

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ
по дисциплине «Математические основы теории управления»
для студентов направления подготовки
10.03.01 «Информационная безопасность»
Направленность (профиль)
«Организация и технологии защиты информации (по отрасли или в сфере профессиональной
деятельности)»

Ставрополь,
2026

СОДЕРЖАНИЕ:

Тема 1. Матрицы и действия над матрицами	
Практическое занятие № 1-2.....	4
Практическое занятие № 3-4.....	9
Тема 2. Исследование устойчивости автоматической системы регулирования при помощи алгебраических критериев	
Практическое занятие № 5-8.....	15
Практическое занятие № 9-11.....	20
Тема 3. Системы дифференциальных уравнений	
Практическое занятие № 12-13.....	27
Тема 4. Основные сведения идентификации объектов в системах автоматического управления	
Практическое занятие № 14-16.....	34
Тема 5. Управляемость систем	
Практическое занятие № 17-18.....	39

ВВЕДЕНИЕ

1. Цель и задачи освоения дисциплины (модуля)

Цель освоения дисциплины является изучение математических основ теории управления и методов их применения

Задачи освоения дисциплины заключаются в формировании у студентов знаний и умений в применении математического аппарата при овладении теорией автоматического управления и разработанной на ее основе методики анализа и синтеза автоматических систем

2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	ИД-1 выделяет проблемную ситуацию, осуществляет ее многофакторный анализ и диагностику на основе системного подхода	выделяет проблемную ситуацию, осуществляет ее многофакторный анализ и диагностику на основе системного подхода определяет и оценивает риски возможных вариантов решений проблемной ситуации, выбирает оптимальный вариант её решения.
	ИД-3 определяет и оценивает риски возможных вариантов решений проблемной ситуации, выбирает оптимальный вариант её решения.	

Тема 1. Матрицы и действия над матрицами

Практическое занятие № 1-2.

Нахождение общего решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений

1. Цели:

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на практическое занятие.

2. Формируемые компетенции: УК-1.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 180 мин

Вступительная часть 4 мин

Проверка готовности студентов к занятию 10 мин

Программа практического занятия

1. Повторение теоретического материала 70 мин
 2. Выполнение практического задания 70 мин
- Проверка выполнения практического занятия 20 мин
- Заключительная часть 6 мин

Основные теоретические сведения

Неоднородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\frac{dX}{dt} = AX(t) + G(t). \quad (1)$$

Решение системы (1) состоит из суммы двух решений: общего решения однородной системы уравнений и частного решения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Этим методом можно построить общее решение неоднородной системы (1), исходя из фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы. Согласно методу Лагранжа частное решение системы (1) получается в виде:

$$X(t) = e^{A \cdot t} \cdot X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot G(\tau) \cdot d\tau. \quad (2)$$

Полученный результат рассматривается как сумма решений соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений и частного решения неоднородной системы.

Пример

Найти общее решение системы методом Лагранжа.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2 \cdot X_2 + 3 \cdot t \\ \frac{dx_2}{dt} = 2 \cdot X_1 + 4 \end{cases}$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}.$$

с нач. усл.:

Решение

1. Находим общее решение однородной системы уравнений:

а) матрица коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix};$$

б) характеристическая матрица:

$$|\lambda E - A| = \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix};$$

в) характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4 = 0;$$

г) корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = 2 \cdot i; \quad \lambda_2 = -2 \cdot i \quad (\text{корни мнимые});$$

д) модальная матрица:

$$H = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

е) фундаментальная матрица:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} i(e^{(2 \cdot i) \cdot t} + e^{(-2 \cdot i) \cdot t}) & -(e^{(2 \cdot i) \cdot t} - e^{(-2 \cdot i) \cdot t}) \\ (e^{(2 \cdot i) \cdot t} - e^{(-2 \cdot i) \cdot t}) & i(e^{(2 \cdot i) \cdot t} + e^{(-2 \cdot i) \cdot t}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix};$$

ж) общее решение однородной системы:

$$X_{\text{общ}}(t) = \begin{bmatrix} x_{1,0} \cdot \cos 2t - x_{2,0} \sin 2t \\ x_{1,0} \cdot \sin 2t + x_{2,0} \cdot \cos 2t \end{bmatrix}.$$

2. Находим частное решение системы по формуле

$$X(t) = e^{A \cdot t} \cdot X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot G(\tau) \cdot d\tau.$$

, преобразовывая ее следующим образом:

$$X(t) = \Phi(t) \cdot \int_0^t \Phi^{-1}(\tau) \cdot G(\tau) d\tau.$$

Для этого производим следующие операции:

а) обращаем матрицу $\Phi(t)$:

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \cos 2\tau & \sin 2\tau \\ -\sin 2\tau & \cos 2\tau \end{bmatrix};$$

б) перемножаем матрицы $\Phi^{-1}(t)$ и $G(t)$:

$$\Phi^{-1}(\tau) \cdot G(\tau) = \begin{bmatrix} \cos 2\tau & \sin 2\tau \\ -\sin 2\tau & \cos 2\tau \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3\tau \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\tau \cos 2\tau + 4 \cdot \sin 2\tau \\ 3\tau \cdot \sin 2\tau + 4 \cdot \cos 2\tau \end{bmatrix};$$

в) берем интеграл от полученного вектор-столбца (по частям):

$$\int_0^t \Phi(\tau) \cdot G(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} 3\tau \cdot \cos 2\tau + 4 \cdot \sin 2\tau \\ 3\tau \cdot \sin 2\tau + 4 \cdot \cos 2\tau \end{bmatrix} \cdot d\tau = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot t \cdot \cos 2t - \frac{5}{4} \cos 2t \\ \frac{3}{2} \cdot \cos 2t + \frac{5}{4} \cdot \sin 2t \end{bmatrix};$$

г) умножаем фундаментальную матрицу на полученный интегрированием вектор и вычисляем частное решение системы:

$$x_{\text{част}}(t) = e^{At} \cdot \int_0^t e^{-A\tau} \cdot g(\tau) \cdot d\tau = \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \cos 2t + \frac{3}{2} \sin 2t + \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \sin 2t + \frac{3}{2} \cos 2t \end{bmatrix}$$

После перемножения матриц имеем:

$$x_{\text{частн}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \cos 2t - \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \sin 2t + \frac{3}{2} t \end{bmatrix};$$

с) общее решение системы записывается как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения:

$$\begin{aligned} X(t) = X_{\text{общ}}(t) + X_{\text{частн}}(t) &= \begin{bmatrix} x_{1,0} \cdot \cos 2t - x_{2,0} \cdot \sin 2t \\ x_{1,0} \cdot \sin 2t + x_{2,0} \cdot \cos 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \cdot \cos 2t - \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \cdot \sin 2t + \frac{3}{2} \cdot t \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (x_{1,0} + \frac{5}{4}) \cdot \cos 2t - x_{2,0} \cdot \sin 2t - \frac{5}{4} \\ (x_{1,0} + \frac{5}{4}) \cdot \sin 2t + x_{2,0} \cdot \cos 2t + \frac{3}{2} \cdot t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Задание практического занятия № 8

Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + g_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + g_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}.$$

с начальными условиями

Требуется: решить систему уравнений и построить графики зависимостей $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	g_1	g_2	x_{10}	x_{20}
-3	4	1	0	e^{3t}	$-e^{3t}$	1	2

Содержание отчета о практическом задании

По результатам выполнения практического занятия студенты оформляют и защищают в индивидуальном порядке в форме беседы результаты выполнения заданий.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-5

Методическая: 1-2

Интернет-ресурсы: 1-3

Практическое занятие № 3-4.

Нахождение частного решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений

1. Цель занятия

1. Найти частное решение неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений

Формируемые компетенции: УК-1.

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на практическое занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 180 мин

Вступительная часть 4 мин

Проверка готовности студентов к занятию 10 мин

Программа практического занятия

1. Повторение теоретического материала 70 мин

2. Выполнение практического задания 70 мин

Проверка выполнения практического занятия 20 мин

Заключительная часть 6 мин

Основные теоретические сведения

Метод неопределенных коэффициентов.

Частное решение неоднородной линейной системы возможно получить этим методом, если функция $G(t)$ представлена в виде произведения экспоненциальной функции на алгебраический полином (или на гармоническую функцию).

1. Элементы вектора $G(t)$ можно представить в виде произведения полинома степени m на

$$g_k(t) = P_k^{m_k} \cdot e^{v \cdot t}, \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

экспоненциальную функцию:

$$\text{Где } P_k^{m_k}(t) = a_{0k} + a_{1k} \cdot t + \dots + a_{m_k k} \cdot t^{m_k} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

полином степени m .

Частное решение в этом случае отыскивается в виде:

$$x_k^{\text{частн}}(t) = Q_k^{z+s}(t) \cdot e^{v \cdot t} \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где $Q_k^{z+s}(t)$ – полиномы степени $(m+s)$ с неизвестными коэффициентами;

$z = \max(m_k) \quad k=1, 2, n$ – максимальная степень полинома $g_k(t)$; v –

экспоненциальная степень полинома $g_k(t)$; s – коэффициент.

Величина s находится из следующих условий:

- а) $s=0$, если v не является корнем характеристического уравнения однородной системы;
- б) $s=k$ (k – кратность корня), если v является корнем характеристического уравнения однородной системы.

Неизвестные коэффициенты полиномов определяются путем подстановки выражения (7) в систему (6) и приравниванием коэффициентов при подобных членах уравнений.

2. Элементы вектора $G(t)$ представлены в виде произведения полиномов степени m_k, n_k на гармонические функции:

$$g_k(t) = e^{\alpha t} \left[R_k^{m_k}(t) \cdot \cos(\beta t) + W_k^{n_k}(t) \cdot \sin(\beta t) \right]. \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

Частное решение запишется в этом случае:

$$x_k^{\text{частн}}(t) = e^{\alpha t} \left[P_k^{z+s}(t) \cdot \cos(\beta t) + Q_k^{z+s}(t) \cdot \sin(\beta t) \right], \quad (2)$$

где P_k^{z+s}, Q_k^{z+s} – полиномы степени $(z+s)$ с неизвестными коэффициентами;

$z = \max(m_k, n_k) \quad k=1, 2, n$, – максимальная степень полинома;

$g_k(t)$; $(\alpha + i\beta)$ – экспоненциальная степень полинома $g_k(t)$;

s – коэффициент.

Величина s находится из следующих условий:

а) $s=0$, если $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения однородной системы;

б) $s=k$ (k – кратность корня), если $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения однородной системы.

Неизвестные коэффициенты полиномов определяются путем подстановки выражения

$$x_k^{\text{частн}}(t) = Q_k^{z+s}(t) \cdot e^{v \cdot t} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

или

$$x_k^{\text{частн}}(t) = e^{\alpha t} \left[P_k^{z+s}(t) \cdot \cos(\beta t) + Q_k^{z+s}(t) \cdot \sin(\beta t) \right]$$

в систему дифференциальных уравнения

$$\frac{dX}{dt} = AX(t) + G(t).$$

и приравниванием коэффициентов при подобных членах уравнений.

Пример

Найти общее решение системы методом неопределенных коэффициентов

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 + 1 \end{cases}$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}$$

с начальными условиями

Решение

1. Находим общее решение однородной системы уравнений:

а) матрица коэффициентов:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix};$$

б) характеристическая матрица:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix};$$

в) характеристическое уравнение:

$$\Delta = (1-\lambda) \cdot (-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 1 + 2 = \lambda^2 + 1 = 0;$$

г) корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = i; \quad \lambda_2 = -i, \quad (\text{корни мнимые});$$

д) для нахождения решения однородной системы находим собственный вектор, соответствующий корню $\lambda_1 = i$. Для этой цели составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} (1 - \lambda) \cdot h_1 - 2 \cdot h_2 = 0; \\ h_1 - (1 + \lambda) \cdot h_2 = 0 \end{cases};$$

е) поскольку уравнения линейно зависимы, принимаем одну из переменных в виде произвольной константы ($h_1 = 2$) и находим другую $h_2 = 1 - i$;

ж) собственный вектор равен:

$$h^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 - i \end{bmatrix};$$

з) тогда составляющие решения однородной системы имеют вид:

$$x_1(t) = 2 \cdot e^{i \cdot t}; \quad x_2(t) = (1 - i) \cdot e^{i \cdot t};$$

ж) преобразуем экспоненциальные функции по формуле Эйлера, производим разделение вещественной и мнимой части составляющих решения и находим общее решение однородной системы:

$$x_1^{\text{общ}}(t) = 2 \cdot c_1 \cdot \cos t + 2 \cdot c_2 \cdot \sin(t);$$

$$x_2^{\text{общ}}(t) = (c_1 - c_2) \cdot \cos(t) + (c_1 + c_2) \cdot \sin(t),$$

где c_1, c_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

2. Частное решение неоднородной системы найдем по методу неопределенных коэффициентов.

Имеем: $g_1(t) = 3; \quad g_2(t) = 1$. Это полиномы степеней $m_1 = m_2 = 0$.

Тогда степень полинома решения $z = m_{\max} = 0$. Коэффициент $v = 0 \neq \lambda_i$, следовательно, $s=0$. Поэтому частное решение отыскиваем в виде полиномов нулевого порядка:

$$x_1^{(1)} = a; \quad x_2^{(1)} = b.$$

Подставляя $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$ неоднородную исходную систему

$$\frac{dX}{dt} = AX(t) + G(t).$$

находим коэффициенты частного решения:

$$a=1, \quad b=2.$$

3. Решением системы является сумма общего и частного решений:

$$x_1(t) = 2 \cdot C_1 \cdot \cos(t) + 2 \cdot C_2 \cdot \sin(t) + 1;$$

$$x_2(t) = (C_1 - C_2) \cdot \cos(t) + (C_1 + C_2) \cdot \sin(t) + 2 .$$

Задание практического занятия № 9

Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + g_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + g_2 \end{cases}$$

с начальными условиями $\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$.

Требуется: решить систему уравнений и построить графики зависимостей $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	g_1	g_2	x_{10}	x_{20}
6	2	-4	2	$\sin(t)$	$-\cos(t)$	0	2

Содержание отчета о практическом задании

По результатам выполнения практического занятия студенты оформляют и защищают в индивидуальном порядке в форме беседы результаты выполнения заданий.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-5

Методическая: 1-2

Интернет-ресурсы: 1-3

Тема 2. Исследование устойчивости автоматической системы регулирования при помощи алгебраических критериев

Практическое занятие № 5-8.

Вывод решения выходной системы дифференциальных уравнений для случая линейной непрерывный детерминированной автоматической системы регулирования

1. Цель занятия

1. Вывести решение выходной системы дифференциальных уравнений для случая линейной непрерывный детерминированной автоматической системы регулирования.

Формируемые компетенции: УК-1.

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на практическое занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 270 мин

Вступительная часть 6 мин

Проверка готовности студентов к занятию 15 мин

Программа практического занятия

1. Повторение теоретического материала 105 мин

2. Выполнение практического задания 105 мин

Проверка выполнения практического занятия 30 мин

Заключительная часть 9 мин

Основные теоретические сведения

Рассмотрим особенности непрерывно-детерминированного подхода на примере использования в качестве математических моделей дифференциальных уравнений. Дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, в которых неизвестными будут функции одной или нескольких переменных, причем в уравнение входят не только функции, но и их производные различных порядков. Если неизвестные — функции многих переменных, то уравнения называются уравнениями в частных производных, в противном случае при рассмотрении функции только одной независимой переменной уравнения называются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Основные соотношения.

Обычно в таких математических моделях в качестве независимой переменной, от которой зависят неизвестные искомые функции, служит время t . Тогда математическое соотношение для детерминированных систем в общем виде будет

$$\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y}, t); \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0, \quad 1$$

где $\vec{y}' = d\vec{y}/dt$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ — n -мерные

векторы; $\vec{f}(\vec{y}, t)$ — вектор-функция, которая определена на некотором $(n+1)$ -мерном множестве и является непрерывной.

Так как математические схемы такого вида отражают динамику изучаемой системы, т. е. ее поведение во времени, то они называются D-схемами..

В простейшем случае обыкновенное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y' = f(y, t). \quad 2$$

Наиболее важно для системотехники приложение D-схем в качестве математического аппарата в теории автоматического управления. Для иллюстрации особенностей построения и применения D-схем рассмотрим простейший пример формализации процесса функционирования двух элементарных систем различной физической

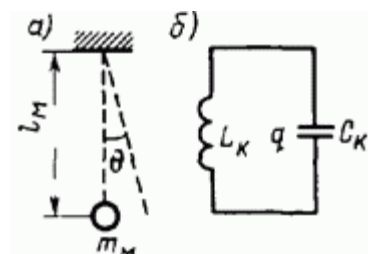


Рисунок 1 - элементарные системы

природы: механической (колебания маятника, Рисунок 1,а) и электрической (колебательный контур, Рисунок 1,б).

Процесс малых колебаний маятника описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$m_m l_m^2 [d^2 \theta(t)/dt^2] + m_m g l_m \theta(t) = 0,$$

где m_m , l_m — масса и длина подвеса маятника; g — ускорение свободного падения; $\theta(t)$ — угол отклонения маятника в момент времени t .

Из этого уравнения свободного колебания маятника можно найти оценки интересующих характеристик. Например, период колебания маятника

$$T_m = 2\pi \sqrt{l_m/g}.$$

Аналогично, процессы в электрическом колебательном контуре описываются обыкновенным дифференциальным уравнением

$$L_x [d^2 q(t)/dt^2] + [q(t)/C_x] = 0,$$

где L_x , C_x — индуктивность и емкость конденсатора; $q(t)$ — заряд конденсатора в момент времени t .

Из этого уравнения можно получить различные оценки характеристик процесса в колебательном контуре. Например, период характеристических колебаний

$$T_x = 2\pi \sqrt{L_x C_x}.$$

Очевидно, что, введя обозначения $h_0 = m_m l_m^2 = L_x$, $h_1 = 0$,

$h_2 = m_m g l_m = 1/C_x$, $\theta(t) = q(t) = z(t)$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее поведение этой замкнутой системы:

$$h_0 [d^2 z(t)/dt^2] + h_1 [dz(t)/dt] + h_2 z(t) = 0,$$

3

где h_0 , h_1 , h_2 — параметры системы; $z(t)$ — состояние системы в момент времени t .

Таким образом, поведение этих двух объектов может быть исследовано на основе общей математической модели (3). Кроме того, необходимо отметить, что поведение одной из систем может быть проанализировано с помощью другой. Например, поведение маятника (системы S_m) может быть изучено с помощью электрического колебательного контура (системы S_x).

Если изучаемая система S , т. е. маятник или контур, взаимодействует с внешней средой E , то появляется входное воздействие $x(t)$ (внешняя сила для маятника и источник энергии для контура)

и непрерывно-детерминированная модель такой системы будет иметь вид

$$h_0 [d^2 z(t)/dt^2] + h_1 [dz(t)/dt] + h_2 z(t) = x(t).$$

С точки зрения общей схемы математической модели $x(t)$ является входным (управляющим) воздействием, а состояние системы S в данном случае можно рассматривать как выходную характеристику, т. е. полагать, что выходная переменная совпадает с состоянием системы в данный момент времени $y=z$.

Возможные приложения.

При решении задач системотехники важное значение имеют проблемы управления большими системами. Следует обратить внимание на системы автоматического управления —

частный случай динамических систем, описываемых D-схемами и выделенных в отдельный класс моделей в силу их практической специфики.

Описывая процессы автоматического управления, придерживаются обычно представления реального объекта в виде двух систем: управляющей и управляемой (объекта управления).

Структура многомерной системы автоматического управления общего вида представлена на

Рисунке 2, где обозначены эндогенные переменные: $\vec{x}(t)$ — вектор входных (задающих) воздействий; $\vec{v}(t)$ — вектор возмущающих воздействий; $\vec{h}'(t)$ — вектор сигналов ошибки;

$\vec{h}''(t)$ — вектор управляющих воздействий; экзогенные переменные: $\vec{z}(t)$ — вектор состояний системы S — $\vec{y}(t)$ вектор выходных переменных, обычно $\vec{y}(t) = \vec{z}(t)$.

Современная управляющая система — это совокупность программно-технических средств, обеспечивающих достижение объектом управления определенной цели. Насколько точно объект управления достигает заданной цели, можно судить для одномерной системы по

координате состояния $y(t)$. Разность между заданным $y_{\text{зад}}(t)$ и действительным $y(t)$ законами изменения управляемой величины есть ошибка управления

$h'(t) = y_{\text{зад}}(t) - y(t)$ Если предписанный закон изменения управляемой величины

соответствует закону изменения входного (задающего) воздействия, т. е. $x(t) = y_{\text{зад}}(t)$, то $x(t) = y_{\text{зад}}(t)$,

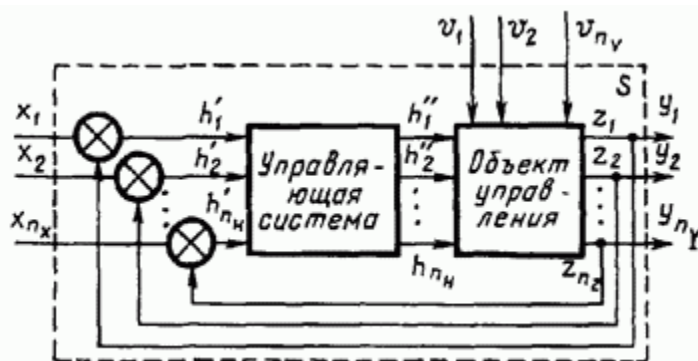


Рисунок 2 – Структура системы автоматического управления

Системы, для которых ошибки управления $\vec{h}'(t) = 0$ во все моменты времени, называются идеальными. На практике реализация идеальных систем невозможна. Таким образом, ошибка

$h'(t)$ необходимый субстрат автоматического управления, основанного на принципе отрицательной обратной связи, так как для приведения в соответствие выходной переменной $y(t)$ ее заданному значению используется информация об отклонении между ними. Задачей

системы автоматического управления является изменение переменной $y(t)$ согласно заданному закону с определенной точностью (с допустимой ошибкой). При проектировании и эксплуатации систем автоматического управления необходимо выбрать такие параметры системы S, которые обеспечили бы требуемую точность управления, а также устойчивость

системы в переходном процессе.

Если система устойчива, то представляют практический интерес поведение системы во времени, максимальное отклонение регулируемой переменной $y(t)$ в переходном процессе, время переходного процесса и т. п. Выводы о свойствах систем автоматического управления различных классов можно сделать по виду дифференциальных уравнений, приближенно описывающих процессы в системах. Порядок дифференциального уравнения и значения его коэффициентов полностью определяются статическими и динамическими параметрами системы S.

Пример 1. Рассмотрим одноканальную систему автоматического управления S_A , которая описывается D-схемой общего вида

$$F(y^n, y^{n-1}, \dots, y, x^m, x^{m-1}, \dots, x) = 0, \quad (4)$$

где x^m и y^n — производные по времени m-го и n-го порядков от функций x и y соответственно. Пусть система S_A , описываемая уравнением (4), работает в некотором режиме, характеризуемом функциями $x_0(t)$ и $y_0(t)$. Обозначим малые отклонения $x(t)$ от $x_0(t)$ через $\Delta x(t)$, а $y(t)$ от $y_0(t)$ через $\Delta y(t)$, т. е. $x(t) = x_0(t) + \Delta x(t)$, $y(t) = y_0(t) + \Delta y(t)$.

Тогда уравнение (2.10) можно линеаризовать, разложив функцию $F(y^n, y^{n-1}, \dots, y, x^m, x^{m-1}, \dots, x)$ в ряд Тейлора и ограничившись его линейными членами относительно

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial y_0^n} \Delta y^n + \frac{\partial F}{\partial y_0^{n-1}} \Delta y^{n-1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_0} \Delta y + \Delta y = \\ & = \frac{\partial F}{\partial x_0^m} \Delta x^m + \frac{\partial F}{\partial x_0^{m-1}} \Delta x^{m-1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_0} \Delta x + \Delta x. \end{aligned}$$

приращений Δx и Δy , т.е.

5

Так как полученное уравнение (5) приближенно описывает рассматриваемый процесс, то производные вычисляются при некоторых фиксированных значениях входящих в него переменных, т. е. получается система с постоянными коэффициентами. Кроме того, уравнения получаются линейными относительно Δx , Δy и их производных. Это весьма существенно, так как методы решения и исследования линейных систем значительно проще, чем систем общего вида, и более детально разработаны.

Таким образом, для линейных систем автоматического управления, т. е. для систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, можно записать

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_m x.$$

6

В уравнении (6) для простоты предполагается, что точки приложения возмущающих воздействий совпадают с входом системы. Для решения (6) можно воспользоваться, например, операторным методом, заменяя дифференциальное уравнение алгебраическим.

Таким образом, использование D-схем позволяет формализовать процесс функционирования непрерывно-детерминированных систем S и оценить их основные характеристики, применяя

аналитический или имитационный подход, реализованный в виде соответствующего языка для моделирования непрерывных систем или использующий аналоговые и гибридные средства вычислительной техники.

Практическое задание №10

1. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = x+1$.

2. Решить систему уравнений

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$$

матричным методом.

Содержание отчета о практическом задании

По результатам выполнения практического занятия студенты оформляют и защищают в индивидуальном порядке в форме беседы результаты выполнения заданий.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-5

Методическая: 1-2

Интернет-ресурсы: 1-3

Практическое занятие № 9-11.

Математическое описание входных сигналов, используемых при идентификации систем:
ступенчатая единичная функция, дельта- функция Дирака, полиномиальный сигнал,
гармонический сигнал

1. Цель занятия

1. Разобрать математическое описание входных сигналов.

Формируемые компетенции: УК-1.

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.

2. Ознакомиться с заданием на практическое занятие.

Учебное время 270 мин

Основные теоретические сведения

Для оценки динамических свойств системы необходимо решить дифференциальное уравнение системы, что возможно только при заданном задающем воздействии. Однако в

реальных условиях работы задающее воздействие может быть любой функцией времени. Более того, она может менять свой характер при переходе от одного режима работы системы к другому. Чтобы не решать каждый раз частную задачу исследования динамики элемента при конкретном входном сигнале, а получить довольно полное представление о динамических свойствах элемента в результате одного решения уравнения динамики, целесообразно ввести некоторое типовое задающее воздействие, которое отражает наиболее вероятный режим работы элементов.

В качестве типовых задающих воздействий используют:

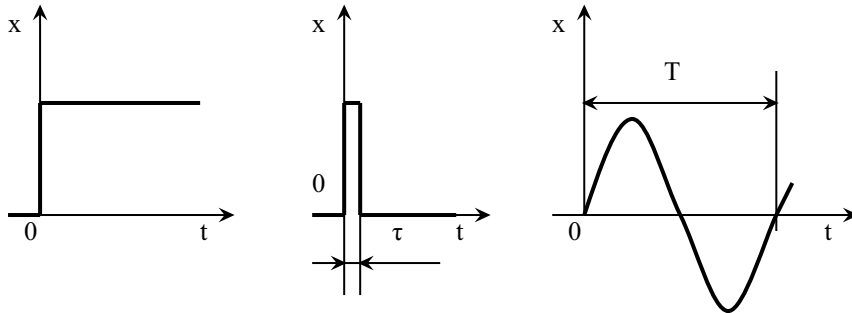


Рисунок 1 - Типовые функции входного сигнала

1) единичное ступенчатое воздействие $1(t)$ – это функция, неизменная по величине и равная единице для всех моментов времени $t > 0$, а при всех значениях $t < 0$ равна 0. Например, подключение напряжения к звену или системе, начало обработки на станке, возмущение в виде ударов в механических системах и др.

Аналитически единичная функция может быть представлена таким образом:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Другое распространённое определение:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Функция Хевисайда широко используется в математическом аппарате теории управления и теории обработки сигналов для представления сигналов, переходящих в определённый момент времени из одного состояния в другое. В математической статистике эта функция применяется, например, для записи эмпирической функции распределения. Названа в честь Оливера Хевисайда.

Дискретная форма

Можно определить дискретную функцию Хевисайда как функцию от целого аргумента :

$$\theta[n] = \begin{cases} 0, & n < 0; \\ 1, & n \geq 0, \end{cases}$$

где n — целое число

Дискретный единичный импульс является первой разностью дискретной функции Хевисайда: $\delta[n] = \theta[n] - \theta[n - 1]$.

Аналитические формы

Для более удобного использования функцию Хевисайда можно аппроксимировать с помощью непрерывной функции:

$$\theta(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} kx = \frac{1}{1 + e^{-2kx}},$$

где большему k соответствует более крутой подъём функции в точке $x = 0$. Задавшись необходимой шириной области перехода функции Хевисайда Δx , значение k можно оценить

как $k \approx \frac{10}{\Delta x}$.

Если принять $\theta(0) = 1/2$, уравнение можно записать в предельной форме:

$$\theta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 + \operatorname{th} kx) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-2kx}}.$$

Существует несколько других аппроксимаций непрерывными функциями:

$$\theta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} kx \right);$$
$$\theta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} kx \right).$$

Запись

Часто используется и бывает полезной интегральная форма записи единичной функции:

$$\theta(x) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau + i\varepsilon} e^{-ix\tau} d\tau.$$

Значение функции в нуле часто задаётся как $\theta(0) = 0$, $\theta(0) = 1/2$ или $\theta(0) = 1$. $\theta(0) = 1/2$ — наиболее употребительный вариант, поскольку по соображениям симметрии в точке разрыва первого рода удобно доопределять функцию средним арифметическим соответствующих односторонних пределов, кроме того в этом случае функция Хевисайда связана с функцией знака:

$$\theta(x) = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{sgn} x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Значение в нуле может явно указываться в записи функции:

$$\theta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ n, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

2) Дельта-функция $\delta(t)$ — это функция Дирака, которая представляет собой импульс

бесконечно большой амплитуды с бесконечно малой длительностью. Как правило, это шумы, помехи.

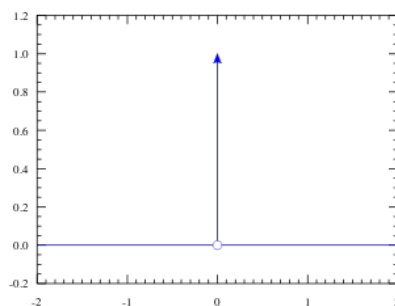


Рисунок 2 - Схематический график одномерной дельта-функции.

Аналитическая форма представления дельта-функции следующая:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t < 0 \\ \infty & \text{для } t = 0 \\ 0 & \text{для } t > 0 \end{cases}$$

Между единичной ступенчатой функцией и дельта-функцией существует связь вида:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t)$$

δ -Функция не является функцией в классическом смысле, а определяется как обобщённая функция: непрерывный линейный функционал на пространстве дифференцируемых функций. Можно ввести производную для δ -функции, которая тоже будет обобщённой функцией, и интеграл, определяемый как функция Хевисайда. Нетрудно указать последовательности обычных классических функций, слабо сходящиеся к δ -функции.

Математическое определение функции Дирака.

Функция $\delta(x)$ применяется не только в механике, а во многих разделах математики, в частности при решении многих задач уравнений математической физики.

Пусть $f(t)$ - функция, непрерывная на $(a;b)$, а $\delta(t,\lambda)$ - иглообразная функция. Для дальнейшего введения определения дельта-функции Дирака рассмотрим поведение интеграла

$$\int_a^b f(t) \delta(t, \lambda) dt \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0$$

Рассмотрим $(a;b)$, содержащий внутри себя точку $t=0$, то есть $a < 0 < b$ и $\lambda \leq \min(|a|, b)$. Из определения иглообразной функции и обобщенной теоремы о среднем получаем:

$$\int_a^b f(t) \delta(t, \lambda) dt = \int_{-\lambda}^{\lambda} f(t) \delta(t, \lambda) dt = f(\tau) \int_{-\lambda}^{\lambda} \delta(t, \lambda) dt = f(\tau), \text{ где } \tau \in (-\lambda; \lambda).$$

Если $\lambda \rightarrow 0$, то и $\tau \rightarrow 0$, а в силу непрерывности функции $f(t)$ и $f(\tau) \rightarrow f(0)$. Поэтому при $a < 0 < b$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \delta(t, \lambda) dt = f(0) \quad (1)$$

Если же числа a и b одинаковых знаков ($a < b < 0$ или $0 < a < b$), то есть $(a; b)$ не содержит внутри себя точки $t=0$, то

$$\int_a^b f(t) \delta(t, \lambda) dt = 0$$

при всех достаточно малых λ .

Если числа a и b имеют одинаковые знаки, то при $\lambda \rightarrow a$, если $a > 0$ (рис.6), или при $\lambda < |b|$, если $b < 0$ (Рисунок 3), интервал $(-\lambda; \lambda)$ не будет пересекаться с $(a; b)$, а поэтому для всех $t \in (a; b)$

$$\delta(t, \lambda) = 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b f(t) \delta(t, \lambda) dt = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \delta(t, \lambda) dt = 0 \quad (2)$$

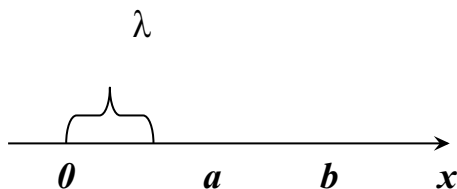


Рисунок 3

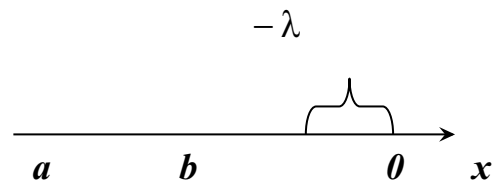


Рисунок 4

Введём обозначение:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \delta(t, \lambda) dt = \int_a^b f(t) \delta(t) dt \quad (3)$$

Таким образом, $\delta(t)$ – обобщенная функция, характеризующая предельное поведение иглообразной функции $\delta(t, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$ и используемая при вычислении интегралов.

Дельта-функцию можно применять и формально, пользуясь лишь следующим ее основным свойством, вытекающим из равенств (1) – (3) для любой непрерывной функции.

$$\int_a^b f(t) \delta(t) dt = \begin{cases} f(0), 0 \in (a; b) \\ 0, 0 \notin (a; b) \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_a^b f(t) \delta(t - t_0) dt = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \delta(t - t_0, \lambda) dt$$

Введем подстановку , то

$$\int_a^b f(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} f(t_0), t_0 \in (a; b) \\ 0, t_0 \notin (a; b) \end{cases} \quad (5)$$

Свойство, описываемое соотношениями (4) и (5) называют фильтрующим свойством дельта-функции.

При $f(t) \equiv 1$ соотношения (3) – (5) принимают вид

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b \delta(t, \lambda) dt &= \int_a^b \delta(t) dt \\ \int_a^b \delta(t) dt &= \begin{cases} 0, 0 \notin (a; b) \\ 1, 0 \in (a; b) \end{cases} \\ \int_a^b \delta(t - t_0) dt &= \begin{cases} 0, t_0 \notin (a; b) \\ 1, t_0 \in (a; b) \end{cases} \end{aligned}$$

Если за интервал $(a; b)$ взять всю числовую ось, то $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$.

3) Гармонический сигнал $e^{j\omega t}$ – гармонические колебания с постоянной амплитудой, равной 1.

Этот сигнал может задаваться как в комплексной, так и в вещественной форме, в виде

синусоидального или косинусоидального колебания:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где A – амплитуда колебаний, равная 1.

ω – круговая частота, определяемая как $\frac{2\pi}{T}$, где T – период;
 φ – начальная фаза.

4) Полиномиальные воздействия вида

$$g(t) = \begin{cases} c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_k t^k, & \text{їдє } t \geq 0; \\ 0, & \text{їдє } t < 0. \end{cases}$$

Частными случаями такого воздействия, например, являются:

$$g_1(t) = \begin{cases} c_1 t, & \text{їдє } t \geq 0; \\ 0, & \text{їдє } t < 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad g_2(t) = \begin{cases} c_2 t^2, & \text{їдє } t \geq 0; \\ 0, & \text{їдє } t < 0. \end{cases}$$

Эти воздействия соответствуют случаям изменения управления с постоянной скоростью и с постоянным ускорением соответственно.

Такие воздействия имеют место в следящих системах.

Рассмотренные виды задающих воздействий имеют различное назначение. В случае применения единичного ступенчатого воздействия рассматривается переходной процесс, возникающий в элементе при переходе его из одного равновесного состояния в другое. Применение гармонического воздействия позволяет получить частотные характеристики системы.

Таким образом, в зависимости от применения определенного вида задающего воздействия динамические характеристики элементов можно разделить на два типа: временные характеристики, характеризующие свойства элементов в переходном режиме и частотные характеристики, отражающие свойства элементов в вынужденном движении.

1. Импульсный сигнал $u(t)$, имеющий размерность напряжения, описывается формулой :

$$u(t) = \begin{cases} 25 \left[e^{-10^5 t} - e^{-2 \cdot 10^5 t} \right] & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

Постройте график импульса. Определите максимальное значение сигнала U_{max} и соответствующее ему t_{max} . Вычислите длительность импульса τ , определив её как длину отрезка времени от нуля до той точки, в которой мгновенное значение сигнала уменьшается в 10 раз по сравнению с U_{max} .

2. Представить напряжение вида $5 \cos \left(628 t + \frac{\pi}{4} \right)$ на временной и частотной плоскостях. Построить векторную диаграмму. Записать комплексную амплитуду.

3. Гармонический ток задан комплексной амплитудой: $\dot{I}_m = 25 e^{-j30^\circ}$ и частотой $f = 1 \text{ МГц}$. Построить его график на временной и частотной плоскостях, а также векторную диаграмму.

Содержание отчета о практическом задании

По результатам выполнения практического занятия студенты оформляют и защищают в индивидуальном порядке в форме беседы результаты выполнения заданий.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-5

Методическая: 1-2

Интернет-ресурсы: 1-3

Тема 3. Системы дифференциальных уравнений

Практическое занятие № 12-13.

Расчет управляемости систем по критериям Гильберта

1. Цель занятия

1. Рассчитать управляемость систем по критериям Гильберта

Формируемые компетенции: УК-1.

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.

2. Ознакомиться с заданием на практическое занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 180 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Повторение теоретического материала 35 мин

2. Выполнение практического задания 35 мин

Проверка выполнения практического занятия 10 мин

Заключительная часть 3 мин

Основные теоретические сведения

При рассмотрении физической системы как объекта проектирования, контроля или управления все переменные, характеризующие систему можно разделить на три множества (рисунок):

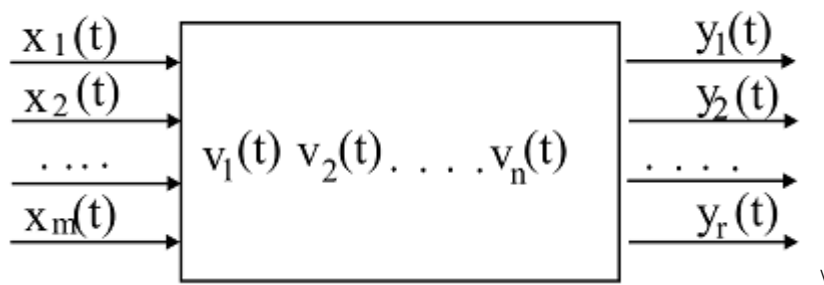


Рисунок 1 - переменные, характеризующие систему.

1) входные переменные $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$, характеризующие внешние воздействия на вход системы;

2) переменные состояния $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ – внутренние (промежуточные) переменные, совокупность которых полностью характеризует свойства системы;

3) выходные переменные $y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)$, представляющие реакции на внешние воздействия и состояния системы, которые интересны для исследователя.

Сама система в общем виде представляется "черным ящиком" с m входами и r выходами, с каждым из которых связана соответствующая переменная.

После упорядочения (нумерации) элементов этих множеств получаем соответственно три вектора:

- входной (задающий) вектор $X(t) = x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t) ;$
- вектор состояния $V(t) = v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t) ;$
- выходной вектор $Y(t) = y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t) .$

Векторное представление позволяет рассматривать систему с одним обобщенным входом, переменной состоянием и одним обобщенным выходом (рисунок 2)

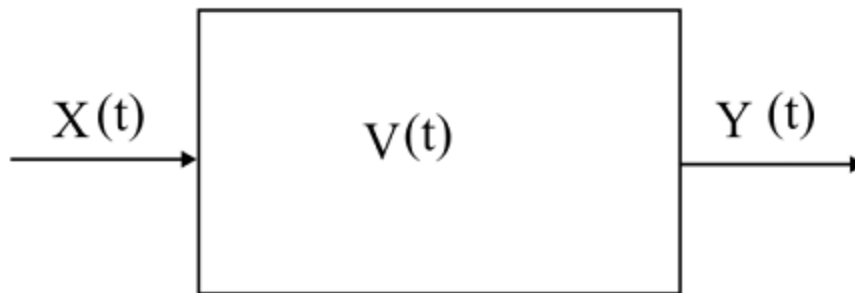


Рисунок 2 - переменные системы в матричной форме

Непрерывные линейные детерминированные системы в каждый момент времени t можно описать при помощи двух матричных уравнений:

1) уравнением состояния:

$$\frac{dV(t)}{dt} = A \cdot V(t) + B \cdot X(t), \quad 1$$

где: A – матрица системы; $V(t)$ – вектор переменных состояния системы; $B(t)$ – матрица управления;

2) выходным уравнением:

$$Y(t) = C(t) \cdot V(t) + D(t) \cdot X(t) \quad 2$$

где: $C(t)$ – матрица выхода; $D(t)$ – матрица входа;

Если элементы этих матриц зависят от времени, то система называется линейной нестационарной (или параметрической).

Если элементы матриц A , B , C , D выражаются постоянными числами, то система называется линейной стационарной.

Дальнейшее рассмотрение понятий управляемости и наблюдаемости проведем на примере линейных стационарных систем.

Понятия управляемости и наблюдаемости систем впервые введены

Р. Е. Калманом.

Система является управляемой, если она может быть переведена из любого состояния $V(t_0)$ момент времени $t=t_0$ в любое желаемое состояние $V(t_1)$ за конечный интервал времени $\tau = (t_1 - t_0)$ путем приложения кусочно-непрерывного входного воздействия $X(t)$, где $t \in (t_0, t_1)$.

Понятие наблюдаемости дополняет понятие управляемости. Если управляемость требует, чтобы каждое состояние системы было чувствительно к воздействию входного сигнала, то наблюдаемость призывает,

чтобы каждое состояние системы влияло на измеряемый выходной сигнал.

Система наблюдаемая, если ее состояние можно непосредственно или косвенно определить по выходному вектору системы. Поэтому, когда определенное состояние (или изменение этого состояния) не влияет на выходной вектор, система не наблюдаема.

Система называется идентифицируемой, если по измерениям координат состояния можно определить ее матрицу А.

Для определения управляемости и наблюдаемости систем разработаны различные методы.

Критерий Гильберта управляемости систем.

Критерий Гильберта используется для исследования управляемости

и линейной системы, представленной в канонической форме.

Достоинством критерия Гильберта по сравнению с другими методами является более полное отражение физических свойств исследуемой системы. Однако, применимость этого критерия ограничена только системами с различными собственными значениями матрицы коэффициентов.

Критерий требует предварительного приведения уравнений системы к канонической форме. Эта форма удобна тем, что в ней отсутствует взаимосвязь между переменными состояния.

Канонические преобразования заключаются в следующем.

Применим в уравнении состояния (1) линейное преобразование к

переменной $X^*(t)$:

$$X(t) = H \cdot X^*(t).$$

Матрицей преобразования является модальная матрица Н. Из предыдущего выражения получаем:

$$X^*(t) = H^{-1} \cdot X(t). \quad 3$$

Аналогичным образом преобразуем переменную $V^*(t)$:

$$V(t) = H \cdot V^*(t).$$

Откуда:

$$V^*(t) = H^{-1} \cdot V(t). \quad 4$$

Преобразованный вектор состояния $V^*(t)$ является линейной комбинацией n компонент

вектора $V(t)$.

С учетом (3) и (4) выражение (1) преобразуется следующим образом:

$$H \cdot \frac{dV^*(t)}{dt} = A \cdot H \cdot V^*(t) + B \cdot X(t) \quad 5$$

Разделим правую и левую части уравнение (5) на матрицу H :

$$\frac{dV^*(t)}{dt} = H^{-1} \cdot A \cdot H \cdot V^*(t) + H^{-1} \cdot B \cdot X(t).$$

Обозначая через $A^* = H^{-1} \cdot A \cdot H$ и $B^* = H^{-1} \cdot B$, получаем уравнение состояния в канонической

$$\text{форме:} \quad \frac{dV^*(t)}{dt} = A^* \cdot V^*(t) + B^* \cdot X(t). \quad 6$$

В новых координатах матрица системы A^* преобразуется к диагональной или жордановой форме. По ее главной диагонали стоят собственные значения матрицы A .

Аналогичным образом производим каноническое преобразование выходного уравнения. Производя подстановку (3) в уравнение (2), получаем:

$$Y^*(t) = C^*(t) \cdot V^*(t) + D(t) \cdot X(t) \quad 7$$

где $C^* = C \cdot H$ – преобразованная матрица входа.

При проведении преобразований надлежит учесть следующие замечания:

- 1) указанное преобразование возможно только в том случае, когда существует матрица H^{-1} ; собственные значения: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A различные;
- 2) ни одна преобразованная переменная не может рассматриваться как переменная состояния, если она является линейной комбинацией других переменных состояния;
- 3) матрица A и преобразованная матрицы A^* имеют одинаковые собственные значения: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Преобразованное уравнение состояния 6 можно записать в виде системы n скалярных уравнений:

$$\frac{dV_i^*}{dt} = \lambda_i \cdot V_i^* + b_{(i)}^* \cdot X_i(t), \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad 8$$

где λ_i – собственные значения матрицы A ; $b_{(i)}^*$ – i -тая строка матрицы B^* .

Как видно из выражения (8), система будет управляемой, если

все переменные $V^*(t)$ зависят от входных воздействий. Это означает,

что переменные состояния $V^*(t)$ не содержат свободных (неуправляемых компонентов).

Очевидным условием полной управляемости системы является отсутствие нулевой строки в

матрице B^* , т. е. все строки $b_{(i)}^*$ должны быть ненулевыми векторами- строками.

Критерий управляемости системы Р. Е. Калмана.

Критерий основан на полиномиальном разложении матрицы $e^{A \cdot t}$. Применимость этого критерия не ограничена системами, с различными собственными значениями матрицы A . Несомненным достоинством этого критерия является отсутствие расчетов собственных значений, собственных векторов, а также отсутствие последующего преобразования уравнений состояния, что может представлять значительный объем вычислений.

Система полностью управляема, если n независимых скалярных уравнений удовлетворяют матричному уравнению. Иначе говоря, система полностью управляема, если матрица

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

имеет ранг n , где n – порядок системы.

Пример 1.

Определить управляемость системы с заданными параметрами по критерию Гильберта

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение

1. Производим расчет матрицы $\lambda E - A$:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{bmatrix}.$$

2. Для определения собственных значений матрицы A вычислим коэффициенты характеристического многочлена и приравняем его к нулю:

$$\det |\lambda \cdot E - A| = \lambda^2 - 4 \cdot \lambda - 5 = 0.$$

3. Вычисляем корни характеристического многочлена:

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 5.$$

4. Вычисляем модальную матрицу H :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Вычисляем обратную матрицу H^{-1} :

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

6. Делаем проверку правильности диагонализации матрицы A :

$$\Lambda = H^{-1} \cdot A \cdot H = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

По главной диагонали матрицы стоят собственные значения матрицы А. Следовательно, процедура диагонализации выполнена правильно.

7. Рассчитываем матрицу:

$$B^* = H^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Так как на состояние v_1 не влияет входной сигнал управления, система не полностью управляема

Задания лабораторной работе № 5.

Определить управляемость или наблюдаемость системы с заданными параметрами :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} g & h \end{bmatrix}.$$

a	b	c	d	e	f	g	h	Критерий расчета
3	8	7	5	2	2	1	1	Управляемость по Калману

Содержание отчета о практическом задании

По результатам выполнения практического занятия студенты оформляют и защищают в индивидуальном порядке в форме беседы результаты выполнения заданий.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-5

Методическая: 1-2

Интернет-ресурсы: 1-3

Тема 4. Основные сведения идентификации объектов в системах автоматического управления

Практическое занятие № 14-16.

Расчет управляемости систем по критериям Калмана

1. Цель занятия

1. Рассчитать управляемость систем по критериям Гильберта

Формируемые компетенции: УК-1.

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.

2. Ознакомиться с заданием на практическое занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 270 мин

Вступительная часть 5 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Повторение теоретического материала 70 мин

2. Выполнение практического задания 70 мин

Проверка выполнения практического занятия 20 мин

Заключительная часть 10 мин

Основные теоретические сведения

При рассмотрении физической системы как объекта проектирования, контроля или управления все переменные, характеризующие систему можно разделить на три множества (рисунок):

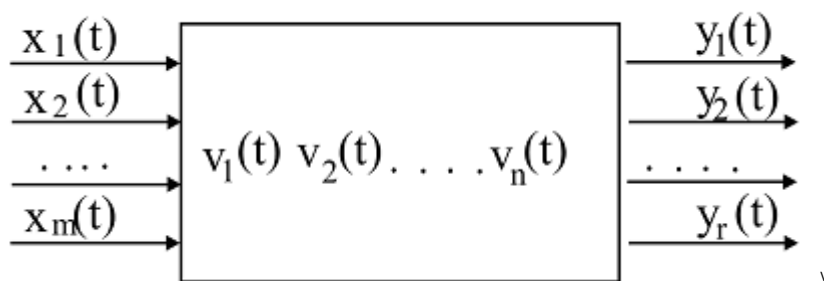


Рисунок 1 - переменные, характеризующие систему.

1) входные переменные $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$, характеризующие внешние воздействия на вход системы;

2) переменные состояния $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ – внутренние (промежуточные) переменные,

совокупность которых полностью характеризует свойства системы;

3) выходные переменные $y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)$, представляющие реакции на внешние воздействия и состояния системы, которые интересны для исследователя.

Сама система в общем виде представляется "черным ящиком" с m входами и r выходами, с каждым из которых связана соответствующая переменная.

После упорядочения (нумерации) элементов этих множеств получаем соответственно три вектора:

- входной (задающий) вектор $X(t) = x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t) ;$
- вектор состояния $V(t) = v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t) ;$
- выходной вектор $Y(t) = y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t) .$

Векторное представление позволяет рассматривать систему с одним обобщенным входом, переменной состояния и одним обобщенным выходом (рисунок 2)

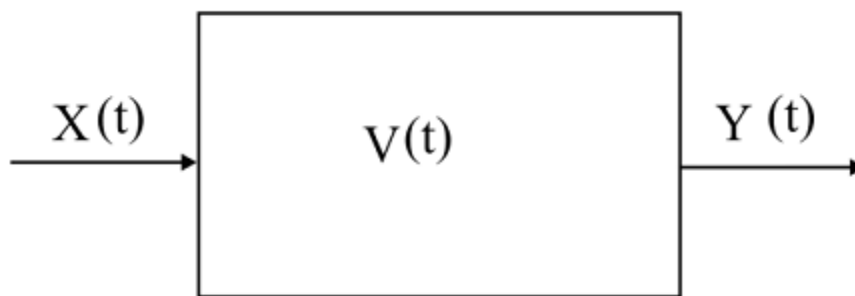


Рисунок 2 - переменные системы в матричной форме

Непрерывные линейные детерминированные системы в каждый момент времени t можно описать при помощи двух матричных уравнений:

1) уравнением состояния:

$$\frac{dV(t)}{dt} = A \cdot V(t) + B \cdot X(t), \quad 1$$

где: A – матрица системы; $V(t)$ – вектор переменных состояния системы; $B(t)$ – матрица управления;

2) выходным уравнением:

$$Y(t) = C(t) \cdot V(t) + D(t) \cdot X(t) \quad 2$$

где: $C(t)$ – матрица выхода; $D(t)$ – матрица входа;

Если элементы этих матриц зависят от времени, то система называется линейной нестационарной

(или параметрической).

Если элементы матриц A , B , C , D выражаются постоянными числами, то система называется линейной стационарной.

Дальнейшее рассмотрение понятий управляемости и наблюдаемости проведем на примере линейных стационарных систем.

Понятия управляемости и наблюдаемости систем впервые введены

Р. Е. Калманом.

Система является управляемой, если она может быть переведена

из любого состояния $V(t_0)$ момент времени $t=t_0$ в любое желаемое состояние $V(t_1)$ за конечный интервал времени $\tau = (t_1 - t_0)$ путем приложения кусочно-непрерывного входного воздействия $X(t)$, где $t \in (t_0, t_1)$.

Понятие наблюдаемости дополняет понятие управляемости. Если

управляемость требует, чтобы каждое состояние системы было чувствительно к воздействию входного сигнала, то наблюдаемость призывает,

чтобы каждое состояние системы влияло на измеряемый выходной сигнал.

Система наблюдаемая, если ее состояние можно непосредственно

или косвенно определить по выходному вектору системы. Поэтому, когда определенное состояние (или изменение этого состояния) не влияет

на выходной вектор, система не наблюдаема.

Система называется идентифицируемой, если по измерениям координат состояния можно определить ее матрицу A .

Для определения управляемости и наблюдаемости систем разработаны различные методы.

Критерий Гильберта управляемости систем.

Критерий Гильберта используется для исследования управляемости

и линейной системы, представленной в канонической форме.

Достоинством критерия Гильберта по сравнению с другими методами является более полное отражение физических свойств исследуемой системы. Однако, применимость этого критерия ограничена только системами с различными собственными значениями матрицы коэффициентов.

Критерий требует предварительного приведения уравнений системы к канонической форме. Эта форма удобна тем, что в ней отсутствует взаимосвязь между переменными состояниями.

Канонические преобразования заключаются в следующем.

Применим в уравнении состояния (1) линейное преобразование к

переменной $X^*(t)$:

$$X(t) = H \cdot X^*(t).$$

Матрицей преобразования является модальная матрица H . Из

предыдущего выражения получаем:

$$X^*(t) = H^{-1} \cdot X(t).$$

Аналогичным образом преобразуем переменную $V^*(t)$:
 $V(t) = H \cdot V^*(t)$.

Откуда:

$$V^*(t) = H^{-1} \cdot V(t). \quad 4$$

Преобразованный вектор состояния $V^*(t)$ является линейной комбинацией n компонент вектора $V(t)$.

С учетом (3) и (4) выражение (1) преобразуется следующим образом:

$$H \cdot \frac{dV^*(t)}{dt} = A \cdot H \cdot V^*(t) + B \cdot X(t) \quad 5$$

Разделим правую и левую части уравнение (5) на матрицу H :

$$\frac{dV^*(t)}{dt} = H^{-1} \cdot A \cdot H \cdot V^*(t) + H^{-1} \cdot B \cdot X(t).$$

Обозначая через $A^* = H^{-1} \cdot A \cdot H$ и $B^* = H^{-1} \cdot B$, получаем уравнение состояния в канонической

форме:
$$\frac{dV^*(t)}{dt} = A^* \cdot V^*(t) + B^* \cdot X(t). \quad 6$$

В новых координатах матрица системы A^* преобразуется к диагональной или жордановой форме. По ее главной диагонали стоят собственные значения матрицы A .

Аналогичным образом производим каноническое преобразование выходного уравнения. Производя подстановку (3) в уравнение (2), получаем:

$$Y^*(t) = C^*(t) \cdot V^*(t) + D(t) \cdot X(t) \quad 7$$

где $C^* = C \cdot H$ – преобразованная матрица входа.

При проведении преобразований надлежит учесть следующие замечания:

- 1) указанное преобразование возможно только в том случае, когда существует матрица H^{-1} ; собственные значения: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A различные;
- 2) ни одна преобразованная переменная не может рассматриваться как переменная состояния, если она является линейной комбинацией других переменных состояния;
- 3) матрица A и преобразованная матрицы A^* имеют одинаковые собственные значения: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Преобразованное уравнение состояния 6 можно записать в виде системы n скалярных уравнений:

$$\frac{dV_i^*}{dt} = \lambda_i \cdot V_i^* + b_{(i)}^* \cdot X_i(t), \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad 8$$

где λ_i – собственные значения матрицы A ; $b_{(i)}$ – i -тая строка матрицы B^* .
 Как видно из выражения (8), система будет управляемой, если все переменные $V^*(t)$ зависят от входных воздействий. Это означает, что переменные состояния $V^*(t)$ не содержат свободных (неуправляемых компонентов). Очевидным условием полной управляемости системы является отсутствие нулевой строки в матрице B^* , т. е. все строки $b_{(i)}$ должны быть ненулевыми векторами-строками. Критерий управляемости системы Р. Е. Калмана.

Критерий основан на полиномиальном разложении матрицы $e^{A \cdot t}$. Применимость этого критерия не ограничена системами, с различными собственными значениями матрицы A . Несомненным достоинством этого критерия является отсутствие расчетов собственных значений, собственных векторов, а также отсутствие последующего преобразования уравнений состояния, что может представлять значительный объем вычислений.

Система полностью управляема, если n независимых скалярных уравнений удовлетворяют матричному уравнению. Иначе говоря, система полностью управляема, если матрица

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

имеет ранг n , где n – порядок системы.

Пример

Определить управляемость системы по критерию Калмана, заданной следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Решение

1. Составляем матрицу $M = B, AB$. Для этой цели рассчитываем произведение матриц:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ 76 \end{bmatrix}.$$

и записываем соответствующие столбцы матрицы M :

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 61 \\ 7 & 76 \end{bmatrix}.$$

2. Рассчитываем ранг матрицы M :
 $\text{rang}(M) = 2$.

Так как ранг равен порядку уравнения $n=2$ система управляемая.

Задания лабораторной работе № 5.

Определить управляемость или наблюдаемость системы с заданными параметрами :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}; \quad C = g \quad h.$$

a	b	c	d	e	f	g	h	Критерий расчета
3	8	7	5	2	2	1	1	Управляемость по Калману

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-5

Методическая: 1-2

Интернет-ресурсы: 1-3

Тема 5. Управляемость систем

Практическое занятие № 17-18.

Исследование качества работы САУ на ЭВМ по её структурной схеме

1. Цель занятия

1. Провести Исследование качества работы САУ на ЭВМ по её структурной схеме

Формируемые компетенции: УК-1.

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на практическое занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 180 мин

Вступительная часть 5 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Повторение теоретического материала 70 мин

2. Выполнение практического задания 70 мин

Проверка выполнения практического занятия 20 мин

Заключительная часть 10 мин

Основные теоретические сведения

Человек и ЭВМ вместе образуют систему взаимодействия, в которой осуществляется обмен информацией в знаковой форме. Взаимодействие должно быть таким, чтобы эффективно разрешалась проблема пользователя. Организация взаимодействия между пользователем - человеком и обучающей системой в данной разработке осуществляется в форме человеко - машинного диалога. Все режимы работы системы являются диалоговыми, что позволяет пользователю самообучаться во время работы.

Как отмечалось ранее, главная цель разработанной обучающей Интернет - подсистемы для лабораторного исследования лабораторного исследования устойчивости разомкнутой и замкнутой САУ с помощью частотных критериев устойчивости состоит в том, чтобы

максимально включить творческий потенциал студента в процессе обучения.

Тема лабораторной работы: Исследование временных, частотных и логарифмических частотных характеристик замкнутых САУ.

Цель проведения лабораторной работы: Изучение и исследование студентами частотных характеристик замкнутой системы автоматического управления (САУ), частотных показателей качества, а также оценки устойчивости САУ с помощью частотных критериев устойчивости. Для исследования влияния параметров передаточной функции замкнутой системы на изменение частотных характеристик, а также на устойчивость систем в ходе лабораторной работы выполняется моделирование характеристик САУ на ЭВМ и расчет соответствующих показателей качества.

Проведение данной лабораторной работы с обучающимся производится в компьютерном классе в сети Интернет на ЭВМ.

Необходимо в окне Интернет - подсистемы, предназначенном для ввода значений передаточной функции, задать значения параметров передаточных функций разомкнутой $W(p)$ или замкнутой $\Phi(p)$ системы.

На Интернет - странице режима лабораторного исследования необходимо ввести коэффициенты передаточных функций, которые рассчитываются следующим образом:

$$A = 1 + K_1 K_2 K_3;$$

$$B = T_1 + T_2 + T_3;$$

$$C = T_1 T_2 + T_1 T_4 + T_2 T_4;$$

$$D = T_1 T_2 T_4;$$

$$E = K_1 K_2 K_3;$$

$$F = K_1 K_2;$$

$$R = K_1 K_2 T_4.$$

При этом значения K_1, K_2, K_3 являются значениями коэффициентов усиления передаточных функций реальных устройств, а T_1, T_2, T_4 - значениями постоянных времен этих реальных устройств и выбираются в соответствии с вариантом лабораторной работы, заданным преподавателем, из таблицы 1.

Для разомкнутой системы исследуется передаточная функция вида:

$$W(p) = \frac{E}{1 + Bp + Cp^2 + Dp^3},$$

где степени полиномов числителя и знаменателя соответствуют условию $m \leq n$, где m - степень числителя, n - степень знаменателя.

Для замкнутой системы исследуется передаточная функция вида:

$$\Phi(p) = \frac{F + Rp}{1 + Bp + Cp^2 + Dp^3}.$$

После задания значений степеней числителя и знаменателя и ввода коэффициентов передаточных функций необходимо провести моделирование частотных и логарифмических частотных характеристик разомкнутой и замкнутой САУ. Затем необходимо провести расчет частотных показателей качества.

Следующим этапом является проведение оценки устойчивости замкнутой САУ. В лабораторной работе рассматриваются следующие основные частотные оценки качества САУ: запас устойчивости по амплитуде (или по модулю) h (в линейном масштабе) и ΔL (в логарифмическом масштабе); запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi$; показатель колебательности $M_{\max}$; резонансная частота ω_F ; частота среза ω_c .

Разработка методики лабораторного исследования устойчивости замкнутой САУ

Таблица 1. Варианты заданий для лабораторной работы

№ варианта	K_1	T_1	K_2	T_2	K_3	T_4
1.	2,2	0,2	20	0,1	0,02	0,005
2.	2,4	0,2	20	0,08	0,02	0,005
3.	2,2	0,2	25	0,03	0,02	0,005
4.	3,3	0,2	25	0,04	0,02	0,01
5.	3,5	0,2	25	0,06	0,02	0,01
6.	3,1	0,2	20	0,04	0,02	0,01
7.	3,7	0,2	30	0,05	0,01	0,005
8.	3,7	0,25	30	0,02	0,02	0,01
9.	4,2	0,3	25	0,04	0,03	0,02
10.	3,3	0,2	20	0,06	0,025	0,001
11.	6,0	0,2	30	0,04	0,02	0,01
12.	4,2	0,1	25	0,05	0,02	0,02
13.	3,6	0,15	30	0,04	0,015	0,01
14.	4,1	0,2	20	0,08	0,01	0,03
15.	5,6	0,1	25	0,04	0,02	0,015
16.	2,5	0,2	30	0,04	0,03	0,02
17.	3,8	0,1	25	0,05	0,02	0,005
18.	4,4	0,1	20	0,02	0,02	0,01
19.	4,4	0,2	20	0,04	0,025	0,03
20.	5,3	0,15	30	0,03	0,03	0,01
21.	3,7	0,2	15	0,04	0,02	0,02
22.	3,5	0,15	20	0,06	0,025	0,01
23.	4,8	0,2	30	0,03	0,02	0,003
24.	4,6	0,1	20	0,02	0,02	0,01
25.	3,2	0,15	30	0,04	0,025	0,03
26.	2,5	0,2	25	0,06	0,03	0,001
27.	3,5	0,18	28	0,05	0,02	0,02
28.	4,7	0,12	20	0,05	0,02	0,01
29.	5,1	0,15	25	0,02	0,0015	0,01
30.	5,8	0,2	30	0,05	0,02	0,02

Содержание отчета о практическом задании

По результатам выполнения практического занятия студенты оформляют и защищают в индивидуальном порядке в форме беседы результаты выполнения заданий.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1-2

Дополнительная: 1-5

Методическая: 1-2

Интернет-ресурсы: 1-3

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «Математические основы теории управления»

для студентов направления подготовки
10.03.01 «Информационная безопасность»

Направленность (профиль):

«Организация и технологии защиты информации (по отрасли или в сфере профессиональной
деятельности)»

Ставрополь,
2026

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Общая характеристика самостоятельной работы студента
2. План график выполнения самостоятельной работы по дисциплине «Математические основы теории управления»
3. Контрольные точки и виды отчетности по ним
4. Методические указания по подготовке к практическим занятиям
6. Список рекомендуемой литературы

ВВЕДЕНИЕ

Целью дисциплины является изучение математического аппарата при овладении теорией автоматического управления и разработанной на ее основе методики анализа и синтеза автоматических систем для формирования набора общекультурных и профессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 10.03.01 «Информационная безопасность».

Задачами дисциплины являются:

- изучение основных естественнонаучных законов для адекватного применения математического аппарата и выявления сущности проблем, возникающих в сфере защиты информации и информационной безопасности;
- формирование способностей применять методы теории систем и системного анализа при проведении предварительного технико-экономического анализа и обоснования проектных решений по обеспечению информационной безопасности;
- формирование способностей самостоятельно проводить эксперименты по заданной методике, обрабатывать результаты, оценивать погрешность и достоверность результатов.

1. Общая характеристика самостоятельной работы студента

Основными видами учебной работы по достижению результатов освоения дисциплины являются лекции, практические занятия и самостоятельная работа студентов (СРС).

На лекциях раскрываются основные положения и понятия курса, формируются знания в математических основах теории автоматического управления. На практических занятиях формируются умения и навыки, необходимые для решения задач профессиональной деятельности.

Приступая к изучению учебной дисциплины, необходимо ознакомиться с учебной программой, получить в библиотеке рекомендованные учебные пособия, а также получить у ведущего преподавателя в электронном виде конспекты лекций, методические рекомендации к практическим занятиям, тестовые задания, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и выполнения практических занятий.

Для изучения дисциплины предлагается список основной и дополнительной литературы. Основная литература предназначена для обязательного изучения, дополнительная – поможет более глубоко освоить отдельные вопросы, подготовить исследовательские задания и выполнить задания для самостоятельной работы.

В ходе лекционных занятий студент обязан осуществлять конспектирование учебного материала, особое внимание обращая на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных понятий, физических явлений, процессов, эффектов. В рабочих конспектах желательно оставлять поля, на которых следует делать пометки из рекомендованной литературы, дополнять материал прослушанной лекции, формулировать научные выводы и практические рекомендации. Студент имеет право задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

Самостоятельная работа студентов над материалом учебной дисциплины является неотъемлемой частью учебного процесса и должна предполагать углубление знания учебного материала, излагаемого на аудиторных занятиях, и приобретение дополнительных знаний по отдельным вопросам самостоятельно.

Основными видами самостоятельной работы курсантов по учебной дисциплине являются:

- самостоятельное изучение учебного материала по заданным темам;
- подготовка к Практическим занятиям, оформление отчета и подготовка к

собеседованию по результатам работы.

Основными методами самостоятельной работы студентов являются:

- 1) для овладения знаниями:
 - чтение текста (конспекта лекций, учебника, дополнительной литературы) и конспектирование текста;
 - работа с нормативными документами;
 - поиск информации в Интернет;
- 2) для закрепления и систематизации знаний:
 - работа с конспектом лекции (обработка текста);
 - повторная работа над учебным материалом (учебника, дополнительной литературы, слайдами);
 - составление плана и тезисов ответа или графическое изображение структуры ответа;
 - составление таблиц для систематизации учебного материала;
 - изучение нормативных документов;
 - ответы на контрольные вопросы;
 - тестирование в программе компьютерного тестирования «Iren»;
- 3) для формирования умений:
 - подготовка к Практическому занятию;
 - решение задач;
 - подготовка отчетов по Практическим занятиям;
 - рефлексивный анализ профессиональных умений.

В случае пропуска учебного занятия студент может воспользоваться содержанием различных блоков учебно-методического комплекса для самоподготовки и освоения темы. Для самоконтроля необходимо использовать вопросы и задания, предлагаемые к Практическим занятиям, а также варианты тестовых заданий.

При работе с тестовой системой «Iren» необходимо внимательно прочитать инструкцию, обратить внимание на время тестирования. На вопросы можно отвечать в любой последовательности, возвращаясь к вопросам, вызвавшим затруднение. Результаты теста будут выведены на экран после нажатия кнопки «Завершить тестирование». После прохождения пробного теста необходимо вернуться к разделам и темам, процент выполнения заданий в которых был недостаточным.

2. Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов)	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
5 семестр					
УК-1 ИД-1 УК-1 ИД-3	Подготовка к практическому занятию	Собеседование	14.00	2.00	16.00
УК-1 ИД-1 УК-1 ИД-3	Подготовка к лекции	Конспект	14.00	2.00	16.00
УК-1 ИД-1 УК-1 ИД-3	Подготовка доклада	Доклад	14.00	2.00	16.00

УК-1 ИД-1 УК-1 ИД-3	Самостоятельное изучение литературы	Конспект	14.00	2.00	16.00
УК-1 ИД-1 УК-1 ИД-3	Самостоятельное выполнение заданий по заданным темам	Конспект. Письменный отчет	6.00	2.00	8.00
Итого за семестр			62.00	10.00	72.00
Итого			62.00	10.00	72.00

1. Порядок выполнения самостоятельной работы

3.1 Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Комплексное изучение предлагаемой студентам учебной дисциплины «Математические основы теории управления» предполагает овладение материалами лекций, учебников, программы, творческую работу студентов в ходе проведения лабораторных работ, а также систематическое выполнение заданий для самостоятельной работы.

В ходе лекций раскрываются основные вопросы в рамках рассматриваемых тем, делаются акценты на наиболее сложные и интересные положения изучаемого материала, которые должны быть приняты студентами во внимание. Материалы лекций являются основой для подготовки студентов к лабораторным работам.

Работа с конспектом лекций

Просмотрите конспект сразу после занятий. Отметьте материал конспекта лекций, который вызывает затруднения для понимания. Попытайтесь найти ответы на затруднительные вопросы, используя предлагаемую литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, сформулируйте вопросы и обратитесь на текущей консультации или на ближайшей лекции за помощью к преподавателю.

Каждую неделю отводите время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам и тестам.

Выполнение лабораторных работ по дисциплине «Математические основы теории управления»

На первом занятии получите у преподавателя задания по курсу, планы подготовки к лабораторным работам. Обзаведитесь всем необходимым методическим обеспечением.

Перед лабораторными работами изучите теорию вопроса, предполагаемого к исследованию, ознакомьтесь с опытом других исследователей в этом направлении.

Целью лабораторных работ является:

- закрепление методов приложения теории к решению практических задач анализа и синтеза психологического знания;
- проверка уровня понимания студентами вопросов, рассмотренных на лекциях и по учебной литературе, степени и качества усвоения материала;
- обучение навыкам освоения методики эксперимента и работы с нормативно-справочной литературой;
- восполнение пробелов в пройденной теоретической части курса и оказание помощи в его усвоении.

3.2 Методические рекомендации по написанию и оформлению доклада

1. Общие положения

1.1. Доклад, как вид самостоятельной работы в учебном процессе, способствует формированию навыков исследовательской работы, расширяет познавательные интересы, учит критически мыслить.

1.2. При написании доклада по заданной теме студент составляет план, подбирает основные источники.

1.3. В процессе работы с источниками систематизирует полученные сведения, делает выводы и обобщения.

1.4. К докладу по крупной теме могут привлекать несколько студентов, между которыми распределяются вопросы выступления.

2. Выбор темы доклада

2.1. Тематика доклада обычно определяется преподавателем, но в определении темы инициативу может проявить и студент.

2.2. Прежде чем выбрать тему доклада, автору необходимо выявить свой интерес, определить, над какой проблемой он хотел бы поработать, более глубоко ее изучить.

3. Этапы работы над докладом

3.1. Формулирование темы, причем она должна быть не только актуальной по своему значению, но и оригинальной, интересной по содержанию.

3.2. Подбор и изучение основных источников по теме (как правильно, при разработке доклада используется не менее 8-10 различных источников).

3.3. Составление списка использованных источников.

3.4. Обработка и систематизация информации

3.5. Разработка плана доклада.

3.6. Написание доклада.

3.7. Публичное выступление с результатами исследования.

4. Структура доклада:

- титульный лист

- оглавление (в нем последовательно излагаются названия пунктов доклада, указываются страницы, с которых начинается каждый пункт);

- введение (формулирует суть исследуемой проблемы, обосновывается выбор темы, определяются ее значимость и актуальность, указываются цель и задачи доклада, дается характеристика используемой литературы);

- основная часть (каждый раздел ее, доказательно раскрывая отдельную проблему или одну из ее сторон, логически является продолжением предыдущего; в основной части могут быть представлены таблицы, графики, схемы);
- заключение (подводятся итоги или дается обобщенный вывод по теме доклада, предлагаются рекомендации);
- список использованных источников

5. Структура и содержание доклада

5.1. Введение - это вступительная часть научно-исследовательской работы. Автор должен приложить все усилия, чтобы в этом небольшом по объему разделе показать актуальность темы, раскрыть практическую значимость ее, определить цели и задачи эксперимента или его фрагмента.

5.2. Основная часть. В ней раскрывается содержание доклада.

Как правило, основная часть состоит из теоретического и лабораторного разделов. В теоретическом разделе раскрываются история и теория исследуемой проблемы, дается критический анализ литературы и показываются позиции автора. В лабораторном разделе излагаются методы, ход, и результаты самостоятельно проведенного эксперимента или фрагмента.

В основной части могут быть также представлены схемы, диаграммы, таблицы, рисунки и т.д.

5.3. В заключении содержатся итоги работы, выводы, к которым пришел автор, и рекомендации. Заключение должно быть кратким, обязательным и соответствовать поставленным задачам.

5.4. Список использованных источников представляет собой перечень использованных книг, статей, фамилии авторов приводятся в алфавитном порядке, при этом все источники даются под общей нумерацией литературы. В исходных данных источника указываются фамилия и инициалы автора, название работы, место и год издания.

5.5. Приложение к докладу оформляются на отдельных листах, причем каждое должно иметь свой тематический заголовок и номер, который пишется в правом верхнем углу, например: «Приложение 1»

6. Требования к оформлению доклада

6.1. Объем доклада может колебаться в пределах 5-15 печатных страниц; все приложения к работе не входят в ее объем.

6.2. Доклад должен быть выполнен грамотно, с соблюдением культуры изложения.

6.3. Обязательно должны иметься ссылки на используемую литературу.

6.4. Должна быть соблюдена последовательность написания библиографического аппарата.

7. Критерии оценки доклада

- актуальность темы исследования;
- соответствие содержания теме;
- глубина проработки материала; правильность и полнота использования источников;
- соответствие оформления доклада стандартам.

По усмотрению преподавателя доклады могут быть представлены на семинарах, научно-практических конференциях, а также использоваться как зачетные работы по пройденным темам.

3.3 Методические рекомендации по конспектированию первоисточников

Изучение и анализ литературных источников является обязательным видом самостоятельной работы студентов. Изучение литературы по избранной теме имеет своей задачей проследить характер постановки и решения определенной проблемы различными авторами, аргументацию их выводов и обобщений, провести анализ и систематизировать полученный материал на основе собственного осмысления с целью выяснения современного состояния вопроса.

Проработка отобранного материала обязательно должна идти с одновременным ведением записей прочитанного и своих замечаний. Запись может иметь как форму конспекта, так и выписок, а также картотеку положений, тезисов, идей, методик, что в дальнейшем облегчит классификацию и систематизацию полученного материала. Такого рода записи являются лучшим способом накопления и первичной обработки материал, одной из обязательных форм организации умственного труда.

Планом удобно пользоваться при подготовке к устному выступлению по выбранной теме. Каждый пункт плана должен раскрывать одну из сторон избранной темы, а весь план должен охватывать ее целиком.

Тезисы предполагают сжатое изложение основных положений текста в форме утверждения или отрицания. Они являются более совершенной формой записей и представляют основу для дискуссии. К тому же их легко запомнить.

Конспектирование – процесс мысленной переработки и письменной фиксации информации, в виде краткого изложения основного содержания, смысла какого-либо текста.

Результат конспектирования – запись, позволяющая конспектирующему немедленно или через некоторый срок с нужной полнотой восстановить полученную информацию. Конспект в переводе с латыни означает «обзор». По существу его и составлять надо как обзор, содержащий основные мысли текста без подробностей и второстепенных деталей. Конспект носит индивидуализированный характер: он рассчитан на самого автора и поэтому может оказаться малопонятным для других.

Для того чтобы осуществлять этот вид работы, в каждом конкретном случае необходимо грамотно решить следующие задачи:

1. Сориентироваться в общей композиции текста (уметь определить вступление, основную часть, заключение).
2. Увидеть логико-смысловую канву сообщения, понять систему изложения автором информации в целом, а также ход развития каждой отдельной мысли.

3. Выявить «ключевые» мысли, т. е. основные смысловые вехи, на которые «нанизано» все содержание текста.
4. Определить детализирующую информацию.
5. Лаконично сформулировать основную информацию, не перенося на письмо все целиком и дословно.

Во всяком научном тексте содержится информация 2-х видов: основная и вспомогательная. Основной является информация, имеющая наиболее существенное значение для раскрытия содержания темы или вопроса. К ней относятся: определения научных понятий, формулировки законов, теоретических принципов и т. д. Назначение вспомогательной информации – помочь читателю лучше усвоить предлагаемый материал. К этому типу информации относятся разного рода комментарии. Основную – записываем как можно полнее, вспомогательную, как правило, опускаем. Содержание конспектирования составляет переработка основной информации в целях ее обобщения и сокращения. Обобщить – значит представить ее в более общей, схематической форме, в виде тезисов, выводов, отдельных заголовков, изложения основных результатов и т. п. Читая, мы интуитивно используем некоторые слова и фразы в качестве опорных. Такие опорные слова и фразы называются ключевыми. Ключевые слова и фразы несут основную смысловую и эмоциональную нагрузку содержания текста.

Выбор ключевых слов – это первый этап смыслового свертывания, смыслового сжатия материала.

Важными требованиями к конспекту являются наглядность и обзорность записей и такое их расположение, которое давало бы возможность уяснить логические связи и иерархию понятий.

По форме конспекты подразделяются на формализованные и графические.

1. Формализованные (все записи вносятся в заранее подготовленные таблицы).

Это удобно, во-первых, при конспектировании материалов, когда перечень характеристик описываемых предметов или явлений более или менее постоянен, во-вторых, при подготовке единого конспекта по нескольким источникам. Особенно если есть необходимость сравнения отдельных данных. Разновидностью формализованного конспекта является запись, составленная в форме ответов на заранее подготовленные вопросы, обеспечивающие исчерпывающие характеристики однотипных предметов или явлений.

2. Графические (элементы конспектируемой работы располагаются в таком виде, при котором видна иерархия понятий и взаимосвязь между ними).

По каждой работе может быть не один, а несколько графических конспектов, отображающих книгу в целом и отдельные ее части. Ведение графического конспекта – наиболее совершенный способ изображения внутренней структуры книги, а сам этот процесс помогает усвоению ее содержания.

Можно выделить следующие основные **типы конспектов: плановый, текстуальный, сводный, тематический.**

Плановый – легко получить с помощью предварительно сделанного плана произведения, каждому вопросу плана отвечает определенная часть конспекта:

а) вопросно-ответный (на пункты плана, выраженные в вопросительной форме, конспект дает точные ответы);

б) схематичный плановый конспект (отражает логическую структуру и взаимосвязь отдельных положений).

Текстуальный – это конспект, созданный в основном из цитат.

Сводный конспект – сочетает выписки, цитаты, иногда тезисы; часть его текста может быть снабжена планом.

Тематический – дает более или менее исчерпывающий ответ (в зависимости из

числа привлеченных источников и другого материала, например, своих же записей) на поставленный вопрос – тему: обзорный; хронологический.

Роль конспекта – чисто учебная: он помогает зафиксировать основные понятия и положения первичного текста и в нужный момент их воспроизвести, например, при написании реферата или подготовке к экзамену.

Способы конспектирования.

- **Тезисы** – это кратко сформулированные основные мысли, положения изучаемого материала. Тезисы лаконично выражают суть читаемого, дают возможность раскрыть содержание. Приступая к освоению записи в виде тезисов, полезно в самом тексте отмечать места, наиболее четко формулирующие основную мысль, которую автор доказывает (если, конечно, это не библиотечная книга). Часто такой отбор облегчается шрифтовым выделением, сделанным в самом тексте.

- **Линейно-последовательная запись текста.** При конспектировании линейно – последовательным способом целесообразно использование плакатно-оформительских средств, которые включают в себя следующие:

- сдвиг текста конспекта по горизонтали, по вертикали;
- выделение жирным (или другим) шрифтом особо значимых слов;
- использование различных цветов;
- подчеркивание;
- заключение в рамку главной информации.

- **Способ «вопросов – ответов».** Он заключается в том, что, поделив страницу тетради пополам вертикальной чертой, конспектирующий в левой части страницы самостоятельно формулирует вопросы или проблемы, затронутые в данном тексте, а в правой части дает ответы на них.

Одна из модификаций способа «вопросов – ответов» - таблица, где место вопроса занимает формулировка проблемы, поднятой автором (лектором), а место ответа – решение данной проблемы. Иногда в таблице могут появиться и дополнительные графы: например, «мое мнение» и т. п.

- **Схема с фрагментами** – способ конспектирования, позволяющий ярче выявить структуру текста, - при этом фрагменты текста (опорные слова, словосочетания, пояснения всякого рода) в сочетании с графикой помогают созданию рационально - лаконичного конспекта.

- **Простая схема** – способ конспектирования, близкий к схеме с фрагментами, объяснений к которой конспектирующий не пишет, но должен уметь давать их устно. Этот способ требует высокой квалификации конспектирующего. В противном случае такой конспект нельзя будет использовать.

- **Параллельный способ** конспектирования. Конспект оформляется на двух листах параллельно или один лист делится вертикальной чертой пополам и записи делаются в правой и в левой части листа.

Однако лучше использовать разные способы конспектирования для записи одного и того же материала.

Комбинированный конспект – вершина овладения рациональным конспектированием. При этом умело используются все перечисленные способы, сочетая их в одном конспекте (один из видов конспекта свободно перетекает в другой в зависимости от конспектируемого текста, от желания и умения конспектирующего). Именно при комбинированном конспекте более всего проявляется уровень подготовки и индивидуальность студента.

Принципы составления конспекта прочитанного.

1. Записать все выходные данные источника: автор, название, год и место издания. Если текст взят из периодического издания (газеты или журнала), то записать его название, год, месяц, номер, число, место издания.

2. Выделить поля слева или справа, можно с обеих сторон. Слева на полях отмечаются страницы оригинала, структурные разделы статьи или книги (названия параграфов, подзаголовки и т. п.), формулируются основные проблемы. Справа – способы фиксации прочитанной информации.

Один из видов чтения – углубленное – предполагает глубокое усвоение прочитанного и часто сохранение информации в целях последующего обращения к ней. Эффективность такого чтения повышается, если прочитанное зафиксировано не только в памяти, но и на бумаге. Психологи утверждают, что записанное лучше и полнее усваивается, прочнее откладывается в памяти. Установлено, что если прочитать 1000 слов и затем записать 50, подытоживающих прочитанное, то коэффициент усвоения будет выше, чем, если прочитать 10000 слов, не записав ни одного. Кроме того, при записи прочитанного формируется навык свертывания информации. И, наконец, чередование чтения и записывания уменьшает усталость, повышает работоспособность и производительность умственного труда.

1. Резюмирование.

Резюме – краткий итог прочитанного, содержащий его оценку. Резюме характеризует основные выводы книги, главные итоги.

Выбор языковых средств для построения резюме-выводов подчинен основной задаче свертывания информации: минимум языковых средств – максимум информации. Это обычно одно – три четких, кратких, выразительных предложения, раскрывающих, по мнению автора, самую суть описываемого объекта.

2. Аннотация.

Аннотация – краткая обобщенная характеристика печатной работы (книги, статьи), включающая иногда и его оценку. Это наикратчайшее изложение содержания первичного документа, дающее общее представление о теме.

Основное ее назначение – дать некоторое представление о книге (статье, научной работе) с тем, чтобы рекомендовать ее определенному кругу читателей или воспользоваться своими записями при выполнении работы исследовательского, реферативного характера. Поэтому аннотации не требуются изложения содержания произведения, в ней лишь перечисляются вопросы, которые освещены в первоисточнике (содержание этих вопросов не раскрывается). Аннотация отвечает на вопрос: «О чем говорится в первичном тексте?», дает представление только о главной теме и перечне вопросов, затрагиваемых в тексте первоисточника.

Текст аннотации не стандартизирован. В научной литературе можно встретить различные требования к составлению аннотаций. Например, текст справочной аннотации может включать следующие сведения:

- тип и название аннотируемого документа (монография, диссертация, сборник, статья и т. п.)
- задачи, поставленные автором аннотируемого документа
- метод, которым пользовался автор (эксперимент, сравнительный анализ,

компиляция других источников)

- принадлежность автора к определенной научной школе или направлению
- структуру аннотируемого документа
- предмет и тему произведения, основные положения и выводы автора
- характеристику вспомогательных иллюстративных материалов, дополнений, приложений, справочного аппарата, включая указатели и библиографию.

Задания, выполняемые по практическим занятиям

1. Тема 2. Матричные операции.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Опишите формулу вычисления элементов строки результирующей матрицы?
- 2) Опишите формулу вычисления элементов столбца результирующей матрицы?
- 3) Вычислите произведение матриц представлением матриц-сомножителей в виде матрицы-строки и матрицы-столбца.
- 4) Опишите формулу умножения на диагональную матрицу.
- 5) Вычислите произведение матриц, если одна из них диагональная.
- 6) Найдите степень матрицы.
- 7) Дайте определение нильпотентной матрицы. Приведите пример.
- 8) Укажите правило умножения нильпотентной матрицы саму на себя.

Задания повышенного уровня:

- 1) Определите степень нильпотентной матрицы, при которой она станет нулевой.

$$1. \left[\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 1 \\ 9 & 8 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 8 & 1 & 7 \\ 7 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \right] \left| \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \\ 8 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \right] \left| \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \right|$$

- 2) Дайте определение матричного многочлена. Приведите формулу.
- 3) Опишите способ вычисления матричного многочлена.
- 4) Вычислите матричный многочлен $f(A) = A^2 + 3A + E$.
- 5) Дайте определение прямой суммы квадратных матриц.
- 6) Дайте определение кронекеровым произведением прямоугольных матриц.
- 7) Найти кронекерово произведение матриц.
- 8) Найти прямую сумму матриц.

$$\left[\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 \\ 9 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix} \right] \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \right] \otimes \begin{bmatrix} \sin x & \sin 2x \\ 1 & \cos x \end{bmatrix} \left| \left[\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \right] \oplus \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right|$$

2. Тема 3. Обращение матриц, вычисление ранга и определителя

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Что называют определителем (детерминантом) n-го порядка квадратной матрицы? (укажите формулу).
- 2) Какие недостатки имеет метод расчета определителя?
- 3) По какой теореме основан метод вычисления определителя разложением его по элементам строки или столбца? (укажите формулу).
- 4) Что понимают под алгебраическим дополнением? (укажите формулу).
- 5) В чем заключается метод вычисления определителей приведением его к треугольному виду?

- 6) Что называется определителем Вандермонда?
- 7) Какой вид имеет рекуррентная формула?
- 8) По какому рекуррентному соотношению можно рассчитать определители?
- 9) На какой теореме базируется метод разложения квадратной матрицы на произведение двух треугольных матриц?

Задания повышенного уровня:

- 1) Укажите алгоритм метода единственного деления.
 - 2) Рассмотрите нахождение искомых элементов треугольных матриц.
 - 3) Запишите в развернутом виде формулу расчета определителя третьего порядка.
 - 4) В чем заключается способ нахождения обратной матрицы?
 - 5) Каким образом осуществляется определение ранга матрицы?
 - 6) Как осуществляется вычисление ранга матрицы с помощью миноров?
 - 7) Произведите вычисление определителей следующими методами: по формуле расчета определителя третьего порядка, разложением определителя по элементам строки или столбца, приведением определителя к треугольному виду, методом единственного деления.
 - 8) Вычислите ранг матрицы: приведением ее к каноническому виду, к ступенчатому виду, методом окаймления (по заданию преподавателя).
 - 9) Найдите значения λ , при которых вектор-столбцы матрицы A линейно зависимы.
- (2)
- 10) Произведите обращение матрицы: по формуле, методом неопределенных коэффициентов, методом исключения, методом разложения матрицы на две треугольные (по заданию преподавателя).

3. Тема 4. Исследование устойчивости автоматической системы регулирования при помощи алгебраических критериев.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Что понимают под устойчивостью линейной системы?
- 2) Какими двумя методами можно воспользоваться для исследования устойчивости?
- 3) Каким образом формируется критерий Гурвица? (укажите формулу).
- 4) Перечислите правила составления определителя Гурвица.
- 5) Каким образом формируется критерий Ляпунова-Шипара?
- 6) Что применяют для исследования устойчивости систем автоматического управления?
- 7) Когда следует положительность определителей A Гурвица?
- 8) Что необходимо для того чтобы система автоматического управления была устойчива?
- 9) Что называется критерием устойчивости Ляпунова — Шипара?

Задания повышенного уровня:

- 1) Приведите примеры, при каких случаях система устойчива?
 - 2) Приведите примеры, при каких случаях система неустойчива?
 - 3) Рассмотрите пример характеристического уравнения системы
- $$D(s) = (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s) + K = 0,$$
- где K — коэффициент усиления разомкнутой системы; T_1, T_2, T_3 — постоянные времени отдельных динамических звеньев системы.

- 4) Рассмотрите пример определения устойчивости АСР алгебраическими критериями Гурвица и Ляпунова-Шипара по дифференциальному уравнению замкнутой системы:

$$5 \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + 9 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 7 \cdot \frac{dy}{dt} + 6 \cdot y = 9 \cdot \frac{dx}{dt} + 4 \cdot x.$$

5) Рассмотрите пример исследования на экстремум функции
 $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1^3 - x_1 + x_2^3 - 3 \cdot x_2^2 - 1$.

6) По дифференциальному уравнению системы $a_3 \cdot y'''(t) + a_2 \cdot y''(t) + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = 0$ определить устойчивость АСР с помощью критериев Гурвица и Ляпунова-Шипара.

7) Исследовать на экстремум функцию.

1				2
a_3	a_3	a_3	a_3	
5	8	9	1	$f(x, y) = 1 - 5x^3 - 2x + y^2 + 4y$

4. Тема 7. Составление дифференциальных уравнений объекта регулирования

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Роль нелинейности в уравнениях элементов систем автоматического регулирования.
- 2) Методика составления дифференциальных уравнений элементов, допускающих линеаризацию. Первый шаг.
- 3) Методика составления дифференциальных уравнений элементов, допускающих линеаризацию. Второй шаг.
- 4) Для чего производят линеаризацию уравнения?
- 5) При помощи чего производят линеаризацию уравнения? (укажите формулу).
- 6) Какой смысл имеют показатели степени, в которую возводятся выражения, стоящие в скобках и на что они указывают?
- 7) Какие производные являются постоянными?
- 8) Каким образом производится линеаризация нелинейных уравнений?
- 9) Укажите формулу Лагранжа и объясните для чего она используется.

Задания повышенного уровня:

- 1) При помощи какого выражения удобнее всего пользоваться при линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений и как его получить?
- 2) Рассмотрите уравнение установившегося режима для данного элемента (объекта регулирования).
- 3) Рассмотрите линеаризованное уравнение в отклонениях, выраженных в абсолютных единицах.
- 4) Какие операции необходимо произвести для приведения дифференциального уравнения в абсолютных отклонениях к уравнению в относительных единицах с безразмерными коэффициентами.
- 5) Рассмотрите переход к уравнению с безразмерным временем.
- 6) Запишите в матричной форме систему и решение системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + 3x_3.$$

5. Тема 9. Решение линейной системы дифференциальных уравнений с различными вещественными корнями характеристического уравнения

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Какой вид имеет однородная система дифференциальных уравнений в матричной

форме?

- 2) Запишите общее решение системы в матричной форме согласно методу Эйлера.
- 3) Каким образом можно получить фундаментальную матрицу системы?
- 4) Каким более простым вариантом можно произвести нахождение вектор-столбцов модальной матрицы?

Задания повышенного уровня:

- 1) Запишите порядок решения системы дифференциальных уравнений.
- 2) Рассмотрите пример решения системы дифференциальных уравнений.
- 3) Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix}$$

с начальными условиями

Требуется:

решить систему уравнений и построить графики зависимостей $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	x_{10}	x_{20}	x_{30}
8	2	-1	0	1	-1	-6	-4	1	1	2	0

6. Тема 11. Решение линейной системы дифференциальных уравнений с кратными вещественными корнями характеристического уравнения.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Какие корни имеются среди корней характеристического уравнения?
- 2) Какие случаи выделяют при рассмотрении корней характеристического уравнения? (укажите формулы).
- 3) Рассмотрите систему линейных алгебраических уравнений.

Задания повышенного уровня:

- 1) Рассмотрите пример нахождения решения системы дифференциальных уравнений.
- 2) Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix}$$

с начальными условиями

Требуется:

решить систему уравнений и построить графики зависимостей $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	x_{10}	x_{20}	x_{30}
-2	2	-1	0	-5	-1	-6	-4	1	1	2	0

7. Тема 12. Решение линейной системы дифференциальных уравнений с комплексными корнями характеристического уравнения.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Какие корни имеются среди корней характеристического уравнения?
- 2) При каких коэффициентах решение выражается только через вещественные функции?
- 3) Какие части комплексного решения являются линейно-независимыми решениями?
- 4) Какой вид имеет частное решение системы для корня $\lambda = \alpha + i\beta$?
- 5) Какое решение системы можно получить, определив для каждого корня характеристического уравнения соответствующие решения?

Задания повышенного уровня:

- 1) Рассмотрите пример нахождения решения системы дифференциальных уравнений.
- 2) Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix}$$

с начальными условиями

Требуется:

решить систему уравнений и построить графики зависимостей $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	x_{10}	x_{20}	x_{30}
-4	-3	-2	0	0	1	6	5	2	1	1	2

8. Тема 14. Нахождение общего решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Какой вид имеет неоднородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?
- 2) В чем заключается метод вариации произвольных постоянных?
- 3) В каком виде получается частное решение системы согласно методу Лагранжа?

Задания повышенного уровня:

- 1) Рассмотрите пример нахождения общего решения системы методом Лагранжа.
- 2) Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + g_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + g_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}.$$

с начальными условиями

Требуется: решить систему уравнений и построить графики зависимостей $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	g_1	g_2	x_{10}	x_{20}
-3	4	1	0	e^{3t}	$-e^{3t}$	1	2

9. Тема 16. Нахождение частного решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) В чем заключается метод неопределенных коэффициентов?
- 2) В каком виде можно представить элементы вектора $G(t)$, в случае произведения полинома степени m на экспоненциальную функцию? (укажите уравнение).
- 3) В каком виде отыскивается частное решение в случае произведения полинома степени m на экспоненциальную функцию?
- 4) Исходя из каких условий находится величина s ?
- 5) В каком виде можно представить элементы вектора $G(t)$, в случае произведения полиномов степени m_k , n_k на гармонические функции? (укажите уравнение).
- 6) В каком виде отыскивается частное решение, в случае произведения полиномов степени m_k , n_k на гармонические функции?
- 7) Исходя из каких условий находится величина s ?

Задания повышенного уровня:

- 1) Рассмотрите пример нахождения общего решения системы методом неопределенных коэффициентов.
- 2) Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + g_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + g_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}.$$

с начальными условиями

Требуется: решить систему уравнений и построить графики зависимостей $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	g_1	g_2	x_{10}	x_{20}
6	2	-4	2	$\sin(t)$	$-\cos(t)$	0	2

10. Тема 19. Вывод решения выходной системы дифференциальных уравнений для случая линейной непрерывной детерминированной автоматической системы регулирования

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Что называют дифференциальными уравнениями?
- 2) Какие уравнения называют уравнениями в частных производных, а какие обычными дифференциальными?
- 3) В каком виде может быть представлено математическое соотношение для детерминированных систем? (укажите формулу).
- 4) Какие математические схемы называются D-схемами?
- 5) Какой вид имеет обыкновенное дифференциальное уравнение?
- 6) Опишите процесс малых колебаний маятника при помощи дифференциального уравнения.
- 7) Укажите формулу определения периода колебания механического маятника.
- 8) Опишите процесс электрического колебательного контура при помощи дифференциального уравнения.
- 9) Укажите формулу определения периода характеристических колебаний электрического маятника.
- 10) Укажите дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее поведение замкнутой системы.
- 11) Какой вид будет иметь непрерывно-детерминированная модель замкнутой системы?
- 12) Что понимают под современной управляющей системой?
- 13) Какие системы называются идеальными?

Задания повышенного уровня:

- 1) Чему обычно придерживаются, описывая процессы автоматического управления?
- 2) Укажите и рассмотрите структуру многомерной системы автоматического управления.
- 3) Что представляют в случае, когда система устойчива?
- 4) Рассмотрите пример одноканальной системы автоматического управления SA, которая описывается D-схемой.
- 5) Какой процесс позволяет формализовать использование D-схем?
- 6) Найдите общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = x + 1$.
- 7) Решите систему уравнений
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$$
матричным методом.

11. Тема 21. Математическое описание входных сигналов, используемых при идентификации систем: ступенчатая единичная функция, дельта- функция Дирака, полиномиальный сигнал, гармонический сигнал.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Что необходимо для оценки динамических свойств?

- 2) Укажите типовые функции входного сигнала.
- 3) Что понимают под единичным ступенчатым воздействием?
- 4) Как аналитически можно представить единичную функцию?
- 5) Укажите второе определение единичной функции.
- 6) Для чего используют функцию Хевисайда?
- 7) Укажите дискретное определение функции Хевисайда.
- 8) Напишите определение дельта-функции $\delta(t)$.
- 9) Как аналитически можно представить дельта-функцию?
- 10) Укажите вид связи между единичной ступенчатой функцией и дельта-функцией.
- 11) Что понимают под гармоническим сигналом $e^{j\omega t}$?
- 12) В каких формах и видах колебания может задаваться гармонический сигнал? (укажите формулы).
- 13) На какие два типа можно разделить динамические характеристики элементов?

Задания повышенного уровня:

- 1) Какие аналитические формы использует функция Хевисайда?
- 2) Опишите математическое определение функции Дирака.
- 3) В каком виде могут быть представлены полиномиальные воздействия?
- 4) Импульсный сигнал $u(t)$, имеющий размерность напряжения, описывается формулой :

$$u(t) = \begin{cases} 25 \left[e^{-10^{-5}t} - e^{-2 \cdot 10^{-5}t} \right] & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

Постройте график импульса. Определите максимальное значение сигнала U_{max} и соответствующее ему t_{max} . Вычислите длительность импульса T , определив её как длину отрезка времени от нуля до той точки, в которой мгновенное значение сигнала уменьшается в 10 раз по сравнению с U_{max} .

- 5) Представьте напряжение вида $5 \cos(628t + \pi/4)$ на временной и частотной плоскостях. Постройте векторную диаграмму. Запишите комплексную амплитуду.
- 6) Гармонический ток задан комплексной амплитудой: $\dot{I}_m = 25 e^{-j30^\circ}$ и частотой $f = 1 \text{ МГц}$. Постройте его график на временной и частотной плоскостях, а также векторную диаграмму.

12. Тема 23. Расчет управляемости систем по критериям Гильберта и Калмана.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) На какие три множества можно разделить все переменные, характеризующие систему?
- 2) Какие три вектора получают при упорядочивании элементов множеств?
- 3) Что позволяет рассматривать векторное представление?
- 4) При помощи каких двух уравнений можно описать непрерывные линейные детерминированные системы в каждый момент времени t ?
- 5) В каком случае система называется линейной нестационарной?
- 6) В каком случае система называется линейной стационарной?
- 7) В каком случае система является управляемой?

- 8) В каком случае система является наблюдаемой?
- 9) В каком случае система называется идентифицируемой?

Задания повышенного уровня:

- 1) Что подразумевает собой критерий Гильберта управляемости систем?
- 2) В чем заключается каноническое преобразование?
- 3) Какие замечания следует учесть при проведении преобразований?
- 4) Что подразумевает собой критерий управляемости системы Р. Е. Калмана?
- 5) Рассмотрите пример определения управляемости системы с заданными параметрами по критерию Гильберта.
- 6) Рассмотрите пример определения управляемости системы по критерию Калмана.
- 7) Определите управляемость или наблюдаемость системы с заданными параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} g & h \end{bmatrix}.$$

a	b	c	d	e	f	g	h	Критерий расчета
2	3	4	5	1	1	1	1	Управляемость по Гильберту

a	b	c	d	e	f	g	h	Критерий расчета
3	8	7	5	2	2	1	1	Управляемость по Калману

13. Тема 24. Расчет наблюдаемости систем по критериям Гильберта и Калмана.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Какие понятия относятся к теории автоматического регулирования? Что позволяют оценить эти понятия?
- 2) Какая система является неуправляемой?
- 3) Какую систему называют управляемой?
- 4) В чем заключается необходимое и достаточное условие полной управляемости для линейной стационарной системы?
- 5) Что устанавливает понятие наблюдаемости?
- 6) В чем заключается необходимое и достаточное условие полной наблюдаемости для линейной стационарной системы?
- 7) Что является необходимым и достаточным условием полной наблюдаемости?

Задания повышенного уровня:

- 1) Каким образом записывается матрица наблюдаемости для линейных стационарных систем?
- 2) По каким данным при выполнении условия наблюдаемости возможно определение начального состояния x_0 ?
- 3) Рассмотрите два типа систем автоматического регулирования.
- 4) Рассмотрите пример определения выполнения условий управляемости и наблюдаемости системы регулирования.
- 5) Рассмотрите пример наблюдаемости системы с заданными параметрами по критерию Гильберта.
- 6) Рассмотрите пример наблюдаемости системы по критерию Калмана.
- 7) Определите управляемость или наблюдаемость системы с заданными параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} g & h \end{bmatrix}.$$

a	b	c	d	e	f	g	h	Критерий расчета
3	7	9	5	2	1	2	1	Наблюдаемость по Гильберту
a	b	c	d	e	f	g	h	Критерий расчета
3	7	9	1	2	1	2	1	Наблюдаемость по Калману

6. Список рекомендуемой литературы

Основная литература:

- Кочетков В.П. Основы теории управления: учеб. пособие / В.П. Кочетков. – Ростов н/Д: Феникс, 2014. – 411 с. – Гриф: Рек. УМО
- Теория автоматического управления: учеб.: доп. Мин. обр. РФ / под ред. В.Б. Яковлева. – М.: Высш.шк., 2014. – 568 с.

Дополнительная литература:

- Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. Изд. 2-е. – Киев: Техника, 2013. – 728 с.
- Чемоданов Б.К., Медведев В.С., Иванов В.А., Ющенко А.С. Математические основы теории автоматического управления. Т.1 .Изд.3 е. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 552 с.
- Лотош М.М. Основы теории автоматического управления. Математические методы / А.Л. Шустер. – М.: Наука, 2014. – 288 с.
- Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир , 2013. – 302 с.
- Ротач В.Я. Теория автоматического управления теплоэнергетическими процессами. – М.: Энергоатомиздат, 2014. – 366 с.

Методическая литература:

- электронный курс лекций;
- электронные методические рекомендации для выполнения практических заданий.

Интернет-ресурсы:

- <http://www.exponenta.ru/> – образовательный математический сайт;
- <http://www.toehelp.ru/theory/tau/contents.html> – электронный курс лекций по теории автоматического управления;
- <http://www.novtex.ru/mech/> – теоретический и прикладной научно-технический журнал «Мехатроника, автоматизация, управление».