

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания по выполнению практических работ

Направление подготовки 03.03.02 Физика
Направленность (профиль)
«Медицинская физика»

**Ставрополь
2026**

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Основные элементарные функции, их свойства и графики.
2. Предел функции. Основные теоремы о пределах
3. Замечательные пределы. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции
4. Непрерывные функции и их свойства. Точки разрыва и их классификация
5. Понятие производной. Правила дифференцирования. Дифференцирование сложной функции
6. Понятие производной. Правила дифференцирования. Дифференцирование сложной функции
7. Итоговое занятие по темам "Функции. Пределы. Непрерывность"
8. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Функции заданные неявно и параметрически и их дифференцирование
9. Дифференциал функции, применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков
10. Приложения производной: уравнение касательной и нормали к плоской кривой, правила Лопиталя, формула Тейлора
11. Применение производной к исследованию функций. Построение графиков функций
12. Итоговое занятие по теме "Производная и её приложения"

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ)

13. Первообразная функция, неопределенный интеграл и его свойства. Методы интегрирования в неопределенном интеграле.
14. Первообразная функция, неопределенный интеграл и его свойства. Методы интегрирования в неопределенном интеграле.
15. Интегрирование рациональных функций
16. Интегрирование иррациональных функций.
17. Интегрирование трансцендентных функций
18. Итоговое занятие по теме «Неопределенный интеграл»

3. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

19. Понятие определенного интеграла. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле
20. Приложения определенного интеграла
21. Приложения определенного интеграла

4. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

22. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования, интегралы от неограниченных функций
23. Итоговое занятие по темам «Определенный и несобственный интегралы»

5. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

- 24. Числовые ряды. Признаки сходимости знакоположительных рядов.
- 25. Знакопередающие ряды. Признак Лейбница.
- 26. Итоговое занятие по теме «Числовые ряды»

6. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

- 27. Степенные ряды и область их сходимости.
- 28. Приложения степенных рядов в приближенных вычислениях.
- 29. Ряды Фурье.
- 30. Ряды Фурье для четных и нечетных периодических функций
- 31. Итоговое занятие по разделу «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ»

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

- 32. Дифференцирование функции нескольких переменных. Частные производные и дифференциалы первого и более высоких порядков.
- 33. Экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума.
- 34. Условный экстремум.
- 35. Итоговое занятие по разделу «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

8. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

- 36. Двойные интегралы, переход к повторным интегралам
- 37. Двойные интегралы, замена переменных, переход к полярной системе координат
- 38. Приложения двойного интеграла
- 39. Тройной интеграл, вычисление путем перехода к повторным интегралам
- 40. Тройные интегралы, замена переменных, переход к цилиндрической или сферической системам координат
- 41. Приложения тройного интеграла
- 42. Итоговое занятие по теме «Кратные интегралы»
- 43. Криволинейные интегралы по длине дуги, их вычисление
- 44. Приложения криволинейных интегралов первого рода
- 45. Криволинейные интегралы по координатам, их вычисление
- 46. Приложения криволинейных интегралов второго рода
- 47. Поверхностные интегралы первого рода
- 48. Поверхностные интегралы второго рода
- 49. Итоговое занятие по разделу «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

9. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

- 50. Скалярные поля, их характеристики.
- 51. Векторные поля, их характеристики.
- 52. Интегральные формулы анализа.
- 53. Итоговое занятие по разделу «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ»

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения данной дисциплины является освоение студентами основ математического аппарата, необходимого для приобретения ими соответствующих компетенций (ОПК-1) в формировании способности использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности.

Достижение этой цели предполагает

- формирование математической культуры студентов: умения логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения практических задач;
- освоение основ современного математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач, связанных с применением методов математического анализа в дисциплинах естественнонаучного содержания;
- применение основных понятий, идей и методов математического анализа для решения базовых задач;
- умение находить, анализировать и контекстно обрабатывать научно-техническую информацию

В результате изучения дисциплины «Математический анализ» студент должен

Знать:

основные понятия, определения и свойства объектов математического анализа: функция, предел, непрерывность функции, производная функции, первообразная функция и неопределенный интеграл, определенный интеграл, двойной, тройной и криволинейные интегралы, численное интегрирование, возможные сферы их приложения в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

Уметь:

решать задачи математического анализа: исследовать функции, опираясь на аппарат дифференциального исчисления, и строить их графики, вычислять пределы функций, находить производные и дифференциалы функций, применять их в приближенных вычислениях; вычислять неопределенные, определенные, кратные и криволинейные интегралы, применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания;

Владеть:

аппаратом математического анализа, методами доказательства утверждений, навыками применения этого в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Практическое занятие № 1

Тема занятия «Основные элементарные функции, их свойства и графики»

Цель занятия: Введение понятия функции, проведение классификации функций, повторение свойств и графиков основных элементарных функций, известных из школьного курса.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение функции.
2. Что называется областью определения функции?
3. Что называется областью значений функции?
4. Дайте определение графика функции $y=f(x)$.
5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции.
6. Определите функцию обратную по отношению к функции $y=f(x)$.
7. Дайте определение возрастающей и убывающей функции.
8. Какая функция называется монотонной?
9. Дайте определение четной и нечетной функции.
10. Какая функция называется периодической?
11. Определите нули функции.
12. Что называется промежутком знакопостоянства функции?
13. Какая функция называется ограниченной?
14. Какие Вы знаете способы задания функций?
15. Определите целую рациональную функцию.
16. Какая функция называется линейной? Что является ее графиком?
17. Какая функция называется квадратичной? Что является ее графиком?
18. Определите дробно-рациональную функцию.
19. Какую функцию называют степенной? Графики каких степенных функций Вы можете построить?
20. Определите показательную функцию. Постройте в тетради графики функций $y = 2^x$, $y = (1/2)^x$.
21. Какую функцию называют логарифмической? Постройте в тетради графики функций $y = \log_2 x$, $y = \lg x$, $y = \log_{1/2} x$.
22. Какие тригонометрические функции Вы знаете? Постройте графики основных тригонометрических функций в тетради.
23. Назовите обратные тригонометрические функции. Постройте их графики в рабочей тетради.
24. Вспомните основные преобразования графиков функций (параллельный перенос на вектор, растяжение или сжатие от координатных осей), приведите примеры.

Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями
Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите область определения функции:

а) $y = \ln \frac{1}{(x^2 - 4x + 3)(x - 2)^2}$; б) $y = \sqrt{e^{x-2} - 2}$.

2. Найдите область изменения функции

а) $y = \sin(2x + 1)$; б) $y = 5\cos(3x - 2)$; в) $y = e^{x^2} - 1$.

3. Исследуйте функции на четность:

а) $y = \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 4}$; б) $y = x - \operatorname{tg} 3x$; в) $y = \frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5}$; г)

$y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

4. Определите нули и промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = \frac{2x^2 - 3}{x + 4}$; б) $y = e^{x^2 - 2x + 2}$; в) $y = \lg(x - 3) - \lg(x + 2)$.

5. Выделите промежутки, на которых существуют обратные функции для функции и найдите их

а) $f(x) = 2x + 6$; б) $f(x) = x^4 - 2x^2$.

6. С помощью геометрических преобразований постройте график функции

$y = -\left|2\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)\right| + 3$ исходя из графика функции $y = \sin x$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите области определения функций:

а) $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$; б) $y = \cos(3x - 1) + e^{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$;

в) $y = \sqrt{\ln(x^2 - 12x + 11)}$.

2. Найдите области значения функций:

а) $y = x^2 - 6x + 5$; б) $y = \lg(x^2 - 5x + 6)$.

3. Исследуйте данные функции на четность:

а) $y = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x}$; б) $y = x^4 - 40x + 5$; в) $y = x^2 + 1 + \cos 2x$.

4. Определите промежутки знакопостоянства функций:

а) $y = x^2 - 5x + 4$; б) $y = \sqrt{(x^2 - x - 2)}$.

5. Найдите функции обратные функциям:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 5, x \geq 2$; б) $f(x) = x^2 - 4x + 5, x \leq 2$.

6. С помощью геометрических преобразований постройте график функции

$y = 2|\log_2(x + 3)| - 4$ исходя из графика функции $y = \log_2 x$.

Практическое занятие № 2

Тема занятия «Предел функции. Основные теоремы о пределах»

Цель занятия: Введение понятия предел функции, формирование навыков вычисления пределов.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Что называется пределом функции в точке?
2. Определите предел функции на бесконечности.
3. Дайте определение предела функции слева (справа).
4. Может ли функция $f(x)$ иметь два различных предела при $x \rightarrow a$?
5. Чему равен предел постоянной величины?
6. Чему равен предел: а) суммы; б) разности; в) произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$?
7. Чему равен предел частного функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ($x \rightarrow a$)?
8. Как можно избавиться от неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, если числитель и знаменатель дроби содержат многочлены?
9. Как разложить квадратный трехчлен на линейные множители?
10. Сформулируйте теорему Виета.
11. Как можно избавиться от неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$, если числитель и (или) знаменатель содержат иррациональные выражения?
12. Запишите формулы сокращенного умножения, помогающие определить сопряженные выражения для данных.
13. Сформулируйте правила вычисления пределов дроби при $x \rightarrow \infty$, если числитель и знаменатель содержат многочлены.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите пределы

а) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 3)$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 8x + 20}{x^3 + 3x^2 + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^3 + 2x^2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$; д) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$; з) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt[3]{2+x} + x}$; и) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2)^3}{(x-5)^3}$;

к) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2}}{x^2 - 3x + 2}$.

2. Найдите пределы функций при $x \rightarrow \infty$:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+7}{x+2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-10^7}{3x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{3x^2 + x - 4}}$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 1}{x^3 + 5x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}; \text{ е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}.$$

3. Вычислите пределы функции при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$, если

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3}, & (x > 1) \\ \frac{2x}{4x-15}, & (x \leq 1) \end{cases}.$$

4. Найдите односторонние пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{3}{4-2x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3}{4-2x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{4-2x}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{x}}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow +0} 2^{\frac{1}{x}}.$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^3 + 1}{x^2 + 5x + 3}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)(x-3)}; \text{ е) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 + x}{(x-2)(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{x-2} \right); \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x};$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}; \text{ к) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3}; \text{ л) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x-4};$$

$$\text{м) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}; \text{ н) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}}.$$

2. Найдите пределы функций при $x \rightarrow \infty$:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2}{2x+1}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 - 1}{3x^4 + 3}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + x - 4}.$$

5. Найдите односторонние пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x-3}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x-3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{3^{1+x}}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{3^{1+x}}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{3^{x+1}}.$$

Практическое занятие № 3

Тема занятия «Замечательные пределы. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции»

Цель занятия: Формирование умений вычислять пределы функций с помощью замечательных пределов.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Запишите первый замечательный предел и следствия из него.
2. Запишите второй замечательный предел и следствия из него.
3. Определите число e . Укажите его приближенное значение с точностью до одного десятичного знака.
4. Какая показательная функция называется экспоненциальной? Постройте ее график.
5. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
6. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
7. Какова простейшая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?
8. Какова простейшая связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой величиной?
9. Что значит сравнить две бесконечно малые величины?
10. Какие две бесконечно малые величины называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных величин.
11. Как эквивалентные бесконечно малые величины могут быть использованы при вычислении пределов функции?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Вычислите пределы с помощью первого замечательного предела:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{3x}$; г) $\lim_{v \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos v}{\sin(v - \frac{\pi}{3})}$.

2. Вычислите пределы с помощью второго замечательного предела:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x+5}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{5x+1}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x/2)^{\frac{3}{x}}$.

3. Определите порядок малости нижеследующих б.м функций относительно б.м функции $\beta(x) = x - 1$, если $x \rightarrow 1$:

а) $\alpha(x) = x^3 + 2x - 3$;

б) $\alpha(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$; в) $\alpha(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2x - 1}$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Вычислите пределы с помощью первого замечательного предела:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$; в) $\lim_{z \rightarrow 1} (1-z) \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}$.

2. Вычислите пределы с помощью второго замечательного предела:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{7x}\right)^{5x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{1+x}\right)^{3x-1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{2x}}$.

3. Выполните ИДЗ по теме «Пределы функций»

Вычислить пределы функций путем алгебраических образований и применения замечательных пределов;

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + px + q}{bx^2 - a}$; 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + px + q}{bx^3 - ax^2}$;

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - b}{ax^2 + px + q}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + px + q}{x^2 - a}$;

5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + px + q}{x^3 + b}$; 6. $\lim_{x \rightarrow k} \frac{ax^2 + px + q}{x^2 - a}$;

7. $\lim_{x \rightarrow m} \frac{x^3 + b}{x^2 + px + q}$; 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx}$;

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} px}{\operatorname{ctg} qx}$; 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} px \cdot \sin 2ax$;

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{bx}\right)^{mx}$; 12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{p+ax}{q+ax}\right)^{bx+k}$.

Для выполнения заданий коэффициенты a, b, k, m, p, q выбираются из таблицы в соответствии с номером варианта.

ВАРИАНТ	a	b	k	m	p	q
1	4	-1	2	1	-3	2
2	9	-1	3	1	-4	3
3	16	-1	4	1	-5	4
4	25	-1	5	1	-6	5
5	4	1	2	-1	-1	-2
6	9	1	3	-1	-2	-3
7	16	1	4	-1	-3	-4
8	25	1	5	-1	-4	-5

9	4	-27	2	3	-5	6
10	64	-8	8	2	-10	16
11	16	-8	4	2	-6	8
12	25	-8	5	2	-7	10
13	9	8	3	-2	-1	-6
14	16	8	4	-2	-2	-8
15	25	8	5	-2	-3	-10
16	4	27	2	-3	1	-6
17	16	-27	4	3	-7	12
18	16	27	4	-3	-1	-12
19	25	-27	5	3	-8	15
20	25	27	5	-3	-2	-15
21	25	-64	5	4	-9	20
22	25	64	5	-4	-1	-20
23	4	1	-2	-1	3	2
24	9	8	-3	-2	5	6
25	16	27	-4	-3	7	12
26	25	64	-5	-4	9	20
27	9	64	-3	-4	7	12
28	9	125	-3	-5	8	15
29	4	64	-2	-4	6	8
30	4	125	-2	-5	7	10

Практическое занятие № 4

Тема занятия «Непрерывные функции и их свойства. Точки разрыва и их классификация»

Цель занятия: Введение понятия непрерывность функции, исследование функций на непрерывность.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Что называется приращением аргумента?
2. Что называется приращением функции?
3. Какая функция называется непрерывной в точке x_0 ?
4. Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке. Что можно сказать о непрерывности этой функции в точке x_0 ?
5. Какая функция называется непрерывной на интервале?
6. Что называется точкой разрыва функции?
7. Какая точка называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$?
8. Какая точка называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$?
9. Сформулируйте теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями.
10. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции, составленной из непрерывных функций.
11. Сформулируйте теорему о непрерывности основных элементарных функций.
12. Сформулируйте свойства функции, непрерывной на замкнутом интервале.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Дана функция $y = \frac{-1}{x^2}$, найдите:
 - а) x и Δy , если $x_0 = 4$ и $\Delta x = 0,2$;
 - б) Δx и Δy , если $x = 2$ и $x_0 = 2,3$;
 - в) Δy , если $x = 1$ и $\Delta x = 0,5$.
2. Определите точки разрыва функций и исследуйте ее характер:
 - а) $y = \frac{x+2}{x^2+2x-3}$;
 - б) $f(x) = \begin{cases} 2/x & (x \leq -2) \\ x-1 & (-2 < x < 1) \\ \frac{1}{x+1} & (x \geq 1) \end{cases}$.
3. Будет ли непрерывной функция $f(x)$ в точках 1; 2; -1; 0, если
 - а) $f(x) = 2x^2 - 2$;
 - б) $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

4. Испытайте функцию $y = 5 + \frac{1}{3^x}$ на непрерывность в точке $x = 0$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Определите точки разрыва функций и исследуйте ее характер:

а) $y = \frac{x-3}{x^2+3x+5}$; б) $y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$.

2. Будет ли непрерывной функция $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ в точках 1; 2; -1; 0 ?

3. Приведите примеры функций непрерывных:

а) в любой точке числовой прямой;

б) при всех значениях x , кроме $x = 5$;

в) при всех значениях x , кроме $x = -3$; 3 и 8.

4. Какого рода разрыв в точке $x = 0$ имеет функция $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$? Докажите

это.

Практическое занятие № 5-6

Тема занятия «Понятие производной. Правила дифференцирования»

Цель занятия: Введение понятия производной функции с помощью операции предельного перехода, отработка навыков в вычислении производных.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие задачи, приводящие к понятию производной, Вам известны?
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Как найти производную функции $y=f(x)$ по определению?
4. В чем состоит механический смысл производной?
5. Дайте определение непрерывной функции в точке и на отрезке. Сформулируйте свойства непрерывных функций.
6. Как связаны между собой дифференцируемость функции в некоторой точке с непрерывностью функции в этой точке?
7. Приведите пример непрерывной функции, не имеющей производной в некоторой точке.
8. Чему равна производная:
а) постоянной; б) алгебраической суммы дифференцируемых функций;
в) произведения двух дифференцируемых функций; г) дроби; д) сложной функции; е) обратной функции?
10. Запишите формулы для нахождения производных основных элементарных функций.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Пользуясь определением производной, найдите производные от следующих функций:

а) $y = 3x^2 - 4x$; б) $y = \frac{1}{x^2}$; в) $y = \sqrt{4x+1}$; г) $y = \sin(3x+1)$.

2. Дана функция: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$. Найдите производную этой

функции в точке $x = 0$.

3. Найдите производные следующих функций:

а) $y = x^4 + 3x^2 - 6$; б) $y = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 5$; в) $y = (x^2 + 2x + 1)(4x^2 + 1)$;

г) $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$; д) $y = \sqrt[3]{(1+2x)^2}$; е) $y = 3\sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$; ж) $y = x^2 - \frac{3}{x^4}$;

з) $y = 2x \sin 3x - \cos 4x$.

4. Найдите производные следующих функций:

а) $y = e^{-x^2}$; б) $y = \frac{1}{4} \ln(1+x^2)$; в) $y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$;

г) $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$; д) $y = \arccos(e^{x^2})$; е) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}$;

ж) $y = 2 \sin^2 2x \cdot \operatorname{ctg}^3 2x$; з) $y = \arcsin \sqrt{\sin x}$;

и) $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$; к) $y = \sqrt{\frac{1 + e^{2x}}{1 - e^{2x}}} \cdot (\arccos e^{2x})$.

5. Вычислите $y'(-\frac{1}{2})$, если $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Пользуясь определением производной, найдите производные от следующих функций:

$y = -2x$; $y = (2x-1)^2$; $y = \sqrt{x}$.

2. Найдите производные следующих функций:

а) $y = 6x^3 - x^2$; б) $y = x - 2\sqrt{x}$; в) $y = (\sqrt{x} - 2)^2$; г) $y = x^3(1 - 3x)$;

д) $y = (x^3 - 3x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^5}$; е) $y = \frac{2x}{1-x^2}$; ж) $y = \frac{1+2x}{1-3x}$;

з) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; и) $y = x^2 \sin 5x$; к) $y = 3x + \operatorname{tg} 2x$.

4. Найдите производные следующих функций:

а) $y = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$; б) $y = 3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2+1}}$; в) $y = x - \operatorname{arctg} 2x$;

г) $y = e^{-2x} (1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2})$; д) $y = \frac{5^{2x}}{2 + \sqrt{4 + 5^{2x}}}$; е) $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

ж) $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$; з) $y = \frac{\cos \sqrt{e^{1-2x}}}{x}$.

5. Вычислите $u'(2) + u'(0)$, если $u = x\sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{2}$.

6. Покажите, что $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, $y = e^{-\sin x} + \sin x - 1$.

Практическое занятие № 7

Тема занятия Итоговое занятие по темам "Функции. Пределы. Непрерывность"

Цель занятия: Проверка навыков вычисления пределов функции.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение функции.
2. Что называется областью определения функции?
3. Что называется областью значений функции?
4. Дайте определение графика функции $y=f(x)$.
5. Дайте определение возрастающей и убывающей функции.
6. Какая функция называется монотонной?
7. Дайте определение четной и нечетной функции.
8. Какая функция называется периодической?
9. Определите нули функции.
10. Что называется промежутком знакопостоянства функции?
11. Какая функция называется ограниченной?
12. Какие Вы знаете способы задания функций?
13. Что называется пределом функции в точке?
14. Определите предел функции на бесконечности.
15. Чему равен предел постоянной величины?
16. Чему равен предел: а) суммы; б) разности; в) произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$?
17. Чему равен предел частного функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ($x \rightarrow a$)?
18. Запишите первый замечательный предел и следствия из него.
19. Запишите второй замечательный предел и следствия из него.
20. Что называется приращением аргумента?
21. Что называется приращением функции?
22. Какая функция называется непрерывной в точке x_0 ?
23. Какая функция называется непрерывной на интервале?
24. Что называется точкой разрыва функции?

. Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Выполните ИДЗ по теме «Пределы функций»

Вычислить пределы функций путем алгебраических образований и применения замечательных пределов;

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + px + q}{bx^2 - a}; 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + px + q}{bx^3 - ax^2};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - b}{ax^2 + px + q}; 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + px + q}{x^2 - a};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + px + q}{x^3 + b}; 6. \lim_{x \rightarrow k} \frac{ax^2 + px + q}{x^2 - a};$$

$$7. \lim_{x \rightarrow m} \frac{x^3 + b}{x^2 + px + q}; 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx};$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} px}{\operatorname{ctg} qx}; 10. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} px \cdot \sin 2ax;$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{bx}\right)^{mx}; 12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{p + ax}{q + ax}\right)^{bx+k}.$$

Для выполнения заданий коэффициенты a, b, k, m, p, q выбираются из таблицы в соответствии с номером варианта.

ВАРИАНТ	a	b	k	m	p	q
1	4	-1	2	1	-3	2
2	9	-1	3	1	-4	3
3	16	-1	4	1	-5	4
4	25	-1	5	1	-6	5
5	4	1	2	-1	-1	-2
6	9	1	3	-1	-2	-3
7	16	1	4	-1	-3	-4
8	25	1	5	-1	-4	-5
9	4	-27	2	3	-5	6
10	64	-8	8	2	-10	16
11	16	-8	4	2	-6	8
12	25	-8	5	2	-7	10
13	9	8	3	-2	-1	-6
14	16	8	4	-2	-2	-8
15	25	8	5	-2	-3	-10
16	4	27	2	-3	1	-6

17	16	-27	4	3	-7	12
18	16	27	4	-3	-1	-12
19	25	-27	5	3	-8	15
20	25	27	5	-3	-2	-15
21	25	-64	5	4	-9	20
22	25	64	5	-4	-1	-20
23	4	1	-2	-1	3	2
24	9	8	-3	-2	5	6
25	16	27	-4	-3	7	12
26	25	64	-5	-4	9	20
27	9	64	-3	-4	7	12
28	9	125	-3	-5	8	15
29	4	64	-2	-4	6	8
30	4	125	-2	-5	7	10

Практическое занятие № 8

Тема занятия «Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Функции заданные неявно и параметрически и их дифференцирование»

Цель занятия: Формирование умений и навыков нахождения производных неявно заданных и параметрически заданных функций, применения логарифмического дифференцирования.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Запишите формулу логарифмического дифференцирования.
2. Когда применяется формула логарифмического дифференцирования?
3. Расскажите о дифференцировании показательной-степенной функции.
4. Дайте определение производной второго порядка, производной n -го порядка.
5. Дайте определение неявного задания функции. Приведите примеры.
6. Как от неявного задания перейти к явному заданию функции? Всегда ли это можно сделать. Приведите примеры.
7. Как проводят дифференцирование неявной функции?
8. Расскажите о нахождении производных высших порядков от неявно заданных функций.
9. Дайте определение параметрически заданной функции. Приведите примеры.
10. Расскажите как от параметрического задания функции перейти к явному заданию функции.
11. Запишите формулы для нахождения производных первого и второго порядков от параметрически заданной функции.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные следующих функций:
а) $y = x^5(1+3x)^3(1-2x)^2$; б) $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$; в) $y = \sqrt[3]{\frac{x(1+x)^2}{(1-x)^2}}$;
г) $y = (\sin x)^x$; д) $y = \sqrt[x]{x}$.
2. Найдите производные высших порядков для следующих функций:
а) $y = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 1$; $y'' = ?$ б) $y = \cos 2x$; $y''' = ?$
3. Для данных неявных функций найдите производные первого порядка $y'(x)$:
а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; б) $y = \operatorname{tg}(x+y)$.
4. Для функций, заданных параметрически, найдите производные первого

и второго порядков

$$\text{а) } \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 + 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные следующих функций:

$$\text{а) } y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}; \quad \text{б) } y = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{в) } y = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3} \sqrt[3]{(x-3)^7}};$$

$$\text{г) } y = (\cos x)^{\sin 2x}.$$

2. Найдите производные высших порядков для следующих функций:

$$\text{а) } y = 3x^3 - 5x^2 + x; \quad y''' = ? \quad \text{б) } y = e^x + 2x; \quad y^{IV} = ?$$

3. Для данной неявной функции найдите производные первого и второго порядков $e^y \sin x = e^{-x} \cos y$.

4. Для функций, заданных параметрически, найдите производные первого и второго порядков

$$\text{а) } \begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{3t}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

Практическое занятие № 9

Тема занятия «Дифференциал функции, применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков»

Цель занятия: Введение понятия дифференциал функции, изучение способа применения дифференциала функции в приближенных вычислениях.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение дифференциала функции.
2. Запишите формулу для вычисления дифференциала первого и последующих порядков.
3. Сформулируйте основные свойства дифференциалов.
4. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала? Дифференциалы каких порядков обладают указанным свойством?
5. Расскажите о геометрическом смысле дифференциала первого порядка.
6. Как используется дифференциал в приближенных вычислениях?
7. Выведите формулу приближенного вычисления значений функций. Как определить погрешность приближения?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите дифференциалы следующих функций:
а) $y = \frac{x^3}{1-x}$; б) $y = e^{x^2} - 2x + 1$; в) $y = \arccos^2 3x$; г) $y = \frac{2 \sin 2x - 3 \cos 2x}{e^{3x}}$.
2. Вычислите с точностью до 0,01 дифференциал функции
 $y = x + (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x$ при $x = -\frac{\pi}{4}$ и $dx = 0,2$.
3. С помощью дифференциала найдите приближенные значения для данных выражений:
а) $\sqrt[3]{1,02}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{120}$; г) $\sqrt[3]{9}$; д) $\sin 29^\circ$; е) $\operatorname{arctg} 0,98$; е) $\ln 1,01$; ж) $\log_2 1,98$.
4. Для данных функций найдите дифференциалы высших порядков:
а) $y = \ln 2x$; $d^3 x = ?$ б) $y = \sqrt{x}$, $d^4 x = ?$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите дифференциалы следующих функций:
а) $y = \sqrt{3 - x^2}$; б) $y = 3^{2x}$; в) $y = \sin^2 \frac{x}{3}$; г) $y = e^{-x} (2 - 2x - x^2)$.
2. Вычислите с точностью до 0,01 дифференциалы функций:
а) $y = x(1+x)(1-x)$ при $x = 10$ и $dx = 0,1$;
б) $y = x\sqrt{x^2 + 5}$ при $x = -2$ и $dx = \frac{1}{5}$.
3. С помощью дифференциала найдите приближенные значения для данных выражений:

а) $\sqrt[3]{1,1}$; б) $\sqrt[3]{26,81}$; в) $\sqrt{34}$; г) $\sqrt[4]{17}$; д) $\sqrt[10]{1000}$; е) $\cos 151^0$; ж) $\arccos 0,4993$;
з) $\operatorname{tg} 44^0 56'$; и) $\lg 11$.

4. Для данной функций найдите дифференциалы высших порядков:

$$y = e^{2x}, d^n y = ?$$

Практическое занятие № 10

Тема занятия «Приложения производной: уравнение касательной и нормали к плоской кривой, правила Лопиталя, формула Тейлора»

Цель занятия: изучение приложений производной функции.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Сформулируйте геометрический смысл производной функции.
2. Выведите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
3. Какая прямая называется нормалью к кривой? Какой вид имеет уравнение нормали?
4. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов функции.
5. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов функции.
6. Сколько раз подряд можно применять правило Лопиталя и когда это правило неприменимо?
7. Как можно раскрыть неопределенность вида $0 \cdot \infty$ при вычислении предела функции?
8. Что нужно сделать при вычислении предела функции, если он содержит неопределенность вида $\infty - \infty$?
9. Какой прием применяют для применения правил Лопиталя, если предел функции содержит неопределенность вида 0^0 , или ∞^0 , или 1^∞ ?
10. Расскажите о формуле Тейлора и формуле Маклорена. Для чего эти формулы могут использоваться?
11. Разложите по формуле Тейлора (Маклорена) функции $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Составьте уравнение касательной и нормали
 - а) к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке с абсциссой $x = 1$;
 - б) к кривой $y = \ln x$ в точке с абсциссой $x = 1$.
2. Используя правило Лопиталя, найдите следующие пределы:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$; в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 \ln x$;
 - е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$; ж) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 5x}$; з) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$; и) $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} \ln x$;

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{x^2 - 1} - \frac{7}{x^3 - 1} \right); \text{ л) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right); \text{ м) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

3. По формуле Тейлора разложите многочлен $P(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$ по степеням $x + 1$.

4. Закон зависимости массы вещества, вступившего в химическую реакцию, в зависимости от времени, выражается формулой: $m = e^{2t-2}(t^2 + 1)$, где t - время в минутах, m - масса в граммах. Сколько вещества вступит в реакцию через 66 секунд?

Задания для самостоятельной работы дома

1. Составьте уравнение касательной и нормали

а) к окружности $x^2 + y^2 = 25$ в точке $A(3; -4)$;

б) к гиперболе $y = 1/x$ в точке $A(1; 1)$.

2. Используя правило Лопиталя, найдите следующие пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 11x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+x)};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}; \text{ е) } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{\ln(e^x - e^2)}{\ln(x - 2)}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 5x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x;$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln(x + e^x); \text{ к) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right); \text{ л) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}; \text{ м) } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}.$$

3. По формуле Тейлора разложите многочлен:

а) $P(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$ по степеням $x - 2$;

б) $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ по степеням $x - 1$.

Практическое занятие № 11.

Тема занятия «Применение производной к исследованию функций.

Построение графиков функций»

Цель занятия: Показать возможность применения аппарата дифференциального исчисления к исследованию функций и построения их графиков.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на некотором промежутке.
2. Как найти интервалы монотонности функции?
3. Дайте определения экстремумов функции.
4. Определите наибольшее и наименьшее значения функции.
5. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
6. Какие точки называются критическими?
7. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.
8. Как ведется исследование функции на экстремум с помощью второй производной?
9. Укажите порядок исследования функции на возрастание и убывание и экстремумы.
10. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции? Укажите порядок решения этой задачи.
11. Определите понятия выпуклость и вогнутость графика функции.
12. Какую точку называют точкой перегиба?
13. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции?
14. Как определить точки перегиба?
15. Что называется асимптотой кривой $y = f(x)$?
16. Как найти асимптоту $y = ax + b$ кривой $y = f(x)$, т.е. как найти a и b ?
17. По какой схеме следует проводить исследование функции и построение ее графика?
18. Для решения каких вопросов исследования функции и построения ее графика:
 - а) не нужны теория пределов и дифференциальное исчисление?
 - б) необходимо уметь вычислять пределы?
 - в) нужна первая производная?
 - г) нужна вторая производная?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите интервалы возрастания и убывания следующих функций:
 - а) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$; б) $y = \frac{2x}{1+x^2}$; в) $y = \cos x - x$.
2. Исследуйте на экстремум следующие функции:

а) $y = x^2(x - 6)$; б) $y = e^x \sin x$; в) $y = \frac{x}{\ln x}$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения следующих функций:

а) $y = x^2 - 4x + 6$ на отрезке $[-3; 10]$;

б) $y = \sqrt{5 - 4x}$ на отрезке $[-1; 1]$.

в) Реакции организма на два лекарства как функции t (время выражается в часах) составляют $r_1(t) = te^{-t}$ и $r_2(t) = t^2 e^{-t}$. У какого из лекарств выше максимальная реакция?

4. Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости следующих кривых:

а) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$; б) $y = 3 - \sqrt[5]{(x + 2)^7}$; в) $y = 1 - \ln(x^2 - 4)$.

5. Найдите асимптоты следующих функций:

а) $y = \frac{2x}{x - 1}$; б) $y = \frac{1}{2x^2 + x - 1}$.

6. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $y = \frac{(x + 1)^2}{x - 2}$; б) $y = (x - 3)\sqrt{x}$.

7. Закон перехода некоторого вещества в раствор в зависимости от времени t задается формулой: $x(t) = 2(1 - e^{-5t})$. Исследуйте эту функцию и постройте график этой зависимости.

1. Выполните ИДЗ по теме «Исследование функций и построение их графиков».

Исследовать функцию и построить ее график.

Вариант 1 $y = 2 + \frac{12}{x^2 - 4}$	Вариант 2 $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$
Вариант 3 $y = x + \frac{4}{x + 2}$	Вариант 4 $y = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}$
Вариант 5 $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$	Вариант 6 $y = \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}$
Вариант 7 $y = \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{x^3}$	Вариант 8 $y = \frac{1}{x(2x - 1)}$
Вариант 9 $y = \frac{1}{x(x - 1)}$	Вариант 10 $y = x + \frac{x}{3x - 1}$
Вариант 11 $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$	Вариант 12 $y = \frac{x^3}{2(x + 1)^2}$
Вариант 13 $y = \frac{4}{2 - x} - x$	Вариант 14 $y = 1 + \frac{3}{x^2 - 1}$
Вариант 15 $y = \frac{x^3}{2(x - 1)^2}$	Вариант 16 $y = \frac{3}{4x^2 - 1} - 1$
Вариант 17 $y = \frac{-6x^2}{3x - 1}$	Вариант 18 $y = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$
Вариант 19 $y = -x + \frac{x}{3x + 1}$	Вариант 20 $y = \frac{x^4 + x^3 - 1}{x^3 - 1}$
Вариант 21 $y = \frac{1}{x(x + 1)}$	Вариант 22 $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{4x^3}$
Вариант 23 $y = \frac{x^3}{4x^2 - 1}$	Вариант 24 $y = x + \frac{x}{6x - 1}$
Вариант 25 $y = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}$	Вариант 26 $y = \frac{x^4}{1 - x^3}$

Вариант 27 $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$	Вариант 28 $y = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^2}$
Вариант 29 $y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$	Вариант 30 $y = \frac{x^3}{1 - 4x^2} + 1$

Практическое занятие №12.

Итоговое занятие по теме "Производная и её приложения"

Подготовьтесь к коллоквиуму по вопросам приведённым ниже.

Коллоквиум

Базовый уровень

Тема. Функции одной переменной и числовые последовательности.

1. Дайте определение функции.
2. Что называется областью определения функции?
3. Что называется областью значений функции?
4. Дайте определение графика функции $y=f(x)$.
5. Дайте определение возрастающей и убывающей функции.
6. Какая функция называется монотонной?
7. Дайте определение четной и нечетной функции.
8. Какая функция называется периодической?
9. Определите нули функции.
10. Что называется промежутком знакопостоянства функции?
11. Какая функция называется ограниченной?
12. Какие Вы знаете способы задания функций?

Тема. Предел функции.

1. Что называется пределом функции в точке?
2. Определите предел функции на бесконечности.
3. Чему равен предел постоянной величины?
4. Чему равен предел: а) суммы; б) разности; в) произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$?
5. Чему равен предел частного функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ($x \rightarrow a$)?
6. Запишите первый замечательный предел и следствия из него.
7. Запишите второй замечательный предел и следствия из него.

Тема. Непрерывность функции.

1. Что называется приращением аргумента?
2. Что называется приращением функции?
3. Какая функция называется непрерывной в точке x_0 ?
4. Какая функция называется непрерывной на интервале?
5. Что называется точкой разрыва функции?

Тема. Производная функции. Правила дифференцирования.

1. Какие задачи, приводящие к понятию производной, Вам известны?
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Опишите порядок вычисления производной функции по определению.
4. Чему равна производная: а) постоянной б) алгебраической суммы дифференцируемых функций; в) произведения двух дифференцируемых функций; г) дроби; д) сложной функции; е) обратной функции?

5. Запишите формулы для нахождения производных основных элементарных функций.

Тема. Дифференциал функции.

1. Дайте определение дифференциала функции.
2. Сформулируйте основные свойства дифференциалов.

Тема. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.

1. Запишите формулу логарифмического дифференцирования. Когда применяется формула логарифмического дифференцирования?
2. Дайте определение неявного задания функции. Приведите примеры. Как от неявного задания перейти к явному заданию функции? Всегда ли это можно сделать. Приведите примеры.
3. Как проводят дифференцирование неявной функции?
4. Дайте определение параметрически заданной функции. Приведите примеры. Расскажите как от параметрического задания функции перейти к явному заданию функции.

Тема. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения.

1. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов функции.
2. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов функции.
3. Расскажите о формуле Тейлора и формуле Маклорена. Для чего эти формулы могут использоваться?

Тема. Приложения производной.

1. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на некотором промежутке. Как найти интервалы монотонности функции?
2. Дайте определения экстремумов функции.
3. Определите наибольшее и наименьшее значения функции.
4. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
5. Какие точки называются критическими?
6. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.
7. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции? Укажите порядок решения этой задачи.
8. Определите понятия выпуклость и вогнутость графика функции. Какую точку называют точкой перегиба? Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции? Как определить точки перегиба?

Повышенный уровень

Тема. Функции одной переменной и числовые последовательности.

1. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции.

2. Определите функцию обратную по отношению к функции $y=f(x)$.
3. Определите целую рациональную функцию.
4. Какая функция называется линейной? Что является ее графиком?
5. Какая функция называется квадратичной? Что является ее графиком?
6. Определите дробно-рациональную функцию.
7. Какую функцию называют степенной? Графики каких степенных функций Вы можете построить?
8. Определите показательную функцию. Постройте в тетради графики функций $y = 2^x$, $y = (1/2)^x$.
9. Какую функцию называют логарифмической? Постройте в тетради графики функций $y = \log_2 x$, $y = \lg x$, $y = \log_{1/2} x$.
10. Какие тригонометрические функции Вы знаете? Постройте графики основных тригонометрических функций в тетради.
11. Назовите обратные тригонометрические функции. Постройте их графики.
12. Вспомните основные преобразования графиков функций (параллельный перенос на вектор, растяжение или сжатие от координатных осей), приведите примеры.

Тема. Предел функции.

1. Дайте определение предела функции слева (справа).
2. Может ли функция $f(x)$ иметь два различных предела при $x \rightarrow a$?
3. Как можно избавиться от неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, если числитель и знаменатель дроби содержат многочлены?
4. Как разложить квадратный трехчлен на линейные множители? Сформулируйте теорему Виета.
5. Как можно избавиться от неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$, если числитель и (или) знаменатель содержат иррациональные выражения? Запишите формулы сокращенного умножения, помогающие определить сопряженные выражения для данных.
6. Сформулируйте правила вычисления пределов дроби при $x \rightarrow \infty$, если числитель и знаменатель содержат многочлены.
7. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
8. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
9. Какова простейшая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?
10. Какова простейшая связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой величиной?
11. Что значит сравнить две бесконечно малые величины?
12. Какие две бесконечно малые величины называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных величин.

13. Как эквивалентные бесконечно малые величины могут быть использованы при вычислении пределов функции?

Тема. Непрерывность функции.

1. Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке. Что можно сказать о непрерывности этой функции в точке x_0 ?
2. Какая точка называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$?
3. Какая точка называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$?
4. Сформулируйте теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями.
5. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции, составленной из непрерывных функций.
6. Сформулируйте теорему о непрерывности основных элементарных функций.
7. Сформулируйте свойства функции, непрерывной на замкнутом интервале.

Тема. Производная функции. Правила дифференцирования.

1. Как найти производную функции $y=f(x)$ по определению?
2. В чем состоит механический смысл производной?
3. Как связаны между собой дифференцируемость функции в некоторой точке с непрерывностью функции в этой точке?
4. Приведите пример непрерывной функции, не имеющей производной в некоторой точке.
5. Дайте определение сложной функции. Приведите примеры.
6. Сформулируйте теорему для нахождения производной сложной функции.
7. Составьте таблицу нахождения производных для функций вида $f(u)$, где f - одна из элементарных функций, $u = u(x)$.

Тема. Дифференциал функции.

1. Запишите формулу для вычисления дифференциала первого и последующих порядков.
2. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала? Дифференциалы каких порядков обладают указанным свойством?
3. Расскажите о геометрическом смысле дифференциала первого порядка.
4. Как используется дифференциал в приближенных вычислениях?
5. Выведите формулу приближенного вычисления значений функций. Как определить погрешность приближения?
6. Дайте определение производной второго порядка, производной n -го порядка.

Тема. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.

1. Расскажите о дифференцировании показательной-степенной функции.
2. Расскажите о нахождении производных высших порядков от неявно заданных функций.

3. Запишите формулы для нахождения производных первого и второго порядков от параметрически заданной функции.

Тема. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения.

1. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
2. Теоремы Ферма, Роля.
3. Теоремы Лагранжа, Коши.

Тема. Приложения производной к исследованию функций.

1. Выведите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2. Сколько раз подряд можно применять правило Лопиталя и когда это правило неприменимо?
3. Как можно раскрыть неопределенность вида $0 \cdot \infty$ при вычислении предела функции?
4. Что нужно сделать при вычислении предела функции, если он содержит неопределенность вида $\infty - \infty$?
5. Какой прием применяют для применения правил Лопиталя, если предел функции содержит неопределенность вида 0^0 , или ∞^0 , или 1^∞ ?
6. Разложите по формуле Тейлора (Маклорена) функции $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.
7. Как ведется исследование функции на экстремум с помощью второй производной?
8. Укажите порядок исследования функции на возрастание и убывание и экстремумы.
9. Что называется асимптотой кривой $y = f(x)$?
10. Как найти асимптоту $y = ax + b$ кривой $y = f(x)$, т.е. как найти a и b ?
11. По какой схеме следует проводить исследование функции и построение ее графика?
12. Для решения каких вопросов исследования функции и построения ее графика:
 - а) не нужны теория пределов и дифференциальное исчисление?
 - б) необходимо уметь вычислять пределы?
 - в) нужна первая производная?
 - г) нужна вторая производная

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ)

Практическое занятие № 13-14

Тема занятия Первообразная функция, неопределенный интеграл и его свойства. Методы интегрирования в неопределенном интеграле.

Цель занятия: Установление связи между понятиями первообразной функции и неопределенный интеграл. Формирование навыков вычисления неопределенных интегралов с помощью непосредственного интегрирования.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение первообразной функции для данной функции $f(x)$ на данном промежутке.
2. Как связаны между собой две первообразные для функции $f(x)$ в некотором промежутке?
3. Что называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$?
4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла (правила интегрирования).
5. Составьте таблицу основных интегралов.
6. В чем суть метода непосредственного интегрирования?
7. Сформулируйте теорему об инвариантности формул интегрирования.
 1. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
Когда целесообразно применять замену переменной интегрирования?
 2. Расскажите, как применяется формула замены переменной в неопределенном интеграле. Что необходимо сделать после сведения интеграла к табличному?
 3. Запишите формулу интегрирования по частям.
 4. Когда целесообразно применение способа интегрирования по частям?
 5. Интегралы какого вида можно вычислять с помощью формулы интегрирования по частям?
 6. Что принимается за u для интегралов вида

$$\int P(x)e^{ax} dx, \int P(x)\sin ax dx, \int P(x)\cos ax dx \quad (P(x) - \text{многочлен})?$$

7. Что принимается за u для интегралов вида

$$\int P(x)\ln x dx, \int P(x)\operatorname{arctg} x dx, \int P(x)\operatorname{arccot} x dx, \int P(x)\arcsin x dx, \int P(x)\arccos x dx \quad (P(x) - \text{многочлен})?$$

8. Как вычисляются интегралы $\int a^{kx} \sin nx dx$ и $\int a^{kx} \cos nx dx$?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите первообразные следующих функций и результаты проверьте дифференцированием: а) $\frac{1}{\sin^2 x}$; б) $x^2 - 2x + 2$.

2. Вычислите методом непосредственного интегрирования:

а) $\int (x^5 + 4x^2 - 3x + 1) dx$; б) $\int (1 - 2x)(1 - x)(1 - 3x) dx$; в) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx$;

г) $\int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3} dx$; д) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$; е) $\int (1 + \sin x + \cos x) dx$.

3. Преобразуя дифференциал, сведите интегралы к табличным и вычислите их:

а) $\int \sqrt[3]{1 - 3x} dx$; б) $\int \frac{dx}{5 - 2x}$; в) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$; г) $\int \frac{dx}{\cos^2 12x}$.

Методом замены переменной вычислите интегралы:

а) $\int \cos^5 4x \cdot \sin 4x dx$; б) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - 1}}$.

1. Вычислите интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int (1 - 3x)e^{2x} dx$; б) $\int (x^2 - 1)\sin 3x dx$; в) $\int x \operatorname{arctg} 3x dx$;

г) $\int e^x \cos x dx$; д) $\int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} dx$.

2. Вычислите интегралы:

а) $\int e^{x+x^2} (1+2x)dx$; б) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$; в) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

3. Разбейте предложенные ниже интегралы на классы

А) – интегралы, вычисляемые непосредственно;

Б) – интегралы, вычисляемые с помощью замены переменных;

В) – интегралы, берущиеся по частям

$\int (3-x^2)^3 dx$; $\int \frac{e^{x/2} dx}{\sqrt{16-e^x}}$; $\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx$; $\int (2^x + 3^x)^2 dx$; $\int \frac{x dx}{(5+9x^2)^3}$; $\int e^{2x} (1-x) dx$;

$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$; $\int e^{5+9x^2} x dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$; $\int (1-3x) \cos 5x dx$; $\int (2x^3 - 1) e^{-x} dx$;

$\int e^{-3x} \cos 4x dx$; $\int \frac{dx}{x^2 - 36}$; $\int x^2 \arccos 2x dx$; $\int (2x-3)^{10} dx$; $\int 2^{3x} \sin 5x dx$;

$\int \sin^4 3x \cos 3x dx$; $\int (2x^3 - 1) \ln(x-1) dx$.

5. Вычислите интегралы, вычисляемые непосредственно, из предложенных в предыдущем задании.

6. В классе Б) укажите интегралы, сводящиеся к интегралам вида

а) $\int t^\alpha dt$; б) $\int \sin t dt$.

7. Для интегралов класса В) определите

а) какую функцию необходимо выбирать в качестве u ;

б) сколько раз необходимо брать интеграл по частям;

в) вычислите по одному интегралу из каждого из трех классов берущихся по частям.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Даны пары функций. Из каждой пары выпишите ту функцию, которая является первообразной для другой, и обозначьте ее через $F(x)$:

а) $\cos 3x$ и $-3\sin 3x$; б) $3x^2 + 5$ и $x^3 + 5x$; в) $\frac{5}{\cos^2 5x}$ и $\operatorname{tg} 5x$;

г) $2e^{2x}$ и e^{2x} ; д) 7^x и $7^x \ln 7$; е) $-\frac{2}{\sin^2 2x}$ и $\operatorname{ctg} 2x$.

2. Найдите первообразные следующих функций и результаты проверьте дифференцированием:

а) $\frac{2}{x}$; б) $\sqrt{x}$; в) $\sin x + 2\cos x$; г) $e^x + 3x$.

3. Проверьте справедливость формул интегрирования:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$; б) $\int \sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right) + C$.

4. Вычислите методом непосредственного интегрирования:

а) $\int (3-x^2)^3 dx$; б) $\int (x + \sqrt{x}) dx$; в) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$;

г) $\int \frac{x^2 + 3x - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$; д) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$; е) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

5. Преобразуя дифференциал, сведите интегралы к табличным и вычислите их:

а) $\int (2x-3)^{10} dx$; б) $\int \frac{dx}{1-x}$; в) $\int \frac{dx}{3x-7}$; г) $\int 2e^{-3x} dx$; д) $\int (\sin 5x - \cos 7x) dx$.

4. Методом замены переменной вычислите интегралы:

а) $\int x(\sin x^2) dx$; б) $\int \frac{xdx}{x^2-1}$; в) $\int \frac{e^{\frac{x}{2}} dx}{\sqrt{16-e^x}}$.

5. Вычислите интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int (x-1)\cos 2x dx$; б) $\int \arcsin x dx$; в) $\int (x^2-1)\ln 2x dx$; г) $\int e^{-x} \cos 2x dx$.

6. Вычислите интегралы:

а) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$; в) $\int \frac{\cos x dx}{(5\sin x + 2)^2}$.

4. Разбейте предложенные ниже интегралы на классы

А) – интегралы, вычисляемые непосредственно;

Б) – интегралы, вычисляемые с помощью замены переменных;

В) – интегралы, берущиеся по частям.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{3x-7}; \int \frac{dx}{3+x^2}; \int \frac{dx}{\cos^2 12x}; \int (1-3x) \ln 2x dx; \int \frac{x dx}{5+9x^2}; \int \frac{e^{2x}}{e^x-1} dx; \int \frac{dx}{x \ln^3 x}; \\
& \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2 \cos x}}; \int \frac{2x^2+x-1}{x^3} dx; \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)}; \int (2^x - 2^{-x}) dx; \int \frac{\ln^2 x dx}{x}; \int x \sin x^2 dx; \\
& \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}; \int 2^{-x} \cos 5x dx; \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-\cos x}}; \int (x^2+1) 2^{3x} dx; \int (3x^4-3x^2) \sin 3x dx; \\
& \int \frac{\sin x dx}{1+3 \cos x}; \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx; \int \cos x e^{\sin x} dx; \int x^2 e^{2x} dx; \int \ln 3x dx; \int (x^3-2x) \sin x dx; \\
& \int (2x-1) 2^{3x} dx; \int \frac{dx}{x \ln x}; \int (1-5x^3) \cos 2x dx.
\end{aligned}$$

5. В классе Б) укажите интегралы

- а) вычисляемые с помощью подстановки $t = \ln x$;
- б) вычисляемые с помощью подстановки $t = x^2$;
- в) вычисляемые с помощью подстановки $t = \sin x$.

6. В классе В) укажите интегралы

- а) дважды берущиеся по частям;
- б) трижды берущиеся по частям;
- в) сводящиеся к линейному уравнению относительно искомого интеграла.

7. Вычислите по одному интегралу из каждого класса, выделенному в заданиях 1-3.

Практическое занятие № 15

Тема занятия «Интегрирование рациональных функций»

Цель занятия: изучение способов интегрирования рациональных функций и формирование навыков интегрирования.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Расскажите о нахождении интегралов вида $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$; $\int \frac{(Ax + B)dx}{ax^2 + bx + c}$.
2. Как находится интеграл от целой рациональной функции?
3. Какая рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется правильной?
4. Рациональные дроби, какого вида называются элементарными?
5. Как связана правильная рациональная дробь с элементарными дробями? Расскажите, как составляется схема разложения правильной дроби на основные элементарные дроби.
6. Какой способ применяется для разложения правильной рациональной дроби на сумму элементарных дробей?
7. Как интегрируются правильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от правильной рациональной дроби.
8. Как интегрируются неправильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от неправильной рациональной дроби.
9. Всегда ли можно найти интеграл от рациональной функции?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Вычислите следующие интегралы:

а) $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 3}$; б) $\int \frac{5x + 3}{x^2 + 10x + 29}$; в) $\int \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 7}$; г) $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 2x^3 + 3}$;
д) $\int \frac{(x^2 + 2)dx}{(x + 1)^2(x - 1)}$; е) $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$; ж) $\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 - 1} dx$.

Задания для самостоятельной работы дома

Вычислите следующие интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 25}$; б) $\int \frac{dx}{x^2 - x - 6}$; в) $\int \frac{x dx}{2x^2 + 2x + 5}$; г) $\int \frac{2x^3 + 3x}{x^4 + x^2 + 1} dx$;

д) $\int \frac{6x^3 - 7x^2 + 3x - 1}{2x - 3x^2} dx$; е) $\int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} dx$; ж) $\int \frac{dx}{1 - x^3}$; з) $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$;

и) $\int \frac{dx}{(1 + x^3)^2}$; к) $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$; л) $\int \frac{x^4}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx$.

Практическое занятие № 16

Тема занятия «Интегрирование иррациональных функций»

Цель занятия: формирование умений и навыков интегрирования иррациональных функций.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Перечислите, в каких случаях интегралы, содержащие элементарные функции интегрируются в элементарных функциях.

2. Расскажите о нахождении интегралов $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$.

Какие замены при их вычислении необходимо сделать и к каким табличным интегралам они сводятся?

3. Сформулируйте порядок отыскания интеграла от функции, содержащей квадратный корень из квадратного трехчлена в знаменателе дроби и постоянную величину в числителе.

4. Сформулируйте порядок отыскания интеграла от функции, содержащей квадратный корень из квадратного трехчлена в знаменателе дроби и линейную функцию в числителе.

5. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов:

$$\int R\left(x, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{s}{t}}\right) dx; \quad \int R\left(x, (\alpha x + \beta)^{\frac{p}{q}}, \dots, (\alpha x + \beta)^{\frac{s}{t}}\right) dx;$$

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{s}{t}}\right) dx, \text{ где } R - \text{рациональная функция, } p, q, \dots, s, t -$$

целые числа.

6. Расскажите, какие подстановки применяются при вычислении интегралов $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$? К каким табличным интегралам они сводятся?

7. Расскажите о вычислении интегралов от дифференциального бинома

$\int x^m (a + bx^n)^p dx$. Назовите случаи интегрирования дифференциального бинома в элементарных функциях.

8. Какие способы нахождения интеграла вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ можете указать?

9. Расскажите о применении подстановок Эйлера при вычислении интегралов $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$. Сколько существует подстановок Эйлера? В каком случае может применяться каждая из них? Без какой из подстановок можно было бы обойтись? Объясните почему?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Вычислите интегралы:

1. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2 + 4x - 1}}$; в) $\int \frac{5x + 3}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}} dx$.
2. а) $\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}$.
3. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^5}}$; в) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(1+x^3)^5}}$.

Задания для самостоятельной работы дома

Вычислите интегралы:

1. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$.
2. а) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}} dx$; б) $\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$; в) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+6x}} dx$.
3. а) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-16)^3}}$; в) $\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2 \sqrt{1+x+x^2}} dx$.

Практическое занятие № 17

Тема занятия «Интегрирование трансцендентных функций»

Цель занятия: формирование умений и навыков вычисления интегралов, содержащие тригонометрические и другие трансцендентные функции.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие формулы применяются для вычисления следующих интегралов:

а) $\int \sin ax \cos bxdx, \int \cos ax \cos bxdx, \int \sin ax \sin bxdx$, где $a \neq b$.

б) $\int \sin^m x dx, \int \cos^n x dx$, где m и n положительные целые числа.

2. Расскажите о нахождении интегралов от четной степени синуса или косинуса.

3. Расскажите о нахождении интегралов от нечетной степени синуса или косинуса.

4. Какие случаи необходимо рассмотреть при нахождении интегралов вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

5. Какую замену следует сделать при нахождении интегралов вида $\int \operatorname{tg}^n x dx, \int \operatorname{ctg}^n x dx$?

6. Расскажите о вычислении интегралов от произведения тригонометрических функций.

7. Какой способ нахождения интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x) dx, \int R(\operatorname{tg} x) dx, \int R(e^x) dx$ Вы можете предложить? К какому типу интегралов они сводятся?

8. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов:

а) $\int f(\sin x) \cos x dx$;

б) $\int f(\cos x) \sin x dx$;

в) $\int f(\operatorname{tg} x) \frac{dx}{\cos^2 x}$ или $\int f(\operatorname{tg} x) dx$;

$$\text{г) } \int f(\operatorname{ctg} x) \frac{dx}{\sin^2 x} \text{ или } \int f(\operatorname{ctg} x) dx;$$

$$\text{д) } \int R(\sin x, \cos x) dx, \text{ где } R - \text{рациональная функция.}$$

9. Приведите примеры «неберущихся» интегралов.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Вычислите интегралы:

$$1. \text{ а) } \int \sin 5x \sin 6x dx; \text{ б) } \int \cos \frac{4}{3} x \cos 3x dx.$$

$$2. \text{ а) } \int \sin^2 3x dx; \text{ б) } \int \cos^4 x dx; \text{ в) } \int \sin^5 x dx; \text{ г) } \int \cos^7 x dx.$$

$$3. \text{ а) } \int \sin^3 x \cos^2 x dx; \text{ б) } \int \cos^3 x \sin^5 x dx; \text{ в) } \int \sin^4 x \cos^2 x dx.$$

$$4. \text{ а) } \int \operatorname{ctg}^3 3x dx; \text{ б) } \int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}; \text{ в) } \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x}; \text{ г) } \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx.$$

Задания для самостоятельной работы дома

Вычислите интегралы:

$$1. \text{ а) } \int \sin 2x \cos 5x dx; \text{ б) } \int \cos 3x \cos 4x dx.$$

$$2. \text{ а) } \int \cos^5 x dx; \text{ б) } \int \sin^2 4x dx; \text{ в) } \int (1 + 2 \cos x)^2 dx.$$

$$3. \text{ а) } \int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx; \text{ б) } \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx.$$

$$4. \text{ а) } \int \operatorname{tg}^5 3x dx; \text{ б) } \int \operatorname{ctg}^4 x dx; \text{ в) } \int \frac{dx}{5 + 4 \cos 2x}; \text{ г) } \int \frac{dx}{5 \sin x - \cos x}.$$

Практическое занятие № 18

Тема занятия Итоговое занятие по теме «Неопределенный интеграл»

Цель занятия: Контроль знаний студентов по теме «Неопределенный интеграл»

Форма проведения занятия - коллоквиум

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Базовый уровень

Тема 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ)

1. Дайте определение первообразной функции для данной функции $f(x)$ на данном промежутке. Как связаны между собой две первообразные для функции $f(x)$ в некотором промежутке?
2. Что называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$?
3. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла (правила интегрирования).
4. Составьте таблицу основных интегралов.
5. В чем суть метода непосредственного интегрирования?
6. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле. Когда целесообразно применять замену переменной интегрирования?
7. Запишите формулу интегрирования по частям. Когда целесообразно применение способа интегрирования по частям?
8. Интегралы какого вида можно вычислять с помощью формулы интегрирования по частям?
9. Расскажите о нахождении интегралов вида $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$; $\int \frac{(Ax + B)dx}{ax^2 + bx + c}$.
10. Как находится интеграл от целой рациональной функции?
11. Какая рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется правильной?
12. Рациональные дроби, какого вида называются элементарными? Как связана правильная рациональная дробь с элементарными дробями? Расскажите, как составляется схема разложения правильной дроби на основные элементарные дроби.
13. Какой способ применяется для разложения правильной рациональной дроби на сумму элементарных дробей?
14. Интегрирование иррациональных функций, содержащих квадратный трехчлен.
15. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов:

$$\int R\left(x, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{s}{t}}\right) dx; \quad \int R\left(x, (ax + \beta)^{\frac{p}{q}}, \dots, (ax + \beta)^{\frac{s}{t}}\right) dx;$$

$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{s}{t}} \right) dx$, где R - рациональная функция, $p, q, \dots, s, t$ - целые числа.

16. Расскажите о нахождении интегралов от четной степени синуса или косинуса.
17. Расскажите о нахождении интегралов от нечетной степени синуса или косинуса.
18. Приведите примеры «неберущихся» интегралов.

Повышенный уровень

Тема 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ)

1. Сформулируйте теорему об инвариантности формул интегрирования.
2. Расскажите, как применяется формула замены переменной в неопределенном интеграле. Что необходимо сделать после сведения интеграла к табличному?
3. Что принимается за u для интегралов вида $\int P(x)e^{ax} dx$, $\int P(x)\sin ax dx$, $\int P(x)\cos ax dx$ ($P(x)$ - многочлен)?
4. Что принимается за u для интегралов вида $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arctg x dx$, $\int P(x)\operatorname{arccotg} x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$ ($P(x)$ - многочлен)?
5. Как вычисляются интегралы $\int a^{kx} \sin nxdx$ и $\int a^{kx} \cos nxdx$?
6. Как интегрируются правильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от правильной рациональной дроби.
7. Как интегрируются неправильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от неправильной рациональной дроби.
8. Всегда ли можно найти интеграл от рациональной функции?
9. Вычисление интегралов $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$,
 $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$.
10. Интегралы от дифференциального бинома $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, случаи интегрирования в элементарных функциях.
11. Сформулируйте порядок отыскания интеграла от функции, содержащей квадратный корень из квадратного трехчлена в знаменателе дроби и линейную функцию в числителе.
12. Какие способы нахождения интеграла вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ можете указать?
13. Расскажите о применении подстановок Эйлера при вычислении интегралов $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$. Сколько существует подстановок Эйлера? В каком случае может применяться каждая из них? Без какой из подстановок можно было бы обойтись? Объясните почему?
14. Какие формулы применяются для вычисления следующих интегралов:
а) $\int \sin ax \cos bxdx$, $\int \cos ax \cos bxdx$, $\int \sin ax \sin bxdx$, где $a \neq b$.

б) $\int \sin^m x dx, \int \cos^n x dx$, где m и n положительные целые числа.

в) Какие случаи необходимо рассмотреть при нахождении интегралов вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

15. Какую замену следует сделать при нахождении интегралов вида $\int \operatorname{tg}^n x dx, \int \operatorname{ctg}^n x dx$?

16. Какой способ нахождения интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x) dx, \int R(\operatorname{tg} x) dx, \int R(e^x) dx$ Вы можете предложить? К какому типу интегралов они сводятся?

17. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов:

а) $\int f(\sin x) \cos x dx$;

б) $\int f(\cos x) \sin x dx$;

в) $\int f(\operatorname{tg} x) \frac{dx}{\cos^2 x}$ или $\int f(\operatorname{tg} x) dx$;

г) $\int f(\operatorname{ctg} x) \frac{dx}{\sin^2 x}$ или $\int f(\operatorname{ctg} x) dx$;

д) $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R - рациональная функция.

3. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Практическое занятие № 19

Тема занятия «Понятие определенного интеграла. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле»

Цель занятия: Установление связи между понятиями неопределенного и определенного интегралов. Формирование навыков нахождения определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница, применения формулы замены переменной и метода интегрирования по частям в определенном интеграле.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Что называется определенным интегралом от a до b от функции $f(x)$?
2. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
3. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
4. Запишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.
5. Запишите формулу замены переменной в определенном интеграле.
6. На что следует обращать внимание при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной по сравнению с неопределенным интегралом?
7. Расскажите о приближенных способах вычисления определенного интеграла (формула прямоугольников, формула трапеций, метод Симпсона).
8. Разберите примеры решения типовых задач в тетради.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислите определенные

интегралы: а) $\int_0^1 x^4 dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; в) $\int_1^e \frac{dx}{x}$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; д) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

2. Методом замены переменной вычислите определенные интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_1^2 \frac{dx}{2x-1}; \text{ б) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5x dx}{(1-x^2)^3}; \text{ в) } \int_{2\sqrt{2}}^4 x \sqrt{x^2-7} dx; \text{ г) } \int_1^e \frac{\ln x dx}{x}; \text{ д) } \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}} x^2 \sin 3x^3 dx; \\ \text{е) } \int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{9+x^2}}; \text{ ж) } \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

3. Вычислите определенные интегралы методом интегрирования по частям:

$$\text{а) } \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx; \text{ б) } \int_0^{\pi} x \sin x dx; \text{ в) } \int_1^e \ln^2 x dx; \text{ г) } \int_0^1 \arcsin x dx; \text{ д) } \int_0^{\sqrt{3}} x \arctg x dx.$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислите определенные

$$\text{интегралы: а) } \int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx; \text{ б) } \int_0^1 e^x dx; \text{ в) } \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \text{ г) } \int_0^{\pi} \sin x dx.$$

2. Методом замены переменной вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}; \text{ б) } \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^4}; \text{ в) } \int_0^1 \frac{3e^x dx}{e^x+2}; \text{ г) } \int_1^2 \frac{3x^2+2}{x^3+2x} dx; \text{ д) } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{5 \sin x dx}{(1-\cos x)^3};$$

$$\text{е) } \int_0^2 3x e^{x^2} dx; \text{ ж) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{1+4x^2} dx.$$

3. Вычислите определенные интегралы методом интегрирования по частям:

$$\text{а) } \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx; \text{ б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+3) \sin 2x dx; \text{ в) } \int_1^e x^2 \ln x dx; \text{ г) } \int_0^1 \arccos x dx.$$

Практическое занятие № 20-21
Тема занятия «Приложения определенного интеграла»

Цель занятия: Показать возможность применения интегрального исчисления к решению задач различных областей естествознания.

Теоретические задания
для развития и контроля владения компетенциями

1. Подготовьтесь к самостоятельной работе по теме «Определенный интеграл». Примерный вариант можете найти в программе дисциплины.
2. Что называется площадью плоской фигуры?
3. Как найти площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла?
4. Дайте определение полярной системы координат. Установите формулы, связывающие полярные и прямоугольные координаты точки.
5. Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры в полярных координатах.
5. Что называется объемом тела? Как найти объем тела вращения?
7. Что называется длиной дуги?
8. Как найти длину дуги: если функция задана:
 - а) в декартовых координатах?
 - б) в полярных координатах?
 - в) параметрически?
9. Какие еще приложения определенных интегралов Вы знаете?
10. Разберите примеры решения типовых задач в тетради.

Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями
Задания, решаемые в аудитории

1. Вычислите площадь, ограниченную линиями:
 - а) параболой $y = 2x - x^2$ и осью Ox ;
 - б) параболой $y = x^2 + 4x$ и прямой $x - y + 4 = 0$;
 - в) кубической параболой $y = x^3$ и прямыми $y = x$, $y = 2x$;
 - г) эллипсом $x = a \cos t$, $y = a \sin t$; д) кардиодой $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.
2. Вычислите объем тела, образованного вращением фигуры,

ограниченной линиями:

а) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ вокруг оси Oy ; б) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ вокруг оси Ox .

3. Вычислите длину дуги кривой:

а) одной арки циклоиды и $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$;

б) кривой $\rho = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$.

4. Найдите количество вещества m , вступившего в реакцию за первые 5 секунд, если скорость химической реакции $v = 2t^3 - t^2 + 2$.

5. Скорость роста некоторой популяции микроорганизмов задается формулой $v(t) = 5e^{2t}$. Найдите прирост численности популяции за промежуток времени с 10 по 25 секунду.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Вычислите площадь, ограниченную линиями:

а) полукубической параболой $y^2 = x^3$ и прямыми $x = 0, y = 4$;

б) первым завитком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ и полярной осью.

2. Вычислите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x, x = 4$ вокруг оси Ox .

3. Вычислите длину дуги полукубической параболы $y^2 = (x-1)^3$ между точками $A(2;-1)$ и $B(5;-8)$.

4. Численность особей популяции возраста τ (усл.ед.) задается формулой $N(\tau) = -\tau^2 + 1000\tau$, а средняя масса особи возраста $\tau P(\tau) = 2\tau^2 - \tau$. Найдите биомассу этой популяции, если максимальный возраст особи в данной популяции 10^3 .

4. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Практическое занятие № 22

Тема занятия «Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования, интегралы от неограниченных функций»

Цель занятия: формирование умений вычислять несобственные интегралы.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Определите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования.
2. Когда несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся (расходящимся)?
3. Для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
4. Определите несобственный интеграл от разрывной функции.
5. Когда несобственный интеграл от разрывной функции называется сходящимся (расходящимся)?
6. Для несобственного интеграла от разрывной функции запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
7. Сформулируйте теорему сравнения для несобственных интегралов.
8. Дайте определение абсолютно сходящегося интеграла.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость

а) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$; б) $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$; в) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; г) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$; д) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; е) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

2. Укажите верные утверждения:

Если $\forall x \in [a; +\infty)$ $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам $0 \leq g(x) \leq f(x)$, то ...

- из сходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$;
- из расходимости $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$;
- из сходимости $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$;
- из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$;
- из сходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$;
- из расходимости $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость

- а) $\int_{-\infty}^1 e^x dx$; б) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$; в) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$; г) $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$; д) $\int_1^{+\infty} \frac{x+5}{x^3 \sqrt{x}} dx$;
- е) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; ж) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^3}$; з) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$; и) $\int_{-2}^2 \frac{x dx}{x^2-1}$.

2. Укажите верные утверждения:

- из сходимости $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x) dx$;
- из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$;
- из сходимости $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$;

- из расходимости $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

2. Выполните задание 1 (вычислите интегралы 1)-7)) ИДЗ №7 по теме «Основные методы интегрирования. Приложения определенного интеграла»

вариант 1 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(\frac{5}{\cos^2 2x} - e^{3x} + 3\sqrt{x} \right) dx,$ 2) $\int (2 + \sqrt{x})^2 x^3 dx,$ 3) $\int x e^{\frac{x}{7}} dx,$ 4) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+3}} dx,$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} x \cos 4x dx,$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 6x - x^2$ и осью OX.	Вариант 2 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(3 \cos 6x + 5^{-x} - \frac{2}{x^2 - 4} \right) dx,$ 2) $\int \frac{(1-x)^3}{x} dx,$ 3) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+5}} dx,$ 4) $\int x \sin \frac{x}{10} dx,$ 5) $\int_1^e x^2 \ln x dx,$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x + 2}{\cos^2 x} dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{4+x}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 3$.
Вариант 3 1. Вычислить интегралы.	Вариант 4 1. Вычислить интегралы.

1) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{9-x^2}} - e^{\frac{x}{3}} + \frac{12}{16+x^2} \right) dx,$ 2) $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^3} dx,$ 3) $\int \frac{\ln x + 4}{x} dx,$ 4) $\int \sqrt{x} \ln x dx,$ 5) $\int_0^1 x 4^x dx,$ 6) $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx,$ 7) $\int_0^\infty \frac{dx}{x+x^2}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -x^2 + 7x - 10$ и $y = 0$.	1) $\int \left(\frac{4}{9-x^2} - \sin 2x + 3\sqrt{x} \right) dx,$ 2) $\int \frac{(2+3x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx,$ 3) $\int x 7^x dx,$ 4) $\int \sqrt{x+1} dx,$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos 2x dx,$ 6) $\int_{-4}^4 \frac{x-5}{\sqrt{x+5}} dx,$ 7) $\int_{-\infty}^1 e^x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -x^2 + 4$ и $y = 0$.
Вариант 5 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(e^{4x} - 3 \cos \frac{x}{2} + \frac{2}{\sqrt{x^2+5}} \right) dx,$ 2) $\int \frac{(2+x)^3}{x} dx,$ 3) $\int x e^{10x} dx,$ 4) $\int \sqrt{1-2x} x dx,$ 5) $\int_0^\pi x \sin \frac{x}{2} dx,$ 6) $\int_0^e \frac{\ln^2 x + 1}{x} dx,$ 7) $\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 2x$.	Вариант 6 1. Вычислить интегралы. 1) $\int (tg 2x - 2^{-3x} + 6\sqrt[3]{x} - 1) dx,$ 2) $\int (2-x)^2 \sqrt{x} dx,$ 3) $\int tg x dx,$ 4) $\int \frac{x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx,$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx,$ 6) $\int_0^3 \sqrt{x+1} x dx,$ 7) $\int_{-\infty}^0 e^x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $2y + x - 4 = 0$ и $y = 0$, $x = -3$, $x = 2$.

Вариант 7 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(4ctg 2x + \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} - 6 \right) dx,$ 2) $\int \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x} dx,$ 3) $\int \frac{tg^2 x + 5}{\cos^2 x} dx,$ 4) $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx,$ 5) $\int_0^7 \sqrt[3]{x+1} x dx,$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 4x dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -x$ и $y = 2x - x^2$.	Вариант 8 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(8 \cos 4x - \frac{6}{\sqrt{5+x^2}} - 3 \right) dx,$ 2) $\int (1 + 2\sqrt{x}) \sqrt[3]{x} dx,$ 3) $\int x^{11} \ln x dx,$ 4) $\int \sqrt{2 + \sin x} dx,$ 5) $\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx,$ 6) $\int_0^3 x e^{-\frac{x}{3}} dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \cos x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x + 1$ и $y = 4 + 3x - x^2$.
Вариант 9 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(4tg 2x + \frac{5}{x^2 - 25} - 2\sqrt{x} \right) dx,$ 2) $\int (1+x)^2 \sqrt{x} dx,$ 3) $\int x \cos \frac{x}{10} dx,$ 4) $\int \sqrt{2x+1} x dx,$ 5) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx,$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin \frac{x}{3} dx,$ 7) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 - 6x + 5$ и $y = 2x - 7$.	Вариант 10 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(3 \cos 9x - \frac{6}{9+x^2} - tg x \right) dx,$ 2) $\int \sqrt[5]{x} (1-2x)^2 dx,$ 3) $\int x^2 \log_9 x dx,$ 4) $\int \sqrt{3-2x} x dx,$ 5) $\int_1^e \ln x dx,$ 6) $\int_3^{10} \frac{x}{\sqrt[3]{x-2}} dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x - 7$ и $y = 3 - x$.

Вариант 11 1. Вычислить интегралы. $\int (3 \operatorname{ctg} 2x - 7 \sin 6x - \sqrt[3]{x}) dx,$ $\int (3 - 2x) \sqrt[4]{x} dx,$ $\int x 10^x dx,$ $\int \sqrt[3]{2-x} x dx,$ $\int_1^6 \log_6 x dx,$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx,$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 5x - 6.$	Вариант 12 1. Вычислить интегралы. $\int \left(2^{3x} - \frac{7}{4+x^2} - 4 \operatorname{tg} 2x \right) dx,$ $\int \sqrt[5]{x} (3 + 2x) dx,$ $\int x \cos \frac{x}{12} dx,$ $\int \frac{1-x}{\sqrt{x+1}} dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx,$ $\int_{-3}^0 \sqrt{1-x} x dx,$ $\int_0^{\infty} e^{-x} dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -x^2, y = 0, x = 2.$
Вариант 13 1. Вычислить интегралы. $\int \left(4 \sin 8x - \frac{3}{\cos^3 6x} + 2 \sqrt[4]{x} \right) dx,$ $\int \frac{(1-6x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx,$ $\int \frac{x}{\sqrt{3+x}} dx,$ $\int x^2 \log_{11} x dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx,$ $\int_{-3}^{\frac{1}{4}} x e^{4x} dx,$ $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $x + y = 3.$	Вариант 14 1. Вычислить интегралы. $\int \left(\frac{5}{x^2 - 1} - \frac{3}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx,$ $\int x(1+x)^3 dx,$ $\int e^{\frac{x}{6}} x dx,$ $\int \sqrt{4+x} x dx,$ $\int_1^{12} \log_{12} x dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx,$ $\int_0^{\infty} \sin x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -x^2 + 2x$ и осью $OX.$

Вариант 15 1. Вычислить интегралы. 1. $\int \left(\frac{6}{\cos^2 2x} - \frac{4}{x^2 + 9} - \frac{5}{x} \right) dx$ 2. $\int \frac{(3-2x)^2}{\sqrt{x}} dx$ 3. $\int x e^{\frac{x}{9}} dx$ 4. $\int \sqrt{\sin x - 3} \cos x dx$ 5. $\int_4^7 \frac{x+3}{\sqrt{x-3}} dx$ 6. $\int_1^e x^6 \ln x dx$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{1}{3}x^2 + 3$ и $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.	Вариант 16 1. Вычислить интегралы. 1) $\int (3 \cos 8x - 9 - 4 \operatorname{ctg} 3x) dx$, 2) $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^2} dx$, 3) $\int x \cos \frac{x}{9} dx$, 4) $\int \sqrt[8]{x-8} x dx$, 5) $\int_0^1 x 3^{-x} dx$, 6) $\int_0^3 \frac{x+3}{\sqrt{x+1}} dx$, 7) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$. 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$ и $y = x^2 - 7$.
Вариант 17 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(8 \operatorname{ctg} 2x + \sqrt{x} - \frac{7}{x^2 - 9} \right) dx$, 2) $\int x e^{11x} dx$, 3) $\int \sqrt[6]{x-5} x dx$, 4) $\int \frac{(1+3x)^2}{x^2} dx$, 5) $\int_1^2 x^2 \log_2 x dx$, 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 \cos x + 6} \sin x dx$, 7) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$. 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$ и $x + y = 2$.	Вариант 18 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(3 \operatorname{tg} 10x + 7 - \frac{5}{\sqrt{81 - x^2}} \right) dx$, 2) $\int \frac{(1-4x)^2}{x} dx$, 3) $\int x^3 \ln x dx$, 4) $\int \sqrt[10]{x-5} x dx$, 5) $\int_0^1 x 2^{-x} dx$, 6) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{5x+4}} dx$, 7) $\int_0^{\infty} \cos x dx$. 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = e^x$ и $x = 0$, $x = 1$.

Вариант 19 1. Вычислить интегралы. $\int (4 - 3\cos \frac{x}{2} + \frac{2}{4+x^2})dx,$ $\int \frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x}}dx,$ $\int x \cos 4x dx,$ $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tgx}{\cos^2 x} dx,$ $\int_0^1 x 10^{-x} dx,$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+9}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $y = 0, x = -1, x = 2.$	Вариант 20 1. Вычислить интегралы. $\int (4x^7 - 5\cos 3x + 2^{-x} - 1)dx,$ $\int (\sqrt{x} - 3)^2 x^3 dx,$ $\int x e^{3x} dx,$ $\int \frac{\sin x}{\cos^6 x} dx,$ $\int_2^5 \frac{2x+5}{\sqrt{x-1}} dx,$ $\int_1^e x^7 \ln x dx,$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$ и $x + y = 2.$
Вариант 21 1. Вычислить интегралы. $\int (9^{4x} - 3\cos \frac{x}{5} + 13\sqrt[5]{x} - 2)dx,$ $\int (x-2)\sqrt[3]{x}dx,$ $\int x^{12} \ln x dx,$ $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx,$ $\int_4^7 \frac{x}{\sqrt{x-3}} dx,$ $\int_0^{\pi} x \cos \frac{x}{2} dx,$ $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2+9}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$ и $x - y + 4 = 0.$	Вариант 22 1. Вычислить интегралы. $\int \left(\frac{7}{x} + 4tg 2x - \sqrt[4]{x} + 6 \right) dx,$ $\int \frac{(x+8)^2}{\sqrt[3]{x}} dx,$ $\int x 2^{\frac{x}{2}} dx,$ $\int \frac{\ln^2 x + 3}{x} dx,$ $\int_{-2}^1 \frac{1+x}{\sqrt{x+3}} dx,$ $\int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} dx,$ $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^3}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $x + y = 0.$

Вариант 23 1. Вычислить интегралы. $\int \left(9^{4x} - 3 \cos \frac{x}{5} + 13\sqrt[5]{x} - 2 \right) dx,$ $\int (x-2)\sqrt[3]{x} dx,$ $\int x^9 \ln x dx,$ $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x+4}} dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin x} \cos x dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 3x dx,$ $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $2x-3y+6=0$ и $x=3, y=0.$	Вариант 24 1. Вычислить интегралы. $\int \left(2x^3 - \frac{4}{x^2+1} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{3} + 2 \right) dx,$ $\int \frac{(2x-1)^2}{x^3} dx,$ $\int x e^{-2x} dx,$ $\int \frac{1-x}{\sqrt{x+3}} dx,$ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg}^{3x}}{\sin^2 x} dx,$ $\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx,$ $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $2x-3y+6=0$ и $x=3, y=0.$
Вариант 25 1. Вычислить интегралы. $\int \left(\frac{4}{x^2+16} - \cos \frac{x}{2} + 5 \right) dx,$ $\int \frac{(3-4x)^2}{x} dx,$ $\int \frac{x}{\cos^2 \frac{x}{3}} dx,$ $\int \sqrt{x-3} x dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos x dx,$ $\int_0^1 x 7^x dx,$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=x^2-3x$ и $x=-1, x=2, y=0.$	Вариант 26 1. Вычислить интегралы. $\int (5\sqrt{x} - 3 \operatorname{ctg} 6x + 4) dx,$ $\int (\sqrt{x}+1)^2 \sqrt[3]{x} dx,$ $\int \sqrt{x+2} x dx,$ $\int x^{-7} \ln x dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \sin x dx,$ $\int_0^{\frac{1}{3}} x e^{3x} dx,$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x+3}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=\ln x$ и $x=1, x=e, y=0.$

Вариант 27 1. Вычислить интегралы. $\int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - 2^x + 16 \cos 4x \right) dx,$ $\int (1-3x)^2 \sqrt{x} dx,$ $\int \frac{x}{\sin^2 \frac{x}{6}} dx,$ $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx,$ $\int_0^3 \sqrt{x+1} x dx,$ $\int_0^1 x e^{-x} dx,$ $\int_{-\infty}^0 \cos x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $4y = 8x - x^2$ и $4y = x + 6.$	Вариант 28 1. Вычислить интегралы. $\int \left(5x^4 - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + 6 \right) dx,$ $\int \frac{(1-7x)^2}{\sqrt{x}} dx,$ $\int x e^{9x} dx,$ $\int \frac{1-3x}{\sqrt{x+1}} dx,$ $\int_{-3}^2 \sqrt{x+7} x dx,$ $\int_0^5 x \cos x dx,$ $\int_1^{\infty} e^{4-x} dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y + x - 6 = 0$ и $y = x^2.$
Вариант 29 1. Вычислить интегралы. $\int (4 \cos 2x - \sqrt[4]{x} + 6) dx,$ $\int \frac{(1+3x)^2}{x^4} dx,$ $\int x \cos \frac{x}{8} dx,$ $\int \frac{\tan^2 x - 3}{\cos^2 x} dx,$ $\int_0^1 x \sqrt{3x+1} dx,$ $\int_1^e x^{17} \ln x dx,$ $\int_e^{\infty} dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x - y + 2 = 0$ и $y = x^2.$	Вариант 30 1. Вычислить интегралы. $\int \left(7x^6 - 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{7} + 4 \right) dx,$ $\int (x-9)^2 x^7 dx,$ $\int x \cos 6x dx,$ $\int \sqrt{x+7} x dx,$ $\int_1^e \frac{\ln^{10} x}{x} dx,$ $\int_0^2 x 5^x dx,$ $\int_{-\infty}^0 e^x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $xy = 6$ и $y = 7 - x.$

Практическое занятие № 23

Итоговое занятие по темам «Определенный и несобственный интегралы»

Цель занятия: Контроль знаний студентов по темам «Определенный и несобственный интегралы»

Форма проведения занятия - коллоквиум

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Базовый уровень

Тема ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Что называется определенным интегралом от a до b от функции $f(x)$?
2. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
3. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
4. Запишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.
5. Запишите формулу замены переменной в определенном интеграле.
6. Что называется площадью плоской фигуры? Как найти площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла?
7. Что называется объемом тела? Как найти объем тела вращения?
8. Что называется длиной дуги? Как найти длину дуги: если функция задана в декартовых координатах?
9. Какие еще приложения определенных интегралов Вы знаете?

Тема НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

10. Несобственные интегралы с бесконечным верхним, бесконечным нижним пределами интегрирования, с бесконечными пределами интегрирования.
11. Несобственные интегралы от разрывных функций.

Повышенный уровень

Тема ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

1. На что следует обращать внимание при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной по сравнению с неопределенным интегралом?
2. Определите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования. Когда несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся (расходящимся)?
3. Для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
4. Определите несобственный интеграл от разрывной функции. Для несобственного интеграла от разрывной функции запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
5. Сформулируйте теорему сравнения для несобственных интегралов.
6. Дайте определение абсолютно сходящегося интеграла.
7. На что следует обращать внимание при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной по сравнению с неопределенным интегралом?

Тема НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

8. Определите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования.
9. Когда несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся (расходящимся)?
10. Для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
11. Определите несобственный интеграл от разрывной функции.
12. Когда несобственный интеграл от разрывной функции называется сходящимся (расходящимся)?

13. Для несобственного интеграла от разрывной функции запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
14. Сформулируйте теорему сравнения для несобственных интегралов.
15. Дайте определение абсолютно сходящегося интеграла. Дайте определение полярной системы координат. Установите формулы, связывающие полярные и прямоугольные координаты точки.
16. Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры в полярных координатах. Как найти длину дуги: если функция задана в полярных координатах; параметрически?
17. Признаки сравнения.

5. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Практическое занятие № 24

Тема занятия «Числовые ряды. Признаки сходимости знакоположительных рядов»

Цель занятия: Формирование умений исследовать знакоположительные ряды на сходимость.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определения числового ряда, общего члена ряда. Как определяется сумма числового ряда?
2. Какой ряд называется сходящимся, а какой расходящимся? Приведите примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов.
3. Введите понятие остатка числового ряда.
4. Сформулируйте основные свойства рядов.
5. Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости числового ряда.
6. Приведите пример какого-нибудь числового ряда, для которого выполнено необходимое условие сходимости, но ряд расходится.
7. Какие достаточные условия сходимости числовых рядов Вы знаете?
8. Сформулируйте признаки сравнения знакоположительных рядов.
9. Когда для исследования числовых рядов может быть применен признак Даламбера? Сформулируйте этот признак.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите пятый член ряда $a_n = \frac{1}{2^n(n+1)}$.
2. Найдите первые четыре члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$.
3. Определите разность между 4-м и 2-м членами ряда, общий член которого имеет вид $a_n = \frac{1}{n!}$.

4. Определите вид общего члена ряда

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

5. Проверьте, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+3}{n^2+1}$.

6. Исследуйте ряд на сходимость с помощью первого признака сравнения

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

7. Исследуйте ряд на сходимость с помощью второго признака сравнения

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{5^n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(2^n+1)}$.

8. Исследуйте с помощью признака Даламбера исследовать, сходятся или расходятся ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!}{(2n)!}$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите шестой член ряда $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{20} + \dots$.

2. Укажите пятый член ряда $a_n = n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$.

3. Вычислите сумму первых пяти членов гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

4. Запишите общий член ряда

а) $tg \frac{\pi}{4} + 2tg \frac{\pi}{8} + 3tg \frac{\pi}{16} + \dots$; б) $10 + \frac{100}{2} + \frac{1000}{6} + \dots$.

5. Проверьте, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

6. Исследуйте ряд на сходимость с помощью первого признака сравнения

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{7^n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

7. Исследуйте ряд на сходимость с помощью второго признака сравнения

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{7^n - 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

8. Исследовать с помощью признака Даламбера исследовать, сходятся или расходятся ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3 + 1)}{(n + 1)!}$.

Практическое занятие № 25

Тема занятия «Знакопеременные ряды. Признак Лейбница»

Цель занятия: формирование умений и навыков исследовать знакоположительные и знакопеременные ряды.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Когда согласно с радикальным признаком Коши сходимости числовой ряд сходится, а когда расходится?
2. Сформулируйте интегральный признак Коши сходимости знакоположительных рядов.
3. Какой из рассмотренных признаков сходимости знакоположительных рядов является самым мощным?
4. Дайте определение суммы числового ряда.
5. Какой способ вычисления суммы числового ряда Вы можете предложить.
6. Дайте определение знакопеременного ряда.
7. Определите знакопеременный ряд.
8. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда.
9. Введите определения абсолютно сходящихся и условно сходящихся рядов. Приведите примеры.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Запишите шестой член ряда, общий член которого имеет вид $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.
2. Исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$ по радикальному признаку Коши.
3. С помощью интегрального признака исследуйте, сходятся или расходятся ряды
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$.
4. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

$$\text{a) } 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \dots;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt[3]{n}}{n+2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}.$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2}$ по радикальному признаку Коши.

2. С помощью интегрального признака исследуйте, сходятся или расходятся ряды

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} (\alpha > 0); \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}.$$

3. Найдите сумму ряда $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 11n + 28}.$

4. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

$$\text{a) } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \dots;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{3n+2}.$$

Практическое занятие № 26

Итоговое занятие по теме «Числовые ряды»

Собеседование Базовый уровень

Тема 6. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1. Дайте определения числового ряда, общего члена ряда. Как определяется сумма числового ряда?
2. Какой ряд называется сходящимся, а какой расходящимся? Приведите примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов.
3. Введите понятие остатка числового ряда.
4. Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости числового ряда.
5. Сформулируйте признаки сравнения знакоположительных рядов.
6. Когда для исследования числовых рядов может быть применен признак Даламбера? Сформулируйте этот признак.
7. Когда согласно с радикальным признаком Коши сходимости числовой ряд сходится, а когда расходится?
8. Сформулируйте интегральный признак Коши сходимости знакоположительных рядов.
9. Определите знакочередующийся ряд.
10. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.

Повышенный уровень

Тема 6. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1. Сформулируйте основные свойства рядов.
2. Приведите пример какого-нибудь числового ряда, для которого выполнено необходимое условие сходимости, но ряд расходится.
3. Какой из рассмотренных признаков сходимости знакоположительных рядов является самым мощным?
4. Дайте определение суммы числового ряда. Какой способ вычисления суммы числового ряда Вы можете предложить.
5. Дайте определение знакопеременного ряда.
6. Введите определения абсолютно сходящихся и условно сходящихся рядов. Приведите примеры.

6. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Практическое занятие № 27

Тема занятия «Степенные ряды и область их сходимости»

Цель занятия: Сформировать умения и навыки разложения функций в степенной ряд и находить область сходимости степенного ряда.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение функционального ряда и его области сходимости.
2. Дайте определение степенного ряда.
3. Запишите ряд по степеням x .
4. Сформулируйте теорему Абеля о сходимости степенных рядов.
5. Введите понятия область сходимости (интервал сходимости), радиус сходимости степенного ряда.
6. Приведите примеры рядов, сходящихся
 - а) в одной точке; б) на всей числовой прямой;
 - в) на некотором конечном интервале.
7. Какие способы нахождения радиуса и интервала сходимости Вы знаете?
8. Запишите формулу Коши-Адамара для нахождения радиуса сходимости степенного ряда.
9. Дайте определение ряда Тейлора и ряда Маклорена.
10. Выведите разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена и укажите интервалы сходимости полученных рядов.
11. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании степенных рядов.

12. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании степенных рядов.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите радиус и интервал сходимости ряда и исследуйте его сходимость на границах интервала:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$; г) $1 + \frac{2x}{\sqrt{5 \cdot 5}} + \frac{4x^2}{\sqrt{9 \cdot 5^2}} + \frac{8x^3}{\sqrt{13 \cdot 5^3}} + \dots$

2. Разложите в ряд Маклорена следующие функции и найдите интервалы сходимости полученных рядов

а) $f(x) = x^2 e^{-2x}$; б) $f(x) = \sin x^2$; в) $f(x) = \sqrt[3]{27 + x}$; г) $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите радиус и интервал сходимости ряда и исследуйте его сходимость на границах интервала

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^{n-1}}$.

2. Разложите в ряд Маклорена следующие функции и найдите интервалы сходимости полученных рядов

а) $f(x) = x^3 \cos x$; б) $f(x) = \ln \frac{1+3x}{1-3x}$; в) $f(x) = \frac{1}{3+2x}$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

3. Приступите к выполнению ИДЗ № 9 по теме «Ряды»

1. Найдите область сходимости степенных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{c^n \sqrt{n}} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{a^n \cdot (n+b)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(an-1)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an^2 + bn + c}{cn^2 - b} \right)^{kn} \cdot (x-b)^n$.

2. Разложить функцию $f(x) = ax - m$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi; \pi)$.

При решении задач коэффициенты a, b, c, k, m выбрать из таблицы в соответствии с номером варианта.

ВАРИАНТ	a	b	c	k	m
1	1	2	3	2	1
2	2	3	5	3	2
3	3	4	7	4	3
4	4	5	9	1	4
5	5	2	11	2	5
6	6	3	3	3	6
7	7	4	5	4	-1
8	8	5	7	1	-2
9	1	2	9	2	-3
10	2	3	11	3	-4
11	3	4	2	4	-5
12	4	5	4	1	-6
13	5	2	6	2	1
14	6	3	8	3	2
15	7	4	10	1	3
16	8	5	2	2	4
17	1	3	4	3	5
18	2	4	6	1	6
19	3	5	8	2	-1
20	4	1	10	3	-2
21	5	-3	3	4	-3
22	6	-4	6	1	-4
23	7	-5	9	2	-5
24	8	-1	2	3	-6
25	1	-3	5	4	-1
26	2	-4	8	1	-2
27	3	-5	11	2	-3
28	4	-2	1	3	-4
29	5	-3	4	1	-5
30	6	-4	7	2	-6

Практическое занятие № 28

Тема занятия Приложения степенных рядов в приближенных вычислениях.

Цель занятия: Показать возможность применения степенных рядов для приближенных вычислений.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Вспомните разложения в степенной ряд функций $y = e^x$, $y = \sin x$,
 $y = \cos x$, $y = (1+x)^n$, $y = \frac{1}{1+x}$.
2. Выведите разложения в степенной ряд для функций $y = \sqrt{1+x}$, $y = \frac{1}{1+x^2}$,
 $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \ln(1+x)$.
3. Расскажите о приближенном вычислении значений функций с помощью степенных рядов.
4. Как определить погрешность приближения при вычислении приближенного значения функции? Какие теоремы по этому вопросу Вы знаете?
5. Приведите примеры вычисления «неберущихся» интегралов с помощью рядов.
6. Расскажите о приближенном вычислении определенных интегралов и определении погрешности приближения.
7. Как можно воспользоваться разложением функций в степенной ряд для раскрытия неопределенности при вычислении пределов функции?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Оцените погрешность приближенного равенства

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad 0 < x < n+1.$$

2. Вычислите с точностью до 0,00001

а) e ; б) $\sqrt{e}$; в) $\cos 18^\circ$; г) $\sqrt[5]{1,1}$.

3. Вычислите с точностью до 0,0001

а) $\ln 0,98$; б) $\ln 10$; в) $\int_0^{1/2} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$.

4. Вычислите с точностью до 0,001

а) $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$; б) $\int_0^{0,5} x \ln(1+x^2) dx$.

5. Найдите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x}$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Вычислите $1/\sqrt[5]{e}$ с точностью до 0,00001.

2. Вычислите с точностью до 0,0001

а) $\sin 9^\circ$; б) $\sqrt[3]{1,06}$; в) $\ln 1,1$; г) $\ln 3$; д) $\int_0^{0,2} \frac{\sin x}{x} dx$.

3. Вычислите с точностью до 0,001

а) $\sqrt{27}$; б) $\int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx$.

4. Найдите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}$.

Практическое занятие № 29-30

Тема занятия «Ряды Фурье. Ряды Фурье для четных и нечетных периодических функций»

Цель занятия: Показать возможность разложения функций в ряд Фурье.

Организационная форма занятия: дискуссия.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какая система функций называется ортогональной? Приведите примеры ортогональных систем тригонометрических функций.
2. Дайте определение тригонометрического ряда.
3. Какой ряд называется рядом Фурье?
4. Покажите, что при $n \neq k$ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx = 0$,
 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = 0$.
5. Докажите, что $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi$.
6. Выведите формулы для определения коэффициентов ряда Фурье для периодической с периодом 2π функции.
7. Запишите формулы для разложения в ряд Фурье четной функции.
8. По каким формулам можно вычислить коэффициенты ряда Фурье для нечетной функции?
9. Запишите формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье для функции с периодом $2l$.
10. Сформулируйте достаточное условие представимости функции рядом Фурье (теорему Дирихле).

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T , заданную на указанном сегменте.

а) $f(x)=|x|$, $T=2$, $[-1,1]$; б) $f(x)=e^x$, $T=2\pi$, $[-\pi, \pi]$;

в) $f(x)=\begin{cases} -h & \text{при } -\pi \leq x \leq 0, \\ h & \text{при } 0 \leq x \leq \pi; \end{cases} T=2\pi$; г) $f(x)=\begin{cases} -x & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 < x < \pi; \end{cases} T=2\pi$.

2. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=\pi-2x$ с периодом $T=2\pi$ на отрезке $[0, \pi]$. Продолжите $f(x)$ на сегмент $[-\pi, 0]$:

а) четным образом; б) нечетным образом.

3. Разложите в ряд по синусам $f(x)=\cos 2x$ с периодом $T=2\pi$ на $[0, \pi]$.

4. Разложите в ряд по косинусам $f(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x \leq 2; \end{cases} T=4$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T , заданную на указанном сегменте.

а) $f(x)=x^3$, $T=2\pi$, $[-\pi, \pi]$; б) $f(x)=\begin{cases} -2x & \text{при } -\pi \leq x \leq 0, \\ 3x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi; \end{cases} T=2\pi$.

2. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x^2$ с периодом $T=2\pi$ на отрезке $[0, \pi]$. Продолжите $f(x)$ на сегмент $[-\pi, 0]$ нечетным образом.

3. Разложите в ряд по синусам периодическую функцию $f(x)=x$ с периодом $T=2$ на отрезке $[0, 1]$.

4. Закончите выполнение ИДЗ.

Практическое занятие №31

Итоговое занятие по разделу «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ»

Собеседование 2

Базовый уровень

Тема 7. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

11. Дайте определение степенного ряда. Запишите ряд по степеням x .
12. Введите понятия область сходимости (интервал сходимости), радиус сходимости степенного ряда.
13. Какие способы нахождения радиуса и интервала сходимости Вы знаете?
14. Запишите формулу Коши-Адамара для нахождения радиуса сходимости степенного ряда.
15. Дайте определение ряда Тейлора и ряда Маклорена.
16. Вспомните разложения в степенной ряд функций $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$,

$$y = (1+x)^n, \quad y = \frac{1}{1+x}.$$

17. Расскажите о приближенном вычислении значений функций с помощью степенных рядов.

Повышенный уровень

Тема 7. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

1. Дайте определение функционального ряда и его области сходимости.
2. Сформулируйте теорему Абеля о сходимости степенных рядов.
3. Приведите примеры рядов, сходящихся
4. а) в одной точке; б) на всей числовой прямой;
5. в) на некотором конечном интервале.
6. Выведите разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена и укажите интервалы сходимости полученных рядов.
7. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании степенных рядов.
8. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании степенных рядов.
9. Выведите разложения в степенной ряд для функций $y = \sqrt{1+x}$, $y = \frac{1}{1+x^2}$,
 $y = \arcsin x$, $y = \arctg x$, $y = \ln(1+x)$.
10. Как определить погрешность приближения при вычислении приближенного значения функции? Какие теоремы по этому вопросу Вы знаете?
11. Приведите примеры вычисления «неберущихся» интегралов с помощью рядов.
12. Расскажите о приближенном вычислении определенных интегралов и определении погрешности приближения.
13. Как можно воспользоваться разложением функций в степенной ряд для раскрытия неопределенности при вычислении пределов функции?

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Практическое занятие № 32

Тема занятия «Дифференцирование функции нескольких переменных.

Частные производные первого и более высоких порядков»

Цель занятия: изучить определения частных производных и правила их нахождения.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Вспомните определение производной функции для функции одной переменной.
2. Вспомните основные свойства производной и правила дифференцирования.
3. Запишите таблицу производных.
4. Дайте определение функции двух переменных. Приведите примеры зависимостей, которые можно описать с помощью функций двух переменных.
5. Дайте определение функции нескольких переменных.
6. Для функции двух переменных определите понятия приращения функции по каждой из переменных. Введите понятие полного приращения функции двух переменных.
7. Введите понятие непрерывности для функции двух переменных
8. Дайте определение частных производных первого порядка на примере функции двух переменных.
9. Определите частные производные второго и более высоких порядков.
10. Сколько существует частных производных
 - а) второго порядка для функции трех переменных;
 - б) третьего порядка для функции двух переменных;
 - в) третьего порядка для функции трех переменных.
14. Сформулируйте теорему о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования.

Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите частные производные первого порядка для следующих функций

а) $z = x^2 \sin^2 y$; б) $u = e^{x^2+y^2+z^2}$; в) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; г) $z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$;

д) $z = \operatorname{arctg}(x + y)$.

2. Вычислите $f'_x(2,3)$ и $f'_y(2,3)$, если $f(x,y) = x^2 + y^3$

3. Вычислите частные производные второго порядка для функции $z = x^3 - 4x^2y + 5y^2$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите частные производные первого порядка для следующих функций

а) $z = x^{y^2}$; б) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; в) $z = \operatorname{arctg}(xy)$; г) $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$;

д) $z = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$; е) $z = e^x \ln y + \sin y \ln x$.

2. Докажите, что если $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

3. Докажите, что если $z = \frac{x^2 y^2}{x + y}$, то $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial x}$.

Практическое занятие № 33-34

Тема занятия «Экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума. Условный экстремум»

Цель занятия: Формирование умений исследовать функцию двух переменных на экстремум и условный экстремум.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение точки максимума и точки минимума для функции двух переменных.
2. Дайте определение экстремума для функции двух переменных.
3. Сформулируйте необходимые условия экстремума для функции двух переменных.
4. Сформулируйте достаточное условие экстремума для функции двух переменных. Как определить вид экстремума.
5. Расскажите о порядке исследования функции двух переменных на экстремум.
6. Какой экстремум называется условным?
7. Запишите функцию Лагранжа для отыскания условного экстремума.
8. Как можно исследовать функцию на условный экстремум?
9. Расскажите об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите экстремумы функций
 - а) $z = xy(1 - x - y)$; б) $z = e^{0,5x}(x + y^2)$; в) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

2. Найдите экстремум функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны уравнением $2x - 3y - 5 = 0$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 1 - x^2 - y^2$ в круге $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.
4. Из всех прямоугольников с заданной площадью найдите тот, у которого периметр наименьший.
5. Определите размеры конуса наибольшего объема при условии, что его боковая поверхность равна S .

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите экстремумы функций
 - а) $z = 2xy - 4x - 2y$; б) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
2. Определите размеры прямоугольного открытого бассейна, имеющего наименьшую поверхность, при условии, что его объем равен V .
3. Решите вариант самостоятельной работы в соответствии с последней цифрой Вашей зачетной книжки.

Вариант 1 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \ln(2x - 5y)$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = x \cdot \sin \frac{3y}{1-x}$. 3. Найти экстремумы функции $z = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3$.	Вариант 2 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \sqrt{4 - x^2 + 6x - y^2}$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = x^2 \cdot \arctg \frac{y-2}{x}$. 3. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 + 1$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$.
Вариант 3 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \ln(4x + 5y)$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = \frac{5-x}{y} \cdot e^{y^2}$. 3. Найти экстремумы функции $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $x \leq 1, y \geq 0, y \leq x$.	Вариант 4 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \arcsin \frac{2x-3}{y}$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = \ln(3x + \ln y)^2$. 3. Найти экстремумы функции $z = x^3 - y^3 - 3xy$. 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $x \geq 1, y \geq -1, x + y \leq 1$.
Вариант 5 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \ln(3x - y)$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = \arccos \frac{1-y}{x^2}$. 3. Найти экстремумы функции $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 2xy + 2y^2$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.	Вариант 6 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \sqrt{1 - x^2 + 4y - y^2}$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = e^{1-y} \cdot (2xy + x^2)$. 3. Найти экстремумы функции $z = 2xy - 4x - 2y$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $x \geq -1, y \geq -1, x + y \leq 1$.
Вариант 7	Вариант 8

1. Найти и изобразить область определения функции $z = \ln(7x + 4y)$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = \sqrt{\frac{x^2 - 5y}{y^3}}$. 3. Найти экстремумы функции $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = 10 + 2xy - x^2$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $0 \leq y \leq 4 - x^2$.	1. Найти и изобразить область определения функции $z = \arccos \frac{x + 4y}{5}$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = \sqrt[3]{(1 - xy^2 + 5y - 2x)^2}$. 3. Найти экстремумы функции $z = xy \cdot (1 - x - y)$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + xy - 2$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $4x^2 - 4 \leq y \leq 0$.
Вариант 9 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \arccos(x + y)$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = \frac{x^2}{y^2} - \frac{y}{x}$. 3. Найти экстремумы функции $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $x \leq 0, y \leq 0, x + y + 2 \geq 0$.	Вариант 10 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{x - y}$. 3. Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + xy$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3$.

Практическое занятие № 35

Тема занятия «Итоговое занятие по темам "Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных"»

Цель занятия: Проверка теоретических знаний по *по теме "Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных"*.

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

Базовый уровень

Тема 7.ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Функции нескольких переменных. Основные определения.
2. Область определения и область значений функции двух переменных.
3. График функции двух переменных.
4. Частные производные функции нескольких переменных. Определение, правила вычисления.
5. Смешанные производные.
6. Теорема о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования.
7. Полный дифференциал.
8. Дифференциал сложной функции.
9. Дифференциалы высших порядков.
10. Экстремум функции двух переменных.
11. Необходимое условие экстремума для функции двух переменных.
12. Достаточное условие экстремума для функции двух переменных.

Повышенный уровень

Тема 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Линии уровня.
2. Поверхности уровня.
3. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
4. Свойства непрерывных функций двух переменных.
5. Производные сложной функции.
6. Неявные функции и их дифференцирование.
7. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.
8. Условный экстремум, метод множителей Лагранжа.
9. Вывод метода наименьших квадратов с помощью решения задачи на нахождение экстремума функции нескольких переменных.

8.ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Практическое занятие № 36

Тема занятия «Двойные интегралы, переход к повторным интегралам»

Цель занятия: Обобщение понятия определенного интеграла и введение понятия двойного интеграла.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

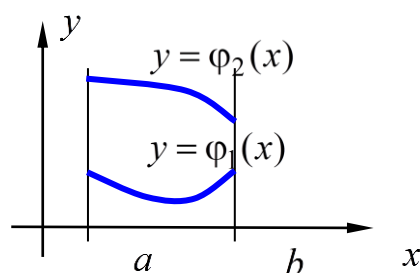
1. Приведите задачу, приводящую к понятию двойного интеграла.
2. Сформулируйте определение двойного интеграла.
3. Назовите основные свойства двойного интеграла.
4. Расскажите, как определить пределы интегрирования при вычислении двойного интеграла для случая прямоугольной области.
5. Расскажите, как определить пределы интегрирования при вычислении двойного интеграла для случая криволинейной области.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

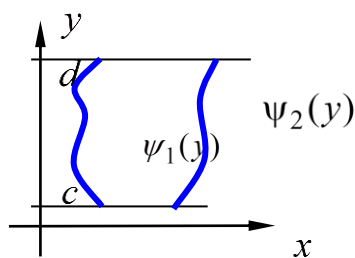
1. Пусть область интегрирования D функции двух переменных $f(x, y)$ определяется согласно следующему рисунку



Перейдите к повторным интегралам при вычислении интеграла

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

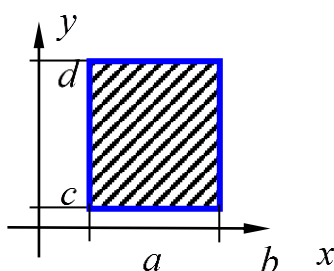
2. Пусть область интегрирования D функции двух переменных $f(x, y)$ определяется согласно рисунку



Перейдите к повторным интегралам при вычислении интеграла

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

3. Пусть область интегрирования D функции двух переменных $f(x, y)$ определяется согласно рисунку



Перейдите к повторным интегралам при вычислении интеграла

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

4. Для данных интегралов изобразите область интегрирования и измените порядок интегрирования

а) $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy$; б) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy$; в) $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$; г) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

5. Измените порядок интегрирования $\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Для данных интегралов изобразите область интегрирования и измените порядок интегрирования

а) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$; б) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$; в) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$; г) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy$.

2. Измените порядок интегрирования $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f dx$.

Практическое занятие № 37-38

Тема занятия «Двойной интеграл: замена переменных, переход к полярной системе координат, приложения»

Цель занятия: Формирование умений вычислять двойные интегралы и использовать их для вычисления геометрических и физических величин.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Сформулируйте определение двойного интеграла.
2. Назовите основные свойства двойного интеграла.
3. Запишите формулу замены переменных в двойном интеграле.
4. Запишите формулу перехода к полярной системе координат при вычислении двойного интеграла. Когда целесообразно выполнять эту замену?
5. Приведите примеры применения двойных интегралов при вычислении различных величин.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Вычислите:
 - а) $\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy; D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x};$
 - б) $\iint_D y^2 e^{-xy/4} dx dy; D: x=0, y=2, y=x.$
2. Из пособия [2], часть 2 решите номера 30, 33, 35 (задачи на замену переменной в двойном интеграле, номера 44, 47, 58, 71, 82 (задачи на приложения двойного интеграла).

Задания для самостоятельной работы дома

1. Вычислите
 - а) $\iint_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3) dx dy; D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3;$

б) $\iint_D y \cos xy dx dy; D: y = \frac{\pi}{2}, y = \pi, x = 1, x = 2.$

2. Из пособия [2], часть 2 решите номера 31, 32, 34 (задачи на замену переменной в двойном интеграле, номера 45, 48, 57, 72, 83 (задачи на приложения двойного интеграла)).

Практическое занятие № 39

Тема занятия «Тройной интеграл, вычисление путем перехода к повторным интегралам»

Цель занятия: Обобщение понятия определенного интеграла и введение понятия тройного интеграла.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Приведите задачу, приводящую к понятию тройного интеграла.
2. Дайте определение тройного интеграла.
3. Расскажите, как определить пределы интегрирования при вычислении тройного интеграла.
4. Запишите формулу замены переменных в тройном интеграле.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1 Вычислите

$$\iiint_V 15(y^2 + z^2) dx dy dz; V : z = x + y, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0, \text{ изобразив}$$

область интегрирования.

2. Из пособия [2], часть 2 решите номера 101, 103, 105.

Здесь и далее ссылка на источник

[2] Высшая математика в упражнениях и задачах : [учеб. пособие] : В 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко, Ч. 2. - 7-е изд., испр. - М. : Мир и Образование, 2015. - 308 с.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Для данных интегралов изобразите область интегрирования и вычислите их

а) $\iiint_V (3x + 4y) dx dy dz; V : y = x, y = 0, x = 1;$

б) $\iiint_V 8y^2 z e^{2xyz} dx dy dz; V : \begin{cases} x = -1, y = 2, z = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$

2. Из пособия [2], часть 2 решите номера 102, 104, 106.

Практическое занятие № 39-41

Тема занятия «Тройной интеграл: замена переменных, переход к цилиндрической и сферической системам координат, приложения»

Цель занятия: Формирование умений вычислять двойные интегралы и использовать их для вычисления геометрических и физических величин.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Приведите задачу, приводящую к понятию тройного интеграла.
2. Дайте определение тройного интеграла.
3. Расскажите, как определить пределы интегрирования при вычислении тройного интеграла.
4. Запишите формулу замены переменных в тройном интеграле.
5. Запишите формулу перехода к цилиндрической системе координат при вычислении тройного интеграла.
6. Запишите формулу перехода к сферической системе координат при вычислении тройного интеграла.
7. Приведите примеры применения тройных интегралов при вычислении различных величин.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из пособия [2], часть 2 решите задания 107, 109, 111 (задачи на замену переменных), задания 114, 116, 118 (приложения тройного интеграла)

Задания для самостоятельной работы дома

Из пособия [2], часть 2 решите задания 108, 110, 112 (задачи на замену переменных), задания 115, 117, 119 (приложения тройного интеграла)

Практическое занятие № 42

Итоговое занятие по теме «Кратные интегралы»

Цель занятия: Контроль знаний студентов по теме.

Форма проведения занятия – собеседование по выполненному ИДЗ
Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Определение двойного интеграла.
2. Свойства двойного интеграла.
3. Сведение двойного интеграла к повторным интегралам.
4. Приложения двойного интеграла.
5. Определение тройного интеграла.
6. Свойства тройного интеграла.
7. Сведение тройного интеграла к повторным интегралам.

ИДЗ №6

Тема «Кратные интегралы»

1 Задачи репродуктивного уровня - задача 4

2 Задачи реконструктивного уровня – задача 1, 2

3 Задачи творческого уровня - задача 3

Задача №1. Изобразить на чертеже область интегрирования D . Преобразовать двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в двукратный. Расставить пределы по заданной области интегрирования D . Изменить порядок интегрирования. Перейти к полярным координатам.

Вариант №	Неравенства, задающие область D :
1	$x^2 + y^2 \leq 16, (x+2)^2 + y^2 \geq 4, y \geq x, y \geq 0$
2	$\left\{ y \geq \frac{x^2}{4} - 3, y \leq 1, x < 0 \right\} \cup \left\{ y \geq \frac{x^2}{4} - 3, y \leq 1 + \sqrt{4x - x^2}, x \geq 0 \right\}$
3	$x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 \geq 2y, y \geq 0$
4	$\{x^2 + y^2 \leq 16, y \leq 0, x < 0\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 1, y \leq 0, x \geq 0\}$
5	$\{x^2 + y^2 \leq 9, xy \leq 0\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 4, xy > 0\}$
6	$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 10y \geq -4 \\ x \leq 3 \\ y \geq 0,48(x-3)^2 - 12 \\ y \leq 5 \end{cases}$
7	$x \geq \frac{y^2}{4} - 4, x + y \leq 4, y - x \geq -4$
8	$x^2 + y^2 \leq 25, x^2 - y^2 \geq 4$
9	$x^2 + y^2 \leq 18, x^2 + y^2 \geq 6x, y \geq 0$
10	$x^2 + y^2 \leq 2(7 + x + y), xy \leq 4$

1 1	$xy \leq 4, y \leq 2x - 2, y \geq \frac{x}{2} - 2$
1 2	$x^2 + y^2 \leq 6(x + y), y \leq (1 + \sqrt{2})x$
1 3	$x \leq 4 - y^2, x^2 + y^2 \leq 8x$
1 4	$\{4x^2 + y^2 \leq 16\} \cup \{x^2 + 4y^2 \leq 16\}$
1 5	$y \leq 2 - \frac{x^2}{8}, y \geq \frac{x^2}{4} - 4$
1 6	$xy \geq -1, -3 \leq x + y \leq 3$
1 7	$x^2 + y^2 \leq 16, (x + 2)(y + 2) \leq 4$
1 8	$7y \leq 3x + 26, 4y \geq -5x - 12, y \geq -3, x \leq 3$
1 9	$x^2 + y^2 \leq 9, (x + 4)^2 + y^2 \geq 25$
2 0	$x^2 + y^2 \geq 4x, x^2 + y^2 \geq -6y, x^2 + y^2 \leq 4x - 6y$
2 1	$x \geq 3 - \frac{y^2}{8}, x \leq 6 - \frac{y^2}{4}, x \geq \frac{y^2}{8} - 2, y \geq 0$

Задача №2. Изменить порядок интегрирования, изобразив на чертеже область интегрирования.

Ва риант №	Интеграл:
1	$\int_{-3}^3 dx \int_{-3+\frac{\sqrt{9-x^2}}{2}}^{\frac{3-\sqrt{9-x^2}}{2}} f(x, y) dy$
2	$\int_{-3}^0 dy \int_{-3-y}^{3-\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^3 dy \int_{y-3}^{3-\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx$
3	$\int_{-4}^0 dy \int_{\sqrt{8y-y^2}-5}^{-\frac{y}{4}} f(x, y) dx + \int_0^4 dy \int_{-\frac{y}{4}}^{5-\sqrt{-8y-y^2}} f(x, y) dx$
4	$\int_0^6 dx \int_{\sqrt{6x-x^2}}^{\frac{3\sqrt{6-x}}{2}} f(x, y) dy$
5	$\int_{-1}^0 dx \int_{-x^3}^{-x} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-x}^{-x^3} f(x, y) dy$
6	$\int_{-3}^0 dy \int_{\frac{4}{3}\sqrt{-y^2-6y}-4}^{\frac{y+3}{3}} f(x, y) dx + \int_0^3 dy \int_{2(2-y)}^{\frac{y+3}{3}} f(x, y) dx$

7	$\int_0^3 dy \int_{y-3}^0 f(x, y) dx + \int_3^6 dy \int_0^{y-3} f(x, y) dx$
8	$\int_0^1 dy \int_{2y-1}^{\frac{y+1}{2}} f(x, y) dx$
9	$\int_{-6}^0 dx \int_0^{2x+12} f(x, y) dy + \int_0^6 dx \int_{2x}^{2x+12} f(x, y) dy + \int_6^{12} dx \int_{2x}^{24} f(x, y) dy$
10	$\int_{-4}^{-1} dy \int_{-1}^{y+3} f(x, y) dx + \int_{-1}^3 dy \int_{-1+\sqrt{3+2y-y^2}}^2 f(x, y) dx + \int_3^6 dy \int_{-1}^{5-y} f(x, y) dx$
11	$\int_{-2}^2 dx \int_{9-\sqrt{117-(x-4)^2}}^{4-\sqrt{16-(x+2)^2}} f(x, y) dy + \int_2^6 dx \int_{9-\sqrt{117-(x-4)^2}}^{4-\sqrt{4-(x-4)^2}} f(x, y) dy +$ $+ \int_6^{10} dx \int_{9-\sqrt{117-(x-4)^2}}^{4-\sqrt{16-(x-10)^2}} f(x, y) dy$
12	$\int_{-3}^0 dx \int_{x-2}^{4+3x} f(x, y) dy + \int_0^3 dx \int_{-2}^{4-2x} f(x, y) dy$
13	$\int_{-2}^0 dy \int_{2-\sqrt{16-4(y+2)^2}}^2 f(x, y) dx + \int_0^4 dy \int_{2-\frac{(y-4)^2}{4}}^2 f(x, y) dx$
14	$\int_0^1 dy \int_{2y-1}^{\frac{y+1}{2}} f(x, y) dx$

15	$\int_{-4}^{-1} dx \int_{-4+\sqrt{16-x^2}}^{\frac{4}{x}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-4+\sqrt{16-x^2}}^4 f(x, y) dy +$ $+ \int_1^4 dx \int_{-4+\sqrt{16-x^2}}^{\frac{4}{x}} f(x, y) dy$
----	--

16	$\int_{-3}^0 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{2+\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{1-\sqrt{4-x^2}}^{1+\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$
17	$\int_0^3 dy \int_{3-y}^{\frac{35-3y}{5}} f(x, y) dx + \int_3^5 dy \int_{\frac{y-3}{2}}^{\frac{35-3y}{5}} f(x, y) dx + \int_5^9 dy \int_{\frac{y-3}{2}}^{\frac{3y+1}{4}} f(x, y) dx$
18	$\int_{-\sqrt{6}}^{-1} dx \int_{x^2-2}^{\frac{x^2}{3}+2} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2-2}^0 f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{6}} dx \int_{x^2-2}^{\frac{x^2}{3}+2} f(x, y) dy$
19	$\int_{-\sqrt{27}}^{\sqrt{27}} dx \int_{2-\sqrt{28-x^2}}^{\sqrt[3]{x^2}} f(x, y) dy$
20	$\int_{-4}^{-2} dy \int_{-\sqrt{4-(y+2)^2}}^{4-\sqrt{16-(y+4)^2}} f(x, y) dx + \int_{-2}^0 dy \int_y^{4-\sqrt{16-(y+4)^2}} f(x, y) dx +$ $+ \int_0^2 dy \int_y^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$
21	$\int_{-6}^{-4} dy \int_{\frac{y+6}{4}}^{\frac{10-y}{4}} f(x, y) dx + \int_{-2}^2 dy \int_{-2+\sqrt{16-(y+2)^2}}^{6-\sqrt{16-(y+2)^2}} f(x, y) dx$

Задача №3. Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела T , ограниченного поверхностями:

Вариант №	Поверхности, ограничивающие тело T :
1	$z = 3 - x^2, z = 0, y = x, y = 3x$
2	$y = 18 - z^2, x = y, x = 0$
3	$z^2 + 2y^2 = 11, y = x - 3, y = -x - 3$
4	$z^2 = 7y, x = y, x + y = \sqrt{7}$
5	$y^2 = x + 4, y^2 = 2x + 4, z = 0, z = -x$
6	$z = y^2, z = 9, y = 8 - x, x = 0$
7	$z = 16 - y^2, z = 0, y = 4 - x^2$
8	$z = x^2 - 4y^2, z = 0, x = 4$
9	$y + z = 2, y = 0, z = 2x^2, z = 4x^2 - 2$
10	$z = 5xy, z = 0, x + y = 7, y \geq 3, x = 0$

11	$y = 7 - z^2, x + y = 7, x = 0, y = 0$
12	$2x = \sqrt{y}, 2y = \sqrt{x}, z + x = 6, z = 0$
13	$x^2 = 5y, y + z = 3, y + 2z = 3$
14	$yz = 3, x + y + z = 4, -2x + y + z = 4$
15	$z = 3 - x^2, z = 3 - y^2, z = 0$
16	$z = x, z = 4 - y^2, x = 0$
17	$z^2 = 2y, z^2 = 6 - y, x = 0, x + y = 6$
18	$z = 3 - y, z = 0, x = \sqrt{y}, x = 3\sqrt{y}$
19	$y = 0, z = 0, x + y + z = 11, 2x + z = 11$
20	$z^2 = 8x, x = 3y, x + y = 2$
21	$y + z = 4, z = 0, 4z + 2y + x = 16, 2z + y + x = 8$

Задача №4 Изобразите область интегрирования и измените порядок интегрирования

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x, y) dy, & 2) \int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx, \\
 3) \int_{-\sqrt{3}}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy, & 4) \int_2^4 dy \int_y^4 f(x, y) dx, \\
 5) \int_{-1}^0 dx \int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy, & 6) \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^y f(x, y) dx, \\
 7) \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy, & 8) \int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^4 f(x, y) dx, \\
 9) \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^2 f(x, y) dy, & 10) \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx, \\
 11) \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy, & 12) \int_{-1}^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y) dx, \\
 13) \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{24x-x^2}} f(x, y) dy, & 14) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x, y) dx, \\
 15) \int_{-2}^2 dx \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy, & 16) \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy,
 \end{array}$$

$$17) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy; \quad 18) \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy;$$

$$19) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy. \quad 20) \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

Практическое занятие № 43-46

Тема занятия «Криволинейные интегралы по длине дуги и по координатам, их вычисление и приложения»

Цель занятия: Формирование умений вычислять криволинейные интегралы и использовать их для вычисления геометрических и физических величин.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из пособия [2], часть 2 решите задания 186, 188, 191, 197, 199.

Задания для самостоятельной работы дома

Из пособия [2], часть 2 решите задания 187, 190, 192, 200.

[2] Высшая математика в упражнениях и задачах : [учеб. пособие] : В 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко, Ч.2. - 7-е изд., испр. - М. : Мир и Образование, 2015.

Практическое занятие № 47-48

Тема занятия «Поверхностные интегралы первого и второго рода, их вычисление»

Цель занятия: Формирование умений вычислять поверхностные интегралы первого и второго рода.

План проведения занятия соответствует разработке занятия в пособии [3], часть 2, глава 8 с 169-183, разобрать в аудитории задания 1,2(1,3), 3(4,5); для самостоятельной работы дома 2(2,4), 3(1-3), 4(1), 5.

Кроме того можно предложить

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из пособия [2], часть 2 рассмотреть разобранные задания 227-231

Задания для самостоятельной работы дома

Из пособия [2], часть 2 решите задания 232, 233, 234.

Практическое занятие № 49

Итоговое занятие по разделу «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

Цель занятия: Контроль знаний студентов по разделу
**«ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ
ПЕРЕМЕННЫХ»**

Форма проведения занятия - коллоквиум

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Базовый уровень

1. Определение двойного интеграла.
2. Свойства двойного интеграла.
3. Сведение двойного интеграла к повторным интегралам.
4. Приложения двойного интеграла.
5. Определение тройного интеграла.
6. Свойства тройного интеграла.
7. Сведение тройного интеграла к повторным интегралам.
8. Приложения тройного интеграла.
9. Криволинейные интегралы по длине дуги, их определение и вычисление.
10. Криволинейные интегралы по координатам, их определение и вычисление.
11. Понятие поверхности.
12. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
13. Односторонние и двусторонние поверхности.
14. Площадь поверхности.
15. Поверхностные интегралы первого рода, их вычисление.

Повышенный уровень

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
2. Замена переменных при вычислении двойного интеграла.
3. Переход к полярной системе координат при вычислении двойного интеграла.
4. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла.
5. Замена переменных при вычислении тройного интеграла.
6. Переход к цилиндрической и сферической системам координат при вычислении тройного интеграла.
7. Приближённое вычисление кратных интегралов. Аналог формул прямоугольников, трапеций, Симпсона, касательных.
8. Сравнительный анализ свойств криволинейных интегралов первого и второго рода.
9. Приложения криволинейных интегралов первого рода.
10. Приложения криволинейных интегралов второго рода.
11. Поверхностные интегралы второго рода

Практическое занятие № 50-51

Тема занятия «Скалярные и векторные поля»

Цель занятия: Формирование понятия скалярного поля и умений находить производную по направлению и градиент скалярного поля.

1. Скалярное поле и его геометрическое изображение

Определение. *Скалярным полем называется часть пространства (или все пространство), каждой точке P которой соответствует численное значение некоторой скалярной величины U .*

Например, неоднородное тело, каждой точке которого соответствует определенное значение плотности, можно рассматривать как скалярное поле. Другими примерами скалярных полей являются поле распределения электрического потенциала и т.д. Во всех случаях мы будем предполагать, что скалярная величина u не зависит от времени, а зависит от положения точки P в пространстве. Иными словами, величина u рассматривается как функция точки $P: u = F(P)$. Эта функция называется *функцией поля*. Если в пространстве ввести систему координат $Oxyz$, то точка P в этой системе будет иметь определенные координаты x, y и z , и скалярная величина u станет функцией этих координат:

$$u = F(P) = F(x, y, z).$$

Обратно, всякая функция трех переменных $u = F(x, y, z)$ задает некоторое скалярное поле.

Скалярные поля часто изображаются геометрически с помощью так называемых поверхностей уровня.

Определение. *Поверхностью уровня (или эквипотенциальной поверхностью) скалярного поля называется геометрическое место точек пространства, в которых функция поля $u = F(x, y, z)$ имеет одно и то же значение C .*

Уравнение поверхности уровня имеет вид:

$$F(x, y, z) = C.$$

Придавая C различные значения, получим семейство поверхностей уровня.

2. Производная по направлению

Пусть задана дифференцируемая функция скалярного поля $u = F(x, y, z)$. Рассмотрим точку $P(x; y; z)$ этого поля и луч l , выходящий из точки P в направлении единичного вектора

$$l = \cos \alpha \cdot i + \cos \beta \cdot j + \cos \gamma \cdot k,$$

где α, β и γ - углы вектора l с осями координат.

Пусть $P_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z)$ - какая-нибудь другая точка этого луча. Разность значений функции u скалярного поля в точках P_1 и P назовем *приращением этой функции в направлении l* и обозначим через $\Delta_l u$. Тогда

$$\Delta_l u = F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y, z).$$

Обозначим также через Δl расстояние между точками P и P_1 :

$$\Delta l = PP_1.$$

Определение. *Производной функции $u = F(x, y, z)$ по направлению l называется предел $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}$.*

Производная функции $u = F(x, y, z)$ по направлению l обозначается символом $\frac{\partial u}{\partial l}$. Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}.$$

Формула для вычисления:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = F'_x(x, y, z) \cos \alpha + F'_y(x, y, z) \cos \beta + F'_z(x, y, z) \cos \gamma.$$

Пример 1. Найти производную функции $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точке $P_1(1; 2; -1)$ по направлению, идущему от точки P_1 к точке $P_2(2; 4; -3)$.

Решение. Находим вектор

$\overline{P_1P_2} = (2-1)i + (4-2)j + (-3+1)k = i + 2j - 2k$ и соответствующий ему единичный вектор

$$l = \frac{\overline{P_1P_2}}{|\overline{P_1P_2}|} = \frac{i + 2j - 2k}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{2}{3}k.$$

Таким образом, вектор l имеет следующие направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}; \cos \beta = \frac{2}{3}; \cos \gamma = -\frac{2}{3}.$$

Теперь найдем частные производные функции $u = x^2 - 2xz + y^2$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 - 2xz + y^2)'_x = 2x - 2z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 - 2xz + y^2)'_y = 2y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 - 2xz + y^2)'_z = -2x,$$

и их значения в точке $P_1(1;2;-1)$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_1} = (2x - 2z)\bigg|_{\substack{x=1 \\ z=-1}} = 4; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{P_1} = (2y)\bigg|_{y=2} = 4; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{P_1} = -2x\bigg|_{x=1} = -2;$$

Подставляя найденные значения, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} + (-2)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

3. Градиент

При изучении скалярных полей наряду с функцией поля $u = F(x, y, z)$ рассматривается некоторый вектор, тесно связанный с этой функцией, - градиент скалярного поля.

Определение. *Градиентом в точке $P(x, y, z)$ скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией $u = F(x, y, z)$, называется вектор, равный*

$$F'_x(x, y, z)i + F'_y(x, y, z)j + F'_z(x, y, z)k.$$

Градиент функции $u = F(x, y, z)$ мы будем обозначать одним из символов $\text{grad } F(x, y, z)$, $\text{grad } F(P)$.

По определению

$$\text{grad } F(x, y, z) = F'_x(x, y, z)i + F'_y(x, y, z)j + F'_z(x, y, z)k.$$

Таким образом, каждой точке $P(x; y; z)$ скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией $u = F(x, y, z)$, относятся не только значение этой функции, но и вполне определенный вектор- $\text{grad } F(P)$.

Пример. Найти градиент функции $u = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ в точке $P_0(2; -1, 1)$.

Решение. Введя обозначение $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$, найдем $F'_x(x, y, z) = 2x$; $F'_y(x, y, z) = 4y$; $F'_z(x, y, z) = -2z$. Затем, пользуясь формулой (42), получим

$$\text{grad } u(P_0) = F'_x(2; -1, 1)i + F'_y(2; -1, 1)j + F'_z(2; -1, 1)k = 4i - 4j - 2k.$$

Между градиентом функции $u = F(x, y, z)$ в данной точке и производной по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ в той же точке имеется связь, которая устанавливается следующей теоремой.

Теорема. Проекция вектора $\text{grad } u$ на единичный вектор $l = \cos \alpha \cdot i + \cos \beta \cdot j + \cos \gamma \cdot k$ равна производной функции u по направлению

$$l : \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial l}.$$

Учитывая, что производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ выражает скорость изменения скалярного поля $u = F(x, y, z)$ в этом направлении, формулу можно прочесть так: проекция $\text{grad } u$ на вектор l равна скорости изменения поля $u = F(x, y, z)$ в направлении вектора l .

Обозначим через φ угол между единичным вектором l и $\text{grad } u$. Тогда $\text{grad } u = |\text{grad } u| \cdot \cos \varphi$. Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| \cos \varphi.$$

Если направления векторов l и $\text{grad } u$ совпадают ($\varphi = 0$), то производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ имеет, очевидно, наибольшее значение равное

$$|\text{grad } u| \cos 0 = |\text{grad } u|.$$

Таким образом, мы приходим к следующему выводу: $\text{grad } u$ есть вектор, указывающий направление наибольшего возрастания поля в данной точке и имеющий модуль, равный скорости этого возрастания.

Отсюда следует, что $\text{grad } u$ функции скалярного поля $u = F(x, y, z)$ определяется самим полем и не зависит от системы координат, в которой рассматривается функция поля.

Пример 2. Найти наибольшую скорость возрастания функции $z = x^2 y - 5y^3$ в точке $P_0(2; 1)$.

Решение. Наибольшая скорость возрастания функции равна модулю градиента этой функции. Находим

$$\text{grad } z = (z^2 y - 5y^3)'_x i + (x^2 y - 5y^3)'_y j = 2xyi + (x^2 - 15y^2)j.$$

В точке $P_0(2; 1)$ $\text{grad } z = 4i - 11j$. Следовательно, наибольшая скорость возрастания функции равна

$$|\text{grad } z|_{P_0} = \sqrt{4^2 + 11^2} = \sqrt{137}.$$

Говорят, что в области D задано *векторное поле*, если каждой точке M этой области сопоставлен по некоторому закону вектор $a(M)$. Таким образом, понятия векторного поля и векторной функции, определенной в области D , совпадают.

Пусть M - точка области D , e - единичный вектор с координатами $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, определяющий некоторое направление. Пусть M' - любая точка из D , отличная от M и такая, что вектор MM' коллинеарен вектору e . Обозначим расстояние между M и M' через ρ .

Определение. *Производной векторного поля $a(M)$ в точке M по направлению e называется предел отношения*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta a(M)}{\rho} = \frac{\partial a(M)}{\partial e} = \frac{\partial a}{\partial e}$$

(в случае, если этот предел существует). Здесь $\Delta a(M) = a(M') - a(M)$.

Пусть в этом базисе вектор $a(M)$ имеет координаты P, Q, R . Согласно формулам

$$\frac{\partial a}{\partial i} = \frac{\partial a}{\partial x} = Ai, \quad \frac{\partial a}{\partial j} = \frac{\partial a}{\partial y} = Aj, \quad \frac{\partial a}{\partial k} = \frac{\partial a}{\partial z} = Ak.$$

$${}^0A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Определение. *Потоком Π векторного поля F через ориентированную поверхность S называется поверхностный интеграл*

$$\Pi = \iint_S (F \cdot n) dS,$$

где n - единичный вектор нормали к поверхности S .

Направление вектора нормали обычно оговаривается в условии задачи. В случае замкнутой поверхности направление вектора нормали выбирается «изнутри наружу».

Вычислим производную векторного поля $a(M)$ по направлению e .

Поскольку единичный вектор e имеет координаты $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, то

$$\frac{\partial a(M)}{\partial e} = Ae = A(i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma) = \cos \alpha (Ai) + \cos \beta (Aj) + \cos \gamma (Ak)$$

Далее,

$$Ai = \frac{\partial a}{\partial x}, \quad Aj = \frac{\partial a}{\partial y}, \quad Ak = \frac{\partial a}{\partial z}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial a(M)}{\partial e} = \cos \alpha \frac{\partial a}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial a}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial a}{\partial z}.$$

Учитывая, что $a = Pi + Qj + Rk$, запишем еще одно выражение для производной по направлению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(M)}{\partial e} = & \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial P}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial P}{\partial z} \cos \gamma \right) i + \\ & + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial Q}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \gamma \right) j + \\ & + \left(\frac{\partial R}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial R}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial R}{\partial z} \cos \gamma \right) k. \end{aligned}$$

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Скалярное поле задано функцией $U(x, y, z) = xyz$. Найти градиент этой функции в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Каков его модуль?

2. Скалярное поле задано функцией $U(x, y, z) = z(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$. Найти уравнения поверхностей уровня. Какая из этих поверхностей проходит через точку $A(2; 0; \frac{2}{\sqrt{3}})$?

3. Вычислить производную функции поля $U = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ в точке $M(2; -1; -2)$, в направлении вектора $\vec{l} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

4. Вычислить $|\text{grad } z|$ в точке $M_0(4; 2)$, если $z^2 = xy$.

5. Вычислить производную функции $u = \ln(e^x + e^y)$ в точке $M_0(0; 0)$ по направлению луча биссектрисы третьего координатного угла. Вычислить для векторного поля F его поток через поверхность S .

1. $F = r, S: \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x > 0, y > 0, z > 0 \right\}$

2. $F = xi + yk, S: \{x^2 + y^2 + z = 9, x < 0, y < 0, z > 0\}$

3. $F = xyi + yzj + xzk, S$: Треугольник с вершинами в точках $A(0, 0, 4), B(-2, 1, 0), C(2, 1, 0)$

4. $F = xzi + yzj + xyk, S: \{x^2 + y^2 = (z - 1)^2, y < 0, 1 > z > -1\}$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Составить уравнение линий уровня для поля $u = 4 - x^2 - y^2$.

2. Составить уравнения поверхностей уровня для поля $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

3. Даны скалярные поля $u = x^2y + y^2x$ и $v = x - 6y + 5xy$. Найти угол между $\text{grad } u$ и $\text{grad } v$ в точке $M(2; -1; 0)$.

4. Найти геометрическое место точек, в которых модуль градиента поля $u = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ равен 2.

5. Вычислить координаты точек, в которых градиент поля $u = \ln(x + \frac{1}{y})$ равен

$$\vec{i} - \frac{16}{9}\vec{j}.$$

6. Найти производные функции по направлению $\vec{l}$ в точке M_0 .

а) $z = x^3y - 5xy^2 + 8, \vec{l} = \vec{i} + \vec{j}, M_0(1; 1)$.

б) $z = \ln \frac{x^2 + y^2}{xy}, \vec{l} = 6\vec{i} + 8\vec{j}, M_0(1; 2)$.

в) $z = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \vec{l} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}, M_0(1;1;1).$

Вычислить для векторного поля F его поток через поверхность S .

1. $F = (x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x + z)\vec{k}, S$: Треугольник с вершинами в точках $A(0,0,5), B(-2,-3,0), C(-2,1,0)$

2. $F = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}, S : \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x > 0, z > 0 \right\}$

3. $F = xz\vec{i} + yz\vec{j} + xy\vec{k}, S : \{x^2 + y^2 + z = 9, y > 0, z > 0\}$

Практическое занятие № 52

Тема занятия «Интегральные формулы анализа»

Цель занятия: Формирование умений исследовать знакоположительные ряды на сходимость.

Методические рекомендации

Разработка занятия соответствует материалам пособия [3] п.53.4, 53.5, с 172-173, с. 182-183, 54.6-54.8 с 188-195, с. 196-197.

Из пособия [2], часть 2 рассмотреть разобранные задания 235-250.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из пособия [2], часть 2 рассмотреть разобранные задания 216, 217.

Из пособия [2], часть 2 решить задания 251, 255, 261, 263.

Из пособия [3] п.53.4, 53.5, с 172-173, с. 182-183 решить задачи 9-13(1), п..54.6-54.8 с 188-195, с 196-197 задачи 9-14 (1).

[3] Каплан И.А., Пустынников В.И. Практикум по высшей математике. В 2 т. М.: Эксмо, 2006.

Задания для самостоятельной работы дома

Из пособия [2], часть 2 решить задания 218, 219.

Из пособия [2], часть 2 решить задания 252, 256, 262, 264.

Из пособия [3] п.53.4, 53.5, с 172-173, с. 182-183 решить задачи 9-13(2), п..54.6-54.8 с 188-195, с 196-197 задачи 9-14 (2).

Практическое занятие № 53

Тема занятия «Итоговое занятие по разделу «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ»»

Цель занятия: Контроль знаний студентов по разделу «Элементы теории поля».

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Базовый уровень

Тема Скалярные поля и их характеристики.

1. Скалярные поля, определение, описание.
2. Производная по направлению.

Тема Векторные поля и их характеристики.

1. Определение векторного поля.
2. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля.

Повышенный уровень

Тема Скалярные поля и их характеристики.

1. Градиент скалярного поля.

Тема Векторные поля и их характеристики.

1. Циркуляция векторного поля.

Тема Основные интегральные формулы анализа.

1. Формула Грина, её применение.
2. Формула Остроградского-Гаусса.
3. Формула Стокса.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**Методические указания для обучающихся по организации и
проведению самостоятельной работы**

Направление подготовки 03.03.02 Физика
Направленность (профиль)
«Медицинская физика»

**Ставрополь
2026**

Общая характеристика самостоятельной работы студента при изучении дисциплины

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

Самостоятельная работа включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим занятиям) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными модулями (темами) дисциплины в соответствии с рабочей программой;
- написание рефератов, докладов;
- подготовку к практическим занятиям и выполнение предусмотренных ими заданий;
- подготовку ко всем видам аттестаций;
- подготовку презентаций по темам (части темы).

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать

следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;

б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность - способность человека к труду с высокой

степенью напряженности в течение определенного времени. Различают внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;
- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;
- привычная последовательность и систематичность деятельности;
- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является *утреннее время (с 8 до 14 часов)*, причем максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* - (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1-1,5 часа нужны перерывы по 10 - 15 мин, через 3 - 4 часа работы отдых должен быть продолжительным - около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Физически здоровый молодой человек, обладающий хорошей подготовкой и нормальными способностями, должен, будучи студентом, отдавать *учению 9-10 часов в день* (из них 6 часов в вузе и 3 - 4 часа дома). Любой предмет нельзя изучить за несколько дней перед экзаменом. Если студент в году работает систематически, то он быстро все вспомнит, восстановит забытое. Если же подготовка шла аврально, то у студента не будет даже общего представления о предмете, он забудет все сданное.

Следует взять за правило: *учиться ежедневно, начиная с первого дня семестра.*

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо

заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы – это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия требуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать

постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом. Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

Методические рекомендации по подготовке к занятиям

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Код оцениваемой компетенции, индикатора (ов)	Этап формирования компетенции (№ темы) (в соответствии с рабочей программой дисциплины)	Средства и технологии и оценки	Вид контроля, аттестация (текущий/промежуточный)	Тип контроля (устный, письменный или с использованием технических средств)	Наименование оценочного средства
ИД-1ОПК-1	1, 7, 8, 9	Коллоквиум	Текущий	Устный	вопросы к коллоквиуму 1, 4, 5
	1, 6	Индивидуальное задание	Текущий	Письменный	Комплект 1,2, 5 разноуровневых заданий, задач
	6	Собеседование	Текущий	Устный	Вопросы для собеседования 1
	1-9	Вопросы к экзамену	Промежуточный	Устный	Экзамен 2, 4
ИД-2ОПК-1	2, 8, 9	Коллоквиум	Текущий	Устный	вопросы к коллоквиуму 2, 5
	1, 2	Индивидуальное задание	Текущий	Письменный	Комплект 1, 2, 4 разноуровневых заданий, задач
	6,7	Собеседование	Текущий	Устный	Вопросы для собеседования 1, 2
	1-9	Вопросы к экзамену	Промежуточный	Устный	Экзамен 2, 4
ИД-3ОПК-1	3,4,8,9	Коллоквиум	Текущий	Устный	вопросы к коллоквиуму 3,5
	2, 3, 4, 8	Индивидуальное задание	Текущий	Письменный	Комплект 3, 6 разноуровневых заданий, задач
	7	Собеседование	Текущий	Устный	Вопросы для собеседования 2
	1-9	Вопросы к экзамену	Промежуточный	Устный	Экзамен 2, 4

ПЛАН-ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ СТУДЕНТАМИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения	Количество баллов
1 семестр			
1	Практическое занятие 7	7	20
2	Практическое занятие 12	12	20
3	Практическое занятие 18	18	15
	Итого за 1 семестр:		55
2 семестр			
1	Практическое занятие 5	10	35
2	Практическое занятие 8	16	20
	Итого за 2 семестр:		55
3 семестр			
1	Практическое занятие 5	10	25
2	Практическое занятие 9	18	30
	Итого за 3 семестр:		55
4 семестр			
1	Практическое занятие 7	7	20
2	Практическое занятие 14	14	20
3	Практическое занятие 18	18	15
	Итого за 4 семестр:		55
	Итого		220

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения	Количество баллов
1 семестр			
1	Практическое занятие 7	7	20
2	Практическое занятие 12	12	20
3	Практическое занятие 18	18	15
	Итого за 1 семестр:		55
2 семестр			
1	Практическое занятие 5	10	35
2	Практическое занятие 8	16	20
	Итого за 2 семестр:		55
3 семестр			
1	Практическое занятие 5	10	25
2	Практическое занятие 9	18	30
	Итого за 3 семестр:		55
4 семестр			
1	Практическое занятие 7	7	20

2	Практическое занятие 14	14	20
3	Практическое занятие 18	18	15
	Итого за 4 семестр:		55
	Итого		220

Вопросы к экзамену

Вопросы к экзамену (2 семестр)

Вопросы (задача, задание) для проверки уровня обученности

Знать

1. Определение и способы задания функции. Область определения, область значения, график функции. Обратная функция. Сложная функция.
2. Основные элементарные функции, элементарные функции (линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические), их свойства, графики.
3. Предел функции. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы.
4. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции.
5. Непрерывные функции и их свойства. Непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций.
6. Задачи, приводящие к понятию производной, ее геометрический и механический смысл.
7. Производная сложной функции. Правила дифференцирования. Таблица основных производных.
8. Функции заданные неявно и параметрически и их дифференцирование.
9. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.
10. Дифференциал функции. Дифференциалы высших порядков.
11. Правила Лопиталя.
12. Возрастание и убывание функции, необходимое и достаточные условия.
13. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
14. Экстремумы функции, необходимое и достаточные условия существования точек экстремума.
15. Выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба: определение, необходимые и достаточные условия.
16. Асимптоты плоских кривых, их виды.
17. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

18. Первообразная функция и неопределенный интеграл.
19. Таблица основных интегралов. Метод непосредственного интегрирования.
20. Метод замены переменной в неопределённом интеграле.
21. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле.
22. Классы интегрируемых функций. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трёхчлен.
23. Интегрирование рациональных функций.
24. Интегрирование иррациональных функций.
25. Интегрирование трансцендентных функций.
26. Примеры «неберущихся интегралов».
27. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
28. Определенный интеграл как предел интегральных сумм.
29. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
30. Замена переменной в определенном интеграле.
31. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
32. Геометрические приложения определённого интеграла.
33. Физические приложения определённого интеграла.
34. Биологические приложения определённого интеграла.
35. Численное интегрирование. Формула прямоугольников. Формула трапеций. Формула Симпсона.
36. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
37. Несобственные интегралы от разрывных функций.
38. Признаки сравнения.
39. Числовые ряды: основные понятия, необходимые условия сходимости ряда. Остаток ряда.
40. Ряды с положительными членами и признаки их сходимости: признаки сравнения, Даламбера, Коши.

41. Знакопередающие ряды, признак Лейбница.

Повышенный уровень

1. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Число e . Натуральные логарифмы.
2. Односторонние и бесконечные пределы.
3. Сравнение бесконечно малых функций.
4. Точки разрыва и их классификация.
5. Связь дифференцируемости с непрерывностью.
6. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой.
7. Инвариантность формы первого дифференциала, применение дифференциала к приближенным вычислениям.
8. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.
9. Формула Тейлора.
10. Физические приложения определенного интеграла.

Уметь,
владеть

1. Найти область определения функции $y = \arcsin(5-x) + \log_2 \frac{1}{x^2-4}$.

2. Найти область определения функции $y = \sqrt{\frac{2-x}{x^2-7x-8}} + \ln(2-3x)$.

3. Указать область значений функции $y = x^2 - 10x + 16$.

4. Указать область значений функции $y = 3^{1-2x} + 5$.

5. Исследовать функцию на четность $y = x^2 - \sqrt{\frac{1-x^2}{3+2x^2}}$.

6. Исследовать функцию на четность $y = \sqrt{\frac{1+x}{2-x}} - 3\sin 5x$.

7. Найти наименьший положительный период функции $y = \cos 6x + 4\sin \frac{2x}{9}$.

8. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + x - 6}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{5}}{3x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{9+x}-3}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{3}{2x})^{x+5}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt[3]{8-x} - \sqrt[3]{8+x}}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-8}{7x+2} \right)^{x+1}$.

9. Найти производную по определению $y = \cos 2x$.

10. Найти производную, пользуясь правилами дифференцирования $y = (3-7x) \cdot (1+x)^3$.

11. Найти производную сложной функции $y = \log_2 \frac{e^{2x} - e^{4x}}{xe^{5x}}$.

12. С помощью логарифмического дифференцирования найти производную

$$y = (1-2x)^5 \cdot (2+x)^6 \cdot \sqrt{2-x}.$$

13. Найти производную неявно заданной функции $x \cos 3y - 2x + 3y^2 = 0$.

14. Найти производную параметрически заданной функции $\begin{cases} x = t \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$.

15. Найти производную по определению $y = \sqrt{2-3x}$.

16. Найти производную, пользуясь правилами дифференцирования $y = \frac{3-5x}{(1+3x)^2}$.

17. Найти производную сложной функции $y = \sqrt[4]{\frac{\sin 3x + \cos 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}}$.

18. С помощью логарифмического дифференцирования найти производную

$$y = (1-x)^4 \cdot (2-7x)^3 \cdot \sqrt[5]{2+3x}.$$

19. Найти производную неявно заданной функции $\frac{2-3x}{y \ln(x-y)} = 0$.

20. Найти производную параметрически заданной функции $\begin{cases} x = -t^2 \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}$.

21. Вычислить предел, используя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln(x-1) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}{\operatorname{ctg} \pi x}$.

22. Вычислите приближенно $\sqrt[3]{7,99}$.

23. Определить точки экстремума функции $f(x) = (x-1)^3 \cdot (x+1)^2$.
24. Найти экстремумы функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.
25. Найти точки перегиба графика функции $f(x) = (x-4)^5 + 4x + 4$.
26. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = (2-x) \cdot (x+1)^2$.
27. Находить первообразную функции и неопределенный интеграл непосредственно.
28. Применять метод замены переменной в неопределённом интеграле.
29. Использовать интегрирование по частям в неопределённом интеграле.
30. Интегрировать функции, содержащие квадратный трёхчлен.
31. Интегрировать рациональные функции.
32. Интегрировать иррациональные функций.
33. Интегрировать трансцендентные функций.
34. Применять формулу Ньютона-Лейбница при вычислении определённого интеграла.
35. Проводить замену переменной в определенном интеграле.
36. Проводить интегрирование по частям в определенном интеграле.
37. Исследовать ряды с положительными членами на сходимость.
38. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды.

Повышенный уровень

1. . Найти область определения $y = e^x + \ln(2 - \sqrt{x-3})$.
2. Вычислить пределы а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{1+3x^2} - 1}{x^3 + x^2} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{3x-5}$.
3. Найти производную функции $y = \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})$.
4. Найти производную третьего порядка от функции $y = x^2 \ln x$.
5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(2; -1)$ и касающейся кривой $y = x^2 - 4$.

6. Из куска проволоки длиной l согнуть прямоугольник, чтобы его площадь была наибольшей.
7. На прямой между двумя источниками света силы F и $8F$ найти наименее освещенную точку, если расстояние между источниками 24 м . Учесть, что освещенность точки обратно пропорциональна расстоянию ее от источника света.
8. Водный канал должен иметь заданную глубину и заданную площадь поперечного сечения. Если поперечное сечение есть равнобокая трапеция, то каким должен быть угол наклона ее боковых сторон, чтобы при движении воды по каналу потери на сопротивление трения были наименьшими. Т.е. чтобы сумма нижнего основания и боковых сторон трапеции была наименьшая?
9. Канал, ширина которого 27 м , под прямым углом впадает в другой канал шириной 64 м . Какова наибольшая длина бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов?
10. Вычислять площади, объёмы и длины дуг с помощью определённого интеграла.
11. Проводить численное интегрирование по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона.
12. Вычислять несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
13. Исследовать на сходимость несобственные интегралы от разрывных функций.

Вопросы к экзамену (4 семестр)

Вопросы (задача, задание) для проверки уровня обученности

1. Степенные ряды. Основные определения.
2. Теорема Абеля. Способы нахождения радиуса и интервала сходимости степенного ряда.
3. Свойства степенных рядов.
4. Разложение функций в степенной ряд.
5. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена).
6. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям значений функций, интегралов, пределов.
7. Тригонометрическая система функций, ее ортогональность.
8. Ряд Фурье. Формулы для вычисления его коэффициентов.
9. Ряды Фурье для четных и нечетных периодических функций.
10. Сходимость ряда Фурье. Разложение функции, заданной на интервале, в косинус и синус ряд Фурье
11. Функции нескольких переменных. Основные определения.

12. Область определения и область значений функции двух переменных. График функции. Линии уровня. Поверхности уровня.
13. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
14. Свойства непрерывных функций двух переменных.
15. Частные производные и дифференциалы первого и более высоких порядков.
16. Теорема о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования.
17. Производные сложной функции.
18. Неявные функции и их дифференцирование.
19. Полный дифференциал.
20. Дифференциал сложной функции.
21. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.
22. Производная сложной функции.
23. Экстремум функции двух переменных.
24. Условный экстремум, метод множителей Лагранжа.
25. Метод наименьших квадратов.
26. Двойной интеграл: определение, свойства, вычисление.
27. Замена переменных, переход к полярной системе координат.
28. Приложения двойного интеграла.
29. Тройной интеграл: определения, свойства, вычисление
30. Замена переменных, переход к цилиндрической и сферической системам координат.
31. Приложения тройного интеграла.
32. Приближённое вычисление кратных интегралов. Аналог формул прямоугольников, трапеций, Симпсона, касательных.
33. Криволинейные интегралы по длине дуги, их вычисление.
34. Криволинейные интегралы по координатам, их вычисление.
35. Приложения криволинейных интегралов.
36. Понятие поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
37. Односторонние и двусторонние поверхности. Площадь поверхности.
38. Поверхностные интегралы первого и второго рода, их вычисление.
39. Скалярные поля. Производная по направлению. Градиент скалярного поля.
40. Векторные поля. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля. Циркуляция векторного поля.
41. Основные интегральные формулы анализа: формула Грина.
42. Формула Остроградского-Гаусса.
43. Формула Стокса.

Уметь,
владеть

1. Находить радиус и интервал сходимости степенного ряда.
2. Разлагать функции в степенной ряд.
3. Применять степенные ряды к приближенным вычислениям значений функций, интегралов, пределов.
4. Разлагать функции в ряд Фурье.
5. Находить область определения и область значений функции двух переменных, строить график функции, линии уровня, поверхности уровня.
6. Вычислять предел и исследовать непрерывность функции нескольких переменных.
7. Вычислять частные производные и дифференциалы первого и более высоких порядков для функции нескольких переменных.

8. Вычислять производные сложной функции.
9. Находить полный дифференциал.
10. Вычислять дифференциал сложной функции.
11. Применять полный дифференциал к приближенным вычислениям.
12. Находить экстремум функции двух переменных.
13. Определять условный экстремум методом множителей Лагранжа.
14. Применять метод наименьших квадратов.
15. Вычислять двойной интеграл.
16. Применять замену переменных, переходить к полярной системе координат при вычислении двойного интеграла.
17. Решать задачи на приложения двойного интеграла.
18. Вычислять тройной интеграл.
19. Применять замену переменных, переход к цилиндрической и сферической системам координат при вычислении тройного интеграла.
20. Решать задачи на приложения тройного интеграла.
21. Вычислять криволинейные интегралы по длине дуги.
22. Находить криволинейные интегралы по координатам.
23. Решать задачи на приложения криволинейных интегралов.
24. Находить касательную плоскость и нормаль к поверхности.
25. Вычислять поверхностные интегралы первого и второго рода.
26. Вычислять производную по направлению и градиент скалярного поля.
27. Вычислять дивергенцию, ротор и производную по направлению векторного поля, циркуляцию векторного поля.
28. Применять формулу Грина.
29. Использовать формулу Остроградского-Гаусса.
30. Проводить вычисления с помощью формулы Стокса.

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка «отлично» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает материал; свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний как базового так и повышенного уровня; использует в ответе дополнительный материал все предусмотренные программой задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному; анализирует полученные результаты; проявляет самостоятельность при выполнении заданий.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено полностью, необходимые практические компетенции в основном сформированы, все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения достаточно высокое, при ответе на вопрос или решении задачи повышенного уровня возможны некоторые затруднения, хотя основное содержание этих заданий студенту известно. Студент твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, большинство предусмотренных программой заданий базового уровня выполнено, но в них имеются ошибки, при ответе на поставленный вопрос студент допускает неточности,

недостаточно правильные формулировки, наблюдаются нарушения логической последовательности в изложении программного материала.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы, необходимые практические компетенции не сформированы, большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному.

2. Описание шкалы оценивания

Промежуточная аттестация в форме экзамена предусматривает проведение обязательной экзаменационной процедуры и оценивается 40 баллами из 100. Минимальное количество баллов, необходимое для допуска к экзамену, составляет 33 балла. Положительный ответ студента на экзамене оценивается рейтинговыми баллами в диапазоне от 20 до 40 ($20 \leq S_{\text{экз}} \leq 40$), оценка меньше 20 баллов считается неудовлетворительной.

Шкала соответствия рейтингового балла экзамена 5-балльной системе

Рейтинговый балл по дисциплине	Оценка по 5-балльной системе
35 – 40	Отлично
28 – 34	Хорошо
20 – 27	Удовлетворительно

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения экзамена осуществляется в соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования в СКФУ.

В экзаменационный билет включаются 3 вопроса: два теоретических вопроса и задача. Один из теоретических вопросов может быть заменён защитой индивидуального проекта (темы проектов представлены в соответствующем ФОСе), подготовленного студентов в семестре и представляющем разработку одной из тем с презентацией для интерактивной доски. В билете один из вопросов (теоретический или задача) представлены из вопросов базового уровня, а другой из вопросов повышенного уровня.

Для подготовки по билету отводится 30 – 40 минут.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования калькулятором. Телефонами, планшетами и иными справочными материалами пользоваться не разрешается.

Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты,

прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

Оценка на экзамене выставляется в соответствии с соответствующим критерием.

При оценке в первую очередь учитываются показанные студентами знания и умения (их полноту, глубину, прочность, использование). Оценка также зависит от наличия и характера погрешностей. Среди погрешностей выделяют ошибки и недочеты. Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или о отсутствии знаний не считающихся основными в соответствии с программой. Недочетами также являются: погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного студентом задания или способа его выполнения, неаккуратная запись, небрежное выполнение чертежа, графика.

Ответ на теоретический вопрос считается безупречным, если по своему содержанию полностью соответствует вопросу, содержит все необходимые теоретические факты и обоснованные выводы, а устное изложение и письменная запись ответа математически грамотна и отличается последовательностью и аккуратностью.

Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

Вопросы для коллоквиумов по дисциплине «Математический анализ»

Коллоквиум 1

Базовый уровень

Тема 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

25. Дайте определение функции.
26. Что называется областью определения функции?
27. Что называется областью значений функции?
28. Дайте определение графика функции $y=f(x)$.
29. Дайте определение возрастающей и убывающей функции.
30. Какая функция называется монотонной?
31. Дайте определение четной и нечетной функции.
32. Какая функция называется периодической?
33. Определите нули функции.
34. Что называется промежутком знакопостоянства функции?
35. Какая функция называется ограниченной?
36. Какие Вы знаете способы задания функций?
37. Что называется пределом функции в точке?
38. Определите предел функции на бесконечности.
39. Чему равен предел постоянной величины?
40. Чему равен предел: а) суммы; б) разности; в) произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$?
41. Чему равен предел частного функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$?
42. Запишите первый замечательный предел и следствия из него.
43. Запишите второй замечательный предел и следствия из него.
44. Что называется приращением аргумента?

45. Что называется приращением функции?
46. Какая функция называется непрерывной в точке x_0 ?
47. Какая функция называется непрерывной на интервале?
48. Что называется точкой разрыва функции?
49. Какие задачи, приводящие к понятию производной, Вам известны?
50. Дайте определение производной функции в точке.
51. Опишите порядок вычисления производной функции по определению.
52. Чему равна производная: а) постоянной б) алгебраической суммы дифференцируемых функций; в) произведения двух дифференцируемых функций; г) дроби; д) сложной функции; е) обратной функции?
53. Запишите формулы для нахождения производных основных элементарных функций.
54. Дайте определение дифференциала функции.
55. Сформулируйте основные свойства дифференциалов.
56. Запишите формулу логарифмического дифференцирования. Когда применяется формула логарифмического дифференцирования?
57. Дайте определение неявного задания функции. Приведите примеры. Как от неявного задания перейти к явному заданию функции? Всегда ли это можно сделать. Приведите примеры.
58. Как проводят дифференцирование неявной функции?
59. Дайте определение параметрически заданной функции. Приведите примеры. Расскажите как от параметрического задания функции перейти к явному заданию функции.
60. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов функции.
61. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов функции.
62. Расскажите о формуле Тейлора и формуле Маклорена. Для чего эти формулы могут использоваться?
63. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на некотором промежутке. Как найти интервалы монотонности функции?
64. Дайте определения экстремумов функции.
65. Определите наибольшее и наименьшее значения функции.
66. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
67. Какие точки называются критическими?
68. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.
69. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции? Укажите порядок решения этой задачи.
70. Определите понятия выпуклость и вогнутость графика функции. Какую точку называют точкой перегиба? Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции? Как определить точки перегиба?

Повышенный уровень

Тема 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции.
2. Определите функцию обратную по отношению к функции $y=f(x)$.

3. Определите целую рациональную функцию.
4. Какая функция называется линейной? Что является ее графиком?
5. Какая функция называется квадратичной? Что является ее графиком?
6. Определите дробно-рациональную функцию.
7. Какую функцию называют степенной? Графики каких степенных функций Вы можете построить?
8. Определите показательную функцию. Постройте в тетради графики функций $y = 2^x$, $y = (1/2)^x$.
9. Какую функцию называют логарифмической? Постройте в тетради графики функций $y = \log_2 x$, $y = \lg x$, $y = \log_{1/2} x$.
10. Какие тригонометрические функции Вы знаете? Постройте графики основных тригонометрических функций в тетради.
11. Назовите обратные тригонометрические функции. Постройте их графики.
12. Вспомните основные преобразования графиков функций (параллельный перенос на вектор, растяжение или сжатие от координатных осей), приведите примеры.
13. Дайте определение предела функции слева (справа).
14. Может ли функция $f(x)$ иметь два различных предела при $x \rightarrow a$?
15. Как можно избавиться от неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, если числитель и знаменатель дроби содержат многочлены?
16. Как разложить квадратный трехчлен на линейные множители? Сформулируйте теорему Виета.
17. Как можно избавиться от неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$, если числитель и (или) знаменатель содержат иррациональные выражения? Запишите формулы сокращенного умножения, помогающие определить сопряженные выражения для данных.
18. Сформулируйте правила вычисления пределов дроби при $x \rightarrow \infty$, если числитель и знаменатель содержат многочлены.
19. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
20. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
21. Какова простейшая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?
22. Какова простейшая связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой величиной?
23. Что значит сравнить две бесконечно малые величины?
24. Какие две бесконечно малые величины называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных величин.
25. Как эквивалентные бесконечно малые величины могут быть использованы при вычислении пределов функции?
26. Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке. Что можно сказать о непрерывности этой функции в точке x_0 ?
27. Какая точка называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$?
28. Какая точка называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$?
29. Сформулируйте теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями.

30. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции, составленной из непрерывных функций.
31. Сформулируйте теорему о непрерывности основных элементарных функций.
32. Сформулируйте свойства функции, непрерывной на замкнутом интервале.
33. Как найти производную функции $y=f(x)$ по определению?
34. В чем состоит механический смысл производной?
35. Как связаны между собой дифференцируемость функции в некоторой точке с непрерывностью функции в этой точке?
36. Приведите пример непрерывной функции, не имеющей производной в некоторой точке.
37. Дайте определение сложной функции. Приведите примеры.
38. Сформулируйте теорему для нахождения производной сложной функции.
39. Составьте таблицу нахождения производных для функций вида $f(u)$, где f - одна из элементарных функций, $u = u(x)$.
40. Запишите формулу для вычисления дифференциала первого и последующих порядков.
41. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала?
Дифференциалы каких порядков обладают указанным свойством?
42. Расскажите о геометрическом смысле дифференциала первого порядка.
43. Как используется дифференциал в приближенных вычислениях?
44. Выведите формулу приближенного вычисления значений функций. Как определить погрешность приближения?
45. Дайте определение производной второго порядка, производной n -го порядка.
46. Расскажите о дифференцировании показательной-степенной функции.
47. Расскажите о нахождении производных высших порядков от неявно заданных функций.
48. Запишите формулы для нахождения производных первого и второго порядков от параметрически заданной функции.
 - а. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
 - б. Теоремы Ферма, Роля.
 - с. Теоремы Лагранжа, Коши.
49. Выведите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
50. Сколько раз подряд можно применять правило Лопиталя и когда это правило неприменимо?
51. Как можно раскрыть неопределенность вида $0 \cdot \infty$ при вычислении предела функции?
52. Что нужно сделать при вычислении предела функции, если он содержит неопределенность вида $\infty - \infty$?
53. Какой прием применяют для применения правил Лопиталя, если предел функции содержит неопределенность вида 0^0 , или ∞^0 , или 1^∞ ?
54. Разложите по формуле Тейлора (Маклорена) функции $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.
55. Как ведется исследование функции на экстремум с помощью второй производной?
56. Укажите порядок исследования функции на возрастание и убывание и экстремумы.
57. Что называется асимптотой кривой $y = f(x)$?
58. Как найти асимптоту $y = ax + b$ кривой $y = f(x)$, т.е. как найти a и b ?
59. По какой схеме следует проводить исследование функции и построение ее графика?
60. Для решения каких вопросов исследования функции и построения ее графика:

- а) не нужны теория пределов и дифференциальное исчисление?
- б) необходимо уметь вычислять пределы?
- в) нужна первая производная?
- г) нужна вторая производная

Коллоквиум 2 Базовый уровень

Тема 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ)

12. Дайте определение первообразной функции для данной функции $f(x)$ на данном промежутке. Как связаны между собой две первообразные для функции $f(x)$ в некотором промежутке?
13. Что называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$?
14. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла (правила интегрирования).
15. Составьте таблицу основных интегралов.
16. В чем суть метода непосредственного интегрирования?
17. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле. Когда целесообразно применять замену переменной интегрирования?
18. Запишите формулу интегрирования по частям. Когда целесообразно применение способа интегрирования по частям?
19. Интегралы какого вида можно вычислять с помощью формулы интегрирования по частям?
20. Расскажите о нахождении интегралов вида $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$; $\int \frac{(Ax + B)dx}{ax^2 + bx + c}$.
21. Как находится интеграл от целой рациональной функции?
22. Какая рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется правильной?
23. Рациональные дроби, какого вида называются элементарными? Как связана правильная рациональная дробь с элементарными дробями? Расскажите, как составляется схема разложения правильной дроби на основные элементарные дроби.
24. Какой способ применяется для разложения правильной рациональной дроби на сумму элементарных дробей?
25. Интегрирование иррациональных функций, содержащих квадратный трехчлен.
26. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов:

$$\int R\left(x, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{s}{t}}\right) dx; \quad \int R\left(x, (\alpha x + \beta)^{\frac{p}{q}}, \dots, (\alpha x + \beta)^{\frac{s}{t}}\right) dx;$$

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{s}{t}}\right) dx,$$
где R - рациональная функция, $p, q, \dots, s, t$ - целые числа.
27. Расскажите о нахождении интегралов от четной степени синуса или косинуса.
28. Расскажите о нахождении интегралов от нечетной степени синуса или косинуса.
29. Приведите примеры «неберущихся» интегралов.

Тема 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ)

18. Сформулируйте теорему об инвариантности формул интегрирования.
19. Расскажите, как применяется формула замены переменной в неопределенном интеграле. Что необходимо сделать после сведения интеграла к табличному?
20. Что принимается за u для интегралов вида $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin axdx$, $\int P(x)\cos axdx$ ($P(x)$ - многочлен)?
21. Что принимается за u для интегралов вида $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arctgxdx$, $\int P(x)\operatorname{arccotg}xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$ ($P(x)$ - многочлен)?
22. Как вычисляются интегралы $\int a^{kx} \sin nxdx$ и $\int a^{kx} \cos nxdx$?
23. Как интегрируются правильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от правильной рациональной дроби.
24. Как интегрируются неправильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от неправильной рациональной дроби.
25. Всегда ли можно найти интеграл от рациональной функции?
26. Вычисление интегралов $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$,
 $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$.
27. Интегралы от дифференциального бинома $\int x^m(a + bx^n)^p dx$, случаи интегрирования в элементарных функциях.
28. Сформулируйте порядок отыскания интеграла от функции, содержащей квадратный корень из квадратного трехчлена в знаменателе дроби и линейную функцию в числителе.
29. Какие способы нахождения интеграла вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ можете указать?
30. Расскажите о применении подстановок Эйлера при вычислении интегралов $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$. Сколько существует подстановок Эйлера? В каком случае может применяться каждая из них? Без какой из подстановок можно было бы обойтись? Объясните почему?
31. Какие формулы применяются для вычисления следующих интегралов:
а) $\int \sin ax \cos bxdx$, $\int \cos ax \cos bxdx$, $\int \sin ax \sin bxdx$, где $a \neq b$.
б) $\int \sin^m xdx$, $\int \cos^n xdx$, где m и n положительные целые числа.
в) Какие случаи необходимо рассмотреть при нахождении интегралов вида $\int \sin^m x \cos^n xdx$.
32. Какую замену следует сделать при нахождении интегралов вида $\int tg^n xdx$, $\int ctg^n xdx$?
33. Какой способ нахождения интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, $\int R(tgx)dx$,
 $\int R(e^x)dx$ Вы можете предложить? К какому типу интегралов они сводятся?
34. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов:
а) $\int f(\sin x)\cos xdx$;

- б) $\int f(\cos x) \sin x dx$;
- в) $\int f(\operatorname{tg} x) \frac{dx}{\cos^2 x}$ или $\int f(\operatorname{tg} x) dx$;
- г) $\int f(\operatorname{ctg} x) \frac{dx}{\sin^2 x}$ или $\int f(\operatorname{ctg} x) dx$;
- д) $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R - рациональная функция.

Коллоквиум 3

Базовый уровень

Тема ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

30. Что называется определенным интегралом от a до b от функции $f(x)$?
31. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
32. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
33. Запишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.
34. Запишите формулу замены переменной в определенном интеграле.
35. Что называется площадью плоской фигуры? Как найти площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла?
36. Что называется объемом тела? Как найти объем тела вращения?
37. Что называется длиной дуги? Как найти длину дуги: если функция задана в декартовых координатах?
38. Какие еще приложения определенных интегралов Вы знаете?

Тема НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

39. Несобственные интегралы с бесконечным верхним, бесконечным нижним пределами интегрирования, с бесконечными пределами интегрирования.
40. Несобственные интегралы от разрывных функций.

Повышенный уровень

Тема ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

35. На что следует обращать внимание при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной по сравнению с неопределенным интегралом?
36. Определите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования. Когда несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся (расходящимся)?
37. Для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
38. Определите несобственный интеграл от разрывной функции. Для несобственного интеграла от разрывной функции запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
39. Сформулируйте теорему сравнения для несобственных интегралов.
40. Дайте определение абсолютно сходящегося интеграла.
41. На что следует обращать внимание при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной по сравнению с неопределенным интегралом?

Тема НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

42. Определите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования.
43. Когда несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся (расходящимся)?
44. Для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
45. Определите несобственный интеграл от разрывной функции.
46. Когда несобственный интеграл от разрывной функции называется сходящимся (расходящимся)?

47. Для несобственного интеграла от разрывной функции запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
48. Сформулируйте теорему сравнения для несобственных интегралов.
49. Дайте определение абсолютно сходящегося интеграла. Дайте определение полярной системы координат. Установите формулы, связывающие полярные и прямоугольные координаты точки.
50. Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры в полярных координатах. Как найти длину дуги: если функция задана в полярных координатах; параметрически?
51. Признаки сравнения.

Коллоквиум 4

Базовый уровень

Тема 7.ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

13. Функции нескольких переменных. Основные определения.
14. Область определения и область значений функции двух переменных.
15. График функции двух переменных.
16. Частные производные функции нескольких переменных. Определение, правила вычисления.
17. Смешанные производные.
18. Теорема о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования.
19. Полный дифференциал.
20. Дифференциал сложной функции.
21. Дифференциалы высших порядков.
22. Экстремум функции двух переменных.
23. Необходимое условие экстремума для функции двух переменных.
24. Достаточное условие экстремума для функции двух переменных.

Повышенный уровень

Тема 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

10. Линии уровня.
11. Поверхности уровня.
12. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
13. Свойства непрерывных функций двух переменных.
14. Производные сложной функции.
15. Неявные функции и их дифференцирование.
16. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.
17. Условный экстремум, метод множителей Лагранжа.
18. Вывод метода наименьших квадратов с помощью решения задачи на нахождение экстремума функции нескольких переменных.

Коллоквиум 5

Базовый уровень

Тема 8.ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

8. Определение двойного интеграла.
9. Свойства двойного интеграла.
10. Сведение двойного интеграла к повторным интегралам.
11. Приложения двойного интеграла.
12. Определение тройного интеграла.

13. Свойства тройного интеграла.
14. Сведение тройного интеграла к повторным интегралам.
15. Приложения тройного интеграла.
16. Криволинейные интегралы по длине дуги, их определение и вычисление.
17. Криволинейные интегралы по координатам, их определение и вычисление.
18. Понятие поверхности.
19. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
20. Односторонние и двусторонние поверхности.
21. Площадь поверхности.
22. Поверхностные интегралы первого рода, их вычисление.

Тема 9. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Скалярные поля, определение, описание.
2. Производная по направлению.
3. Определение векторного поля.
4. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля.

Повышенный уровень

Тема 8. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

12. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
13. Замена переменных при вычислении двойного интеграла.
14. Переход к полярной системе координат при вычислении двойного интеграла.
15. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла.
16. Замена переменных при вычислении тройного интеграла.
17. Переход к цилиндрической и сферической системам координат при вычислении тройного интеграла.
18. Приближённое вычисление кратных интегралов. Аналог формул прямоугольников, трапеций, Симпсона, касательных.
19. Сравнительный анализ свойств криволинейных интегралов первого и второго рода.
20. Приложения криволинейных интегралов первого рода.
21. Приложения криволинейных интегралов второго рода.
22. Поверхностные интегралы второго рода

Тема 9. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Градиент скалярного поля.
2. Циркуляция векторного поля.
3. Формула Грина, её применение.
4. Формула Остроградского-Гаусса.
5. Формула Стокса.

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка "*отлично*" выставляется, если студент при ответе на вопросы как базового так и повышенного уровня показывает глубокое и всестороннее знание предмета, обязательной и дополнительной литературы, аргументировано и логически стройно излагает материал, пользуясь математической символикой, может применять знания для анализа конкретных ситуаций, свободно ориентируется в междисциплинарных связях.

Оценка «*хорошо*» ставится, если при ответе на вопросы базовой части студент показывает знание предмета, обязательной литературы, знакомстве с дополнительной литературой, аргументировано излагает материал, умеет применять знания для анализа конкретных ситуаций, однако незначительно нарушает последовательность изложения материала, дает недостаточно полное, хотя и верное определение понятий.

Оценка «*удовлетворительно*» ставится, если студент при ответе на вопросы базовой части показал, что он в основном знает предмет, обязательную литературу, может

практически применять свои знания, но программный материал излагает фрагментарно и непоследовательно, допускает отдельные ошибки и погрешности при применении математической символики и понятий, слабо ориентируется в межпредметных связях;.

Оценка **«неудовлетворительно»** ставится, если студент не отвечает на предлагаемые ему вопросы базовой или его ответ показывает, что не усвоено основное содержание предмета, обнаруживается незнание большей части учебного материала, допускаются грубые ошибки при формулировке теорем, определении основных понятий, неправильно используется математическая символика.

2. Описание шкалы оценивания

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя устный опрос студентов в форме индивидуального собеседования на вопросы коллоквиума. Каждому студенту предлагается по одному вопросу из каждой темы. Сначала студент отвечает на вопросы базового уровня. При успешном ответе ему предлагается один-два вопроса из вопросов повышенного уровня, что позволяет преподавателю определить уровень владения материалом.

Предлагаемые студенту задания позволяют проверить компетенцию ОПК-1. Для подготовки к данному оценочному мероприятию необходимо прочитать лекционный материал, найти ответы на поставленные вопросы, изучить дополнительную литературу, установить взаимосвязи между изучаемыми понятиями, запомнить основные определения, свойства, теоремы, продумать, где они могут применяться. Рекомендуется готовиться к данному контрольному мероприятию в течение семестра, разбирая теоретические задания для оценки сформированности компетенций к каждому практическому занятию. Эти задания предлагаются в УМК дисциплины «Математический анализ», представленном на кафедре Математического анализа, алгебры и геометрии.

При подготовке к ответу студенту не разрешается пользоваться никакими справочными материалами. Для подготовки к ответу даётся время на подготовку до 10-15 минут, в течение которого студент может записать план своего ответа, основные формулы, план доказательства теорем. Для подготовки к ответу на вопросы повышенного уровня предлагается дополнительное время.

Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты, прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

При оценке в первую очередь учитываются показанные студентами знания и умения (их полноту, глубину, прочность, использование). Оценка также зависит от наличия и

характера погрешностей. Среди погрешностей выделяют ошибки и недочеты. Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или о отсутствии знаний не считающихся основными в соответствии с программой. Недочетами также являются: погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного студентом задания или способа его выполнения, неаккуратная запись, небрежное выполнение чертежа, графика.

Вопросы для собеседования по дисциплине «Математический анализ»

Собеседование 1 Базовый уровень

Тема 6. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1. Дайте определения числового ряда, общего члена ряда. Как определяется сумма числового ряда?
2. Какой ряд называется сходящимся, а какой расходящимся? Приведите примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов.
3. Введите понятие остатка числового ряда.
4. Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости числового ряда.
5. Сформулируйте признаки сравнения знакоположительных рядов.
6. Когда для исследования числовых рядов может быть применен признак Даламбера? Сформулируйте этот признак.
7. Когда согласно с радикальным признаком Коши сходимости числовой ряд сходится, а когда расходится?
8. Сформулируйте интегральный признак Коши сходимости знакоположительных рядов.
9. Определите знакочередующийся ряд.
10. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.

Повышенный уровень Тема 6. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

14. Сформулируйте основные свойства рядов.
15. Приведите пример какого-нибудь числового ряда, для которого выполнено необходимое условие сходимости, но ряд расходится.
16. Какой из рассмотренных признаков сходимости знакоположительных рядов является самым мощным?
17. Дайте определение суммы числового ряда. Какой способ вычисления суммы числового ряда Вы можете предложить.
18. Дайте определение знакпеременного ряда.
19. Введите определения абсолютно сходящихся и условно сходящихся рядов. Приведите примеры.

Собеседование 2 Базовый уровень

Тема 7. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

11. Дайте определение степенного ряда. Запишите ряд по степеням x .
12. Введите понятия область сходимости (интервал сходимости), радиус сходимости степенного ряда.
13. Какие способы нахождения радиуса и интервала сходимости Вы знаете?
14. Запишите формулу Коши-Адамара для нахождения радиуса сходимости степенного ряда.

15. Дайте определение ряда Тейлора и ряда Маклорена.
16. Вспомните разложения в степенной ряд функций $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$,

$$y = (1+x)^n, y = \frac{1}{1+x}.$$
17. Расскажите о приближенном вычислении значений функций с помощью степенных рядов.

Повышенный уровень

Тема 7. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

20. Дайте определение функционального ряда и его области сходимости.
21. Сформулируйте теорему Абеля о сходимости степенных рядов.
22. Приведите примеры рядов, сходящихся
23. а) в одной точке; б) на всей числовой прямой;
24. в) на некотором конечном интервале.
25. Выведите разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена и укажите интервалы сходимости полученных рядов.
26. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании степенных рядов.
27. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании степенных рядов.
28. Выведите разложения в степенной ряд для функций $y = \sqrt{1+x}$, $y = \frac{1}{1+x^2}$,
 $y = \arcsin x$, $y = \arctg x$, $y = \ln(1+x)$.
29. Как определить погрешность приближения при вычислении приближенного значения функции? Какие теоремы по этому вопросу Вы знаете?
30. Приведите примеры вычисления «неберущихся» интегралов с помощью рядов.
31. Расскажите о приближенном вычислении определенных интегралов и определении погрешности приближения.
32. Как можно воспользоваться разложением функций в степенной ряд для раскрытия неопределенности при вычислении пределов функции?

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка "**отлично**" выставляется, если студент при ответе на вопросы как базового так и повышенного уровня показывает глубокое и всестороннее знание предмета, обязательной и дополнительной литературы, аргументировано и логически стройно излагает материал, пользуясь математической символикой, может применять знания для анализа конкретных ситуаций, свободно ориентируется в межпредметных связях.

Оценка «**хорошо**» ставится, если при ответе на вопросы базовой части студент показывает знание предмета, обязательной литературы, знакомстве с дополнительной литературой, аргументировано излагает материал, умеет применять знания для анализа конкретных ситуаций, однако незначительно нарушает последовательность изложения материала, дает недостаточно полное, хотя и верное определение понятий.

Оценка «**удовлетворительно**» ставится, если студент при ответе на вопросы базовой части показал, что он в основном знает предмет, обязательную литературу, может практически применять свои знания, но программный материал излагает фрагментарно и непоследовательно, допускает отдельные ошибки и погрешности при применении математической символики и понятий, слабо ориентируется в межпредметных связях;.

Оценка «**неудовлетворительно**» ставится, если студент не отвечает на предлагаемые ему вопросы базовой или его ответ показывает, что не усвоено основное содержание предмета, обнаруживается незнание большей части учебного материала, допускаются грубые ошибки при формулировке теорем, определении основных понятий, неправильно используется математическая символика.

2. Описание шкалы оценивания

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя собеседование по представленным вопросам. Допуском к собеседованию является правильное выполнение не менее 60% заданий ИДЗ, по темам представленным к каждому собеседованию. Каждому студенту предлагается по одному вопросу из каждой темы. Сначала студент отвечает на вопросы базового уровня. При успешном ответе ему предлагается один-два вопроса из вопросов повышенного уровня, что позволяет преподавателю определить уровень владения материалом.

Предлагаемые студенту задания позволяют проверить компетенцию ОПК-1. Для подготовки к данному оценочному мероприятию необходимо прочитать лекционный материал, выполнить ИДЗ и сдать их на проверку не позднее чем за неделю до контрольного мероприятия, найти ответы на поставленные вопросы, изучить дополнительную литературу, установить взаимосвязи между изучаемыми понятиями, запомнить основные определения, свойства, теоремы, продумать, где они могут применяться. Рекомендуется готовиться к данному контрольному мероприятию в течение семестра, разбирая теоретические задания для оценки сформированности компетенций к каждому практическому занятию, вовремя выполняя индивидуальные домашние задания (ИДЗ). Эти задания предлагаются в УМК дисциплины «Математический анализ», представленном на кафедре Математического анализа, алгебры и геометрии.

При подготовке к ответу студенту разрешается пользоваться своими тетрадями с ИДЗ, никакими другими справочными материалами пользоваться не разрешается. Для подготовки к ответу на каждый вопрос отводится время до 3-5 минут, в течение которого студент может записать план своего ответа. Для подготовки к ответу на вопросы повышенного уровня предлагается дополнительное время.

Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты, прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

При оценке в первую очередь учитываются показанные студентами знания и умения

(их полноту, глубину, прочность, использование). Оценка также зависит от наличия и характера погрешностей. Среди погрешностей выделяют ошибки и недочеты. Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или о отсутствии знаний не считающихся основными в соответствии с программой. Недочетами также являются: погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного студентом задания или способа его выполнения, неаккуратная запись, небрежное выполнение чертежа, графика.

Комплект разноуровневых задач (заданий)
по дисциплине Математический анализ

Комплект 1 - ИДЗ №1
Тема «Пределы функций»

Вычислить пределы функций:

а) путем алгебраических образований и применения замечательных пределов;

б) с помощью правила Лопиталя.

;

1 Задачи репродуктивного уровня

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + px + q}{bx^2 - a}$; 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + px + q}{bx^3 - ax^2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - b}{ax^2 + px + q}$;

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + px + q}{x^2 - a}$; 5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + px + q}{x^3 + b}$;

2 Задачи реконструктивного уровня

6. $\lim_{x \rightarrow k} \frac{ax^2 + px + q}{x^2 - a}$;

7. $\lim_{x \rightarrow m} \frac{x^3 + b}{x^2 + px + q}$; 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx}$; 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} px}{\operatorname{ctg} qx}$;

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} px \cdot \sin 2ax$;

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{bx}\right)^{mx}$;

3 Задачи творческого уровня

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{p + ax}{q + ax}\right)^{bx+k}$.

Для выполнения заданий коэффициенты a, b, k, m, p, q выбрать из таблицы в соответствии с номером варианта.

ВАРИАНТ	a	b	k	m	p	q
1	4	-1	2	1	-3	2
2	9	-1	3	1	-4	3

3	16	-1	4	1	-5	4
4	25	-1	5	1	-6	5
5	4	1	2	-1	-1	-2
6	9	1	3	-1	-2	-3
7	16	1	4	-1	-3	-4
8	25	1	5	-1	-4	-5
9	4	-27	2	3	-5	6
10	64	-8	8	2	-10	16
11	16	-8	4	2	-6	8
12	25	-8	5	2	-7	10
13	9	8	3	-2	-1	-6
14	16	8	4	-2	-2	-8
15	25	8	5	-2	-3	-10
16	4	27	2	-3	1	-6
17	16	-27	4	3	-7	12
18	16	27	4	-3	-1	-12
19	25	-27	5	3	-8	15
20	25	27	5	-3	-2	-15
21	25	-64	5	4	-9	20
22	25	64	5	-4	-1	-20
23	4	1	-2	-1	3	2
24	9	8	-3	-2	5	6
25	16	27	-4	-3	7	12
26	25	64	-5	-4	9	20
27	9	64	-3	-4	7	12
28	9	125	-3	-5	8	15
29	4	64	-2	-4	6	8
30	4	125	-2	-5	7	10

Комплект 2 - ИДЗ №2

ИДЗ по теме «Производная функции. Применение производных к исследованию функций»

1 Задачи репродуктивного уровня

В заданиях 1-2 вычислить производные функций с помощью правил дифференцирования.

2 Задачи реконструктивного уровня

В задании 3 вычислить производные функций с помощью правил дифференцирования

3 Задачи творческого уровня

В задании 4 исследовать функцию и построить ее график.

Вариант 1 1. $y = \frac{5}{\cos^2 2x} - e^{3x} + 3\sqrt{x}$; 2. $y = \frac{(2 + \sqrt{x})^2}{x^3}$; 3. $y = \arcsin \frac{(2 + \sqrt{x})^2}{x^3}$; 4. $y = 2 + \frac{12}{x^2 - 4}$.	Вариант 2 1. $y = \frac{4}{\sqrt{9 - x^2}} - e^{\frac{x}{3}} + \frac{12}{16 + x^2}$; 2. $y = \frac{(1 - \sqrt{x})^2}{x^3}$; 3. $y = \arccos \frac{(1 - \sqrt{x})^2}{x^3}$; 4. $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$.
Вариант 3 1. $y = 3\cos 6x + 5^{-x} - \frac{2}{x^2 - 4}$; 2. $y = \frac{(1 - x)^3}{x}$; 3. $y = \operatorname{arctg} \frac{(1 - x)^3}{x}$; 4. $y = x + \frac{4}{x + 2}$.	Вариант 4 1. $y = \frac{4}{9 - x^2} - \sin 2x + 3\sqrt{x}$; 2. $y = \frac{(2 + 3x)^2}{\sqrt[3]{x}}$; 3. $y = \operatorname{arcctg} \frac{(2 + 3x)^2}{\sqrt[3]{x}}$; 4. $y = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}$.
Вариант 5 1. $y = e^{4x} - 3\cos \frac{x}{2} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 5}}$; 	Вариант 6 1. $y = \operatorname{tg} 2x - 2^{-3x} + 6\sqrt[3]{x} - 10^{2x}$; 2. $y = \frac{(2 - x)^2}{\sqrt{x}}$;

$2. y = \frac{(2+x)^3}{x};$ $3. y = \log_2 \frac{(2+x)^3}{x};$ $4. y = \frac{x^4}{x^3-1}.$	$3. y = \cos \frac{(2-x)^2}{\sqrt{x}};$ $4. y = \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}.$
Вариант 7 $1. y = 4ctg 2x + \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} - 6^{-3x};$ $2. y = \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x};$ $3. y = \ln \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x};$ $4. y = \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{x^3}.$	Вариант 8 $1. y = 8 \cos 4x - \frac{6}{\sqrt{5+x^2}} - 3^{-2x};$ $2. y = \frac{\sqrt[3]{x}}{1+2\sqrt{x}};$ $3. y = \sin \frac{\sqrt[3]{x}}{1+2\sqrt{x}};$ $4. y = \frac{1}{x(2x-1)}.$
Вариант 9 $1. y = 4tg 2x + \frac{5}{x^2-25} - 2\sqrt{x};$ $2. y = \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}};$ $3. y = \arcsin \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}};$ $4. y = \frac{1}{x(x-1)}.$	Вариант 10 $1. y = 3 \cos 9x - \frac{6}{9+x^2} - tg x;$ $2. y = \frac{\sqrt[5]{x}}{(1-2x)^2};$ $3. y = \arccos \frac{\sqrt[5]{x}}{(1-2x)^2};$ $4. y = x + \frac{x}{3x-1}.$
Вариант 11 $1. y = 3ctg 2x - 7 \sin 6x - \sqrt[3]{x};$ $2. y = \frac{(3-2x)^2}{\sqrt[4]{x}};$	Вариант 12 $1. y = 2^{3x} - \frac{7}{4+x^2} - 4tg 2x;$ $2. y = \frac{\sqrt[5]{x}}{3+2x};$

3. $y = \log_4 \frac{(3-2x)^2}{\sqrt[4]{x}} ;$ 4. $y = \frac{x^3}{x^2-1} .$	3. $y = \arcsin \frac{\sqrt[5]{x}}{3+2x} ;$ 4. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2} .$
Вариант 13 1. $y = 4 \sin 8x - \frac{3}{\cos^3 6x} + 2\sqrt[4]{x} ;$ 2. $y = \frac{(1-6x)^2}{\sqrt[3]{x}} ;$ 3. $y = \operatorname{arctg} \frac{(1-6x)^2}{\sqrt[3]{x}} ;$ 4. $y = \frac{4}{2-x} - x .$	Вариант 14 1. $y = \frac{5}{x^2} - \frac{3}{\sqrt{x^2-1}} + 4 \sin 2x ;$ 2. $y = \frac{(1+x)^3}{\sqrt{1-x}} ;$ 3. $y = \operatorname{arctg} \frac{(1+x)^3}{\sqrt{1-x}} ;$ 4. $y = 1 + \frac{3}{x^2-1} .$
Вариант 15 1. $y = \frac{6}{\cos^2 2x} - \frac{4}{x^2+9} - 5x^2 ;$ 2. $y = \frac{(3-2x)^2}{\sqrt{x}} ;$ 3. $y = \sin \frac{(3-2x)^2}{\sqrt{x}} ;$ 4. $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2} .$	Вариант 16 1. $y = 3 \cos 8x - 9 - 4 \operatorname{ctg} 3x ;$ 2. $y = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^2} ;$ 3. $y = \log_5 \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^2} ;$ 4. $y = \frac{3}{4x^2-1} - 1 .$
Вариант 17 1. $y = 8 \operatorname{ctg} 2x + \sqrt{x} - \frac{7}{x^2-9} ;$ 2. $y = \frac{(1+3x)^2}{x^2} ;$ 3. $y = \cos \frac{(1+3x)^2}{x^2} ;$	Вариант 18 1. $y = 3 \operatorname{tg} 10x + 7^{2x} - \frac{5}{\sqrt{81-x^2}} ;$ 2. $y = \frac{(1-4x)^2}{x} ;$ 3. $y = \operatorname{ctg} \frac{(1-4x)^2}{x} ;$

4. $y = \frac{-6x^2}{3x-1}.$	4. $y = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}.$
Вариант 19 1. $y = 4^{-3x} - 3\cos \frac{x}{2} + \frac{2}{4+x^2};$ 2. $y = \frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x}};$ 3. $y = \operatorname{tg} \frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x}};$ 4. $y = -x + \frac{x}{3x+1}.$	Вариант 20 1. $y = 4x^7 - 5\cos 3x + 2^{-x} - \ln 2x;$ 2. $y = \frac{2x+5}{\sqrt{x-1}};$ 3. $y = \arcsin \frac{2x+5}{\sqrt{x-1}};$ 4. $y = \frac{x^4 + x^3 - 1}{x^3 - 1}.$
Вариант 21 1. $y = 9^{4x} - 3\cos \frac{x}{5} + 13\sqrt[5]{x} - 2\ln 5x;$ 2. $y = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x-3}};$ 3. $y = \ln \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x-3}};$ 4. $y = \frac{1}{x(x+1)}.$	Вариант 22 1. $y = \frac{7}{x} + 4\operatorname{tg} 2x - \sqrt[4]{x} + 6^{3x};$ 2. $y = \frac{(x+8)^2}{\sqrt[3]{x}};$ 3. $y = \arccos \frac{(x+8)^2}{\sqrt[3]{x}};$ 4. $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{4x^3}.$
Вариант 23 1. $y = 9^{4x} - 3\cos \frac{x}{5} + 13\sqrt[5]{x};$ 2. $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x+4}};$ 3. $y = \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{x+4}};$	Вариант 24 1. $y = 2x^3 - \frac{4}{x^2+1} - 2\operatorname{tg} \frac{x}{3};$ 2. $y = \frac{(2x-1)^2}{x^3};$ 3. $y = \operatorname{arcctg} \frac{(2x-1)^2}{x^3};$

4. $y = \frac{x^3}{4x^2 - 1}.$	4. $y = x + \frac{x}{6x - 1}.$
Вариант 25 1. $y = \frac{4}{x^2 + 16} - \cos \frac{x}{2} + 5^{3x};$ 2. $y = \frac{(3 - 4x)^2}{x};$ 3. $y = \log_7 \frac{(3 - 4x)^2}{x};$ 4. $y = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}.$	Вариант 26 1. $y = 5\sqrt{x} - 3\operatorname{ctg} 6x + 4^{2x};$ 2. $y = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt[3]{x}};$ 3. $y = \ln \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt[3]{x}};$ 4. $y = \frac{x^4}{1 - x^3}.$
Вариант 27 1. $y = \frac{5}{\cos^2 x} - 2^x + 16 \cos 4x;$ 2. $y = \frac{(1 - 3x)^2}{\sqrt{x}};$ 3. $y = \arccos \frac{(1 - 3x)^2}{\sqrt{x}};$ 4. $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$	Вариант 28 1. $y = 5x^4 - \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}} + 6^{4x};$ 2. $y = \frac{(1 - 7x)^2}{\sqrt{x}};$ 3. $y = \arcsin \frac{(1 - 7x)^2}{\sqrt{x}};$ 4. $y = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^2}.$
Вариант 29 1. $y = 4 \cos 2x - \sqrt[4]{x} + 6^{-3x};$ 2. $y = \frac{(1 + 3x)^2}{x^4};$ 3. $y = \operatorname{arccctg} \frac{(1 + 3x)^2}{x^4};$ 4. $y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}.$	Вариант 30 1. $y = 7x^6 - 3\operatorname{ctg} \frac{x}{7} + 4^{5x};$ 2. $y = \frac{1 - 3x}{\sqrt{x + 1}};$ 3. $y = \operatorname{arctg} \frac{1 - 3x}{\sqrt{x + 1}};$

$$4. y = \frac{x^3}{1-4x^2} + 1.$$

Вычислить производные функций

1 Задачи репродуктивного уровня

- в заданиях 1-3 с помощью правил дифференцирования;

2 Задачи реконструктивного уровня

- в задании 4 с помощью логарифмического дифференцирования;

3 Задачи творческого уровня

- в задании 5 найти производную y'_x для функции заданной неявно.

Вариант 1 1. $y = \frac{5}{\cos^2 2x} - e^{3x} + 3\sqrt{x}$; 2. $y = \frac{(2 + \sqrt{x})^2}{x^3}$; 3. $y = \arcsin \frac{(2 + \sqrt{x})^2}{x^3}$; 4. $y = \frac{(1-2x)^3 \cdot (3+5x)^2}{\sqrt[4]{(2-x)^5} \cdot (7+x)^4}$; 5. $5x - 2y + 3x^2y - x^2y^2 + 7y^2 = 0$.	Вариант 2 1. $y = \frac{4}{\sqrt{9-x^2}} - e^{\frac{x}{3}} + \frac{12}{16+x^2}$; 2. $y = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^3}$; 3. $y = \arccos \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^3}$; 4. $y = \frac{(4-6x)^3 \cdot (1-x)^4}{\sqrt[3]{(x+2)^4} \cdot (5x-2)^2}$; 5. $x + 6y - 3x^2y + x^3y^2 - 5y^2 = 0$.
Вариант 3 1. $y = 3\cos 6x + 5^{-x} - \frac{2}{x^2-4}$; 2. $y = \frac{(1-x)^3}{x}$; 3. $y = \operatorname{arctg} \frac{(1-x)^3}{x}$; 4. $y = \frac{(x-2)^2 \cdot (3x+2)^4}{\sqrt{(4x-6)^3} \cdot (1-x)^3}$; 5. $2x - 3y + x^3y - x^2y^2 + 4y^2 = 0$.	Вариант 4 1. $y = \frac{4}{9-x^2} - \sin 2x + 3\sqrt{x}$; 2. $y = \frac{(2+3x)^2}{\sqrt[3]{x}}$; 3. $y = \operatorname{arcctg} \frac{(2+3x)^2}{\sqrt[3]{x}}$; 4. $y = \frac{(x+5x)^2 \cdot (6x-7)^4}{\sqrt[4]{(1-x)^3} \cdot (2x+3)^5}$; 5. $2x + 4y - x^2y + x^2y^2 - 8y^3 = 0$.
Вариант 5 1. $y = e^{4x} - 3\cos \frac{x}{2} + \frac{2}{\sqrt{x^2+5}}$; 2. $y = \frac{(2+x)^3}{x}$;	Вариант 6 1. $y = \operatorname{tg} 2x - 2^{-3x} + 6\sqrt[3]{x} - 10^{2x}$; 2. $y = \frac{(2-x)^2}{\sqrt{x}}$;

3. $y = \log_2 \frac{(2+x)^3}{x}$; 4. $y = \frac{(7x-2)^3 \cdot (x+3)^2}{\sqrt{(1-5x)^5} \cdot (3x-2)^4}$; 5. $4x - 2y + x^2y - 3x^2y^2 + 4y^2 = 0$.	3. $y = \cos \frac{(2-x)^2}{\sqrt{x}}$; 4. $y = \frac{(x-4)^2 \cdot (3x+5)^5}{\sqrt[5]{(1-2x)^2} \cdot (3-4x)^3}$; 5. $6x + y - 5x^2y + 3x^3y^4 - y^2 = 0$.
Вариант 7 1. $y = 4\operatorname{ctg} 2x + \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} - 6^{-3x}$; 2. $y = \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x}$; 3. $y = \ln \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x}$; 4. $y = \frac{(7x-2)^3 \cdot (1-x)^7}{\sqrt[5]{(3x+2)^4} \cdot (8x+2)^3}$; 5. $7x - 4y + x^2y - 4x^2y^3 + 7y^4 = 0$.	Вариант 8 1. $y = 8\cos 4x - \frac{6}{\sqrt{5+x^2}} - 3^{-2x}$; 2. $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{1+2\sqrt{x}}$; 3. $y = \sin \frac{\sqrt[3]{x}}{1+2\sqrt{x}}$; 4. $y = \frac{(8x-7)^4 \cdot (1-3x)^2}{\sqrt[3]{(2x+3)^5} \cdot (4x+3)^3}$; 5. $x + 6y - x^5y + x^3y^4 - 8y^2 = 0$.
Вариант 9 1. $y = 4\operatorname{tg} 2x + \frac{5}{x^2 - 25} - 2\sqrt{x}$; 2. $y = \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}$; 3. $y = \arcsin \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}$; 4. $y = \frac{(5x-2)^2 \cdot (2x+3)^4}{\sqrt{(1-5x)^3} \cdot (2x-6)^3}$; 5. $3x - 5y + 4x^5y - x^3y^3 + 5y^6 = 0$.	Вариант 10 1. $y = 3\cos 9x - \frac{6}{9+x^2} - \operatorname{tg} x$; 2. $y = \frac{\sqrt[5]{x}}{(1-2x)^2}$; 3. $y = \arccos \frac{\sqrt[5]{x}}{(1-2x)^2}$; 4. $y = \frac{(5x-3)^2 \cdot (1-3x)^3}{\sqrt[3]{(4x-5)^2} \cdot (2-3x)^4}$; 5. $x + 4y - 4x^2y + x^2y^2 - 6y^3 = 0$.
Вариант 11 1. $y = 3\operatorname{ctg} 2x - 7\sin 6x - \sqrt[3]{x}$; 2. $y = \frac{(3-2x)^2}{\sqrt[4]{x}}$; 3. $y = \log_4 \frac{(3-2x)^2}{\sqrt[4]{x}}$; 4. $y = \frac{(5x+7)^3 \cdot (3-x)^2}{\sqrt[3]{(1-3x)^2} \cdot (4x+1)^5}$; 5. $5x - 6y + 4x^3y - 3x^3y^3 + 4y^6 = 0$.	Вариант 12 1. $y = 2^{3x} - \frac{7}{4+x^2} - 4\operatorname{tg} 2x$; 2. $y = \frac{\sqrt[5]{x}}{3+2x}$; 3. $y = \arcsin \frac{\sqrt[5]{x}}{3+2x}$; 4. $y = \frac{(3x+2)^2 \cdot (2x-5)^4}{\sqrt[3]{(4-3x)^2} \cdot (2x+4)^4}$; 5. $x + 5y - 5x^3y + 2x^3y^2 - y^2 = 0$.
Вариант 13 1. $y = 4\sin 8x - \frac{3}{\cos^3 6x} + 2\sqrt[4]{x}$;	Вариант 14 1. $y = \frac{5}{x^2} - \frac{3}{\sqrt{x^2-1}} + 4\sin 2x$;

$2. y = \frac{(1-6x)^2}{\sqrt[3]{x}};$ $3. y = \arctg \frac{(1-6x)^2}{\sqrt[3]{x}};$ $4. y = \frac{(8x+1)^2 \cdot (4x-3)^5}{\sqrt[6]{(2x-7)^5} \cdot (5x+3)^4};$ $5. 10x - 6y + x^3y - x^4y^2 + y^2 = 0.$	$2. y = \frac{(1+x)^3}{\sqrt{1-x}};$ $3. y = \operatorname{arcctg} \frac{(1+x)^3}{\sqrt{1-x}};$ $4. y = \frac{(3x-4)^3 \cdot (5-x)^2}{\sqrt{(3x+4)^5} \cdot (2x+3)^4};$ $5. x + 5y - x^2y + 3x^2y^3 - 5y^2 = 0.$
Вариант 15 $1. y = \frac{6}{\cos^2 2x} - \frac{4}{x^2 + 9} - 5x^2;$ $2. y = \frac{(3-2x)^2}{\sqrt{x}};$ $3. y = \sin \frac{(3-2x)^2}{\sqrt{x}};$ $4. y = \frac{(9-5x)^3 \cdot (4-6x)^2}{\sqrt[5]{(1+3x)^4} \cdot (5x+3)^4};$ $5. 8x - y + 6x^2y - x^2y^3 + 4y^7 = 0.$	Вариант 16 $1. y = 3\cos 8x - 9 - 4\operatorname{ctg} 3x;$ $2. y = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^2};$ $3. y = \log_5 \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^2};$ $4. y = \frac{(8x+5)^3 \cdot (x-5)^6}{\sqrt{(3x+7)^6} \cdot (6x+3)^2};$ $5. 8x + 9y - x^3y + x^2y^3 - 7y^2 = 0.$
Вариант 17 $1. y = 8\operatorname{ctg} 2x + \sqrt{x} - \frac{7}{x^2 - 9};$ $2. y = \frac{(1+3x)^2}{x^2};$ $3. y = \cos \frac{(1+3x)^2}{x^2};$ $4. y = \frac{(8x+4)^3 \cdot (x-4)^5}{\sqrt{(1-2x)^3} \cdot (3x+6)^2};$ $5. x - 7y + x^4y - 2x^2y^2 + 7y^3 = 0.$	Вариант 18 $1. y = 3\operatorname{tg} 10x + 7^{2x} - \frac{5}{\sqrt{81-x^2}};$ $2. y = \frac{(1-4x)^2}{x};$ $3. y = \operatorname{ctg} \frac{(1-4x)^2}{x};$ $4. y = \frac{(7-4x)^2 \cdot (3x+4)^4}{\sqrt[3]{(3x+5)^7} \cdot (6x-2)^5};$ $5. 5x + 6y - x^3y + 2x^3y^2 - 7y^3 = 0.$
Вариант 19 $1. y = 4^{-3x} - 3\cos \frac{x}{2} + \frac{2}{4+x^2};$ $2. y = \frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x}};$ $3. y = \operatorname{tg} \frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x}};$ $4. y = \frac{(2x+9)^5 \cdot (6-3x)^2}{\sqrt[3]{(3x+5)^4} \cdot (3-7x)^3};$ $5. 8x - 7y + 12x^2y - 8x^4y^3 + 5y^2 = 0.$	Вариант 20 $1. y = 4x^7 - 5\cos 3x + 2^{-x} - \ln 2x;$ $2. y = \frac{2x+5}{\sqrt{x-1}};$ $3. y = \arcsin \frac{2x+5}{\sqrt{x-1}};$ $4. y = \frac{(3x+4)^6 \cdot (4x-7)^2}{\sqrt[4]{(2x+5)^7} \cdot (1-3x)^3};$ $5. 9x + 4y - x^3y + 3x^2y^6 - 7y^2 = 0.$
Вариант 21 $1. y = 9^{4x} - 3\cos \frac{x}{5} + 13\sqrt[5]{x} - 2\ln 5x;$	Вариант 22 $1. y = \frac{7}{x} + 4\operatorname{tg} 2x - \sqrt[4]{x} + 6^{3x};$

$2. y = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x-3}};$ $3. y = \ln \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x-3}};$ $4. y = \frac{(2x+3)^4 \cdot (x-4)^3}{\sqrt{(6x-5)^3} \cdot (2x-3)^2};$ $5. 6x - 3y + 3x^3y - 4x^2y^2 + 9y^3 = 0.$	$2. y = \frac{(x+8)^2}{\sqrt[3]{x}};$ $3. y = \arccos \frac{(x+8)^2}{\sqrt[3]{x}};$ $4. y = \frac{(4x-2)^5 \cdot (4+3x)^4}{\sqrt[5]{(1-12x)^2} \cdot (3x-4)^2};$ $5. 7x + 8y - 9x^2y + x^2y^4 - 3y^5 = 0.$
Вариант 23 $1. y = 9^{4x} - 3\cos \frac{x}{5} + 13\sqrt[5]{x};$ $2. y = \frac{2x-1}{\sqrt{x+4}};$ $3. y = \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{x+4}};$ $4. y = \frac{(7x+3)^2 \cdot (x+2)^5}{\sqrt[4]{(1-3x)} \cdot (2+3x)^4};$ $5. 7x - 4y + x^5y - 12x^3y^2 + 3y^2 = 0.$	Вариант 24 $1. y = 2x^3 - \frac{4}{x^2+1} - 2\operatorname{tg} \frac{x}{3};$ $2. y = \frac{(2x-1)^2}{x^3};$ $3. y = \operatorname{arccotg} \frac{(2x-1)^2}{x^3};$ $4. y = \frac{(x+3)^2 \cdot (4x-5)^3}{\sqrt[3]{(7-2x)^4} \cdot (8x+3)^5};$ $5. 5x + 6y - 3x^3y + 4x^3y^6 - 2y^2 = 0.$
Вариант 25 $1. y = \frac{4}{x^2+16} - \cos \frac{x}{2} + 5^{3x};$ $2. y = \frac{(3-4x)^2}{x};$ $3. y = \log_7 \frac{(3-4x)^2}{x};$ $4. y = \frac{(x-7)^4 \cdot (2x+5)^3}{\sqrt[4]{(1-7x)^5} \cdot (4x-3)^2};$ $5. x - 6y + 5x^3y - x^3y^3 + 6y^2 = 0.$	Вариант 26 $1. y = 5\sqrt{x} - 3\operatorname{ctg} 6x + 4^{2x};$ $2. y = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x}};$ $3. y = \ln \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x}};$ $4. y = \frac{(x-4)^5 \cdot (2x-6)^3}{\sqrt{(4x+6)^3} \cdot (3x-5)^2};$ $5. 6x + y - 8x^2y + 3x^3y^2 - y^2 = 0.$
Вариант 27 $1. y = \frac{5}{\cos^2 x} - 2^x + 16 \cos 4x;$ $2. y = \frac{(1-3x)^2}{\sqrt{x}};$ $3. y = \arccos \frac{(1-3x)^2}{\sqrt{x}};$ $4. y = \frac{(6x-5)^4 \cdot (2-x)^3}{\sqrt[3]{(1-3x)^5} \cdot (4-2x)^4};$ $5. x - 2y + x^4y - 2x^2y^2 + 8y^5 = 0.$	Вариант 28 $1. y = 5x^4 - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + 6^{4x};$ $2. y = \frac{(1-7x)^2}{\sqrt{x}};$ $3. y = \arcsin \frac{(1-7x)^2}{\sqrt{x}};$ $4. y = \frac{(1+3x)^2 \cdot (2x-5)^5}{\sqrt[5]{(2x+4)^6} \cdot (3x-4)^3};$ $5. 5x + 6y - 7x^2y + 3x^2y^3 - 6y^3 = 0.$
Вариант 29 $1. y = 4\cos 2x - \sqrt[4]{x} + 6^{-3x};$	Вариант 30 $1. y = 7x^6 - 3\operatorname{ctg} \frac{x}{7} + 4^{5x};$

2. $y = \frac{(1+3x)^2}{x^4};$ 3. $y = \operatorname{arcctg} \frac{(1+3x)^2}{x^4};$ 4. $y = \frac{(6x+4)^3 \cdot (4x-5)^2}{\sqrt[5]{(3x-4)^2 \cdot (8x+5)^4}};$ 5. $9x - 6y + 4x^2y - 2x^3y^4 + 2y^5 = 0.$	2. $y = \frac{1-3x}{\sqrt{x+1}};$ 3. $y = \operatorname{arctg} \frac{1-3x}{\sqrt{x+1}};$ 4. $y = \frac{(6x-4)^3 \cdot (3-2x)^6}{\sqrt[5]{(3x+6)^4 \cdot (x-6)^2}};$ 5. $6x + 8y - 4x^5y + 2x^5y^2 - 5y^3 = 0.$
---	---

Комплект 3 - ИДЗ №3

Тема «Основные методы интегрирования. Приложения определенного интеграла»

1 Задачи репродуктивного уровня

Задачи 1 1), 2)

2 Задачи реконструктивного уровня

Задачи 1 3)-6)

3 Задачи творческого уровня

Задачи 1 7), 2

Вариант 1	Вариант 2
1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(\frac{5}{\cos^2 2x} - e^{3x} + 3\sqrt{x} \right) dx,$ 2) $\int (2 + \sqrt{x})^2 x^3 dx,$ 3) $\int x e^{\frac{x}{7}} dx,$ 4) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x-+3}} dx,$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} x \cos 4x dx,$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 6x - x^2$ и осью OX.	1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{9-x^2}} - e^{\frac{x}{3}} + \frac{12}{16+x^2} \right) dx,$ 2) $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^3} dx,$ 3) $\int \frac{\ln x + 4}{x} dx,$ 4) $\int \sqrt{x} \ln x dx,$ 5) $\int_0^1 x 4^x dx,$ 6) $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx,$ 7) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+x^2}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 3$.

Вариант 3 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(3 \cos 6x + 5^{-x} - \frac{2}{x^2 - 4} \right) dx,$ 2) $\int \frac{(1-x)^3}{x} dx,$ 3) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+5}} dx,$ 4) $\int x \sin \frac{x}{10} dx,$ 5) $\int_1^e x^2 \ln x dx,$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x + 2}{\cos^2 x} dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{4+x}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -x^2 + 7x - 10$ и $y = 0$.	Вариант 4 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(\frac{4}{9-x^2} - \sin 2x + 3\sqrt{x} \right) dx,$ 2) $\int \frac{(2+3x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx,$ 3) $\int x 7^x dx,$ 4) $\int \sqrt{x+1} dx,$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos 2x dx,$ 6) $\int_{-4}^4 \frac{x-5}{\sqrt{x+5}} dx,$ 7) $\int_{-\infty}^1 e^x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -x^2 + 4$ и $y = 0$.
Вариант 5 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(e^{4x} - 3 \cos \frac{x}{2} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 5}} \right) dx,$ 2) $\int \frac{(2+x)^3}{x} dx,$ 3) $\int x e^{10x} dx,$ 4) $\int \sqrt{1-2x} x dx,$ 5) $\int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} dx,$ 6) $\int_0^e \frac{\ln^2 x + 1}{x} dx,$ 7) $\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 2x$.	Вариант 6 1. Вычислить интегралы. 1) $\int (\operatorname{tg} 2x - 2^{-3x} + 6\sqrt[3]{x} - 1) dx,$ 2) $\int (2-x)^2 \sqrt{x} dx,$ 3) $\int \operatorname{tg} x dx,$ 4) $\int \frac{x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx,$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx,$ 6) $\int_0^3 \sqrt{x+1} x dx,$ 7) $\int_{-\infty}^0 e^x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $2y + x - 4 = 0$ и $y = 0$, $x = -3$, $x = 2$.
Вариант 7	Вариант 8

1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(4ctg 2x + \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} - 6 \right) dx,$ 2) $\int \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x} dx,$ 3) $\int \frac{tg^2 x + 5}{\cos^2 x} dx,$ 4) $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx,$ 5) $\int_0^7 \sqrt[3]{x+1} x dx,$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 4x dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -x$ и $y = 2x - x^2$.	1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(8 \cos 4x - \frac{6}{\sqrt{5+x^2}} - 3 \right) dx,$ 2) $\int (1 + 2\sqrt{x})^3 \sqrt{x} dx,$ 3) $\int x^{11} \ln x dx,$ 4) $\int \sqrt{2 + \sin x} dx,$ 5) $\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx,$ 6) $\int_0^3 x e^{-\frac{x}{3}} dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \cos x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x + 1$ и $y = 4 + 3x - x^2$.
Вариант 9 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(4tg 2x + \frac{5}{x^2 - 25} - 2\sqrt{x} \right) dx,$ 2) $\int (1+x)^2 \sqrt{x} dx,$ 3) $\int x \cos \frac{x}{10} dx,$ 4) $\int \sqrt{2x+1} x dx,$ 5) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx,$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin \frac{x}{3} dx,$ 7) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 - 6x + 5$ и $y = 2x - 7$.	Вариант 10 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(3 \cos 9x - \frac{6}{9+x^2} - tg x \right) dx,$ 2) $\int \sqrt[5]{x} (1-2x)^2 dx,$ 3) $\int x^2 \log_9 x dx,$ 4) $\int \sqrt{3-2x} x dx,$ 5) $\int_1^e \ln x dx,$ 6) $\int_3^{10} \frac{x}{\sqrt[3]{x-2}} dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x - 7$ и $y = 3 - x$.
Вариант 11	Вариант 12

1. Вычислить интегралы. $\int (3\operatorname{ctg} 2x - 7 \sin 6x - \sqrt[3]{x}) dx,$ $\int (3 - 2x) \sqrt[4]{x} dx,$ $\int x 10^x dx,$ $\int \sqrt[3]{2-x} x dx,$ $\int_1^6 \log_6 x dx,$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx,$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 5x - 6$.	1. Вычислить интегралы. $\int \left(2^{3x} - \frac{7}{4+x^2} - 4\operatorname{tg} 2x \right) dx,$ $\int \sqrt[5]{x} (3 + 2x) dx,$ $\int x \cos \frac{x}{12} dx,$ $\int \frac{1-x}{\sqrt{x+1}} dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx,$ $\int_{-3}^0 \sqrt{1-x} x dx,$ $\int_0^{\infty} e^{-x} dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -x^2$, $y = 0$, $x = 2$.
Вариант 13 1. Вычислить интегралы. $\int \left(4 \sin 8x - \frac{3}{\cos^3 6x} + 2\sqrt[4]{x} \right) dx,$ $\int \frac{(1-6x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx,$ $\int \frac{x}{\sqrt{3+x}} dx,$ $\int x^2 \log_{11} x dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx,$ $\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} x e^{4x} dx,$ $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями	Вариант 14 1. Вычислить интегралы. $\int \left(\frac{5}{x^2 - 1} - \frac{3}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx,$ $\int x(1+x)^3 dx,$ $\int e^{\frac{x}{6}} x dx,$ $\int \sqrt{4+x} x dx,$ $\int_1^{12} \log_{12} x dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx,$ $\int_0^{\infty} \sin x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -x^2 + 2x$ и осью OX.

$y = x^2 + 1 \quad \text{и} \quad x + y = 3.$	
Вариант 15 1. Вычислить интегралы. 1. $\int \left(\frac{6}{\cos^2 2x} - \frac{4}{x^2 + 9} - \frac{5}{x} \right) dx$ 2. $\int \frac{(3-2x)^2}{\sqrt{x}} dx$ 3. $\int x e^{\frac{x}{9}} dx$ 4. $\int \sqrt{\sin x - 3} \cos x dx$ 5. $\int_4^7 \frac{x+3}{\sqrt{x-3}} dx$ 6. $\int_1^e x^6 \ln x dx$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{1}{3}x^2 + 3 \quad \text{и} \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 4.$	Вариант 16 1. Вычислить интегралы. 1) $\int (3 \cos 8x - 9 - 4 \operatorname{ctg} 3x) dx,$ 2) $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^2} dx,$ 3) $\int x \cos \frac{x}{9} dx,$ 4) $\int \sqrt[8]{x-8} \cdot x dx,$ 5) $\int_0^1 x 3^{-x} dx,$ 6) $\int_0^3 \frac{x+3}{\sqrt{x+1}} dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 1 - x^2 \quad \text{и} \quad y = x^2 - 7.$
Вариант 17 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(8 \operatorname{ctg} 2x + \sqrt{x} - \frac{7}{x^2 - 9} \right) dx,$ 2) $\int x e^{11x} dx,$ 3) $\int \sqrt[6]{x-5} \cdot x dx,$ 4) $\int \frac{(1+3x)^2}{x^2} dx,$ 5) $\int_1^2 x^2 \log_2 x dx,$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 \cos x + 6} \sin x dx,$ 7) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 \quad \text{и} \quad x + y = 2.$	Вариант 18 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(3 \operatorname{tg} 10x + 7 - \frac{5}{\sqrt{81 - x^2}} \right) dx,$ 2) $\int \frac{(1-4x)^2}{x} dx,$ 3) $\int x^3 \ln x dx,$ 4) $\int \sqrt[10]{x-5} \cdot x dx,$ 5) $\int_0^1 x 2^{-x} dx,$ 6) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{5x+4}} dx,$ 7) $\int_0^{\infty} \cos x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = e^x \quad \text{и} \quad x = 0, \quad x = 1.$

Вариант 19 1. Вычислить интегралы. 1) $\int (4 - 3\cos \frac{x}{2} + \frac{2}{4+x^2})dx,$ 2) $\int \frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x}}dx,$ 3) $\int x \cos 4x dx,$ 4) $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx,$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tgx}{\cos^2 x} dx,$ 6) $\int_0^1 x 10^{-x} dx,$ 7) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 9}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $y = 0, x = -1, x = 2.$	Вариант 20 1. Вычислить интегралы. 1) $\int (4x^7 - 5\cos 3x + 2^{-x} - 1)dx,$ 2) $\int (\sqrt{x} - 3)^2 x^3 dx,$ 3) $\int x e^{3x} dx,$ 4) $\int \frac{\sin x}{\cos^6 x} dx,$ 5) $\int_2^5 \frac{2x+5}{\sqrt{x-1}} dx,$ 6) $\int_1^e x^7 \ln x dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$ и $x + y = 2.$
Вариант 21 1. Вычислить интегралы. 1) $\int (9^{4x} - 3\cos \frac{x}{5} + 13\sqrt[5]{x} - 2)dx,$ 2) $\int (x-2)\sqrt[3]{x}dx,$ 3) $\int x^{12} \ln x dx,$ 4) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx,$ 5) $\int_4^7 \frac{x}{\sqrt{x-3}} dx,$ 6) $\int_0^{\pi} x \cos \frac{x}{2} dx,$ 7) $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2 + 9}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$ и $x - y + 4 = 0.$	Вариант 22 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(\frac{7}{x} + 4tg 2x - \sqrt[4]{x} + 6 \right) dx,$ 2) $\int \frac{(x+8)^2}{\sqrt[3]{x}} dx,$ 3) $\int x 2^{\frac{x}{2}} dx,$ 4) $\int \frac{\ln^2 x + 3}{x} dx,$ 5) $\int_{-2}^1 \frac{1+x}{\sqrt{x+3}} dx,$ 6) $\int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} dx,$ 7) $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^3}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $x + y = 0.$

Вариант 23 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(9^{4x} - 3 \cos \frac{x}{5} + 13\sqrt[5]{x} - 2 \right) dx,$ 2) $\int (x-2)\sqrt[3]{x} dx,$ 3) $\int x^9 \ln x dx,$ 4) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x+4}} dx,$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin x} \cos x dx,$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 3x dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $2x-3y+6=0$ и $x=3, y=0.$	Вариант 24 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(2x^3 - \frac{4}{x^2+1} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{3} + 2 \right) dx,$ 2) $\int \frac{(2x-1)^2}{x^3} dx,$ 3) $\int x e^{-2x} dx,$ 4) $\int \frac{1-x}{\sqrt{x+3}} dx,$ 5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x} dx,$ 6) $\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx,$ 7) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $2x-3y+6=0$ и $x=3, y=0.$
Вариант 25 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(\frac{4}{x^2+16} - \cos \frac{x}{2} + 5 \right) dx,$ 2) $\int \frac{(3-4x)^2}{x} dx,$ 3) $\int \frac{x}{\cos^2 \frac{x}{3}} dx,$ 4) $\int \sqrt{x-3} x dx,$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos x dx,$ 6) $\int_0^1 x 7^x dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями	Вариант 26 1. Вычислить интегралы. 1) $\int (5\sqrt{x} - 3 \operatorname{ctg} 6x + 4) dx,$ 2) $\int (\sqrt{x}+1)^2 \sqrt[3]{x} dx,$ 3) $\int \sqrt{x+2} x dx,$ 4) $\int x^{-7} \ln x dx,$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \sin x dx,$ 6) $\int_0^{\frac{1}{3}} x e^{3x} dx,$ 7) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x+3}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=\ln x$ и $x=1, x=e, y=0.$

$y = x^2 - 3x$ и $x = -1, x = 2, y = 0$.	
Вариант 27 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - 2^x + 16 \cos 4x \right) dx,$ 2) $\int (1 - 3x)^2 \sqrt{x} dx,$ 3) $\int \frac{x}{\sin^2 \frac{x}{6}} dx,$ 4) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx,$ 5) $\int_0^3 \sqrt{x+1} x dx,$ 6) $\int_0^1 x e^{-x} dx,$ 7) $\int_{-\infty}^0 \cos x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $4y = 8x - x^2$ и $4y = x + 6$.	Вариант 28 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(5x^4 - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + 6 \right) dx,$ 2) $\int \frac{(1-7x)^2}{\sqrt{x}} dx,$ 3) $\int x e^{9x} dx,$ 4) $\int \frac{1-3x}{\sqrt{x+1}} dx,$ 5) $\int_{-3}^2 \sqrt{x+7} x dx,$ 6) $\int_0^5 x \cos x dx,$ 7) $\int_1^{\infty} e^{4-x} dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y + x - 6 = 0$ и $y = x^2$.
Вариант 29 1. Вычислить интегралы. 1) $\int (4 \cos 2x - \sqrt[4]{x} + 6) dx,$ 2) $\int \frac{(1+3x)^2}{x^4} dx,$ 3) $\int x \cos \frac{x}{8} dx,$ 4) $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x - 3}{\cos^2 x} dx,$ 5) $\int_0^1 x \sqrt{3x+1} dx,$ 6) $\int_1^e x^{17} \ln x dx,$ 7) $\int_e^{\infty} dx.$ 2. Найти площадь криволинейной	Вариант 30 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(7x^6 - 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{7} + 4 \right) dx,$ 2) $\int (x-9)^2 x^7 dx,$ 3) $\int x \cos 6x dx,$ 4) $\int \sqrt{x+7} x dx,$ 5) $\int_1^e \frac{\ln^{10} x}{x} dx,$ 6) $\int_0^2 x 5^x dx,$ 7) $\int_{-\infty}^0 e^x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями

трапеции, ограниченной линиями $x - y + 2 = 0$ и $y = x^2$.	$xy = 6$ и $y = 7 - x$.
---	--------------------------

Комплект 4 - ИДЗ №4

Тема «Интегрирование рациональных, иррациональных и тригонометрических функций»

1 Задачи репродуктивного уровня - 1 задание

2 Задачи реконструктивного уровня - 2 задание

3 Задачи творческого уровня - 3 задание

Вариант 1 1) $\int \frac{x^4 dx}{x^4 - 1};$ 2) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x \cdot \sqrt[9]{x^8}} dx;$ 3) $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}.$	Вариант 2 1) $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx;$ 2) $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{x \cdot \sqrt[4]{x^3}} dx;$ 3) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx.$
Вариант 3 1) $\int \frac{x^2 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2} dx;$ 2) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} dx;$ 3) $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}.$	Вариант 4 1) $\int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 + 4x + 4) \cdot (x^2 + 4)} dx;$ 2) $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt{x}} dx;$ 3) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx.$
Вариант 5 1) $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx;$ 2) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt[9]{x^4}} dx;$ 3) $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx.$	Вариант 6 1) $\int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx;$ 2) $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx;$ 3) $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx.$
Вариант 7 1) $\int \frac{3x^3 - 2}{x^3 - x} dx;$ 2) $\int \frac{\sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt[5]{x^2}} dx;$ 3) $\int \sin x \cdot \cos x dx.$	Вариант 8 1) $\int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx;$ 2) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x}}}{x \cdot \sqrt[15]{x^4}} dx;$ 3) $\int \frac{\cos x}{1 - \cos x + \sin x} dx.$
Вариант 9 1) $\int \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^2 + x} dx;$	Вариант 10 1) $\int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x} dx;$

$2) \int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x \cdot \sqrt[6]{x^5}} dx;$ $3) \int \sin 4x \cdot \cos 7x dx.$	$2) \int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt[12]{x^5}} dx;$ $3) \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx.$
Вариант 11	Вариант 12
$1) \int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x}} dx;$ $3) \int \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x + \sin x} dx.$	$1) \int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \cdot \sqrt[15]{x}} dx;$ $3) \int \frac{\sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx.$
Вариант 13	Вариант 14
$1) \int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x \cdot \sqrt[3]{x}} dx;$ $3) \int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx.$	$1) \int \frac{3x - 5}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx;$ $3) \int \sin 8x \cdot \cos 2x dx.$
Вариант 15	Вариант 16
$1) \int \frac{3x^2 - 2x}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2 \cdot \sqrt[8]{x}} dx;$ $3) \int \frac{\cos x}{1 + \cos x + \sin x} dx.$	$1) \int \frac{x^2 - 5}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x \cdot \sqrt[12]{x^5}} dx;$ $3) \int \frac{\sin^2 x}{(1 + \cos x + \sin x)^2} dx.$
Вариант 17	Вариант 18
$1) \int \frac{3x - 5}{x \cdot (x-4) \cdot (x+5)} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 \cdot \sqrt{x}} dx;$ $3) \int \sin 3x \cdot \sin 5x dx.$	$1) \int \frac{x - 25}{x \cdot (x-3) \cdot (x+2)} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x^2}} dx;$ $3) \int \frac{\cos x}{1 + \cos x - \sin x} dx.$
Вариант 19	Вариант 20
$1) \int \frac{x^2 - 2}{x \cdot (x-2) \cdot (x+1)} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}} dx;$ $3) \int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx.$	$1) \int \frac{3x + 15}{x \cdot (x-1) \cdot (x+3)} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x \cdot \sqrt[8]{x^7}} dx;$ $3) \int \sin 2x \cdot \sin 6x dx.$
Вариант 21	Вариант 22

$1) \int \frac{5x-2}{x \cdot (x-3) \cdot (x+1)} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x \cdot \sqrt[12]{x^7}} dx;$ $3) \int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx..$	$1) \int \frac{3-5x}{x \cdot (x-2) \cdot (x+4)} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2 \cdot \sqrt[6]{x}} dx;$ $3) \int \sin^5 x \cdot \cos^3 x dx.$
Вариант 23 $1) \int \frac{3x-5}{(x-1) \cdot (x+1)^2} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2 \cdot \sqrt[4]{x}} dx;$ $3) \int \sin 5x \cdot \sin 9x dx.$	Вариант 24 $1) \int \frac{3}{(x-2) \cdot (x+1)^2} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x \cdot \sqrt[10]{x^9}} dx;$ $3) \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx.$
Вариант 25 $1) \int \frac{3x}{(x-1) \cdot (x+3)^2} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2 \cdot \sqrt[20]{x^7}} dx;$ $3) \int \cos 3x \cdot \cos 5x dx.$	Вариант 26 $1) \int \frac{x+5}{(x-4) \cdot (x+2)^2} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x}} dx;$ $3) \int \frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}.$
Вариант 27 $1) \int \frac{2x-5}{(x-2) \cdot (x+2)^2} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x})^4}}{x \cdot \sqrt[5]{x^3}} dx;$ $3) \int \sin^6 x \cdot \cos^2 x dx.$	Вариант 28 $1) \int \frac{x}{(x-4) \cdot (x+1)^2} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \cdot \sqrt[9]{x}} dx;$ $3) \int \frac{5tg x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx.$
Вариант 29 $1) \int \frac{x^2-1}{(x-4) \cdot (x+1)^2} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x \cdot \sqrt[6]{x^5}} dx;$ $3) \int \cos 6x \cdot \cos 3x dx.$	Вариант 30 $1) \int \frac{x+2}{(x-5) \cdot (x-1)^2} dx;$ $2) \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x \cdot \sqrt[9]{x^5}} dx;$ $3) \int \sin^2 x \cdot \cos^6 x dx.$

Комплект 5 - ИДЗ №5

Тема «Ряды»

1 Задачи репродуктивного уровня - 1 а,б

2 Задачи реконструктивного уровня – 1 в

3 Задачи творческого уровня - 1 г, 2

1. Найти область сходимости степенных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{c^n \sqrt{n}} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{a^n \cdot (n+b)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(an-1)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an^2 + bn + c}{cn^2 - b} \right)^{kn} \cdot (x-b)^n$.

2. Разложить функцию $f(x) = ax - m$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi; \pi)$.

При решении задач коэффициенты a, b, c, k, m выбрать из таблицы в соответствии с номером варианта.

ВАРИАНТ	a	b	c	k	m
1	1	2	3	2	1
2	2	3	5	3	2
3	3	4	7	4	3
4	4	5	9	1	4
5	5	2	11	2	5
6	6	3	3	3	6
7	7	4	5	4	-1
8	8	5	7	1	-2
9	1	2	9	2	-3
10	2	3	11	3	-4
11	3	4	2	4	-5
12	4	5	4	1	-6
13	5	2	6	2	1
14	6	3	8	3	2
15	7	4	10	1	3
16	8	5	2	2	4
17	1	3	4	3	5
18	2	4	6	1	6
19	3	5	8	2	-1
20	4	1	10	3	-2
21	5	-3	3	4	-3
22	6	-4	6	1	-4
23	7	-5	9	2	-5
24	8	-1	2	3	-6
25	1	-3	5	4	-1
26	2	-4	8	1	-2
27	3	-5	11	2	-3

28	4	-2	1	3	-4
29	5	-3	4	1	-5
30	6	-4	7	2	-6

Комплект 6 - ИДЗ №6
Тема «Кратные интегралы»

1 Задачи репродуктивного уровня - задача 4

2 Задачи реконструктивного уровня – задача 1, 2

3 Задачи творческого уровня - задача 3

Задача №1. Изобразить на чертеже область интегрирования D . Преобразовать двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в двукратный. Расставить пределы по заданной области интегрирования D . Изменить порядок интегрирования. Перейти к полярным координатам.

Вариант №	Неравенства, задающие область D :
1	$x^2 + y^2 \leq 16, (x + 2)^2 + y^2 \geq 4, y \geq x, y \geq 0$
2	$\left\{ y \geq \frac{x^2}{4} - 3, y \leq 1, x < 0 \right\} \cup \left\{ y \geq \frac{x^2}{4} - 3, y \leq 1 + \sqrt{4x - x^2}, x \geq 0 \right\}$
3	$x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 \geq 2y, y \geq 0$
4	$\{x^2 + y^2 \leq 16, y \leq 0, x < 0\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 1, y \leq 0, x \geq 0\}$
5	$\{x^2 + y^2 \leq 9, xy \leq 0\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 4, xy > 0\}$
6	$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 10y \geq -4 \\ x \leq 3 \\ y \geq 0,48(x - 3)^2 - 12 \\ y \leq 5 \end{cases}$
7	$x \geq \frac{y^2}{4} - 4, x + y \leq 4, y - x \geq -4$
8	$x^2 + y^2 \leq 25, x^2 - y^2 \geq 4$
9	$x^2 + y^2 \leq 18, x^2 + y^2 \geq 6x, y \geq 0$
10	$x^2 + y^2 \leq 2(7 + x + y), xy \leq 4$

1 1	$xy \leq 4, y \leq 2x - 2, y \geq \frac{x}{2} - 2$
1 2	$x^2 + y^2 \leq 6(x + y), y \leq (1 + \sqrt{2})x$
1 3	$x \leq 4 - y^2, x^2 + y^2 \leq 8x$
1 4	$\{4x^2 + y^2 \leq 16\} \cup \{x^2 + 4y^2 \leq 16\}$
1 5	$y \leq 2 - \frac{x^2}{8}, y \geq \frac{x^2}{4} - 4$
1 6	$xy \geq -1, -3 \leq x + y \leq 3$
1 7	$x^2 + y^2 \leq 16, (x + 2)(y + 2) \leq 4$
1 8	$7y \leq 3x + 26, 4y \geq -5x - 12, y \geq -3, x \leq 3$
1 9	$x^2 + y^2 \leq 9, (x + 4)^2 + y^2 \geq 25$
2 0	$x^2 + y^2 \geq 4x, x^2 + y^2 \geq -6y, x^2 + y^2 \leq 4x - 6y$
2 1	$x \geq 3 - \frac{y^2}{8}, x \leq 6 - \frac{y^2}{4}, x \geq \frac{y^2}{8} - 2, y \geq 0$

Задача №2. Изменить порядок интегрирования, изобразив на чертеже область интегрирования.

Ва риант №	Интеграл:
1	$\int_{-3}^3 dx \int_{-3+\sqrt{9-x^2}}^{3-\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy$
2	$\int_{-3}^0 dy \int_{-3-y}^{3-\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^3 dy \int_{y-3}^{3-\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx$
3	$\int_{-4}^0 dy \int_{\sqrt{8y-y^2}-5}^{-\frac{y}{4}} f(x, y) dx + \int_0^4 dy \int_{-\frac{y}{4}}^{5-\sqrt{8y-y^2}} f(x, y) dx$
4	$\int_0^6 dx \int_{\sqrt{6x-x^2}}^{3-\sqrt{6-x}} f(x, y) dy$
5	$\int_{-1}^0 dx \int_{-x^3}^{-x} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-x}^{-x^3} f(x, y) dy$
6	$\int_{-3}^0 dy \int_{\frac{4}{3}\sqrt{-y^2-6y}-4}^{\frac{y+3}{3}} f(x, y) dx + \int_0^3 dy \int_{2(2-y)}^{\frac{y+3}{3}} f(x, y) dx$

7	$\int_0^3 dy \int_{y-3}^0 f(x, y) dx + \int_3^6 dy \int_0^{y-3} f(x, y) dx$
8	$\int_0^1 dy \int_{2y-1}^{\frac{y+1}{2}} f(x, y) dx$
9	$\int_{-6}^0 dx \int_0^{2x+12} f(x, y) dy + \int_0^6 dx \int_{2x}^{2x+12} f(x, y) dy + \int_6^{12} dx \int_{2x}^{24} f(x, y) dy$
10	$\int_{-4}^{-1} dy \int_{-1}^{y+3} f(x, y) dx + \int_{-1}^3 dy \int_{-1+\sqrt{3+2y-y^2}}^2 f(x, y) dx + \int_3^6 dy \int_{-1}^{5-y} f(x, y) dx$
11	$\int_{-2}^2 dx \int_{9-\sqrt{117-(x-4)^2}}^{4-\sqrt{16-(x+2)^2}} f(x, y) dy + \int_2^6 dx \int_{9-\sqrt{117-(x-4)^2}}^{4-\sqrt{4-(x-4)^2}} f(x, y) dy +$ $+ \int_6^{10} dx \int_{9-\sqrt{117-(x-4)^2}}^{4-\sqrt{16-(x-10)^2}} f(x, y) dy$
12	$\int_{-3}^0 dx \int_{x-2}^{4+3x} f(x, y) dy + \int_0^3 dx \int_{-2}^{4-2x} f(x, y) dy$
13	$\int_{-2}^0 dy \int_{2-\sqrt{16-4(y+2)^2}}^2 f(x, y) dx + \int_0^4 dy \int_{2-\frac{(y-4)^2}{4}}^2 f(x, y) dx$
14	$\int_0^1 dy \int_{2y-1}^{\frac{y+1}{2}} f(x, y) dx$

15	$\int_{-4}^{-1} dx \int_{-4+\sqrt{16-x^2}}^{\frac{4}{x}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-4+\sqrt{16-x^2}}^4 f(x, y) dy +$ $+ \int_1^4 dx \int_{-4+\sqrt{16-x^2}}^{\frac{4}{x}} f(x, y) dy$
----	--

16	$\int_{-3}^0 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{2+\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{1-\sqrt{4-x^2}}^{1+\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$
17	$\int_0^3 dy \int_{3-y}^{\frac{35-3y}{5}} f(x, y) dx + \int_3^5 dy \int_{\frac{y-3}{2}}^{\frac{35-3y}{5}} f(x, y) dx + \int_5^9 dy \int_{\frac{y-3}{2}}^{\frac{3y+1}{4}} f(x, y) dx$
18	$\int_{-\sqrt{6}}^{-1} dx \int_{x^2-2}^{\frac{x^2}{3}+2} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2-2}^0 f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{6}} dx \int_{x^2-2}^{\frac{x^2}{3}+2} f(x, y) dy$
19	$\int_{-\sqrt{27}}^{\sqrt{27}} dx \int_{2-\sqrt{28-x^2}}^{\sqrt[3]{x^2}} f(x, y) dy$
20	$\int_{-4}^{-2} dy \int_{-\sqrt{4-(y+2)^2}}^{4-\sqrt{16-(y+4)^2}} f(x, y) dx + \int_{-2}^0 dy \int_y^{4-\sqrt{16-(y+4)^2}} f(x, y) dx +$ $+ \int_0^2 dy \int_y^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$
21	$\int_{-6}^{-4} dy \int_{\frac{y+6}{4}}^{\frac{10-y}{4}} f(x, y) dx + \int_{-2}^2 dy \int_{-2+\sqrt{16-(y+2)^2}}^{6-\sqrt{16-(y+2)^2}} f(x, y) dx$

Задача №3. Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела T , ограниченного поверхностями:

Вариант №	Поверхности, ограничивающие тело T :
1	$z = 3 - x^2, z = 0, y = x, y = 3x$
2	$y = 18 - z^2, x = y, x = 0$
3	$z^2 + 2y^2 = 11, y = x - 3, y = -x - 3$
4	$z^2 = 7y, x = y, x + y = \sqrt{7}$
5	$y^2 = x + 4, y^2 = 2x + 4, z = 0, z = -x$
6	$z = y^2, z = 9, y = 8 - x, x = 0$
7	$z = 16 - y^2, z = 0, y = 4 - x^2$
8	$z = x^2 - 4y^2, z = 0, x = 4$
9	$y + z = 2, y = 0, z = 2x^2, z = 4x^2 - 2$
10	$z = 5xy, z = 0, x + y = 7, y \geq 3, x = 0$

11	$y = 7 - z^2, x + y = 7, x = 0, y = 0$
12	$2x = \sqrt{y}, 2y = \sqrt{x}, z + x = 6, z = 0$
13	$x^2 = 5y, y + z = 3, y + 2z = 3$
14	$yz = 3, x + y + z = 4, -2x + y + z = 4$
15	$z = 3 - x^2, z = 3 - y^2, z = 0$
16	$z = x, z = 4 - y^2, x = 0$
17	$z^2 = 2y, z^2 = 6 - y, x = 0, x + y = 6$
18	$z = 3 - y, z = 0, x = \sqrt{y}, x = 3\sqrt{y}$
19	$y = 0, z = 0, x + y + z = 11, 2x + z = 11$
20	$z^2 = 8x, x = 3y, x + y = 2$
21	$y + z = 4, z = 0, 4z + 2y + x = 16, 2z + y + x = 8$

Задача №4 Изобразите область интегрирования и измените порядок интегрирования

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x,y) dy, & 2) \int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y) dx, \\
 3) \int_{-\sqrt{3}}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x,y) dy, & 4) \int_2^4 dy \int_y^4 f(x,y) dx, \\
 5) \int_{-1}^0 dx \int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy, & 6) \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^y f(x,y) dx, \\
 7) \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x,y) dy, & 8) \int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^4 f(x,y) dx, \\
 9) \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^2 f(x,y) dy, & 10) \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y) dx, \\
 11) \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy, & 12) \int_{-1}^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y) dx, \\
 13) \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{24x-x^2}} f(x,y) dy, & 14) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y) dx, \\
 15) \int_{-2}^2 dx \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy, & 16) \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x,y) dy,
 \end{array}$$

$$17) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y) dy; \quad 18) \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y) dy;$$

$$19) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y) dy. \quad 20) \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$$

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка **«отлично»** выставляется студенту, если студент решил правильно все задачи ИДЗ, вовремя сдал его на проверку и может объяснить ход решения представленных задач при собеседовании

Оценка **«хорошо»** выставляется студенту, если студент решил правильно все задачи репродуктивного и реконструктивного уровня, вовремя сдал работу на проверку и может объяснить ход решения представленных задач при собеседовании.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется студенту, если студент решил правильно

задачи только репродуктивного уровня и может объяснить ход решения представленных задач при собеседовании или, решив задачи других уровней, сдал работу позже установленного срока, или при собеседовании не может объяснить ход решения задач второго и третьего уровней.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется студенту, если допускает ошибки в решении задач репродуктивного уровня, или работа студентом не сдана, или студент выполнил не свой вариант работы.

2. Описание шкалы оценивания

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя: решение задач ИДЗ и собеседование с преподавателем, на котором студент должен уметь объяснить ход решения представленных задач.

Предлагаемые студенту задания позволяют проверить компетенцию ОПК-1

Для подготовки к данному оценочному мероприятию необходимо выполнить дома в тетради для ИДЗ предлагаемую работу в соответствии с установленным преподавателем номером варианта (номер варианта соответствует номеру студента по списку в журнале преподавателя), сдать работу на проверку в установленный срок, защитить свою работу после проверки её преподавателем. При защите студент отвечает на вопросы преподавателя о ходе решения представленных задач..

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования своей работой, калькулятором, статистическими таблицами.

При проверке задания, оцениваются:

- аккуратность выполнения работы;
- наличие всех вычислений и пояснений в работе;
- выбор рационального способа решения задания.