

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В
ФИЗИКЕ**

Методические указания по выполнению практических работ

Направление подготовки 03.03.02 Физика

Направленность (профиль)

«Медицинская физика»

**Ставрополь
2026**

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

РАЗДЕЛ 1. Уравнения с разделяющимися переменными

1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях.
2. Дифференциальное уравнение первого порядка: задача Коши, общее и частное решение.
3. Уравнения с разделяющимися переменными

РАЗДЕЛ 2. Однородные дифференциальные уравнения и приводящиеся

к ним.

1. Однородные уравнения.
2. Уравнения, приводящиеся к однородным.
3. Обобщенно-однородные уравнения

РАЗДЕЛ 3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.....

1. Линейные уравнения первого порядка.
2. Уравнение Бернулли.
3. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

РАЗДЕЛ 4 Уравнения, не разрешенные относительно производной.

1. Уравнения, не разрешенные относительно производной
2. Уравнения Лагранжа
3. Уравнения Клеро

РАЗДЕЛ 5 . Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1. Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия.
2. Понижение порядка уравнения, которое не содержит искомой функции.
3. Понижение порядка уравнения, которое не содержит независимой переменной.

РАЗДЕЛ 6. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

1. Основные понятия. Линейный дифференциальный оператор и его свойства.
2. Свойства ЛОДУ n -го порядка.
3. Теоремы об определителе Вронского и линейной независимости решений.
4. Фундаментальная система решений ЛОДУ n -го порядка.

РАЗДЕЛ 7. Линейные однородные уравнения

с постоянными коэффициентами

1. Интегрирование ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. Интегрирование ЛОДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами.
3. Правило нахождения фундаментальной системы решений ЛОДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами.

РАЗДЕЛ 8. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Структура общего решения ЛНДУ.
2. Метод вариации произвольных постоянных.
3. Подбор частного решения линейного неоднородного уравнения с правой частью специального вида.

РАЗДЕЛ 9. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений: основные понятия.
2. Теорема существования и единственности решения для нормальной системы уравнений первого порядка.
3. Интегрирование нормальных систем.

РАЗДЕЛ 10. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

1. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами: основные понятия, характеристическое уравнение.
2. Возможные случаи решений линейных однородных систем дифференциальных уравнений.
3. Алгоритм решения линейных однородных систем с постоянными коэффициентами.
4. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений.

РАЗДЕЛ 11. Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами.

1. Преобразования Лапласа
2. Свойства преобразования Лапласа.
3. Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами
4. Решение задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

РАЗДЕЛ 12. Краевые задачи. Функция Грина.

1. Постановка и определение краевой (граничной) задачи.
2. Функция Грина краевой задачи

РАЗДЕЛ 13. Устойчивость.

1. Определение устойчивости по Ляпунову.
2. Асимптотическая устойчивость решения.
3. Устойчивость по первому приближению.
4. Исследование на устойчивость с помощью теоремы Ляпунова

РАЗДЕЛ 14. Линейные уравнения в частных производных первого порядка.

1. Основные определения.
2. Однородные линейные уравнения в частных производных первого порядка

РАЗДЕЛ 15. Понятие интегрального уравнения.

1. Классификация интегральных уравнений
2. Физические примеры

РАЗДЕЛ 16. Существование и свойства собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного оператора.

1. Вполне непрерывные операторы в бесконечномерном евклидовом пространстве.
2. Существование собственных векторов вполне непрерывного симметричного оператора.
3. Свойства собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного симметричного оператора

РАЗДЕЛ 17. Однородное уравнение Фредгольма второго рода.

1. Собственные функции и собственные значения однородного уравнения Фредгольма второго рода.

2. Определение собственных значений и собственных функций по методу Келлога.

РАЗДЕЛ 18. Разложение по собственным функциям.

1. Теорема Гильберта-Шмидта.
2. Повторные ядра.
3. Теорема Мерсера.

РАЗДЕЛ 19. Краевая задача на собственные значения (задача Штурма-Лиувилля).

1. Задача о колебаниях струны.
2. Исследование задачи Штурма—Лиувилля сведением к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

РАЗДЕЛ 20. Неоднородное уравнение Фредгольма второго рода.

1. Случай симметричного ядра.
2. Теоремы Фредгольма.
3. Резольвента непрерывного несимметричного ядра при "больших" λ .

РАЗДЕЛ 21. Уравнения Вольтерра второго рода.

1. Существование и единственность решения.
2. Резольвента для уравнения Вольтерра.
3. Уравнения Вольтерра с ядром, зависящим от разности аргументов.

РАЗДЕЛ 22. Интегральное уравнение Фредгольма первого рода.

1. Интегральное уравнение Фредгольма первого рода как некорректно поставленная задача.
2. Сглаживающий функционал и его свойства

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность учебной дисциплины «Дифференциальные и интегральные уравнения в физике» обусловлена необходимостью формирования у будущих специалистов общепрофессиональных компетенций, практических умений на которых базируется профессиональная деятельность в физике. В современных условиях важнейшим элементом подготовки бакалавров в области физики является формирование у них самостоятельности и культуры научного мышления, способности вести научную и профессиональную деятельность, навыков постановки целей, задач при решении проблемных ситуаций.

Целью лабораторных занятий является формирование профессиональных компетенций бакалавра по направлению 03.03.02 Физика, связанных с освоением необходимого математического аппарата, с помощью которого разрабатываются и исследуются теоретические и экспериментальные модели

Основные задачи дисциплины:

Развитие навыков математического мышления студентов.

- Овладение методов исследования и решения исследовательских задач.
- Выработка у студентов умения самостоятельно расширять свои математические знания.
- Развитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности.

В результате изучения дисциплины у обучающихся формируются следующие компетенции (в соответствии с образовательным стандартом):

ИД-1_{ОПК-1}

использует знания физических законов, процессов, явлений, а также поведение физических объектов при различных внешних условиях, при решении задач в своей профессиональной деятельности.

ИД-2_{ОПК-1}

использует математический аппарат и методы математического и численного моделирования для описания, анализа, теоретического и экспериментального исследования физических систем, явлений и процессов в своей профессиональной деятельности.

Цель данного практикума – описание последовательности, основного содержания, методики выполнения практических занятий по учебному курсу и (или) самостоятельной подготовки к ним. Занятия проводятся в форме практических.

РАЗДЕЛ 1. Уравнения с разделяющимися переменными

Тема 1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях. Уравнения с разделяющимися переменными.

▪ Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) порядка n называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y=y(x)$ и ее производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$, т.е. уравнение вида $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$.

Примеры: $yy'=\cos(x+y)$ – ОДУ 1-го порядка;
 $y''+2y'-y=e^x$ – ОДУ 2-го порядка.

При решении различных задач физики, химии, биологии и других наук часто пользуются математическими моделями процессов в виде дифференциальных уравнений. Так, например, закон размножения бактерий (зависимость массы m бактерий от времени t) описывается уравнением $m'_t = km$ ($k > 0$).

▪ Решением ОДУ называется дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, такая, что подстановка этой функции вместе с ее производными до n -го порядка включительно в данное дифференциальное уравнение превращает последнее в верное тождество. Процесс отыскания решения ОДУ называется его *интегрированием*. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Примеры:

1) Функция $y = \sin x$ является решением уравнения $y'' + y = 0$. Отметим, что это решение не единственное; так, функции $y = \cos x$, $y = 2\sin x$, $y = 3\cos x - \sin x$ и т.п. также являются решениями данного ОДУ.

2) Решением дифференциального уравнения $y'=x$ является первообразная функции x , то есть любая функция вида $y = \frac{x^2}{2} + C$, где $C=\text{const}$. Говорят, что функция $y = \frac{x^2}{2} + C$ является *общим решением* данного уравнения.

Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$F(x, y, y')=0.$$

Замечание. Поскольку $y' = \frac{dy}{dx}$, это уравнение может быть также записано в *дифференциальной форме*: $F(x, y, dx, dy)=0$.

В этом случае переменные x и y являются равноправными, так что при необходимости можно считать y независимой переменной, а $x=x(y)$ – искомой функцией.

▪ Если данное уравнение удастся разрешить относительно y' , то получается уравнение первого порядка, *разрешенное относительно производной* или уравнение в *нормальной форме*:

$$y'=f(x;y). \quad (1)$$

Пример. ОДУ 1-го порядка $(x^2+y^2)-(x+y)y'=0$ можно записать в виде $(x^2+y^2)dx-(x+y)dy=0$, или

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{x + y}, \text{ или } x' = \frac{x + y}{x^2 + y^2}.$$

▪ Пусть требуется найти такое решение уравнения (1), которое удовлетворяло бы *начальному условию*

$$y(x_0)=y_0 \quad (\text{или } y|_{x=x_0} = y_0, \text{ или } y|_{x_0} = y_0)$$

Такую задачу называют *задачей Коши*.

Геометрически задача Коши означает, что ищется интегральная кривая, проходящая через

заданную точку (x_0, y_0) на плоскости xOy .

Теорема. (существования и единственности решения задачи Коши):

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области D , содержащей точку (x_0, y_0) и, кроме того, имеет в этой области непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$. Тогда

существует единственное решение задачи Коши
$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Эту теорему мы примем без доказательства.

Точки, удовлетворяющие условию теоремы о существовании и единственности задачи Коши, называют *правильными*. Точки, не удовлетворяющие этому условию, называют *особыми*.

Через особую точку может проходить две или более интегральных кривых, или не проходить ни одной (т.е. решение задачи Коши может быть не единственным или не существовать вовсе).

Общим решением уравнения (1) называется функция $y = \varphi(x; C)$, зависящая от произвольной постоянной C , такая, что:

- 1) она удовлетворяет данному уравнению при любых значениях постоянной C ;
- 2) для любой точки $(x_0; y_0)$ из области существования и единственности решения задачи Коши для данного уравнения можно подобрать такое значение постоянной C_0 , что функция $y = \varphi(x; C_0)$ будет удовлетворять начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Часто общее решение дифференциального уравнения можно получить не в явном виде, а в виде так называемого *общего интеграла* уравнения: $\Phi(x, y) = C$

Частным решением уравнения называется решение, получаемое из общего решения при каком-либо значении постоянной C .

Пример. Рассмотрим задачу Коши $y' = 1, y(0) = 0$.

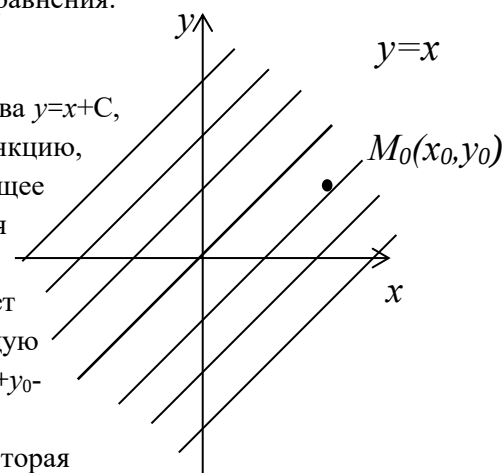
Любая первообразная функции $y' = 1$ является решением данного уравнения:

$$y = \int 1 \cdot dx = x + C.$$

Для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ можем найти из равенства $y = x + C$, что $C = y_0 - x_0$. Подставляя это значение постоянной в найденную функцию, получаем частное решение данного уравнения, удовлетворяющее данному начальному условию: $y = x + y_0 - x_0$. В частности, полагая $x_0 = 0, y_0 = 0$, получаем искомое решение задачи Коши $y = x$.

Графически общее решение данного уравнения $y = x + C$ определяет в плоскости xOy семейство параллельных прямых. Через каждую точку плоскости проходит единственная интегральная линия $y = x + y_0 - x_0$.

Частное решение $y = x$ определяет одну из интегральных линий, которая проходит через начало координат.



Метод изоклин

Уравнение вида $y' = f(x; y)$ устанавливает связь между координатами точки $(x; y)$ и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. То есть это ОДУ задает в каждой точке плоскости xOy направление касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку; говорят, что задано *поле направлений*.

Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется *изоклиной*. Уравнение изоклины можно получить, если положить $y' = c$, т.е. $f(x; y) = c$. Изоклинами можно пользоваться для приближенного построения интегральных кривых.

Пример. Решить уравнение $y' = -\frac{x}{y}$

Уравнения изоклин этого ОДУ имеют вид: $-\frac{x}{y} = C$, или $y = -\frac{1}{C}x$, то есть изоклинами являются

прямые, проходящие через начало координат.

Отметим что в точке $(0;0)$ значение C не определено, т.е. это особая точка.

Построим поле направлений, проведя в точках прямых (за исключением начала координат) отрезки, образующие с осью Ox один и тот же угол α , тангенс которого равен C .

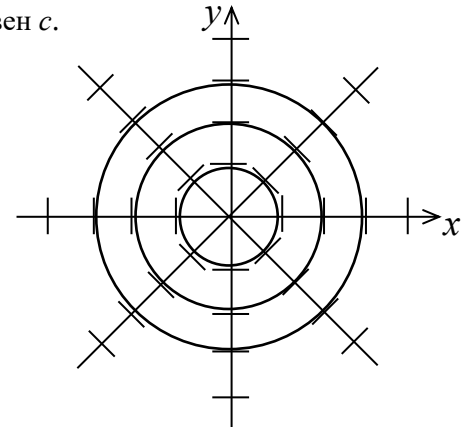
В точках прямой $y=x$ имеем $C=-1$, т. е. $\alpha = \frac{3\pi}{4}$;

в точках прямой $y=-x$ имеем $C=1$, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

в точках прямой $x=0$ имеем $C=1$, т.е. $\alpha=0$;

при $y \rightarrow 0$ имеем $C \rightarrow \infty$, т. е. в точках прямой $y=0$

имеем $\alpha = \frac{\pi}{2}$.



Линии, касающиеся полученного поля направлений, то есть искомые интегральные линии – концентрические окружности с центром в начале координат, их уравнения имеют вид $x^2 + y^2 = C$ ($C > 0$). Это и есть общее решение данного ОДУ.

Уравнения с разделяющимися переменными

- Дифференциальное уравнение вида

$$y' = \varphi(x)\psi(y)$$

или, в более общем случае,

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)dy = \varphi_2(x)\psi_2(y)dx \quad (2)$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Путем деления на произведение $\varphi_1(x)\psi_2(y)$ уравнение (2) приводят к *уравнению с разделенными переменными*:

$$\frac{\psi_1(y)}{\psi_2(y)} dy = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} dx,$$

после чего, интегрируя обе части уравнения, получают его общее решение в виде

$$\int \frac{\psi_1(y)}{\psi_2(y)} dy - \int \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} dx = C.$$

Замечание. Деление на $\varphi_1(x)\psi_2(y)$ может привести к потере решений, обращающих это произведение в ноль. Поэтому следует отдельно решить уравнение $\varphi_1(x)\psi_2(y) = 0$ и установить те решения ОДУ (2), которые не получаются из общего решения ни при каком значении C (*особые решения*).

Пример 1. Решить уравнение: $(x+1)\sin y dy + 3\cos y dx = 0$

Перенесем слагаемое, содержащее dx , в правую часть уравнения:

$$(x+1)\sin y dy = -3\cos y dx.$$

Разделим обе части уравнения на $(x+1)\cos y$:

$$\frac{\sin y}{\cos y} dy = -\frac{3}{x+1} dx.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Интегрируя его, найдем

$$\ln|\cos y| = 3\ln|x+1| + C_1.$$

Возьмем экспоненту от обеих частей полученного равенства:

$$e^{\ln|\cos y|} = e^{3\ln|x+1|+C_1} \text{ или } |\cos y| = e^{C_1} |x+1|^3, \text{ откуда, снимая модуль, получаем:}$$

$$\cos y = \pm e^{C_1} (x+1)^3.$$

Обозначая $\pm e^{C_1} = C$, получаем общее решение данного уравнения в виде

$$\cos y = C(x+1)^3.$$

Проверим теперь, не были ли потеряны решения при делении на произведение $(x+1)\cos y$.

Уравнение $\cos y = 0$ имеет решения $y = \pi/2 + \pi k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Подстановкой в исходное дифференциальное уравнение убеждаемся, что $y = \pi/2 + \pi k$ являются решениями этого уравнения (напомним, что если $y = \text{const}$, то $dy = 0$). Но эти решения формально могут быть получены из найденного общего при $C=0$, то есть являются частными решениями данного уравнения.

Уравнение $x+1=0$ имеет решение $x=-1$, которое также является решением исходного дифференциального уравнения (если $x = \text{const}$, то $dx=0$). Это решение не может быть получено из общего.

Итак, окончательный ответ: $\cos y = C(x+1)^3$; $x=-1$.

Пример 2. Найти частное решение уравнения $y' \sin x = y \ln y$,

$$\text{удовлетворяющее начальному условию } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$$

$$\text{Имеем: } \sin x dy = y \ln y. \text{ Разделяем переменные: } \frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Заметим, что, хотя при разделении переменных могли быть потеряны какие-то решения дифференциального уравнения, нужного нам решения среди них нет, т.к. $e \ln e \neq 0$ и $\sin \frac{\pi}{2} \neq 0$.

Интегрируя полученное уравнение с разделенными переменными, находим общее решение:

$$\ln|\ln y| = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C_1, \text{ или, взяв экспоненту, } \ln y = C \cdot tg \frac{x}{2}, \text{ или } y = e^{C \cdot tg \frac{x}{2}}.$$

$$\text{Положим теперь } x = \frac{\pi}{2}, y = e, \text{ тогда } e = e^{C \cdot tg \frac{\pi}{4}}, \text{ откуда } C=1.$$

$$\text{Таким образом, искомое решение задачи Коши: } y = e^{tg \frac{x}{2}}.$$

Замечание. Уравнение вида $y' = f(ax + by + c)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи замены искомой функции $z = ax + by + c$.

Пример 3. $y' = (4x - y + 3)^2$

Умножив обе части уравнения на dx , получим уравнение $dy = (4x - y + 3)^2 dx$

Положим $z = 4x - y + 3$ или $y = 4x - z + 3$, откуда $dy = 4dx - dz$. Тогда уравнение принимает вид $4dx - dz = z^2 dx$. Разделяем переменные:

$$(4 - z^2)dx = dz \quad | : (4 - z^2);$$

$$\frac{dz}{4 - z^2} = dx.$$

Интегрируя, получаем:

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+z}{2-z} \right| = x + C_1, \text{ или } \frac{2+z}{2-z} = Ce^{x^4}.$$

Множитель $(4-z^2)$ обращается в ноль при $z = \pm 2$.

$z = -2$ является решением исходного уравнения, оно может быть получено из общего решения при $C = 0$.

$z = 2$ является решением исходного уравнения, оно не может быть получено из общего решения.

Возвращая старую функцию, получаем общее решение исходного уравнения:

$$\frac{4x - y + 5}{y - 4x - 1} e^{-x^4} = C, \text{ а также «потерянное» решение } y = 1 + 4x.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти общее и частное (при наличии начальных условий) решение дифференциального уравнения

1. $y' = x$.
2. $y' \sqrt{x} = y^2$.
3. $(x + 2y)y' = 1, y(0) = -1$.
4. $y' - y = 2x - 3$.

Тема 2. Однородные уравнения и приводимые к ним

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3)$$

называется *однородным* уравнением.

Однородное уравнение решается при помощи замены функции $t = \frac{y}{x}$ или $y = tx$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, тогда $dy = tdx + xdt$. Уравнение $dy = f\left(\frac{y}{x}\right)dx$ после замены принимает вид $tdx + xdt = f(t)dx$ или $xdt = (f(t) - t)dx$.

Пример: $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$

Сделаем замену $y = tx$, тогда $dy = tdx + xdt$. Уравнение примет вид

$$tdx + xdt = t \ln t dx, \text{ или } xdt = (t \ln t - t)dx.$$

Разделяем переменные: $\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}$.

Интегрируя, получаем общее решение $\ln|\ln t - 1| = \ln|x| + C_1$ или $\ln t - 1 = Cx$, откуда $t = e^{Cx+1}$.

Поскольку линии $x=0$ и $t=0$ не входят в область существования уравнения, следует проверить только, не было ли при разделении переменных потеряно решение $t=e$, на котором обращается в ноль выражение $\ln t - 1$. При подстановке в уравнение и в общее решение убеждаемся что $t=e$ является частным решением уравнения, получающемся из общего при $C=0$.

Таким образом, получили решение в виде $t = e^{Cx+1}$. Подставляя выражение для t , получаем общее решение исходного уравнения: $y = xe^{Cx+1}$.

Замечание. Уравнение вида $\varphi(x, y)y' + \psi(x, y) = 0$ или $\varphi(x, y)dy + \psi(x, y)dx = 0$ является однородным, если функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ являются *однородными функциями* одной и той же степени n , то есть $\varphi(tx, ty) = t^n \varphi(x, y)$, $\psi(tx, ty) = t^n \psi(x, y)$. Для того, чтобы привести это уравнение к виду (3), следует разделить обе части уравнения на x^n .

Пример. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

Функции x и $\sqrt{x^2 - y^2} + y$ являются однородными степени 1. Умножим исходное уравнение на dx и разделим на x (заметим при этом, что $x=0$ не является решением исходного уравнения):

$$dy = \left(\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} \right) dx \text{ - однородное уравнение.}$$

Сделав замену $y = tx$, получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\begin{aligned} tdx + xdt &= (\sqrt{1-t^2} + t)dx; \\ xdt &= \sqrt{1-t^2}dx \quad \Big| : x\sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

$$\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем общее решение

$$\arcsin t = \ln|x| + C_1 \quad \text{или} \quad \arcsin t = \ln Cx \quad (\text{где } C = \pm e^{C_1}), \text{ откуда } t = \sin \ln Cx.$$

При разделении переменных мы делили обе части уравнения на $\sqrt{1-t^2}$, считая, что это выражение не равно 0. Непосредственной подстановкой в уравнение и в общее решение убеждаемся, что функции $t=\pm 1$ являются особыми решениями уравнения.

Возвращая старую функцию $y=tx$, получаем окончательно:
общее решение исходного уравнения $y = x \sin \ln Cx$ и особые решения $y=\pm x$.

Замечание. Уравнения вида $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ преобразуются в однородные путем замены

переменных $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ (при этом $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$), где α и β подбираются таким

образом, чтобы после замены уравнение приняло вид $v' = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$, то есть

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \quad a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0.$$

Пример. Найти общий интеграл уравнения $y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + y - 1}$.

Положим $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, получаем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{u + 2v + (\alpha + 2\beta + 1)}{2u + v + (2\alpha + \beta - 1)}.$$

Подберем α и β так, чтобы $\begin{cases} \alpha + 2\beta + 1 = 0, \\ 2\alpha + \beta - 1 = 0. \end{cases}$ Находим: $\alpha = 1$, $\beta = -1$.

Таким образом, получаем однородное уравнение $\frac{dv}{du} = \frac{u + 2v}{2u + v}$.

Для его решения положим $v = tu$, $dv = tdu + udt$:

$$\frac{tdu + udt}{du} = \frac{1 + 2t}{2 + t}; \quad udt = \frac{1 - t^2}{2 + t} du; \quad \frac{2 + t}{1 - t^2} dt = \frac{du}{u};$$

интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$\ln \left| \frac{1 + t}{(1 - t)^3} \right| = \ln Cu^2, \text{ или } 1 + t = C(1 - t)^3 u^2.$$

Возвращаем $t = \frac{v}{u}$: $1 + \frac{v}{u} = C(1 - \frac{v}{u})^3 u^2$, откуда $u + v = C(u - v)^3$.

Заменяем $u = x - 1$, $v = y + 1$, получаем общий интеграл исходного уравнения:

$$x + y = C(x - y - 2)^3.$$

Тема 3. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (4)$$

называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Особенность этого уравнения в том, что оно линейно относительно неизвестной функции и ее производной, т.е. y и y' входят в это уравнение в первой степени (и не перемножаются между собой).

■ При $b(x) = 0$ уравнение (4) принимает вид

$$y' = a(x)y$$

(5)

и называется *линейным однородным уравнением первого порядка*.

Однородное линейное уравнение (5) является также уравнением с разделяющимися переменными и может быть решено следующим образом:

$$y' = a(x)y \quad | \cdot dx, : y;$$

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx;$$

$$\ln|y| = \int a(x)dx = A(x) + C_1;$$

$$y = Ce^{A(x)} \quad (6)$$

Для решения уравнения (4) применяют *метод вариации произвольной постоянной*. При этом решение уравнения (4) ищут в виде (6), считая, что $C=C(x)$ – некоторая функция. Подставляем это выражение в (4):

так как $y' = C'(x)e^{A(x)} + C(x)e^{A(x)}A'(x)$, причем $A'(x) = a(x)$, то получаем

$$C'(x)e^{A(x)} + C(x)e^{A(x)}a(x) = a(x)Ce^{A(x)} + b(x), \text{ или}$$

$$C'(x) = b(x)e^{-A(x)},$$

откуда находим $C(x)$:

$$C'(x) = \int b(x)e^{-A(x)}dx = B(x) + C, \quad C = \text{const}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (3) имеет вид

$$y = (B(x) + C)e^{A(x)}.$$

Пример 1. $y' = -\frac{y}{x} + x^2$

Имеем линейное уравнение. Решим соответствующее линейное однородное уравнение:

$$y' = -\frac{y}{x}; \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}; \quad \ln|y| = -\ln|x| + C_1; \quad y = \frac{C}{x}.$$

Воспользуемся методом вариации произвольной постоянной: будем искать решение исходного уравнения в виде $y = \frac{C(x)}{x}$. Подставим это выражение для y в уравнение и найдем неизвестную

функцию $C(x)$:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} = -\frac{C(x)}{x^2} + x^2;$$

$$C'(x) = x^3; \quad C(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C \quad (C = \text{const}).$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид: $y = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$.

Пример 2. $y' = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}$

Данное уравнение не является линейным относительно неизвестной функции $y(x)$. Однако мы

можем рассматривать x как функцию аргумента y , при этом $x' = \frac{1}{y'}$ и уравнение принимает вид

$$x' = x \cos y + \sin 2y,$$

то есть является линейным относительно неизвестной функции $x(y)$. Решим соответствующее линейное однородное уравнение:

$$x' = x \cos y; \quad \frac{dx}{x} = \cos y dy; \quad \int \frac{dx}{x} = \int \cos y dy; \quad \ln|x| = \sin y + C_1; \quad x = Ce^{\sin y}.$$

Воспользуемся методом вариации произвольной постоянной:

$$x = C(y)e^{\sin y};$$

$$C'(y)e^{\sin y} + C(y)e^{\sin y} \cos y = C(y)e^{\sin y} \cos y + \sin 2y;$$

$$C'(y) = \sin 2ye^{-\sin y};$$

$$C(y) = \int \sin 2ye^{-\sin y} dy = \left\{ \begin{array}{l} t = -\sin y \\ dt = -\cos y dy \end{array} \right\} = -2 \int te^t dt = \left\{ \begin{array}{l} u = t \\ dv = e^t dt \quad v = e^t \end{array} \right\} =$$

$$= -2(te^t - \int e^t dt) = -2te^t + 2e^t + C = 2\sin ye^{-\sin y} + 2e^{-\sin y} + C \quad (C = \text{const}).$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$x = 2\sin y + 2 + Ce^{\sin y}.$$

▪ Дифференциальное уравнение вида

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha \quad (\alpha \neq 0; 1) \quad (7)$$

называется *уравнением Бернулли*.

Для решения этого уравнения следует разделить его на y^α и сделать замену $z = y^{1-\alpha}$.

При этом $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, так что уравнение (7) принимает вид:

$$\frac{1}{1-\alpha}z' = a(x)z + b(x).$$

Последнее уравнение является линейным и решается методом вариации произвольной постоянной.

Пример 3. $y' = \frac{y}{x} + y^3 \sin x$

Имеем уравнение Бернулли, $\alpha=3$. Разделим его на y^3 :

$$y^{-3}y' = \frac{1}{x}y^{-2} + \sin x.$$

Сделаем замену: $z = y^{-2}$, $z' = -2y^{-3}y'$. Уравнение принимает вид:

$$-\frac{1}{2}z' = \frac{z}{x} + \sin x, \text{ или } z' = -2\frac{z}{x} - 2\sin x$$

Получили линейное уравнение относительно функции $z(x)$. Решим его:

$$z' = -2\frac{z}{x}; \quad \frac{dz}{z} = -2\frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dz}{z} = -2 \int \frac{dx}{x}; \quad \ln|z| = -2\ln|x| + C_1; \quad z = \frac{C}{x^2};$$

$$z = C(x)x^{-2};$$

$$C'(x)x^{-2} - 2x^{-3}C(x) = -2\frac{C(x)}{x^3} - 2\sin x; \quad C'(x)x^{-2} = -2\sin x;$$

$$C'(x) = -2x^2 \sin x;$$

$$C(x) = -2 \int x^2 \sin x dx = -2(-x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx) =$$

$$= 2x^2 \cos x - 4x \sin x + 4 \int \sin x dx = 2x^2 \cos x - 4x \sin x - 4 \cos x + C \quad (C = \text{const})$$

.

Таким образом, $z = \frac{2x^2 \cos x - 4x \sin x - 4 \cos x + C}{x^2}$, откуда

$$y = \frac{x}{\sqrt{2x^2 \cos x - 4x \sin x - 4 \cos x + C}}.$$

Тема 4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

- Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (8)$$

при условии, что правая часть уравнения представляет собой первый дифференциал некоторой функции $F(x, y)$:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy, \text{ то есть (в наших обозначениях)}$$

$$M(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}. \quad (9)$$

Теорема. Для того, чтобы уравнение (8), где функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные в некоторой области D , было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (10)$$

Доказательство этой теоремы приводить не будем; отметим только, что это условие следует из равенства повторных производных $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$, которое справедливо для любой дважды дифференцируемой функции $F(x, y)$.

Общее решение уравнения в полных дифференциалах (8) имеет вид

$$F(x, y) = C,$$

причем функцию $F(x, y)$ находят из условий (9).

Действительно, поскольку $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$, то при каждом фиксированном значении $y = \text{const}$

функция $F(x, y)$ является первообразной функции $M(x, y)$, то есть

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx = M_1(x, y) + \varphi(y).$$

Здесь $M_1(x, y)$ – некоторая первообразная функции $M(x, y)$, а $\varphi(y)$ играет роль произвольной постоянной в неопределенном интеграле (так как при дифференцировании по x любая функция, зависящая только от y , обращается в 0).

Далее, используя условие $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$, то есть $\frac{\partial M_1}{\partial y} + \varphi'(y) = N(x, y)$, получают

простейшее уравнение первого порядка относительно $\varphi(y)$ и, выбирая какое-либо частное решение

последнего, находят окончательно искомую функцию $F(x, y)$.

Пример. $(\sin xy + xy \cos xy)dx + x^2 \cos xy dy = 0$

Обозначим $M(x, y) = \sin xy + xy \cos xy$, $N(x, y) = x^2 \cos xy$.

Проверим, выполняется ли условие (10):

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x \cos xy + x \cos xy - x^2 y \sin xy = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy.$$

Как видим, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Будем искать решение этого уравнения в виде $F(x, y) = C$.

Поскольку $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$, имеем:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int M(x, y) dx = \int (\sin xy + xy \cos xy) dx = -\frac{1}{y} \cos xy + x \sin xy - \int \sin xy dx = \\ &= -\frac{1}{y} \cos xy + x \sin xy + \frac{1}{y} \cos xy + \varphi(y) = x \sin xy + \varphi(y). \end{aligned}$$

Продифференцируем полученный результат по y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 \cos xy + \varphi'(y), \text{ следовательно, поскольку } \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y), \text{ имеем:}$$

$$x^2 \cos xy + \varphi'(y) = x^2 \cos xy;$$

$$\varphi'(y) = 0.$$

Выберем частное решение последнего уравнения $\varphi(y) = 0$.

Таким образом, $F(x, y) = x \sin xy$,

и общее решение исходного уравнения: $x \sin xy = C$.

Если уравнение (8) не является уравнением в полных дифференциалах, то иногда можно подобрать функцию $\mu(x, y)$, после умножения на которую левая часть уравнения (1) превращается в полный дифференциал. Такая функция $\mu(x, y)$ называется *интегрирующим множителем*. Отметим частные случаи, когда легко найти интегрирующий множитель:

$$(1) \text{ Если } \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = K(y) \text{ (т.е. не зависит от } x) \text{ то } \mu(y) = e^{\int K(y) dy}.$$

$$(2) \text{ Если } \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N} = K(x) \text{ (т.е. не зависит от } y) \text{ то } \mu(x) = e^{-\int K(x) dx}.$$

Заметим, что в обоих случаях имеет смысл опустить произвольную постоянную в неопределенном

интеграле, т.к. постоянный множитель e^C не влияет на свойство уравнения быть уравнением в полных дифференциалах.

Пример. $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$

Здесь $M = x + y^2$, $N = -2xy$. Имеем: $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N} = \frac{-2y - 2y}{-2xy} = \frac{2}{x}$.

Следовательно, $\mu = \mu(x) = e^{-\int \frac{2dx}{x}} = e^{-2\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$.

Умножая обе части исходного уравнения на найденный интегрирующий множитель, получаем:

$(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2})dx - 2\frac{y}{x}dy = 0$ – уравнение в полных дифференциалах.

Решение полученного (а также исходного) уравнения имеет вид $F(x, y) = C_1$, где

$$F(x, y) = \int -2\frac{y}{x}dy = -\frac{y^2}{x} + \varphi(x).$$

Далее, $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y^2}{x^2} + \varphi'(x)$, следовательно, $\frac{y^2}{x^2} + \varphi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}$, откуда получаем

$$\varphi(x) = \ln|x|.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения:

$$-\frac{y^2}{x} + \ln|x| = C_1, \text{ или } x = Ce^{\frac{y^2}{x}}.$$

РАЗДЕЛ 2. Однородные дифференциальные уравнения и приводящиеся к ним.

Тема 5. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

или, если оно разрешено относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

Решением ОДУ (2) называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Как и для уравнения первого порядка, *задачей Коши* для уравнения (2) называется задача нахождения решения уравнения (2), удовлетворяющего *начальным условиям*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (3)$$

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши):

Если в уравнении (2) функция $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ в некоторой области D изменения переменных $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, то для всякой точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$ существует единственное решение задачи (2), (3).

Общим решением уравнения (2) называется функция $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$, где $C_1, \dots, C_n$ – произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям:

- 1) $\varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ является решением ОДУ (2) при любом наборе постоянных $C_1, \dots, C_n$,
- 2) любое решение задачи Коши (2), (3) имеет вид $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ при некоторых значениях постоянных $C_1, \dots, C_n$.

Уравнение вида $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$, которое определяет общее решение дифференциального уравнения (2) в неявном виде, называют *общим интегралом* этого уравнения.

Решение уравнения (2), получающееся из общего при некотором наборе постоянных $C_1, \dots, C_n$, называется *частным решением*. График частного решения называется *интегральной кривой* данного дифференциального уравнения.

Одним из методов интегрирования ОДУ высших порядков, является метод понижения порядка уравнения. Рассмотрим некоторые виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

I. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$

Общее решение таких уравнений получается последовательным n -кратным интегрированием.

Пример. $y''' = \sin x + \cos x$

Интегрируя последовательно данное уравнение, имеем:

$$y'' = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C_1;$$

$$y' = \int y'' dx = \int (-\cos x + \sin x + C_1) dx = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int y' dx = \int (-\sin x - \cos x + C_1 x + C_2) dx = \cos x - \sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Поскольку значение постоянной C_1 никак не связано со значениями остальных слагаемых в полученном общем решении, обозначим $\tilde{C}_1 = \frac{C_1}{2}$.

Таким образом, общее решение: $y = \cos x - \sin x + \tilde{C}_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

II. Уравнение вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$,

не содержащее искомой функции и первые $k-1$ ее производных.

Порядок такого уравнения можно понизить заменой неизвестной функции $y^{(k)} = p(x)$. Тогда уравнение принимает вид $F(x, p, p', \dots, y^{(n-k)}) = 0$.

Находим, если возможно, решение последнего уравнения в виде $p = f(x, C_1, \dots, C_{n-k})$, а затем последовательным интегрированием уравнения $y^{(k)} = f(x, C_1, \dots, C_{n-k})$ находим общее решение исходного уравнения.

Пример. $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$

Данное уравнение не содержит искомой функции y и ее производной. Полагая $y'' = p(x)$, получаем уравнение 1 порядка:

$$p' = \sqrt{1 + p^2}.$$

Решаем полученное уравнение:

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = dx; \quad \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int dx; \quad \ln \left| p + \sqrt{1 + p^2} \right| = x + C_1; \quad p + \sqrt{1 + p^2} = e^{x+C_1}.$$

Выражаем в явном виде p :

$$\sqrt{1 + p^2} = e^{x+C_1} - p; \quad 1 + p^2 = e^{2(x+C_1)} + p^2 - 2pe^{x+C_1};$$

$$p = \frac{e^{2(x+C_1)} - 1}{2e^{x+C_1}} = \frac{e^{(x+C_1)} - e^{-(x+C_1)}}{2}.$$

Возвращая старую функцию y , имеем:

$$y'' = \frac{e^{(x+C_1)} - e^{-(x+C_1)}}{2};$$

$$y' = \int y'' dx = \frac{e^{(x+C_1)} + e^{-(x+C_1)}}{2} + C_2;$$

$$y = \int y' dx = \frac{e^{(x+C_1)} - e^{-(x+C_1)}}{2} + C_2 x + C_3 - \text{общее решение исходного уравнения.}$$

III. Уравнение вида $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$,

не содержащее независимого переменного.

Порядок уравнения можно понизить на единицу при помощи подстановки $y' = p(y)$. Выразим все производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$ через производные от новой неизвестной функции $p(y)$ по y :

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p'p,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(p'p) = \frac{d}{dy}(p'p) \frac{dy}{dx} = (p''p + p'^2)p = p''p^2 + p'^2p \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем уравнение $(n-1)$ -го порядка относительно неизвестной функции $p(y)$. Если возможно, находим его общее решение

$p = f(y, C_1, \dots, C_{n-1})$. Далее, решая уравнение с разделяющимися переменными $y' = f(y, C_1, \dots, C_{n-1})$ находим общее решение исходного уравнения.

Пример. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$

Уравнение не содержит независимой переменной x .

Положим $y' = p$, $y'' = p'p$:

$$p'p + p^2 = 2e^{-y}, \text{ или}$$

$$p' + p = 2e^{-y} p^{-1}. \quad (*)$$

Получили уравнение Бернулли. Оно сводится к линейному подстановкой

$$z = p^2, \quad p = z^{\frac{1}{2}}, \quad p' = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} z':$$

$$\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} z' + z^{\frac{1}{2}} = 2e^{-y} z^{\frac{1}{2}};$$

$$z' + 2z = 4e^{-y}. \quad (**)$$

Решаем соответствующее однородное линейное уравнение:

$$z' + 2z = 0; \quad \frac{dz}{z} = -2dy; \quad z = Ce^{-2y}.$$

Применяем метод вариации произвольной постоянной:

$$z = C(y)e^{-2y}; \quad C'e^{-2y} - 2Ce^{-2y} + 2Ce^{-2y} = 4e^{-y}; \quad C' = 4e^y; \quad C = 4e^y + C_1;$$

таким образом, общее решение уравнения (**) имеет вид $z = 4e^{-y} + C_1e^{-2y}$, тогда общее

$$\text{решение уравнения (*): } p = \pm \sqrt{4e^{-y} + C_1e^{-2y}}.$$

Заменяя $p = y'$, получаем уравнение с разделяющимися переменными относительно $y(x)$:

$$y' = \pm \sqrt{4e^{-y} + C_1e^{-2y}}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\pm \int \frac{dy}{\sqrt{4e^{-y} + C_1e^{-2y}}} = \int dx; \quad \pm \int \frac{e^y dy}{\sqrt{4e^y + C_1}} = \int dx;$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{4e^y + C_1} = x + C_2,$$

откуда получаем общее решение исходного уравнения в виде

$$e^y = (x + C_2)^2 + \tilde{C}_1 \quad (\text{здесь } \tilde{C}_1 = -\frac{C_1}{4}).$$

Замечание. При решении задачи Коши для уравнений высших порядков целесообразно определять значения произвольных постоянных в процессе решения, а не после нахождения общего решения уравнения. Это ускоряет решение задачи и, кроме того, интегрирование при произвольных постоянных часто затруднительно или даже невозможно.

Пример. $y'' = 2y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

Уравнение не содержит независимой переменной.

Полагаем $y' = p(y)$, $y'' = p'p$:

$$p'p = 2y^3; \quad p dp = 2y^3 dy; \quad p^2 = y^4 + C_1; \quad p = \pm \sqrt{y^4 + C_1}.$$

Таким образом, $y' = \pm \sqrt{y^4 + C_1}$. Это уравнение с разделяющимися переменными, однако

интеграл $\int \frac{dy}{\sqrt{y^4 + C_1}}$ в общем случае не берется.

Используем начальные условия:

$$y'(0) = \sqrt{y^4(0) + C_1}, \text{ то есть } 1 = \pm \sqrt{1 + C_1}, \text{ откуда } C_1 = 0, \text{ а знак следует выбрать «+»}.$$

Следовательно, для данной задачи $y' = y^2$, откуда получаем

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx; \quad -\frac{1}{y} = x + C_2; \quad y = -\frac{1}{x + C_2}. \text{ Используя начальное условие, находим } C_2 = -1,$$

следовательно, искомое решение задачи Коши: $y = \frac{1}{1-x}$.

Тема 6. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

▪ *Линейным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами* называется дифференциальное уравнение вида

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad (1)$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ - постоянные числа ($a_n \neq 0$).

▪ Если $f(x) = 0$, уравнение (1) принимает вид

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (2)$$

и называется *линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами*.

Утверждение. Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ являются частными решениями уравнения (2), то решением этого уравнения является также функция

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ - произвольные постоянные.

Докажем это утверждение для уравнения второго порядка $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ и двух его частных решений $y_1(x), y_2(x)$.

Действительно,

$$a_2 (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + a_1 (C_1 y_1 + C_2 y_2)' + a_0 (C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$

$$= a_2(C_1 y_1'' + C_2 y_2'') + a_1(C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_0(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$

$$= C_1(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + C_2(a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0,$$

то есть функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ является решением уравнения.

Доказательство утверждения в общем случае полностью аналогично. □

▪ Функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются *линейно независимыми*, на $(a;b)$ если равенство $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$ выполняется на этом промежутке лишь в том случае, когда числа $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. В противном случае (если существуют такие коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не равные 0 одновременно) функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называется *линейно зависимыми*.

▪ Множество $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно независимых частных решений уравнения (2) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Теорема. Если частные решения уравнения (2) $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений, то общее решение уравнения (2) имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные

Доказательство этой теоремы не приводим.

Интегрирование линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (3)$$

Для решения этого уравнения в общем виде нам достаточно найти два его линейно независимых частных решения.

Будем искать частные решения уравнения (3) в виде

$$y = e^{\lambda x},$$

где λ – некоторое число.

Подставляя эту функцию в уравнение, получаем:

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0, \text{ т.е.}$$

$$e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0.$$

Поскольку $e^{\lambda x} \neq 0$, получаем, что λ – корень уравнения

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \quad (4)$$

▪ Уравнение (4) называется *характеристическим уравнением* уравнения (3).

При решении уравнения (4) возможны следующие случаи:

Случай 1. Корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (4) действительные и различные (

$$D = b^2 - 4ac > 0)$$

В этом случае частными решениями уравнения (3) являются функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$.

Нетрудно показать, что они линейно независимы, следовательно, образуют фундаментальную систему решений. Таким образом, общее решение уравнения (3) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Случай 2. Корни характеристического уравнения (4) действительные и равные: $\lambda_1 = \lambda_2$ (

$$D = b^2 - 4ac = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}. \text{ Говорят, что уравнение (4)}$$

имеет один действительный корень λ_1 кратности 2.

В этом случае имеем одно частное решение $y_1 = e^{\lambda_1 x}$. Покажем, что функция $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ также является частным решением уравнения (3).

Действительно, подставим эту функцию в уравнение:

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(xe^{\lambda_1 x})'' + b(xe^{\lambda_1 x})' + c(xe^{\lambda_1 x}) = \\ &= a(\lambda_1^2 xe^{\lambda_1 x} + 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x}) + b(\lambda_1 xe^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_1 x}) + c(xe^{\lambda_1 x}) = \\ &= e^{\lambda_1 x}(a\lambda_1^2 x + 2a\lambda_1 + b\lambda_1 x + b + cx) = e^{\lambda_1 x}(x(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) + 2a\lambda_1 + b) \end{aligned}$$

$$\text{Но } a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c = 0 \text{ т.к. } \lambda_1 - \text{корень уравнения (4)} \text{ и } 2a\lambda_1 + b = 0 \text{ т.к. } \lambda_1 = -\frac{b}{2a}.$$

Следовательно, $ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$, что и требовалось доказать.

Легко убедиться, что функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ линейно независимы, то есть образуют фундаментальную систему решений. Таким образом, общее решение уравнения (3) в этом случае имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}.$$

Случай 3. Уравнение (4) не имеет действительных корней ($D = b^2 - 4ac < 0$)

В этом случае корни уравнения (4), которые находятся по формуле корней квадратного уравнения, комплексные (точнее даже, комплексно сопряженные):

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{|D|}}{2a} = \alpha \pm i\beta,$$

где $i = \sqrt{-1}$ – так называемая мнимая единица.

Тогда частными решениями уравнения (3) являются функции $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$, $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$.

Используя формулу Эйлера для комплексных чисел: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, имеем

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Отсюда найдем два действительных решения уравнения (3):

$$y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Эти функции линейно независимы, следовательно, образуют фундаментальную систему решений, и общее решение уравнения (3) в этом случае имеет вид:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Замечание. Для комплексного числа $\lambda = \alpha \pm i\beta$ числа α и β называются соответственно действительной и мнимой частями: $\alpha = \operatorname{Re} \lambda$, $\beta = \operatorname{Im} \lambda$. Как видим, действительные частные решения уравнения в случае 3 $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ есть не что иное, как действительная

и мнимая части комплексного частного решения $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \sin \beta x$.

Пример. $y'' + 3y' - 4y = 0$

Имеем линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0;$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$ – два различных действительных корня, следовательно,

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-4x}$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}.$$

Интегрирование линейных однородных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами

Полученные результаты для решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами обобщаются на случай уравнения n-го порядка следующим образом.

Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами (2):

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

▪ *Характеристическим уравнением* для уравнения (2) называется алгебраическое уравнение n-го порядка вида:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) имеет ровно n корней (считая кратные и комплексно сопряженные корни). А именно, левая часть уравнения (5) раскладывается на множители первого и второго порядка, так что уравнение принимает вид:

$$a_n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m} \cdot (\lambda^2 + p_1 \lambda + q_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (\lambda^2 + p_l \lambda + q_l)^{s_l} = 0$$

(причем $p_j^2 - 4q_j < 0$ ($j = 1, \dots, l$), и $k_1 + \dots + k_m + 2s_1 + \dots + 2s_l = n$).

Здесь $\lambda = \lambda_j$ – действительные корни уравнения (3) кратности k_j

($j = 1, \dots, m$),

$$\lambda = \frac{-p_j}{2} \pm \frac{\sqrt{4q_j - p_j^2}}{2} i \quad (\text{где } i = \sqrt{-1} \text{ - мнимая единица}) \text{ - пары комплексно}$$

сопряженных корней кратности s_j ($j = 1, \dots, l$).

Каждому корню характеристического уравнения (5) соответствует элемент фундаментальной системы решений по следующему правилу:

Корень уравнения (3)	Кратность корня	Соответствующие элементы фундаментальной системы решений
λ_1 – действительный корень	1	$y_1 = e^{\lambda_1 x}$
	2	$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = x e^{\lambda_1 x}$
	3	$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = x e^{\lambda_1 x}, \quad y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x}$
	...	...

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – два комплексно сопряженных корня	1	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$
	2	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x,$ $y_3 = x e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_4 = x e^{\alpha x} \sin \beta x$
	...	

Общее решение уравнения (2) имеет вид $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$.

Пример 1. $y''' + 2y'' + y' = 0$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0;$$

$$\lambda(\lambda + 1)^2 = 0$$

$\lambda_1 = 0$ – действительный корень кратности 1, следовательно,

$$y_1(x) = e^{0x} = 1$$

$\lambda_3 = -1$ – действительный корень кратности 2, следовательно,

$$y_2(x) = e^{-x}, \quad y_3(x) = x e^{-x}.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}.$$

Пример 2. $y^{IV} + 4y''' + 13y'' = 0$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 13\lambda^2 = 0;$$

$$\lambda^2(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = 0$$

$\lambda_1 = 0$ – действительный корень кратности 2, следовательно,

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x$$

$\lambda_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm 3\sqrt{-1} = -2 \pm 3i$ - два комплексно сопряженных корня кратности 1, следовательно,

$$y_3 = e^{-2x} \cos 3x, \quad y_4 = e^{-2x} \sin 3x.$$

Таким образом, общее решение:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x} \cos 3x + C_4 e^{-2x} \sin 3x.$$

Пример 3. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0;$$

$$(\lambda^2 + 4)^2 = 0;$$

$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-4} = \pm 2i$ - два комплексно сопряженных корня кратности 2, следовательно,

$$y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x, \quad y_3 = x \cos 2x, \quad y_4 = x \sin 2x.$$

Таким образом, общее решение:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 x \cos 2x + C_4 x \sin 2x.$$

Тема 7. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Теорема. (о структуре общего решения):

Общим решением *у* линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (1)$$

является сумма его произвольного частного решения y^* и общего решения $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения: $y = \hat{y} + y^*$.

Теорема. (о наложении решений):

Если правая часть уравнения (1) представляет собой сумму двух функций:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \text{ а } y_1^* \text{ и } y_2^* - \text{частные решения уравнений}$$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f_1(x) \text{ и}$$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f_2(x),$$

то $y^* = y_1^* + y_2^*$ - частное решение уравнения (1).

Метод вариации произвольных постоянных

Частное решение уравнения (1) можно найти при помощи метода вариации произвольных постоянных.

Пусть найдено общее решение соответствующего однородного уравнения (2):

$$\hat{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

Тогда функция

$$y^* = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \dots + C_n(x) y_n,$$

где функции $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n' = 0, \\ \dots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x), \end{cases}$$

будет решением уравнения (1).

Пример. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + y = 0.$$

$$\lambda^2 + 1 = 0;$$

$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-1} = \pm i$ - два комплексно сопряженных корня кратности 1, следовательно, общее

решение: $\hat{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Тогда частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y^* = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

где

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Разрешая систему относительно C_1' и C_2' , получаем

$$C_1' = -\operatorname{tg} x, \quad C_2' = 1,$$

откуда интегрированием находим

$$C_1 = \ln |\cos x|, \quad C_2 = x.$$

Согласно теореме о структуре решения неоднородного линейного уравнения, получаем общее решение данного уравнения:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x.$$

Подбор частного решения линейного неоднородного уравнения с правой частью специального вида

Для правых частей специального вида частное решение можно найти методом подбора, что оказывается проще, чем использовать метод вариации произвольных постоянных. Общий вид правой части $f(x)$, для которой возможно применить метод подбора, следующий:

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x), \quad (6)$$

где $P_m(x)$ и $Q_l(x)$ - многочлены степени m и l соответственно. В этом случае частное решение y^* ищется в виде

$$y^* = x^s e^{\alpha x} (\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x), \text{ где}$$

$$k = \max \{m, l\},$$

$\tilde{P}_k(x)$ и $\tilde{Q}_k(x)$ - многочлены порядка k с неопределенными коэффициентами,

s - кратность корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения (если $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, то $s=0$).

Коэффициенты многочленов $\tilde{P}_k(x)$ и $\tilde{Q}_k(x)$ подбираются таким образом, чтобы при подстановке функции y^* вместе с ее производными в уравнение (1) получалось верное тождество.

Приведем для удобства таблицу видов частных решений для различных видов правых частей (в зависимости от значений α, β):

α, β	Правая часть $f(x)$ дифф. уравнения	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения y^*
I	$P_m(x)$	1. Число 0 не является корнем характ. ур-я	$\tilde{P}_m(x)$

		2. Число 0 – корень характ. ур-я кратности s	$x^s \tilde{P}_m(x)$
II	$P_m(x)e^{\alpha x}$	1. Число α не является корнем характ. ур-я	$\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
		2. Число α – корень характ. ур-я кратности s	$x^s \tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
III	$P_m(x)\cos \beta x + Q_l(x)\sin \beta x$	1. Числа $\pm i\beta$ не являются корнями характ. ур-я	$\tilde{P}_k(x)\cos \beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin \beta x$
		2. Числа $\pm i\beta$ – корни характ. ур-я кратности s	$x^s(\tilde{P}_k(x)\cos \beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin \beta x)$
IV	$e^{\alpha x}(P_m(x)\cos \beta x + Q_l(x)\sin \beta x)$	1. Числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характ. ур-я	$e^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos \beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin \beta x)$
		2. Числа $\alpha \pm i\beta$ – корни характ. ур-я кратности s	$x^s e^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos \beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin \beta x)$

Если правая часть (1) представляет собой сумму нескольких функций вида (6):

$f(x) = \sum_{j=1}^K f_j(x)$, то, согласно теореме о наложении решений, частное решение этого уравнения

является суммой $y^* = \sum_{j=1}^K y_j^*$, где y_j^* - частное решение уравнения с правой частью $f_j(x)$.

Пример 1. $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 1$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет однократные корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $\hat{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Правая часть данного уравнения $f(x) = x^2 - 1$ представляет собой многочлен второго порядка (случай I). Так как число 0 не является корнем характеристического уравнения (случай I.1), то частное решение будем искать в виде

$$y^* = Ax^2 + Bx + C,$$

где A , B и C – неизвестные коэффициенты. Тогда

$$(y^*)' = 2Ax + B, \quad (y^*)'' = 2A.$$

Подставляя эти выражения в данное уравнение, получаем:

$$2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = x^2 - 1.$$

Приравниваем коэффициенты при соответствующих степенях x в левой и правой частях равенства:

$$x^2: 2A = 1,$$

$$x: -6A+2B=0,$$

$$x^0: 2A-3B+2C=-1.$$

Решая полученную систему линейных уравнений, находим: $A=\frac{1}{2}, \quad B=\frac{3}{2}, \quad C=\frac{5}{4}.$

$$\text{Таким образом, } y^* = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4},$$

и общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}.$$

Пример 2. $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_1=0$ кратности 2 и $\lambda_2=1$ кратности 1, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $\hat{y} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$.

Правая часть данного уравнения представляет собой многочлен второго порядка, число 0 является корнем характеристического уравнения кратности 2 (случай I.2), поэтому частное решение будем искать в виде

$$y^* = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2,$$

$$(y^*)' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx,$$

$$(y^*)'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$$

$$(y^*)''' = 24Ax + 6B.$$

Подставляя эти выражения в данное уравнение, имеем:

$$-12Ax^2 + (24A - 6B)x + (6B - 2C) = 12x^2 + 6x,$$

откуда

$$\begin{cases} -12A = 12, \\ 24A - 6B = 6, \\ 6B - 2C = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет решение: $A=-1, B=-5, C=-15$, следовательно,

$$y^* = -x^4 - 5x^3 - 15x^2,$$

и общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2.$$

Пример 3. $y''' - y'' + y' - y = 4xe^x - \cos x + 16e^{2x} \sin x$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1=1$ и $\lambda_{2,3}=\pm i$ кратности 1, следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\hat{y} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Правая часть данного уравнения представляет собой сумму трех функций специального вида:

$f_1(x) = 4xe^x, \quad f_2(x) = -\cos x, \quad f_3(x) = 16e^{2x} \sin x.$ Найдем частные решения соответствующих уравнений.

1) Для уравнения $y''' - y'' + y' - y = 4xe^x$

имеем случай II.2, где $m=1$, $\alpha=1$, причем число 1 является корнем характеристического уравнения кратности 1. Следовательно, ищем частное решение в виде $y_1^* = xe^x(Ax + B) = (Ax^2 + Bx)e^x$. Тогда

$$(y_1^*)' = (Ax^2 + Bx + 2Ax + B)e^x,$$

$$(y_1^*)'' = (Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A)e^x,$$

$$(y_1^*)''' = (Ax^2 + Bx + 6Ax + 3B + 6A)e^x.$$

Подставляем в уравнение:

$$(4Ax + 4A + 2B)e^x = 4xe^x,$$

то есть $4A = 4$, $4A + 2B = 0$, откуда $A=1$, $B=-2$, следовательно,

$$y_1^* = (x^2 - 2x)e^x.$$

2) Для уравнения $y''' - y'' + y' - y = -\cos x$

имеем случай III.2, где $P_m(x) = 1$, $Q_l(x) = 0$, $m = l = 0$, $\beta = 1$, причем числа $\pm i$ являются корнями характеристического уравнения кратности 1. Следовательно, частное решение имеет вид

$$y_2^* = x(A\cos x + B\sin x) = Ax\cos x + Bx\sin x,$$

$$(y_2^*)' = A\cos x + B\sin x - Ax\sin x + Bx\cos x,$$

$$(y_2^*)'' = -2A\sin x + 2B\cos x - Ax\cos x - Bx\sin x,$$

$$(y_2^*)''' = -3A\cos x - 3B\sin x + Ax\sin x - Bx\cos x.$$

Подставляя в уравнение, получаем:

$$\cos x(-2A - 2B) + \sin x(-2B + 2A) = -\cos x,$$

то есть $-2A - 2B = -1$, $-2B + 2A = 0$, откуда $A = B = \frac{1}{4}$.

Следовательно, $y_2^* = \frac{1}{4}x(\cos x + \sin x)$.

3) Для уравнения $y''' - y'' + y' - y = 16e^{2x}\sin x$

имеем случай IV.1, где

$P_m(x) = 0$, $Q_l(x) = 1$, $m = l = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, причем числа $2 \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения.

Следовательно, частное решение имеет вид

$$y_3^* = e^{2x}(A\cos x + B\sin x),$$

$$(y_3^*)' = e^{2x}(2A\cos x + 2B\sin x - A\sin x + B\cos x),$$

$$(y_3^*)'' = e^{2x}(3A\cos x + 3B\sin x - 4A\sin x + 4B\cos x),$$

$$(y_3^*)''' = e^{2x}(2A\cos x + 2B\sin x - 11A\sin x + 11B\cos x).$$

Подставляя в уравнение, получаем:

$$e^{2x}(8B\cos x - 8A\sin x) = 16e^{2x}\sin x,$$

откуда $A = -2$, $B = 0$, следовательно, $y_3^* = -2e^{2x}\cos x$.

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x + (x^2 - 2x)e^x + \frac{1}{4}x(\cos x + \sin x) - 2e^{2x} \cos x$$

Тема 8. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

▪ *Системой* обыкновенных дифференциальных уравнений называется совокупность ОДУ, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные. Система ОДУ первого порядка, разрешенных относительно производной:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1; \dots; y_n), \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x; y_1; \dots; y_n), \end{cases} \quad (1)$$

называется *нормальной системой* ОДУ. При этом предполагается, что число уравнений равно числу искомых функций.

Решением системы (1) называется совокупность из n функций $y_1, \dots, y_n$, удовлетворяющих каждому из уравнений этой системы.

Начальные условия для системы (1) имеют вид:

$$y_1(x_0) = y_1^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0. \quad (2)$$

Задача Коши для системы (1) состоит в нахождении решения системы (1), удовлетворяющего начальным условиям (2).

Рассмотрим частный случай нормальной системы уравнений, а именно *систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n, \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

Для простоты ограничимся рассмотрением системы двух уравнений с двумя неизвестными функциями y и z :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z, \\ \frac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z. \end{cases} \quad (3)$$

Одним из методов интегрирования нормальных систем вообще и системы (3) в частности является *сведение системы к одному ОДУ высшего порядка*.

Для этого продифференцируем первое уравнение системы (3): $y'' = a_{11}y' + a_{12}z'$. Подставим второе уравнение системы в полученное равенство: $y'' = a_{11}y' + a_{12}(a_{21}y + a_{22}z)$, или

$$y'' - a_{11}y' - a_{12}a_{21}y = a_{12}a_{22}z.$$

Далее, выразив из первого уравнения системы z через y и y' :

$$z = \frac{y' - a_{11}y}{a_{12}}, \text{ подставим в полученное равенство:}$$

$$y'' - a_{11}y' - a_{12}a_{21}y = a_{12}a_{22} \frac{y' - a_{11}y}{a_{12}}, \text{ откуда получаем линейное однородное уравнение}$$

второго порядка с постоянными коэффициентами относительно функции y :

$$y'' - (a_{11} + a_{22})y' - (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})y = 0.$$

Решив это уравнение, подставим найденное общее решение в выражение для z ; таким образом, система будет решена.

Для систем линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами можно предложить еще один метод интегрирования, основанный на знании структуры общего решения линейных однородных ОДУ.

Будем искать частное решение системы (3) в виде

$$y = \alpha e^{\lambda x}, z = \beta e^{\lambda x},$$

где α, β и λ - постоянные числа.

Подставляя эти функции в систему (3) и сократив уравнения на множитель $e^{\lambda x}$, получим:

$$\begin{cases} \alpha\lambda = a_{11}\alpha + a_{12}\beta, \\ \beta\lambda = a_{21}\alpha + a_{22}\beta, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Получили систему двух линейных алгебраических уравнений относительно α, β . Для того, чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

■ Уравнение (5) называется *характеристическим уравнением* системы (3). Числа λ , удовлетворяющие этому уравнению, называются *собственными значениями* матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Раскрыв определитель в уравнении (5), получаем квадратное уравнение относительно λ . Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. Корни характеристического уравнения действительные и различные: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Для каждого корня напишем систему (4) и определим коэффициенты α_i, β_i . Поскольку определитель этой системы равен 0, то система имеет бесконечно много решений, которые можно найти, например, из первого уравнения (второе уравнение есть первое, умноженное на какое-то число, т.е. «лишнее»). Для определенности можно, например, считать $\alpha_i = \alpha_2 = 1$. Получим:

$$\text{Для корня } \lambda_1 \text{ частное решение системы (3): } y_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 x}, z = \beta_1 e^{\lambda_1 x},$$

$$\text{для корня } \lambda_2 \text{ частное решение системы (3): } y_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 x}, z = \beta_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Можно показать, что эти функции образуют фундаментальную систему решений системы (3), то есть общее ее решение имеет вид:

$$y = C_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \alpha_2 e^{\lambda_2 x}, \quad z = C_1 \beta_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \beta_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Случай 2. Корни характеристического уравнения комплексно сопряженные: $\lambda_{1,2} = a \pm ib$. Вид частного решения для корня λ_1 определяется так же, как в случае (1). Применяя формулы Эйлера, можно выделить действительные и мнимые части в найденном частном решении получив в результате два действительных линейно независимых решения, содержащих функции вида $e^{ax} \cos bx$, $e^{ax} \sin bx$. При этом комплексно сопряженный корень λ_2 не даст новых действительных частных решений.

Случай 3. Характеристическое уравнение имеет один действительный корень λ кратности 2. В этом случае решение системы ищется в виде

$$y = (A + Bx)e^{\lambda x}, \quad z = (C + Dx)e^{\lambda x}.$$

Постоянные A, B, C, D находят методом неопределенных коэффициентов. Выразив, например, C и D через A и B , полагают сначала $A=0, B=1$, затем $A=1, B=0$ и получают два линейно независимых частных решения системы (3).

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4y - 3z, \\ \frac{dz}{dx} = 2y - 3z. \end{cases}$$

Составим и решим характеристическое уравнение системы:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda^2 - \lambda + 6 = 0; \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3.$$

Получили два действительных корня. Для каждого из них решим систему (4):

$$\text{Для } \lambda_1 = -2 \text{ имеем } \begin{cases} 6\alpha - 3\beta = 0, \\ 2\alpha - \beta = 0. \end{cases} \quad \text{Положим, например, } \alpha=1, \beta=2.$$

$$\text{Для } \lambda_2 = 3 \text{ имеем } \begin{cases} \alpha - 3\beta = 0, \\ 2\alpha - 6\beta = 0. \end{cases} \quad \text{Положим } \alpha=3, \beta=1.$$

Таким образом, получили частные решения

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-2x} & y_2 &= 3e^{3x} \\ z_1 &= 2e^{-2x} & z_2 &= e^{3x} \end{aligned}$$

Общее решение данной системы:

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{-2x} + 3C_2 e^{3x}, \\ z &= 2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - 5z, \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 5z. \end{cases}$$

Составим и решим характеристическое уравнение системы:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0; \quad \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = 3 \pm 4i.$$

Получили два комплексно сопряженных корня. Найдем частное решение системы для корня

$\lambda_1 = 3 + 4i$: $y = \alpha e^{3+4i}$, $z = \beta e^{3+4i}$, где α и β удовлетворяют системе вида (4):

$$\begin{cases} (1-3-4i)\alpha - 5\beta = 0, \\ 4\alpha + (5-3-4i)\beta = 0. \end{cases}$$

Найдем из первого уравнения системы одно из ее решений:

$$\alpha = 5, \quad \beta = -2 - 4i.$$

Таким образом, частное решение, соответствующее корню λ_1 :

$$y = 5e^{3+4i} = 5e^{3x} \cos 4x + i \cdot 5e^{3x} \sin 4x,$$

$$\begin{aligned} z &= (-2-4i)e^{3+4i} = (-2-4i)(e^{3x} \cos 4x + ie^{3x} \sin 4x) = \\ &= -2e^{3x} \cos 4x + 4e^{3x} \sin 4x + i(-2e^{3x} \sin 4x - 4e^{3x} \cos 4x) \end{aligned}$$

(т.к. $i^2 = -1$).

Выделив действительные и мнимые части, получим два частных решения:

$$\begin{aligned} y_1 &= 5e^{3x} \cos 4x, & y_2 &= 5e^{3x} \sin 4x, \\ z_1 &= -2e^{3x} \cos 4x + 4e^{3x} \sin 4x & z_2 &= -2e^{3x} \sin 4x - 4e^{3x} \cos 4x. \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{aligned} y &= 5C_1 e^{3x} \cos 4x + 5C_2 e^{3x} \sin 4x, \\ z &= C_1(-2e^{3x} \cos 4x + 4e^{3x} \sin 4x) + C_2(-2e^{3x} \sin 4x - 4e^{3x} \cos 4x). \end{aligned}$$

Пример 3. Найти частное решение системы

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 8y - 5z, \\ \frac{dz}{dx} = 5y - 2z, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(1) = e^3, \quad z(1) = 0.$$

Составим и решим характеристическое уравнение системы:

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -5 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0; \quad (\lambda - 3)^2 = 0.$$

Имеем единственный действительный корень $\lambda = 3$ кратности 2. Будем искать решение системы в виде

$$y = (A + Bx)e^{3x}, \quad z = (C + Dx)e^{3x}.$$

Подставим в систему:

$$\begin{cases} e^{3x}(3A + B + 3Bx) = e^{3x}(8A - 5C + 8Bx - 5Dx), \\ e^{3x}(3C + D + 3Dx) = e^{3x}(5A - 2C + 5Bx - 2Dx), \end{cases}$$

откуда, сокращая на e^{3x} и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в обоих

уравнениях, получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3A + B = 8A - 5C, \\ 3B = 8B - 5D, \\ 3C + D = 5A - 2C, \\ 3D = 5B - 2D; \end{array} \right. \quad \text{откуда} \quad \left\{ \begin{array}{l} 5A - B - 5C = 0, \\ 5B - 5D = 0, \\ 5A - 5C - D = 0, \\ 5B - 5D = 0. \end{array} \right.$$

Третье и четвертое уравнения системы – «лишние», следовательно, эта система имеет двухпараметрическое множество решений (например, C и D выражаются через A и B). Но, поскольку нам требуется найти не общее, а частное решение системы, удовлетворяющее данным начальным условиям, получаем еще 2 уравнения: $(A+B)e^3=e^3$, т.е. $A+B=1$, и $(C+D)e^3=0$, т.е. $C+D=0$. Полученная система

$$\left\{ \begin{array}{l} 5A - B - 5C = 0, \\ 5B - 5D = 0, \\ A + B = 1, \\ C + D = 0 \end{array} \right.$$

имеет единственное решение $A=-4$, $B=5$, $C=-5$, $D=5$. Таким образом, искомое частное решение: $y = (-4 + 5x)e^{3x}$, $z = (-5 + 5x)e^{3x}$.

Тема 9. Теория устойчивости

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1; y_2), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x; y_1; y_2). \end{array} \right. \quad (1)$$

Решение $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi_1(x_0) = \varphi_1^0, \dots, \varphi_n(x_0) = \varphi_n^0$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всякого решения $y_1(x), y_2(x)$ системы (1), начальные значения которого удовлетворяют условиям

$$|y_1(x_0) - \varphi_1^0| < \delta, \quad |y_2(x_0) - \varphi_2^0| < \delta, \quad (2)$$

имеют место неравенства

$$|y_1(x) - \varphi_1(x)| < \varepsilon, \quad |y_2(x) - \varphi_2(x)| < \varepsilon \quad (3)$$

для всех $x \geq x_0$.

Проще говоря, решение является устойчивым по Ляпунову, если малое отклонение начальных условий приводит к малому отклонению решения.

Если при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $y_1(x), y_2(x)$ неравенства (3) не выполняются, то решение $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ называется *неустойчивым*.

Если, кроме выполнения неравенств (3) при условии (2) выполняется также условие

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |y_1(x) - \varphi_1(x)| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |y_2(x) - \varphi_2(x)| = 0, \quad (4)$$

то решение $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ называется *асимптотически устойчивым*.

Исследование на устойчивость решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ системы (1) может быть при помощи подстановки сведено к исследованию на устойчивость нулевого (тривиального) решения $y_1(x) = 0, y_2(x) = 0$ некоторой системы, аналогичной системе (1):

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = g_1(x; y_1; y_2), \\ \frac{dy_2}{dx} = g_2(x; y_1; y_2). \end{cases} \quad (1')$$

- Решение $y_1 \equiv 0, y_2 \equiv 0$ называется *точкой покоя* системы (1').

Сформулируем определения устойчивости применительно к точке покоя.

- Точка покоя $y_1 \equiv 0, y_2 \equiv 0$ системы (1'), называется *устойчивой по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всякого решения $y_1(x), y_2(x)$ системы (1), начальные значения которого удовлетворяют условиям

$$|y_1(x_0)| < \delta, \quad |y_2(x_0)| < \delta, \quad (2')$$

имеют место неравенства

$$|y_1(x)| < \varepsilon, \quad |y_2(x)| < \varepsilon \quad (3')$$

для всех $x \geq x_0$.

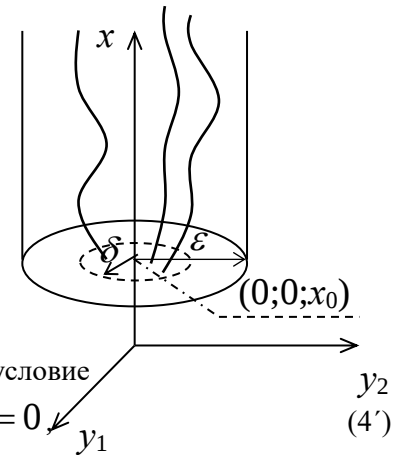
Геометрически это означает, что каким бы узким ни был цилиндр радиуса ε с осью Ox , найдется δ -окрестность точки $(0; 0; x_0)$ такая, что все интегральные кривые, выходящие из этой окрестности, для всех $x \geq x_0$ будут оставаться внутри этого цилиндра.

- Если, кроме выполнения неравенств (3'), выполняется также условие

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |y_1(x)| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |y_2(x)| = 0 \quad (4')$$

то точка покоя называется *асимптотически устойчивой*.

- Если при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $y_1(x), y_2(x)$ неравенства (3') не выполняются, то решение $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ называется *неустойчивой*.



Есть простая физическая аналогия для понятия устойчивости. Рассмотрим обычный шарик. Возможны три типа положений покоя для шарика: на плоскости, в нижней точке впадины, в верхней точке выпуклости. Легко видеть, что первое положение покоя устойчиво, второе – асимптотически устойчиво, третье – неустойчиво.

Простейшие типы точек покоя

Рассмотрим систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z, \\ \frac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z, \end{cases} \quad (5)$$

причем $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Решение $y=0, z=0$ называется *точкой покоя* или *особой точкой* системы (5).

Составим характеристическое уравнение системы (5):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

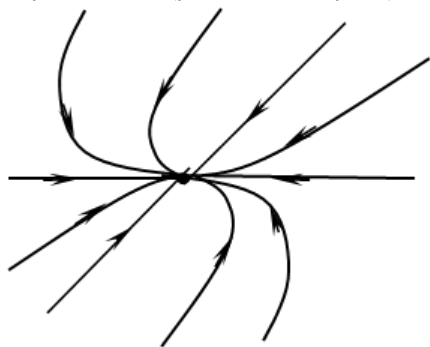
и найдем его корни λ_1, λ_2 .

Возможны следующие случаи:

I. Корни характеристического уравнения (6) вещественные и различные:

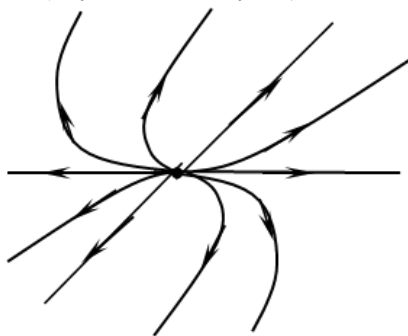
а) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$.

Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел).



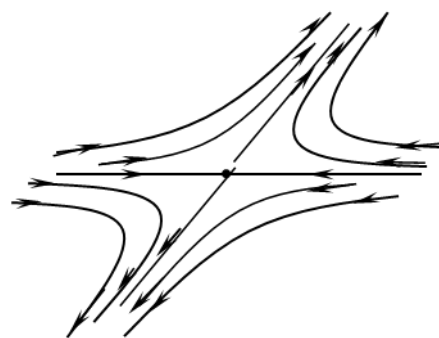
б) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$.

Точка покоя неустойчива (неустойчивый узел).



в) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.

Точка покоя неустойчива (седло).



(На рисунках изображен «вид снизу» на интегральные кривые; стрелки указывают направление кривых при возрастании x .)

II. Корни характеристического уравнения (6) комплексные:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta.$$

а) $\alpha < 0, \beta \neq 0$.

Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый фокус).



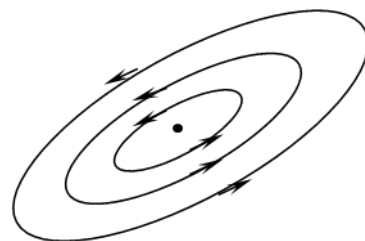
б) $\alpha > 0, \beta \neq 0$.

Точка покоя неустойчива (неустойчивый фокус).



в) $\alpha = 0, \beta \neq 0$.

Точка покоя устойчива (центр).



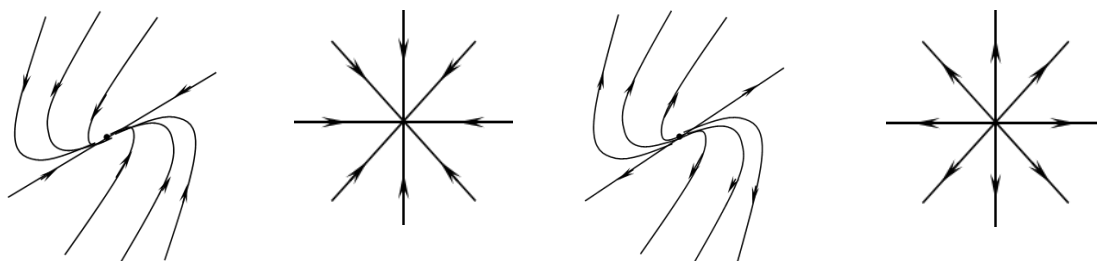
III. Корни кратные: $\lambda_1 = \lambda_2$

а) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел)

б) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

Точка покоя неустойчива (неустойчивый узел)



РАЗДЕЛ 3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Тема 10. Основные определения и понятия интегральных уравнений

Интегральными уравнениями называют уравнения, в которых неизвестная функция, которую обозначим $y(x)$, входит под знак интеграла:

$$G(x, y(x)) = \int_a^b F(x, \xi, y(\xi)) d\xi. \quad (1.1)$$

В частном случае, когда функция G в правой части уравнения (1.1) не зависит от искомой функции $y(x)$, говорят об *интегральном уравнении 1-го рода*, в общем случае – об *интегральном уравнении 2-го рода*.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений для решения уравнения (1.1) не требуется задавать дополнительные условия, а именно, значения неизвестной функции и/или ее производных в некоторых точках. Это обстоятельство имеет большое значение, особенно в приложениях.

Область изменения переменных $a < x$, $\xi < b$ в уравнении 2-го рода (1.1) называется *основным квадратом*.

Интервал $[a, b]$ может быть и бесконечным, так что значения $a = -\infty$ и/или $b = \infty$ не исключаются. Если же оба числа a , b конечны, то без ограничения общности можно положить $a = 0$, $b = 1$.

В таком случае уравнение (1.1) называют *уравнением Урысона*:

$$G(x, y(x)) = \int_0^1 F(x, \xi, y(\xi)) d\xi. \quad (1.2)$$

Частным случаем уравнения Урысона является *уравнение Гаммерштейна*:

$$G(x, y(x)) = \int_0^1 K(x, \xi) g(\xi, y(\xi)) d\xi, \quad (1.3)$$

при этом функция K называется *ядром уравнения*.

Наиболее простым и хорошо изученным является, естественно, случай линейной зависимости функций g , G от искомой функции:

$$g(\xi, y(\xi)) = y(\xi), \quad G(x, y(x)) = \frac{1}{\lambda} (y(x) - f(x)). \quad (1.4)$$

Тогда в общем случае, не обязательно конечных значений a , b ,

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi = f(x). \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) называется *линейным интегральным уравнением 2-го рода*, λ – *параметром уравнения*, а $f(x)$ – *неоднородным членом*. При условии $f(x) = 0$ уравнение (1.5) называется *однородным*.

Когда функция g определяется тем же уравнением (1.4), а функция G не зависит от второго аргумента: $G(x, y(x)) = f(x)$, приходим к *линейному интегральному уравнению 1-го рода*:

$$f(x) = \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi. \quad (1.6)$$

Упражнение. Покажите, что наличие свободного члена в функции $g(\xi, y(\xi)) = y(\xi) + g_0(\xi)$ приводит к тем же уравнениям (1.5)-(1.6) с измененным неоднородным членом.

$$\begin{aligned} G(x, y(x)) &= \int_a^b K(x, \xi) (y(\xi) + g_0(\xi)) d\xi = \int_a^b (K(x, \xi) y(\xi) + K(x, \xi) g_0(\xi)) d\xi = \\ &= \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi + \int_a^b K(x, \xi) g_0(\xi) d\xi = \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi + f_1(x), \\ &\int_a^b K(x, \xi) g_0(\xi) d\xi = f_1(x), \\ y(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi &= f(x) + \lambda f_1(x). \end{aligned}$$

Определение. Если числа a и b конечны, ядро и неоднородный член квадратично интегрируемы:

$$\|K\| = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |K(x, \xi)|^2 d\xi dx \right\}^{1/2} < \infty, \quad (1.7.1)$$

$$\|f\| = \left\{ \int_0^1 |f(\xi)|^2 d\xi \right\}^{1/2} < \infty, \quad (1.7.2)$$

уравнения (1.5) – (1.6) называются *уравнениями Фредгольма*, соответственно, 2-го и 1-го рода.

Частный случай линейных уравнений, имеющий важное самостоятельное значение, возникает для ядер, удовлетворяющих условию

$$K(x, \xi) = 0, \quad x > \xi. \quad (1.8)$$

Получающиеся уравнения

$$f(x) = \int_a^x K(x, \xi) y(\xi) d\xi, \quad y(x) - \lambda \int_a^x K(x, \xi) y(\xi) d\xi = f(x), \quad (1.9)$$

называют *уравнениями Вольтерра*, соответственно, 1-го и 2-го рода.

Упражнение. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = \varphi(x)$$

с начальными условиями

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

сводится к уравнению Вольтерра 2-го рода (1.9) при значении $\lambda = -1$ и

$$K(x, \xi) = \sum_{m=1}^n a_m(x) \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!},$$

$$f(x) = \varphi(x) - c_{n-1}a_1(x) - (c_{n-1}x + c_{n-2})a_2(x) - \dots -$$

$$- \left(c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + c_1x + c_0 \right) a_n(x).$$

Действительно, положим (по книге Васильева, Тихонов. Интегральные уравнения)

$$y(x) = c_0 + \frac{c_1}{1!}x + \frac{c_2}{2!}x^2 + \dots + \frac{c_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \psi(\xi)(x-\xi)^{n-1} d\xi,$$

где $\psi(x)$ – новая неизвестная функция. Дифференцируя это выражение n раз, имеем

$$y'(x) = c_1 + \frac{c_2}{1!}x + \dots + \frac{c_{n-1}}{(n-2)!}x^{n-2} + \frac{(n-1)}{(n-1)!} \int_0^x \psi(\xi)(x-\xi)^{n-2} d\xi =$$

$$= c_1 + \frac{c_2}{1!}x + \dots + \frac{c_{n-1}}{(n-2)!}x^{n-2} + \frac{1}{(n-2)!} \int_0^x \psi(\xi)(x-\xi)^{n-2} d\xi,$$

$$y''(x) = c_2 + \frac{c_3}{1!}x + \dots + \frac{c_{n-1}}{(n-3)!}x^{n-3} + \frac{1}{(n-2)!} \int_0^x \psi(\xi)(x-\xi)^{n-2} d\xi,$$

$$y^{(k)}(x) = c_k + \dots + \frac{c_{n-1}}{(n-k-1)!}x^{n-k-1} + \frac{(n-1)\dots(n-k)}{(n-k-1)!} \int_0^x \psi(\xi)(x-\xi)^{n-1-k} d\xi =$$

$$= c_k + \dots + \frac{c_{n-1}}{(n-k-1)!}x^{n-k-1} + \frac{1}{(n-k-1)!} \int_0^x \psi(\xi)(x-\xi)^{n-1-k} d\xi, \quad 1 \leq k \leq n-1;$$

$$y^{(n-1)}(x) = c_{n-1} + \int_0^x \psi(\xi) d\xi, \quad y^{(n)}(x) = \psi(x).$$

При этом, очевидно, выполнены условия

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}.$$

Подставляя найденные выражения для производных $y^{(k)}(x)$ в левую часть линейного дифференциального уравнения, получим

$$\begin{aligned} & y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-k}(x)y^{(k)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = \varphi(x), \\ & \psi(x) + a_1(x) \left(c_{n-1} + \int_0^x \psi(\xi) d\xi \right) + \dots + \\ & + a_{n-k}(x) \left[c_k + \dots + \frac{c_{n-1}}{(n-k-1)!} x^{n-k-1} + \frac{1}{(n-k-1)!} \int_0^x \psi(\xi)(x-\xi)^{n-1-k} d\xi \right] + \dots + \\ & + a_n(x) \left[c_0 + \frac{c_1}{1!} x + \frac{c_2}{2!} x^2 + \dots + \frac{c_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \psi(\xi)(x-\xi)^{n-1} d\xi \right] = \varphi(x) \\ & \psi(x) + c_{n-1}a_1(x) + a_1(x) \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \dots + \\ & + \left(c_k + \dots + \frac{c_{n-1}}{(n-k-1)!} x^{n-k-1} \right) a_{n-k}(x) + \frac{a_{n-k}(x)}{(n-k-1)!} \int_0^x \psi(\xi)(x-\xi)^{n-1-k} d\xi + \dots + \\ & + \left(c_0 + \frac{c_1}{1!} x + \frac{c_2}{2!} x^2 + \dots + \frac{c_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} \right) a_n(x) + \frac{a_n(x)}{(n-1)!} \int_0^x \psi(\xi)(x-\xi)^{n-1} d\xi = \varphi(x) \\ & \psi(x) + \int_0^x \left[a_1(x) + \dots + \frac{a_{n-k}(x)}{(n-k-1)!} (x-\xi)^{n-1-k} + \dots + \frac{a_n(x)}{(n-1)!} (x-\xi)^{n-1} \right] \psi(\xi) d\xi = \\ & = \varphi(x) - c_{n-1}a_1(x) - \dots - \left(c_k + \dots + \frac{c_{n-1}}{(n-k-1)!} x^{n-k-1} \right) a_{n-k}(x) - \\ & - \dots - \left(c_0 + \frac{c_1}{1!} x + \frac{c_2}{2!} x^2 + \dots + \frac{c_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} \right) a_n(x). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} f(x) = & \varphi(x) - c_{n-1}a_1(x) - \dots - \left(c_k + \dots + \frac{c_{n-1}}{(n-k-1)!} x^{n-k-1} \right) a_{n-k}(x) - \\ & - \dots - \left(c_0 + \frac{c_1}{1!} x + \frac{c_2}{2!} x^2 + \dots + \frac{c_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} \right) a_n(x), \end{aligned}$$

$$K(x, \xi) = a_1(x) + \dots + \frac{a_{n-k}(x)}{(n-k-1)!} (x-\xi)^{n-1-k} + \dots + \frac{a_n(x)}{(n-1)!} (x-\xi)^{n-1},$$

$$K(x, \xi) = \sum_{m=1}^n a_m(x) \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!},$$

получим

$$\psi(x) + \int_0^x K(x, \xi) \psi(\xi) d\xi = f(x).$$

Уравнения 1-го рода относятся к так называемым *некорректным задачам*, и они будут рассматриваться позже. Вначале изучим уравнения 2-го рода. Изучение начнем с уравнений, допускающих аналитическое решение.

Пример 1. Вычислить три первых последовательных приближения решения интегрального уравнения

$$y(x) + \int_0^1 xty(t)dt = x^2.$$

Решение. Пусть решение имеет вид $y(x) \approx y_3(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \lambda^3\varphi_3(x)$, где

$$\varphi_0(x) = y(x) = x^2, \quad \varphi_n(x) = \int_0^1 K(x, t) \varphi_{n-1}(t) dt. \text{ Имеем}$$

$$\varphi_0(x) = x^2,$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^1 xt \cdot t^2 dt = \frac{x}{4},$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^1 xt \cdot \frac{t}{4} dt = \frac{x}{12},$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^1 xt \cdot \frac{t}{12} dt = \frac{x}{36}.$$

Так как $\lambda = -1$, то первые три последовательные приближения и есть приближенные решения интегрального уравнения:

$$y_0(x) = \varphi_0(x) = x^2,$$

$$y_1(x) = \varphi_0(x) - \varphi_1(x) = x^2 - \frac{x}{4},$$

$$y_2(x) = \varphi_0(x) - \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = x^2 - x \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3} \right),$$

$$y_3(x) = \varphi_0(x) - \varphi_1(x) + \varphi_2(x) - \varphi_3(x) = x^2 - x \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} \right).$$

Найдем точное решение данного интегрального уравнения. Имеем $y(x) = x^2 - C_1$, где $C_1 = \int_0^1 ty(t)dt = \int_0^1 t(t^2 - C_1 t)dt = \frac{1}{4} - \frac{C_1}{3}$. Следовательно, $C_1 = \frac{3}{16}$ и точное решение

уравнения: $y(x) = x^2 - \frac{3}{16}x$.

Пример 2. Для интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^1 e^{x-t} y(t) dt + f(x)$$

найти резольвенту, определив радиус сходимости ряда. Записать решение при произвольном свободном члене $f(x)$, а также найти решение при $\lambda = \frac{1}{2}$ и $f(x) = e^x$.

Решение. Находим итерации ядра:

$$K(x, t) = K_1(x, t) = e^{x-t},$$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, s) K(s, t) ds = \int_0^1 e^{x-s} e^{s-t} ds = e^{x-t},$$

$$K_3(x, t) = \int_0^1 K(x, s) K_2(s, t) ds = e^{x-t}.$$

Итак, $K_n(x, t) = e^{x-t}$ ($n=1, 2, \dots$).

Резольвента ядра $R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, t) = e^{x-t} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}$. Полученный ряд является

геометрической прогрессией, сходится при $|\lambda| < 1$ и сумма его равна $\frac{1}{1-\lambda}$. Таким образом,

$R(x, t, \lambda) = \frac{e^{x-t}}{1-\lambda}$. Решение уравнения имеет вид $y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^1 e^{x-t} f(t) dt$. В частности,

при $\lambda = \frac{1}{2}$ имеем $f(x) = e^x$ и $y(x) = e^x + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \int_0^1 e^{x-t} e^t dt = 2e^x$.

Тема 11. Уравнения с вырожденным ядром

Ядро интегрального уравнения $K(x, \xi)$ называется *вырожденным*, если оно представимо в виде конечной суммы произведений функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \psi_i(\xi). \quad (1.10)$$

Без ограничения общности можно считать, что функции φ_i линейно независимы.

Подставим формулу (1.10) в (1.5):

$$y(x) - \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \psi_i(\xi) y(\xi) d\xi = f(x),$$

$$y(x) - \lambda \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \int_a^b \psi_i(\xi) y(\xi) d\xi = f(x). \quad (1.11)$$

Поскольку определенный интеграл здесь является числом, ясно, что искомая функция $y(x)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
y(x) - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) &= f(x), \\
a_i &= \lambda \int_a^b \psi_i(\xi) y(\xi) d\xi, \\
y(x) &= f(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x), \\
y(x) &= \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x), \quad \varphi_0(x) = f(x), \quad a_0 = 1. \quad (1.12)
\end{aligned}$$

Подставляя эту формулу в (1.11), приходим к уравнению

$$\begin{aligned}
y(x) - \lambda \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \int_a^b \psi_i(\xi) y(\xi) d\xi &= f(x), \\
\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - \lambda \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \int_a^b \psi_i(\xi) y(\xi) d\xi &= f(x), \\
\sum_{i=1}^n \left(a_i - \lambda \int_a^b \psi_i(\xi) y(\xi) d\xi \right) \varphi_i(x) &= 0, \\
\sum_{i=1}^n \left(a_i - \lambda \sum_{j=0}^n a_j \int_a^b \psi_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi \right) \varphi_i(x) &= 0, \\
\sum_{i=1}^n \left(a_i - \lambda \sum_{j=0}^n C_{ij} a_j \right) \varphi_i(x) &= 0, \quad (1.13) \\
C_{ij} &= \int_a^b \psi_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Но функции φ_i для всех индексов $1 \leq i \leq n$ по условию линейно независимы. Следовательно, уравнение (1.13) может выполняться для всех $x \in [a, b]$ только при условии, что равны нулю коэффициенты при каждой функции φ_i . Таким образом, получаем систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов a_i из разложения (1.12):

$$a_i - \lambda \sum_{j=0}^n C_{ij} a_j = 0,$$

$$\begin{aligned} \left(\delta_{ij} - \lambda \sum_{j=0}^n C_{ij} \right) a_j &= 0, \\ \left(\delta_{ij} - \lambda \sum_{j=1}^n C_{ij} \right) a_j &= \lambda C_{i0} a_0, \\ \left(\delta_{ij} - \lambda \sum_{j=1}^n C_{ij} \right) a_j &= \lambda C_{i0}, \quad i=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Решив эту систему уравнений, найдем коэффициенты a_j и, следовательно, искомую функцию $y(x)$.

Как видим, решение линейного интегрального уравнения с вырожденным ядром свелось к решению системы линейных алгебраических уравнений. Далее мы увидим, что в случае произвольного ядра линейное интегральное уравнение окажется, в некотором смысле, подобным бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Эту аналогию полезно иметь в виду, поскольку она позволяет понять основные свойства линейных интегральных уравнений, сравнивая их со свойствами конечной системы алгебраических уравнений, известными из линейной алгебры.

В частности, если уравнение (1.11) однородное,

$$y(x) - \lambda \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \int_a^b \psi_i(\xi) y(\xi) d\xi = 0,$$

т. е. $f(x) = 0$, то однородны и алгебраические уравнения (1.14)

$$\left(\delta_{ij} - \lambda \sum_{j=1}^n C_{ij} \right) a_j = \lambda C_{i0},$$

поскольку $C_{i0} = \int_a^b \psi_i(\xi) \varphi_0(\xi) d\xi$, но $\varphi_0(x) = f(x) = 0$, то $C_{i0} = 0$,

$$\left(\delta_{ij} - \lambda \sum_{j=1}^n C_{ij} \right) a_j = 0$$

для всех i .

Тогда, как известно, нетривиальные решения у этих уравнений существуют только тогда, когда определитель системы равен нулю. Отсюда можно получить набор значений параметра λ , называемых *характеристическими значениями*, для которых определитель системы обращается в нуль. Таких значений имеется ровно n , учитывая возможную кратность корней характеристического уравнения.

Так как уравнения с вырожденным ядром сводятся к легко решаемым линейным алгебраическим уравнениям, существует приближенный метод решения интегральных уравнений с произвольным ядром. Он основан на аппроксимации ядра вырожденным: функция двух переменных приближенно заменяется конечной суммой произведений функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. Как часто бывает,

достигаемая точность этого приближенного метода зависит от удачности выбора этих функций.

Тема 12. Уравнения типа Фурье-свертки

Рассмотрим теперь уравнение

$$y(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) y(\xi) d\xi = f(x), \quad (1.15)$$

в котором ядро зависит от одного аргумента, который, в свою очередь, является разностью двух других переменных. Уравнение (1.15) называется *уравнением свертки по Фурье*.

Это уравнение легко решается, если перейти к фурье-изображениям для ядра, искомой функции и неоднородного члена:

$$K(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-\xi)} \tilde{K}(k) dk, \quad (1.16.1)$$

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \tilde{y}(k) dk, \quad (1.16.2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \tilde{f}(k) dk. \quad (1.16.3)$$

Подставляя эти формулы в (1.15) и используя известное Фурье-разложение δ -функции Дирака:

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ikx} dx, \quad (1.17)$$

получаем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \tilde{y}(k) dk - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik'(x-\xi)} \tilde{K}(k') dk' \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} \tilde{y}(k) dk \right) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \tilde{f}(k) dk$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \tilde{y}(k) dk - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k')\xi} d\xi \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik'\xi} \tilde{K}(k') \tilde{y}(k') dk' \right) dk' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \tilde{f}(k) dk$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \tilde{y}(k) dk - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k - k') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik'\xi} \tilde{K}(k') \tilde{y}(k') dk' \right) dk' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \tilde{f}(k) dk$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \tilde{y}(k) dk - \lambda \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \tilde{K}(k) \tilde{y}(k) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \tilde{f}(k) dk,$$

$$\tilde{y}(k) - \lambda \tilde{K}(k) \tilde{y}(k) = \tilde{f}(k),$$

$$\tilde{y}(k)(1 - \lambda \tilde{K}(k)) = \tilde{f}(k),$$

$$\tilde{y}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{1 - \lambda \tilde{K}(k)}.$$

Сделав обратное преобразование Фурье, находим

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{y}(k) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\tilde{f}(k)}{1 - \lambda \tilde{K}(k)} dk.$$

По Васильевой и Тихонову:

$$y(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) y(\xi) d\xi = f(x).$$

Умножаем это выражение на e^{ikx} и интегрируем по x . Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} y(x) dx - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) y(\xi) d\xi \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx.$$

Можно поменять порядок интегрирования в правой части последнего равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} y(x) dx - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} y(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} K(x - \xi) dx \right) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} y(x) dx - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} y(\xi) e^{ik\xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} K(x - \xi) dx \right) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx.$$

Отсюда для фурье-изображений получим

$$\tilde{y}(k) - \lambda \tilde{y}(k) \tilde{K}(k) = \tilde{f}(k),$$

$$\tilde{y}(k)(1 - \lambda \tilde{K}(k)) = \tilde{f}(k),$$

$$\tilde{y}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{1 - \lambda \tilde{K}(k)}.$$

Сделав обратное преобразование Фурье, находим

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{y}(k) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\tilde{f}(k)}{1 - \lambda \tilde{K}(k)} dk.$$

Подобным же образом решаются и уравнения, представляющие собой свертку по Лапласу.

Упражнение. Показать, что решение уравнения Вольтерра, имеющее вид свертки по Лапласу:

$$y(x) - \lambda \int_0^x K(x - \xi) y(\xi) d\xi = f(x), \quad x \geq 0, \quad (1.19)$$

есть

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{px} \frac{\tilde{f}(p)}{1-\lambda\tilde{K}(p)} dp, \quad (1.20)$$

где $\tilde{f}(p)$, $\tilde{K}(p)$ – лаплас-изображения неоднородного члена и ядра уравнения (1.19), а интеграл берется вдоль прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$, параллельной мнимой оси, и понимается в смысле главного значения. Формула (1.20) – обратное преобразование Лапласа.

Пример 1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = t - \int_0^t (t-s)\varphi(s)ds.$$

Решение. В данном случае $f(t) = t$ и $K(t, s) = t - s$ ($s < t$) непрерывны и, значит, уравнение имеет единственное решение.

Будем его искать методом последовательных приближений. Положим $\varphi_0(t) = 0$. Тогда получим

$$\varphi_1(t) = t.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= t - \int_0^t (t-s)s ds = t - \frac{t^3}{3!}, \\ \varphi_3(t) &= t - \int_0^t (t-s) \left(s - \frac{s^3}{3!} \right) ds = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n(t) &= t - \frac{t^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\varphi_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sin t.$$

Пример 2. Решить уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$x(t) - \frac{1}{2} \int_0^1 x(s) ds = \sin \pi t.$$

Решение. $a = 0$, $b = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, $K(t, s) \equiv 1$, отсюда $M = 1$. Зададим нулевым приближением $x_0(t) = \sin \pi t$.

$$x_1(t) = \sin \pi t + \frac{1}{2} \int_0^1 \sin \pi s ds = \sin \pi t - \frac{1}{2\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \sin \pi t + \frac{1}{\pi}.$$

$$x_2(t) = \sin \pi t + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sin \pi s + \frac{1}{\pi} \right) ds = \sin \pi t + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}.$$

$$x_3(t) = \sin \pi t + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sin \pi s + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \right) ds = \sin \pi t + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi}.$$

Не трудно увидеть, что

$$x_{n+1}(t) = \sin \pi t + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi} + \dots + \frac{1}{2^n \pi} = \sin \pi t + \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) =$$

$$= \sin \pi t + \frac{1}{\pi} \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}.$$

Отсюда $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}(t) = \sin \pi t + \frac{2}{\pi}.$

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

1.1. Перечень основной литературы:

1. Сергеев, И. Н. Дифференциальные уравнения: учебник для вузов. – Москва: Академия, 2013. – 286 с.
2. Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. – 2-е изд., испр. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 432 с.

1.2. Перечень дополнительной литературы:

1. Филлипов А.Ф., Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Изд.-во: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. – 177 с.
2. Эдвардс, Пенни "Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple". – Изд. - во: «Вильямс», 2008. – 1104 с.

1.3. Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические рекомендации к лабораторным занятиям по дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения в физике».
2. Методические рекомендации к самостоятельной работе по дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения в физике».

3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=477424>.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В
ФИЗИКЕ**

**Методические указания для обучающихся по организации и проведению
самостоятельной работы**

Направление подготовки 03.03.02 Физика
Направленность (профиль)
«Фундаментальная и прикладная физика»

**Ставрополь
2026**

Содержание

Пояснительная записка

Виды и содержание самостоятельной работы студента; формы контроля

Контрольные точки и виды отчетности

Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Вопросы для собеседования

Методические указания по подготовке к экзамену

Список рекомендуемой литературы

Пояснительная записка

Все виды самостоятельной работы студентов по дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения в физике», предусмотренные учебным планом и рабочей программой, направлены на осуществление следующих основных целей:

- *овладение знаниями*: изучение источников литературы по темам дисциплины; учебно-исследовательская работа; использование компьютерной техники, Интернет;
- *закрепление и систематизация знаний*: работа с конспектом лекции (обработка текста); повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы, аудио- и видеозаписей); составление плана и тезисов ответа; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста (аннотирование, рецензирование, реферирование, конспект, анализ и др.); подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка рефератов, докладов; составление библиографии; тестирование и др.;
- *формирование умений*: решение задач и упражнений по образцу; составление и решение дифференциальных уравнений, а также систем дифференциальных уравнений; математическое моделирование разного рода физических процессов; подготовка курсовых и дипломных работ (проектов); экспериментальная работа; рефлексивный анализ профессиональных умений с использованием аудио- и видеотехники и др.

Основными **формами работы и контроля** самостоятельной работы студентов являются:

Индивидуальное решение репродуктивных, реконструктивных и творческих заданий, позволяющих оценивать и диагностировать уровень обученности, уровень умений и навыков студентов по дисциплине.

Собеседование - форма учебной деятельности, специальная беседа преподавателя со студентом на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, рассчитанная на выяснение объема знаний студента по определенному разделу, теме, проблеме и т. п., позволяющая оценить их знания по теме, умение аргументировать собственную точку зрения, предполагающая всестороннее обсуждение какого-либо вопроса, проблемы или сопоставлении информации, идей, мнений, предложений.

Виды и содержание самостоятельной работы студента; формы контроля

Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов)	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
2 семестр					
ИД-1 _{ОПК-1} , ИД-2 _{ОПК-1} ,	Самостоятельное изучение литературных источников по темам дисциплины	Собеседование	2.60	0.40	3.00
ИД-1 _{ОПК-1} , ИД-2 _{ОПК-1} ,	Самостоятельное решение типовых задач по темам дисциплины	Собеседование	5.70	0.30	6.00
Итого за 2 семестр			8.30	0.70	9.00
3 семестр					
ИД-1 _{ОПК-1} , ИД-2 _{ОПК-1} ,	Самостоятельное изучение литературных источников по темам дисциплины	Собеседование	2.60	0.40	3.00
ИД-1 _{ОПК-1} , ИД-2 _{ОПК-1} ,	Самостоятельное решение типовых задач по темам дисциплины	Собеседование	5.70	0.30	6.00
ИД-1 _{ОПК-1} , ИД-2 _{ОПК-1} ,	Подготовка к экзамену		4.00	0.50	4.50
Итого за 3 семестр			12.30	1.20	13.50
Итого			20.60	1.90	22.50

Контрольные точки и виды отчетности

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения	Количество баллов
2 семестр			
1	Практическое занятие 5	5	15
2	Практическое занятие 11	11	20
3	Практическое занятие 17	17	20
	Итого за 2 семестр:		55
3 семестр			
1	Практическое занятие 5	5	15
2	Практическое занятие 11	11	20
3	Практическое занятие 17	17	20
	Итого за 3 семестр:		55
	Итого:		110

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА, ПОДГОТОВКЕ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

При подготовке к практическим занятиям необходимо:

- повторить материал соответствующих лекций;
- внимательно изучить описание практического занятия, изложенное в практикуме;
- Рассмотреть приведенные примеры решений типовых заданий
- Решить типовые задания, предложенные для самостоятельного решения

В результате выполнения заданий достигаются следующие результаты обучения:

- развитие мышления и творческих способностей студента,
- приобретение и закрепление навыков самостоятельной работы,
- приобретение и закрепление навыков оформления и составления письменных заданий.

По результатам изучения теоретического материала преподавателем осуществляется контроль полученных студентом знаний, формами которого являются собеседование и доклад рефератов.

Собеседование - форма учебной деятельности, специальная беседа преподавателя со студентом на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, рассчитанная на выяснение объема знаний студента по определенному разделу, теме, проблеме и т.п., позволяющая оценить их умение аргументировать собственную точку зрения, предполагающая всестороннее обсуждение какого-либо вопроса, проблемы или сопоставлении информации, идей, мнений, предложений.

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя:

- отдельное собеседование по каждой из указанных тем;
- составленные студентом конспекты научной литературы;
- анализ студентом публицистического материала.

Принципиальные отличия заданий базового уровня от повышенного заключаются в большем объеме фактов и событий, в сравнительно-аналитическом характере изложения материала, его теоретической (методологической) составляющей.

Для подготовки к каждой теме следует изучить и законспектировать рекомендованные источники и научную литературу и на их основании подготовиться к указанным в методических материалах вопросам для обсуждения.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования указанными конспектами.

При проверке задания, оцениваются:

- активное участие в работе;
- уверенное владение материалом;
- умение четко и логично излагать свои мысли;
- умение творчески подходить к решению основных вопросов темы;
- самостоятельность мышления,
- полное соответствие конспекта установленным требованиям;
- самостоятельная устная речь, полностью раскрывающая суть проблематики собеседования.

Критерии оценки самостоятельной работы студентов

Критерии оценивания результатов самостоятельной работы студентов разработаны с учетом требований ФГОС ВО. Задания, выносимые на самостоятельную работу студентов, оцениваются по шкале «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно».

Оценка **«отлично»** выставляется при следующих условиях:

- даны исчерпывающие и обоснованные ответы на вопросы, поставленные в задании, выносимом на самостоятельную работу студентов;
- показано умение грамотно применять полученные теоретические знания при анализе событий действительности;
- показано глубокое и творческое овладение основной и дополнительной литературой;
- материал излагается аргументировано и логически стройно.

Оценка **«хорошо»** выставляется при следующих условиях:

- даны полные, достаточно глубокие и обоснованные ответы на вопросы, поставленные в задании, выносимом на самостоятельную работу студентов;
- показаны достаточно прочные практические навыки;
- даны полные, но недостаточно обоснованные ответы на дополнительные вопросы;
- показаны глубокие знания основной и недостаточное знакомство с дополнительной литературой;
- показано умение теоретически обосновывать высказываемые положения;
- ответы в основном были краткими, но в них не всегда выдерживалась логическая последовательность.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется при следующих условиях.

- даны в основном правильные ответы на все вопросы задания, выносимого на самостоятельную работу студентов, но без должной глубины и обоснования;
- показаны недостаточно прочные практические навыки;
- не даны положительные ответы на некоторые дополнительные вопросы;
- показаны недостаточные знания основной литературы;

• ответы были многословными, мысли излагались недостаточно четко и без должной логической последовательности.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется в случаях, когда не выполнены условия, позволяющие поставить оценку «удовлетворительно», когда аспирант не усвоил основного содержания предмета и слабо знает рекомендованную литературу.

Вопросы для собеседования

1. Дайте определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка
2. Дайте определение обыкновенного дифференциального уравнения n -ого порядка
3. Интегрирование – это....
4. Интегральная кривая – это...
5. Общее решение – это....
6. Уравнение разрешено относительно производной, если ...
7. Начальные условия – это....
8. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши
9. Какие точки называют «правильными», а какие «особенными».
10. Частное решение – это....
11. В чем заключается суть метода изоклина ?
12. Какие уравнения называют уравнениями с разделяющимися переменными?
13. Какие уравнения называют уравнениями с разделенными переменными?
14. Особые решения дифференциального уравнения – это...
15. Однородное дифференциальное уравнение – это...
16. Какие замены используют при решении однородных дифференциальных уравнений?
17. Какой вид дифференциального уравнения должен получиться после замены переменной?
18. Какие функции называют однородными?
19. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка – это...
20. Линейное однородное уравнение первого порядка – это...
21. В чем заключается суть метода вариации произвольной постоянной?
22. Уравнение Бернулли – это...
23. Уравнение в полных дифференциалах – это...
24. Какое условие необходимо для того, чтобы уравнение являлось уравнением в полных дифференциалах в заданной области?
25. Запишите общий вид решения уравнения в полных дифференциалах
26. Интегрирующий множитель – это...
27. Обыкновенное дифференциальное уравнение n -ого порядка – это...
28. Решение обыкновенного дифференциального уравнения n -ого порядка – это...
29. Сформулируйте задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения n -ого порядка.
30. Запишите начальные условия, которым должно удовлетворять обыкновенное дифференциальное уравнение n -ого порядка.
31. Запишите общий вид решения обыкновенного дифференциального уравнения n -ого порядка.
32. Линейное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами – это...

33. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами – это...
34. Сформулируйте утверждение о решении линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами
35. Какие функции называют линейно зависимыми?
36. Какие функции называют линейно независимыми?
37. Фундаментальная система решений – это...
38. Сформулируйте теорему об общем решении линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами
39. В чем особенность интегрирования линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами?
40. Какое уравнение называют характеристическим?
41. В чем особенность интегрирования линейных однородных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами?
42. Какой вид будет иметь характеристическое уравнение в случае линейных однородных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами?
43. Сформулируйте теорему о структуре общего решения.
44. Сформулируйте теорему о наложении решений
45. В чем заключается суть метода вариации произвольных постоянных?
46. Как правильно осуществить подбор частного решения линейного неоднородного уравнения с правой частью специального вида
47. Что называют системой обыкновенных дифференциальных уравнений?
48. Что называют нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений?
49. Какой вид имеют начальные условия для системы обыкновенных дифференциальных уравнений?
50. Что называют системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?
51. Каким образом решаются такие системы?
52. Какой вид имеет характеристическое уравнение такой системы?
53. Собственные значения матрицы – это...
54. В каком случае решение называется устойчивым по Ляпунову?
55. В каком случае решение называется неустойчивым?
56. В каком случае решение называется асимптотически устойчивым?
57. Что называют точкой покоя?
58. В каком случае точка покоя считается устойчивой по Ляпунову?
59. В каком случае точка покоя считается неустойчивой?
60. В каком случае точка покоя считается асимптотически устойчивой?
61. Что называют особой точкой?
62. Что называют интегральным уравнением?
63. Что называют интегральным уравнением первого рода?
64. Что называют интегральным уравнением второго рода?
65. Что называют основным квадратом?
66. Запишите уравнение Урысона.
67. Запишите Уравнение Гаммерштейна. Дайте пояснение
68. Какой вид имеет линейное интегральное уравнение второго рода?
69. Какой вид имеет линейное интегральное уравнение первого рода?
70. Какой вид имеет уравнение Фредгольма первого рода?

71. Какой вид имеет уравнение Фредгольма второго рода?
72. Какой вид имеет уравнение Вольтера первого рода?
73. Какой вид имеет уравнение Вольтера второго рода?
74. Что называют ядром интегрального уравнения?
75. Какое ядро называется вырожденным?
76. Символ Кронекера – это...
77. Характеристические значения – это...
78. Какое уравнение называют уравнением свертки по Фурье?
79. Запишите вид Фурье-разложения функции Дирака?
80. Каким методом решаются данные уравнения?

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЭКЗАМЕНУ

Для подготовки к ответам на экзаменационные вопросы, обучающиеся должны использовать не только курс лекций и основную литературу, но и дополнительную литературу для выработки умения давать развернутые ответы на поставленные вопросы.

Ответы на теоретические вопросы должны быть даны в соответствии с формулировкой вопроса и содержать не только изученный теоретический материал, но и собственное понимание проблемы.

В ответах желательно привести примеры из практики.

Подготовку к экзамену по дисциплине необходимо начать с проработки основных вопросов, список которых приведен в рабочей программе дисциплины.

Для этого необходимо прочесть и уяснить содержание теоретического материала по учебникам и учебным пособиям по дисциплине. Список основной и дополнительной литературы приведен в рабочей программе дисциплины и может быть дополнен и расширен самими студентами.

Особое внимание при подготовке к экзамену необходимо уделить терминологии, т.к. успешное овладение любой дисциплиной предполагает усвоение основных понятий, их признаков и особенности.

Таким образом, подготовка к экзамену включает в себя:

- проработку основных вопросов курса;
- чтение основной и дополнительной литературы по темам курса;
- подбор примеров из практики, иллюстрирующих теоретический материал курса;
- выполнение промежуточных и итоговых тестов по дисциплине;
- систематизацию и конкретизацию основных понятий дисциплины;
- составление примерного плана ответа на экзаменационные вопросы.

Вопросы к экзамену (3 семестр)

1. Определение дифференциального уравнения и решения дифференциального уравнения. Задача Коши и краевая задача. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения (векторное поле) и его решения (интегральная кривая).
2. Уравнения с разделяющимися переменными и однородные уравнения.
3. Линейные уравнения, метод вариации постоянной. Уравнения Бернулли.
4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
5. Некоторые сведения о линейных дифференциальных уравнениях, свойства решений.

6. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней). Теорема о виде решения.
7. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней).
8. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай кратных корней). Теорема о виде решения.
9. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Вид решения. Определение квазимногочлена. Теорема о виде частного решения.
10. Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами.
11. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Линейная зависимость системы решений. Фундаментальная система решений. Детерминант Вронского. Формула Лиувилля.
12. Нормальная неоднородная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Вид решения. Метод вариации постоянных.
13. Линейные уравнения n -го порядка с переменными коэффициентами. Сведение к нормальной линейной системе, эквивалентность решения уравнения и системы и перенос основных свойств и формул.
14. Экспонента матрицы. Свойства и способы ее нахождения.
15. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы линейных уравнений. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения n -го порядка.
16. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши для одного уравнения. Ломаные Эйлера.
17. Подбор частного решения линейного неоднородного уравнения с правой частью специального вида.
18. Существование и свойства собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного оператора.
19. Разложение по собственным функциям. Теорема Гильберта-Шмидта. Теорема Мерсера.
20. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.
21. Записать уравнение Фредгольма 2-го рода. Какое уравнение называется однородным?
22. Исследование задачи Штурма—Лиувилля сведением к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.
23. Записать уравнение Вольтерра 2-го рода. Какое уравнение называется однородным?
24. Линейные уравнения в частных производных первого порядка. Основные определения.
25. Однородные линейные уравнения в частных производных первого порядка.
26. Записать уравнение Фредгольма 1-го рода. Какое уравнение называется однородным?
27. Исследование на устойчивость с помощью теоремы Ляпунова.
28. Записать уравнение Вольтерра 1-го рода. Какое уравнение называется однородным?

Задачи к экзамену (3 семестр).

1. Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + (xz + y) \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = 1 - x \quad \text{при} \quad x + y - z = 0$$

2. Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием:

$$xy \frac{\partial u}{\partial x} - x^2 \frac{\partial u}{\partial y} + yz \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = X \text{ при } z = x^2 + y^2$$

3. Найти общее решение уравнения:

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

4. Найти общее решение уравнения:

$$e^x \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = ye^x$$

5. Найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению и проходящую через данную линию:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y) \quad yz + 1 = 0 \text{ при } x = 1.$$

6. Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + xz \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = 1 - x \text{ при } x + y - z = 0$$

7. Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием:

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x^2 \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = X \text{ при } z = x^2 + y^2$$

8. Найти общее решение уравнения:

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

9. Найти общее решение уравнения:

$$\frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = ye^x$$

10. Найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению и проходящую через данную линию:

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z(x - 3y) \quad yz + 1 = 0 \text{ при } x = 1.$$

11. Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + (xz + y) \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = 1 - x \text{ при } x + y - z = 0$$

12. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x + y + 3t \end{cases}$$

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = x - y + z \\ z' = x - 3y + 3z \end{cases}$$

14. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -4x + 3y \end{cases}$$

15. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = x + 5y - 2z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = 3x + 9y - 4z \end{cases}$$

16. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{12x^2 y + 3y^3}{2y^2 + 6x^2}$$

17. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$e^y \left(1 + \frac{dy}{dx} \right) = 1$$

18. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy \frac{dy}{dx} + x^2 = 2y^2$$

19. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$\sqrt{3 + y^2} dx - y dy = x^2 y dy$$

20. Найти общее решение дифференциального уравнения и решить Задачу Коши:

$$\frac{dy}{dx} + y \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \quad \text{при} \quad y(0) = 0$$

21. Найти общее решение дифференциального уравнения и решить Задачу Коши:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{2 \ln x}{x} \quad \text{при} \quad y(1) = 1$$

22. Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35 см поглощает половину падающего на него света. Какую часть света поглотит слой воды толщиной 2 м?

23. Фрегат замедляет свое движение под действием сил вязкого трения воды. Начальная скорость судна 1,5 м/с, а через 4 секунды скорость равна 1 м/с. Через какое время скорость уменьшится до 1 см/с? Какой путь может пройти корабль до полной остановки? Считать, что сила трения пропорциональна скорости корабля.

24. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$2y + (x^2y + 1)x \frac{dy}{dx} = 0$$

25. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x \frac{dx}{dy} + 5 = y$$

26. Вычислить три первых последовательных приближения решения интегрального уравнения

$$y(x) + \int_0^1 xty(t)dt = x^2.$$

27. Решить уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$x(t) - \frac{1}{2} \int_0^1 x(s)ds = \sin \pi t.$$

28. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = t - \int_0^t (t-s)\varphi(s)ds.$$

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы:

1. Сергеев, И. Н. Дифференциальные уравнения: учебник для вузов. – Москва: Академия, 2013. – 286 с.
2. Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. – 2-е изд., испр. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 432 с.

Перечень дополнительной литературы:

1. Филлипов А.Ф., Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Изд.-во: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. – 177 с.
2. Эдвардс, Пенни "Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple". – Изд. - во: «Вильямс», 2008. – 1104 с.

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические рекомендации к лабораторным занятиям по дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения в физике».
2. Методические рекомендации к самостоятельной работе по дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения в физике».