда погрешность коэффициента передачи цепи ООС существенно ниже погрешности коэффициента передачи цепи прямого преобразования. Необходимо также учитывать, что ООС снижает чувствительность ИУ (в K раз) и не позволяет уменьшить аддитивную составляющую погрешности.

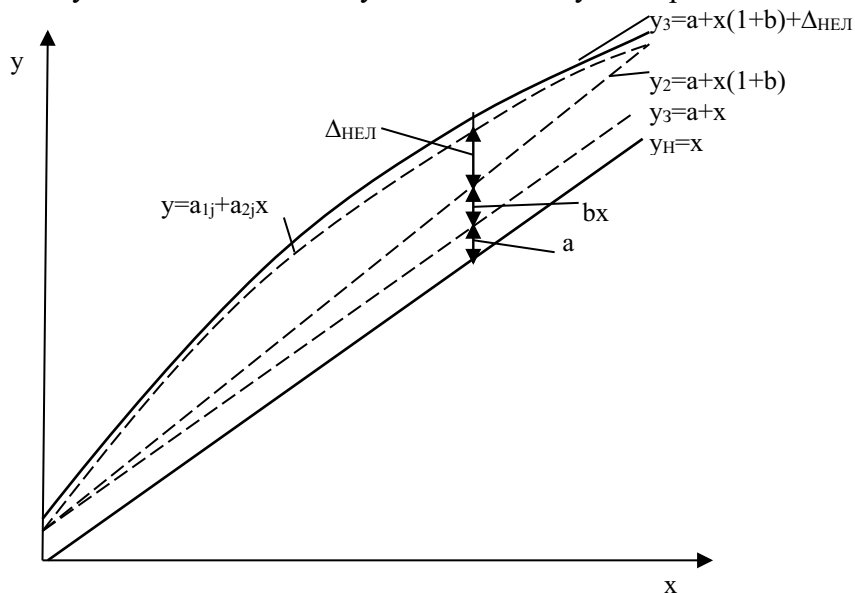


Рис. 7

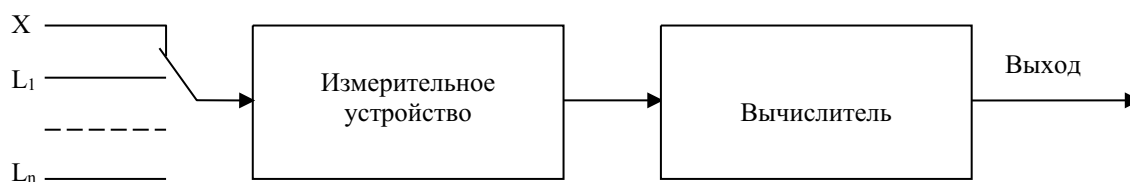


Рис.8

Структурные методы коррекции погрешностей основаны на введении структурной и (или) временной избыточности, т. е. на использовании в СИ дополнительных устройств и проведения наряду с измерением искомой величины дополнительных измерений^ обработка результатов которых позволяет уменьшить погрешность измерения искомой величины. Структурные методы позволяют^ снизить систематическую погрешность и ту составляющую случайной погрешности, которая во время всех дополнительных измерений мало изменяется, т. е. корректируют относительно медленно меняющуюся составляющую случайной погрешности. Например, при автоматизации процесса измерения, когда время измерения обычно составляет доли или единицы секунд, можно осуществить коррекцию температурной погрешности, случайные изменения которой происходят достаточно медленно. Заметим, что быстро изменяющаяся составляющая случайной погрешности такими методами не уменьшается. Для этого можно использовать только многократные наблюдения и их статистическую обработку.

Внедрение в цифровые СИ вычислительной техники открывает широкие, возможности использования структурных методов. Последние делятся на методы образцовых мер, методы обратных преобразований и тестовые методы.

Метод образцовых мер. Для рассмотрения метода образцовых мер представим реальную характеристику преобразования в виде полинома $y = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$, где a_i — коэффициенты, постоянные на протяжении времени измерения. Идея метода образцовых мер заключается в последовательном измерении величины x и известных величин $L_1, L_2, \dots, L_n$, воспроизводимых мерами (рис.8). В результате одного цикла измерений можно составить систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{x} + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{x}^{n-1}, \\ \mathbf{y}_0 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{L}_1 + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{L}_1^{n-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{y}_n &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{L}_m + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{L}_m^{n-1}, \end{aligned}$$

где неизвестными являются x и a_i . Система уравнений решается вычислительным устройством относительно измеряемой величины x . Очевидно, что при правильном выборе числа мер в системе получается необходимое число уравнений, позволяющих при решении исключить неизвестные коэффициенты a_i .

Если погрешность СИ содержит только одну аддитивную составляющую (характеристика преобразований y_1 на рис.7), то достаточно произвести одно вспомогательное измерение с мерой $L_1=0$. Система имеет вид:

$$\begin{aligned} y_0 &= a_1 + x, \\ y_1 &= a_1 + L_1, \end{aligned}$$

откуда $x = y_0 - y_1 + L_1 \Big|_{L_1 = 0} = y_0 - y_1$.

Если погрешность СИ содержит и аддитивную, и мультипликативную составляющие (характеристика преобразования y_2 на рис.7), то необходимо произвести два вспомогательных измерения с мерой $L_1 = 0$ и с мерой L_2 , (ее значение обычно берут близким к верхнему пределу диапазона измерения). Решив систему из трех уравнений с тремя неизвестными a_1 , a_2 и x ,

получим $x = L_1 + (L_2 - L_1) \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1} \Big|_{L_1 = 0} = L_2 \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1}$

Этот алгоритм очень прост и часто используется на практике для автоматической коррекции аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности.

Если имеет место и нелинейная составляющая погрешности, то для ее коррекции число мер существенно возрастает. Одновременно возрастает порядок аппроксимирующего полинома, что усложняет вычисления. Для преодоления этой трудности обычно прибегают к кусочно-линейной аппроксимации характеристики преобразования (y з на рис.7): $y = a_{1j} + a_{2j}x$, где $j=1, 2, \dots, m$ — номер участка аппроксимации. Процесс измерения и вычисление осуществляют так же, как и в предыдущем случае, только образцовые меры L_{1j} и L_{2j} , выбирают не произвольно, а в зависимости от результата первого измерения x . Результат измерения позволяет определить номер j участка аппроксимации и выбрать меры в начале и конце этого участка. При этом требуется $m+1$ образцовых мер.

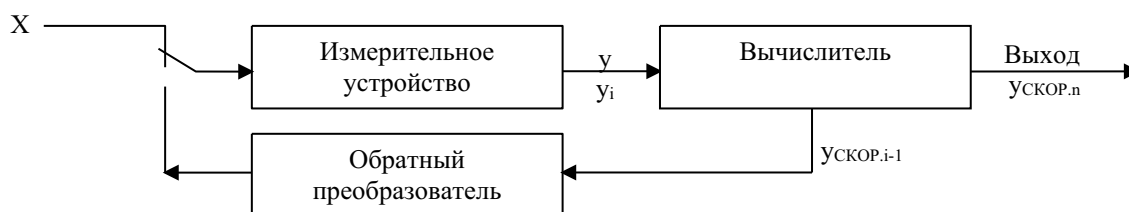


Рис. 9

Таким образом рассмотренный метод позволяет осуществлять коррекцию всех составляющих погрешности, но уменьшение нелинейной составляющей может требовать значительного числа мер. Обычно этот метод используется для измерения величин, для которых легко создать образцовые меры.

Итерационные методы. Эти методы относятся к методам обратных преобразований, так как в них используется высокоточный ЦАП, с помощью которого выходной цифровой сигнал преобразуется в физическую величину, однородную с измеряемой, и подается на вход (рис.9). Эти методы называются итерационными, так как в них осуществляется последовательное приближение результатов измерения к истинному значению величины. Существует много разновидностей итерационных методов. Рассмотрим одну из распространенных.

В соответствии с приведенным алгоритмом (рис.10) сначала производится преобразование измеряемой величины x . Полученное значение y запоминается, а ко входу измерительного устройства (ИУ) подключается выход обратного преобразователя. Затем при первом шаге итерации ($i = 1$) величина $y_{\text{исход}} = y$ поступает на обратный преобразователь (F^{-1}_n — функция его передачи, обратная функции F_n). Полученная величина $x_{i=1}$ преобразуется ИУ в $y_{i=1}$ и вычисляется $y_{\text{корр}}$ — первый скорректированный результат, который запоминается. При втором шаге итерации он поступает на обратный преобразователь и процесс повторяется. Общий алгоритм вычисления i -го скорректированного результата:

$y_{\text{корр } i} = y_{\text{корр } i-1} - y_i + y$ — из предыдущего скорректированного результата вычесть результат последнего преобразования и прибавить результат первого преобразования.

Рассмотрим процесс коррекции погрешности ИУ при наличии аддитивной и мультипликативной составляющих, пренебрегая погрешностью высокоточного ЦАП. В соответствии с рис. 7 при подаче на вход ИУ измеряемой величины x получим $y = Fp(x) = a + x(1+b)$, в то время как при отсутствии погрешности имели бы $y_n = F_n(x) = x$. Соответственно погрешность составит $y - y_n = a + bx$. При первом шаге итерации: $X_1 = F^{-1}(y_{\text{исход}}) = F^{-1}_n(y) = y$; $y_1 = Fp(X_1) = a + X_1(1+b)$; Погрешность первого шага итерации составит $\Delta_{\text{исход } 1} = y_{\text{исход } 1} - y_n = -(a + xb)b$, т. е. при $b < 1$ уменьшилась по сравнению с погрешностью Δ в $1/b$ раз.

Погрешность результата второго шага итерации составит $\Delta_{\text{исход } 2} = y_{\text{исход } 2} - y_n = -(a + xb)b^2$, т. е. уменьшилась по сравнению с начальной в $1/b^2$ раз. Если продолжить итерации, то можно убедиться, что для n шагов итерации погрешность уменьшится в $1/b^n$ раз. Если, например, $b = 0,1$, то для трех шагов итерации получим уменьшение погрешности в 10^3 раз, т. е. процесс итерации быстро сходится.

Итерационный метод позволяет корректировать и нелинейную составляющую

погрешности.

При применении итерационных методов результирующая погрешность практически определяется погрешностью обратного преобразователя. Это позволяет использовать в прямой цепи весьма грубые преобразователи. Наличие образцового обратного преобразователя делает этот метод похожим на метод уравнивающего преобразования. Однако в последнем, как уже отмечалось, не осуществляется коррекция аддитивной составляющей погрешности прямой ветви.

Тестовый метод. Этот метод основан на дополнительных измерениях с использованием специальных измерительных сигналов — тестов, аддитивных и мультипликативных. Аддитивный тест формируется в виде суммы $A_i(x) = x + Qi$, где Qi — постоянная составляющая, не зависящая от x , мультипликативный формируется в виде произведения $A_i(x) = k_i X$, где k_i — независимый от x коэффициент преобразования (например, реализуемый путем усиления величины x в k раз). Иначе говоря, указанные тесты получаются в результате преобразований самой измеряемой величины x . Важным преимуществом тестового метода является возможность уменьшения числа требуемых тестов при кусочно-полиномиальной аппроксимации характеристики преобразования, так как тесты функционально связаны с измеряемой величиной и переносятся вместе с ней на нужный участок аппроксимации. Наиболее просто это поясняется на примере кусочно-линейной аппроксимации, получившей наибольшее распространение. Характеристика преобразования на j -м участке описывается уравнением $y = a_{1j} + a_{2j}X$ ($j = 1, 2, \dots, m$), где m — число участков (рис.7). При линейной аппроксимации необходимо иметь два теста $A_1(x)$ и $A_2(x)$, аддитивный и мультипликативный, дополнительные преобразования которых позволяет определить

неизвестные параметры a_{1j} и a_{2j} . Решая систему уравнений
$$\begin{cases} y_0 = a_{1j} + a_{2j}x, \\ y_1 = a_{1j} + a_{2j}A_1(x), \\ y_2 = a_{1j} + a_{2j}A_2(x); \end{cases}$$
 получим

алгоритм тестового метода при кусочно-линейной аппроксимации:

$$y_0 = \frac{y_1 A_2(x) - y_2 A_1(x)}{A_2(x) - A_1(x)} + x \frac{y_2 - y_1}{A_2(x) - A_1(x)}.$$

На рис. 11 приведена структурная схема измерительного устройства, работающего по данному алгоритму с одним аддитивным и одним мультипликативным тестами. Процесс измерения состоит из трех тактов. В первом ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а K_3 замкнут и на вход измерительного устройства поступает измеряемая величина x . На втором также замыкается ключ K_1 и на вход поступает аддитивный тест $x +$. На третьем такте K_2 замыкается, а остальные размыкаются, подключая на вход измерительного устройства мультипликативный тест с величиной kx . Результаты y_0, y_1, y_2 преобразований поступают с выхода измерительного устройства в вычислительное, реализующее алгоритм, который может быть получен из указанного постановкой $A_1(x) = x +$ и $A_2(x) = kx$:

$$x = \frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} \cdot \frac{\Theta}{k - 1}.$$

Отметим, что данный метод является универсальным. Как и метод образцовых мер, он позволяет уменьшить аддитивные и мультипликативные составляющие, а также составляющую погрешности, связанную с нелинейностью характеристики преобразования. Его достоинством по сравнению с остальными структурными методами является отсутствие требования большого числа образцовых мер, а также отключения измеряемой величины от хода прибора, что важно при измерении некоторых неэлектрических величин.

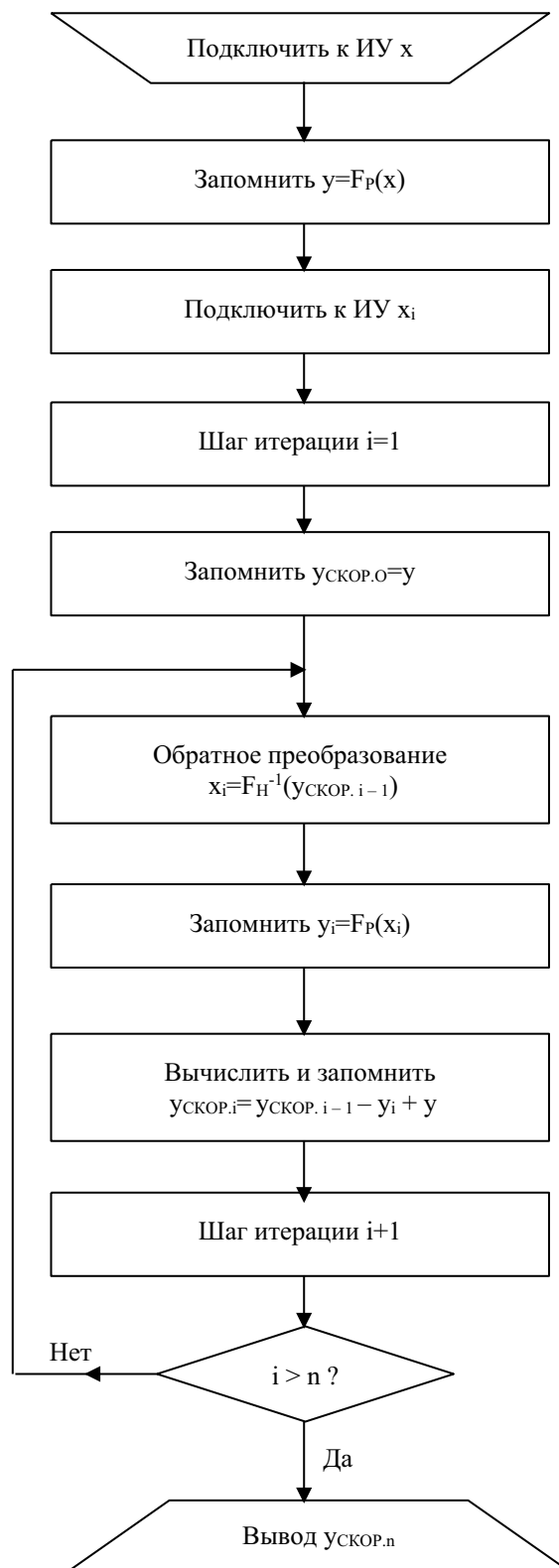


Рис. 10

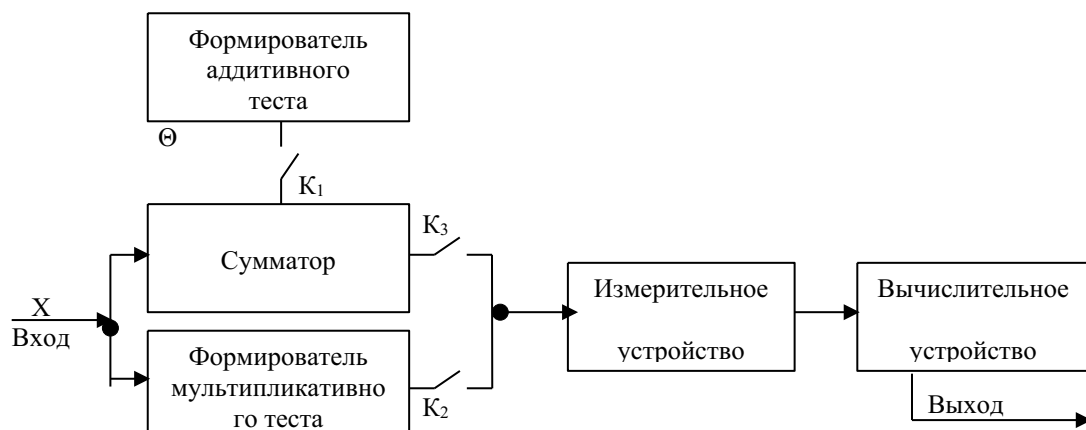


Рис. 11

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме:

Основная: 1,2

Дополнительная: 1-5

Методическая: 1-3

Интернет-ресурсы: 1

Программное обеспечение: 1-3

Лабораторная работа № 4-6.

Тема: Кодирование дискретных сообщений

Цель занятия:

1. Изучение методов модуляции, спектров сигналов при различных видах модуляции

Формируемые компетенции: ПК-1; ПК-5

Теоретическая часть:

Учебно-материальное обеспечение:

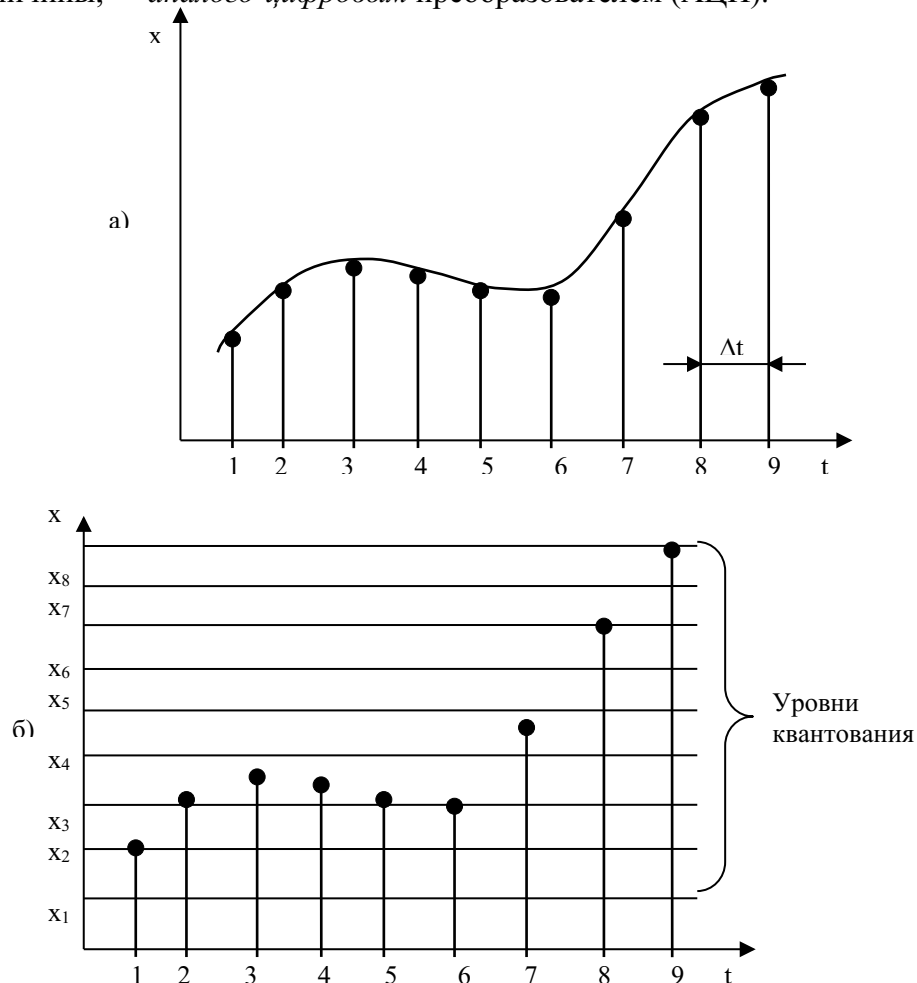
Персональные

компьютеры, измерительные приборы

Учебные вопросы лекции:

1. Изучение теоретических сведений
2. Ответы на вопросы для самопроверки
3. Выполнение практической части

Цифровой измерительный прибор (ЦИП) - автоматически вырабатывает дискретные сигналы измерительной информации, показания которого представлены в цифровой форме, т. е. преобразует непрерывную во времени и по размеру измеряемую величину в цифровой код. Этот процесс, включающий в себя дискретизацию, квантование и кодирование непрерывной входной величины, называют аналого-цифровым преобразованием, а измерительный преобразователь, автоматически осуществляющий этот процесс и вырабатывающий дискретные сигналы измерительной информации о числовом значении входной величины, — *аналого-цифровым преобразователем (АЦП)*.



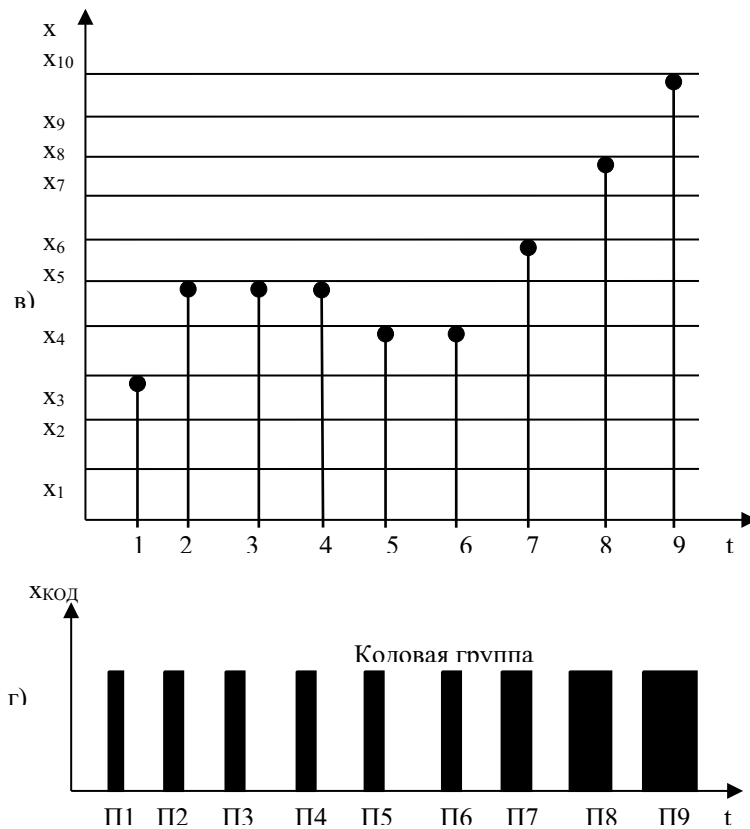


Рис. 1

Дискретизацией называется процесс-преобразования непрерывного во времени сигнала измерительной информации $x(t)$ в дискретный $x(t)$, равный мгновенным значениям исходного сигнала только в определенные моменты времени t — моменты дискретизации (рис.1). Дискретизация может выполняться путем выделения отсчетов сигнала в определённые детерминированные моменты времени. Таким образом от сигнала измерительной информации сохраняется только совокупность его отдельных значений, Промежуток времени Δt между двумя моментами дискретизации называется *шагом, дискретизации* (а обратная величина $1/\Delta t = f_d$ — частота дискретизации). Обычно моменты отсчетов на оси времени выбираются с постоянным шагом дискретизации, т. е. имеет место равномерная дискретизация. Применяется и неравномерная дискретизация.

Основным вопросом, который решается при дискретизации изменяющегося во времени сигнала $x(t)$, является правильный выбор частоты дискретизации. Результатами измерения в цифровых приборах являются значения сигнала $x\{t_i\}$ лишь в моменты дискретизации t_i . Но зачастую важная информация может быть в сигнале и между этими моментами. Очевидно, чем чаще следуют моменты дискретизации, тем легче решить эту задачу. Однако такой подход может привести к неоправданному увеличению частоты дискретизации, что с одной стороны, приведет к избыточности информации, с другой — к ужесточению требований к быстродействию АЦП и соответственно к его усложнению. Задача определения промежуточных значений сигнала $x(t)$ является интерполяционной. Под правильно выбранной частотой дискретизации следует понимать такую частоту, при которой погрешность интерполяции будет не более заданной.

Как показал В. А. Котельников, непрерывная функция $x(t)$ с ограниченным спектром частот от 0 до f_m может быть однозначно определена при шаге дискретизации $1/2 f_m$. Доказательство основано на представлении спектра функции в виде ряда Фурье, результатом обратного преобразования которого является ряд

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i\Delta t) \frac{\sin \omega_m(t - i\Delta t)}{\omega_m(t - i\Delta t)},$$

где $\Delta t = 1/2f_m$ — шаг дискретизации; f_m — верхняя граница спектра частот; $x(i \ t)$ — отсчеты функции в моменты дискретизации $t_i = i\Delta t$. Указанный ряд однозначно задает наибольший шаг дискретизации, при котором теоретически можно точно определить любые промежуточные значения функции $x(t)$ по ее отсчетам $x(i \ t) = x(t_i)$. Уменьшение же шага дискретизации ведет только к избыточности.

Однако практическое использование этого ряда наталкивается на трудности. Все реальные сигналы ограничены во времени. Следовательно, **во-первых**, ряд будет содержать лишь конечное число членов $i=0 \dots 2f_m T_c$, где T_c — длительность сигнала; **во-вторых**, спектр такого сигнала будет бесконечен, в то время как для разложения в ряд спектр должен быть ограничен. Это противоречие можно преодолеть, если выбрать наивысшую частоту спектра f_m так, что в диапазоне частот от 0 до f_m будет сосредоточена основная часть энергии спектра. Энергия «отсекаемой» части спектра будет характеризовать погрешность интерполяции. Дисперсия приведенной погрешности:

$$D = \left[\frac{1}{\pi T_c} \int_{\omega_m}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \right] / (x_{\max} - x_{\min})^2,$$

где числитель — средняя мощность отсекаемой части спектра; T_c — длительность функции $x(t)$; $x_{\max}$ и $x_{\min}$ — экстремальные значения функции. Из этого выражения можно найти m при известных значениях прочих величин. Сложность применения ряда Котельникова в качестве интерполирующего полинома в значительной мере вызвана и сложным видом входящих в него функций, что затрудняет вычислительную процедуру. Это обуславливает использование и других интерполяционных полиномов.

Простейшим видом интерполяции является ступенчатая (рис.2,а). Именно по этому закону изменяются показания ЦИП. Максимальную погрешность интерполяции Δ легко выразить через максимальную скорость изменения функции и шаг дискретизации Δt : $|\Delta|_{\max} = |x'(t)|_{\max} \Delta t$. Задаваясь допустимой погрешностью Δ , можно определить шаг и частоту дискретизации: $\Delta t = \Delta / |x'(t)|_{\max}$. Погрешность можно снизить при помощи кусочно-линейной интерполяции, для которой все точки кривой исходной функции, соответствующие моментам дискретизации, соединяются отрезками прямых (рис.2,б): $|\Delta|_{\max} = |x''(t)|_{\max} \Delta t^2 / 8$, откуда, задаваясь допустимой погрешностью, получаем шаг дискретизации $\Delta t = \sqrt{8 \Delta / |x''(t)|_{\max}}$. Можно использовать полиномы и более высокого порядка, но простота определения промежуточных значений с помощью кусочно-линейной интерполяции обуславливает ее частое использование.

Квантование — это преобразование непрерывной по размеру величины $x(t_i)$ в квантованную $X_{кв}(t_i)$ путем замены ее мгновенных значений ближайшими квантованными значениями (рис.1,а). Иначе говоря, процесс квантования сводится к округлению значений дискретного сигнала до ближайших квантованных значений—уровней квантования. Эти уровни квантования образованы по определенному закону с помощью мер. Разность Δx между двумя уровнями называют *шагом* (ступенью) *квантования*.

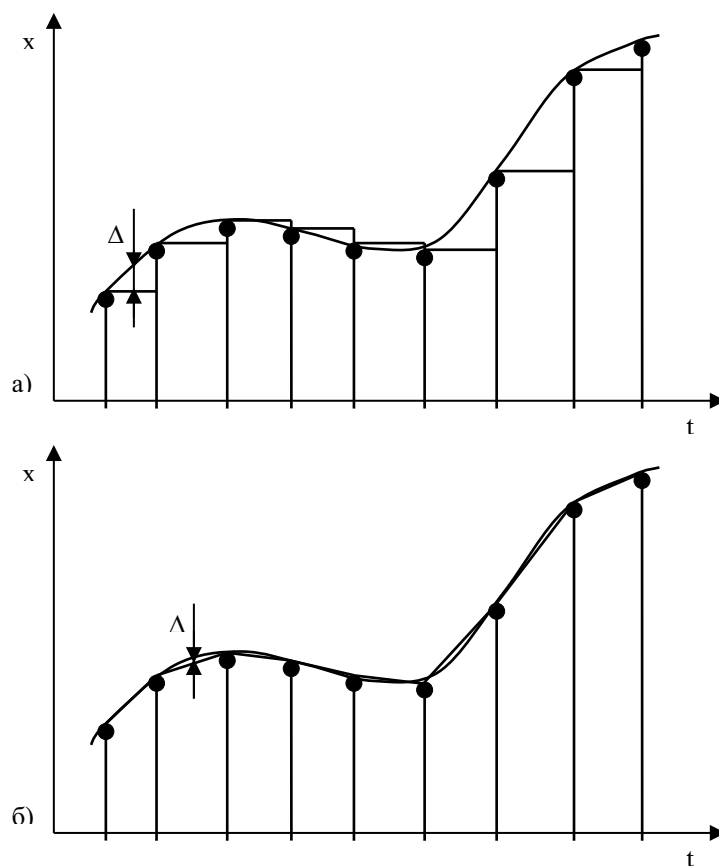


Рис. 2

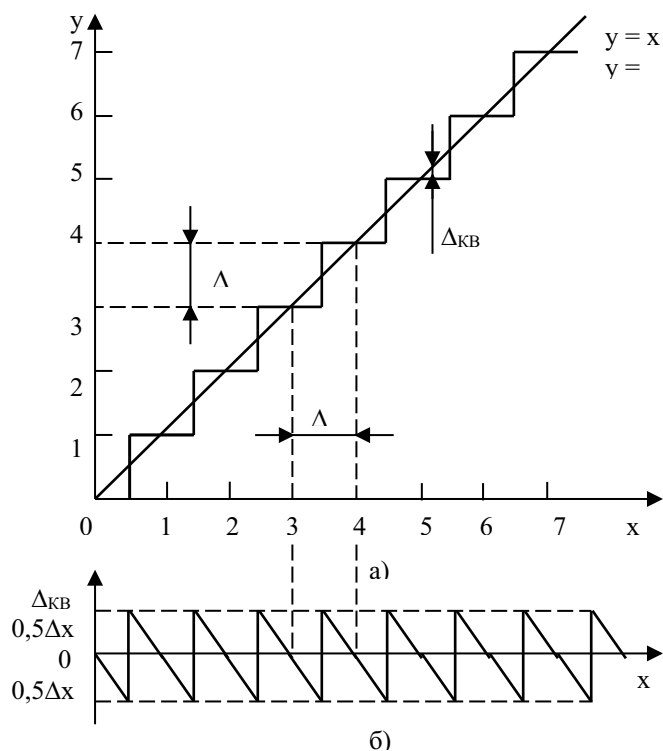


Рис. 3

Шаг квантования может быть как постоянным (равномерное квантование), так и переменным (неравномерное квантование). При равномерном квантовании значение квантованного сигнала $X_{кв}(t_i) = n x$, где $n=0 \dots N$ — номер соответствующего уровня квантования. Процесс квантования, связанный с округлением значения сигнала, всегда ведет к появлению погрешности квантования, носящей методический характер.

На рис. 3,а приведена характеристика преобразования АЦП, представляющая ступенчатую функцию $y = n\Delta x$; где Δx — шаг квантования. Из ее сравнения с идеальной функцией преобразования $y=x$ видно, что погрешность $|\Delta_{\text{кв}}| \leq 0,5\Delta x$, т. е. не превосходит половины шага квантования. Это обеспечивается, во-первых, за счет того, что „нулевой уровень квантования совпадает с нулевым значением $x(t)$, а во-вторых, тем, что первый уровень квантования, с которым сравнивается измеряемая величина, сдвинут относительно нулевого всего на половину шага квантования. В результате, когда x лежит в пределах $0,5\Delta x; \dots 1,5\Delta x$, выходной результат $y=1 \cdot x$ и т. д. Следует отметить, что, указанные условия не всегда выполнимы. Так, при измерении интервалов времени методом счета числа периодов импульсов известной частоты за этот интервал времени погрешность квантования достигает целого шага квантования: $|\Delta_{\text{кв}}| \leq \Delta x$. Для ее уменьшения необходимо синхронизировать начало временного интервала и приход первого импульса, задержав его на половину периода относительно начала этого интервала.

При квантовании сигнала x погрешность $\Delta_{\text{кв}}$, часто называемая шумом квантования, имеет характер ломаной линии (рис.3,б) и ее максимальное абсолютное значение равно $0,5 \cdot x$. Если считать, что шум квантования имеет форму зубцов с амплитудой $0,5 \cdot x$, то средняя мощность за длительность каждого зубца составит $P_{\text{ш.кв}} = x^2/12$. Данное выражение полностью характеризует среднеквадратическое значение погрешности квантования. Так как в АЦП нет однозначной связи между выходными и входными величинами, то, зная выходной код, можно говорить лишь о вероятности того или иного значения аналоговой величины в пределах одного кванта. Однако при большом числе уровней квантования плотность вероятности мгновенных значений может быть принята равномерной, что соответствует равной плотности вероятности погрешности квантования в пределах $\pm 0,5 \cdot x$. В этом случае дисперсия погрешности квантования по уровню $\sigma_{\text{кв}}^2 = (0,5 \cdot x)^2/3 = P_{\text{ш.кв}}$, а среднее квадратическое значение погрешности $\sigma_{\text{кв}} = x/2\sqrt{3}$, т. е. в $\sqrt{3}$ раз меньше максимальной.

Следующим преобразованием измерительного сигнала является кодирование. *Цифровым кодом* называют последовательность цифр или сигналов, подчиняющихся определенному закону, с помощью которой осуществляется условное представление численного значения квантованной величины (рис. 1,г). При этом число импульсов в кодовой группе равно номеру n соответствующего

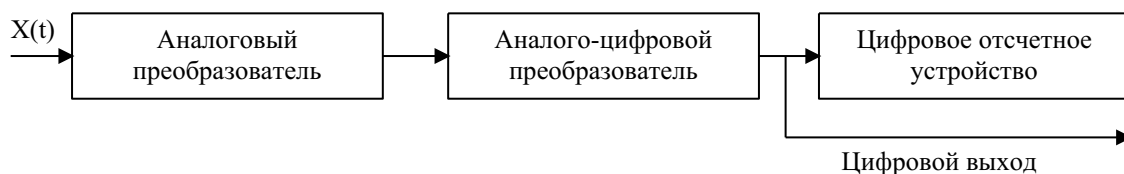


Рис. 4

уровня квантования. Например, моменту дискретизации (отсчету) t_7 соответствует уровень квантования X_6 и в кодовой группе содержится 6 импульсов. Отметим, что при кодировании получаемый цифровой код всегда однозначно соответствует номеру n выбранного уровня квантования и процесс кодирования не вносит дополнительной погрешности.

Обобщенная структурная схема цифрового измерительного прибора представлена на рис. 4. Аналоговый преобразователь преобразует измеряемую величину $x(t)$ в величину, обеспечивающую нормальный режим работы АЦП. Это могут быть масштабные преобразования (усиление, ослабление) или преобразования рода физической величины (например, сопротивления в напряжение). С выхода АЦП цифровой код поступает на цифровое отсчетное устройство и цифровой выход, позволяющий использовать цифровой измерительный прибор в качестве преобразователя, а также подключать цифровые регистрирующие устройства. Метрологические характеристики ЦИП и АЦП во многом определяются методом аналого-цифрового преобразования. Различают следующие преобразования:

- пространственное, при котором измерительный сигнал предварительно

преобразуется в перемещение, угол поворота и т. п. некоторого указателя, положение которого определяется с помощью специальной «кодовой маски» (кодовые диски и линейки, электронно-лучевые трубки и т. п.);

- число-импульсное, при котором измеряемая величина (например, частота, временной интервал) предварительно преобразуется в пропорциональное количество импульсов, число которых подсчитывается цифровым счетчиком;

- время-импульсное, при котором измеряемая величина предварительно преобразуется в интервал времени, значение которого определяется путем заполнения импульсами опорной частоты и подсчета этих импульсов цифровым счетчиком;

- частотно-импульсное, при котором измеряемая величина преобразуется в частоту электрических сигналов, определяемую подсчетом числа этих сигналов за известный интервал времени цифровым счетчиком;

- амплитудное, при котором измеряемая величина преобразуется в амплитуду электрического сигнала, определяемую сравнением с набором опорных электрических величин последовательно или одновременно;

- уравнивающее (компенсационное), при котором измеряемая величина уравнивается величиной, воспроизводимой цифро-аналоговым преобразователем (ЦАП), выполняющим роль меры измеряемой физической величины. ЦАП преобразует цифровой код в непрерывную во времени и квантованную по значению физическую величину (например, напряжение, ток, сопротивление). По алгоритму уравнивания различают развертывающее и следящее уравнивания.

В приборах, основанных на развертывающем уравнивании, шаг дискретизации Δt задается принудительно. При этом он не должен быть меньше времени, необходимого для выполнения аналого-цифрового преобразования, которое определяется как быстродействием отдельных входящих в состав прибора дискретных устройств, так и временем, необходимым для завершения переходных процессов установления сигналов в аналоговых звеньях (усилителя и т. п.). Кроме того, время преобразования существенно зависит от закона изменения уравнивающей величины на выходе ЦАП до наступления момента равновесия. При последовательном переборе всех значений в диапазоне преобразования для получения высокой точности необходимо много времени. Время уравнивания значительно (на несколько порядков) сокращается при использовании метода поразрядного уравнивания.

В приборах, основанных на принципах следящего уравнивания, дискретизация осуществляется не принудительно, а по мере изменения измеряемой величины. Быстродействие этих приборов можно характеризовать максимальным временем разового преобразования при подключении на вход измеряемой величины. Однако такая характеристика не отражает основной особенности использования следящих цифровых приборов — возможности слежения за измеряемыми величинами, изменяющимися с достаточно большими скоростями. Поэтому для оценки быстродействия следящих цифровых приборов указывается максимально допустимая скорость изменения измеряемой величины, при которой еще сохраняется гарантируемая прибором точность измерения.

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ И КОДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ЦИФРОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВАХ

Дискретизированные и квантованные значения сигнала в цифровых измерительных приборах подвергаются кодированию. На рис. 1,г был показан *унитарный код*, при котором число передаваемых импульсов пропорционально квантованному значению измеряемой величины. Поэтому такой код еще называют число-импульсным. Представление числового значения в унитарном коде имеет недостатки, в частности различное число импульсов в кодовых группах. Громоздкость данного кода привела к распространению других систем счисления и кодов. Под системой счисления понимают совокупность цифровых знаков и правил, применяемых для однозначного представления чисел. Системы счисления, коды разделяются на непозиционные и позиционные. К непозиционным кодам относят, например,

унитарный код.

Более компактно и удобно выражаются числа в позиционных системах, к которым относятся десятичная, двоичная, двоично-десятичная и др. В общем случае в позиционной системе любое число N можно представить в виде

$$N_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \dots + a_{-m} b^{-m} = \sum_{i=-m}^n a_i b^i,$$

где b — основание системы счисления, равное числу знаков в данной системе (например, для десятичной $b=10$, для двоичной $b=2$), $i = -m \dots n$ — номер разряда (позиции), b^i — весовой коэффициент i -го разряда, $a=0 \dots (b-1)$ — разрядный, коэффициент.

При записи числа N в позиционной системе используются только разрядные коэффициенты, а весовые не указываются, так как определяются порядковой позицией разрядного коэффициента. Например, число 920,1 в десятичной системе содержит 4 разрядных коэффициента с весовыми коэффициентами 10^2 , 10^1 , 10^0 и 10^{-1} :

$920,1 = 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1}$. Это делает представление информации в позиционном коде наиболее компактным. Заметим, что запись числа 920 с помощью унитарного кода потребовала бы 920 знаков.

Десятичная система используется в ЦИП для отображения результата измерения. Однако все промежуточные операции в цифровом приборе предпочитают проводить в двоичной системе счисления, поскольку электронные устройства с двумя устойчивыми состояниями отличаются простотой и высокой помехоустойчивостью. В двоичной системе для представления цифр разряда используются два символа: 0 и 1. Перевод числа, записанного в двоичной системе, в привычную для нас десятичную требует проведения вычислительной процедуры: $11011,01 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 27,25$.

Из приведенного примера видно, что в двоичной системе счисления весовой коэффициент старшего разряда превышает весовой коэффициент предыдущего (младшего) разряда в 2 раза, т. е. они образуют ряд 1, 2, 4, 8, 16, 32 и т. д.

Однако число, записанное в двоичной системе, неудобно для визуального отсчета, а перевод его в десятичное число требует затрат времени и вызывает определенные технические сложности. Поэтому в цифровых измерительных приборах широко пользуются *двоично-десятичным кодом*, который образуется путем представления каждой цифры десятичного числа соответствующим двоичным числом. Например, число 27 преобразуется следующим образом. Цифра 2 записывается как 0010, а цифра 7 — как 0111, т. е. $27_{10} = 00100111_{2/10}$. Здесь индекс 10 свидетельствует о записи в десятичной системе, а 2/10 — о записи в двоично-десятичной. Представление числа в двоично-десятичной системе менее экономно, чем в двоичной. Так, для числа 27 в двоично-десятичной системе надо иметь 8 символов, а в двоичной только пять (11011). Однако простота его преобразования в десятичный код компенсирует этот недостаток.

В двоично-десятичном коде представление каждой десятичной цифры требует четыре символа.

Меньше нельзя, так как с помощью трех символов можно получить лишь 8 комбинаций, а число возможных цифр в каждом разряде десятичного числа равно 10 ($a_{10} = 0 \dots 9$). Вместе с тем четыре символа позволяют построить 16 комбинаций, т. е. шесть комбинаций являются лишними и их можно удалить. Вполне естественным кажется удаление комбинаций, выражающих цифры более 9. Код I, содержащий 10 начальных комбинаций (табл. 1), называют кодом 8421. Он является наиболее распространенным, но не единственным возможным. Для каждой из десяти цифр допустимо совершенно произвольное закрепление кодовых комбинаций, поэтому число принципиально возможных кодов довольно велико. Код II (весовые коэффициенты 2421) имеет разрыв между цифрами 4 и 5. В этом месте проходит ось симметрии. Каждая кодовая комбинация над осью отличается от симметричной комбинации под осью инверсными значениями разрядных коэффициентов, например десятичное число 3 воспроизводится кодовой комбинацией 0110; симметрично расположенное относительно оси число 7 — комбинацией 1001, которая может быть получена

из 0110 путем замены нулей единицами и единицы нулями. Это свойство полезно при реализации арифметических операций. Находят применение и другие виды кодов.

Т а б л и ц а 1

a_{10}	I(8421)	II (2421)	a_{10}	I(8421)	II(2421)
0	0000	0000	5	010111	1011
1	0001	0001	6	0110	1100
2	0010	0010	7	0111	1101
3	0011	0011	8	1000	1110
4	0100	0100	9	1001	1111

Для многих АЦП выходным является унитарный код. Для его преобразования в двоичный код используется обычный двоичный счетчик, а для преобразования в двоично-десятичный код — двоично-десятичный счетчик. В последнем каждые четыре триггера охвачены такими обратными связями, при которых осуществляется счет не до $2^4=16$, а до 10, при этом четыре последовательно включенных триггера образуют счетную декаду.

В зависимости от способа передачи коды делятся на последовательные, параллельные и последовательно-параллельные. При последовательном коде все его разряды передаются последовательно во времени по одной цепи. При параллельном коде все разряды передаются одновременно, каждый по своей цепи. Это требует больше цепей, но соответственно сокращает время на передачу. При большой разрядности кода целесообразно компромиссное решение — последовательно-параллельная передача, при которой все разряды кода делятся на группы (например, часто в группу входит 8 бит — байт). Биты внутри группы передаются одновременно по параллельным цепям, а группы последовательно во времени.

При передаче цифровых сигналов на значительные расстояния код может искажаться под действием импульсной помехи. Для обнаружения этих ошибок можно использовать различные коды. Простейшим является применение двоичных кодов с проверкой на четность. Для этого в код вводится дополнительный разряд, которому присваивается значение 1, если сумма единиц всех остальных разрядов нечетна, и значение 0, если сумма четна. Тогда передаваемая комбинация всегда содержит четное число единиц. На приемном конце проверяется четность числа единиц в принятом коде. Отсутствие четности свидетельствует о возникшей ошибке (однократной или любой нечетной кратности).

ЦИФРОВЫЕ ИНДИКАТОРЫ И ЦИФРОВОЕ ОТСЧЕТНОЕ УСТРОЙСТВО

В настоящее время известно большое число цифровых индикаторов: газоразрядных, электролюминесцентных, светодиодных, на жидких кристаллах и др. В газоразрядных индикаторах (типа ИН) анод выполнен в виде тонкой и редкой металлической сетки, а катод в виде цифры из тонкой проволоочки (рис. 5). Катоды расположены стопкой, один под другим. Объем внутри баллона заполнен инертным газом, например неоном. Если между катодом и анодом действует достаточное напряжение, возникает тлеющий разряд, форма которого повторяет конфигурацию катода. Так как индикатор показывает цифры от 0 до 9, на цоколе необходимо иметь десять сигнальных выводов плюс один вывод для подачи напряжения на общий анод. Одновременно должна высвечиваться только одна цифра, поэтому при индикации управляющее напряжение действует только между общим выводом и одним из сигнальных. Главным недостатком газоразрядных цифровых ламп является необходимость подачи достаточно высокого управляющего напряжения.

Современная электроника создала элементы индикации, характеристики которых

совместимы с выходными характеристиками низковольтных маломощных транзисторов и интегральных микросхем. К ним относятся светодиоды и элементы на жидких кристаллах. Эти типы индикаторов имеют семи- или десятисегментную *рис.6* конструкцию. На *рис.6* показаны семисегментные индикаторы.

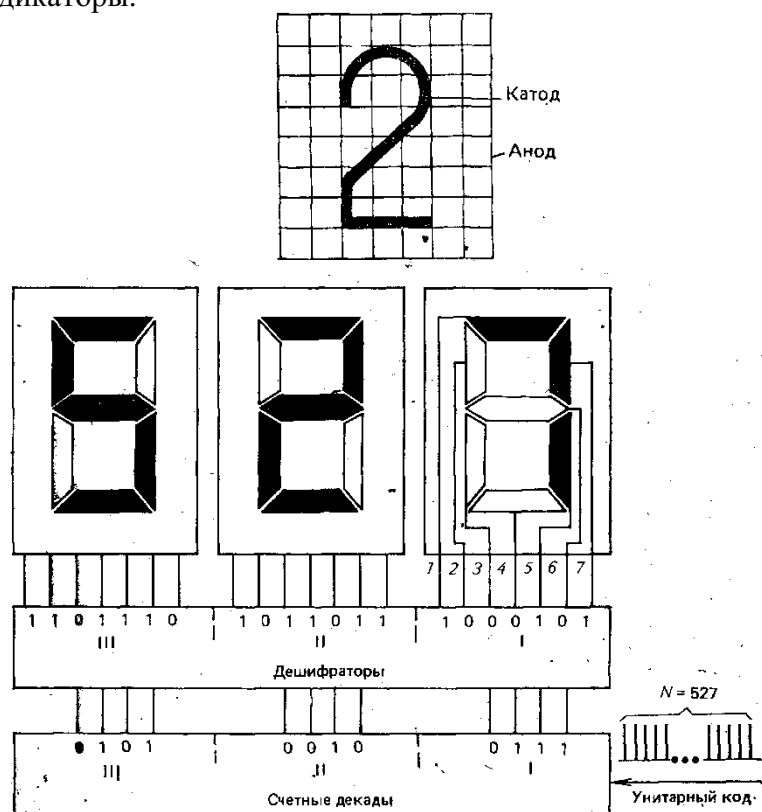


Рис. 6

Все сегменты размещены на общей подложке и имеют отдельные выводы. Как видно из *рис. 6*, для получения цифры 7 необходимо сигналы (1) подать на входы 1, 5 и 7. На остальных входах должен быть 0. Низкие управляющие напряжения, малая потребляемая мощность и долговечность привели к широкому распространению этих приборов.

На *рис. 6* показан пример построения трехразрядного цифрового отсчетного устройства на семисегментных цифровых индикаторах. Пусть входным сигналом является унитарный код. Этот код с помощью двоично-десятичного счетчика преобразуется в параллельный двоично-десятичный код. Для этого счетчик содержит три декады, каждая из которых состоит из четырех триггеров, работающих в счетном режиме и соединенных последовательно. Применение обратных связей позволяет обеспечить последовательный счет десяти импульсов, поступающих на вход декады. После десятого импульса все триггеры возвращаются в исходное состояние (0), при этом на выходе счетной декады появляется сигнал 1, который поступает на следующую декаду. Таким образом первая декада единицы, вторая — десятки, третья — сотни. На сигнальных выходах четырех триггеров имеются сигналы, состоящие из 0 и 1 и отражающие число импульсов, подсчитанных декадой. Подбирая обратные связи, можно получить отображение числа поступивших на вход импульсов в любом из кодов, представленных в табл.1. На *рис. 6* показан результат счета $N=527$ импульсов в коде 8421: 0101 0010 0111. Полученный код поступает на дешифраторы, которые преобразуют его в параллельный семиразрядный код, управляющий семисегментными индикаторами. При использовании других индикаторов, например типа ИН, необходимы другие дешифраторы, обеспечивающие получение параллельного десятичного кода.

СТРУКТУРНЫЕ МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Снижение погрешностей является наиболее важной задачей совершенствования СИ. Существующие способы ее решения можно разделить на технологические, конструктивные и структурные. Методы борьбы с погрешностями существенно зависят от характера этих погрешностей. Погрешность СИ может быть выражена через номинальную $y_n = F_n(x)$ и реальную $y = F_p(x)$ функции преобразования (рис.7): $F_p(x) = F_n(x) + \Delta$. Параллельное смещение характеристики преобразования приводит к появлению аддитивной составляющей погрешности ($\Delta_{\text{адд}} = a$), изменение ее наклона — к мультипликативной ($\Delta_{\text{мульт}} = bx$), зависимость наклона от значения измеряемой величины — к нелинейной составляющей ($\Delta_{\text{нел}} = y - y_2$). Все эти составляющие могут случайным образом меняться во времени.

Технологический способ заключается в совершенствовании изготовления существующих и разработке новых элементов ИУ, имеющих меньший разброс параметров и повышенную стабильность их. Однако его возможности ограничены и, кроме того, усложнение технологии изготовления и отбраковки элементов приводит к их удорожанию.

Конструктивные способы определяют такое построение схем, узлов и самих ИУ, при котором погрешности минимальны. Их отличительной чертой является отсутствие структурной избыточности, т. е. СИ состоит только из таких измерительных преобразователей, без которых процесс измерения невозможен. К наиболее общим из конструктивных методов следует отнести применение отрицательной обратной связи (ООС) и уравнивающего (компенсационного) преобразования, при котором ООС охватывает все ИУ. Как известно, применение ООС позволяет на несколько порядков в $K > 1$ раз, где K и K_i — коэффициенты передачи соответственно прямой цепи и цепи ООС) уменьшить составляющие погрешности ИУ: мультипликативную путем уменьшения неустойчивости коэффициента преобразования, нелинейную путем снижения нелинейности характеристики преобразования. Введение ООС целесообразно только, когда погрешность коэффициента передачи цепи ООС существенно ниже погрешности коэффициента передачи цепи прямого преобразования. Необходимо также учитывать, что ООС снижает чувствительность ИУ (в K раз) и не позволяет уменьшить аддитивную составляющую погрешности.

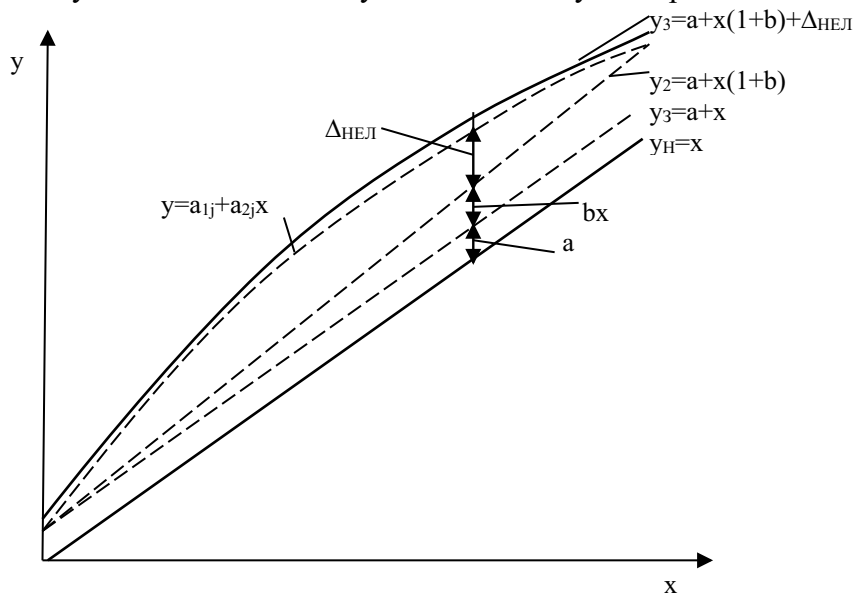


Рис. 7

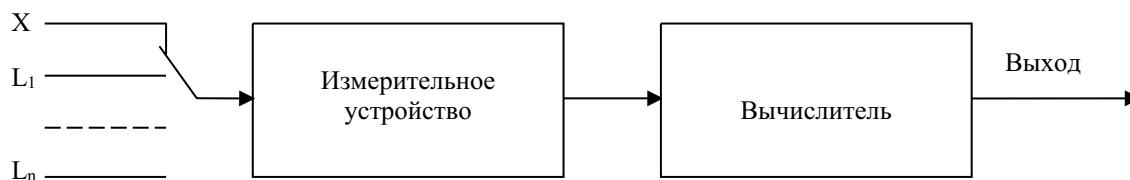


Рис.8

Структурные методы коррекции погрешностей основаны на введении структурной и (или) временной избыточности, т. е. на использовании в СИ дополнительных устройств и проведения наряду с измерением искомой величины дополнительных измерений^ обработка результатов которых позволяет уменьшить погрешность измерения искомой величины. Структурные методы позволяют^ снизить систематическую погрешность и ту составляющую случайной погрешности, которая во время всех дополнительных измерений мало изменяется, т. е. корректируют относительно медленно меняющуюся составляющую случайной погрешности. Например, при автоматизации процесса измерения, когда время измерения обычно составляет доли или единицы секунд, можно осуществить коррекцию температурной погрешности, случайные изменения которой происходят достаточно медленно. Заметим, что быстро изменяющаяся составляющая случайной погрешности такими методами не уменьшается. Для этого можно использовать только многократные наблюдения и их статистическую обработку.

Внедрение в цифровые СИ вычислительной техники открывает широкие, возможности использования структурных методов. Последние делятся на методы образцовых мер, методы обратных преобразований и тестовые методы.

Метод образцовых мер. Для рассмотрения метода образцовых мер представим реальную характеристику преобразования в виде полинома $y = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$, где a_i — коэффициенты, постоянные на протяжении времени измерения. Идея метода образцовых мер заключается в последовательном измерении величины x и известных величин $L_1, L_2, \dots, L_n$, воспроизводимых мерами (рис.8). В результате одного цикла измерений можно составить систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{x} + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{x}^{n-1}, \\ \mathbf{y}_0 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{L}_1 + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{L}_1^{n-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{y}_n &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{L}_m + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{L}_n^{n-1}, \end{aligned}$$

где неизвестными являются x и a_i . Система уравнений решается вычислительным устройством относительно измеряемой величины x . Очевидно, что при правильном выборе числа мер в системе получается необходимое число уравнений, позволяющих при решении исключить неизвестные коэффициенты a_i .

Если погрешность СИ содержит только одну аддитивную составляющую (характеристика преобразований y_1 на рис.7), то достаточно произвести одно вспомогательное измерение с мерой $L_I=0$. Система имеет вид:

$$\begin{aligned} y_0 &= a_1 + x, \\ y_1 &= a_1 + L_1, \end{aligned}$$

откуда $x = y_0 - y_1 + L_1 \Big|_{L_1 = 0} = y_0 - y_1$.

Если погрешность СИ содержит и аддитивную, и мультипликативную составляющие (характеристика преобразования y_2 на рис.7), то необходимо произвести два вспомогательных измерения с мерой $L_1 = 0$ и с мерой L_2 , (ее значение обычно берут близким к верхнему пределу диапазона измерения). Решив систему из трех уравнений с тремя неизвестными a_1 , a_2 и x ,

$$\text{получим } x = L_1 + (L_2 - L_1) \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1} \Big|_{L_1 = 0} = L_2 \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1}$$

Этот алгоритм очень прост и часто используется на практике для автоматической коррекции аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности.

Если имеет место и нелинейная составляющая погрешности, то для ее коррекции число мер существенно возрастает. Одновременно возрастает порядок аппроксимирующего полинома, что усложняет вычисления. Для преодоления этой трудности обычно прибегают к кусочно-линейной аппроксимации характеристики преобразования (y з на рис.7): $y = a_{1j} + a_{2j}x$, где $j=1, 2, \dots, m$ — номер участка аппроксимации. Процесс измерения и вычисление осуществляют так же, как и в предыдущем случае, только образцовые меры L_{1j} и L_{2j} , выбирают не произвольно, а в зависимости от результата первого измерения x . Результат измерения позволяет определить номер j участка аппроксимации и выбрать меры в начале и конце этого участка. При этом требуется $m+1$ образцовых мер.

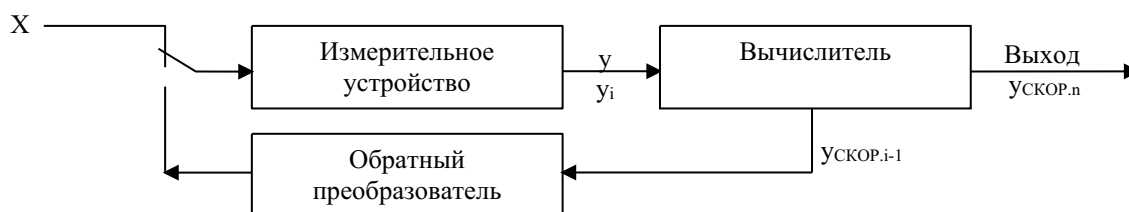


Рис. 9

Таким образом рассмотренный метод позволяет осуществлять коррекцию всех составляющих погрешности, но уменьшение нелинейной составляющей может требовать значительного числа мер. Обычно этот метод используется для измерения величин, для которых легко создать образцовые меры.

Итерационные методы. Эти методы относятся к методам обратных преобразований, так как в них используется высокоточный ЦАП, с помощью которого выходной цифровой сигнал преобразуется в физическую величину, однородную с измеряемой, и подается на вход (рис.9). Эти методы называются итерационными, так как в них осуществляется последовательное приближение результатов измерения к истинному значению величины. Существует много разновидностей итерационных методов. Рассмотрим одну из распространенных.

В соответствии с приведенным алгоритмом (рис.10) сначала производится преобразование измеряемой величины x . Полученное значение y запоминается, а ко входу измерительного устройства (ИУ) подключается выход обратного преобразователя. Затем при первом шаге итерации ($i = 1$) величина $у_{скоро} = y$ поступает на обратный преобразователь (F^{-1}_n — функция его передачи, обратная функции F_n). Полученная величина $x_{i=1}$ преобразуется ИУ в $y_{i=1}$ и вычисляется $у_{скор}$ — первый скорректированный результат, который запоминается. При втором шаге итерации он поступает на обратный преобразователь и процесс повторяется. Общий алгоритм вычисления i -го скорректированного результата:

$у_{скор\ i} = у_{скор\ i-1} - y_i + y$ — из предыдущего скорректированного результата вычесть результат последнего преобразования и прибавить результат первого преобразования.

Рассмотрим процесс коррекции погрешности ИУ при наличии аддитивной и мультипликативной составляющих, пренебрегая погрешностью высокоточного ЦАП. В соответствии с рис. 7 при подаче на вход ИУ измеряемой величины x получим $y = Fp(x) = a + x(1+b)$, в то время как при отсутствии погрешности имели бы $y_n = F_n(x) = x$. Соответственно погрешность составит $y - y_n = a + bx$. При первом шаге итерации: $X_1 = F^{-1}(у_{скоро}) = F^{-1}_n(y) = y$; $y_1 = Fp(X_1) = a + X_1(1+b)$; Погрешность первого шага итерации составит $\Delta_{скоро1} = Ускоро1 - y_n = -(a+xb)b$, т. е. при $b < 1$ уменьшилась по сравнению с погрешностью Δ в $1/b$ раз.

Погрешность результата второго шага итерации составит $\Delta_{скоро2} = Ускоро2 - y_n = -(a+xb)b^2$, т. е. уменьшилась по сравнению с начальной в $1/b^2$ раз. Если продолжить итерации, то можно убедиться, что для n шагов итерации погрешность уменьшится в $1/b^n$ раз. Если, например, $b = 0,1$, то для трех шагов итерации получим уменьшение погрешности в 10^3 раз, т. е. процесс итерации быстро сходится.

Итерационный метод позволяет корректировать и нелинейную составляющую

погрешности.

При применении итерационных методов результирующая погрешность практически определяется погрешностью обратного преобразователя. Это позволяет использовать в прямой цепи весьма грубые преобразователи. Наличие образцового обратного преобразователя делает этот метод похожим на метод уравнивающего преобразования. Однако в последнем, как уже отмечалось, не осуществляется коррекция аддитивной составляющей погрешности прямой ветви.

Тестовый метод. Этот метод основан на дополнительных измерениях с использованием специальных измерительных сигналов — тестов, аддитивных и мультипликативных. Аддитивный тест формируется в виде суммы $A_i(x) = x + Qi$, где Qi — постоянная составляющая, не зависящая от x , мультипликативный формируется в виде произведения $A_i(x) = k_i X$, где k_i — независимый от x коэффициент преобразования (например, реализуемый путем усиления величины x в k раз). Иначе говоря, указанные тесты получаются в результате преобразований самой измеряемой величины x . Важным преимуществом тестового метода является возможность уменьшения числа требуемых тестов при кусочно-полиномиальной аппроксимации характеристики преобразования, так как тесты функционально связаны с измеряемой величиной и переносятся вместе с ней на нужный участок аппроксимации. Наиболее просто это поясняется на примере кусочно-линейной аппроксимации, получившей наибольшее распространение. Характеристика преобразования на j -м участке описывается уравнением $y = a_{1j} + a_{2j}X$ ($j = 1, 2, \dots, m$), где m — число участков (рис.7). При линейной аппроксимации необходимо иметь два теста $A_1(x)$ и $A_2(x)$, аддитивный и мультипликативный, дополнительные преобразования которых позволяет определить

неизвестные параметры a_{1j} и a_{2j} . Решая систему уравнений
$$\begin{cases} y_0 = a_{1j} + a_{2j}x, \\ y_1 = a_{1j} + a_{2j}A_1(x), \\ y_2 = a_{1j} + a_{2j}A_2(x); \end{cases}$$
 получим

алгоритм тестового метода при кусочно-линейной аппроксимации:

$$y_0 = \frac{y_1 A_2(x) - y_2 A_1(x)}{A_2(x) - A_1(x)} + x \frac{y_2 - y_1}{A_2(x) - A_1(x)}.$$

На рис. 11 приведена структурная схема измерительного устройства, работающего по данному алгоритму с одним аддитивным и одним мультипликативным тестами. Процесс измерения состоит из трех тактов. В первом ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а K_3 замкнут и на вход измерительного устройства поступает измеряемая величина x . На втором также замыкается ключ K_1 и на вход поступает аддитивный тест $x +$. На третьем такте K_2 замыкается, а остальные размыкаются, подключая на вход измерительного устройства мультипликативный тест с величиной kx . Результаты y_0, y_1, y_2 преобразований поступают с выхода измерительного устройства в вычислительное, реализующее алгоритм, который может быть получен из указанного постановкой $A_1(x) = x +$ и $A_2(x) = kx$:

$$x = \frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} \cdot \frac{\Theta}{k - 1}.$$

Отметим, что данный метод является универсальным. Как и метод образцовых мер, он позволяет уменьшить аддитивные и мультипликативные составляющие, а также составляющую погрешности, связанную с нелинейностью характеристики преобразования. Его достоинством по сравнению с остальными структурными методами является отсутствие требования большого числа образцовых мер, а также отключения измеряемой величины от хода прибора, что важно при измерении некоторых неэлектрических величин.

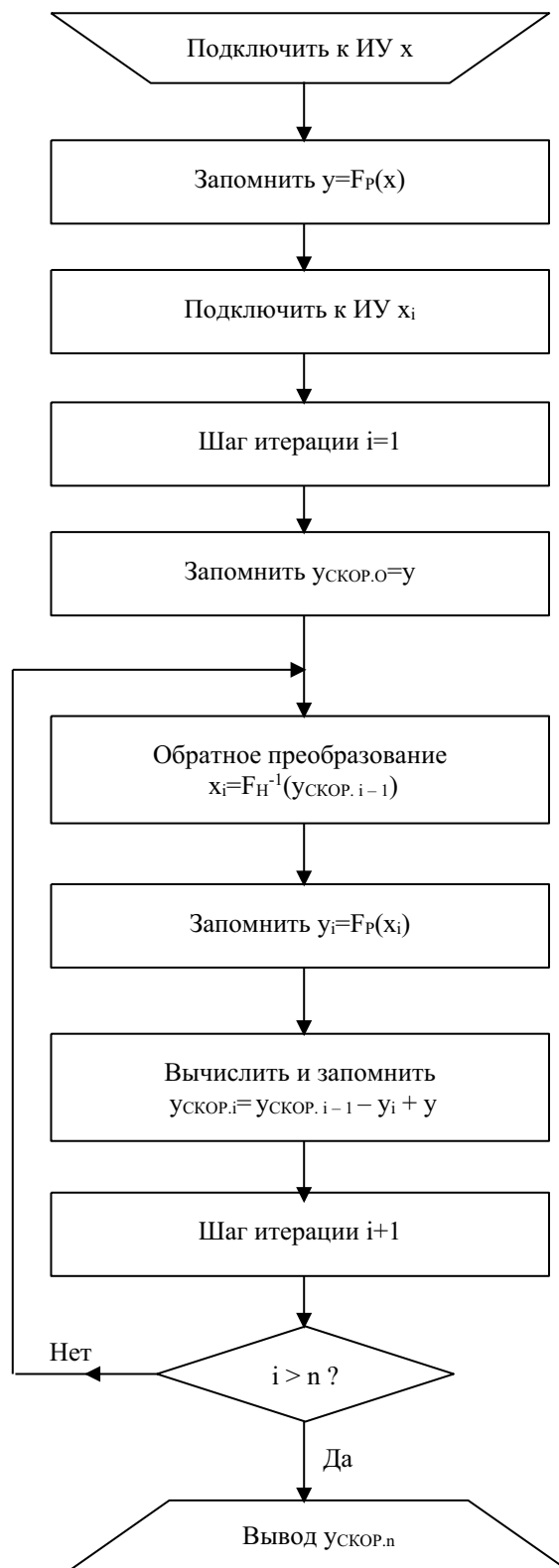


Рис. 10

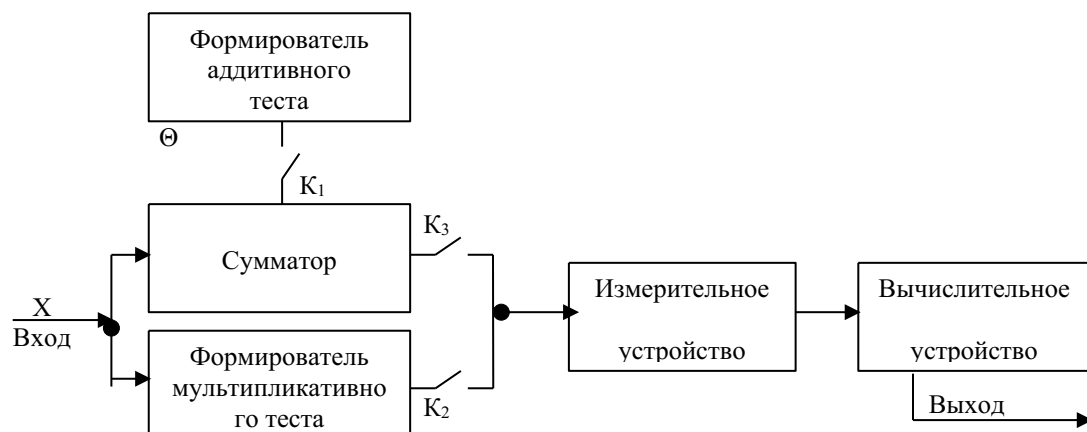


Рис. 11

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме:

Основная: 1,2

Дополнительная: 1-5

Методическая: 1-3

Интернет-ресурсы: 1

Программное обеспечение: 1-3

Лабораторная работа №7-9.

Тема: Кодирование непрерывных сообщений

Цель занятия:

1. Изучение методов модуляции, спектров сигналов при различных видах модуляции

Формируемые компетенции: ПК-1; ПК-5

Теоретическая часть:

Учебно-материальное обеспечение:

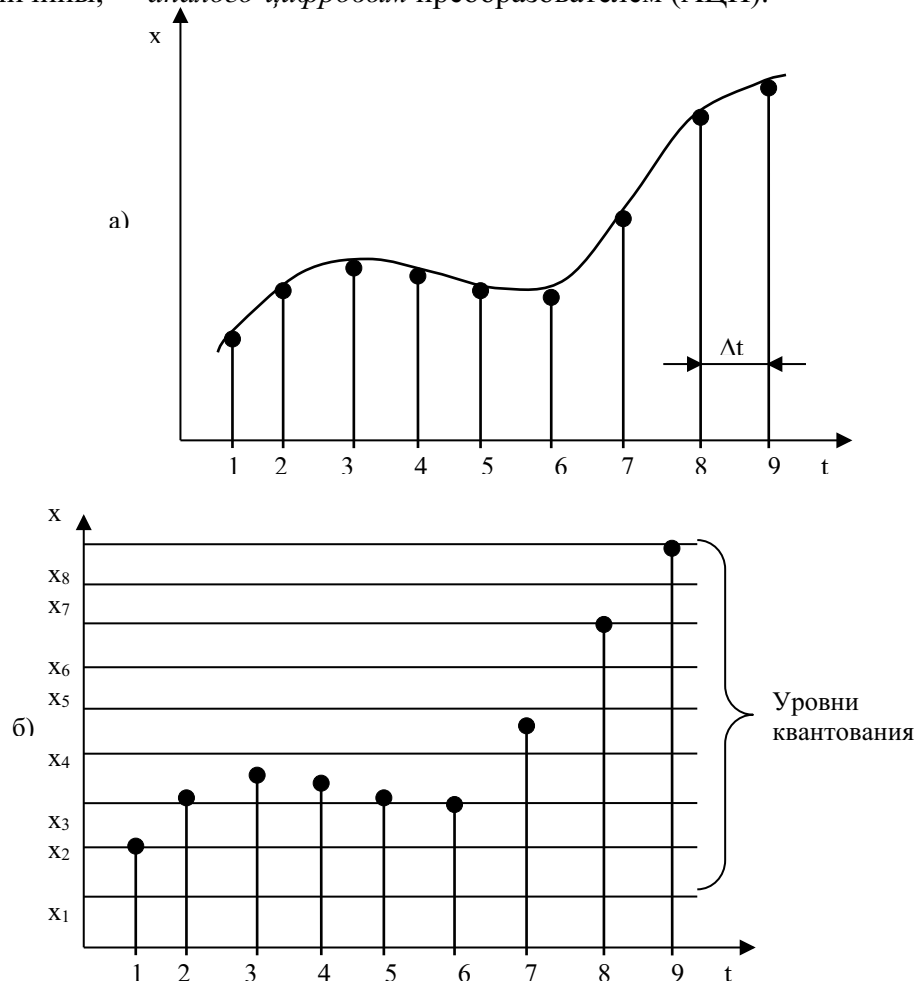
Персональные

компьютеры, измерительные приборы

Учебные вопросы лекции:

1. Изучение теоретических сведений
2. Ответы на вопросы для самопроверки
3. Выполнение практической части

Цифровой измерительный прибор (ЦИП) - автоматически вырабатывает дискретные сигналы измерительной информации, показания которого представлены в цифровой форме, т. е. преобразует непрерывную во времени и по размеру измеряемую величину в цифровой код. Этот процесс, включающий в себя дискретизацию, квантование и кодирование непрерывной входной величины, называют аналого-цифровым преобразованием, а измерительный преобразователь, автоматически осуществляющий этот процесс и вырабатывающий дискретные сигналы измерительной информации о числовом значении входной величины, — *аналого-цифровым преобразователем (АЦП)*.



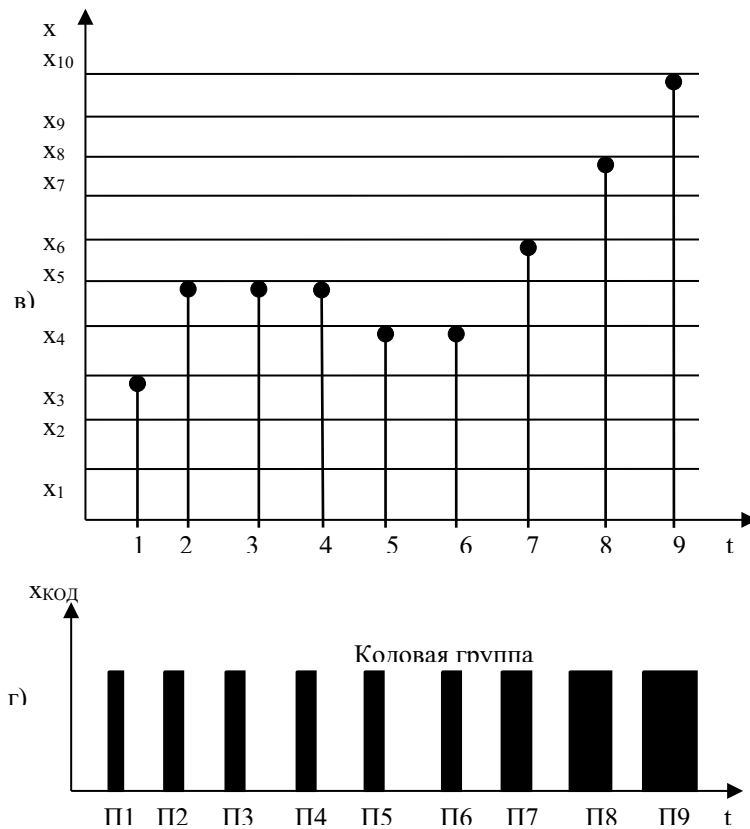


Рис. 1

Дискретизацией называется процесс-преобразования непрерывного во времени сигнала измерительной информации $x(t)$ в дискретный $x(t)$, равный мгновенным значениям исходного сигнала только в определенные моменты времени t — моменты дискретизации (рис.1). Дискретизация может выполняться путем выделения отсчетов сигнала в определённые детерминированные моменты времени. Таким образом от сигнала измерительной информации сохраняется только совокупность его отдельных значений, Промежуток времени Δt между двумя моментами дискретизации называется *шагом, дискретизации* (а обратная величина $1/\Delta t = f_d$ — частота дискретизации). Обычно моменты отсчетов на оси времени выбираются с постоянным шагом дискретизации, т. е. имеет место равномерная дискретизация. Применяется и неравномерная дискретизация.

Основным вопросом, который решается при дискретизации изменяющегося во времени сигнала $x(t)$, является правильный выбор частоты дискретизации. Результатами измерения в цифровых приборах являются значения сигнала $x\{t_i\}$ лишь в моменты дискретизации t_i . Но зачастую важная информация может быть в сигнале и между этими моментами. Очевидно, чем чаще следуют моменты дискретизации, тем легче решить эту задачу. Однако такой подход может привести к неоправданному увеличению частоты дискретизации, что с одной стороны, приведет к избыточности информации, с другой — к ужесточению требований к быстродействию АЦП и соответственно к его усложнению. Задача определения промежуточных значений сигнала $x(t)$ является интерполяционной. Под правильно выбранной частотой дискретизации следует понимать такую частоту, при которой погрешность интерполяции будет не более заданной.

Как показал В. А. Котельников, непрерывная функция $x(t)$ с ограниченным спектром частот от 0 до f_m может быть однозначно определена при шаге дискретизации $1/2 f_m$. Доказательство основано на представлении спектра функции в виде ряда Фурье, результатом обратного преобразования которого является ряд

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i\Delta t) \frac{\sin \omega_m(t - i\Delta t)}{\omega_m(t - i\Delta t)},$$

где $\Delta t = 1/2f_m$ — шаг дискретизации; f_m — верхняя граница спектра частот; $x(i \ t)$ — отсчеты функции в моменты дискретизации $t_i = i\Delta t$. Указанный ряд однозначно задает наибольший шаг дискретизации, при котором теоретически можно точно определить любые промежуточные значения функции $x(t)$ по ее отсчетам $x(i \ t) = x(t_i)$. Уменьшение же шага дискретизации ведет только к избыточности.

Однако практическое использование этого ряда наталкивается на трудности. Все реальные сигналы ограничены во времени. Следовательно, **во-первых**, ряд будет содержать лишь конечное число членов $i=0 \dots 2f_m T_c$, где T_c — длительность сигнала; **во-вторых**, спектр такого сигнала будет бесконечен, в то время как для разложения в ряд спектр должен быть ограничен. Это противоречие можно преодолеть, если выбрать наивысшую частоту спектра f_m так, что в диапазоне частот от 0 до f_m будет сосредоточена основная часть энергии спектра. Энергия «отсекаемой» части спектра будет характеризовать погрешность интерполяции. Дисперсия приведенной погрешности:

$$D = \left[\frac{1}{\pi T_c} \int_{\omega_m}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \right] / (x_{\max} - x_{\min})^2,$$

где числитель — средняя мощность отсекаемой части спектра; T_c — длительность функции $x(t)$; $x_{\max}$ и $x_{\min}$ — экстремальные значения функции. Из этого выражения можно найти m при известных значениях прочих величин. Сложность применения ряда Котельникова в качестве интерполирующего полинома в значительной мере вызвана и сложным видом входящих в него функций, что затрудняет вычислительную процедуру. Это обуславливает использование и других интерполяционных полиномов.

Простейшим видом интерполяции является ступенчатая (рис.2,а). Именно по этому закону изменяются показания ЦИП. Максимальную погрешность интерполяции Δ легко выразить через максимальную скорость изменения функции и шаг дискретизации Δt : $|\Delta|_{\max} = |x'(t)|_{\max} \Delta t$. Задаваясь допустимой погрешностью Δ , можно определить шаг и частоту дискретизации: $\Delta t = \Delta / |x'(t)|_{\max}$. Погрешность можно снизить при помощи кусочно-линейной интерполяции, для которой все точки кривой исходной функции, соответствующие моментам дискретизации, соединяются отрезками прямых (рис.2,б): $|\Delta|_{\max} = |x''(t)|_{\max} \Delta t^2 / 8$, откуда, задаваясь допустимой погрешностью, получаем шаг дискретизации $\Delta t = \sqrt{8 \Delta / |x''(t)|_{\max}}$. Можно использовать полиномы и более высокого порядка, но простота определения промежуточных значений с помощью кусочно-линейной интерполяции обуславливает ее частое использование.

Квантование — это преобразование непрерывной по размеру величины $x(t_i)$ в квантованную $X_{кв}(t_i)$ путем замены ее мгновенных значений ближайшими квантованными значениями (рис.1,а). Иначе говоря, процесс квантования сводится к округлению значений дискретного сигнала до ближайших квантованных значений—уровней квантования. Эти уровни квантования образованы по определенному закону с помощью мер. Разность Δx между двумя уровнями называют *шагом* (ступенью) *квантования*.

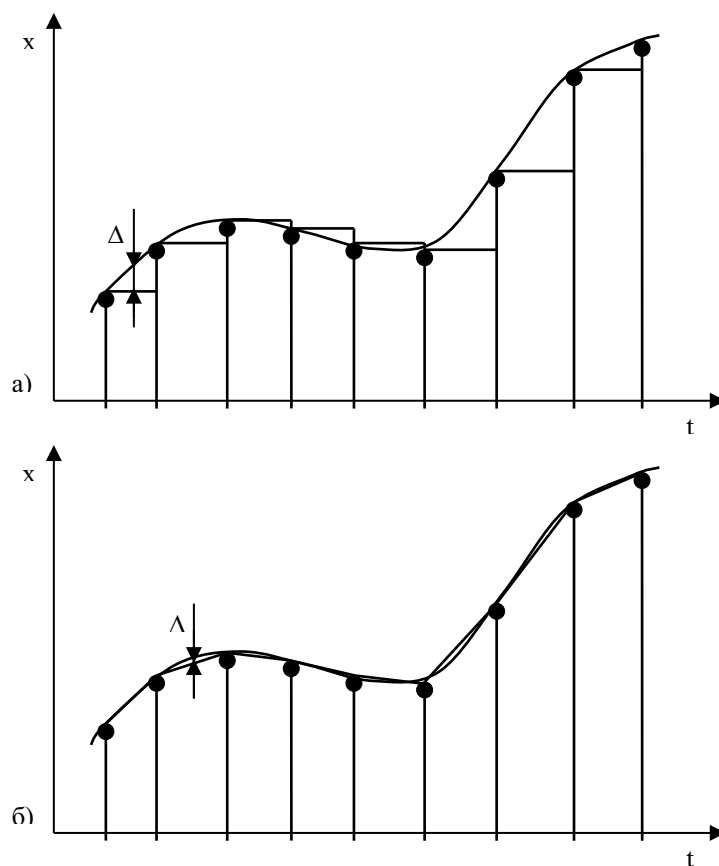


Рис. 2

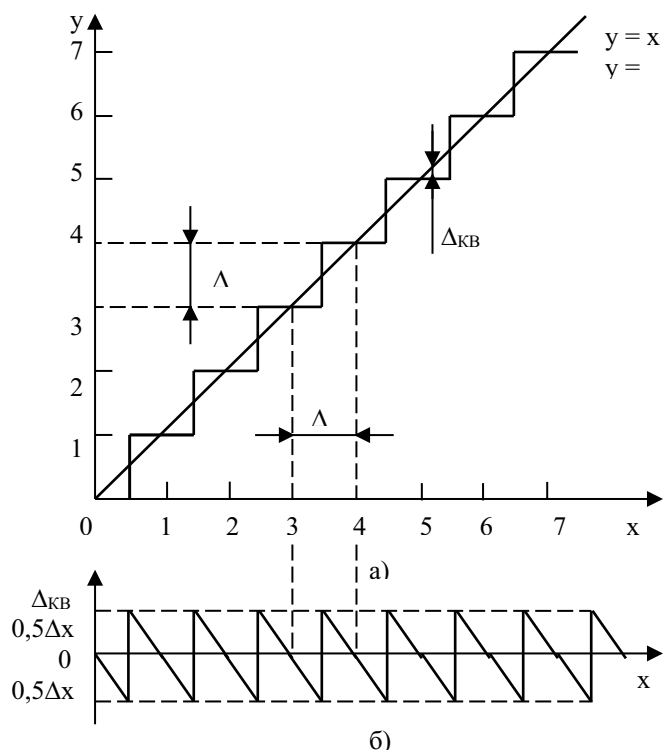


Рис. 3

Шаг квантования может быть как постоянным (равномерное квантование), так и переменным (неравномерное квантование). При равномерном квантовании значение квантованного сигнала $X_{кв}(t_i) = n x$, где $n=0 \dots N$ — номер соответствующего уровня квантования. Процесс квантования, связанный с округлением значения сигнала, всегда ведет к появлению погрешности квантования, носящей методический характер.

На рис. 3,а приведена характеристика преобразования АЦП, представляющая ступенчатую функцию $y = n\Delta x$; где Δx — шаг квантования. Из ее сравнения с идеальной функцией преобразования $y=x$ видно, что погрешность $|\Delta_{\text{кв}}| \leq 0,5\Delta x$, т. е. не превосходит половины шага квантования. Это обеспечивается, во-первых, за счет того, что „нулевой уровень квантования совпадает с нулевым значением $x(t)$, а во-вторых, тем, что первый уровень квантования, с которым сравнивается измеряемая величина, сдвинут относительно нулевого всего на половину шага квантования. В результате, когда x лежит в пределах $0,5\Delta x; \dots 1,5\Delta x$, выходной результат $y=1 \cdot x$ и т. д. Следует отметить, что, указанные условия не всегда выполнимы. Так, при измерении интервалов времени методом счета числа периодов импульсов известной частоты за этот интервал времени погрешность квантования достигает целого шага квантования: $|\Delta_{\text{кв}}| \leq \Delta x$. Для ее уменьшения необходимо синхронизировать начало временного интервала и приход первого импульса, задержав его на половину периода относительно начала этого интервала.

При квантовании сигнала x погрешность $\Delta_{\text{кв}}$, часто называемая шумом квантования, имеет характер ломаной линии (рис.3,б) и ее максимальное абсолютное значение равно $0,5 \cdot x$. Если считать, что шум квантования имеет форму зубцов с амплитудой $0,5 \cdot x$, то средняя мощность за длительность каждого зубца составит $P_{\text{ш.кв}} = x^2/12$. Данное выражение полностью характеризует среднеквадратическое значение погрешности квантования. Так как в АЦП нет однозначной связи между выходными и входными величинами, то, зная выходной код, можно говорить лишь о вероятности того или иного значения аналоговой величины в пределах одного кванта. Однако при большом числе уровней квантования плотность вероятности мгновенных значений может быть принята равномерной, что соответствует равной плотности вероятности погрешности квантования в пределах $\pm 0,5 \cdot x$. В этом случае дисперсия погрешности квантования по уровню $\sigma_{\text{кв}}^2 = (0,5 \cdot x)^2/3 = P_{\text{ш.кв}}$, а среднее квадратическое значение погрешности $\sigma_{\text{кв}} = x/2\sqrt{3}$, т. е. в $\sqrt{3}$ раз меньше максимальной.

Следующим преобразованием измерительного сигнала является кодирование. *Цифровым кодом* называют последовательность цифр или сигналов, подчиняющихся определенному закону, с помощью которой осуществляется условное представление численного значения квантованной величины (рис. 1,г). При этом число импульсов в кодовой группе равно номеру n соответствующего

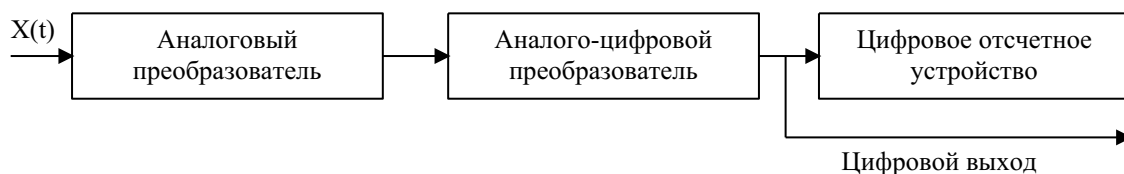


Рис. 4

уровня квантования. Например, моменту дискретизации (отсчету) X_6 соответствует уровень квантования X_6 и в кодовой группе содержится 6 импульсов. Отметим, что при кодировании получаемый цифровой код всегда однозначно соответствует номеру n выбранного уровня квантования и процесс кодирования не вносит дополнительной погрешности.

Обобщенная структурная схема цифрового измерительного прибора представлена на рис. 4. Аналоговый преобразователь преобразует измеряемую величину $x(t)$ в величину, обеспечивающую нормальный режим работы АЦП. Это могут быть масштабные преобразования (усиление, ослабление) или преобразования рода физической величины (например, сопротивления в напряжение). С выхода АЦП цифровой код поступает на цифровое отсчетное устройство и цифровой выход, позволяющий использовать цифровой измерительный прибор в качестве преобразователя, а также подключать цифровые регистрирующие устройства. Метрологические характеристики ЦИП и АЦП во многом определяются методом аналого-цифрового преобразования. Различают следующие преобразования:

- пространственное, при котором измерительный сигнал предварительно

преобразуется в перемещение, угол поворота и т. п. некоторого указателя, положение которого определяется с помощью специальной «кодовой маски» (кодовые диски и линейки, электронно-лучевые трубки и т. п.);

- число-импульсное, при котором измеряемая величина (например, частота, временной интервал) предварительно преобразуется в пропорциональное количество импульсов, число которых подсчитывается цифровым счетчиком;

- время-импульсное, при котором измеряемая величина предварительно преобразуется в интервал времени, значение которого определяется путем заполнения импульсами опорной частоты и подсчета этих импульсов цифровым счетчиком;

- частотно-импульсное, при котором измеряемая величина преобразуется в частоту электрических сигналов, определяемую подсчетом числа этих сигналов за известный интервал времени цифровым счетчиком;

- амплитудное, при котором измеряемая величина преобразуется в амплитуду электрического сигнала, определяемую сравнением с набором опорных электрических величин последовательно или одновременно;

- уравнивающее (компенсационное), при котором измеряемая величина уравнивается величиной, воспроизводимой цифро-аналоговым преобразователем (ЦАП), выполняющим роль меры измеряемой физической величины. ЦАП преобразует цифровой код в непрерывную во времени и квантованную по значению физическую величину (например, напряжение, ток, сопротивление). По алгоритму уравнивания различают развертывающее и следящее уравнивания.

В приборах, основанных на развертывающем уравнивании, шаг дискретизации Δt задается принудительно. При этом он не должен быть меньше времени, необходимого для выполнения аналого-цифрового преобразования, которое определяется как быстродействием отдельных входящих в состав прибора дискретных устройств, так и временем, необходимым для завершения переходных процессов установления сигналов в аналоговых звеньях (усилителя и т. п.). Кроме того, время преобразования существенно зависит от закона изменения уравнивающей величины на выходе ЦАП до наступления момента равновесия. При последовательном переборе всех значений в диапазоне преобразования для получения высокой точности необходимо много времени. Время уравнивания значительно (на несколько порядков) сокращается при использовании метода поразрядного уравнивания.

В приборах, основанных на принципах следящего уравнивания, дискретизация осуществляется не принудительно, а по мере изменения измеряемой величины. Быстродействие этих приборов можно характеризовать максимальным временем разового преобразования при подключении на вход измеряемой величины. Однако такая характеристика не отражает основной особенности использования следящих цифровых приборов — возможности слежения за измеряемыми величинами, изменяющимися с достаточно большими скоростями. Поэтому для оценки быстродействия следящих цифровых приборов указывается максимально допустимая скорость изменения измеряемой величины, при которой еще сохраняется гарантируемая прибором точность измерения.

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ И КОДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ЦИФРОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВАХ

Дискретизированные и квантованные значения сигнала в цифровых измерительных приборах подвергаются кодированию. На рис. 1,г был показан *унитарный код*, при котором число передаваемых импульсов пропорционально квантованному значению измеряемой величины. Поэтому такой код еще называют число-импульсным. Представление числового значения в унитарном коде имеет недостатки, в частности различное число импульсов в кодовых группах. Громоздкость данного кода привела к распространению других систем счисления и кодов. Под системой счисления понимают совокупность цифровых знаков и правил, применяемых для однозначного представления чисел. Системы счисления, коды разделяются на непозиционные и позиционные. К непозиционным кодам относят, например,

унитарный код.

Более компактно и удобно выражаются числа в позиционных системах, к которым относятся десятичная, двоичная, двоично-десятичная и др. В общем случае в позиционной системе любое число N можно представить в виде

$$N_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \dots + a_{-m} b^{-m} = \sum_{i=-m}^n a_i b^i,$$

где b — основание системы счисления, равное числу знаков в данной системе (например, для десятичной $b=10$, для двоичной $b=2$), $i = -m \dots n$ — номер разряда (позиции), b^i — весовой коэффициент i -го разряда, $a=0 \dots (b-1)$ — разрядный, коэффициент.

При записи числа N в позиционной системе используются только разрядные коэффициенты, а весовые не указываются, так как определяются порядковой позицией разрядного коэффициента. Например, число 920,1 в десятичной системе содержит 4 разрядных коэффициента с весовыми коэффициентами 10^2 , 10^1 , 10^0 и 10^{-1} :

$920,1 = 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1}$. Это делает представление информации в позиционном коде наиболее компактным. Заметим, что запись числа 920 с помощью унитарного кода потребовала бы 920 знаков.

Десятичная система используется в ЦИП для отображения результата измерения. Однако все промежуточные операции в цифровом приборе предпочитают проводить в двоичной системе счисления, поскольку электронные устройства с двумя устойчивыми состояниями отличаются простотой и высокой помехоустойчивостью. В двоичной системе для представления цифр разряда используются два символа: 0 и 1. Перевод числа, записанного в двоичной системе, в привычную для нас десятичную требует проведения вычислительной процедуры: $11011,01 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 27,25$.

Из приведенного примера видно, что в двоичной системе счисления весовой коэффициент старшего разряда превышает весовой коэффициент предыдущего (младшего) разряда в 2 раза, т. е. они образуют ряд 1, 2, 4, 8, 16, 32 и т. д.

Однако число, записанное в двоичной системе, неудобно для визуального отсчета, а перевод его в десятичное число требует затрат времени и вызывает определенные технические сложности. Поэтому в цифровых измерительных приборах широко пользуются *двоично-десятичным кодом*, который образуется путем представления каждой цифры десятичного числа соответствующим двоичным числом. Например, число 27 преобразуется следующим образом. Цифра 2 записывается как 0010, а цифра 7 — как 0111, т. е. $27_{10} = 00100111_{2/10}$. Здесь индекс 10 свидетельствует о записи в десятичной системе, а 2/10 — о записи в двоично-десятичной. Представление числа в двоично-десятичной системе менее экономно, чем в двоичной. Так, для числа 27 в двоично-десятичной системе надо иметь 8 символов, а в двоичной только пять (11011). Однако простота его преобразования в десятичный код компенсирует этот недостаток.

В двоично-десятичном коде представление каждой десятичной цифры требует четыре символа.

Меньше нельзя, так как с помощью трех символов можно получить лишь 8 комбинаций, а число возможных цифр в каждом разряде десятичного числа равно 10 ($a_{10} = 0 \dots 9$). Вместе с тем четыре символа позволяют построить 16 комбинаций, т. е. шесть комбинаций являются лишними и их можно удалить. Вполне естественным кажется удаление комбинаций, выражающих цифры более 9. Код I, содержащий 10 начальных комбинаций (табл. 1), называют кодом 8421. Он является наиболее распространенным, но не единственным возможным. Для каждой из десяти цифр допустимо совершенно произвольное закрепление кодовых комбинаций, поэтому число принципиально возможных кодов довольно велико. Код II (весовые коэффициенты 2421) имеет разрыв между цифрами 4 и 5. В этом месте проходит ось симметрии. Каждая кодовая комбинация над осью отличается от симметричной комбинации под осью инверсными значениями разрядных коэффициентов, например десятичное число 3 воспроизводится кодовой комбинацией 0110; симметрично расположенное относительно оси число 7 — комбинацией 1001, которая может быть получена

из 0110 путем замены нулей единицами и единицы нулями. Это свойство полезно при реализации арифметических операций. Находят применение и другие виды кодов.

Т а б л и ц а 1

a_{10}	I(8421)	II (2421)	a_{10}	I(8421)	II(2421)
0	0000	0000	5	010111	1011
1	0001	0001	6	0110	1100
2	0010	0010	7	0111	1101
3	0011	0011	8	1000	1110
4	0100	0100	9	1001	1111

Для многих АЦП выходным является унитарный код. Для его преобразования в двоичный код используется обычный двоичный счетчик, а для преобразования в двоично-десятичный код — двоично-десятичный счетчик. В последнем каждые четыре триггера охвачены такими обратными связями, при которых осуществляется счет не до $2^4=16$, а до 10, при этом четыре последовательно включенных триггера образуют счетную декаду.

В зависимости от способа передачи коды делятся на последовательные, параллельные и последовательно-параллельные. При последовательном коде все его разряды передаются последовательно во времени по одной цепи. При параллельном коде все разряды передаются одновременно, каждый по своей цепи. Это требует больше цепей, но соответственно сокращает время на передачу. При большой разрядности кода целесообразно компромиссное решение — последовательно-параллельная передача, при которой все разряды кода делятся на группы (например, часто в группу входит 8 бит — байт). Биты внутри группы передаются одновременно по параллельным цепям, а группы последовательно во времени.

При передаче цифровых сигналов на значительные расстояния код может искажаться под действием импульсной помехи. Для обнаружения этих ошибок можно использовать различные коды. Простейшим является применение двоичных кодов с проверкой на четность. Для этого в код вводится дополнительный разряд, которому присваивается значение 1, если сумма единиц всех остальных разрядов нечетна, и значение 0, если сумма четна. Тогда передаваемая комбинация всегда содержит четное число единиц. На приемном конце проверяется четность числа единиц в принятом коде. Отсутствие четности свидетельствует о возникшей ошибке (однократной или любой нечетной кратности).

ЦИФРОВЫЕ ИНДИКАТОРЫ И ЦИФРОВОЕ ОТСЧЕТНОЕ УСТРОЙСТВО

В настоящее время известно большое число цифровых индикаторов: газоразрядных, электролюминесцентных, светодиодных, на жидких кристаллах и др. В газоразрядных индикаторах (типа ИН) анод выполнен в виде тонкой и редкой металлической сетки, а катод в виде цифры из тонкой проволоочки (рис. 5). Катоды расположены стопкой, один под другим. Объем внутри баллона заполнен инертным газом, например неоном. Если между катодом и анодом действует достаточное напряжение, возникает тлеющий разряд, форма которого повторяет конфигурацию катода. Так как индикатор показывает цифры от 0 до 9, на цоколе необходимо иметь десять сигнальных выводов плюс один вывод для подачи напряжения на общий анод. Одновременно должна высвечиваться только одна цифра, поэтому при индикации управляющее напряжение действует только между общим выводом и одним из сигнальных. Главным недостатком газоразрядных цифровых ламп является необходимость подачи достаточно высокого управляющего напряжения.

Современная электроника создала элементы индикации, характеристики которых

совместимы с выходными характеристиками низковольтных маломощных транзисторов и интегральных микросхем. К ним относятся светодиоды и элементы на жидких кристаллах. Эти типы индикаторов имеют семи- или десятисегментную *рис.6* конструкцию. На *рис.6* показаны семисегментные индикаторы.

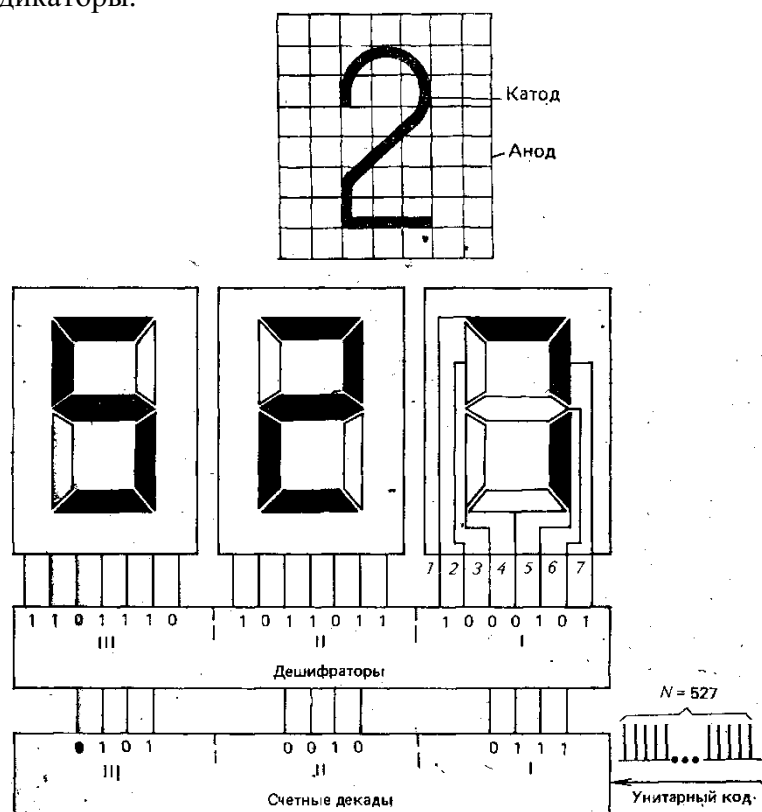


Рис. 6

Все сегменты размещены на общей подложке и имеют отдельные выводы. Как видно из *рис. 6*, для получения цифры 7 необходимо сигналы (1) подать на входы 1, 5 и 7. На остальных входах должен быть 0. Низкие управляющие напряжения, малая потребляемая мощность и долговечность привели к широкому распространению этих приборов.

На *рис. 6* показан пример построения трехразрядного цифрового отсчетного устройства на семисегментных цифровых индикаторах. Пусть входным сигналом является унитарный код. Этот код с помощью двоично-десятичного счетчика преобразуется в параллельный двоично-десятичный код. Для этого счетчик содержит три декады, каждая из которых состоит из четырех триггеров, работающих в счетном режиме и соединенных последовательно. Применение обратных связей позволяет обеспечить последовательный счет десяти импульсов, поступающих на вход декады. После десятого импульса все триггеры возвращаются в исходное состояние (0), при этом на выходе счетной декады появляется сигнал 1, который поступает на следующую декаду. Таким образом первая декада единицы, вторая — десятки, третья — сотни. На сигнальных выходах четырех триггеров имеются сигналы, состоящие из 0 и 1 и отражающие число импульсов, подсчитанных декадой. Подбирая обратные связи, можно получить отображение числа поступивших на вход импульсов в любом из кодов, представленных в табл.1. На *рис. 6* показан результат счета $N=527$ импульсов в коде 8421: 0101 0010 0111. Полученный код поступает на дешифраторы, которые преобразуют его в параллельный семиразрядный код, управляющий семисегментными индикаторами. При использовании других индикаторов, например типа ИН, необходимы другие дешифраторы, обеспечивающие получение параллельного десятичного кода.

СТРУКТУРНЫЕ МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Снижение погрешностей является наиболее важной задачей совершенствования СИ. Существующие способы ее решения можно разделить на технологические, конструктивные и структурные. Методы борьбы с погрешностями существенно зависят от характера этих погрешностей. Погрешность СИ может быть выражена через номинальную $y_n = F_n(x)$ и реальную $y = F_p(x)$ функции преобразования (рис.7): $F_p(x) = F_n(x) + \Delta$. Параллельное смещение характеристики преобразования приводит к появлению аддитивной составляющей погрешности ($\Delta_{\text{адд}} = a$), изменение ее наклона — к мультипликативной ($\Delta_{\text{мульт}} = bx$), зависимость наклона от значения измеряемой величины — к нелинейной составляющей ($\Delta_{\text{нел}} = y - y_2$). Все эти составляющие могут случайным образом меняться во времени.

Технологический способ заключается в совершенствовании изготовления существующих и разработке новых элементов ИУ, имеющих меньший разброс параметров и повышенную стабильность их. Однако его возможности ограничены и, кроме того, усложнение технологии изготовления и отбраковки элементов приводит к их удорожанию.

Конструктивные способы определяют такое построение схем, узлов и самих ИУ, при котором погрешности минимальны. Их отличительной чертой является отсутствие структурной избыточности, т. е. СИ состоит только из таких измерительных преобразователей, без которых процесс измерения невозможен. К наиболее общим из конструктивных методов следует отнести применение отрицательной обратной связи (ООС) и уравнивающего (компенсационного) преобразования, при котором ООС охватывает все ИУ. Как известно, применение ООС позволяет на несколько порядков в $K > 1$ раз, где K и K_i — коэффициенты передачи соответственно прямой цепи и цепи ООС) уменьшить составляющие погрешности ИУ: мультипликативную путем уменьшения неустойчивости коэффициента преобразования, нелинейную путем снижения нелинейности характеристики преобразования. Введение ООС целесообразно только, когда погрешность коэффициента передачи цепи ООС существенно ниже погрешности коэффициента передачи цепи прямого преобразования. Необходимо также учитывать, что ООС снижает чувствительность ИУ (в K раз) и не позволяет уменьшить аддитивную составляющую погрешности.

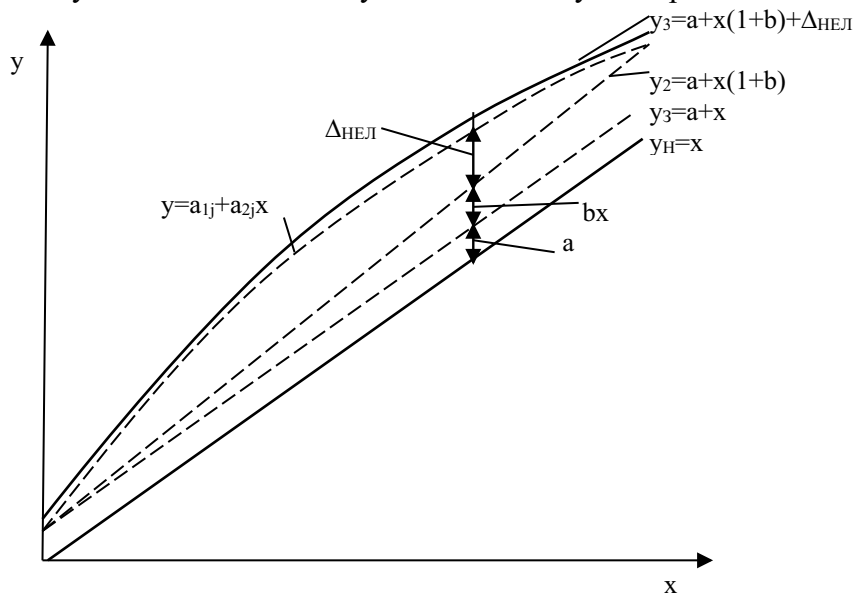


Рис. 7

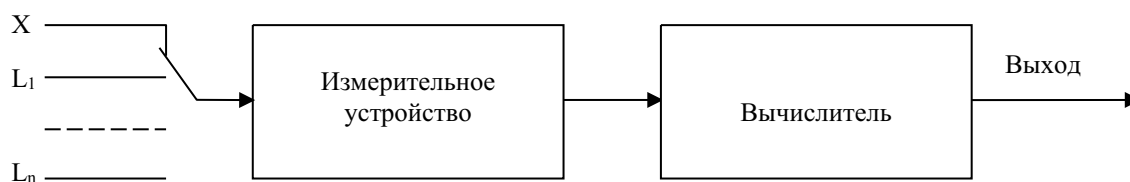


Рис.8

Структурные методы коррекции погрешностей основаны на введении структурной и (или) временной избыточности, т. е. на использовании в СИ дополнительных устройств и проведения наряду с измерением искомой величины дополнительных измерений^ обработка результатов которых позволяет уменьшить погрешность измерения искомой величины. Структурные методы позволяют^ снизить систематическую погрешность и ту составляющую случайной погрешности, которая во время всех дополнительных измерений мало изменяется, т. е. корректируют относительно медленно меняющуюся составляющую случайной погрешности. Например, при автоматизации процесса измерения, когда время измерения обычно составляет доли или единицы секунд, можно осуществить коррекцию температурной погрешности, случайные изменения которой происходят достаточно медленно. Заметим, что быстро изменяющаяся составляющая случайной погрешности такими методами не уменьшается. Для этого можно использовать только многократные наблюдения и их статистическую обработку.

Внедрение в цифровые СИ вычислительной техники открывает широкие, возможности использования структурных методов. Последние делятся на методы образцовых мер, методы обратных преобразований и тестовые методы.

Метод образцовых мер. Для рассмотрения метода образцовых мер представим реальную характеристику преобразования в виде полинома $y = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$, где a_i — коэффициенты, постоянные на протяжении времени измерения. Идея метода образцовых мер заключается в последовательном измерении величины x и известных величин $L_1, L_2, \dots, L_n$, воспроизводимых мерами (рис.8). В результате одного цикла измерений можно составить систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{x} + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{x}^{n-1}, \\ \mathbf{y}_0 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{L}_1 + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{L}_1^{n-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{y}_n &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{L}_m + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{L}_m^{n-1}, \end{aligned}$$

где неизвестными являются x и a_i . Система уравнений решается вычислительным устройством относительно измеряемой величины x . Очевидно, что при правильном выборе числа мер в системе получается необходимое число уравнений, позволяющих при решении исключить неизвестные коэффициенты a_i .

Если погрешность СИ содержит только одну аддитивную составляющую (характеристика преобразований y_1 на рис.7), то достаточно произвести одно вспомогательное измерение с мерой $L_1=0$. Система имеет вид:

$$\begin{aligned} y_0 &= a_1 + x, \\ y_1 &= a_1 + L_1, \end{aligned}$$

откуда $x = y_0 - y_1 + L_1 \Big|_{L_1 = 0} = y_0 - y_1$.

Если погрешность СИ содержит и аддитивную, и мультипликативную составляющие (характеристика преобразования y_2 на рис.7), то необходимо произвести два вспомогательных измерения с мерой $L_1 = 0$ и с мерой L_2 , (ее значение обычно берут близким к верхнему пределу диапазона измерения). Решив систему из трех уравнений с тремя неизвестными a_1 , a_2 и x ,

получим $x = L_1 + (L_2 - L_1) \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1} \Big|_{L_1 = 0} = L_2 \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1}$

Этот алгоритм очень прост и часто используется на практике для автоматической коррекции аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности.

Если имеет место и нелинейная составляющая погрешности, то для ее коррекции число мер существенно возрастает. Одновременно возрастает порядок аппроксимирующего полинома, что усложняет вычисления. Для преодоления этой трудности обычно прибегают к кусочно-линейной аппроксимации характеристики преобразования (y з на рис.7): $y = a_{1j} + a_{2j}x$, где $j=1, 2, \dots, m$ — номер участка аппроксимации. Процесс измерения и вычисление осуществляют так же, как и в предыдущем случае, только образцовые меры L_{1j} и L_{2j} , выбирают не произвольно, а в зависимости от результата первого измерения x . Результат измерения позволяет определить номер j участка аппроксимации и выбрать меры в начале и конце этого участка. При этом требуется $m+1$ образцовых мер.

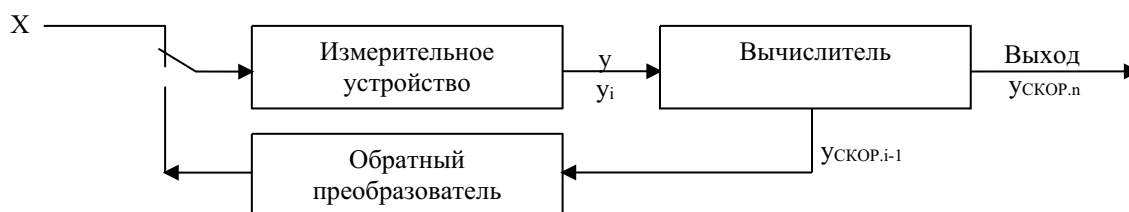


Рис. 9

Таким образом рассмотренный метод позволяет осуществлять коррекцию всех составляющих погрешности, но уменьшение нелинейной составляющей может требовать значительного числа мер. Обычно этот метод используется для измерения величин, для которых легко создать образцовые меры.

Итерационные методы. Эти методы относятся к методам обратных преобразований, так как в них используется высокоточный ЦАП, с помощью которого выходной цифровой сигнал преобразуется в физическую величину, однородную с измеряемой, и подается на вход (рис.9). Эти методы называются итерационными, так как в них осуществляется последовательное приближение результатов измерения к истинному значению величины. Существует много разновидностей итерационных методов. Рассмотрим одну из распространенных.

В соответствии с приведенным алгоритмом (рис.10) сначала производится преобразование измеряемой величины x . Полученное значение y запоминается, а ко входу измерительного устройства (ИУ) подключается выход обратного преобразователя. Затем при первом шаге итерации ($i = 1$) величина $y_{\text{исход}} = y$ поступает на обратный преобразователь (F^{-1}_n — функция его передачи, обратная функции F_n). Полученная величина $x_{i=1}$ преобразуется ИУ в $y_{i=1}$ и вычисляется $y_{\text{корр}}$ — первый скорректированный результат, который запоминается. При втором шаге итерации он поступает на обратный преобразователь и процесс повторяется. Общий алгоритм вычисления i -го скорректированного результата:

$y_{\text{корр } i} = y_{\text{корр } i-1} - y_i + y$ — из предыдущего скорректированного результата вычесть результат последнего преобразования и прибавить результат первого преобразования.

Рассмотрим процесс коррекции погрешности ИУ при наличии аддитивной и мультипликативной составляющих, пренебрегая погрешностью высокоточного ЦАП. В соответствии с рис. 7 при подаче на вход ИУ измеряемой величины x получим $y = Fp(x) = a + x(1+b)$, в то время как при отсутствии погрешности имели бы $y_n = F_n(x) = x$. Соответственно погрешность составит $y - y_n = a + bx$. При первом шаге итерации: $X_1 = F^{-1}(y_{\text{исход}}) = F^{-1}_n(y) = y$; $y_1 = Fp(X_1) = a + X_1(1+b)$; Погрешность первого шага итерации составит $\Delta_{\text{исход } 1} = y_{\text{исход } 1} - y_n = -(a + xb)b$, т. е. при $b < 1$ уменьшилась по сравнению с погрешностью Δ в $1/b$ раз.

Погрешность результата второго шага итерации составит $\Delta_{\text{исход } 2} = y_{\text{исход } 2} - y_n = -(a + xb)b^2$, т. е. уменьшилась по сравнению с начальной в $1/b^2$ раз. Если продолжить итерации, то можно убедиться, что для n шагов итерации погрешность уменьшится в $1/b^n$ раз. Если, например, $b = 0,1$, то для трех шагов итерации получим уменьшение погрешности в 10^3 раз, т. е. процесс итерации быстро сходится.

Итерационный метод позволяет корректировать и нелинейную составляющую

погрешности.

При применении итерационных методов результирующая погрешность практически определяется погрешностью обратного преобразователя. Это позволяет использовать в прямой цепи весьма грубые преобразователи. Наличие образцового обратного преобразователя делает этот метод похожим на метод уравнивающего преобразования. Однако в последнем, как уже отмечалось, не осуществляется коррекция аддитивной составляющей погрешности прямой ветви.

Тестовый метод. Этот метод основан на дополнительных измерениях с использованием специальных измерительных сигналов — тестов, аддитивных и мультипликативных. Аддитивный тест формируется в виде суммы $A_i(x) = x + Qi$, где Qi — постоянная составляющая, не зависящая от x , мультипликативный формируется в виде произведения $A_i(x) = k_i X$, где k_i — независимый от x коэффициент преобразования (например, реализуемый путем усиления величины x в k раз). Иначе говоря, указанные тесты получаются в результате преобразований самой измеряемой величины x . Важным преимуществом тестового метода является возможность уменьшения числа требуемых тестов при кусочно-полиномиальной аппроксимации характеристики преобразования, так как тесты функционально связаны с измеряемой величиной и переносятся вместе с ней на нужный участок аппроксимации. Наиболее просто это поясняется на примере кусочно-линейной аппроксимации, получившей наибольшее распространение. Характеристика преобразования на j -м участке описывается уравнением $y = a_{1j} + a_{2j}X$ ($j = 1, 2, \dots, m$), где m — число участков (рис.7). При линейной аппроксимации необходимо иметь два теста $A_1(x)$ и $A_2(x)$, аддитивный и мультипликативный, дополнительные преобразования которых позволяет определить

неизвестные параметры a_{1j} и a_{2j} . Решая систему уравнений
$$\begin{cases} y_0 = a_{1j} + a_{2j}x, \\ y_1 = a_{1j} + a_{2j}A_1(x), \\ y_2 = a_{1j} + a_{2j}A_2(x); \end{cases}$$
 получим

алгоритм тестового метода при кусочно-линейной аппроксимации:

$$y_0 = \frac{y_1 A_2(x) - y_2 A_1(x)}{A_2(x) - A_1(x)} + x \frac{y_2 - y_1}{A_2(x) - A_1(x)}.$$

На рис. 11 приведена структурная схема измерительного устройства, работающего по данному алгоритму с одним аддитивным и одним мультипликативным тестами. Процесс измерения состоит из трех тактов. В первом ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а K_3 замкнут и на вход измерительного устройства поступает измеряемая величина x . На втором также замыкается ключ K_1 и на вход поступает аддитивный тест $x +$. На третьем такте K_2 замыкается, а остальные размыкаются, подключая на вход измерительного устройства мультипликативный тест с величиной kx . Результаты y_0, y_1, y_2 преобразований поступают с выхода измерительного устройства в вычислительное, реализующее алгоритм, который может быть получен из указанного постановкой $A_1(x) = x +$ и $A_2(x) = kx$:

$$x = \frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} \cdot \frac{\Theta}{k - 1}.$$

Отметим, что данный метод является универсальным. Как и метод образцовых мер, он позволяет уменьшить аддитивные и мультипликативные составляющие, а также составляющую погрешности, связанную с нелинейностью характеристики преобразования. Его достоинством по сравнению с остальными структурными методами является отсутствие требования большого числа образцовых мер, а также отключения измеряемой величины от хода прибора, что важно при измерении некоторых неэлектрических величин.

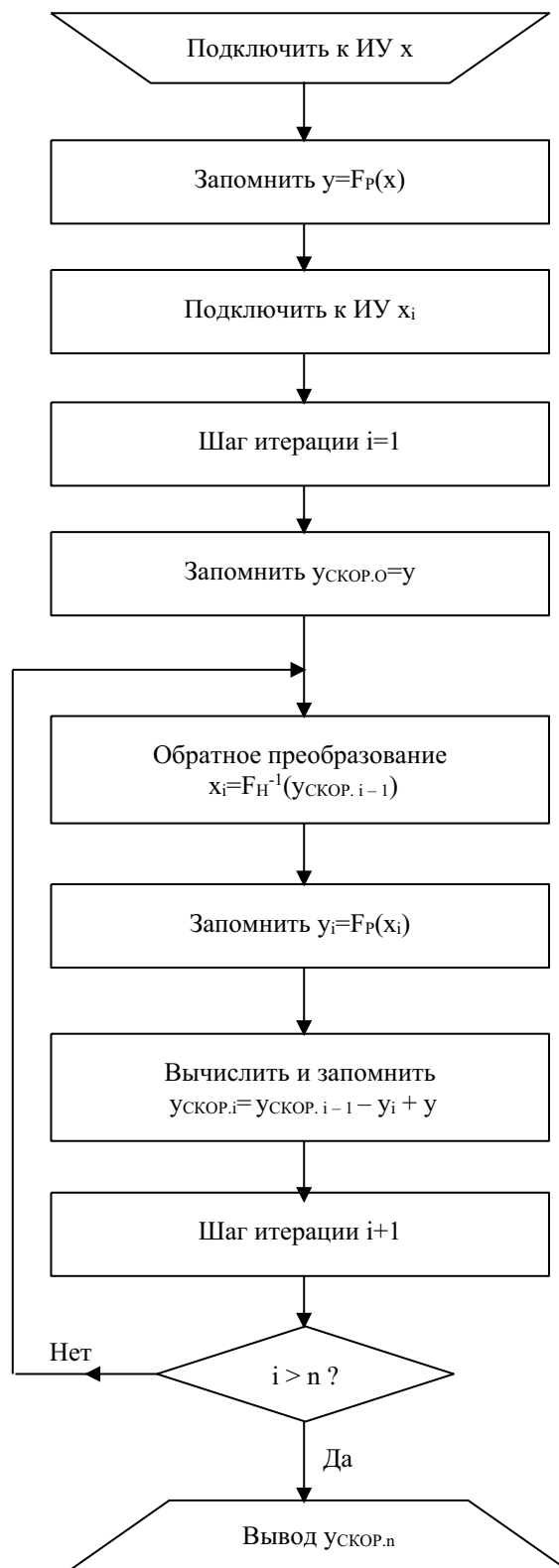


Рис. 10

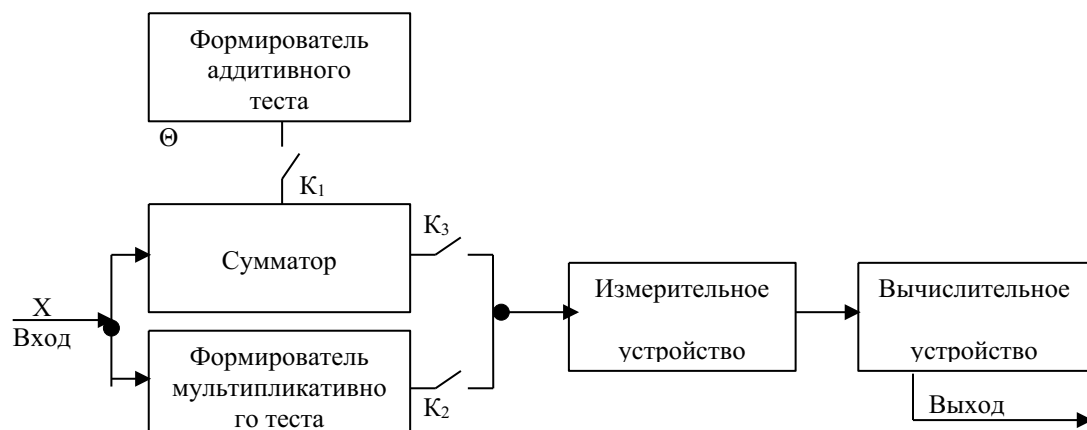


Рис. 11

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме:

Основная: 1,2

Дополнительная: 1-5

Методическая: 1-3

Интернет-ресурсы: 1

Программное обеспечение: 1-3

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «Математические основы цифровой обработки сигналов»
для студентов направления подготовки
10.03.01 «Информационная безопасность»

Направленность (профиль):
«Организация и технологии защиты информации (по отрасли или в сфере
профессиональной деятельности)»

Ставрополь,
2026

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	
1. Общая характеристика самостоятельной работы студента	
2. Технологическая карта самостоятельной работы студента.....	
3. Самостоятельное изучение тем лекций.....	
4. Паспорт фонда оценочных средств для проверки самостоятельной работы	
5. Список рекомендуемой литературы.....	

ВВЕДЕНИЕ

Целью изучения дисциплины «Математические основы цифровой обработки сигналов» является формирование набора общекультурных и профессиональных компетенций будущего специалиста по направлению подготовки 10.03.01 «Информационная безопасность». Междисциплинарный подход в изучении теории цифровых сигналов позволяет сформировать представление о принципах и методах их математической обработки в зависимости от класса решаемой прикладной задачи.

1. Основными задачами изучения дисциплины являются:
2. Формирование четких представлений о фундаментальных положениях теории цифровой обработки сигналов.
3. Обучение основам аналитических и численных методов расчета и анализа цифро-вых преобразователей измерительных сигналов.
4. Развитие навыков проектирования цифровых измерительных преобразователей, обработки экспериментальных результатов и их анализа.

1. Общая характеристика самостоятельной работы студента

Основными видами учебной работы по достижению результатов освоения дисциплины являются лекции, лабораторные работы и самостоятельная работа студентов (СРС).

На лекциях раскрываются основные положения и понятия курса, формируются знания в области цифровой обработки сигналов. На лабораторных работах формируются умения и навыки, необходимые для решения задач профессиональной деятельности.

Приступая к изучению учебной дисциплины, необходимо ознакомиться с учебной программой, получить в библиотеке рекомендованные учебные пособия, а также получить у ведущего преподавателя в электронном виде конспекты лекций, методические рекомендации к лабораторным работам и тестовые, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и выполнения лабораторных работ.

Для изучения дисциплины предлагается список основной и дополнительной литературы. Основная литература предназначена для обязательного изучения, дополнительная – поможет более глубоко освоить отдельные вопросы, подготовить исследовательские задания и выполнить задания для самостоятельной работы.

В ходе лекционных занятий студент обязан осуществлять конспектирование учебного материала, особое внимание, обращая на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных понятий, физических явлений, процессов, эффектов. В рабочих конспектах желательно оставлять поля, на которых следует делать пометки из рекомендованной литературы, дополнять материал прослушанной лекции, формулировать научные выводы и практические рекомендации. Студент имеет право задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

Самостоятельная работа студентов над материалом учебной дисциплины является неотъемлемой частью учебного процесса и должна предполагать углубление знания учебного материала, излагаемого на аудиторных занятиях, и приобретение дополнительных знаний по отдельным вопросам самостоятельно.

Основными видами самостоятельной работы курсантов по учебной дисциплине являются:

- самостоятельное изучение учебного материала по заданным темам;
- подготовка к лабораторным работам, оформление отчета по выполненной лабораторной работе и подготовка к собеседованию по результатам работы.

Основными методами самостоятельной работы студентов являются:

- 1) для овладения знаниями:
 - чтение текста (конспекта лекций, учебника, дополнительной литературы) и

конспектирование текста;

- работа с нормативными документами;
- поиск информации в Интернет;
- 2) для закрепления и систематизации знаний:
 - работа с конспектом лекции (обработка текста);
 - повторная работа над учебным материалом (учебника, дополнительной литературы, слайдами);
 - составление плана и тезисов ответа или графическое изображение структуры ответа;
 - составление таблиц для систематизации учебного материала;
 - изучение нормативных документов;
 - ответы на контрольные вопросы;
- 3) для формирования умений:
 - подготовка к лабораторным работам;
 - решение задач и выполнение лабораторных работ;
 - подготовка отчетов по лабораторным работам;
 - рефлексивный анализ профессиональных умений.

В случае пропуска учебного занятия студент может воспользоваться содержанием различных блоков учебно-методического комплекса (лекции, лабораторные работы, контрольные вопросы и тесты) для самоподготовки и освоения темы. Для самоконтроля необходимо использовать вопросы и задания, предлагаемые к лабораторным работам, а также варианты тестовых заданий.

2. Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов)	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
7 семестр					
ПК-1 ИД-1 ПК-5 ИД-2	Подготовка к практическим занятиям	Письменный отчет	5.00	2.00	7.00
ПК-1 ИД-1 ПК-5 ИД-2	Подготовка к лекциям	Конспект	6.00	2.00	8.00
ПК-1 ИД-1 ПК-5 ИД-2	Подготовка к лабораторным работам. Решение задач	Письменный отчет с решением разноуровневых задач	5.00	2.00	7.00
ПК-1 ИД-1 ПК-5 ИД-2	Самостоятельное изучение литературы	Конспект	5.00	2.00	7.00
ПК-1 ИД-1 ПК-5 ИД-2	Подготовка к докладу	Письменный отчет	5.00	2.00	7.00
Итого за 7 семестр			26.00	10.00	36.00
Итого			26.00	10.00	36.00

1. Порядок выполнения самостоятельной работы

1.1 Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Комплексное изучение предлагаемой студентам учебной дисциплины «Математические основы цифровой обработки сигналов» предполагает овладение материалами лекций, учебников, программы, творческую работу студентов в ходе проведения практических занятий, а также систематическое выполнение заданий для самостоятельной работы.

В ходе лекций раскрываются основные вопросы в рамках рассматриваемых тем, делаются акценты на наиболее сложные и интересные положения изучаемого материала, которые должны быть приняты студентами во внимание. Материалы лекций являются основой для подготовки студентов к практическим занятиям.

Работа с конспектом лекций

Просмотрите конспект сразу после занятий. Отметьте материал конспекта лекций, который вызывает затруднения для понимания. Попробуйте найти ответы на затруднительные вопросы, используя предлагаемую литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, сформулируйте вопросы и обратитесь на текущей консультации или на ближайшей лекции за помощью к преподавателю.

Каждую неделю отводите время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам и тестам.

Выполнение практических занятий по дисциплине «Математические основы цифровой обработки сигналов»

На первом занятии получите у преподавателя задания по курсу, планы подготовки к практическим занятиям. Обзаведитесь всем необходимым методическим обеспечением.

Перед практическими занятиями изучите теорию вопроса, предполагаемого к исследованию, ознакомьтесь с опытом других исследователей в этом направлении.

Целью практических занятий является:

- закрепление методов приложения теории к решению практических задач анализа и синтеза психологического знания;
- проверка уровня понимания студентами вопросов, рассмотренных на лекциях и по учебной литературе, степени и качества усвоения материала;
- обучение навыкам освоения методики эксперимента и работы с нормативно-справочной литературой;
- восполнение пробелов в пройденной теоретической части курса и оказание помощи в его усвоении.

1.2 Методические рекомендации по написанию и оформлению доклада

2. Общие положения

2.1. Доклад, как вид самостоятельной работы в учебном процессе, способствует формированию навыков исследовательской работы, расширяет познавательные интересы, учит критически мыслить.

2.2. При написании доклада по заданной теме студент составляет план, подбирает основные источники.

2.3. В процессе работы с источниками систематизирует полученные сведения, делает выводы и обобщения.

2.4. К докладу по крупной теме могут привлекать несколько студентов, между которыми распределяются вопросы выступления.

3. Выбор темы доклада

3.1. Тематика доклада обычно определяется преподавателем, но в определении темы инициативу может проявить и студент.

3.2. Прежде чем выбрать тему доклада, автору необходимо выявить свой интерес, определить, над какой проблемой он хотел бы поработать, более глубоко ее изучить.

4. Этапы работы над докладом

4.1. Формулирование темы, причем она должна быть не только актуальной по своему значению, но и оригинальной, интересной по содержанию.

4.2. Подбор и изучение основных источников по теме (как правильно, при разработке доклада используется не менее 8-10 различных источников).

4.3. Составление списка использованных источников.

4.4. Обработка и систематизация информации

4.5. Разработка плана доклада.

4.6. Написание доклада.

4.7. Публичное выступление с результатами исследования.

5. Структура доклада:

- титульный лист
- оглавление (в нем последовательно излагаются названия пунктов доклада, указываются страницы, с которых начинается каждый пункт);
- введение (формулирует суть исследуемой проблемы, обосновывается выбор темы, определяются ее значимость и актуальность, указываются цель и задачи доклада, дается характеристика используемой литературы);
- основная часть (каждый раздел ее, доказательно раскрывая отдельную проблему или одну из ее сторон, логически является продолжением предыдущего; в основной части могут быть представлены таблицы, графики, схемы);
- заключение (подводятся итоги или дается обобщенный вывод по теме доклада, предлагаются рекомендации);
- список использованных источников

6. Структура и содержание доклада

6.1. Введение - это вступительная часть научно-исследовательской работы. Автор должен приложить все усилия, чтобы в этом небольшом по объему разделе показать актуальность темы, раскрыть практическую значимость ее, определить цели и задачи эксперимента или его фрагмента.

6.2. Основная часть. В ней раскрывается содержание доклада. Как правило, основная часть состоит из теоретического и практического разделов. В теоретическом разделе раскрываются история и теория исследуемой проблемы, дается критический анализ литературы и показываются позиции автора. В практическом разделе излагаются методы, ход, и результаты самостоятельно проведенного эксперимента или фрагмента.

В основной части могут быть также представлены схемы, диаграммы, таблицы, рисунки и т.д.

6.3. В заключении содержатся итоги работы, выводы, к которым пришел автор, и рекомендации. Заключение должно быть кратким, обязательным и соответствовать поставленным задачам.

6.4. Список использованных источников представляет собой перечень использованных книг, статей, фамилии авторов приводятся в алфавитном порядке, при этом все источники даются под общей нумерацией литературы. В исходных данных источника указываются фамилия и инициалы автора, название работы, место и год издания.

6.5. Приложение к докладу оформляются на отдельных листах, причем каждое должно иметь свой тематический заголовок и номер, который пишется в правом верхнем углу, например: «Приложение 1»

7. Требования к оформлению доклада

7.1. Объем доклада может колебаться в пределах 5-15 печатных страниц; все приложения к работе не входят в ее объем.

7.2. Доклад должен быть выполнен грамотно, с соблюдением культуры изложения.

7.3. Обязательно должны иметься ссылки на используемую литературу.

7.4. Должна быть соблюдена последовательность написания библиографического аппарата.

8. Критерии оценки доклада

- актуальность темы исследования;
- соответствие содержания теме;
- глубина проработки материала; правильность и полнота использования источников;
- соответствие оформления доклада стандартам.

По усмотрению преподавателя доклады могут быть представлены на семинарах, научно-практических конференциях, а также использоваться как зачетные работы по пройденным темам.

Методические рекомендации по конспектированию первоисточников

Изучение и анализ литературных источников является обязательным видом

самостоятельной работы студентов. Изучение литературы по избранной теме имеет своей задачей проследить характер постановки и решения определенной проблемы различными авторами, аргументацию их выводов и обобщений, провести анализ и систематизировать полученный материал на основе собственного осмысления с целью выяснения современного состояния вопроса.

Проработка отобранного материала обязательно должна идти с одновременным ведением записей прочитанного и своих замечаний. Запись может иметь как форму конспекта, так и выписок, а также картотеку положений, тезисов, идей, методик, что в дальнейшем облегчит классификацию и систематизацию полученного материала. Такого рода записи являются лучшим способом накопления и первичной обработки материала, одной из обязательных форм организации умственного труда.

Планом удобно пользоваться при подготовке к устному выступлению по выбранной теме. Каждый пункт плана должен раскрывать одну из сторон избранной темы, а весь план должен охватывать ее целиком.

Тезисы предполагают сжатое изложение основных положений текста в форме утверждения или отрицания. Они являются более совершенной формой записей и представляют основу для дискуссии. К тому же их легко запомнить.

Конспектирование – процесс мысленной переработки и письменной фиксации информации, в виде краткого изложения основного содержания, смысла какого-либо текста.

Результат конспектирования – запись, позволяющая конспектирующему немедленно или через некоторый срок с нужной полнотой восстановить полученную информацию. Конспект в переводе с латыни означает «обзор». По существу его и составлять надо как обзор, содержащий основные мысли текста без подробностей и второстепенных деталей. Конспект носит индивидуализированный характер: он рассчитан на самого автора и поэтому может оказаться малопонятным для других.

Для того чтобы осуществлять этот вид работы, в каждом конкретном случае необходимо грамотно решить следующие задачи:

1. Сориентироваться в общей композиции текста (уметь определить вступление, основную часть, заключение).
2. Увидеть логико-смысловую канву сообщения, понять систему изложения автором информации в целом, а также ход развития каждой отдельной мысли.
3. Выявить «ключевые» мысли, т. е. основные смысловые вехи, на которые «нанизано» все содержание текста.
4. Определить детализирующую информацию.
5. Лаконично сформулировать основную информацию, не перенося на письмо все целиком и дословно.

Во всяком научном тексте содержится информация 2-х видов: основная и вспомогательная. Основной является информация, имеющая наиболее существенное значение для раскрытия содержания темы или вопроса. К ней относятся: определения научных понятий, формулировки законов, теоретических принципов и т. д. Назначение вспомогательной информации – помочь читателю лучше усвоить предлагаемый материал. К этому типу информации относятся разного рода комментарии. Основную – записываем как можно полнее, вспомогательную, как правило, опускаем. Содержание конспектирования составляет переработка основной информации в целях ее обобщения и сокращения. Обобщить – значит представить ее в более общей, схематической форме, в виде тезисов, выводов, отдельных заголовков, изложения основных результатов и т. п. Читая, мы интуитивно используем некоторые слова и фразы в качестве опорных. Такие опорные слова

и фразы называются ключевыми. Ключевые слова и фразы несут основную смысловую и эмоциональную нагрузку содержания текста.

Выбор ключевых слов – это первый этап смыслового свертывания, смыслового сжатия материала.

Важными требованиями к конспекту являются наглядность и обозримость записей и такое их расположение, которое давало бы возможность уяснить логические связи и иерархию понятий.

По форме конспекты подразделяются на формализованные и графические.

1. Формализованные (все записи вносятся в заранее подготовленные таблицы).

Это удобно, во-первых, при конспектировании материалов, когда перечень характеристик описываемых предметов или явлений более или менее постоянен, во-вторых, при подготовке единого конспекта по нескольким источникам. Особенно если есть необходимость сравнения отдельных данных. Разновидностью формализованного конспекта является запись, составленная в форме ответов на заранее подготовленные вопросы, обеспечивающие исчерпывающие характеристики однотипных предметов или явлений.

2. Графические (элементы конспектируемой работы располагаются в таком виде, при котором видна иерархия понятий и взаимосвязь между ними).

По каждой работе может быть не один, а несколько графических конспектов, отображающих книгу в целом и отдельные ее части. Ведение графического конспекта – наиболее совершенный способ изображения внутренней структуры книги, а сам этот процесс помогает усвоению ее содержания.

Можно выделить следующие основные **типы конспектов: плановый, текстуальный, сводный, тематический.**

Плановый – легко получить с помощью предварительно сделанного плана произведения, каждому вопросу плана отвечает определенная часть конспекта:

а) вопросно-ответный (на пункты плана, выраженные в вопросительной форме, конспект дает точные ответы);

б) схематичный плановый конспект (отражает логическую структуру и взаимосвязь отдельных положений).

Текстуальный – это конспект, созданный в основном из цитат.

Сводный конспект – сочетает выписки, цитаты, иногда тезисы; часть его текста может быть снабжена планом.

Тематический – дает более или менее исчерпывающий ответ (в зависимости из числа привлеченных источников и другого материала, например, своих же записей) на поставленный вопрос – тему: обзорный; хронологический.

Роль конспекта – чисто учебная: он помогает зафиксировать основные понятия и положения первичного текста и в нужный момент их воспроизвести, например, при написании реферата или подготовке к экзамену.

Способы конспектирования.

- **Тезисы** – это кратко сформулированные основные мысли, положения изучаемого материала. Тезисы лаконично выражают суть читаемого, дают возможность раскрыть содержание. Приступая к освоению записи в виде тезисов, полезно в самом тексте отмечать места, наиболее четко формулирующие основную мысль, которую автор доказывает (если, конечно, это не библиотечная книга). Часто такой отбор облегчается шрифтовым выделением, сделанным в самом тексте.

- **Линейно-последовательная запись текста.** При конспектировании линейно – последовательным способом целесообразно использование плакатно-оформительских средств, которые включают в себя следующие:

- сдвиг текста конспекта по горизонтали, по вертикали;
- выделение жирным (или другим) шрифтом особо значимых слов;
- использование различных цветов;

- подчеркивание;
- заключение в рамку главной информации.

- **Способ «вопросов – ответов».** Он заключается в том, что, поделив страницу тетради пополам вертикальной чертой, конспектирующий в левой части страницы самостоятельно формулирует вопросы или проблемы, затронутые в данном тексте, а в правой части дает ответы на них.

Одна из модификаций способа «вопросов – ответов» - таблица, где место вопроса занимает формулировка проблемы, поднятой автором (лектором), а место ответа – решение данной проблемы. Иногда в таблице могут появиться и дополнительные графы: например, «мое мнение» и т. п.

- **Схема с фрагментами** – способ конспектирования, позволяющий ярче выявить структуру текста, - при этом фрагменты текста (опорные слова, словосочетания, пояснения всякого рода) в сочетании с графикой помогают созданию рационально - лаконичного конспекта.

- **Простая схема** – способ конспектирования, близкий к схеме с фрагментами, объяснений к которой конспектирующий не пишет, но должен уметь давать их устно. Этот способ требует высокой квалификации конспектирующего. В противном случае такой конспект нельзя будет использовать.

- **Параллельный способ** конспектирования. Конспект оформляется на двух листах параллельно или один лист делится вертикальной чертой пополам и записи делаются в правой и в левой части листа.

Однако лучше использовать разные способы конспектирования для записи одного и того же материала.

Комбинированный конспект – вершина овладения рациональным конспектированием. При этом умело используются все перечисленные способы, сочетая их в одном конспекте (один из видов конспекта свободно перетекает в другой в зависимости от конспектируемого текста, от желания и умения конспектирующего). Именно при комбинированном конспекте более всего проявляется уровень подготовки и индивидуальность студента.

Принципы составления конспекта прочитанного.

1. Записать все выходные данные источника: автор, название, год и место издания. Если текст взят из периодического издания (газеты или журнала), то записать его название, год, месяц, номер, число, место издания.

2. Выделить поля слева или справа, можно с обеих сторон. Слева на полях отмечаются страницы оригинала, структурные разделы статьи или книги (названия параграфов, подзаголовки и т. п.), формулируются основные проблемы. Справа – способы фиксации прочитанной информации.

Один из видов чтения – углубленное – предполагает глубокое усвоение прочитанного и часто сохранение информации в целях последующего обращения к ней. Эффективность такого чтения повышается, если прочитанное зафиксировано не только в памяти, но и на бумаге. Психологи утверждают, что записанное лучше и полнее усваивается, прочнее откладывается в памяти. Установлено, что если прочитать 1000 слов и затем записать 50, подытоживающих прочитанное, то коэффициент усвоения будет выше, чем, если прочитать 10000 слов, не записав ни одного. Кроме того, при записи прочитанного формируется навык свертывания информации. И, наконец, чередование чтения и записывания уменьшает усталость, повышает работоспособность и производительность умственного труда.

1. Резюмирование.

Резюме – краткий итог прочитанного, содержащий его оценку. Резюме характеризует основные выводы книги, главные итоги.

Выбор языковых средств для построения резюме-выводов подчинен основной задаче свертывания информации: минимум языковых средств – максимум информации. Это обычно одно – три четких, кратких, выразительных предложения, раскрывающих, по мнению автора, самую суть описываемого объекта.

2. Аннотация.

Аннотация – краткая обобщенная характеристика печатной работы (книги, статьи), включающая иногда и его оценку. Это наискратчайшее изложение содержания первичного документа, дающее общее представление о теме.

Основное ее назначение – дать некоторое представление о книге (статье, научной работе) с тем, чтобы рекомендовать ее определенному кругу читателей или воспользоваться своими записями при выполнении работы исследовательского, реферативного характера. Поэтому аннотации не требуются изложения содержания произведения, в ней лишь перечисляются вопросы, которые освещены в первоисточнике (содержание этих вопросов не раскрывается). Аннотация отвечает на вопрос: «О чем говорится в первичном тексте?», дает представление только о главной теме и перечне вопросов, затрагиваемых в тексте первоисточника.

Текст аннотации не стандартизирован. В научной литературе можно встретить различные требования к составлению аннотаций. Например, текст справочной аннотации может включать следующие сведения:

- тип и название аннотируемого документа (монография, диссертация, сборник, статья и т. п.)
- задачи, поставленные автором аннотируемого документа
- метод, которым пользовался автор (эксперимент, сравнительный анализ, компиляция других источников)
- принадлежность автора к определенной научной школе или направлению
- структуру аннотируемого документа
- предмет и тему произведения, основные положения и выводы автора
- характеристику вспомогательных иллюстративных материалов, дополнений, приложений, справочного аппарата, включая указатели и библиографию.

4.1 Комплект разноуровневых задач и заданий

1. Тема 2. Операции над дискретными последовательностями и схемы инвариантных к сдвигу линейные систем.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Как представляются математически дискретные сигналы?
- 2) Как изображают дискретные сигналы?
- 3) Изобразить графически дискретные сигналы (последовательности).
- 4) Как определяется система с дискретным временем с точки зрения математики?
- 5) Чем определяются классы систем?
- 6) Основные преобразования при анализе дискретных сигналов и в системах обработки сигналов над последовательностями.

- 7) Как определяется единичный импульс?
- 8) Изобразить графически систему с дискретным временем.
- 9) Что такое идеальная система задержки?
- 10) Написать формулу идеальной системы задержки.

Задания повышенного уровня:

- 1) Написать соотношение для произвольной последовательности.
- 2) Как выражается единичный скачок через импульс? Написать формулу.
- 3) Как записываются экспоненциальные последовательности?
- 4) Как записывается синусоидальная последовательность?
- 5) В каком случае последовательность считают периодичной?
- 6) Общая формула скользящего среднего.

2. Тема 4. Дискретные сигналы, их представление в частотной и импульсной области

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Какими способами можно представить дискретные сигналы?
- 2) Как определить КЧХ системы?
- 3) В чём отличие КЧХ дискретных систем от КЧХ непрерывных систем?
- 4) Изобразить КЧХ идеального фильтра нижних частот.
- 5) Свойства симметрии преобразования Фурье.
- 6) Теоремы о преобразовании Фурье.
- 7) Пары, связанные преобразованием Фурье.
- 8) Определение импульсной характеристики разностного уравнения.

Задания повышенного уровня:

- 1) Формула Эйлера.
- 2) Изобразить КЧХ идеального частотно-избирательного фильтра.

3. Тема 6. Дискретизация методом прямого z-преобразования.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Написать формулу z-преобразования Фурье последовательности $x[n]$.
- 2) Написать формулу одностороннего z-преобразования.
- 3) Написать формулу двустороннего z-преобразования.
- 4) Изобразить окружность единичного радиуса с центром в нуле.
- 5) Для каких последовательностей существует z-преобразование?
- 6) Что такое область сходимости (ОС)?
- 7) Свойства ОС z-преобразования.
- 8) z-преобразование стандартных последовательностей.

Задания повышенного уровня:

- 1) Написать формулу преобразования Фурье произведения исходной последовательности на экспоненциальную r^{-n} .
- 2) Написать формулу ряда Лорана.
- 3) Схема нулей и полюсов в ОС.
- 4) Пример правосторонней последовательности.
- 5) Левосторонняя экспоненциальная последовательность.
- 6) Сумма двух экспонент

4. Тема 7. Дискретизация методом обратного z-преобразования

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) В чём состоит табличный метод?

- 2) В чём состоит метод простейших дробей?
- 3) Свойства z -преобразований.
- 4) Рациональная функция второй степени.
- 5) В чём заключается метод простейших дробей в обратном z –преобразовании?
- 6) Разложение в степенные ряды.
- 7) Вычисление обратного преобразования с помощью степенных рядов.

Задания повышенного уровня:

- 1) Написать любую рациональную функцию от z^{-1} .
- 2) Свойство линейности.
- 3) Свойство задержки.
- 4) Умножение на экспоненциальную последовательность.
- 5) Дифференцирование.

5. Тема 9. Представление последовательностей конечной длины дискретным рядом Фурье

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Написать формулы преобразования Фурье.
- 2) В каких формах можно записать Фурье-образ?
- 3) Что такое абсолютная суммируемость?
- 4) Суммируемость с квадратом для идеального фильтра нижних частот.
- 5) Фурье-образ постоянной последовательности.
- 6) Преобразование Фурье комплексных экспоненциальных последовательностей.
- 7) Изобразить графики частичных сумм преобразования Фурье.

Задания повышенного уровня:

- 1) Написать формулу обратного преобразования Фурье.
- 2) Абсолютная суммируемость мгновенно примененной экспоненты.
- 3) Написать формулу Фурье-образа последовательности $x[n]$ как периодическую цепочку импульсов.

6. Тема 11. Вычисление свертки двух последовательностей дискретным преобразованием Фурье

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Метод вычисления свертки двух последовательности.
- 2) Линейная свертка двух конечных последовательностей.
- 3) Циклическая свертка как линейная с наложением во времени.
- 4) Циклическая свертка как линейная с наложением.
- 5) Когда циклическая свёртка совпадает с линейной?

Задания повышенного уровня:

- 1) Графически изобразить сравнение циклической свертки и линейной с наложением.
- 2) Написать формулу) L -точечной циклической свертки.
- 3) Графически изобразить процесс формирования циклической свертки в результате «наворачивания».

7. Тема 12. Реализация двумерной линейной свертки последовательностей с помощью круговой свертки.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Реализация ЛС-систем через дискретное преобразование Фурье.
- 2) Почему возникает перекрытие участков?
- 3) В чём заключается метод хранения перекрытий?

- 4) Дискретное косинус-преобразование.
- 5) Существует ли преобразование, сохраняющее вещественность и почему?
- 6) Определение дискретного косинус-преобразования.

Задания повышенного уровня:

- 1) Нарисовать профильтрованные участки $y_r[n] = x_r[n] * h[n]$.
- 2) Формула разделения входной последовательности $x[p]$ на L-членные сегменты.
- 3) Написать формулу свойства попарной ортогональности.
- 4) Нарисовать периодичность, неявно присутствующую в четырех типах ДКП, называемых ДКП-1, ДКП-2, ДКП-3 и ДКП-4.

8. Тема 14 Представление цифровых фильтров в виде сигнальных графов.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Дать определение сигнального потокового графа.
- 2) Нарисовать пример узлов и ветвей сигнального потокового графа.
- 3) Дать определения стока и истока.
- 4) Нарисовать пример сигнального потокового графа со стоком и истоком.
- 5) Базисные операции, необходимые для реализации линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.
- 6) Потоковый граф.

Задания повышенного уровня:

- 1) Соотношения, описывающие сток и исток.
- 2) Нарисовать потоковый граф.
- 3) Вычисление характеристической функции по потоковому графу.

9. Тема 15. Представление цифровых фильтров в виде систем линейных уравнений.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) По заданной системе линейных уравнений постройте направленный сигнальный граф.
- 2) Вычислимый и невычислимый сигнальные направленные графы.

Задания повышенного уровня:

- 1) Используя указанные обозначения узловых переменных, выпишите систему разностных уравнений, представленную этой сетью.
- 2) Нарисуйте эквивалентный потоковый граф, изображающий каскад двух подсистем первого порядка.

10. Тема 16. Построение структурных схем БИХ-фильтров и их синтез.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Прямые формы.
- 2) Структура прямой формы.
- 3) Каскадные формы.
- 4) Структура каскадной формы.
- 5) Параллельные формы.
- 6) Структура параллельной формы.

Задания повышенного уровня:

- 1) Нарисовать пример прямой формы.
- 2) Нарисовать пример каскадной формы.
- 3) Нарисовать пример параллельной формы.

11. Тема 17. Построение структурных схем КИХ-фильтров и их синтез.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Прямые формы.
- 2) Структура прямой формы.
- 3) Каскадные формы.
- 4) Структура каскадной формы.
- 5) КИХ-система с линейной фазой.
- 6) Структура КИХ-систем с линейной фазой.

Задания повышенного уровня:

- 1) Нарисовать пример прямой формы.
- 2) Нарисовать пример каскадной формы.
- 3) Нарисовать пример КИХ-систем с линейной фазой.

12. Тема 19. Квантование параметров в системах с бесконечными импульсными характеристиками.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Из каких комбинаций состоят каскадная и параллельная формы?
- 2) Квантование коэффициентов в эллиптическом фильтре.

Задания повышенного уровня:

- 1) Пример квантования коэффициентов БИХ-системы.
- 2) Неквантованные коэффициенты каскадной формы для эллиптического фильтра 12-го порядка.
- 3) 16-битовые квантованные коэффициенты каскадной формы для эллиптического фильтра 12-го порядка.

13. Тема 20. Квантование параметров в системах с конечными импульсными характеристиками.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Парная форма реализации комплексно сопряженных полюсов.
- 2) Положения полюсов для парной формы реализации БИХ-системы.
- 3) Представление квантованных коэффициентов в КИХ-системе.

Задания повышенного уровня:

- 1) Пример квантования оптимального КИХ-фильтра.
- 2) Неквантованные и квантованные коэффициенты для оптимального КИХ-фильтра нижних частот ($M = 27$).
- 3) Пример квантования коэффициентов КИХ-системы.

14. Тема 22. Методы расчетов цифровых фильтров, основанные на численном решении дифференциального уравнения

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Второй подход к получению цифрового фильтра.
- 2) Что обеспечивает замена производных конечными разностями?
- 3) Как определить прямую разность?

Задания повышенного уровня:

- 1) спроектировать вещественнозначный дискретный КИХ-фильтр с обобщенной линейной фазой и с заданными спецификациями.

15. Тема 23. Расчет фильтров на основе аналого-цифровой трансформации

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Чем характеризуются фильтры Баттерворта?
- 2) Фильтры Чебышева.

Задания повышенного уровня:

- 1) Какой вид имеет выражение для квадрата амплитудной характеристики аналогового фильтра Баттерворта?
- 2) Изобразить квадрат амплитудной характеристики аналогового фильтра Баттерворта.
- 3) Изобразить зависимость амплитудной характеристики фильтра Баттерворта от его порядка N .
- 4) Какой вид имеет аналитическое выражение для квадрата амплитудной характеристики?

16. Тема 25. Метод наименьших квадратов для БИХ-фильтров

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Вывод алгоритма наименьших квадратов.
- 2) Способы реализации адаптивного линейного сумматора.

Задания повышенного уровня:

- 1) Написать формулу алгоритма метода наименьших квадратов.
- 2) Написать формулу итерации адаптивного процесса оценка градиента.

17. Тема 26. Расчет КИХ-фильтров методом частотной выборки.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Структурная схема КИХ-фильтра.
- 2) Как связана ФЧХ цифрового фильтра с групповой задержкой?
- 3) Типы импульсных характеристик КИХ-фильтров.
- 4) В чём заключается эффект Гиббса?
- 5) Основное достоинство эффекта Гиббса.
- 6) Почему возникает эффект Гиббса?

Задания повышенного уровня:

- 1) Окончательно выражение для импульсной характеристики КИХ фильтра с линейной ФЧХ.
- 2) Отсчеты комплексного коэффициента.
- 3) Значения реальной и мнимой частей комплексного коэффициента передачи.
- 4) Как рассчитывается коэффициент разложения?

18. Тема 27. Аппроксимации с равновеликими пульсациями для КИХ-фильтров

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Допустимые ошибки для аппроксимации фильтра нижних частот.
- 2) Подходы к получению оптимальных изменений параметров.
- 3) Что является важным параметром аппроксимации с равновеликими пульсациями?
- 4) Теорема чередования.
- 5) Применение теоремы чередования.
- 6) Алгоритм Паркса-Макклеллана.

Задания повышенного уровня:

- 7) Записать систему уравнений, гарантирующих для частотной характеристики режим с равновеликими пульсациями.
- 8) В чём являются отличия подходов к получению оптимальных изменений параметров?
- 9) В чём заключается гибкость метода аппроксимации с равновеликими пульсациями?

10) В чём заключается недостаток метода аппроксимации с равновеликими пульсациями?

5. Список рекомендуемой литературы

5.1. Основная литература:

1. Коберниченко, В. Г. Основы цифровой обработки сигналов : учебное пособие / В. Г. Коберниченко. — Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2018. — 150 с. — ISBN 978-5-7996-2464-4. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/106756.html>

2. Коберниченко, В. Г. Основы цифровой обработки сигналов : учебное пособие / В. Г. Коберниченко. — Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2018. — 150 с. — ISBN 978-5-7996-2464-4. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/106756.html>

5.2. Дополнительная литература:

1. Умняшкин, С. В. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов : учебное пособие / С.В. Умняшкин. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва : Техносфера, 2012. - 368 с. - (Мир цифровой обработки). - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233733>

5.3. Методическая литература:

1. Электронный курс лекций.
2. Электронные методические рекомендации для выполнения лабораторных работ.
3. Макаров Е.Г. MATHCAD: учебный курс (+CD). – СПб: Питер, 2015. – 384 с.

5.4. Интернет-ресурсы:

1. <http://dsra.ru/>– научно-технический журнал «Цифровая обработка сигналов».

5.5. Программное обеспечение

1. Программа тестового контроля «Айрен».
2. Программа «Mathcadv.14» для автоматизации математических вычислений.
3. Программа MATLAB 6.5 / Simulink 5 для разработки алгоритмов, визуализации и анализа данных, автоматизации числовых расчетов.