

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Методические указания
по выполнению практических работ
по дисциплине «Геометрия»**

для студентов направления подготовки
09.03.02 «Информационные системы и технологии»
Профиль «Прикладное программирование и интернет-технологии»

Ставрополь, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Глава I. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве.

§ 1.1. Векторы. Операции над векторами.

1. Направленные отрезки.
2. Векторы. Коллинеарные и компланарные векторы.
3. Определение суммы двух векторов. Свойства сложения.
4. Сумма n векторов.
5. Разность векторов.

§ 1.2. Умножение вектора на число.

1. Определение умножения вектора на число.
2. Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов (в векторной форме).
3. Свойства умножения вектора на число.

§ 1.3. Линейная зависимость векторов.

1. Определение линейно-зависимой системы векторов.
2. Свойства линейной зависимости векторов.
3. Теоремы о линейной зависимости векторов.

§ 1.4. Координаты вектора.

1. Векторное пространство. Векторное подпространство.
2. Координаты вектора.
3. Свойства координат вектора.

§ 1.5. Скалярное произведение векторов.

1. Проекция вектора на ось.
2. Определение и свойства скалярного произведения векторов.
3. Выражение скалярного произведения в координатах.
4. Длина вектора.

Глава II. Метод координат на плоскости и в пространстве.

§ 2.1. Системы координат на плоскости и в пространстве

1. Аффинная система координат на плоскости и в пространстве.
2. Прямоугольная декартова система координат.
3. Расстояние между точками.
4. Полярная система координат.

Глава III. Прямая линия на плоскости.

§ 3.1. Различные способы задания уравнений прямой на плоскости.

1. Каноническое уравнение прямой.
2. Параметрическое уравнение прямой.
3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
4. Уравнение прямой, заданной точкой и угловым коэффициентом.
5. Уравнение прямой в «отрезках».
6. Вектор нормали. Уравнение прямой с вектором нормали.
7. Общее уравнение прямой.

§ 3.2. Взаимное расположение двух прямых.

§ 3.3. Расстояние от точки до прямой.

§ 3.4. Углы между прямыми.

1. Угол и направленный угол между прямыми.
2. Нахождение угла между прямыми, заданными общими уравнениями.
3. Нахождение угла между прямыми, заданными с угловыми коэффициентами.

Глава IV. Линии второго порядка.

§ 4.1. Эллипс.

1. Определение и каноническое уравнение эллипса.

2. Исследование форм эллипса.
3. Эксцентриситет и директрисы эллипса.

§ 4.2. Гипербола.

1. Определение и каноническое уравнение гиперболы.
2. Исследование форм гиперболы.
3. Равносторонняя гипербола.
4. Сопряженные гиперболы.
5. Эксцентриситет и директрисы гиперболы.

§ 4.3. Парабола.

1. Определение и каноническое уравнение параболы.
2. Исследование форм параболы.

§ 4.4. Классификация линий второго порядка.

Глава V. Плоскости и прямые в пространстве.

§ 5.1. Различные виды задания уравнений плоскости.

1. Каноническое уравнение плоскости.
2. Параметрическое уравнение плоскости
3. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.
4. Уравнение плоскости в «отрезках».
5. Вектор нормали. Уравнение плоскости с вектором нормали.
6. Общее уравнение плоскости.

§ 5.2. Взаимное расположение двух плоскостей.

§ 5.3. Метрические задачи теории плоскостей.

1. Расстояния между точкой и плоскостью.
2. Угол между двумя плоскостями.

§ 5.4. Уравнение прямой в пространстве.

1. Каноническое уравнение прямой.
2. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
3. Уравнение прямой, заданной двумя плоскостями.
4. Параметрическое уравнение прямой.

§ 5.5. Взаимное расположение прямых в пространстве.

§ 5.6. Взаимное расположение прямой и плоскости.

§ 5.7. Угол между прямыми.

§ 5.8. Угол между прямой и плоскостью.

Глава VI. Поверхности второго порядка

§ 6.1. Поверхности второго порядка. Метод сечений. Поверхности вращения.

§ 6.2. Цилиндрические поверхности.

1. Определение цилиндрических поверхностей.
2. Классификация цилиндрических поверхностей.

§ 6.3. Конические поверхности.

§ 6.4. Эллипсоид.

§ 6.5. Гиперболоиды.

1. Однополосный гиперболоид.
2. Двуполостный гиперболоид.

§ 6.6. Параболоиды.

1. Эллиптический параболоид.
2. Гиперболический параболоид.

§ 6.7. Классификация и исследование поверхностей второго порядка.

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения данной дисциплины Геометрия является усвоение студентами основ математического аппарата, необходимого для приобретения ими соответствующих компетенций (ОПК-1) в формировании способности использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности.

Достижение этой цели предполагает

- формирование математической культуры студентов: умения логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения практических задач;
- освоение основ современного математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач, связанных с применением методов аналитической геометрии в дисциплинах естественнонаучного содержания;
- применение основных понятий, идей и методов аналитической геометрии для решения базовых задач;
- умение находить, анализировать и контекстно обрабатывать научно-техническую информацию.

В результате изучения дисциплины «Геометрия» студент должен

Знать:

основные понятия, определения и свойства геометрических объектов, основные понятия аналитической геометрии, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

Уметь:

решать задачи вычислительного и теоретического характера в области аналитической геометрии; применять алгебраические и геометрические методы для решения прикладных задач, а также производить оценку качества полученных решений, применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания;

Владеть:

математическим аппаратом аналитической геометрии, аналитическими методами исследования геометрических объектов, навыками применения этого в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

Практическое занятие № 1-3

Темы занятий: Векторы и действия над ними. Линейная зависимость векторов. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов.

Цель занятия: Введение понятия вектора, операций над векторами, повторение свойств основных операций над векторами, известных из школьного курса.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Направленные отрезки. Векторы. Коллинеарные и компланарные векторы.
2. Сложение векторов (Определение и свойства).
3. Вычитание векторов.
4. Умножение вектора на число (Определение и свойства).
5. Теорема о коллинеарных векторах.
6. Линейная зависимость векторов (Определение и свойства).
7. Теоремы о линейной зависимости двух, трех, четырех векторов.
8. Векторное пространство.
9. Векторное подпространство.
10. Базис и размерность векторного пространства.
11. Базис и размерность векторного подпространства.
12. Примеры векторных подпространств.
13. Определение координат вектора. Свойства координат.
14. Скалярное произведение векторов.

Практические задания

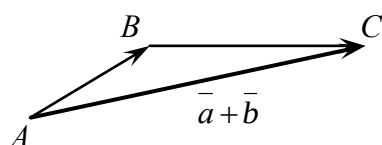
для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить их сумму.

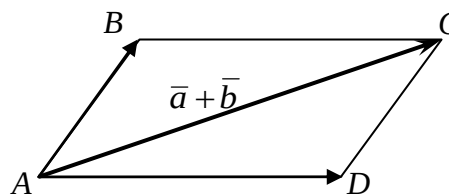
Решение. Построение можно выполнить двумя способами:

правило треугольника



Если $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \vec{b}$, то $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ по определению суммы.

правило параллелограмма



Если $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AD} = \vec{b}$, то $\overline{BC} = \overline{AD} = \vec{b}$ (по свойству противоположных сторон параллелограмма), поэтому $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ по определению суммы.

Задача 2. В треугольнике ABC M – середина стороны AB . Выразить вектор $\overline{CM}$ через векторы $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$.

Решение. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ADBC$ таким образом, чтобы отрезок CM лежал на его диагонали (рис. 6). По свойству параллелограмма $CM = MD$, по правилу параллелограмма $\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{CB}$, $\overline{CM} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$.

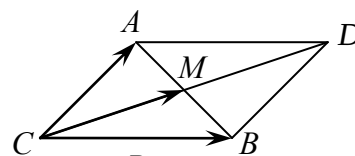


Рис. 6

Ответ: $\overline{CM} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$.

Задача 3. В тетраэдре $DABC$: $CM=MB$, $\overline{AD}=\overline{m}$, $\overline{DC}=\overline{n}$, $\overline{DM}=\overline{p}$ (рис. 7). Разложить вектор $\overline{AB}$ по векторам $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$. Выяснить компланарны ли векторы $\overline{AC} + \overline{AM}$, $\overline{DA} - \overline{DB}$, $\overline{BC}$.

Решение. По правилу многоугольника

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CB} = \overline{AD} + \overline{DC} + 2\overline{CM} = \\ &= \overline{AD} + \overline{DC} + 2(\overline{DM} - \overline{DC}) = \overline{m} + \overline{n} + 2\overline{p} - 2\overline{n} = \overline{m} + 2\overline{p} - \overline{n}.\end{aligned}$$

Вектор $\overline{AC} + \overline{AM}$ лежит в плоскости (ABC) , так как все точки A, C, M лежат в ней; $\overline{DA} - \overline{DB} = -\overline{AD} - \overline{DB} = -(\overline{AD} + \overline{DB}) = -\overline{AB} = \overline{BA}$ лежит в плоскости (ABC) , $\overline{BC}$ лежит в плоскости (ABC) . По определению эти векторы компланарны.

Ответ: $\overline{AB} = \overline{m} + 2\overline{p} - \overline{n}$, векторы $\overline{AC} + \overline{AM}$, $\overline{DA} - \overline{DB}$, $\overline{BC}$ компланарны.

Задача 4. В тетраэдре $DABC$: $AB=AC=a$, $\angle DAB = \angle DAC = \varphi$. Доказать, что $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

Доказательство. Пусть $\overline{AC} = \overline{x}$, $\overline{AB} = \overline{y}$, $\overline{AD} = \overline{z}$ (рис. 8), тогда $|\overline{x}| = AC = a$, $|\overline{y}| = AB = a$. Выразим вектор $\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC} = -\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{x} - \overline{y}$.

Пусть γ - угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$, тогда

$$\cos \gamma = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AD}| \cdot |\overline{BC}|}.$$

$$\begin{aligned}\overline{AD} \cdot \overline{BC} &= \overline{z} \cdot (\overline{x} - \overline{y}) = \overline{z} \cdot \overline{x} - \overline{z} \cdot \overline{y} = |\overline{z}| \cdot |\overline{x}| \cdot \cos \varphi - |\overline{z}| \cdot |\overline{y}| \cos \varphi = \\ &= |\overline{z}|(a \cdot \cos \varphi - a \cdot \cos \varphi) = 0,\end{aligned}$$

следовательно, $\cos \gamma = 0$ и $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

Задача 5. Показать, что коллинеарные векторы линейно зависимы.

Решение. По определению умножения вектора на число для любых двух коллинеарных векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ найдется такое число a , что $\overline{a}_1 = a\overline{a}_2$, т.е. $\overline{a}_1 - a\overline{a}_2 = \overline{0}$ и коэффициент при $\overline{a}_1$ равен $1 \neq 0$, по определению $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ линейно зависимы.

Задача 6. Доказать, что три компланарных вектора линейно зависимы.

Доказательство. Пусть векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны, тогда, если отложить их от одной точки O , то все три вектора будут лежать в одной плоскости.

Построим на векторах параллелограмм OA_1BC_1 следующим образом: OB - диагональ, $\overline{OB} = \overline{b}$, а стороны параллелограмма параллельны векторам $\overline{a}$ и $\overline{c}$ (рис.9). Тогда по определению умножения вектора на число $\overline{OA_1} = a\overline{a}$, $\overline{OC_1} = \gamma\overline{c}$, по правилу параллелограмма $\overline{OB} = \overline{OA_1} + \overline{OC_1}$ или $\overline{b} = a\overline{a} + \gamma\overline{c}$, т.е. $\overline{b} - a\overline{a} - \gamma\overline{c} = \overline{0}$, следовательно, векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ линейно зависимы.

Задача 7. Доказать, что для того, чтобы векторы были коллинеарными необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональными.

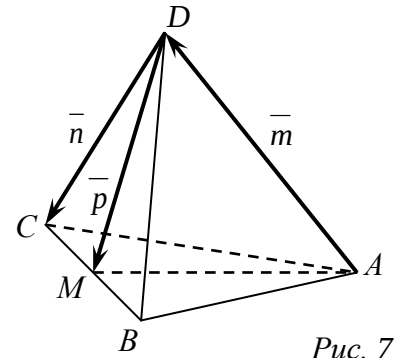


Рис. 7

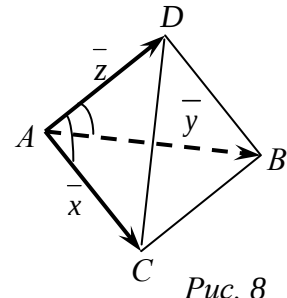


Рис. 8

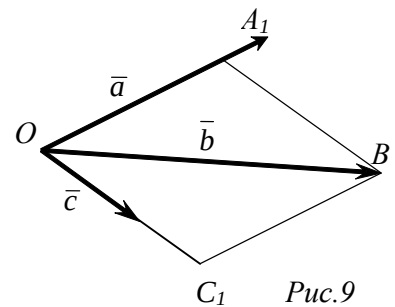


Рис. 9

Доказательство. Пусть векторы $\bar{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\bar{b}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ коллинеарные, тогда $\bar{b} = a\bar{a} = (aa_1, aa_2, \dots, aa_n)$, последнее, при условии, что все координаты вектора $\bar{b}$ отличны от нуля, равносильны равенствам

$$b_1 = aa_1, b_2 = aa_2, \dots, b_n = aa_n, \text{ т.е. } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{a}.$$

Задача 8. Показать, что на плоскости векторы $\bar{e}_1(1,2)$ и $\bar{e}_2(3,4)$ образуют базис. Найти координаты вектора $\bar{x}(7,10)$ в этом базисе.

Решение. Пусть векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ линейно зависимы, тогда существует единственное число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\bar{e}_2 = c \cdot \bar{e}_1$, т.е. $(3,4) = (1c, 2c)$. Запишем это равенство в координатах $\begin{cases} 3 = c, \\ 4 = 2c; \end{cases}$

$\begin{cases} c = 3, \\ c = 2, \end{cases}$ что невозможно, следовательно, векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ линейно независимы. Покажем, что

произвольный вектор $\bar{a}(a_1, a_2)$ можно разложить по векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, т.е. найдутся $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такие, что $\bar{a} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2$. Запишем это равенство в координатах $\begin{cases} \alpha + 3\beta = a_1, \\ 2\alpha + 4\beta = a_2. \end{cases}$ Найдем α и β , для

этого решим систему уравнений методом Гаусса.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0, \text{ следовательно, система имеет единственное решение, т.е.}$$

разложение произвольного вектора $\bar{a}$ по векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ единственно. Это значит, что векторы $\bar{a}$, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ линейно зависимы, как и любые три вектора, поэтому $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ образуют базис.

Найдем координаты вектора $\bar{x}$ относительно этого базиса. Для этого подставим в систему вместо a_1, a_2 координаты вектора $\bar{x}$:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 7, \\ 2\alpha + 4\beta = 10, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + 3\beta = 7, \\ \alpha + 2\beta = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = 2, \\ \alpha = 5 - 2\beta, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = 2, \\ \alpha = 1, \end{cases} \quad \text{т.е. } \bar{x} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2.$$

Ответ: $\bar{x} = (1,2)$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

Пусть O – некоторая точка линейного векторного пространства, от которой отложены базисные векторы. Тогда O называется *началом координат*, а прямые, проходящие через точку O параллельно векторам базиса, называются *осями координат*. Вектор $\overline{OM}$, начало которого находится в начале координат, а конец в точке M , называется *радиус-вектором* точки M , координаты радиус-вектора точки называются *координатами* этой точки.

Если вектор задан двумя точками $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – начало вектора и $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ – конец вектора, то $\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$.

Задача 9. Построить точку M и вектор $\bar{a}$ в заданном базисе, если: а) $M(2, -1)$, $\bar{a}(-3, \frac{1}{2})$.

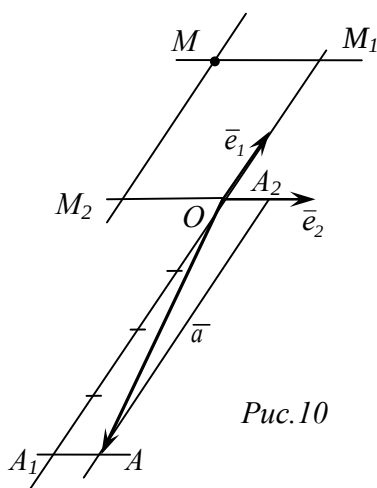


Рис.10

Решение. В данном базисе построим векторы $\overline{OM}_1 = 2\bar{e}_1, \overline{OM}_2 = -\bar{e}_2$ (рис. 10), тогда по правилу параллелограмма

$$\overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 = 2\bar{e}_1 + (-\bar{e}_2) = (2, -1).$$

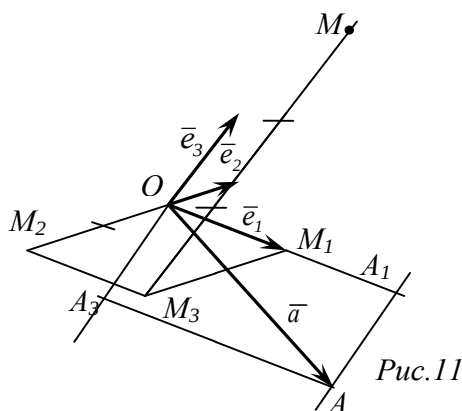
Вектор $\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2$ является радиус-вектором точки M , поэтому его конечная точка является искомой точкой M .

Построим вектор $\overline{OA}_1 = -3\bar{e}_1$ и $\overline{OA}_2 = \frac{1}{2}\bar{e}_2$, по правилу параллелограмма

$$\overline{OA} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} = -3\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 = \left(-3, \frac{1}{2}\right) = \vec{a},$$

т.е. $\overline{OA}$ совпадает с искомым вектором $\vec{a}$ (рис.10).

б) $M(1, -2, 3), \vec{a}(2, 0, -1)$.



Решение. Построим векторы $\overline{OM_1} = \vec{e}_1$ и $\overline{OM_2} = -2\vec{e}_2$ (рис. 11). По правилу параллелограмма $\overline{OM_3} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2}$. Из точки M_3 построим вектор $\overline{M_3M} = 3\vec{e}_3$, по правилу параллелограмма $\overline{OM} = \overline{M_3M} + \overline{OM_3} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3} = \vec{e}_1 + (-2)\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3(1, -2, 3)$, поэтому конечная точка вектора $\overline{OM}$ является искомой точкой M .

Построим векторы $\overline{OA_1} = 2\vec{e}_1$ и $\overline{OA_3} = -\vec{e}_3$ (рис.11). По правилу параллелограмма

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= \overline{OA_1} + \overline{OA_3} = 2\vec{e}_1 + (-1)\vec{e}_3 = 2\vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + (-1)\vec{e}_3 = \\ &= (2, 0, -1) = \vec{a}, \text{ т.е. вектор } \overline{OA} - \text{искомый вектор } \vec{a}. \end{aligned}$$

Задача 10. Точка $C(2,3)$ служит серединой отрезка AB . Определить координаты точки A , если $B(7,5)$.

Решение. Пусть $A(x,y)$, тогда $\overline{AC} = (2-x, 3-y)$, $\overline{CB} = (7-2, 5-3) = (5, 2)$ и так как $\overline{AC} = \overline{CB}$, то $\begin{cases} 2-x=5, \\ 3-y=2, \end{cases} \begin{cases} x=-3, \\ y=1. \end{cases}$

Ответ. $A(-3,1)$.

Задания для самостоятельной работы дома

- В треугольнике ABC M – точка пересечения медиан. Доказать, что $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}$.
- В треугольнике ABC M – точка пересечения медиан. Показать, что $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$, где O – произвольная точка пространства.
- В треугольнике ABC : $\overline{CA} = \vec{a}, \overline{CB} = \vec{b}$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы:
- $\overline{CB_1}$, где B_1 – середина AC ;
- $\overline{CC_1}$, где C_1 – середина AB ;
- $\overline{CK}$, где $K \in AB$, $AK:KB=3:10$.
- В правильном шестиугольнике $ABCDEF$: $\overline{BC} = \vec{m}, \overline{BD} = \vec{n}$. Выразить все его стороны и все диагонали через $\vec{m}$ и $\vec{n}$.
- Точка C делит отрезок AB в отношении $AC:CB=m:n$. Показать, что:
- 1) $\overline{AC} = \frac{m}{n}\overline{CB}$;
- 2) $\overline{OC} = \frac{n}{m+n}\overline{OA} + \frac{m}{m+n}\overline{OB}$, где O – произвольная точка.
- Доказать условие принадлежности трех точек одной прямой: для того чтобы точки A, B, C принадлежали одной прямой необходимо и достаточно, чтобы $\overline{OC} = k\overline{OA} + (1-k)\overline{OB}$, где O – произвольная точка, $\overline{BC} = k\overline{BA}$.
- Доказать условие принадлежности четырех точек одной плоскости: для того чтобы точка M принадлежала плоскости, определяемой точками A, B, C , не лежащими на одной

- прямой, необходимо и достаточно, чтобы $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + (1-k-l)\overrightarrow{OC}$, где O – произвольная точка.
13. Точки M_1 и M_2 – середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Доказать, что $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2})$.
 14. Доказать *необходимый и достаточный признак параллелограмма*: для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом необходимо и достаточно, чтобы для произвольной точки O выполнялось равенство $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.
 15. В треугольнике ABC : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{n}$. Построить вектор $\frac{\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}}{2}$.
 16. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, чтобы вектор $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ делил пополам угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$?
 17. В трапеции $ABCD$: $BC \parallel DA$, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Разложить вектор $\overrightarrow{DA}$ по векторам $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{DB}$.
 18. В параллелограмме $ABCD$ O – точка пересечения медиан, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{b}$. Выразить через $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ следующие векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$.
 19. Отрезок AB разделен на n равных частей точками $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$. Зная, что $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{b}$, где O – произвольная точка, выразить через $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ следующие векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OC_2}$, ..., $\overrightarrow{OC_{n-1}}$.
 20. В треугольнике ABC M – точка пересечения медиан, O – произвольная точка внутри треугольника. Выразить $\overrightarrow{OM}$ через $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$.
 21. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{d}$, точка E делит отрезок DC_1 в отношении 1:3. Выразить через $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ следующие векторы $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{B_1F}$.
 22. Точки M и M_1 – точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Доказать, что $\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1})$.
 23. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $BM = MC$, $D_1N = NC_1$, $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{AA_1}$. Разложить векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PA}$ по векторам $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$, если P – середина DC .
 24. Через вершину A треугольника ABC проведен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. $\angle ABD = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Выразить косинус угла между векторами $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$ через углы α и β .
 25. Известно, что единичные векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ образуют попарно углы по 60° . Найти угол:
 - 1) между $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$;
 - 2) между $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$.
 26. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ со стороной a найти:
 27. 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}^2$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE}$;
 28. 2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$, где O – центр шестиугольника.
 29. Доказать, что $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\overrightarrow{a}^2}$.
 30. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, чтобы имело место соотношение $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|$?
 31. В прямоугольнике $ABCD$ M и N – середины сторон CB и AB соответственно, $CB = 3$, $AB = 4$. Разложить вектор $\overrightarrow{DB}$ по векторам $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{c}$.

32. Даны три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, причем, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$. Вычислить $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.
33. Показать, что угол φ между диагоналями прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} \perp \vec{b}$), определяется формулой $\cos \varphi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.
34. Доказать, что вектор $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$.
35. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны и имеют равные длины. Доказать, что $\vec{p} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$ и $\vec{q} = 10\vec{a} - 6\vec{b}$ взаимно перпендикулярны.
36. Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle \varphi = \left(\vec{a}, \vec{b} \right) = \frac{2}{3}\pi$. Найти: $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$, $(\vec{a} + \vec{b})^2$.
37. Являются ли в пространстве многочленов степени не выше двух линейно зависимыми векторы $p_1 = 1 + 2t + 3t^2$, $p_2 = 2 + 3t + 4t^2$, $p_3 = 3 + 5t + 7t^2$?
38. Даны коллинеарные и сонаправленные векторы $\vec{a}(n, 1)$, $\vec{b}(4, n)$. Определите n .
39. Известно, что $A(3, 4, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(-2, -6, -4)$, $D(2, 3, 4)$. Лежат ли на одной прямой точки:
40. 1) A, B, C ; 2) A, B, D ?
41. Векторы $\vec{a}(1, 2, 3)$ и $\vec{AB}$, где $A(1, 1, 1)$, $B \in XOY$, коллинеарны. Найти координаты точки B .
42. Прямая задана двумя точками $A(-12, -13)$, $B(-2, -5)$. Найти на ней точку M с абсциссой, равной 3.
43. В треугольнике ABC проведены медиана BK , средняя линия $MN \parallel AC$, $O = BK \cap MN$. $\vec{KC} = \vec{e}_1$, $\vec{KM} = \vec{e}_2$. Определить в этом базисе координаты следующих векторов:
44. а) $\vec{CM}$, $\vec{KN}$, $\vec{NC}$,
45. б) $\vec{OB}$, $\vec{CB}$, $\vec{AM}$.
46. В параллелограмме $ABCD$ $A(-4, 4)$, $B(2, 8)$, $M(2, 2)$ – точка пересечения диагоналей. Найти C, D .
47. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $P(2, 2)$ и $Q(1, 5)$ разделен на 3 равные части.
48. Точка M делит направленный отрезок $\vec{M_1M_2}$ в отношении $\lambda (\lambda \neq 1)$, если $\vec{M_1M} = \lambda \vec{MM_2}$. Доказать, что если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты точки M вычисляются по формулам $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$.
49. Получить формулы для вычисления координат середины отрезка AB , если $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.
50. Известны точки $A(-2, 5)$, $B(4, 17)$. На отрезке AB находится точка C , расстояние до которой от точки A в два раза больше расстояния от точки B . Найти координаты точки C .
51. Образуется ли линейное пространство множество элементов вида $(x_1, x_2, 0, 0)$, $(y_1, y_2, 0, 0)$, $(z_1, z_2, 0, 0)$?
52. Является ли линейным пространством множество систем четырех действительных чисел $(x_1, x_2, 1, 1)$, $(y_1, y_2, 1, 1)$, $(z_1, z_2, 1, 1)$, где $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ – всевозможные действительные числа, если действия над такими векторами определяются покомпонентно?
53. Является ли линейным пространством множество многочленов второй степени?
54. Может ли линейное пространство состоять: 1) из одного вектора; 2) из двух различных векторов?
55. Образуется ли линейное пространство совокупность троек целых чисел (x, y, z) ?
56. Образуют ли линейное пространство все геометрические векторы, имеющие общее начало в начале координат и расположенные в первом октанте?

57. Доказать, что в трехмерном пространстве три некопланарных вектора линейно независимы.
58. Доказать, что в трехмерном пространстве любые четыре вектора линейно зависимы.
59. Показать, что элементы $\bar{e}_1 = (1, 1, 0)$, $\bar{e}_2 = (1, 0, 1)$ на плоскости могут быть выбраны в качестве базиса. Найти координаты вектора $\bar{x}(2, 3)$ в этом базисе.
60. Показать, что множество всех матриц второго порядка является линейным пространством. Показать, что матрицы $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ образуют его базис.

Практическое занятие № 4

Тема занятия: Системы координат

Цель занятия: Введение понятия систем координат. Изучение различных систем координат, формирование пространственного воображения и изучение методов аналитической геометрии в пространстве.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение аффинной системы координат на плоскости.
2. Дайте определение аффинной системы координат в пространстве.
3. Какой вектор называется радиус-вектором?
4. Дайте определение координат точки в аффинной системе координат.
5. Как найти координаты вектора, зная координаты его начала и конца?
6. Дайте определение прямоугольной декартовой системы координат в пространстве.
7. Как найти расстояние между точками в прямоугольной декартовой системе координат?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Задача 1. Найти прямоугольные координаты и построить точку $A\left(2\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$, если полюс совпадает с началом координат, полярная ось направлена по оси абсцисс.

Решение. По формулам (1) $x = 2\sqrt{2} \cos \frac{3}{4}\pi = -2$;
 $y = 2\sqrt{2} \sin \frac{3}{4}\pi = 2$; $A(-2, 2)$. Построение см. на рис. 17.

Ответ: $A(-2, 2)$.

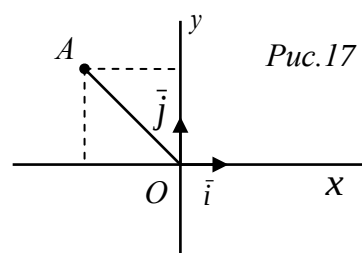


Рис. 17

Задача 2. Найти полярные координаты точки $M(1, -\sqrt{3})$, если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось - с положительным направлением оси абсцисс (т.е. системы координат согласованы).

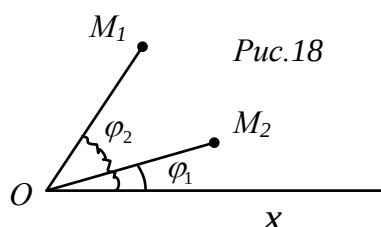


Рис. 18

Решение. По формулам (2) $\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$,
 $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi = \frac{5}{3}\pi$ (так как точка M лежит в IV четверти).

Итак, $M\left(2, \frac{5}{3}\pi\right)$.

Ответ: $M\left(2, \frac{5}{3}\pi\right)$.

Задача 3. Определить расстояние между точками $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ (рис. 18).

Решение. В треугольнике OM_1M_2 :

$$OM_1 = \rho_1, OM_2 = \rho_2, \angle M_1OM_2 = \varphi_2 - \varphi_1.$$

По теореме косинусов

$$\begin{aligned} M_1M_2^2 &= OM_1^2 + OM_2^2 - 2 \cdot OM_1 \cdot OM_2 \cdot \cos \angle M_1OM_2, \\ M_1M_2 &= \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \end{aligned} \quad (3)$$

Если $\varphi_1 > \varphi_2$, то $\angle M_1OM_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, но так как косинус угла – четная функция, то формула (3) остается справедливой и в этом случае.

Ответ: $M_1M_2 = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$.

Фигурой называется любое множество точек пространства. Пусть задана некоторая система координат. Условием, определяющим фигуру F в данной системе координат, называется уравнение, неравенство, их система или совокупность, которым удовлетворяют координаты любой точки фигуры F и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих фигуре F .

Задача 4. Составить уравнение окружности радиуса r , если в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости ее центр C имеет координаты (a, b) .

Решение. Пусть $M(x, y)$ – текущая точка окружности (т.е. произвольная ее точка), тогда по определению окружности $CM = r$. Запишем это равенство в координатах $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Ответ: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Задача 5. Составить уравнение круга радиуса r , если он лежит в плоскости xOy , а его центр C в прямоугольной декартовой системе координат в пространстве имеет координаты $(a, b, 0)$.

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ – текущая точка круга, тогда по определению круга $CM \leq r$. Запишем последнее равенство в координатах $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-0)^2} \leq r$ или $(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 \leq r^2$. Так как круг лежит в плоскости xOy и у всех точек этой плоскости аппликата равна нулю, то имеем систему: $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 \leq r^2, \\ z = 0. \end{cases}$ или $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2, \\ z = 0. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2, \\ z = 0. \end{cases}$

Задача 6. Установить вид фигуры, которая в полярной системе координат задана системой: $\begin{cases} \rho = 2, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Решение. Множество точек, у которых $\rho = 2$, – это точки, отстоящие от полюса на расстояние 2, т.е. это окружность с центром в полюсе радиуса 2.

Неравенство $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ задает множество лучей (ρ – произвольно) с началом в полюсе и углом наклона от 0 до $\frac{\pi}{2}$ к полярной оси, т.е. это угол AOB . В пересечении этих множеств по-

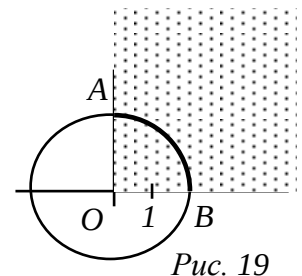


Рис. 19

лучим искомую фигуру – часть окружности, лежащую в I четверти (рис. 19).

Ответ: данная система задает часть окружности, лежащую в I четверти.

Любую фигуру можно выразить алгебраически, хотя на практике это не всегда легко сделать. Однако даже не всякое уравнение определяет некоторую фигуру. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ задает на плоскости точку $O(0,0)$, а в пространстве – ось Oz ; уравнение $x^2 + y^2 = -1$ не задает никакого множества точек.

Задача 7. В прямоугольной декартовой системе координат множество точек задано уравнением $x - 3y = 0$. Найти уравнение этого множества в согласованной полярной системе координат.

Решение. По формулам перехода от полярной системы координат к согласованной прямоугольной декартовой $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Подставляя выражения для x и y в исходное уравнение, получим $\rho \cos \varphi - 3\rho \sin \varphi = 0$, $\rho(\cos \varphi - 3 \sin \varphi) = 0$, откуда

$$\rho = 0 \quad \text{или} \quad \cos \varphi - 3 \sin \varphi = 0, \text{ т.е.}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} \rho = 0, \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Построить точки, заданные полярными координатами: $A\left(4, \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(3, -\frac{\pi}{6}\right)$, $C\left(1, -\frac{11}{4}\pi\right)$.
2. Найти полярные координаты точек, если системы координат согласованы: $A(2\sqrt{3}, 2)$, $B(-4, 4)$, $C(-7, 0)$, $D(-\sqrt{2}, -\sqrt{6})$.
3. Найти прямоугольные координаты точек, если системы координат согласованы: $A\left(10, \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(0, -\frac{3}{2}\pi\right)$, $C\left(1, -\frac{\pi}{3}\right)$, $D\left(2, -\frac{3}{6}\pi\right)$.
4. Найти полярные координаты точки, симметричной точке $M(\rho, \varphi)$:
 - а) относительно полюса;
 - б) относительно полярной оси.
5. Определить множество точек, координаты которых в полярной системе координат удовлетворяют уравнению:
 - а) $\rho = 3$;
 - б) $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
6. Изобразить на чертеже множества точек, заданных следующими системами неравенств в прямоугольной системе координат:
 - а) $\begin{cases} x > 0, \\ y \leq 1; \end{cases}$
 - б) $\begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ y > 0; \end{cases}$
 - в) $\begin{cases} |x| \leq 2, \\ |y| \geq 3; \end{cases}$
 - г) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16, \\ x > 2; \end{cases}$
 - д) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 > 25, \\ |x| < 2. \end{cases}$
7. Изобразить на чертеже множества точек, заданных в полярной системе координат следующими соотношениями (если $\varphi \in [0, 2\pi]$):
 - а) $\rho \leq 2$;
 - б) $\varphi > \frac{\pi}{2}$;
 - в) $1 < \rho \leq 3$;
 - г) $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{5}{3}\pi$;
 - д) $\begin{cases} \rho > 2, \\ \frac{\pi}{6} < \varphi \leq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$
8. В прямоугольной декартовой системе координат множество точек задано уравнением $x^2 + y^2 = 16$. Найти уравнение этого множества в согласованной полярной системе координат.
9. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(2, 0)$ и $B(1, 1)$.

Тема занятия Нелинейные операции над векторами

Цель занятия: Формирование умений вычислять различные произведения векторов.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение смешанного произведения векторов.
2. Свойства смешанного произведения векторов.
3. Выражение смешанного произведения векторов в координатах.
4. Объем параллелепипеда.
5. Дайте определение векторного произведения векторов.
6. Теорема о связи смешанного, векторного и скалярного произведения векторов.
7. Свойства векторного произведения векторов.
8. Выражение векторного произведения векторов в координатах.
9. Площадь треугольника.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Задача 1. Известно, что векторы $\vec{s} + 2\vec{t}$ и $5\vec{s} - 4\vec{t}$ взаимно перпендикулярны. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{s}$ и $\vec{t}$?

Решение. Так как данные векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $(\vec{s} + 2\vec{t})(5\vec{s} - 4\vec{t}) = 0$. Используя свойства скалярного произведения векторов, имеем:

$$(\vec{s} + 2\vec{t})(5\vec{s} - 4\vec{t}) = 5\vec{s}^2 + 10\vec{s}\vec{t} - 4\vec{s}\vec{t} - 8\vec{t}^2 = 5\vec{s}^2 + 6\vec{s}\vec{t} - 8\vec{t}^2,$$

т.е. $6\vec{s}\vec{t} = 8\vec{t}^2 - 5\vec{s}^2$. Так как векторы $\vec{s}$ и $\vec{t}$ единичные, то $\vec{s}^2 = |\vec{s}|^2 = 1$, $\vec{t}^2 = |\vec{t}|^2 = 1$, поэтому $6\vec{s}\vec{t} = 8 \cdot 1 - 5 \cdot 1$, $\vec{s} \cdot \vec{t} = \frac{1}{2}$. Используя геометрические свойства скалярного произведения, имеем

$$\cos(\hat{\vec{s}, \vec{t}}) = \frac{\vec{s} \cdot \vec{t}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{t}|} = \frac{1/2}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2}, \text{ т.е. угол между векторами } \vec{s} \text{ и } \vec{t} \text{ равен } \frac{\pi}{3} \text{ или } 60^\circ.$$

Ответ: 60° .

Задача 2. Показать, что треугольник ABC прямоугольный, если в ортонормированном базисе его вершины имеют координаты $A(-3; -3)$, $B(-1; 3)$, $C(11; -1)$.

Решение.

I способ

$$\overline{AB} = (-1 - (-3); 3 + 3) = (2; 6), \quad |\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40},$$

$$\overline{AC} = (11 + 3; -1 + 3) = (14; 2), \quad |\overline{AC}| = \sqrt{14^2 + 2^2} = \sqrt{200},$$

$$\overline{BC} = (11 - (-1); -1 - 3) = (12; -4), \quad |\overline{BC}| = \sqrt{12^2 + (-4)^2} = \sqrt{160}.$$

Так как $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, то для треугольника ABC справедлива теорема Пифагора, следовательно, треугольник ABC прямоугольный с прямым углом B .

II способ

$$\overline{AB} = (2; 6), \quad \overline{AC} = (14; 2), \quad \overline{BC} = (12; -4).$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2 \cdot 14 + 6 \cdot 2 = 28 + 12 = 40, \quad \overline{AC} \cdot \overline{BC} = 14 \cdot 12 + 2 \cdot (-4) = 168 - 8 = 160,$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 2 \cdot 12 + 6 \cdot (-4) = 24 - 24 = 0, \text{ т.е. } \overline{AB} \perp \overline{BC}, \text{ поэтому треугольник } ABC \text{ прямоугольный.}$$

Задача 3. Отрезок AD перпендикулярен плоскости треугольника ABC . Найти угол γ между векторами $\overline{BC}$ и $\overline{BD}$, если $\angle ABD = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ (рис.22).

Решение. Имеем $\cos \alpha = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BD}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BD}|}$, $\cos \beta = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BA}|}$, $\cos \gamma = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BD}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BD}|}$. Так как $\overline{AB}^2 = |\overline{AB}|^2$, то

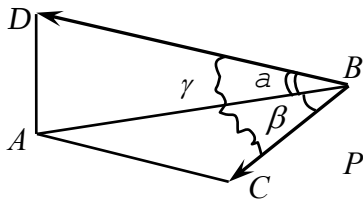


Рис.22

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BD}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BD}|} \cdot \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BA}|} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BD}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BD}|} \cdot \frac{\overline{BA}^2}{|\overline{BA}|^2} = \cos \gamma.$$

Ответ: $\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta$.

Замечание. Теорема о трех перпендикулярах является следствием задачи 4.

Действительно, если $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, то $\angle \beta = 90^\circ$ и $\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos 90^\circ = 0$, т.е. если проекция наклонной перпендикулярна некоторой прямой в плоскости проекции, то и наклонная перпендикулярна этой прямой. Верно и обратное.

Действительно, если $DB \perp BC$, то $\angle \gamma = 90^\circ$, $\cos \alpha \cdot \cos \beta = 0$, но $\angle \alpha < 90^\circ$, так как DB наклонена к плоскости ABC , поэтому $\cos \alpha \neq 0$. Остается принять, что $\cos \beta = 0$, т.е. $\angle \beta = 90^\circ$.

Задача 4. Определить координаты и длину высоты $\overline{BH}$ треугольника ABC (рис. 23), если $\overline{AB}(4, 2, -1)$, $\overline{AC}(2, -2, 0)$.

Решение. $\overline{BH} = \overline{BA} + \overline{AH}$, векторы $\overline{AH}$ и $\overline{AC}$ коллинеарны, поэтому существует число $a \neq 0$ такое, что $\overline{AH} = a \cdot \overline{AC} = (2a, -2a, 0)$. Так как $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, то $\overline{BH} \cdot \overline{AC} = 0$. Запишем последнее равенство в координатах:

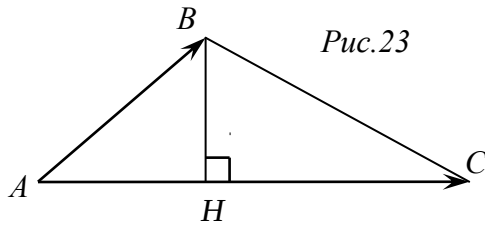


Рис.23

$$\begin{aligned} \overline{BH} &= (-4, -2, 1) + (2a, -2a, 0) = (-4 + 2a, -2 - 2a, 1), \\ \overline{BH} \cdot \overline{AC} &= (4 + 2a, -2 - 2a, 1) \cdot (2, -2, 0) = -8 + 4a + 4 + 4a, \\ \text{откуда } 8a - 4 &= 0, \text{ т.е. } a = \frac{1}{2}. \\ \overline{BH} &= \left(-4 + 2 \cdot \frac{1}{2}, -2 - 2 \cdot \frac{1}{2}, 1\right) = (-3, -3, 1); \\ |\overline{BH}| &= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{19}. \end{aligned}$$

Ответ: $\overline{BH} = (-3, -3, 1)$, $|\overline{BH}| = \sqrt{19}$.

Задача 5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} + 3\overline{b}$ и $3\overline{a} + \overline{b}$, если $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 1$, $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Решение. По свойству векторного произведения $S = |[(\overline{a} + 3\overline{b}), (3\overline{a} + \overline{b})]|$. Упростим выражение $[(\overline{a} + 3\overline{b}), (3\overline{a} + \overline{b})] = [\overline{a}, 3\overline{a} + \overline{b}] + 3[\overline{b}, 3\overline{a} + \overline{b}] = 3[\overline{a}, \overline{a}] + [\overline{a}, \overline{b}] + 9[\overline{b}, \overline{a}] + 3[\overline{b}, \overline{b}] = -8[\overline{a}, \overline{b}]$, (так как $\overline{a}$ параллелен $\overline{a}$, $\overline{b}$ параллелен $\overline{b}$, то $[\overline{a}, \overline{a}] = [\overline{b}, \overline{b}] = 0$).

$$\text{Таки образом, } S = |-8 \cdot [\overline{a}, \overline{b}]| = 8 \cdot |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin \left(\overline{a}, \overline{b}\right) = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 4 \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ: $S = 4$ кв.ед.

Задача 6. Вычислить площадь треугольника ABC , если $\overline{AB}(1, 2, 3)$, $\overline{BC}(2, 0, 2)$.

Решение. По свойству векторного произведения $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{BC}]|$.

$$[\overline{AB}, \overline{BC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k},$$

$$|\overline{AB}, \overline{BC}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{3}, \quad S = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ: $S = 2\sqrt{3}$ кв.ед.

Задача 7. Вычислить $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a})$.

Решение. Так как $(\bar{a} - \bar{b}) + (\bar{b} - \bar{c}) + (\bar{c} - \bar{a}) = \bar{0}$, то векторы $\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{b} - \bar{c}$, $\bar{c} - \bar{a}$ компланарны, поэтому $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a}) = 0$.

Ответ: $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a}) = 0$.

Задача 8. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ векторы $\overline{AB}(0,1,-1), \overline{AC}(2,-1,4)$ определяют основание, $\overline{AA_1} = (-3,2,2)$. Найти высоту призмы.

Решение. $V = \frac{1}{2} S_{\text{осн}} \cdot h, S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} |\overline{AB}, \overline{AC}|$, так как объем призмы в два раза меньше объема параллелепипеда, построенного на тех же векторах, то $V = \frac{1}{2} |\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AA_1}|$. Тогда

$$h = \frac{2 \cdot |\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AA_1}|}{|\overline{AB}, \overline{AC}|}, \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AA_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -16 - 1 = -17,$$

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (3, -2, -2), \quad h = \frac{2 \cdot |-17|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{34}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17} \text{ (ед.)}.$$

Ответ: $h = 2\sqrt{17}$ ед.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Даны единичные векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, удовлетворяющие условию $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$. Вычислить $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a}$.
2. Дано, что $|\bar{a}| = a, |\bar{b}| = b \neq 0$. Определить, при каком значении λ векторы $\bar{a} + \lambda \bar{b}$ и $\bar{a} - \lambda \bar{b}$ будут перпендикулярны.
3. Определить, при каком значении λ векторы $\bar{a} = \lambda \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - \lambda \bar{k}$ взаимно перпендикулярны.
4. Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы вектор $\bar{a} + \bar{b}$ делил пополам угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$?
5. Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы выполнялись следующие соотношения: 1) $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$; 2) $|\bar{a} + \bar{b}| > |\bar{a} - \bar{b}|$; 3) $|\bar{a} + \bar{b}| < |\bar{a} - \bar{b}|$?
6. Даны три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, удовлетворяющие условию $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$. Зная, что $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 1, \bar{c} = 4$, вычислить $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a}$.
7. Доказать, что угол между диагоналями прямоугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, вычисляется по формуле $|\cos \varphi| = \frac{\bar{a}^2 - \bar{b}^2}{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}$.
8. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны и имеют равные длины. Доказать, что векторы $\bar{p} = 3\bar{a} + 5\bar{b}$ и $\bar{q} = 10\bar{a} - 6\bar{b}$ перпендикулярны.
9. Известно, что угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $30^\circ, |\bar{a}| = \sqrt{3}, |\bar{b}| = 1$. Вычислить величину угла φ между векторами $\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{a} - \bar{b}$. Дать геометрическую интерпретацию задачи.

10. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны. Найти n , если в прямоугольной декартовой системе координат векторы равны: а) $\vec{a}(2, -1, 3)$, $\vec{b}(1, 3, n)$; б) $\vec{a}(n, -2, 1)$, $\vec{b}(n, -n, 1)$.
11. В тетраэдре $DABC$: $AB=AC=a$, $\angle DAB=\angle DAC=\varphi$. Найти угол между векторами $\vec{AD}$ и $\vec{BC}$.
12. В пирамиде $SABC$ углы при вершине S прямые, а основанием служит равносторонний треугольник ABC . Точки D и E являются серединами ребер AD и SB соответственно. Найти угол между векторами $\vec{SD}$ и $\vec{EC}$.
13. Определить вектор, коллинеарный биссектрисе угла A треугольника ABC , если $\vec{AB}=(2, 2, 1)$, $\vec{AC}=(3, 4, 0)$.
14. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.
15. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{AB}-\vec{AC}$ и $\vec{AB}+\vec{AC}$, если $A(1, -3, 0)$, $B(2, 2, 2)$, $C(-4, 0, 1)$.
16. Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{b}(2, 1, -1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{a} \cdot \vec{b}=3$.
17. Определите стороны и углы треугольника ABC , если $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$.
18. Найдите длину биссектрисы, проведенной из вершины A треугольника ABC , если $A(3, -5)$, $B(-3, 3)$, $C(-1, -2)$.
19. Даны вершины треугольника: $A(7, 2)$, $B(1, 9)$, $C(-8, -1)$. Найти расстояния от точки пересечения медиан M до вершин треугольника.
20. Точки $L(0, 0)$, $M(3, 0)$, $N(0, 4)$ являются серединами сторон треугольника. Найти площадь треугольника.
21. Преобразовать векторное произведение $[(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}), (\vec{a}-2\vec{b})]; [(\vec{a}-3\vec{b}), (2\vec{a}+3\vec{b})]$.
22. Вычислить площадь треугольника ABC , если $A(4, 2, 3)$, $B(5, 7, 0)$, $C(2, 8, -1)$.
23. Найти векторное и скалярное произведения векторов $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$.
24. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a}(1, 1, 2)$, $\vec{b}(2, 1, 1)$.
25. Показать, что векторы $\vec{a}(7, -3, 2)$, $\vec{b}(3, -7, 8)$, $\vec{c}(1, -1, 1)$ компланарны.
26. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$.
27. Найти расстояние от точки $C(3, 2, -2)$ до прямой, проходящей через точки $A(1, 2, -3)$ и $B(5, 2, 0)$.
28. Дана пирамида $SABC$: $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3, -1)$, $S(-1, -2, -3)$. а) Найти высоту BK основания ABC . б) Найти объем пирамиды и ее высоту SH .
29. Вычислить $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}+\vec{a})$, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=3$.
30. Вычислить $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$.
31. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0, 0, 1)$, $B(2, 5, 3)$, $C(6, 2, 3)$, $D(3, 7, 2)$. Найти высоты пирамиды, опущенную на грань BCD .

Контрольная работа №1

1. Треугольник ABC задан координатами своих вершин. Построить его в прямоугольной декартовой системе координат. Построить векторы $\vec{AB}+\vec{CB}$ и $\vec{AC}-\vec{BC}$. Вычислить длины сторон и углы треугольника. Найти координаты вектора $\vec{AO}$, где O – точка пересечения медиан треугольника.

1) $A(2, 2)$, $B(-1, 1)$, $C(1, -3)$;	16) $A(3, 1)$, $B(-2, 1)$, $C(-1, -3)$;
2) $A(3, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(1, -2)$;	17) $A(4, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, -4)$;
3) $A(1, 2)$, $B(-2, 1)$, $C(-1, -3)$;	18) $A(1, 4)$, $B(-2, -1)$, $C(1, -2)$;
4) $A(3, 2)$, $B(-1, 3)$, $C(0, -4)$;	19) $A(1, 3)$, $B(-3, 1)$, $C(1, -3)$;

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 5) $A(2,2), B(-1,2), C(1,-2);$ | 20) $A(4,1), B(-2,-1), C(1,-2);$ |
| 6) $A(2,2), B(-2,1), C(-1,3);$ | 21) $A(4,1), B(-3,1), C(1,-3);$ |
| 7) $A(2,2), B(-1,3), C(0,-4);$ | 22) $A(1,3), B(-1,1), C(1,-2);$ |
| 8) $A(3,1), B(-1,1), C(1,-3);$ | 23) $A(1,3), B(-3,1), C(1,-3);$ |
| 9) $A(3,1), B(-2,1), C(-1,-3);$ | 24) $A(1,4), B(-1,1), C(-1,-4);$ |
| 10) $A(3,1), B(-1,3), C(0,-4);$ | 25) $A(1,4), B(-3,1), C(1,-3);$ |
| 11) $A(1,2), B(-1,1), C(1,-3);$ | 26) $A(4,1), B(-1,1), C(1,-3);$ |
| 12) $A(1,2), B(-1,2), C(1,-2);$ | 27) $A(1,3), B(-1,2), C(1,-2);$ |
| 13) $A(1,2), B(-1,3), C(0,-4);$ | 28) $A(1,4), B(-2,1), C(-1,-3);$ |
| 14) $A(3,2), B(-1,1), C(1,-3);$ | 29) $A(2,2), B(-2,-1), C(1,-2);$ |
| 15) $A(3,2), B(-1,2), C(1,-2);$ | 30) $A(3,1), B(-3,1), C(1,-3);$ |

2. Найти координаты вектора $\overline{BH}$, если $BH \perp AC$, вычислить длину BH .

Практическое занятие № 6

Тема занятия Прямая на плоскости

Цель занятия: Введение различных способов задания прямой на плоскости и их аналитическое представление.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Различные способы задания уравнения прямой на плоскости (вывод каждой из формул).
2. Общее уравнение прямой на плоскости (теоремы с доказательством).
3. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
4. Расстояние от точки до прямой (вывод формулы - теорема).
5. Угол между прямыми.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Задача 1. Задайте ту полуплоскость, в которую попадает точка $M(1,2)$ относительно прямой $l: 5x-3y+7=0$.

Решение. Подставим координаты точки M в левую часть уравнения прямой l , получим неравенство $5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 7 = 5 - 6 + 7 = 6 > 0$. Этому же неравенству будут удовлетворять все точки рассматриваемой полуплоскости.

Ответ: $5x-3y+7 > 0$.

Задача 2. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b=-3$ и образующий с положительным направлением оси абсцисс угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Построить прямую.

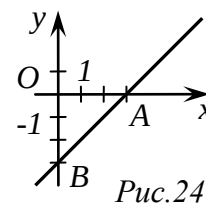
Решение. Угловой коэффициент прямой $k = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.

Так как прямая отсекает от оси ординат отрезок $b=-3$, то она проходит через точку $B(0,b)$, т.е. $B(0,-3)$. Уравнение прямой имеет вид $y-(-3)=1(x-0)$, т.е. $y=x-3$ или $x-y-3=0$ - общее уравнение прямой. Для построения достаточно двух точек. Одна точка известна - это точка B . Пусть ордината другой точки равна нулю, подставляя $y=0$ в общее уравнение прямой, получим $x=3$, т.е. прямая проходит через точку $A(3,0)$ (рис.24).

Ответ: $x-y-3=0$ - общее уравнение прямой.

Задача 3. Дан треугольник $ABC: A(0,1), B(6,5) C(12,-1)$.

1) Составить уравнение медианы AM .



Решение. M – середина BC , поэтому координаты точки M $x_M = \frac{6+12}{2} = 9$;
 $y_M = \frac{5+(-1)}{2} = 2$. Запишем уравнение прямой AM как уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x-9}{0-9} = \frac{y-2}{1-2}, \quad \frac{x-9}{-9} = \frac{y-2}{-1},$$

$x-9=9y-18$, $x-9y+9=0$ – общее уравнение AM .

Ответ: $x-9y+9=0$.

2) Составить уравнение высоты CH .

Решение. $CH \perp AB$, поэтому направляющий вектор $\overline{AB}(6,4)$ прямой AB является нормальным для прямой CH . Пусть прямая CH задана общим уравнением $ax+by+c=0$, тогда $\vec{n}(a,b) \perp CH$, поэтому $a=6$, $b=4$, т.е. $6x+4y+c=0$. Так как $C \in CH$, то координаты точки C удовлетворяют уравнению прямой, подставляя координаты точки C в уравнение прямой CH , найдем коэффициент c : $6 \cdot 12 + 4 \cdot (-1) + c = 0$, $c = -68$, т.е. $6x+4y-68=0$ или $3x+2y-34=0$ – уравнение прямой CH .

Ответ: $3x+2y-34=0$.

Задача 4. Составить уравнение катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы $3x-y+5=0$ и вершину прямого угла $C(4,-1)$.

Решение. Углы при основании равнобедренного треугольника 45° , поэтому для угла α между прямыми AB и AC , где AC задана уравнением $ax+by+c=0$, имеем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3b+a}{3a-b} = 1$. Так как точка $C \in AC$, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т.е. $4a-b+c=0$. Имеем систему: $\begin{cases} 3b+a=3a-b, \\ 4a-b+c=0, \end{cases} \begin{cases} 2b=a, \\ c=-7b, \end{cases}$ т.е. $2bx+by-7b=0$ или $2x+y-7=0$ – уравнение прямой AC .

Так как $BC \perp AC$, то $\vec{n}(2,1) \perp AC$, $\vec{n}$ параллелен BC . Запишем каноническое уравнение прямой BC : $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{1}$; $x-4=2y+2$; $x-2y-6=0$.

Ответ: $2x+y-7=0$, $x-2y-6=0$.

Задача 5. Даны стороны AB : $x+3y-7=0$, BC : $4x-y-2=0$, AC : $6x+8y-10=0$ треугольника ABC . Найти высоту, опущенную из вершины B .

Решение. $B = AB \cap BC$, поэтому ее координаты удовлетворяют системе уравнений:
 $\begin{cases} x+3y-7=0, \\ 4x-y-2=0, \end{cases} \begin{cases} x=7-3y, \\ 28-12y-y-2=0, \end{cases} \begin{cases} y=2, \\ x=1, \end{cases}$ т.е. $B(1,2)$, $\rho(B, AC) = \frac{|6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{6}{10} = 0,6$.

Ответ: $\rho(B, AC) = 0,6$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Дано общее уравнение прямой $3x-4y-5=0$. Написать: а) уравнение с угловым коэффициентом; б) уравнение в отрезках. Построить прямую: а) в аффинной системе координат; б) в прямоугольной системе координат.
2. Прямая проходит через точки $M_1(3,-1)$, $M_2(2,-3)$. Написать ее каноническое, параметрическое уравнения, уравнения в отрезках и с угловым коэффициентом, общее уравнение.
3. Определить какие из точек $A(2,-1)$, $B(3,0)$, $C(0,-5)$, $D(-7,1)$, $E(3,1)$, $F(-12,-8)$ лежат относительно прямой $l: x+y-4=0$ в той же полуплоскости, что и начало координат.
4. Найти угол, который образует с положительным направлением оси абсцисс прямая $2x+2y-5=0$.

5. Найти угол, который образует с положительным направлением оси ординат прямая $2x - y + 3 = 0$.
6. Можно ли уравнение прямой $20x + y = 0$ записать в отрезках?
7. Прямая отсекает на осях координат равные отрицательные отрезки. Составить ее уравнение, если площадь треугольника, образованного прямой с осями координат, равна 8 кв. ед.
8. Определить угол между прямыми:
 - а) $y = -3x + 7$ и $y = 2x + 1$;
 - б) $6y - 4x + 1 = 0$ и $20x - 30y + 4 = 0$;
 - в) $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y = 0$.
9. Определить расстояние между параллельными прямыми $3x + y - 7 = 0$ и $6x + 2y - 5 = 0$.
10. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $3x - 4y = 7 = 0$ и $5x + 2y + 3 = 0$ и
 - а) параллельную оси ординат; б) перпендикулярную прямой $x + y = 0$.
11. Даны вершины треугольника $A(1, -2)$, $B(0, 3)$, $C(1, 1)$. Написать уравнения прямых, проходящих через вершины параллельно противоположным сторонам.
12. В треугольнике ABC H – точка пересечения высот. Составить уравнения сторон треугольника, если $A(-1, 5)$, $B(3, 2)$, $H(5, -3)$.
13. В треугольнике ABC : $A(-4, -5)$, $B(4, 1)$, $C(-1/2, 7)$. Написать уравнение: а) биссектрисы угла A ; б) медианы AM ; в) высоты CH .
14. Даны смежные вершины $A(1, -2)$, $B(3, 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $P(1, 1)$ пересечения его диагоналей. Написать уравнения сторон.
15. Написать уравнение окружности с центром в точке $Q(6, -3)$, касающейся прямой $3x - 4y - 15 = 0$.
16. В треугольнике ABC : $AH \perp BC$, $BK \perp AC$, $AB: 2x - 3y + 6 = 0$, $AH: 2x + y - 2 = 0$, $BK: x + 3y - 12 = 0$. Написать уравнения сторон AC и BC .
17. Найти угол между прямыми $\sqrt{3}x - 3y + 6 = 0$ и $\sqrt{3}x - y - 5 = 0$.
18. Даны координаты вершин трапеции $A(5, -1)$, $B(6, 3)$, $C(9, 3)$, $D(10, -1)$. Написать уравнения всех сторон трапеции. Вычислить длину стороны AB . Найти уравнение средней линии трапеции MN .

Практическое занятие № 7

Тема занятия Плоскость

Цель занятия: Введение различных способов задания плоскости в пространстве и их аналитическое представление. Метрические задачи теории плоскостей.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

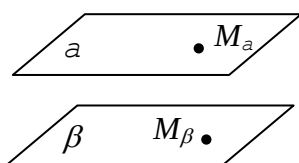
1. Различные способы задания уравнения плоскости (вывод каждой из формул).
2. Общее уравнение плоскости (теоремы с доказательством).
3. Расстояние от точки до плоскости (вывод).
4. Взаимное расположение двух плоскостей.
5. Взаимное расположение трех плоскостей.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Задача 1. Даны параллельные плоскости $\alpha: x - y + z + 1 = 0$ и $\beta: 2x - 2y + 2z - 5 = 0$. Описать алгебраически область между ними.



Решение. Область между плоскостями есть пересечение двух полупространств, образованных этими плоскостями. Относительно плоскости α выберем то полупространство, которое содержит плоскость β , а значит и любую ее точку. Возьмем некоторую точку

$M_\beta(0,0,2.5) \in \beta$ (рис. 31) (координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости β) и для вычисления знака неравенства подставим ее координаты в уравнение плоскости α : $0-0+2.5+1>0$, поэтому $x-y+z+1>0$ - первое неравенство системы.

Возьмем некоторую точку $M_\alpha(0,0,-1) \in \alpha$ (рис. 31) и определим знак второго неравенства $2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) - 5 < 0$, поэтому $2x - 2y + 2z - 5 < 0$ - второе неравенство системы.

Таким образом, область между плоскостями α и β характеризуется системой неравенств

$$\begin{cases} x - y + z + 1 > 0, \\ 2x - 2y + 2z - 5 < 0. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x - y + z + 1 > 0, \\ 2x - 2y + 2z - 5 < 0. \end{cases}$

Задача 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2,-1,4)$, $B(3,2,-1)$ перпендикулярно плоскости $\alpha: x+y+2z-3=0$.

Решение. Так как точки A, B принадлежат плоскости, то вектор $\overline{AB}(1,3,-5)$ параллелен ей. Вектор $\vec{n}(1,1,2) \perp \alpha$, поэтому $\vec{n}$ параллелен искомой плоскости. Запишем каноническое уравнение плоскости, проходящей через точку A параллельно векторам $\overline{AB}$ и $\vec{n}$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad (x-2) \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-4) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 11x - 7y - 2z - 21 = 0 - \text{общее}$$

уравнение плоскости.

Ответ: $11x - 7y - 2z - 21 = 0$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(5,4,3)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.

Решение. Так как плоскость отсекает равные отрезки от осей координат, то ее уравнение имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$. Так как она проходит через точку A , то координаты точки A удовле-

творяют уравнению плоскости, т.е. $\frac{5}{a} + \frac{4}{a} + \frac{3}{a} = 1$, $a=12$. Тогда $x+y+z=12$ - общее уравнение плоскости.

Ответ: $x+y+z-12=0$.

Задача 4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $P(0,2,0)$ и $Q(2,0,0)$ и образующей угол 60° с плоскостью $x=0$.

Решение. Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ уравнение искомой плоскости. Так как точки P и Q принадлежат ей, то их координаты удовлетворяют этому уравнению: $2B + D = 0, 2A + D = 0$. Так как плоскость образует угол в 60° с плоскостью $x=0$, то

$$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \text{ Имеем систему уравнений}$$

$$\begin{cases} B = -\frac{1}{2}D, \\ A = -\frac{1}{2}D, \\ 2A = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} B = A = -\frac{1}{2}D, \\ -D = \sqrt{\frac{1}{4}D^2 + \frac{1}{4}D^2 + C^2}, \end{cases} \quad D^2 = \frac{1}{2}D^2 + C^2, \quad \frac{1}{2}D^2 = C^2.$$

Пусть $C=1$, тогда $D=-\sqrt{2}, A=B=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (так как $D<0$ из последнего уравнения системы). Та-

ким образом, уравнение искомой плоскости имеет вид: $\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + z - \sqrt{2} = 0$ или $x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$.

Ответ: $x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Составить уравнения плоскости, если она
 - 1) задана точкой $A(1, 2, 3)$ и параллельными ей векторами $\vec{a}(0, 1, -1), \vec{b}(1, 2, -4)$;
 - 2) проходит через ось Ox параллельно вектору $\vec{p}(1, 2, 3)$;
 - 3) проходит через ось Oy и точку $A(1, 1, 1)$;
 - 4) проходит через точку $A(1, 1, 1)$ параллельно плоскости Oxy ;
 - 5) проходит через начало координат перпендикулярно вектору $\vec{q}(0, -3, 4)$;
 - 6) проходит через точку $B(1, 1, -2)$ перпендикулярно плоскостям $\alpha: 2x + 3z = 0$, $\beta: x - y + z - 1 = 0$;
 - 7) проходит через точки $C(1, -1, 3), D(1, 2, 4)$ перпендикулярно плоскости $\gamma: 2x - 3y + z + 1 = 0$.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A, B, C)$.
3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.
4. Дана пирамида $SABC: A(1, -1, 2), B(5, -6, 2), C(1, 3, -1), S(-1, -2, -3)$. Написать уравнение плоскости ABC ; плоскости, проходящей через вершину C параллельно плоскости ABS ; вычислить угол между этими плоскостями.
5. Составить уравнение касательной плоскости к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 45$ в точке $M(2, -3, 6)$.
6. Записать неравенство, характеризующее то полупространство с границей $\Pi: x - y + z - 4 = 0$, в котором находится точка $A(1, 1, 1)$.
7. Установить расположение плоскости $\Pi: 2x - 2y - z + 9 = 0$ относительно сферы: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$.
8. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями $\alpha: x - 3y + 2z + 1 = 0$ и $\beta: 2x - 6y + 4z + 3 = 0$.
9. Найти уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 9$ и параллельной плоскости $\alpha: 6x + 3y + 2z = 0$.
10. Какой угол образует с плоскостью $x + y + 2z - 4 = 0$ вектор $\vec{a}(1, 2, 1)$?

Практическое занятие № 8

Тема занятия Прямая в пространстве

Цель занятия: Введение различных способов задания прямой в пространстве и их аналитическое представление. Метрические задачи теории плоскостей и прямых в пространстве.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Различные способы задания уравнения прямой в пространстве.
2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
3. Взаимное расположение прямой и плоскости.
4. Угол между прямыми в пространстве.

5. Угол между прямой и плоскостью.

**Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями
Задания, решаемые в аудитории**

Задача 1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $K(1, -3, 4)$ параллельно прямой $l: \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 3y - z - 1 = 0. \end{cases}$

Решение. Так как прямые параллельны, то направляющий вектор $\vec{p} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-2, 3, 7)$ прямой l является направляющим вектором искомой прямой, каноническое уравнение которой имеет вид: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{7}$.

Ответ: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{7}$.

Задача 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, 1, 1)$ перпендикулярно плоскости $a: 2x + 3y + z - 1 = 0$.

Решение. Так как прямая и плоскость перпендикулярны, то вектор нормали $\vec{n}(2, 3, 1)$ к плоскости a является направляющим для искомой прямой, каноническое уравнение которой имеет вид: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$.

Ответ: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$.

Задача 3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $B(1, 5, -1)$ перпендикулярно прямым $l_1: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}$ и $l_2: \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -2t. \end{cases}$

Решение. Искомую прямую m рассмотрим как прямую, проходящую через точку B перпендикулярно плоскости a такой, что прямая l_1 параллельна a , прямая l_2 параллельна a , $B \in a$. Векторы $\vec{a}(-1, 3, -1)$ и $\vec{b}(-3, 1, -2)$ являются направляющими для прямых l_1 и l_2 соответственно, поэтому они параллельны плоскости a . Каноническое уравнение плоскости a имеет вид $\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $(x-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (y-5) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $-5x + y + 8z + 18 = 0$.

Вектор нормали $\vec{n}(-5, 1, 8)$ к плоскости a является направляющим для искомой прямой m , поэтому ее каноническое уравнение имеет вид $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{8}$.

Ответ: $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{8}$.

Задача 4. Найти угол между прямой $l: \frac{x}{2} = \frac{y+12}{3} = \frac{z-4}{6}$ и плоскостью $a: 6x + 15y - 10z = 0$.

Решение. Направляющим вектором прямой l является вектор $\vec{a}(2, 3, 6)$, поэтому

$$\sin \varphi = \frac{|6 \cdot 2 + 15 \cdot 3 - 10 \cdot 6|}{\sqrt{6^2 + 15^2 + (-10)^2} \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{3}{133}; \quad \varphi = \arcsin \frac{3}{133}.$$

Ответ: $\varphi = \arcsin \frac{3}{133}$.

Задача 5. Найти точку, симметричную началу координат относительно плоскости $a: x - 2y + 4z - 21 = 0$.

Решение. Пусть O' - искомая точка, тогда по определению центральной симметрии $OO' \perp a$, $OO' \cap a = A$, $OA = AO'$ (рис. 32). Напишем уравнение прямой OO' в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = 0 + 1t, \\ y = 0 - 2t, \\ z = 0 + 4t, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = t, \\ y = -2t, \\ z = 4t. \end{cases}$$

Найдем координаты точки A , для этого решим систему из уравнений, задающих прямую OO' и плоскость a :

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -2t, \\ z = 4t, \\ x - 2y + 4z - 21 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1, \\ x = 1, \\ y = -2, \\ z = 4. \end{cases} \quad A(1, -2, 4).$$

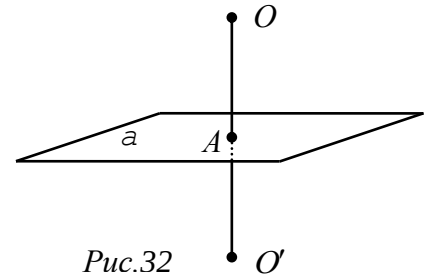


Рис.32

Пусть $O'(x, y, z)$. По определению симметрии $\overline{OA} = \overline{AO'}$, где $\overline{OA} = (1, -2, 4)$, $\overline{AO'} = (x - 1, y + 2, z - 4)$. Запишем последнее равенство в координатах

$$\begin{cases} x - 1 = 1, \\ y + 2 = -2, \\ z - 4 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -4, \\ z = 8. \end{cases} \quad O'(2, -4, 8).$$

Ответ: $O'(2, -4, 8)$.

Задача 6. Из начала координат опустить перпендикуляр на прямую $l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}$.

Решение. Искомый перпендикуляр m лежит в плоскости a , проходящей через $O(0, 0, 0)$ перпендикулярно прямой l с направляющим вектором $\vec{a}(2, 3, 1)$. Тогда $\vec{a} \perp a$, поэтому общее уравнение плоскости a имеет вид $2x + 3y + z + D = 0$, так как $O \in a$, то ее координаты удовлетворяют полученному уравнению: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 + D = 0$, т.е. $D = 0$, $a: 2x + 3y + z = 0$.

Найдем точку пересечения прямой l и плоскости a , для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}, \\ 2x + 3y + z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2z - 4, \\ y = 3z - 8, \\ 2x + 3y + z = 0. \end{cases} \quad A = l \cap a, \quad A\left(\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{16}{7}\right).$$

Запишем уравнение прямой m , проходящей через точки O и A : $\frac{x-0}{\frac{4}{7}-0} = \frac{y-0}{-\frac{8}{7}-0} = \frac{z-0}{\frac{16}{7}-0}$ или

$$4x = -2y = z.$$

Ответ: $4x = -2y = z$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Составить уравнение прямой, проходящей

- 1) через точки $M_1\left(2, -3, \frac{1}{2}\right), M_2\left(3, 5, \frac{3}{2}\right)$;

- 2) через точку $M(2,1,-3)$ параллельно вектору $\vec{p}(1,-3,1)$;
- 3) через точку $M(1,-3,4)$ параллельно прямой $l: \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 3y - z - 1 = 0. \end{cases}$
2. Установить взаимное расположение прямых $l_1: \begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ z - 4 = 0. \end{cases}$ и $l_2: \begin{cases} x + z - 8 = 0, \\ 2y + 3z - 7 = 0. \end{cases}$
3. Показать, что прямая $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{1}$ параллельна плоскости $\alpha: x-2y+5z-6=0$, а прямая $l_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}$ лежит в этой плоскости.
4. Найти точку, симметричную началу координат относительно прямой $l: \frac{x-10}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4}$.
5. Через линию пересечения плоскостей $\alpha: x+y-z+5=0$ и $\beta: x-y+z+1=0$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $\gamma: 2x-z+6=0$.
6. Через линию пересечения плоскостей $\alpha: 4x-y+3z-1=0$ и $\beta: x+5y-z+2=0$ провести плоскость 1) проходящую через начало координат; 2) параллельную оси Oy .
7. Написать параметрическое уравнение прямой, образованной пересечением плоскости $\alpha: x-3y-z+1=0$ с плоскостью Oxy .
8. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точки $A(1,0,1)$ и плоскости $\alpha: x-y+5=0$.
9. Доказать, что прямые $l_1: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -t, \\ z = 1 + t. \end{cases}$ и $l_2: \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$ параллельны, и написать уравнение плоскости, проходящей через них.
10. Вычислить углы, которые образует с осями координат прямая $\begin{cases} x - 2y - 5 = 0, \\ x - 2z + 8 = 0. \end{cases}$
11. Через точку пересечения прямых $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+4}{2}$ и $\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-1}{3}$ провести плоскость, параллельную плоскости xOy .
12. Треугольник ABC образован пересечением плоскости $x+2y+4z-8=0$ с осями координат. Построить треугольник. Найти уравнения средних линий.

Контрольная работа №2

Дана треугольная пирамида $SABC$. Написать уравнения:

- 1) плоскости ABC ;
- 2) прямой SC ;
- 3) плоскости, проходящей через точку S , параллельно плоскости ABC ;
- 4) плоскости, проходящей через точку A , перпендикулярно плоскости ABC .

Найти высоту пирамиды, опущенную из вершины S и объем пирамиды.

№ п/п	A	B	C	S
1	(4,0,2)	(0,5,1)	(4,-1,3)	(3,-1,5)
2	(0,5,1)	(4,-1,3)	(4,0,2)	(3,-1,5)
3	(4,-1,3)	(4,0,2)	(0,5,1)	(3,-1,5)

4	(4,0,2)	(0,5,1)	(3,-1,5)	(4,-1,3)
5	(0,5,1)	(4,0,2)	(3,-1,5)	(4,-1,3)
6	(0,5,1)	(3,-1,5)	(4,-1,3)	(4,0,2)
7	(4,0,2)	(3,-1,5)	(4,-1,3)	(0,5,1)
8	(1,1,1)	(1,2,0)	(1,0,5)	(-2,3,3)
9	(-2,3,3)	(1,2,0)	(1,0,5)	(1,1,1)
10	(-2,3,3)	(1,0,5)	(1,2,0)	(1,1,1)
11	(1,2,0)	(1,0,5)	(-2,3,3)	(1,1,1)
12	(-2,3,3)	(1,1,1)	(1,0,5)	(1,2,0)
13	(-2,3,3)	(1,0,5)	(1,1,1)	(1,2,0)
14	(1,0,5)	(1,1,1)	(-2,3,3)	(1,2,0)
15	(1,2,0)	(1,1,1)	(-2,3,3)	(1,0,5)
16	(1,2,0)	(-2,3,3)	(1,1,1)	(1,0,5)
17	(1,1,1)	(-2,3,3)	(1,2,0)	(1,0,5)
18	(0,1,2)	(2,1,2)	(3,5,2)	(3,5,4)
19	(0,1,2)	(3,5,2)	(2,1,2)	(3,5,4)
20	(3,5,2)	(2,1,2)	(0,1,2)	(3,5,4)
21	(3,5,4)	(3,5,2)	(2,1,2)	(0,1,2)
22	(3,5,4)	(2,1,2)	(3,5,2)	(0,1,2)
23	(2,1,2)	(3,5,2)	(3,5,4)	(0,1,2)
24	(2,1,2)	(0,1,2)	(3,5,4)	(3,5,2)
25	(0,1,2)	(3,5,4)	(2,1,2)	(3,5,6)
26	(3,5,4)	(2,1,2)	(0,1,2)	(3,5,2)
27	(2,1,-1)	(3,0,2)	(5,1,1)	(0,-1,3)
28	(5,1,1)	(2,1,-1)	(3,0,2)	(0,-1,3)
29	(3,0,2)	(5,1,1)	(2,1,-1)	(0,-1,3)
30	(0,-1,3)	(2,1,1)	(3,0,2)	(5,1,1)

Практическое занятие № 9

Тема занятия Кривые второго порядка и их классификация. Фокально-директориальное свойство эллипса, гиперболы, параболы.

Цель занятия: Изучение линий второго порядка и их свойств.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Определение и каноническое уравнение эллипса (вывод).
2. Свойства эллипса.
3. Определение и каноническое уравнение гиперболы (вывод).
4. Свойства гиперболы.
5. Определение и каноническое уравнение параболы (вывод).
6. Свойства параболы.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Задача 1. Найти координаты центра и радиус окружности $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$.

Решение. Выделим в общем уравнении окружности полные квадраты:

$$2\left(x^2 - 4x + 4\right) - 8 + 2\left(y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{8} - 4 = 0, \quad 2(x-2)^2 + 2\left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{121}{8}$$

и разделим обе части уравнения на 2:

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{121}{16}.$$

Тогда $Q\left(2, -\frac{5}{4}\right)$ - центр окружности, а $r = \frac{11}{4}$ - ее радиус.

Ответ: $Q\left(2, -\frac{5}{4}\right), r = \frac{11}{4}$.

Задача 2. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, зная, что его большая ось 10, а расстояние между фокусами 8. Построить эллипс, найти координаты фокусов и эксцентриситет.

Решение. По условию $2b=10$, $2c=8$, поэтому $b=5$, $c=4$, $a^2=b^2-c^2=9$ (рис.26). Тогда каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, его фокусы $F_1(0,4)$, $F_2(0,-4)$, эксцентриситет $e = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, $F_1(0,4)$, $F_2(0,-4)$, $e = \frac{4}{5}$.

Задача 3. Составить каноническое уравнение эллипса, если он проходит через точки $M_1(1,3)$, $M_2(4,1)$.

Решение. Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Так как точки M_1 , M_2 принадлежат эллипсу, то их координаты удовлетворяют его уравнению. Имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{1^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1, \\ \frac{4^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{a^2} = 1 - \frac{9}{b^2}, \\ 16\left(1 - \frac{9}{b^2}\right) + \frac{1}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{b^2} = \frac{15}{143}, \\ \frac{1}{a^2} = \frac{8}{143}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{8}{143}x^2 + \frac{15}{143}y^2 = 1$.

Задача 4. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 1$. Написать уравнение софокусной равнобочной гиперболы.

Решение. Исходя из уравнения эллипса $a_9^2 = \frac{1}{9}$, $b_9^2 = \frac{1}{25}$, $c_9^2 = a_9^2 - b_9^2 = \frac{2}{75}$. Для гиперболы $c_2^2 = \frac{2}{75}$, так как она равнобочная, то $a_2 = b_2$,

поэтому $c_2^2 = a_2^2 + b_2^2 = 2a_2^2$; $2a_2^2 = \frac{2}{75}$, $a_2^2 = \frac{1}{75}$.

Так как $a_9 > b_9$, то фокусы лежат на оси абсцисс, поэтому каноническое уравнение гиперболы имеет вид $75x^2 - 75y^2 = 1$.

Ответ: $75x^2 - 75y^2 = 1$.

Задача 5. Привести к каноническому виду уравнение кривой $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$. Определить тип кривой, вычислить основные параметры. Построить кривую.

Решение. В данном уравнении выделим

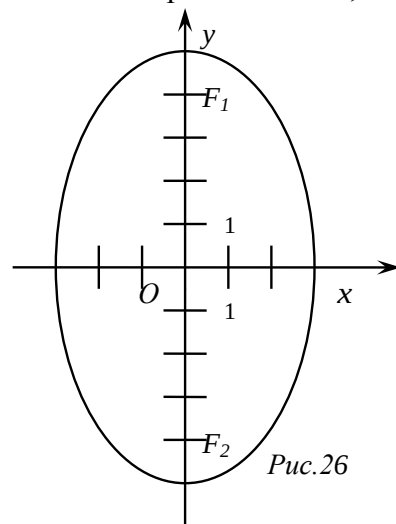


Рис.26

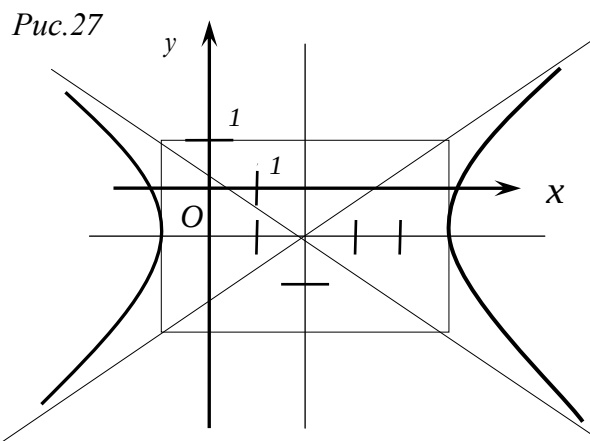


Рис.27

полные квадраты, содержащие переменные,

$$4(x^2 - 4x + 4) - 16 - 9(y^2 + 2y + 1) + 9 - 29 = 0, \quad 4(x-2)^2 - 9(y+1)^2 = 36,$$

и разделим обе части уравнения на 36:

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1, \quad \frac{(x-2)^2}{3^2} - \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1,$$

следовательно, это гипербола. Ее действительная полуось $a=3$, мнимая полуось $b=2$, $c^2=a^2+b^2=25$, $c=5$. Расстояние между фокусами $2c=10$, центр симметрии $C(2,-1)$, координаты фокусов $F_1(-3,-1)$, $F_2(7,-1)$.

Для построения сместим параллельным переносом оси координат так, чтобы начало координат оказалось в точке $(2,-1)$ и в новой системе построим гиперболу $\frac{x_n^2}{3^2} - \frac{y_n^2}{2^2} = 1$ (рис.27).

Ответ: $\frac{x_n^2}{3^2} - \frac{y_n^2}{2^2} = 1$.

Задача 6. Составить каноническое уравнение параболы, если ее фокус находится в точке пересечения прямой $4x-3y-4=0$ с осью Ox .

Решение. Найдем координаты фокуса, для этого решим систему уравнений $\begin{cases} 4x-3y-4=0, \\ y=0. \end{cases}$ Здесь $y=0$ - уравнение оси Ox . $F(1,0)$ - фокус, $F \in Ox$, $\frac{p}{2} = 1$, поэтому каноническое уравнение параболы $y^2=4x$.

Ответ: $y^2=4x$.

Задача 7. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(2,-1)$ и директриса $d: x-y-1=0$.

Решение. Пусть $M(x,y)$ - текущая точка параболы. По определению $FM = \rho(M,d)$. Запишем это равенство в координатах $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \frac{|x-y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$. Возведем обе части равенства в

квадрат: $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + 2y - 1 - 2xy + 2x)$ или

$$x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x + 2y + 11 = 0.$$

Ответ: $x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x + 2y + 11 = 0$.

Задача 8. Дана парабола $y^2 = 6x$. Составить ее уравнение в согласованной полярной системе координат.

Решение. Так как в общем виде $y^2 = 2px$, то $2p=6$, $p=3$. Кроме того, эксцентриситет параболы $e=1$, поэтому $\rho = \frac{3}{1-\cos\varphi}$.

Ответ: уравнение параболы в полярной системе координат $\rho = \frac{3}{1-\cos\varphi}$.

Задача 9. Определить вид линии, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho = \frac{5}{1-\frac{1}{2}\cos\varphi}$.

Решение. Вид линии - эллипс, так как $e = \frac{1}{2} < 1$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Определить координаты центра и радиус окружности: $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 54 = 0$.

2. Составить уравнение касательных к окружности $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$, проведенных в точках ее пересечения с осью абсцисс.
3. Составить уравнение общей хорды окружностей $x^2 + y^2 = 16$ и $(x-5)^2 + y^2 = 9$.
4. Найти уравнение окружности, симметричной окружности $x^2 + y^2 = 4$ относительно прямой $x - y - 3 = 0$.
5. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, зная, что а) его полуоси равны 5 и 3; б) его малая ось равна 10, а расстояние между фокусами 4; в) его большая ось 20, эксцентриситет $3/5$. Построить эллипс.
6. Найти длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситеты следующих эллипсов: а) $x^2 + 25y^2 = 25$; б) $9x^2 + y^2 = 1$; в) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$. Построить эллипсы.
7. Составить каноническое уравнение гиперболы, построить ее, найти эксцентриситет, если: а) $a=3$ и гипербола проходит через точку $A(6, 2\sqrt{3})$; б) действительная ось 8, а расстояние между фокусами 10.
8. Дана гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Найти софокусный эллипс, проходящий через точку $M(4, 6)$.
9. Найти полюсы и эксцентриситет гиперболы, построить ее: а) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$; б) $x^2 - 4y^2 = 16$; в) $25x^2 - 16y^2 = 1$; г) $2x^2 - 3y^2 + 4x + 12y - 16 = 0$.
10. Составить уравнение гиперболы, сопряженной данной $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Построить ее график. Найти эксцентриситет.
11. Найти фокальный параметр и фокус параболы. Построить ее: а) $y^2 = 6x$; б) $x^2 = 10y$; в) $y^2 = -4x$; г) $x^2 = -2y$.
12. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в точке $(0, 0)$, зная, что а) она симметрична относительно оси Ox и проходит через точку $B(1, -3)$; б) она симметрична относительно оси Oy и проходит через точку $C(1, 1)$.
13. Записать уравнения линий второго порядка в согласованной полярной системе координат: а) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; б) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; в) $x^2 + y^2 = 121$; г) $y^2 = 6x$.
14. Найти фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 20x$, если $M(7, y)$.

Контрольная работа №3

1. Дан треугольник ABC . Написать:
 - 1) уравнение прямой AB (каноническое, через две точки, параметрическое, общее, в отрезках);
 - 2) уравнение медианы AM и высоты BH ;
 - 3) уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно BC .
 Определить угол, который образует прямая BC с осью Ox .

№ п/п	A	B	C
1	(1,1)	(-6,0)	(-1,2)
2	(-1,1)	(1,4)	(0,2)
3	(1,-1)	(-5,-2)	(0,3)
4	(1,0)	(-1,-5)	(-2,1)
5	(0,1)	(4,3)	(-1,4)
6	(-1,0)	(-2,-4)	(0,3)
7	(0,-1)	(-3,-5)	(6,-2)
8	(2,0)	(0,-6)	(1,5)
9	(1,2)	(-4,-3)	(2,-6)

10	(2,3)	(-6,-1)	(0,-3)
11	(-2,1)	(2,-1)	(4,6)
12	(4,2)	(6,0)	(3,5)
13	(1,3)	(3,4)	(-5,-3)
14	(-3,2)	(4,-1)	(-2,-4)
15	(-4,-3)	(-3,0)	(0,3)
16	(1,4)	(-3,-5)	(2,1)
17	(4,6)	(-4,-1)	(2,-3)
18	(2,-3)	(4,0)	(0,5)
19	(-4,0)	(-3,-5)	(-2,1)
20	(4,-2)	(-1,4)	(1,0)
21	(-3,-2)	(2,1)	(4,-5)
22	(-6,2)	(0,4)	(-5,4)
23	(-6,-2)	(1,4)	(5,4)
24	(-1,3)	(-1,6)	(0,-5)
25	(-4,-2)	(-2,4)	(-1,-2)
26	(-2,-2)	(0,5)	(-4,0)
27	(-3,-1)	(5,0)	(6,-4)
28	(2,-6)	(0,-5)	(-3,0)
29	(4,-5)	(-3,-6)	(2,-4)
30	(-3,-1)	(4,-2)	(-6,3)

2. Дано уравнение линии второго порядка. Определить тип кривой и построить ее график.

<i>№ п/п</i>	<i>Уравнение второго порядка</i>
1	$5x^2 + 3y^2 - 10x - 12y + 2 = 0,$
2	$x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0,$
3	$-x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 4 = 0,$
4	$4x^2 + 2y^2 - 16x - 4y = 0,$
5	$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0,$
6	$2x^2 + 2y^2 - 8x - 8y + 14 = 0,$
7	$x^2 - y^2 - 4y = 0,$
8	$9x^2 + 5y^2 + 18x - 30y + 9 = 0,$
9	$3x^2 + 3y^2 - 18x - 18y + 51 = 0,$
10	$4x^2 + 4y^2 - 32x - 32y + 124 = 0,$
11	$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0,$
12	$4x^2 + 4y^2 - 12x + 4y + 3 = 0,$
13	$x^2 + 4y^2 - 2x + 56y + 181 = 0,$
14	$9x^2 - 4y^2 + 24y - 72 = 0,$
15	$5x^2 + 3y^2 - 50x - 30y + 199 = 0,$
16	$2x^2 + 3y^2 - 12x - 6y + 16 = 0,$
17	$4x^2 + 2y^2 - 8x - 4y + 10 = 0,$
18	$x^2 + 4y^2 - 3x + 4y + 3 = 0,$
19	$9x^2 + 5y^2 + 18x - 30y + 9 = 0,$
20	$3x^2 + 2y^2 - 24x - 4y + 49 = 0,$
21	$2x^2 + y^2 - 8x - 8y + 22 = 0,$

22	$7x^2 + 3y^2 - 14x - 6y - 2 = 0,$
23	$5x^2 + y^2 - 10x - 2y + 2 = 0,$
24	$4x^2 + 3y^2 - 8x - 6y - 3 = 0,$
25	$2x^2 + 3y^2 - 8x - 12y + 8 = 0,$
26	$8y^2 - 2x^2 - 8x + 16y - 8 = 0,$
27	$3x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 9 = 0,$
28	$2x^2 + 4y^2 - 8x - 8y + 2 = 0,$
29	$3x^2 + y^2 - 18x - 2y + 16 = 0,$
30	$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y - 3 = 0.$

Практическое занятие № 9

Тема занятия Поверхности второго порядка.

Цель занятия: Изучение поверхностей второго порядка и их свойств. Применение метода сечений к изучению поверхностей второго порядка.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Определение поверхностей второго порядка.
2. Метод сечений.
3. Определение поверхности вращения.
4. Цилиндрические поверхности.
5. Классификация цилиндрических поверхностей.
6. Конические поверхности.
7. Эллипсоид.
8. Однополостный гиперболоид.
9. Двуполостный гиперболоид.
10. Эллиптический параболоид.
11. Гиперболический параболоид.
12. Классификация поверхностей второго порядка.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Задача 1. Написать уравнение сферической поверхности, проходящей через точку $M(1,5,1)$ и окружность $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 23 = 0$, расположенную на плоскости xOy .

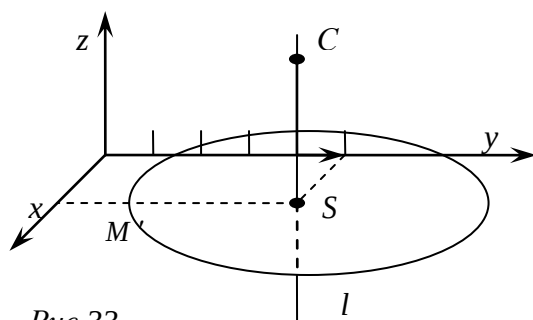


Рис.33

Решение. Пусть $C(x_c, y_c, z_c)$ - центр сферической поверхности, тогда $CM = CM' = r$, где M' - произвольная точка, лежащая на заданной окружности, а r - радиус сферы. Найдем какую-нибудь точку, принадлежащую окружности: если $x=1$, то $y^2 - 10y + 22 = 0$ и $y = 5 \pm \sqrt{3}$, например, $M'(1, 5 + \sqrt{3}, 0)$. Очевидно, центр сферы лежит на прямой, перпендикулярной плоскости окружности и проходящей через центр последней (рис. 33).

Выделим в уравнении окружности полные квадраты: $(x-1)^2 + (y-5)^2 - 3 = 0$, тогда $S(1,5,0)$ - центр окружности. Так как $\vec{k}(0,0,1)$ является направляющим вектором прямой l , то ее уравне-

ние имеет вид $\begin{cases} x-1=0, \\ z-5=0, \end{cases}$ поэтому точка C имеет координаты $(1, 5, z_c)$. Запишем равенство $CM = CM'$ в координатах

$$\begin{aligned}\sqrt{(1-1)^2 + (5-5)^2 + (1-z_c)^2} &= \sqrt{(1-1)^2 + (5-5-\sqrt{3})^2 + z_c(0-z_c)^2}, \\ \sqrt{(1-z_c)^2} &= \sqrt{3+z_c^2}, \\ 1-2z_c-z_c^2 &= 3+z_c^2, \\ z_c &= -1.\end{aligned}$$

Таким образом, $C(1, 5, -1)$, $r = \sqrt{(1-1)^2 + (5-5)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{2}$, поэтому $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 2$ - уравнение сферы.

Ответ: $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 2$.

Задача 2. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой $l: x=y=z$, а направляющей служит окружность $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

Решение. *Цилиндрической* называется поверхность, которая вместе с каждой своей точкой содержит всю прямую, проходящую через эту точку, параллельно некоторой заданной прямой.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ некоторая точка, лежащая на окружности, тогда

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1, \\ x_0 + y_0 + z_0 = 1. \end{cases} \quad (2)$$

По определению каждая точка $M(x, y, z)$, лежащая на прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно прямой l , принадлежит цилиндрической поверхности. Запишем уравнение этой прямой в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x_0 + t, \\ y = y_0 + t, \\ z = z_0 + t, t \in R \end{cases}$$

Выразим x_0, y_0, z_0 и подставим в систему (2):

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2 = 9, \\ x + y + z - 3t = 1. \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения системы t и подставляя в первое, получим уравнение цилиндрической поверхности

$$\begin{aligned}t &= \frac{1}{3}(x + y + z - 1), \\ x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2 - 2t(x + y + z) &= 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{3}(x + y + z - 1)^2 - \frac{2}{3}(x + y + z - 1)(x + y + z) &= 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz &= 4.\end{aligned}$$

Ответ: уравнение цилиндрической поверхности имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = 4$.

Задача 3. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в точке $A(0, 0, 1)$, если кривая $\gamma: \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9, \\ z = 5 \end{cases}$ целиком принадлежит поверхности.

Решение. *Конической* называется поверхность, которая вместе с каждой своей точкой со-

держит прямую, проходящую через эту точку и некоторую заданную точку, называемую *вершиной конуса*. Прямые, целиком принадлежащие конической поверхности, называются ее *образующими*.

Пусть $M(x', y', 5)$ – текущая точка кривой γ (эта кривая называется *направляющей* конуса). Тогда прямая AM принадлежит конусу, при этом

$$AM : \begin{cases} x = 0 + t(x' - 0), \\ y = 0 + t(y' - 0), \\ z = 1 + t(5 - 1), \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{t}x, \\ y' = \frac{1}{t}y, \\ t = \frac{1}{4}(z - 1). \end{cases}$$

Так как $M \in \gamma$, то ее координаты удовлетворяют уравнению кривой, поэтому

$$\left(\frac{1}{t}x\right)^2 + 4\left(\frac{1}{t}y\right)^2 = 9, \quad x^2 + 4y^2 = 9t^2, \quad t^2 = \frac{x^2 + 4y^2}{9}.$$

Возведя обе части последнего уравнения системы в квадрат и подставляя выражение для t^2 , получим уравнение конической поверхности: $\frac{x^2 + 4y^2}{9} = \frac{1}{4}(z - 1)^2$, $4x^2 + 16y^2 - 9z^2 + 18z - 9 = 0$.

Ответ: $4x^2 + 16y^2 - 9z^2 + 18z - 9 = 0$.

Для исследования поверхности второго порядка рассмотрим *метод сечений*. Сущность метода заключается в следующем: данную поверхность будем пресекать координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям. По виду линий, получающихся в сечении, будем судить о форме поверхности.

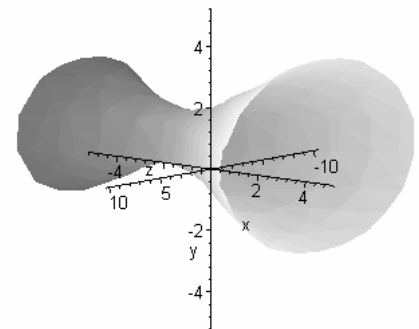
Задача 4. Определить тип поверхности $4x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z - 5 = 0$ и построить ее изображение.

Решение. I-й способ. Выделим полные квадраты, содержащие переменные,

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 2x + 1) - 4 - 9(y^2 + 2y + 1) + 9 + 36(z^2 - 2z + 1) - 36 &= 5, \\ 4(x - 1)^2 - 9(y + 1)^2 + 36(z - 1)^2 &= 36, \\ \frac{(x - 1)^2}{9} - \frac{(y + 1)^2}{4} + (z - 1)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Из полученного уравнения следует, что рассматриваемая поверхность является однополостным гиперболоидом с центром симметрии в точке $C(1; -1; 1)$, эта поверхность не пересекает прямую $y = -1$. Таким образом, можно с помощью метода сечений построить поверхность $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ и перенести начало координат в точку $C'(-1; 1; 1)$.

Ответ: данная поверхность $4x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z - 5 = 0$ является однополостным гиперболоидом.



Задача 5. Рассмотрим II-й способ решения задачи 4.

Определим тип поверхности с помощью инвариантов и семиинвариантов: имеем $a_{11} = 4$, $a_{22} = -9$, $a_{33} = 36$, $a_{11} = 4$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{10} = -4$, $a_{20} = -9$, $a_{30} = -36$, $a_{00} = -5$, поэтому $S = 4 - 9 + 36 = 31$,

$$T = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 36 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 36 \end{vmatrix} = -36 + 4 \cdot 36 - 9 \cdot 36 = 36(4 - 10) = -216,$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{vmatrix} = -1296,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 36 & -36 \\ -4 & -9 & -36 & -5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -9 & 0 & -9 \\ 0 & 36 & -36 \\ -9 & -36 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-9) \left(\begin{vmatrix} 36 & -36 \\ -36 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 36 \\ -9 & -36 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -36(35(-5 - 36) + 9 \cdot 36) = 41472.$$

Так как $\delta \neq 0$, $\delta \cdot S < 0$ и $\Delta > 0$, то поверхность является однополостным гиперболоидом. Для его построения используем метод сечений.

Пусть $y = h = \text{const}$, тогда уравнение примет вид $4x^2 + 36z^2 - 8x - 72z = 9h^2 + 18h + 5$ в плоскости $y = h$. Выделим полные квадраты, содержащие переменные,

$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 36(z^2 - 2z + 1) - 36 = 9(h^2 + 2h + 1) - 9 + 5,$$

$$4(x-1)^2 + 36(z-1)^2 = 9(h+1)^2 + 36.$$

$9(h+1)^2 + 36 > 0$ при любом h , последнее уравнение задает в плоскости $y = h$ эллипс

$$\frac{(x-1)^2}{(9(h+1)^2 + 36)/4} + \frac{(z-1)^2}{(9(h+1)^2 + 36)/36} = 1$$

с центром симметрии $C(1; -1; 1)$ и полуосями

$$a = \frac{\sqrt{(h+1)^2 + 4}}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{(h+1)^2 + 4}}{2}.$$

Очевидно, поверхность симметрична относительно плоскости $y = h = -1$, поэтому достаточно построить часть поверхности при $h \geq -1$, а потом отобразить ее симметрично (рис. 34).

При $h = -1$ имеем $\frac{(x-1)^2}{9} + (z-1)^2 = 1$,

при $h = 0$ $\frac{4(x-1)^2}{45} + \frac{36(z-1)^2}{45} = 1$,

при $h = 1$ $\frac{(x-1)^2}{18} + \frac{(z-1)^2}{2} = 1$.

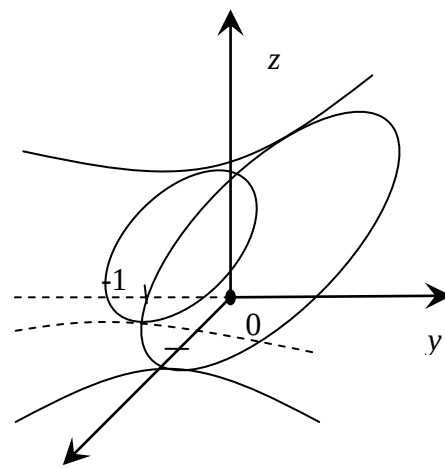


Рис. 34

Задания для самостоятельной работы дома

1. Составить уравнение цилиндрической поверхности, если:

1) ее ось совпадает с осью Oz , а направляющей служит линия $\gamma : \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$;

2) ее ось совпадает с осью Oy , а направляющей служит линия $\gamma : \begin{cases} 2x^2 + z^2 - 8x - 2z + 1 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

2. Написать уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат и направляющей

$$1) \gamma: \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1, \\ z = 5 \end{cases} \quad 2) \gamma: \begin{cases} x^2 + (y-6)^2 + z = 25, \\ y = 3 \end{cases}$$

3. Исследовать методом сечений следующие поверхности:

1) $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y + 4z - 3 = 0$;

2) $x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$;

3) $x^2 = 4z$.

5. Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, если поверхность:

1) проходит через точку $(\sqrt{5}; 3; 2)$ и пересекает плоскость XOY по гиперболе $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$;

2) пересекает плоскость OXZ по окружности $x^2 + y^2 = 9$, а плоскость Oxy по гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{10} = 1$.

6. Написать уравнение двуполостного гиперболоида в канонической системе координат, если точки $M_1(3; 1; 2)$, $M_2(6; 2; \sqrt{15})$ и $M_3(2; \sqrt{\pi}; 3)$ лежат на данной поверхности (рассмотреть 3 возможных случая).

7. Написать уравнение сферы, проходящей через точку $M(1; 5; 1)$ и окружность $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 23 = 0$, расположенную на плоскости Oxy .

7. Написать уравнение сферы:

а) проходящей через точку $A(1, 4, -7)$ и касающейся плоскости $6x + 6y - 7z + 42 = 0$;

б) проходящей через точку $B(6, -8, 3)$ и касающейся оси Oz ;

с) описанной около тетраэдра, одна из вершин которого совпадает с началом координат, а другие находятся в точках $A(2, 0, 0)$, $B(0, 5, 0)$, $C(0, 0, 3)$.

8. Какому соотношению должны удовлетворять коэффициенты плоскости

$Ax + By + Cz + D = 0$ для того, чтобы она касалась сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$?

9. Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая задана системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 9, \\ z = 4. \end{cases}$$

10. Направляющая конуса задана уравнениями $\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 - z = 0, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$ Составить уравнение конуса,

если его вершина находится в точке $(-3, 0, 0)$.

11. Даны три параллельные прямые: $x = y = z$, $x+1 = y = z-1$, $x-1 = y+1 = z-2$. Найти проходящий через них круговой цилиндр.

12. Прямая $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$ вращается около оси Oz . Найти уравнение описанной ею поверхности.

13. Найти угол между образующей и осью (вращения) конуса: $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{3} = 0$.

14. При каком значении параметра a поверхность, заданная уравнением

$x^2 + 3y^2 + 2ayz + 2zx - 2x - 8y - 2z - 3 = 0$, является конусом?

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания
по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «ГЕОМЕТРИЯ»

для студентов направления подготовки
09.03.02 Информационные системы и технологии
профиль Прикладное программирование в интеллектуальных информационных
системах

Ставрополь 2025

Общая характеристика самостоятельной работы студента при изучении дисциплины

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

Самостоятельная работа включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим занятиям) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными модулями (темами) дисциплины в соответствии с рабочей программой;
- написание рефератов, докладов;
- подготовку к практическим занятиям и выполнение предусмотренных ими заданий;
- подготовку ко всем видам аттестаций;
- подготовку презентаций по темам (части темы).

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы

знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

- а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;
- б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков – важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность - способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться

информацией;

- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;
- привычная последовательность и систематичность деятельности;
- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является *утреннее время* (с 8 до 14 часов), причем максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* - (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1-1,5 часа нужны перерывы по 10 - 15 мин, через 3 - 4 часа работы отдых должен быть продолжительным - около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Физически здоровый молодой человек, обладающий хорошей подготовкой и нормальными способностями, должен, будучи студентом, отдавать *учению 9-10 часов в день* (из них 6 часов в вузе и 3 - 4 часа дома). Любой предмет нельзя изучить за несколько дней перед экзаменом. Если студент в году работает систематически, то он быстро все вспомнит, восстановит забытое. Если же подготовка шла аврально, то у студента не будет даже общего представления о предмете, он забудет все сданное.

Следует взять за правило: *учиться ежедневно, начиная с первого дня семестра.*

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать

ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы – это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом. Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

Методические рекомендации по подготовке к занятиям

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.

2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Код оцениваемой компетенции, индикатора (ов)	Этап формирования компетенции (№ темы) (в соответствии с рабочей программой дисциплины)	Средства и технологии оценки	Вид контроля, аттестация (текущий/промежуточный)	Тип контроля (устный, письменный или с использованием технических средств)	Наименование оценочного средства
ИД-1ОПК-1	1, 7, 8, 9	Коллоквиум	Текущий	Устный	вопросы к коллоквиуму 1
	1, 6	Индивидуальное задание	Текущий	Письменный	Комплект 1,разноуровневых заданий, задач
	5	Коллоквиум	Текущий	Устный	вопросы к коллоквиуму 2
	1-10	Вопросы к экзамену	Промежуточный	Устный	Экзамен 1

ПЛАН-ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ СТУДЕНТАМИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения	Количество баллов
1 семестр			
1	Практическое занятие 5	7	33
2	Практическое занятие 7	12	33
3	Практическое занятие 9	18	33
	Итого за 1 семестр:		99
	Итого		99

Коллоквиум

Подготовьтесь к коллоквиуму по вопросам, приведённым ниже.

Вопросы к коллоквиуму по геометрии № 1

1. Направленные отрезки. Векторы. Коллинеарные и компланарные векторы.
2. Сложение векторов. (Определение и свойства).
3. Вычитание векторов.
4. Умножение вектора на число (определение и свойства).
5. Теорема о коллинеарных векторах (в векторной форме).
6. Линейная зависимость векторов (определение и свойства).

7. Теорема о линейной зависимости двух векторов.
8. Теорема о линейной зависимости трех векторов. Следствие из теоремы.
9. Теорема о линейной зависимости четырех векторов. Следствия из теоремы.
10. Векторное пространство. Базис и размерность векторного пространства.
11. Векторное подпространство. Базис и размерность векторного подпространства.
12. Некоторые примеры векторных подпространств.
13. Координаты вектора. (Определение и свойства).
14. Проекция вектора на ось. Теоремы о проекциях.
15. Скалярное произведение векторов.
16. Выражение скалярного произведения векторов в координатах (теорема).
17. Аффинная система координат на плоскости (определение и построение).
18. Аффинная система координат в пространстве. (определение и построение).
19. Нахождение координат вектора по координатам начала и конца.
20. Прямоугольная декартова система координат.
21. Расстояние между точками.
22. Каноническое уравнение прямой.
23. Параметрическое уравнение прямой.
24. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
25. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
26. Уравнение прямой, заданной точкой и вектором нормали.
27. Уравнение прямой «в отрезках».
28. Общее уравнение прямой.
29. Взаимное расположение двух прямых.
30. Расстояние от точки до прямой.
31. Угол между прямыми, заданными общими уравнениями.
32. Угол между прямыми, заданными с угловым коэффициентом.

Вопросы к коллоквиуму по геометрии № 2

1. Эллипс. (Определение и каноническое уравнение).
2. Свойства эллипса.
3. Эксцентриситет и директрисы эллипса.
4. Гипербола. (Определение и каноническое уравнение).
5. Свойства гиперболы.
6. Эксцентриситет и директрисы гиперболы.
7. Равносторонняя гипербола. Сопряженные гиперболы.
8. Парабола (определение и каноническое уравнение).
9. Свойства параболы.
10. Классификация линий второго порядка.
11. Уравнение плоскости, заданной точкой и направляющим подпространством.
12. Параметрическое уравнение плоскости.
13. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.
14. Уравнение плоскости, заданной точкой и вектором нормали.
15. Уравнение плоскости «в отрезках».
16. Общее уравнение плоскости.
17. Взаимное расположение двух плоскостей.
18. Расстояние от точки до плоскости.

19. Угол между плоскостями.
20. Уравнение прямой в пространстве, заданной точкой и направляющим вектором.
21. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.
22. Уравнение прямой, заданной пересечением плоскостей.
23. Взаимное расположение прямых в пространстве.
24. Взаимное расположение прямой и плоскости.
25. Угол между прямыми в пространстве.
26. Угол между прямой и плоскостью.
27. Поверхности второго порядка. Метод сечений. Поверхности вращения.
28. Цилиндрические поверхности. Классификация цилиндрических поверхностей.
29. Конические поверхности.
30. Эллипсоид.
31. Однополостный гиперболоид.
32. Двуполостный гиперболоид.
33. Эллиптический параболоид.
34. Гиперболический параболоид.
35. Классификация поверхностей второго порядка.

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка "**отлично**" выставляется, если студент при ответе на вопросы как базового так и повышенного уровня показывает глубокое и всестороннее знание предмета, обязательной и дополнительной литературы, аргументировано и логически стройно излагает материал, пользуясь математической символикой, может применять знания для анализа конкретных ситуаций, свободно ориентируется в межпредметных связях.

Оценка «**хорошо**» ставится, если при ответе на вопросы базовой части студент показывает знание предмета, обязательной литературы, знакомстве с дополнительной литературой, аргументировано излагает материал, умеет применять знания для анализа конкретных ситуаций, однако незначительно нарушает последовательность изложения материала, дает недостаточно полное, хотя и верное определение понятий.

Оценка «**удовлетворительно**» ставится, если студент при ответе на вопросы базовой части показал, что он в основном знает предмет, обязательную литературу, может практически применять свои знания, но программный материал излагает фрагментарно и непоследовательно, допускает отдельные ошибки и погрешности при применении математической символики и понятий, слабо ориентируется в межпредметных связях;.

Оценка «**неудовлетворительно**» ставится, если студент не отвечает на предлагаемые ему вопросы базовой или его ответ показывает, что не усвоено основное содержание предмета, обнаруживается незнание большей части учебного материала, допускаются грубые ошибки при формулировке теорем, определении основных понятий, неправильно используется математическая символика.

2. Описание шкалы оценивания

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент

получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя устный опрос студентов в форме индивидуального собеседования на вопросы коллоквиума. Каждому студенту предлагается по одному вопросу из каждой темы. Студент отвечает на вопросы базового уровня и при успешном ответе ему предлагается один-два вопроса из вопросов повышенного уровня, что позволяет преподавателю определить уровень владения материалом.

Предлагаемые студенту задания позволяют проверить компетенцию ОПК-1. Для подготовки к данному оценочному мероприятию необходимо прочитать лекционный материал, найти ответы на поставленные вопросы, изучить дополнительную литературу, установить взаимосвязи между изучаемыми понятиями, запомнить основные определения, свойства, теоремы, продумать, где они могут применяться. Рекомендуется готовиться к данному контрольному мероприятию в течение семестра, разбирая теоретические задания для оценки сформированности компетенций к каждому практическому занятию. Эти задания предлагаются в УМК дисциплины «Аналитическая геометрия», представленном на кафедре Математического анализа, алгебры и геометрии.

При подготовке к ответу студенту не разрешается пользоваться никакими справочными материалами. Для подготовки к ответу даётся время на подготовку до 10-15 минут, в течение которого студент может записать план своего ответа, основные формулы, план доказательства теорем. Для подготовки к ответу на вопросы повышенного уровня предлагается дополнительное время.

Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты, прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

При оценке в первую очередь учитываются показанные студентами знания и умения (их полноту, глубину, прочность, использование). Оценка также зависит от наличия и характера погрешностей. Среди погрешностей выделяют ошибки и

недочеты. Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или о отсутствии знаний не считающихся основными в соответствии с программой. Недочетами также являются: погрешности, которые не привели к искажению смысла, полученного студентом задания или способа его выполнения, неаккуратная запись, небрежное выполнение чертежа, графика.

Вопросы к экзамену по геометрии

1. Направленные отрезки. Векторы. Коллинеарные и компланарные векторы.
2. Сложение двух векторов (Определение и свойства). Сложение n векторов. Вычитание векторов. Умножение вектора на число (Определение и свойства).
3. Теорема о коллинеарных векторах (в векторной форме).
4. Линейная зависимость векторов (Определения и свойства).
5. Теорема о линейной зависимости двух векторов. Теорема о линейной зависимости трех векторов. Теорема о линейной зависимости четырех векторов.
6. Векторное пространство. Базис и размерность векторного пространства. Векторное подпространство. Базис и размерность векторного подпространства. Примеры векторных подпространств.
7. Определение координат вектора. Свойства координат.
8. Скалярное произведение векторов. Определения и свойства. Теоремы.
9. Аффинная система координат на плоскости и в пространстве. Радиус-вектор точки. Определение координат точки в аффинной системе координат.
10. Нахождение координат вектора, зная координаты его начала и конца (на плоскости и в пространстве).
11. Прямоугольная декартова система координат в пространстве. Расстояние между точками в прямоугольной декартовой системе координат.
12. Полярная система координат. Формулы, выражающие связь полярной и прямоугольно-декартовой систем координат. Цилиндрическая система координат. Сферическая система координат.
13. Смешанное произведение векторов (определение, свойства, выражение смешанного произведения в координатах, объем тетраэдра).
14. Векторное произведение векторов (определение, свойства, выражение векторного произведения в координатах, связь смешанного, векторного и скалярного произведения векторов, площадь треугольника).
15. Направляющий вектор прямой. Каноническое уравнение прямой на плоскости (вывод формулы). Параметрическое уравнение прямой на плоскости (вывод формулы). Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки (вывод формулы). Уравнение прямой на плоскости «в отрезках» (вывод формулы).
16. Направляющий вектор прямой. Уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом (вывод формулы). Вектор нормали. Уравнение прямой на плоскости, заданной точкой и вектором нормали (вывод формулы).
17. Общее уравнение прямой на плоскости (теоремы с доказательством).

18. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой (вывод формулы - теорема). Угол между прямыми на плоскости.
19. Направляющее подпространство. Каноническое уравнение плоскости (вывод формулы). Параметрическое уравнение плоскости (вывод формулы). Уравнение плоскости, заданной тремя точками (вывод формулы).
20. Направляющее подпространство. Уравнение плоскости «в отрезках» (вывод формулы). Уравнение плоскости, заданной точкой и вектором нормали (вывод формулы). Общее уравнение плоскости (теорема с доказательством).
21. Расстояние от точки до плоскости (вывод). Взаимное расположение двух плоскостей.
22. Угол между плоскостями.
23. Направляющий вектор прямой. Каноническое уравнение прямой в пространстве (вывод формулы). Параметрическое уравнение прямой в пространстве (вывод формулы). Уравнение прямой, проходящей через две точки (вывод формулы). Уравнение прямой в пространстве, заданной пересечением плоскостей (вывод формулы).
24. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости.
25. Угол между прямыми в пространстве. Угол между прямой и плоскостью.
26. Определение и каноническое уравнение эллипса (вывод). Свойства эллипса. Эксцентриситет и директрисы эллипса.
27. Определение и каноническое уравнение гиперболы. Свойства гиперболы. Равносторонняя гипербола. Сопряженные гиперболы. Эксцентриситет и директрисы гиперболы.
28. Определение и каноническое уравнение параболы (вывод). Свойства параболы. Примечание. Классификация линий второго порядка.
29. Определение поверхностей второго порядка. Метод сечений. Определение поверхности вращения. Цилиндрические поверхности. Конические поверхности.
30. Эллипсоид.
31. Гиперболоиды и параболоиды.
32. Классификация поверхностей второго порядка.

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка «отлично» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает материал; свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний как базового так и повышенного уровня; использует в ответе дополнительный материал все предусмотренные программой задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному; анализирует полученные результаты; проявляет самостоятельность при выполнении заданий.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено полностью, необходимые практические компетенции в основном сформированы, все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения достаточно высокое, при ответе на вопрос или

решении задачи повышенного уровня возможны некоторые затруднения, хотя основное содержание этих заданий студенту известно. Студент твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, большинство предусмотренных программой заданий базового уровня выполнено, но в них имеются ошибки, при ответе на поставленный вопрос студент допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, наблюдаются нарушения логической последовательности в изложении программного материала.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы, необходимые практические компетенции не сформированы, большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному.

2. Описание шкалы оценивания

Промежуточная аттестация в форме экзамена предусматривает проведение обязательной экзаменационной процедуры и оценивается 40 баллами из 100. Минимальное количество баллов, необходимое для допуска к экзамену, составляет 33 балла. Положительный ответ студента на экзамене оценивается рейтинговыми баллами в диапазоне от **20** до **40** ($20 \leq S_{\text{экз}} \leq 40$), оценка **меньше 20** баллов считается неудовлетворительной.

Шкала соответствия рейтингового балла экзамена 5-балльной системе

Рейтинговый балл по дисциплине	Оценка по 5-балльной системе
35 – 40	Отлично
28 – 34	Хорошо
20 – 27	Удовлетворительно

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным **55**. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения **экзамена** осуществляется в соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования в СКФУ.

В экзаменационный билет включаются 3 вопроса: два теоретических вопроса и задача. Один из теоретических вопросов может быть заменён защитой индивидуального проекта (темы проектов представлены в соответствующем ФОСе), подготовленного студентами в семестре и представляющем разработку одной из тем с презентацией для интерактивной доски. В билете один из вопросов (теоретический или задача) представлены из вопросов базового уровня, а другой из вопросов повышенного уровня.

Для подготовки по билету отводится 30 – 40 минут.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования калькулятором. Телефонами, планшетами и иными справочными материалами пользоваться не разрешается.

Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты, прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

Оценка на экзамене выставляется в соответствии с соответствующим критерием.

При оценке в первую очередь учитываются показанные студентами знания и умения (их полноту, глубину, прочность, использование). Оценка также зависит от наличия и характера погрешностей. Среди погрешностей выделяют ошибки и недочеты. Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или о отсутствии знаний не считающихся основными в соответствии с программой. Недочетами также являются: погрешности, которые не привели к искажению смысла, полученного студентом задания или способа его выполнения, неаккуратная запись, небрежное выполнение чертежа, графика.

Ответ на теоретический вопрос считается безупречным, если по своему содержанию полностью соответствует вопросу, содержит все необходимые теоретические факты и обоснованные выводы, а устное изложение и письменная запись ответа математически грамотна и отличается последовательностью и аккуратностью.

Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.