

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания
по выполнению практических работ
по дисциплине
Теория вероятностей
для студентов направления подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Ставрополь 2026

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» формирование у студентов общепрофессиональных компетенций (ОПК-1, ОПК-3), будущего бакалавра по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Задачи освоения дисциплины:

1. Получение базовых знаний по теории вероятностей и математической статистике;
2. приобретение навыков исследования и решения базовых задач теории вероятностей и математической статистики;
3. овладение современным теоретико-вероятностным и статистическим аппаратом для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач в области математики и информатики;
4. развитие способностей применять полученные знания и умения в смежных дисциплинах и будущей профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины «**Теория вероятностей и математическая статистика**» формируются общепрофессиональные компетенции (ОПК-1, ОПК-3), в соответствии с которыми студент должен:

Знать:

методы использования математического аппарата теории вероятностей для решения прикладных задач.

Уметь:

использовать математический аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач.

Владеть:

навыками использования математического аппарата теории вероятностей для решения прикладных задач.

Тема 1. «Основные понятия теории вероятностей»

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

Предмет теории вероятностей.

История возникновения теории вероятностей.

Случайные события.

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности массовых однородных случайных событий.

Становление ТВ связано с именем известного швейцарского математика Якоба Бернулли (1654-1705). В его трактате «Искусство предположений» (1713), над которым он работал 20 лет и который был издан уже после смерти автора, впервые введено и широко использовалось классическое определение вероятности, а также применялась статистическая концепция вероятности.

Следующий важный этап в развитии ТВ связан с именами Муавра (1667-1754), Лапласа (1749-1827), Гаусса (1777-1855), Пуассона (1781-1840). Далее, в XIX веке, большую роль сыграли представители Петербургской математической школы В.Я. Буняковский (1804-1889), П.Л. Чебышев (1821-1894), А.А. Марков (1856-1922), А.А. Ляпунов (1857-1918).

ТВ и математическая статистика и в настоящее время развиваются и применяются на практике: при организации производства, анализе экономических процессов, контроле качества продукции, маркетинговых и социологических исследованиях, страховом деле и т.д.

В ТВ вводятся специальные понятия и строятся специфические математические модели. Исходными понятиями в ТВ являются понятие случайного события и вероятности. Под **испытанием** (опытом, экспериментом) понимается выполнение определенного комплекса условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат. В теории вероятностей рассматриваются **испытания**, результаты которых нельзя предсказать заранее, а сами испытания можно повторять, хотя бы теоретически, произвольное число раз при неизменном комплексе условий. Испытаниями, например, являются: подбрасывание монеты, выстрел из винтовки, проведение денежно-вещевой лотереи.

2. Классификация событий

Случайным событием (*возможным событием* или просто *событием*) называется любой факт, который в результате испытания может произойти или не произойти. События обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита: A, B, C .

Если при каждом испытании, при котором происходит событие A , происходит и событие B , то говорят, что A *влечет за собой* событие B (*входит в* B) или B *включает* событие A и обозначают $A \subset B$. Если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то в этом случае события A и B называются **равносильными**. События A и B называются **несовместными**, если наступление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании. События A и B называются **совместными** если они могут произойти вместе в одном и том же испытании.

Пример 1. Испытание состоит в однократном подбрасывании игральной кости с шестью гранями. Событие A – появление трех очков, событие B – появление четного числа очков, C – появление нечетного числа очков. События A и C совместны, поскольку число 3 – нечетное, а значит, если выпало 3 очка, то произошло и событие A и событие C . Кроме того, событие A влечет за собой событие C . События A и B несовместны, т.к. если произошло и событие A , то не произойдет событие B , а если произошло событие B , то не произойдет событие A . События B и C также являются несовместными.

События называются **попарно несовместными** (или **взаимоисключающими**), если любые два из них несовместны. $nAAA, \dots, 21$

События образуют **полную группу** для данного испытания, если они попарно несовместны и в результате испытания обязательно появится одно из них.

Два несовместных события, из которых одно должно обязательно произойти, называются **противоположными** (в литературе такие события называют также **взаимно-дополнительными**). Событие, противоположное событию A , будем обозначать $\bar{A}$. Противоположные события являются простейшим примером полной группы.

Пример 3. «Выигрыш» и «проигрыш» по одному билету денежно-вещевой лотереи – события противоположные.

Событие называется **достоверным**, если в результате испытания оно обязательно должно произойти. Событие называется **невозможным**, если в данном испытании оно заведомо не может произойти. Обозначим достоверное событие Ω , а невозможное $\emptyset$.

Пример 4. На склад поступила партия, все изделия которой стандартны. Извлечение из нее стандартного изделия – событие достоверное, извлечение же бракованного изделия есть событие невозможное.

События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них является более возможным, чем другое. Или другими словами: под равновозможными понимают события, которые в силу тех или других причин (например, симметрии) не имеют объективного преимущества одного перед другим.

Примеры равновозможных событий: выпадение любого числа очков при броске игральной кости, появление любой карты при случайном извлечении из колоды, выпадение герба или цифры при броске монеты и т.п.

3. Классическое определение вероятности

Численная мера степени объективной возможности наступления события называется **вероятностью события** и является, наряду с понятием случайного события, вторым основным понятием теории вероятностей. Это определение, *качественно* отражающее понятие вероятности события, не является математическим. Чтобы оно таковым стало, необходимо определить его *количественно*.

Отметим, что строгое математическое определение вероятности, как и случайного события, является аксиоматическим (то, что принимается как данность) и поэтому не поддается строгому определению. То, что в дальнейшем будет называться различными определениями вероятности, представляет собой *способы* или *методы вычисления* этой величины.

Пусть производится испытание с конечным числом равновозможных исходов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, образующих полную группу событий. Элементарный исход ω_i называется **благоприятствующим** появлению события A , если наступление исхода ω_i влечет за собой наступление события A .

Пусть число возможных исходов опыта равно n (общее число элементарных исходов), а при m из них происходит некоторое событие A (число благоприятных исходов), тогда при сделанных ранее предположениях на испытание, **вероятность $P(A)$ случайного события A** , наступившего в данном испытании вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.1)$$

Это, так называемое, *классическое определение вероятности*.

Свойства вероятности:

1. Вероятность достоверного события Ω равна единице.
2. Вероятность невозможного события $\emptyset$ равна нулю.
3. Вероятность *любого* события удовлетворяет двойному неравенству $0 \leq P(A) \leq 1$.

Классическое определение вероятности применимо только для очень узкого класса задач, где все исходы опыта удовлетворяют жестким условиям, и не является пригодным для изучения произвольных случайных событий. В большинстве реальных задач эта схема

неприменима. Так, она неприемлема, если результаты испытания не равновозможны. Например, при бросании неправильной монеты выпадение ее различных граней не равновозможно.

В таких ситуациях требуется определять вероятность события иным образом. Для этого введем вначале понятие **относительной частоты (частоты) $W(A)$** события A как отношения числа опытов, в которых наблюдалось событие A , к общему количеству проведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{M}{N} \quad (1.2)$$

где N – общее число опытов, M – число опытов, в которых появилось событие A .

Большое количество экспериментов показало, что если опыты проводятся в одинаковых условиях, то для большого количества испытаний относительная частота $W(A)$ изменяется мало, колеблясь около некоторого постоянного числа. Это число можно считать вероятностью рассматриваемого события. Таким образом, **статистической вероятностью события** считают его относительную частоту или число, близкое к ней.

ЗАДАНИЯ

1. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5? *Ответ: 18 000.*
2. Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник произведений Д. Лондона, располагая их:
а) в произвольном порядке; б) так, чтобы I, V и IX тома стояли рядом (в любом порядке)?
Ответ: а) 3 628 800; б) 241 920.
3. Требуется составить расписание отправления поездов на различные дни недели. При этом необходимо, что 3 дня отправлялись по 2 поезда в день, 2 дня – по 1 поезду в день, 2 дня – по 3 поезда в день. Сколько можно составить различных расписаний? *Ответ: 210.*
4. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов? *Ответ: 60.*
5. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, если:
а) цифры в номере не повторяются; б) цифры в номере могут повторяться?
Ответ: а) 604 800; б) 10 000 000.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. В комнате имеется 7 стульев. Сколькими способами можно разместить на них 7 гостей? 3 гостя? *Ответ: 5 040, 210.*
2. Сколькими способами можно переставить буквы в словах: а) «математика», 2) «абракадабра», чтобы получились всевозможные различные наборы букв? *Ответ: 151 200, 83 160.*
3. Для доступа в компьютерную сеть оператору необходимо набрать пароль из 4 цифр. Оператор забыл или не знает необходимого кода. Сколько всевозможных комбинаций он может составить для набора пароля: а) если цифры в пароле не повторяются; б) если повторяются?
Ответ: а) 5 040, б) 10 000

Тема 2. «ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ»

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Правила комбинаторики.
2. Основные комбинаторные соединения.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Правила комбинаторики

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_k$ – элементы заданного конечного множества.

Правило суммы

Если элемент A_1 может быть выбран n_1 способами, элемент A_2 – другими n_2 способами, элемент A_3 – отличными от первых двух n_3 способами, ..., элемент A_k – n_k способами, отличными от всех предыдущих, то выбор одного из элементов: или A_1 , или A_2 , ..., или A_k может быть осуществлен $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ способами.

Правило произведения

Если элемент A_1 может быть выбран n_1 способами, после каждого такого выбора элемент A_2 может быть выбран n_2 способами, ..., после каждого $(k-1)$ выбора элемент A_k может быть выбран n_k способами, то выбор всех элементов $A_1, A_2, \dots, A_k$ в указанном порядке может быть осуществлен $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Основные комбинаторные соединения

Перестановками из n различных элементов называются такие комбинации из n элементов, которые отличаются только порядком расположения элементов.

Обозначение числа перестановок: P_n .

Формула: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

Если в перестановках из общего числа n элементов есть k различных элементов, при этом первый элемент повторяется n_1 раз, второй элемент – n_2 раз, ..., k -й элемент – n_k раз ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$), то такие перестановки называются **перестановками с повторениями** из n элементов.

Обозначение числа перестановок с повторениями: $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$

Формула: $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

Размещениями из n различных элементов по m в каждом называются такие комбинации из n элементов по m , которые отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Обозначение числа размещений: A_n^m

Формула: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$

Сочетаниями из n различных элементов по m в каждом называются такие комбинации из n элементов по m , которые отличаются только составом элементов.

Обозначение числа сочетаний: C_n^m

Формула:
$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}$$

Свойства сочетаний

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$. 2. $C_n^1 = n$. 3. $C_n^m = C_n^{n-m}$ (пример: $C_9^7 = C_9^{9-7} = C_9^2$).

Размещения с повторениями: $\overline{A_n^m} = n^m$

Сочетания с повторениями: $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m$

ЗАДАНИЯ

1. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5? *Ответ: 18 000.*
2. Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник произведений Д. Лондона, располагая их:
а) в произвольном порядке; б) так, чтобы I, V и IX тома стояли рядом (в любом порядке)?
Ответ: а) 3 628 800; б) 241 920.
3. Требуется составить расписание отправления поездов на различные дни недели. При этом необходимо, что 3 дня отправлялись по 2 поезда в день, 2 дня – по 1 поезду в день, 2 дня – по 3 поезда в день. Сколько можно составить различных расписаний? *Ответ: 210.*
4. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов? *Ответ: 60.*
5. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, если:
а) цифры в номере не повторяются; б) цифры в номере могут повторяться?
Ответ: а) 604 800; б) 10 000 000.
6. В вазе стоят 9 красных и 7 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из нее:
а) 3 гвоздики; б) 6 гвоздик одного цвета; в) 4 красных и 3 розовых гвоздики?
Ответ: а) 560; б) 91; в) 4 410.
7. Сколькими способами можно выбрать 4 монеты из четырех пятирублевых монет и четырех двухрублевых монет? *Ответ: 5.*
8. В колоде 36 карт, из них 4 туза. Сколькими способами можно сдать 6 карт так, чтобы среди них было 2 туза. *Ответ: 215 760.*
9. Пять авторов должны написать учебник из 14 глав. Два автора напишут по 2 главы, два других – по 3 главы и еще один – 4 главы книги. Сколькими способами может быть распределен материал между авторами? *Ответ: 25 225 200.*

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

10. Пять человек вошли в лифт на первом этаже девятиэтажного дома. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта на нужных этажах? *Ответ: 32 768.*
11. Выпускники одной из групп обменялись фотографиями. Сколько было выпускников, если фотографий потребовалось 240? *Ответ: 16.*

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. В комнате имеется 7 стульев. Сколькими способами можно разместить на них 7 гостей? 3 гостя? *Ответ: 5 040, 210.*
2. Сколькими способами можно переставить буквы в словах: а) «математика», 2) «абракадабра», чтобы получились всевозможные различные наборы букв? *Ответ: 151 200, 83 160.*
3. Для доступа в компьютерную сеть оператору необходимо набрать пароль из 4 цифр. Оператор забыл или не знает необходимого кода. Сколько всевозможных комбинаций он может составить для набора пароля: а) если цифры в пароле не повторяются; б) если повторяются?
Ответ: а) 5 040, б) 10 000
4. Группа туристов из 12 юношей и 7 девушек выбирает по жребию 5 человек для приготовления ужина. Сколько существует способов выбора, при которых в эту «пятерку» попадут: а) одни девушки; б) 3 юноши и 2 девушки; в) 1 юноша и 4 девушки; г) 5 юношей?
Ответ: а) 21, б) 4620, в) 420, г) 792.
5. На вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них четыре пары для танца? *Ответ: 16 216 200.*
6. В магазине имеется 7 видов тортов. Сколькими способами можно составить набор, содержащий 3 торта? А если имеются 3 вида тортов, а нужен набор из 7 тортов? *Ответ: 84, 36.*

Тема 3. «ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ»

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Классическое определение вероятности.
2. Геометрическое определение вероятности.
3. Статистическое определение вероятности.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Классическое определение вероятности

Пусть исходы некоторого испытания равновозможны, попарно несовместны и образуют полную группу. Такие исходы называются **элементарными исходами**,

случаями или шансами. При этом говорят, что испытание сводится к **классической схеме** или **схеме случаев**.

Исход (случай) называется **благоприятствующим (благоприятным)** событию A , если появление этого исхода влечет за собой появление события A .

Классическое определение вероятности

Если испытание сводится к классической схеме, то **вероятностью** события A называется отношение числа исходов, благоприятствующих событию A , к общему числу всех возможных элементарных исходов испытания, т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где $P(A)$ – вероятность события A ; m – число исходов, благоприятствующих событию A ; n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Свойства вероятности

1. Если A – достоверное событие, то $P(A) = 1$.
2. Если A – невозможное событие, то $P(A) = 0$.
3. Если A – случайное событие, то $0 < P(A) < 1$.

Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности

Геометрической вероятностью события A называется число $P(A)$, равное отношению меры области g , благоприятствующей событию A , к мере всей области G :

$$P(A) = \frac{\text{мера } g}{\text{мера } G}.$$

Область, на которую распространяется понятие геометрической вероятности, может быть одномерной (прямая, отрезок), двумерной (некоторая фигура на плоскости) и трехмерной (некоторое тело в пространстве). Кроме того, область может представлять собой некоторый угол.

Статистическое определение вероятности

Пусть проведено n испытаний. При этом событие A появилось m раз ($0 \leq m \leq n$). Число m называется **абсолютной частотой** события A .

Относительной частотой или просто **частотой** события A называется отношение числа испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу проведенных испытаний, т.е.

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где $W(A)$ – относительная частота события A ; m – число появлений события A ; n – общее число испытаний.

Статистическое определение вероятности

Статистической вероятностью события A называется число, около которого группируются (стабилизируются) значения относительной частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний.

В качестве статистической вероятности события A принимают относительную частоту этого события $W(A)$ или число, близкое к ней:

$$P(A) \approx W(A).$$

ЗАДАНИЯ

1. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым? *Ответ: 0,4.*
2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что:
а) выпадет разное число очков, сумма которых не больше 4;
б) произведение выпавших очков делится на 4;
в) хотя бы на одной кости выпадет 6 очков?
Ответ: а) 1/9; б) 5/12; в) 11/36.
3. В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Найти вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров не более 10. *Ответ: 0,4.*
4. Буквы Т, Е, И, Р, О, Я написаны на отдельных карточках. Наудачу последовательно извлекаются и складываются в ряд: а) 3 карточки; б) все 6 карточек. Какова вероятность того, что получится слово: а) ТОР; б) ТЕОРИЯ? *Ответ: а) 1/120; б) 1/720.*
5. Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются 4 билета в театр, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся:
а) 4 девушки; б) 4 юноши; в) 3 юноши и 1 девушка?
Ответ: а) 0,108; б) 0,0166; в) 0,142.
6. В группе 30 студентов, из которых 6 отличников. Группу наудачу разделили на две равные части. Какова вероятность того, что в каждой части по 3 отличника? *Ответ: 0,35.*
7. На отрезок OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую, чем $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси. *Ответ: 1/3.*
8. В круг радиуса R вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадет в квадрат? *Ответ: $2/\pi \approx 0,637$.*
9. В квадрат с вершинами в точках $O(0,0)$, $K(0,1)$, $B(1,1)$ и $M(1,0)$ наудачу брошена точка $A(x,y)$. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y > \frac{1}{2}x$. *Ответ: 0,75.*
10. В шар вписан куб. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность того, что точка попадет в куб. *Ответ: 0,368.*

11. Среди 1 000 новорожденных оказалось 515 мальчиков. Какова частота рождения мальчика? *Ответ: 0,515.*

12. Контролер, проверяя качество 400 изделий, установил, что 20 из них относятся ко 2-му сорту, а остальные – к 1-му. Какова частота изделий первого сорта? *Ответ: 0,95.*

13. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов. *Ответ: 102.*

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная из ящика деталь (после перевозки) оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь. *Ответ: а) $2/3$, б) $1/3$.*

2. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число кратно 5? *Ответ: 0,2.*

3. На 6 одинаковых карточках написаны буквы А, В, К, М, О, С. Карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово МОСКВА? *Ответ: $1/720$.*

4. Из 40 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 30. Найти вероятность того, что среди трех наугад выбранных вопросов студент знает: а) 3 вопроса; б) 2 вопроса; в) 1 вопрос. *Ответ: а) 0,41, б) 0,44, в) 0,14.*

5. Код домофона состоит из 8 цифр, которые могут повторяться. Какова вероятность того, что, случайно набирая цифры, можно угадать нужный код? *Ответ: $1/108$.*

6. В круге радиусом $R = 4$ см наудачу поставлена точка. Найти вероятность того, что расстояние от точки до окружности, ограничивающей этот круг не превосходит 1 см. *Ответ: $7/16$.*

7. В круг радиуса 8 помещен меньший круг радиуса 5. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет так же и в меньший круг. *Ответ: $25/64$.*

8. На отрезке $[0;5]$ случайно выбирается точка. Найти вероятность того, что расстояние от нее до правого конца отрезка не превосходит 1,6 единиц. *Ответ: 0,32.*

9. На отрезке натурального ряда от 1 до 20 найти относительную частоту простых чисел. *Ответ: 0,4.*

Тема 4. «ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Действия над событиями.
2. Независимые и зависимые события. Условная вероятность.
3. Теоремы умножения вероятностей.
4. Теоремы сложения вероятностей.

5. Вероятность появления хотя бы одного события.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Действия над событиями

Суммой двух событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B .

Произведением двух событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, состоящее в совместном наступлении событий A и B .

Разностью двух событий A и B называется событие $C = A - B$, состоящее в наступлении события A и не наступлении события B .

Независимые и зависимые события. Условная вероятность

Два события A и B называют **независимыми**, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет. В противном случае события A и B называются **зависимыми**.

Несколько событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ называются **попарно независимыми**, если каждые два из них независимы.

Несколько событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ называются **независимыми в совокупности** или просто **независимыми**, если независимы любые два из них и независимы любое из данных событий и любые комбинации (произведения) остальных событий. В противном случае события $A_1, A_2, \dots, A_k$ называются **зависимыми**.

Пусть A и B – зависимые события.

Условной вероятностью события B называется вероятность данного события, вычисленная в предположении, что событие A уже произошло. Обозначение: $P_A(B)$ или $P(B|A)$.

Аналогично определяется условная вероятность события A : $P_B(A)$ или $P(A|B)$.

Если A и B – независимые события, то их условные вероятности совпадают с обычными безусловными вероятностями: $P_A(B) = P(B)$ и $P_B(A) = P(A)$.

Теоремы умножения вероятностей

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже произошло: $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких зависимых событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже произошли:

$$P(A_1 A_2 \dots A_k) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{k-1}}(A_k).$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких независимых событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ равна произведению вероятностей этих событий:
 $P(A_1 A_2 \dots A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k)$.

Теоремы сложения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Следствия:

1. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ равна сумме вероятностей этих событий:
 $P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$.

2. Если события $A_1, A_2, \dots, A_k$ образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице: $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) = 1$.

3. Сумма вероятностей двух противоположных событий A и $\bar{A}$ равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

С учетом теорем умножения теорема сложения вероятностей совместных событий примет вид:

1) для независимых событий: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$.

2) для зависимых событий: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B)$.

Вероятность появления хотя бы одного события

Теорема (вероятность появления хотя бы одного события)

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$: $P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n)$.

Частный случай

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную p , то вероятность появления хотя бы одного из этих событий определяется по формуле $P(A) = 1 - q^n$, где $q = 1 - p$.

ЗАДАНИЯ

1. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с первого, пять со второго, семь с третьего и четыре с четвертого. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада?

Ответ: $11/20$.

2. Мастер обслуживает пять станков. 10% рабочего времени он проводит у 1-го станка, 15% – у второго, 20% – у третьего, 25% – у четвертого и 30% – у пятого. Найти вероятность того, что в наудачу выбранный момент он находится: а) у 3-го или 5-го станка; б) у 1-го или 2-го или 4-го станка. *Ответ: а) $0,5$; б) $0,5$.*

3. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого стрелка равна $0,7$; а второго – $0,8$. Найти вероятность того, что: а) мишень будет поражена; б) в мишень попадет только один из стрелков. *Ответ: а) $0,94$; б) $0,38$.*

4. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна $0,9$; второй – $0,9$ и третий – $0,8$. Найти вероятность того, что студентом будут сданы:

- а) только второй экзамен;
- б) только один экзамен;
- в) три экзамена;
- г) по крайней мере 2 экзамена;
- д) хотя бы один экзамен.

Ответ: 1) $0,018$; 2) $0,044$; 3) $0,648$; 4) $0,954$; 5) $0,998$.

5. Для посева берут семена из двух пакетов. Вероятности прорастания семян в первом и втором пакетах соответственно равны $0,4$ и $0,7$. Найти вероятность того, что хотя бы в одном пакете семена прорастут. *Ответ: $0,82$.*

6. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит нормальное, равна $0,6$. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет. *Ответ: $0,936$.*

7. Из колоды в 36 карт наудачу вынимаются 3 карты. Какова вероятность того, что среди них не будет ни одной шестерки? Рассмотреть выборки: 1) без возвращения; 2) с возвращением.

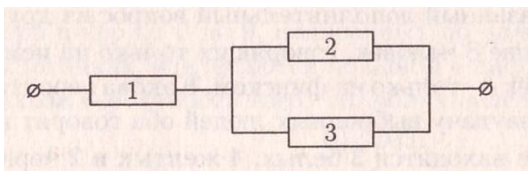
Ответ: 1) $0,695$; 2) $0,702$.

8. В урну, в которой лежат 4 белых и 3 черных шара, добавляют 2 белых и один черный шар. После этого наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятности следующих событий:

- а) все три шара белые;
- б) все три шара черные;
- в) первый шар белый, а второй и третий шар – черные.

Ответ: а) $1/6$, б) $1/30$, в) $1/10$.

9. Электрическая цепь представлена схемой. Элементы с номерами 1,2,3 могут выйти из строя



Независимо друг от друга с вероятностями, равными соответственно 0,1; 0,15 и 0,2. Какова вероятность разрыва цепи? *Ответ: 0,127.*

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

- 10.** Только один из 9 ключей подходит к данному замку. Какова вероятность того, что придется опробовать 5 ключей для открытия замка? *Ответ: 0,11.*
- 11.** В магазине имеются 10 женских и 6 мужских шуб. Для анализа качества случайным образом отобрали 3 шубы. Определить вероятность того, что среди отобранных шуб окажутся только мужские или только женские шубы. *Ответ: 0,25.*

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- 1.** На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете. *Ответ: 67/91.*
- 2.** Один студент выучил 20 из 25 вопросов программы, а второй – только 15. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что правильно ответят: а) оба студента; б) только первый студент; в) только один из них; г) хотя бы один из студентов. *Ответ: а) 0,48, б) 0,32, в) 0,44, г) 0,92.*
- 3.** В районе 100 поселков. В пяти из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобраны два поселка. Какова вероятность того, что в них окажутся пункты проката? Решить задачу, используя теорему умножения вероятностей. *Ответ: 1/495.*
- 4.** Вероятность своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равна 0.5, 0.6 и 0.7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним предприятием. *Ответ: 0,94.*

Тема 4. «ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ» «ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ФОРМУЛЫ БАЙЕСА»

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Полная вероятность.
2. Формулы Байеса.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Теорема. Если событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу, то вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие условные вероятности события A :

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A).$$

(1)

Формула (1) называется **формулой полной вероятности**, а события $B_1, B_2, \dots, B_n$ – **гипотезами**.

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу. Вероятность появления события A находится по формуле полной вероятности, т.е. по формуле (1). Допустим, что произведено испытание, в результате которого событие A появилось. Требуется найти вероятности гипотез $B_1, B_2, \dots, B_n$ после испытания, т.е. условные вероятности $P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$. Данные вероятности могут быть найдены по **формулам Байеса**:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) P_{B_i}(A)} = \frac{P(B_i) P_{B_i}(A)}{P(A)}.$$

Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A .

ЗАДАНИЯ

1. В первой урне 3 черных и 7 белых шаров. Во второй урне 4 белых и 6 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули шар, который оказался черным. Найти вероятность того, что этот шар вынули из второй урны. *Ответ: 2/3.*
2. Ковбой Джек попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джек стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,16. На столе лежат 8 револьверов, из которых 5 пристрелянных. Ковбой Джек видит муху на стене, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в нее. Найти вероятность того, что он промахнется. *Ответ: 0,44.*
3. Из 500 ламп 300 принадлежат первой партии, остальные – второй. В первой партии 4% бракованных ламп, во второй – 3 % бракованных ламп. Наудачу выбирается лампа, которая оказалась бракованной. Найти вероятность того, что эта лампа: а) из первой партии; б) из второй партии. *Ответ: а) 2/3, б) 1/3.*
4. В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель – 0,85. Проведена проверка качества одной пары обуви. Оказалось, что эта пара обуви отремонтирована качественно. Какова вероятность того, что это: 1) туфли; 2) сапоги? *Ответ: 1) 0,59; 2) 0,41.*
5. Рабочий обслуживает три станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго – 0,03, а для третьего – 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в 3 раза больше, чем второго, а третьего – в 2 раза меньше, чем второго. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной? *Ответ: 0,024.*

6. В одном ящике находятся 7 деталей, из которых 3 нестандартные. В другом – 5 деталей, из них 2 нестандартные. Из первого ящика во второй перекладывают одну деталь. Затем из второго ящика берут одну деталь. Найти вероятность того, что взятая деталь окажется нестандартной. *Ответ: 0,405.*

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

7. На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго – 6 и от третьего – 4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8 и 0,7. Какова вероятность того, что:

а) установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока;

б) проработавший без дефектов двигатель изготовлен на втором заводе?

Ответ: а) 0,83; б) 0,29.

8. Исследованиями психологов установлено, что мужчины и женщины по-разному реагируют на некоторые жизненные обстоятельства. Результаты исследований показали, что 70% женщин позитивно реагируют на изучаемый круг ситуаций, в то время как 40% мужчин реагируют на них негативно. 15 женщин и 5 мужчин заполнили анкету, в которой отразили свое отношение к предлагаемым ситуациям. Случайно извлеченная анкета оказалась негативной. Чему равна вероятность того, что ее заполнял мужчина? *Ответ: 0,31.*

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25%, второй – 35%, а третий 40% всех замков. Брак составляет соответственно 5%, 4% и 2%.

а) Найти вероятность того, что случайно выбранный замок является дефектным.

б) Случайно выбранный замок является дефектным. Какова вероятность того, что он был изготовлен в первом, втором, третьем цехе?

Ответ: а) 0,345; б) 0,362; 0,408; 0,230.

2. Партия электрических лампочек на 20% изготовлена первым заводом, на 30% - вторым заводом, на 50% - третьим заводом. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны 0,01, 0,005 и 0,006. Найти вероятность того, что наудачу взятая из партии лампочка окажется стандартной, т.е. небракованной. *Ответ: 0,9935.*

3. В торговую фирму поставляются телевизоры тремя фирмами в соотношении 5:2:3. Телевизоры, поступающие от этих фирм, не требуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 96%, 92% и 94% случаев.

а) Найти вероятность того, что наудачу купленный телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

б) Купленный телевизор не потребовал ремонта в течение гарантийного срока. Какая фирма вероятнее всего поставила данный телевизор?

Ответ: а) 0,946; б) первая.

4. На двух автоматических станках изготавливаются одинаковые детали. Известно, что производительность первого станка в 2 раза больше, чем второго, и что вероятность изготовления детали высшего качества на первом станке равна 0,9, а на втором – 0,81. Изготовленные за смену на обоих станках нерассортированные детали находятся на складе. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется высшего качества. *Ответ: 0,81.*

Тема 5. «ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ»

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Независимые испытания. Формула Бернулли.
2. Формула Пуассона.
3. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Теорема 1. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A наступит k раз в n независимых испытаниях, определяется по **формуле Бернулли**: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

О.1. Число k_0 наступления события A в n независимых испытаниях называется **наивероятнейшим**, если вероятность осуществления этого события $P_n(k_0)$ по крайней мере не меньше вероятностей других событий $P_n(k)$ при любом k .

Число k_0 находится из неравенств $np - q \leq k_0 \leq np + p$. (1)

Замечание.

1. Так как $np + p - (np - q) = p + q = 1$, то всегда существует целое число k_0 , удовлетворяющее неравенствам (1).
2. Если обе части неравенства (1) – дробные числа, то k_0 – единственное целое число, заключенное между дробями.
3. Если $np + p$ – целое число, то наивероятнейших чисел два: $k_0 = np + p$ и $k_0' = np - q$.

Теорема Пуассона. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю ($p \rightarrow 0$) при неограниченном увеличении числа испытаний n ($n \rightarrow \infty$), причем произведение np стремится к постоянному числу a ($np \rightarrow a$), то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится k раз в n независимых испытаниях, удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}. \quad (2)$$

Если вероятность p – постоянна и мала, число испытаний n – велико и число $np = a$ – незначительно (будем полагать, что $np = a \leq 10$), то из предельного равенства (2) вытекает

приближенная **формула Пуассона**: $P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}$.

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A произойдет k раз в n независимых испытаниях при достаточно большом n

определяется по асимптотической формуле $P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$ (3), где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$,
 $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Формула (3) называется **локальной формулой Муавра-Лапласа**. Вычисление по формуле (3) дает незначительную погрешность при выполнении условия $npq \geq 20$.

Функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ называется **функцией Гаусса**. Для функции $\varphi(x)$ составлена таблица значений. Пользуясь таблицей, следует учитывать, что:

1. Функция $\varphi(x)$ – четна, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$.
2. Функция $\varphi(x)$ монотонно убывает при $x > 0$, причем $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.
 Практически можно считать, что при $x > 4$: $\varphi(x) = 0$.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A в n независимых испытаниях появится от k_1 до k_2 раз при достаточно большом n определяется по асимптотической формуле $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ (4), где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – **функция или интеграл вероятностей Лапласа**; $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$,
 $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Формула (4) называется **интегральной формулой Муавра-Лапласа**. Вычисление по формуле (4) дает незначительную погрешность при выполнении условия: $npq \geq 20$.

Для упрощения расчетов по формуле (4) составлена таблица значений функции $\Phi(x)$. Пользуясь таблицей, следует учитывать, что:

1. Функция $\Phi(x)$ – нечетна, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
2. Функция $\Phi(x)$ монотонно возрастает при $x > 0$, причем $\Phi(x) \rightarrow 0,5$ при $x \rightarrow \infty$.
 Практически можно считать, что при $x > 4$: $\Phi(x) = 0,5$.

ЗАДАНИЯ

1. Контрольный тест состоит из четырех вопросов. На каждый вопрос предлагается четыре варианта ответа, среди которых только один правильный. Найти вероятность правильного ответа на 3 вопроса неподготовленного человека (выбор ответа наудачу).
 Ответ: 0,047.

2. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) 2 мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не более трех и не менее двух

мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51. *Ответ: а) 0,306; б) 0,481; в) 0,519; г) 0,624.*

3. Вероятность того, что студент опоздает на лекцию, равна 0,08. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 96 студентов. *Ответ: 7.*

4. Вероятность «сбоя» в работе АТС при каждом вызове равна 0,007. Поступило 1000 вызовов. Определить вероятность 9 «сбоев». *Ответ: 0,1014.*

5. Завод-изготовитель отправил на базу 12000 доброкачественных изделий. Число поврежденных при транспортировке изделий составляет 0,05%. Найти вероятность того, что на базу поступит:

а) не более трех поврежденных изделий; б) хотя бы два поврежденных изделия.

Ответ: а) 0,1512; б) 0,9826.

6. Вероятность того, что при автоматической штамповке изделий отдельное изделие окажется бракованным, постоянна и равна 0,05. Какова вероятность того, что в партии из 1000 изделий встретится ровно 40 бракованных? *Ответ: 0,02.*

7. Используя условия задачи 6, выяснить, сколько небракованных изделий следует ожидать с вероятностью 0,042? *Ответ: 945 или 955.*

8. Вероятность попадания в цель из скорострельного орудия при отдельном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 300 выстрелах число попаданий будет не менее 210, но не более 230 раз. *Ответ: 0,7258.*

9. Замечено, что в среднем 80% семян из посаженных всходят. Сколько нужно посадить семян, чтобы с вероятностью 0,9 можно было бы ожидать, что не менее 100 посаженных семян взойдут? *Ответ: 133.*

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее восьми машин, а всего имеется их десять. Вероятность невыхода каждой автомашины на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы автобазы на ближайший день. *Ответ: 0,9298.*

2. Сколько раз надо подбросить игральный кубик, чтобы наивероятнейшее число выпадений двойки было равно 32? *Ответ: от 191 до 197.*

3. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,01. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{\text{в течение часа 5 абонентов позвонят на станцию}\};$

$B = \{\text{в течение часа не более 4 абонентов позвонят на станцию}\};$

$C = \{\text{в течение часа не менее 3 абонентов позвонят на станцию}\}.$

Ответ: 0,1563; 0,6289; 0,7619.

4. Вероятность изготовления доброкачественного изделия равна 0,9. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 300 изделий 95% окажется доброкачественными. *Ответ: 0,001.*

5. Контрольную работу по теории вероятностей успешно выполняют в среднем 70% студентов. Какова вероятность того, что из 200 студентов работу успешно выполнят: а)

150 студентов; б) не более 150 студентов; в) не менее 100 студентов? *Ответ: а) 0,019, б) 0,938, в) 1.*

6. Всхожесть семян данного сорта растений составляет 70%. Найти вероятность того, что из 700 посаженных семян число проросших будет заключено между 460 и 510. *Ответ: 0,944.*

Тема 6. «СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ»

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СПОСОБЫ ИХ ЗАДАНИЯ

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Закон распределения дискретной случайной величины и его формы.
2. Математические операции над дискретными случайными величинами.
3. Функция распределения и ее свойства.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Закон распределения дискретной случайной величины и его формы

0.1. Случайной величиной (СВ) называется переменная величина, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно (неизвестное заранее) значение из возможного множества своих значений.

Случайные величины обозначаются заглавными буквами латинского алфавита $X, Y, Z, \dots$, а их возможные значения – соответствующими малыми буквами, т.е. $x_1, x_2, \dots$ (для X), $y_1, y_2, \dots$ (для Y) и т.п.

0.2. Дискретной (прерывной) случайной величиной (ДСВ) называется случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные друг от друга, возможные значения с определенными вероятностями.

Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным (счетным).

0.3. Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Для дискретной случайной величины закон распределения можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

Простейшей формой задания закона распределения ДСВ X является таблица, в которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ и соответствующие им вероятности $p_1, p_2, \dots, p_n$:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Такая таблица называется **рядом распределения дискретной случайной величины**.

Контроль:
$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Ряд распределения дискретной случайной величины может быть изображен графически в виде **многоугольника** или **полигона распределения** вероятностей, который представляет собой ломаную с вершинами (x_i, p_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.

Математические операции над дискретными случайными величинами

Пусть даны две дискретные случайные величины:

- величина X , принимающая значения x_i с вероятностями $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$;
- величина Y , принимающая значения y_j с вероятностями $p_j = P\{Y = y_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m$.

0.4. Произведением дискретной случайной величины X на число C называется дискретная случайная величина CX , принимающая значения Cx_i с вероятностями $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

0.5. k -той степенью случайной величины X называется случайная величина X^k , принимающая значения x_i^k с вероятностями $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

0.6. Суммой (разностью, произведением) случайных величин X и Y называется случайная величина $X + Y$ ($X - Y$, $X \cdot Y$), принимающая значения $x_i + y_j$ ($x_i - y_j$, $x_i \cdot y_j$) с вероятностями

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\},$$

для $i = 1, 2, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, m$.

В случае совпадения некоторых сумм $x_i + y_j$ (разностей $x_i - y_j$, произведений $x_i \cdot y_j$) соответствующие вероятности складываются.

0.7. Две случайные величины называются **независимыми**, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое возможное значение приняла другая величина. В противном случае случайные величины называются **зависимыми**.

Если ДСВ X принимает значения x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а ДСВ Y принимает значения y_j ($j = 1, 2, \dots, m$), то независимость случайных величин X и Y означает независимость событий $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$ при любых $i = 1, 2, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, m$. В этом случае по теореме умножения вероятностей получим

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}.$$

0.8. Несколько случайных величин называются **взаимно независимыми**, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли остальные величины.

Функция распределения и ее свойства

Пусть X – случайная величина, а x – действительное число. Событие $\{X < x\}$ означает, что случайная величина X приняла значение, меньшее x . Вероятность этого события $P(X < x)$, зависит от x , т.е. является функцией от x .

0.9. Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого числа $x \in R$ вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция $F(x)$ так же называется **интегральной функцией распределения** или **интегральным законом распределения** случайной величины X .

Свойства функции распределения

Свойство 1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0; 1]$, т.е. $\boxed{0 \leq F(x) \leq 1}$.

Свойство 2. $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. $F(x_1) \leq F(x_2)$ при $x_1 \leq x_2$.

Из свойства 2 вытекают **следствия**:

- 1) Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в полуинтервале $[x_1; x_2)$, равна приращению интегральной функции на этом полуинтервале, т.е.

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

- 2) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение x , равна нулю: $P(X = x) = 0$.

Из следствий 1) и 2) вытекает, что для непрерывной случайной X справедливы равенства

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Свойство 3. Если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то

- 1) $F(x) = 0$ при $x \leq a$,
- 2) $F(x) = 1$ при $x \geq b$.

Следствие. Если возможные значения непрерывной случайной величины X расположены на всей оси x , то справедливы следующие предельные соотношения:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$

Зная ряд распределения ДСВ X , можно построить функцию распределения этой СВ.

Функция распределения $F(x)$ для ДСВ X , которая принимает значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$, может быть найдена по формуле $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$, где символ $x_i < x$ означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше x .

Графиком функции распределения дискретной случайной величины X является ступенчатая фигура, имеющая в точках x_i разрывы 1-го рода с соответствующей величиной скачка $p_i, i=1, 2, \dots, n$.

ЗАДАНИЯ

1. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	1	2	4	5	7
p	0,15	0,2	0,3	c	0,15

Найти вероятность c . Построить многоугольник распределения. *Ответ:* $c = 0,2$.

2. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее наудачу извлекли три шара. Найти:
 - а) ряд распределения дискретной случайной величины X – числа извлеченных белых шаров;
 - б) вероятность события $A = \{\text{извлечено не менее двух белых шаров}\}$.

Ответ: а)

X	0	1	2	3
p	1/35	12/35	18/35	4/35

; б) $p = 22/35$.

3. Произведены два выстрела с вероятностями попадания в цель, равными 0,4 и 0,3 соответственно. Составить закон распределения случайной величины X – общего числа попаданий в цель.

Ответ:

X	0	1	2
p	0,42	0,46	0,12

.

4. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

X	-2	1	2	3
p	0,08	0,4	0,32	0,2

. Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) вероятности событий $\{X < 2\}$, $\{1 \leq X < 3\}$ и $\{1 < X \leq 3\}$;

в) построить график функции $F(x)$.

Ответ: б) 0,48; 0,72; 0,52.

5. В урне 3 белых и 2 черных шара. Из нее последовательно вынимают шары до первого появления белого шара.

а) Найти закон распределения дискретной случайной величины X – числа извлеченных шаров.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Ответ: а)

X	1	2	3
p	0,6	0,3	0,1

, в) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 0,6, & 1 < x \leq 2 \\ 0,9, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$

6. Дискретная случайная величина X задана рядом

распределения:

X	-2	-1	1	2	3
p	0,2	0,25	0,3	0,15	0,1

. Построить ряды распределения случайных величин: а) $Y = 3X$; б) $Z = X^2$.

Ответ: а)

Y	-6	-3	3	6	9
p	0,2	0,25	0,3	0,15	0,1

 б)

Z	1	4	9
p	0,55	0,35	0,1

7. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и Y :

X	1	2	3
p	0,3	0,5	0,2

 и

Y	-2	-1
p	0,4	0,6

Построить ряды распределения случайных величин: а) $Z = X + Y$; б) $W = X \cdot Y$.

Ответ: а)

Z	-1	0	1	2
p	0,12	0,38	0,38	0,12

 б)

W	-6	-4	-3	-2	-1
p	0,08	0,2	0,12	0,42	0,18

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1,1	1,4	1,7	2	2,3
p	0,1	0,2	0,3	0,3	p_5

1) Найти вероятность p_5 .

2) Построить многоугольник распределения.

3) Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

4) Определить вероятности $P(X > 1,4)$, $P(1,4 \leq X < 2)$, $P(X \leq 1,7)$.

Ответ: 1) 0,1; 4) 0,7; 0,5; 0,6

2. Три стрелка, ведущие огонь по цели, сделали по одному выстрелу. Вероятности их попадания в цель соответственно равны 0,5, 0,6 и 0,8. Построить ряд распределения дискретной случайной величины X – числа попаданий в цель. Ответ:

X	0	1	2	3
p	0,04	0,26	0,46	0,24

3. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

X	-3	-1	0	1	3	5
p	0,05	0,2	0,25	0,3	0,15	0,05

Найти распределение случайной величины $Y = |X|$. Ответ:

Y	0	1	3	5
p	0,25	0,5	0,2	0,05

4. Построить ряды распределения для случайных величин $Z = X + Y$ и $W = X \cdot Y$, если X и

Y – независимые случайные величины, заданные рядами

X	0	1
p	0,3	0,7

 и

Y	2	3
p	0,4	0,6

.

Ответ:

Z	2	3	4
p	0,12	0,46	0,42

,

W	0	2	3
p	0,3	0,28	0,42

Тема 6. «СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ» НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СПОСОБЫ ИХ ЗАДАНИЯ

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Функция распределения непрерывной случайной величины.
2. Плотность распределения и ее свойства.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

0.1. Случайной величиной (СВ) называется переменная величина, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно (неизвестное заранее) значение из возможного множества своих значений.

Случайные величины обозначаются заглавными буквами латинского алфавита $X, Y, Z, \dots$, а их возможные значения – соответствующими малыми буквами, т.е. $x_1, x_2, \dots$ (для X), $y_1, y_2, \dots$ (для Y) и т.п.

0.2. Непрерывной случайной величиной (НСВ) называется случайная величина, которая принимает все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка числовой оси.

Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно (несчетно).

Функция распределения непрерывной случайной величины

Наиболее универсальным способом описания случайных величин (и дискретных, и непрерывных) является использование функции распределения.

Пусть X – случайная величина, а x – действительное число. Событие $\{X < x\}$ означает, что случайная величина X приняла значение, меньшее x . Вероятность этого события $P(X < x)$, зависит от x , т.е. является функцией от x .

0.3. Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого числа $x \in R$ вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция $F(x)$ так же называется **интегральной функцией распределения** или **интегральным законом распределения** случайной величины X .

Свойства функции распределения

Свойство 1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0;1]$, т.е. $0 \leq F(x) \leq 1$.

Свойство 2. $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. $F(x_1) \leq F(x_2)$ при $x_1 \leq x_2$.

Из свойства 2 вытекают **следствия**:

3) Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в полуинтервале $[x_1; x_2)$, равна приращению интегральной функции на этом полуинтервале, т.е.

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

4) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение x , равна нулю: $P(X = x) = 0$.

Из следствий 1) и 2) вытекает, что для непрерывной случайной X справедливы равенства

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Свойство 3. Если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то

$$1) F(x) = 0 \text{ при } x \leq a, \quad 2) F(x) = 1 \text{ при } x \geq b.$$

Следствие. Если возможные значения непрерывной случайной величины X расположены на всей оси x , то справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

0.4. Случайная величина X называется **непрерывной**, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

Плотность распределения и ее свойства

0.5. **Плотностью распределения** непрерывной случайной величины X называется функция $f(x)$, равная первой производной от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Другие названия функции $f(x)$: **плотность распределения вероятностей, плотность вероятностей, плотность, дифференциальная функция распределения, дифференциальный закон распределения.**

Свойства плотности распределения

Свойство 1. $f(x)$ – неотрицательная функция, т.е. $f(x) \geq 0$.

Свойство 2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал $(x_1; x_2)$ равна определенному интегралу от ее плотности распределения, взятому в пределах от x_1 до x_2 :

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Свойство 3. Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения непрерывной случайной величины равен 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

В частности, если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то $\int_a^b f(x) dx = 1$.

Связь между функцией и плотностью распределения непрерывной случайной величины

1) Если известна функция распределения $F(x)$, то плотность распределения $f(x)$ находится по формуле $f(x) = F'(x)$.

2) Если известна плотность распределения $f(x)$, то функция распределения $F(x)$ находится по формуле $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$.

ЗАДАНИЯ

1. При каких значениях параметров k и b функция $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ kx + b, & -1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$

является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины?

Ответ: $k = 1/3, b = 1/3$.

2. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ (x-2)^2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}. \text{ Найти:}$$

- 1) вероятности того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее 2,5, и не меньшее 3;
- 2) вероятности попадания случайной величины X в интервал $(2,5; 3,5)$ и полуинтервал $[1; 2,5)$;
- 3) плотность распределения $f(x)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Ответ: 1) 0,25; 1; 2) 0,75; 0,25; 3) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 2x - 4, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$.

3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \frac{3}{2} \sin 3x$ в интервале $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти вероятность

того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$. Ответ: $\sqrt{2}/4$.

4. Найти функцию распределения непрерывной случайной величины X , плотность распределения которой определена формулой $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ($-\infty < x < +\infty$).

Ответ: $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$.

5. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}. \text{ Найти функцию распределения } F(x).$$

Ответ: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 - x}{2}, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$.

5. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана в интервале $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ функцией $f(x) = c \sin 4x$. Вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр c .
Ответ: $c = 2$.

6. Плотность распределения непрерывной случайной величины X на всей оси Ox задана равенством $f(x) = \frac{4c}{e^x + e^{-x}}$. Найти постоянный параметр c . *Ответ:* $c = 1/(2\pi)$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ bx, & 0 \leq x < 5,8 \\ 0, & x \geq 5,8 \end{cases}$$

- 1) Определить постоянную b .
- 2) Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.
- 3) Вычислить вероятности $P(X < 3,3)$ и $P(3,3 < X < 7,8)$.

Ответ: 1) $b = 50/841$; 2) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{25x^2}{841}, & 0 \leq x < 5,8 \\ 1, & x \geq 5,8 \end{cases}$; 3) $0,324$; $0,676$.

2. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -a \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

Требуется найти:

- а) плотность вероятности $f(x)$;
- б) коэффициент a ;
- в) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\pi/4; \pi/3)$.

Ответ: $a = 1/2$

3. Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$

Найти функцию распределения вероятностей $F(x)$ и построить ее график.

Тема 7. «ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН»

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Математическое ожидание и его свойства.
2. Дисперсия и ее свойства. Среднее квадратическое отклонение.

3. Моменты случайных величин.
4. Мода и медиана.
5. Асимметрия и эксцесс.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Математическое ожидание

Пусть дискретная случайная величина X с конечным множеством значений задана законом распределения:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

0.1. Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (1)$$

Пусть непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$.

0.2. Математическим ожиданием $M(X)$ непрерывной случайной величины X , возможные значения которой принадлежат отрезку $[a; b]$, называется число, определяемое равенством

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx.$$

Если значения непрерывной случайной величины X принадлежат всей числовой оси, то математическое ожидание определяется формулой $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$, в которой предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой величине: $M(C) = C$.
2. Постоянный множитель можно за знак математического ожидания: $M(CX) = C \cdot M(X)$.
3. Математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий: $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.
4. Математическое ожидание произведения конечного числа взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.
5. Математическое ожидание отклонения случайной величины X равно 0: $M(X - M(X)) = 0$.

Дисперсия. Среднее квадратическое отклонение

0.3. Дисперсией (рассеянием) $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от своего математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

1. Если X – ДСВ, то $D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$

2. Если X – НСВ, то

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx \quad \text{или} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx$$

Т.1. (вычисление дисперсии)

Дисперсия $D(X)$ равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания: $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины C равна 0: $D(C) = 0$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его при этом в квадрат:

$$D(CX) = C^2 \cdot D(X).$$

3. Дисперсия алгебраической суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

4. Дисперсия суммы постоянной величины C и случайной величины X равна дисперсии случайной величины X : $D(C + X) = D(X)$

0.4. Средним квадратическим отклонением или стандартным отклонением $\sigma(X)$ случайной величины X называется квадратный корень из ее дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Моменты случайных величин

0.5. Начальным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени этой величины: $\alpha_k = M(X^k)$.

1. Если X – ДСВ, то $\alpha_k = \sum_i x_i^k \cdot p_i$

2. Если X – НСВ, то $\alpha_k = \int_a^b x^k \cdot f(x) dx$ или $\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) dx$

В частности, $\alpha_1 = M(X)$ и $\alpha_2 = M(X^2)$.

Пользуясь этими моментами, формулу для вычисления дисперсии $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$, можно записать в виде $D(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2$.

0.6. Центральным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени отклонения этой величины: $\beta_k = M(X - M(X))^k$.

1. Если X – ДСВ, то
$$\beta_k = \sum_i (x_i - M(X))^k \cdot p_i$$

2. Если X – НСВ, то
$$\beta_k = \int_a^b (x - M(X))^k \cdot f(x) dx \quad \text{или} \quad \beta_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k \cdot f(x) dx$$

В частности, $\beta_1 = M(X - M(X)) = 0$, $\beta_2 = M(X - M(X))^2 = D(X) \Rightarrow D(X) = \beta_2$.

Центральные моменты β_k могут быть выражены через начальные моменты α_k по формулам:

$$\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2, \quad \beta_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3, \quad \beta_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4;$$

и так далее.

Мода и медиана

0.7. Модой M_0 дискретной случайной величины X называется ее наиболее вероятное значение x_0 :

$$M_0 = x_0, \text{ где } P(X = x_0) = \max\{p_i\}.$$

0.8. Модой M_0 непрерывной случайной величины X называется такое ее значение x_0 , в котором плотность распределения $f(x)$ максимальна: $M_0 = x_0$, где $f(x_0) = \max f(x)$.

0.9. Медианой M_e непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, для которого $P(X < M_e) = P(X > M_e) = 1/2$, то есть одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше M_e .

Асимметрия и эксцесс

0.10. Коэффициентом асимметрии («скошенности») A случайной величины X называется отношение центрального момента 3-го порядка к кубу среднего квадратического отклонения: $A = \frac{\beta_3}{\sigma^3(X)}$.

Если $A > 0$, то кривая распределения случайной величины X более пологая справа от моды M_0 .

Если $A < 0$, то кривая распределения случайной величины X более пологая слева от моды M_0 .

0.11. Коэффициентом эксцесса («островершинности») E случайной величины X называется величина
$$E = \frac{\beta_4}{\sigma^4(X)} - 3.$$

Величина E характеризует островершинность или плосковершинность распределения. Для нормального распределения $A = 0$ и $E = 0$.

Остальные распределения сравнивают с нормальным:

- если $E > 0$ – более островершинные распределения,
- если $E < 0$ – более плосковершинные распределения.

ЗАДАНИЯ

1. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X соответственно равны $7/2$ и $35/12$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $3X + 2$.
Ответ: 12,5; 105/4.

2. Случайные величины X и Y независимы, причем $D(X) = 2$, $D(Y) = 6$, $M(X) = 3$, $M(Y) = 1$. Найти $M(Z)$ и $D(Z)$, если $Z = 12X - 3Y + 1$. *Ответ:* 34; 342.

3. Задан ряд распределения дискретной случайной величины X :

X	2	3	5	6	7	10
p	0,4	0,2	0,2	0,05	0,1	0,05

Найти:

- числовые характеристики случайной величины X : $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$;
- начальный момент третьего порядка случайной величины X ;
- моду случайной величины X .

Ответ: а) $M(X) = 3,9$; $D(X) = 4,89$; $\sigma(X) = 2,21$; б) $\alpha_3 = 128,7$; в) $M_0 = 2$ ($p = 0,4$).

4. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

X	2	4	6	8
p	0,4	0,2	0,1	a

и

Y	0	1	2
p	0,5	0,2	b

Найти:

- параметры a и b ;
- математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 2X + 3Y$.

Ответ: а) $a = 0,3$; $b = 0,3$; б) $M(Z) = 11,6$; $D(Z) = 32,6$.

5. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято 2 детали. Найти числовые характеристики дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей в выборке. *Ответ:* $M(X) = 8/5$; $D(X) = 64/225$; $\sigma(X) = 8/15$.

6. Дискретная случайная величина X задана законом распределения
$$\begin{array}{c|c|c} X & 1 & 2 \\ \hline p & 0,4 & 0,6 \end{array}$$
. Найти:

- центральные моменты 1-го, 2-го и 3-го порядков;
- асимметрию и эксцесс случайной величины X .

Ответ: а) 0; 0,24; -0,048 б) -0,408; 1,166

7. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x, & 0 < x \leq 1. \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Найти числовые характеристики случайной величины X . *Ответ:* $M(X) = 2/3$; $D(X) = 1/18$; $\sigma(X) = 0,24$.

8. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ 0,2(x+2), & -2 < x \leq 3. \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Найти числовые характеристики случайной величины X . *Ответ:* $M(X) = 0,5$; $D(X) = 2,083$; $\sigma(X) = 1,443$.

9. Найти начальный и центральный моменты второго порядка непрерывной случайной величины X , заданной плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 3x^2, & 0 < x \leq 1. \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Ответ: $\alpha_2 = 3/5$, $\beta_2 = 3/80$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Найти числовые характеристики дискретной случайной величины X , заданной законом распределения

X	-0,1	0	0,1	0,4
p	0,3	0,15	0,3	0,25

Ответ: $M(X) = 0,1$, $D(X) = 0,036$, $\sigma(X) = 0,19$.

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	2	3
p	0,4	0,6

Найти начальные и центральные моменты 1-го, 2-го и 3-го порядков случайной величины X .

Ответ: $\alpha_1 = 2,6$, $\alpha_2 = 7$, $\alpha_3 = 19,4$; $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0,24$, $\beta_3 = -17,624$.

3. Пусть X и Y – независимые дискретные величины, причем $M(X) = 2$, $M(Y) = -3$, $D(X) = 2$, $D(Y) = 9$. Найти $M(Z)$ и $D(Z)$, если $Z = 5X - 3Y + 2$. *Ответ:* $M(Z) = 21$, $D(Z) = 131$.

4. Случайная величина задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 1. \\ 1, & x > 1 \end{cases}$. Найти

числовые характеристики случайной величины X . Вычислить начальные и центральные моменты 1-го, 2-го и 3-го порядков. *Ответ:* $\alpha_1 = M(X) = 3/4$, $\beta_2 = D(X) = 3/80$, $\sigma(X) = 0,19$, $\alpha_2 = 0,6$, $\alpha_3 = 0,5$, $\beta_1 = 0$, $\beta_3 = 1/160$.

Тема 8. «ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН» ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Биномиальное распределение.
2. Пуассоновское распределение.
3. Геометрическое распределение.
4. Гипергеометрическое распределение.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Биномиальное распределение

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Вероятность наступления события A во всех испытаниях постоянна и равна p , вероятность не появления события A есть $q = 1 - p$.

Дискретная случайная величина X – число появлений события A в этих испытаниях.

Возможные значения случайной величины X : $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n$.

Вероятности появления каждого из этих значений в силу независимости испытаний определяются по **формуле Бернулли**: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Биномиальный закон распределения:

X	0	1	2	...	k	...	n
p	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Т.1. (числовые характеристики биномиального распределения)

Если дискретная случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p , то ее математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ могут быть найдены по формулам:

$$M(X) = np \quad \text{и} \quad D(X) = npq$$

Пуассоновское распределение

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться или не появиться. Вероятность появления события A во всех испытаниях постоянна и равна p . Пусть число проведенных испытаний n велико ($n \rightarrow \infty$), а вероятность p очень мала ($p \leq 0,1$ и $p \rightarrow 0$), причем произведение np сохраняет постоянное значение, т.е. $np = a$.

Дискретная случайная величина X – число появлений события A в этих испытаниях.

Возможные значения случайной величины X : $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n$.

Вероятности появления каждого из этих значений определяются по **формуле**

Пуассона: $P_n(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$, где $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Пуассоновский закон распределения:

X	0	1	2	...	k	...	n
p	e^{-a}	ae^{-a}	$\frac{a^2}{2}e^{-a}$	...	$\frac{a^k}{k!}e^{-a}$	...	$\frac{a^n}{n!}e^{-a}$

Т.2.(числовые характеристики пуассоновского распределения)

Если дискретная случайная величина X имеет пуассоновское распределение с параметром a , то ее математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ могут быть найдены по формуле

$$M(X) = D(X) = a.$$

Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и равна p . Следовательно, вероятность не появления события A есть $q = 1 - p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A .

Дискретная случайная величина X – число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A .

Возможные значения случайной величины X : $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \dots$

Вероятности появления каждого из этих значений по теореме умножения вероятностей независимых событий находятся по формуле $p_k = q^{k-1}p$, где $k = 1, 2, 3, \dots$

Геометрический закон распределения:

X	1	2	3	...	k	...
p	p	qp	q^2p	...	$q^{k-1}p$	...

Т.3. (числовые характеристики геометрического распределения)

Если дискретная случайная величина X имеет геометрическое распределение, то ее математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ могут быть найдены по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{p} \quad \text{и} \quad D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Гипергеометрическое распределение

Пусть имеется N элементов, среди которых M элементов обладают свойством A . Случайно отбираются n элементов (каждый элемент может быть извлечен с одинаковой вероятностью), причем отобранный элемент перед отбором следующего не возвращается в искомое множество.

Дискретная случайная величина X – число элементов, обладающих свойством A , среди n взятых.

Возможные значения случайной величины X : $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n$.

Вероятности появления каждого из этих значений определяются по формуле

$$p_k = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Гипергеометрический закон распределения:

X	0	1	2	...	...	n
p	$\frac{C_M^0 \cdot C_{N-M}^n}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1 \cdot C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^2 \cdot C_{N-M}^{n-2}}{C_N^n}$	...	...	$\frac{C_M^n \cdot C_{N-M}^0}{C_N^n}$

Т.4. (числовые характеристики гипергеометрического распределения)

Если дискретная случайная величина X имеет геометрическое распределение, то ее математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ могут быть найдены по формулам:

$$\boxed{M(X) = \frac{n \cdot M}{N}} \text{ и } \boxed{D(X) = \frac{nM}{N-1} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(1 - \frac{n}{N}\right)}.$$

ЗАДАНИЯ

1. Вероятность того, что аудитор допустит ошибку при проверке бухгалтерского баланса, равна 0,05. Аудитору на заключение представлены 2 баланса. Составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа правильных заключений на проверяемые балансы. *Ответ:*

X	0	1	2
p	0,0025	0,095	0,9025

, $M(X) = 1,9; D(X) = 0,095; \sigma(X) = 0,31$.

2. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобрали 4 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных. Найти числовые характеристики и построить многоугольник распределения случайной величины X . *Ответ:*

X	0	1	2	3	4
p	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

; $M(X) = 0,4; D(X) = 0,36; \sigma(X) = 0,6$.

3. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Составить закон распределения и найти числовые характеристики дискретной случайной величины X – числа отказавших элементов в течение года. *Ответ:* $P_{1000}(\kappa) \approx \frac{1}{\kappa!} e^{-1} (\kappa = 0, 1, 2, \dots)$; $M(X) = D(X) = \sigma(X) = 1$.

4. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,01. Найти вероятности следующих событий:

- а) в течение часа 5 абонентов позвонят на станцию;
- б) в течение часа не более 4 абонентов позвонят на станцию;
- в) в течение часа не менее 3 абонентов позвонят на станцию.

Ответ: а) 0,1563; б) 0,6289; в) 0,7619.

5. Вероятность поражения цели равна 0,05. Производится стрельба до первого попадания. Составить закон распределения и найти числовые характеристики дискретной случайной величины X – числа сделанных выстрелов. Определить вероятность того, что для поражения цели потребуется не менее 5 выстрелов. *Ответ:* $p_{\kappa} = 0,05 \cdot 0,95^{\kappa-1} (\kappa = 1, 2, 3, \dots)$; $M(X) = 20$; $D(X) = 380$; $\sigma(X) = 19,49$; $P(X \geq 5) = 0,8145$.

6. Проводится бросание игральной кости до первого выпадения шести очков. Составить закон распределения и найти числовые характеристики дискретной случайной величины X – числа бросаний игральной кости. *Ответ:*

$$p_{\kappa} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{\kappa-1} (\kappa = 1, 2, 3, \dots); M(X) = 6; D(X) = 30; \sigma(X) = 5,48.$$

7. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее наудачу извлекли 3 шара. Найти закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа извлеченных белых шаров. *Ответ:*

X	0	1	2	3
p	1/35	12/35	18/35	4/35

, $M(X) = 12/7$;
 $D(X) = 24/49$; $\sigma(X) = 0,7$.

8. В магазине имеются 20 телевизоров, из них 7 имеют дефекты. Составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа телевизоров с дефектами среди выбранных наудачу пяти. *Ответ:*

X	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1287}{15504}$	$\frac{5005}{15504}$	$\frac{6006}{15504}$	$\frac{2730}{15504}$	$\frac{455}{15504}$	$\frac{21}{15504}$

, $M(X)=1,75$; $D(X)=0,898$,
 $\sigma(X)=0,948$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Игральная кость брошена 3 раза. Составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа появлений шестерки. *Ответ:* $M(X)=1/2, D(X)=5/12, \sigma(X)=0,65$.
2. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг. Составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа бракованных книг в тираже. *Ответ:* $P_{100000}(5)=0,0375, M(X)=D(X)=10, \sigma(X)=3,2$.
3. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0,9. Требуется составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту. *Ответ:* $M(X)=10, D(X)=90, \sigma(X)=9,49$.
4. Среди 10 лотерейных билетов имеется 4 билета с выигрышем. Наудачу покупают 2 билета. Составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа выигрышных билетов среди купленных. *Ответ:* $M(X)=4/5, D(X)=32/75, \sigma(X)=0,65$.

Тема 8. «ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН» ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Равномерное распределение.
2. Показательное распределение.
3. Нормальное распределение.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Равномерное распределение

0.1. Непрерывная случайная величина X имеет **равномерное распределение** на отрезке $[a;b]$, если ее плотность распределения $f(x)$ постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Функция распределения для равномерно распределенной НСВ X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

T.1. Если случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a;b]$, то:

1) математическое ожидание и дисперсия находятся по формулам:

$$M(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(x_1; x_2) \subset [a;b]$

находится по формуле $P(x_1 < x < x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b - a}$

Показательное распределение

0.2. Непрерывная случайная величина X имеет **показательное (экспоненциальное) распределение**, если ее плотность распределения задается в виде $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$, где $\lambda > 0$ – параметр распределения.

Функция распределения для показательно распределенной НСВ X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

T.2. Если случайная величина X имеет показательное распределение, то:

1) математическое ожидание и дисперсия находятся по формулам: $M(X) = \frac{1}{\lambda}$ и

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

2) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(x_1; x_2)$ находится по формуле $P(x_1 < X < x_2) = e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}$

Нормальное распределение

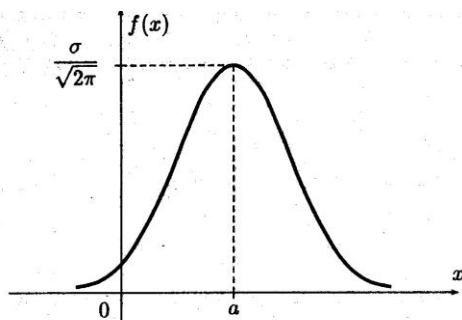
0.3. Непрерывная случайная величина X имеет **нормальное распределение**, если ее плотность распределения задается в виде $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a и σ – параметры распределения.

Если $a = 0$ и $\sigma = 1$, то нормальное распределение с такими параметрами называется **стандартным**. Плотность распределения стандартной случайной величины имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ т.е. является функцией Гаусса.}$$

T.3. (вероятностный смысл параметров нормального распределения)

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X , распределенной по нормальному закону, равно параметру a этого закона, то есть $M(X) = a$, а ее среднее квадратическое отклонение – параметру σ , то есть $\sigma(X) = \sigma$.



0.4. График плотности нормального распределения называется **нормальной кривой (кривой Гаусса)**.

Вывод: параметр a (математическое ожидание) характеризует положение, а параметр σ (среднее квадратическое отклонение) – форму нормальной кривой.

T.4. Функция распределения непрерывной случайной величины X , распределенной по нормальному закону, выражается через функцию Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ по

формуле $F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$.

T.5. (вероятность попадания случайной величины в заданный интервал)

Вероятность попадания случайной величины X , распределенной по нормальному закону, в интервал $(x_1; x_2)$ определяется по формуле

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$

T.6. (вероятность заданного отклонения)

Вероятность того, что отклонение случайной величины X , распределенной по нормальному закону, от математического ожидания a по абсолютной величине меньше

заданного числа $\varepsilon > 0$, определяется по формуле $P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$.

«Правило трех сигм»: если случайная величина X имеет нормальное распределение, то с вероятностью, близкой к 1, все значения случайной величины X заключены в интервале $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$.

ЗАДАНИЯ

- Автобусы подходят к остановке с интервалом в 5 минут. Считая, что случайная величина X – время ожидания автобуса – распределена равномерно, найти:
 - плотность распределения;
 - функцию распределения;
 - среднее время ожидания.

Ответ: 1) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/5, & 0 \leq x \leq 5 \\ 0, & x > 5 \end{cases}$; 2) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/5, & 0 \leq x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$; 3) 2,5 мин.

- Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого числа. Полагая, что при отсчете ошибка округления распределена по равномерному закону, найти:
 - числовые характеристики этой случайной величины;
 - вероятность того, что ошибка округления меньше 0,04;
 - вероятность того, что ошибка округления больше 0,05.

Ответ: 1) $M(X) = 0,1$; $D(X) = 0,0033$; $\sigma(X) = 0,0577$; 2) 0,4; 3) 0,5.

- Плотность распределения непрерывной случайной величины, имеющей показательное распределение, задается в виде $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Ce^{-0,1x}, & x \geq 0 \end{cases}$. Найти:
 - параметр C ;
 - числовые характеристики случайной величины X ;
 - вероятность попадания случайной величины X в интервал $(4; 10)$.

Ответ: 1) $C = 0,1$; 2) $M(X) = 10$; $D(X) = 100$; $\sigma(X) = 10$; 3) 0,3.

- Среднее время безотказной работы прибора равно 80 часов. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти:
 - выражение его плотности вероятности и функции распределения;
 - вероятность того, что в течение 100 часов прибор не выйдет из строя.

Ответ: 1) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,0125e^{-0,0125x}, & x \geq 0 \end{cases}$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-0,0125x}, & x \geq 0 \end{cases}$; 2) 0,2865.

- Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X) = 10$, $D(X) = 4$.
 - Записать плотность распределения и функцию распределения случайной величины X .
 - Найти вероятности $P(12 < X < 14)$ и $P(8 < X < 12)$.

Ответ: 1) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$; $F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-10}{2}\right)$; 2) 0,135905; 0,68269.

6. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X) = 10$. Найти

$P(0 < X < 10)$, если известно, что $P(10 < X < 20) = 0,3$. Ответ: 0,3.

7. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a = 375$ г и $\sigma = 25$ г. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет:

- 1) от 300 до 425 г;
- 2) не более 450 г;
- 3) больше 300 г.

Ответ: 1) 0,9759; 2) 0,9987; 3) 0,9987.

8. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону распределения с параметром $\sigma = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей 15 мм. Ответ: 0,866386.

9. Станок-автомат изготавливает валики, контролируя их диаметры X . Считая, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 10$ мм и $\sigma = 0,1$ мм, найти интервал, в котором с вероятностью 0,95 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

Ответ: (9,804; 10,196).

10. В результате проверки точности работы прибора установлено, что 80% ошибок не вышло за пределы ± 20 мм, а остальные ошибки вышли за эти пределы. Определите среднее квадратическое отклонение ошибок прибора, если известно, что систематических ошибок прибор не дает, а случайные ошибки распределены по нормальному закону. Ответ: 15,6.

11. Случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ мм. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет X в результате испытания.

Ответ: 30 мм.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Паром для перевозки автомашин через залив подходит к причалу через каждые два часа. Считая, что время прибытия автомашин – случайная величина X – распределена равномерно, найти: а) плотность вероятности $f(x)$; б) функцию распределения $F(x)$; в) среднее время ожидания автомашиной прихода парома; г) дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания. Ответ: $M(X) = 1$ ч., $D(X) = 1/3$ ч²., $\sigma(X) = 0,58$ ч.

2. Случайная величина X , имеющая показательное распределение, задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-0,4x}, & x > 0. \end{cases}$ Найти: а) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X ; б) вероятность

попадания случайной величины X в интервал $(2;5)$. *Ответ:* а) $M(X)=2,5$, $\sigma(X)=2,5$; б) $0,314$.

3. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 15, и средним квадратическим отклонением, равным 2. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,954 попадет случайная величина X . *Ответ:* (11; 19).
4. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины – количества сыра, используемого для изготовления 100 бутербродов, равно 1 кг. Известно, что с вероятностью 0,96 расход сыра на изготовление 100 бутербродов составляет от 900 до 1100 г. Определить среднее квадратическое отклонение расхода сыра на 100 бутербродов. *Ответ:* $\sigma = 48,8$ г.
5. На станке изготавливаются втулки. Длина l втулки представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, которая имеет среднее значение $l_{cp} = 20$ см и дисперсию $D(l) = 0,04$ см². Найти вероятность того, что длина втулки заключена между 19,7 и 20,3 см, т.е. отклонение в ту или иную сторону не превзойдет 0,3 см. Какую длину можно гарантировать с вероятностью $p = 0,95$? *Ответ:* 1) 0,87; 2) 20 ± 4 см.

Тема 9. «ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие о законе больших чисел. Неравенства Маркова и Чебышева.
2. Теорема Чебышева.
3. Теоремы Бернулли и Пуассона.
4. Центральная предельная теорема.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Т.1. (неравенство Чебышева).

Если случайная величина X имеет математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо **неравенство Чебышева**

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева можно записать и в другой форме

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева применимо для любых случайных величин.

Т. 2. (неравенство Маркова)

Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения и имеет математическое ожидание $M(X)$, то для любого числа $A > 0$ верно **неравенство Маркова**

$$P(X \geq A) \leq \frac{M(X)}{A}.$$

Неравенство Маркова можно записать в другой форме $P(X < A) \geq 1 - \frac{M(X)}{A}$.

Неравенство Маркова применимо к любым неотрицательным случайным величинам.

Т.3. (теорема Чебышева)

Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – попарно независимые случайные величины, дисперсии которых равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то, как бы ни было мало число $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства $\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) \right| < \varepsilon$ будет как угодно близка к единице, если число n случайных величин достаточно велико, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) \right| < \varepsilon\right) = 1.$$

При этом справедливо неравенство $P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) \right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n \cdot \varepsilon^2}.$

Т.4. (частный случай теоремы Чебышева)

Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – попарно независимые случайные величины, имеющие одинаковые математические ожидания, равные a , и равномерно ограниченные дисперсии, не превышающие постоянного числа C , то, как бы ни было мало число $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства $\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a \right| < \varepsilon$ будет как угодно близка к единице, если число n случайных

величин достаточно велико, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a \right| < \varepsilon\right) = 1.$

При этом справедливо неравенство $P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a \right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n \cdot \varepsilon^2}.$

Т.5. (теорема Бернулли)

Пусть m – число наступлений события A в n независимых испытаниях и p – вероятность наступления события A в каждом испытании. Тогда, как бы ни было мало число $\varepsilon > 0$, имеет место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon\right) = 1$, т.е. относительная частота появления события A как угодно близка к вероятности события A .

Т.6. (теорема Пуассона)

Пусть m – число наступлений события A в n независимых испытаниях и $p_1, p_2, \dots, p_n$ – вероятности наступления события A в каждом из этих испытаний соответственно. Тогда,

как бы ни было мало число $\varepsilon > 0$, имеет место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right| < \varepsilon\right) = 1$, т.е. относительная частота появления события A как угодно близка к среднему арифметическому вероятностей события A .

Центральная предельная теорема (ЦПТ) – группа теорем, устанавливающих связь между законом распределения суммы случайных величин и его предельной формой – нормальным законом распределения.

Т.7. (ЦПТ для одинаково распределенных слагаемых)

Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – попарно независимые случайные величины, имеющие одно и тоже распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 , то при увеличении n закон распределения суммы $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ неограниченно приближается к нормальному.

Т.8. (теорема Ляпунова)

Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – попарно независимые случайные величины, имеющие математические ожидания $M(X_i) = a_i$, дисперсии $D(X_i) = \sigma_i^2$, абсолютный центральный момент третьего порядка $M(|X_i - a_i|^3) = m_i$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)^{3/2}} = 0$, то закон распределения суммы $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ при $n \rightarrow \infty$ неограниченно приближается к нормальному с математическим ожиданием $\sum_{i=1}^n a_i$ и дисперсией $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

ЗАДАНИЯ

1. Среднее число молодых специалистов, ежегодно направляемых в аспирантуру, составляет 200 человек. Оценить вероятность того, что в данном году будет направлено в аспирантуру не более 220 молодых специалистов. *Ответ: $P \geq 0,0909$.*
2. Оценить вероятность того, что при 3600 независимых подбрасываниях игрального кубика число появлений 6 очков будет не меньше 900. *Ответ: $P \leq 2/3$.*
3. Случайная величина X имеет дисперсию $D(X) = 0,001$. Какова вероятность того, что случайная величина X отличается от математического ожидания $M(X)$ более, чем на 0,1? *Ответ: $P \leq 0,1$.*
4. Вероятность появления события A в каждом из 150 проведенных испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что число X появлений события A будет заключено в пределах от 110 до 130. *Ответ: $P \geq 0,76$.*

5. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Всего было куплено 100 билетов. Найти вероятность того, что количество выигравших билетов будет заключено в пределах от 15 до 25. *Ответ: $P \geq 0,36$.*
6. Для случайной величины X известна дисперсия $D(X) = 0,01$ и имеет место неравенство $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0,96$. Найти значение ε . *Ответ: $P \geq 0,5$.*
7. В результате проведения 100 независимых испытаний получены случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ с равными математическими ожиданиями $M(X_i) = a = 30$ и равными дисперсиями $D(X_i) = 11$. Найти вероятность того, что среднее арифметическое этих случайных величин отклонится по абсолютной величине от математического ожидания $a = 30$ на величину, меньшую 0,5. *Ответ: $P \geq 0,56$.*
8. Определить, сколько надо произвести замеров поперечного сечения деревьев на большом участке, чтобы средний диаметр деревьев отличался от истинного значения a не более, чем на 2 см с вероятностью не меньшей 0,95. Среднее квадратическое отклонение поперечного сечения деревьев не превышает 10 см и измерения проводятся без ошибок. *Ответ: 500.*

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Средний срок службы прибора 10 лет. Оценить вероятность того, что данный прибор не прослужит более 15 лет. *Ответ: $P \geq 1/3$*
2. Случайная величина X имеет дисперсию $D(X) = 0,004$. Найти вероятность того, что случайная величина X отличается от $M(X)$ более чем на 0,2. *Ответ: $P \leq 0,1$*
3. Для случайной величины X известна дисперсия $D(X) = 0,009$ и неравенство $P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq 0,1$. Найти число ε . *Ответ: $\varepsilon \geq 0,3$*
4. Всхожесть семян некоторой культуры равна 0,75. Оценить вероятность того, что из посеянных 1000 семян число взошедших семян окажется от 700 до 800 включительно. *Ответ: $P \geq 0,925$*
Указание: $M(X) = a = 1000 \cdot 0,75 = 750$.

5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	2	3	4	5
p	0,1	0,15	0,3	0,25	0,2

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 1,5$. *Ответ: $P \geq 0,6$*

6. Вероятность появления события A в каждом из 150 проведенных испытаний равна 0,6. Найти вероятность того, что число X появлений события A будет заключено в пределах от 80 до 100. *Ответ: $P \geq 0,64$.*
7. В результате проведения 600 независимых испытаний получены случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_{600}$ с равными математическими ожиданиями $M(X_i) = a = 80$ и равными дисперсиями $D(X_i) = 54$. Найти вероятность того, что среднее

арифметическое этих случайных величин отклонится по абсолютной величине от математического ожидания $a = 80$ на величину, меньшую 1,5. *Ответ: $P \geq 0,96$.*

Темы 1-2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

ТОЧЕЧНОЕ И ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ.

Цель: в результате изучения данной темы студент должен быть способен осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных задач.

Оборудование: листы заданий для аудиторной работы, карточки с ИЗ, калькуляторы.

Форма проведения: занятие – практикум, включающий в себя следующие этапы: актуализация теоретических знаний, пробное решение несколькими студентами заданий у доски, самостоятельная работа студентов, контроль преподавателем индивидуальных заданий (ИЗ) студентов, выполненных самостоятельно.

Форма контроля: проверка выполнения ИЗ -1.

Основные формулы

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i x_i}{n} \quad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i \cdot x_i^2}{n} \quad D_B = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \cdot (x_i - \bar{x}_B)^2}{n} \quad s^2 = \frac{n}{n-1} D_B$$

$$Me = X_{Me} + h_{Me} \frac{0,5 \sum n - n_{Me-1}^{нак}}{n_{Me}}$$

$$M_0 = X_{M_0} + h_{M_0} \cdot \frac{n_{M_0} - n_{M_0-1}}{2n_{M_0} - n_{M_0-1} - n_{M_0+1}}$$

Решение типового варианта

1. Был вычислен процент выполнения плана 100 рабочими в этом году по отношению к прошедшему. Данные имеют следующий вид: 97,8; 97; 98,8; 101; 102,4; 103,21; 103,6; 105,2; 105,6; 105,6; 106,3; 106,4; 106,4; 106,8; 108,9; 109,5; 109,8; 110,3; 111,5; 111,8; 111,9; 112; 112,3; 112,3; 112,4; 112,5; 112,6; 112,8; 112,8; 113,1; 113,2; 113,5; 113,6; 114,1; 115,2; 115,3; 115,6; 116,7; 116,9; 117,2; 117,4; 118,4; 118,5; 118,6; 118,9; 118,9; 119,1; 119,2; 119,8; 119,9; 120,0; 121,1; 121,2; 121,3; 121,5; 121,8; 121,9; 122,3; 122,5; 122,6; 122,6; 122,8; 122,9; 123,1; 123,2; 123,2; 123,5; 123,7; 123,9; 124,0; 124,3; 124,3; 124,5; 124,6; 124,8; 124,9; 125,2; 125,6; 125,7; 126,3; 126,7; 126,8; 126,9; 127,2; 127,9; 128,5; 128,9; 129,3; 130,3; 130,5; 130,7; 131,8; 131,9; 132,5; 133,8; 134,7; 135,4; 135,9; 140,6; 141,0.

В этом примере признаком является выработка в отчетном году в процентах к предыдущему. Объединим данные в группы. Согласно формуле Стерджесса $m = 1 + 3,322 \lg n = 7,644 \approx 8$, следовательно:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3.322 \cdot \lg n} = \frac{141 - 97,8}{8} = 5,4$$

Примем $h=6$. За начало первого интервала рекомендуется взять величину

$$a_1 = x_{\min} - h/2 = 97 - 6/2 = 94$$

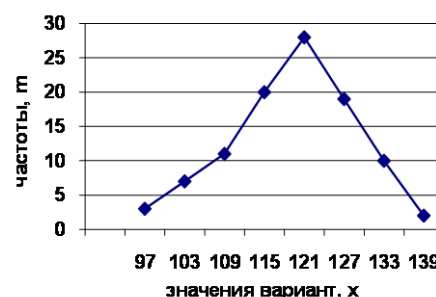
Сгруппированные данные представим в таблице, где в интервал включаются данные, большие или равные нижней границе интервала и меньшие верхней границы:

x_i	94-100	100-106	106-112	112-118	118-124	124-130	130-136	136-142
n_i	3	7	11	20	28	19	10	2

Построим полигон для данного интервального вариационного ряда. Полигон строится, как правило для дискретных вариационных рядов. Для построения полигона для вариационного ряда поступим следующим образом: найдем середины каждого интервала и поставим в соответствие им частоты для данного интервала.

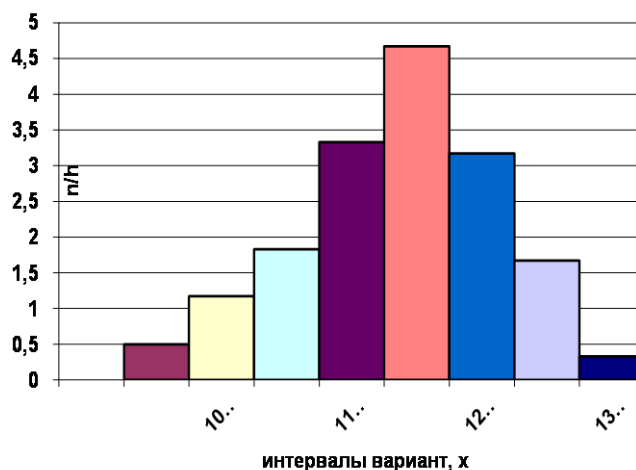
x_i	97	103	109	115	121	127	133	139
n_i	3	7	11	20	28	19	10	2

Полигон частот



Построим гистограмму. Для этого необходимы значения вариант и плотности частоты n_i/h . Для удобства построения гистограммы сначала заполним таблицу:

Гистограмма интервального ряда



x_i	94-100	100-106	106-112	112-118	118-124	124-130	130-136	136-142
n_i/h	0,5	1,17	1,83	3,33	4,67	3,17	1,67	0,33

Для построения кумуляты необходимы варианты и накопленные частоты. Построим таблицу:

x_i	94-100	100-106	106-112	112-118	118-124	124-130	130-136	136-142
$n_i^{\text{накоп}}$	3	10	21	41	69	88	98	100

Кумулята имеет следующий вид:



Найдем моду
способами:

двумя

1. По формуле: $M_0 = X_{M_0} + h_{M_0} \cdot \frac{n_{M_0} - n_{M_0-1}}{2n_{M_0} - n_{M_0-1} - n_{M_0+1}}$

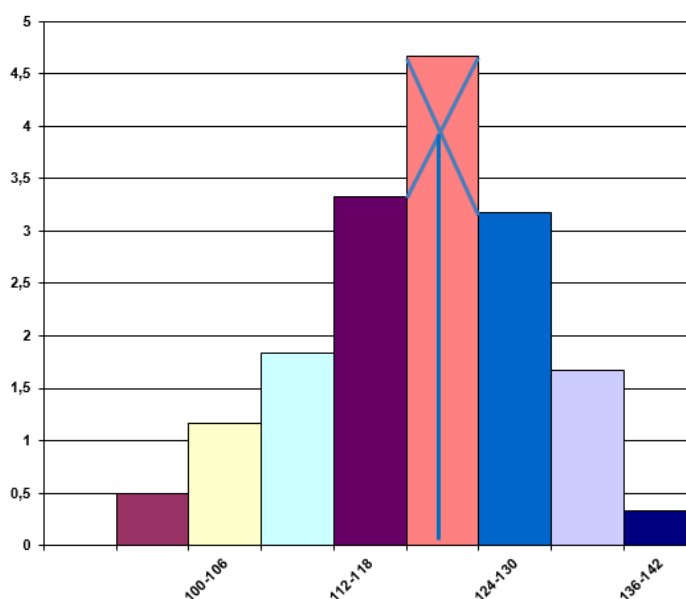
Найдем модальный интервал (интервал, которому соответствует наибольшая плотность частоты): интервал от 118 до 124 $\left(\frac{n_i}{h} = 4,67\right)$. Тогда:

$$X_{M_0} = 118, \quad h_{M_0} = 6, \quad n_{M_0} = 28, \quad n_{M_0-1} = 20, \quad n_{M_0+1} = 19$$

Мода будет равна:

$$M_0 = 118 + 6 \cdot \frac{28 - 20}{2 \cdot 28 - 20 - 19} = 120,82$$

2. с помощью гистограммы: модальный интервал от 118 до 124, проведем вспомогательные линии, найдем точку пересечения этих линий и опустим перпендикуляр на ось абсцисс. Приблизительное значение моды $M_0 = 120,5$, что совпадает с более точным значением моды, вычисленной с использованием формулы.



Нахождение медианы будем проводить тоже двумя способами:

1. С использованием формулы: $Me = X_{Me} + h_{Me} \frac{0,5 \sum n - n_{Me-1}^{нак}}{n_{Me}}$.

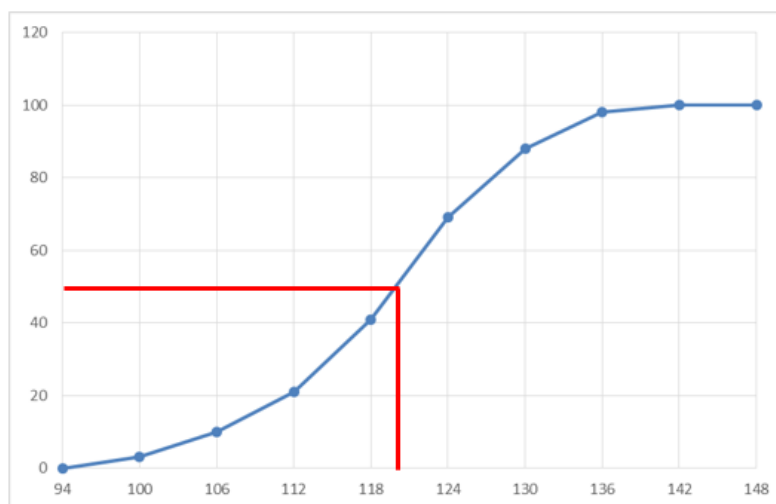
Найдем медианный интервал: т.к. общее число частот равно 100, то значения 50-51 попадают в интервал 118-124 (совпадение с модальным интервалом является случайным), тогда

$$X_{Me} = 118, \quad h_{Me} = 6, \quad \sum n = 100, \quad n_{Me} = 28, \quad n_{Me-1}^{нак} = 41$$

Тогда аналитически найденная медиана равна:

$$Me = 118 + 6 \cdot \frac{50 - 41}{28} = 119,93$$

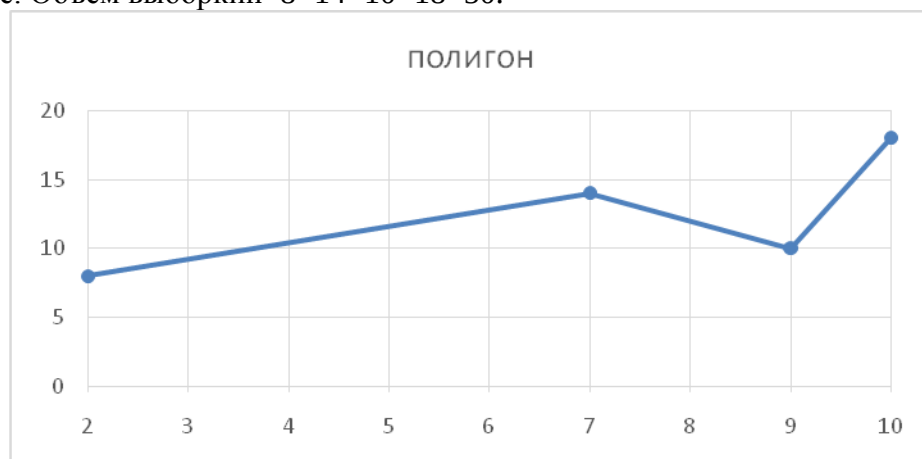
2. с использованием кумуляты. На графике кривой накопленных частот проводим горизонтальную прямую, соответствующую накопленной частоте 50 (половина выборки) до пересечения с графиком, в точке пересечения опускаем перпендикуляр на ось абсцисс, получаем значение медианы, что согласуется с найденным значением.



2. Построить полигон, найти выборочную среднюю, несмещенную оценку дисперсии и среднее квадратическое отклонение на основании распределения выборки в таблице. Найти моду и медиану

x_i	2	7	9	10
n_i	8	14	10	18

Решение. Объем выборки $n = 8 + 14 + 10 + 18 = 50$.



1. Находим выборочную среднюю по формуле $\bar{x} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i x_i}{n}$

$$\bar{x} = \frac{8 \cdot 2 + 14 \cdot 7 + 10 \cdot 9 + 18 \cdot 10}{50} = 7,68$$

2. Находим выборочную среднюю квадратов вариантов выборки по формуле

$$\overline{x^2} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i x_i^2}{n}$$

$$\overline{x^2} = \frac{8 \cdot 2^2 + 14 \cdot 7^2 + 10 \cdot 9^2 + 18 \cdot 10^2}{50} = 66,56$$

3. Находим выборочную дисперсию $D_b = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$

$$D_b = 66,56 - 7,68^2 = 7,58$$

4. Находим несмещенную оценку дисперсии («исправленную» выборочную дисперсию):

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_b = \frac{50 \cdot 7,58}{49} = 7,73$$

Значению моды соответствует наибольшая частота, следовательно $M_0 = 10$, т.к. этому значению соответствует максимальная частота $n_{\max} = 18$.

Т.к. объем выборки является четным, то значению медианы будет соответствовать среднее арифметическое значения для частот 25 и 25:

$$M_e = \frac{x_{25} + x_{26}}{2} = \frac{9 + 9}{2} = 9$$

ИЗ-1

1. По данным, представленным в таблице № 1 составить интервальный вариационный ряд. Построить полигон, гистограмму и кумюляту (полигон и гистограмму на одном чертеже). Найти выборочную среднюю, смещенную и несмещенную оценку дисперсии, среднее квадратическое отклонение. Моду и медиану найти двумя способами (графически и по формулам).

2. Построить полигон, найти выборочную среднюю, несмещенную оценку дисперсии и среднее квадратическое отклонение на основании распределения выборки в таблице №2. Найти моду и медиану

Таблица 1. Данные для задания №1 ИЗ-1.

Вариант № 1									
96	37	23	17	22	25	73	20	88	63
87	48	63	35	82	46	05	32	54	09
74	06	31	05	90	79	45	57	18	39
43	03	08	53	67	67	19	64	50	97
34	07	98	67	09	97	14	90	56	33
98	68	93	59	14	83	16	52	26	37
70	90	55	35	75	21	48	57	28	33
42	35	30	34	26	08	14	06	86	01
93	23	20	90	25	89	60	42	88	26
86	22	10	94	05	77	58	52	60	01
Вариант № 2									

52	92	85	02	38	05	02	05	16	47
06	83	83	34	54	47	06	28	89	10
64	01	88	00	47	36	86	50	75	93
75	10	48	28	75	30	31	24	96	46
16	76	69	38	82	51	87	63	79	15
56	68	66	57	48	76	18	26	73	97
80	50	72	56	82	96	48	45	18	29
84	36	76	66	79	02	51	68	90	54
47	02	29	53	68	79	70	32	32	47
19	35	58	40	44	41	01	07	10	49
Вариант № 3									
87	48	63	35	82	46	05	32	54	09
03	78	73	53	52	93	03	62	96	44
13	69	99	48	56	78	87	15	76	68
64	01	88	00	47	36	86	50	75	93
71	50	65	74	95	03	17	46	85	86
70	90	55	35	75	21	48	57	28	33
47	35	80	83	42	57	82	79	60	64
49	91	82	60	89	73	28	59	93	46
84	36	76	66	79	02	51	68	90	54
09	58	04	77	69	76	74	48	73	11
Вариант № 4									
23	59	00	54	28	69	64	05	18	91
54	51	94	94	03	54	36	16	81	56
34	04	98	26	47	09	45	24	02	07
52	92	85	02	38	05	02	05	16	47
19	49	33	32	54	69	41	94	15	94
81	96	11	96	38	76	96	54	54	99
08	34	88	88	15	19	53	86	01	43
84	44	99	90	88	48	96	08	39	62
56	68	66	57	48	76	18	26	73	97
09	89	43	54	85	62	81	18	88	51
Вариант № 5									
39	01	69	03	11	62	86	50	75	90
05	96	79	40	22	85	71	96	12	39
98	50	66	17	33	81	34	07	27	85
96	37	23	17	22	25	73	20	88	63
70	84	63	29	17	65	16	50	53	82
84	36	93	68	72	68	03	91	76	62
82	69	86	10	25	91	91	75	74	24
68	36	69	73	61	47	70	06	65	57
98	68	93	59	14	83	16	52	26	37
44	40	21	95	25	93	63	60	43	64
Вариант № 6									
87	48	63	35	82	46	05	32	54	09
34	12	63	35	13	06	18	92	72	15
42	32	11	31	59	40	39	80	82	01
54	27	02	35	32	76	08	32	54	51
06	83	83	34	54	47	06	28	89	10
23	76	46	16	28	35	45	54	49	94

40	68	70	29	73	14	45	35	33	53
90	84	36	93	68	72	68	03	91	76
81	79	32	97	92	65	19	75	10	57
09	70	90	55	35	75	21	48	57	28
Вариант № 7									
68	79	19	30	43	67	01	75	87	06
82	32	80	35	57	11	39	80	82	53
20	21	42	13	11	07	97	34	40	59
68	15	99	29	11	95	09	37	67	77
88	69	09	05	77	29	87	51	76	22
53	40	41	92	15	14	85	56	66	54
77	45	31	82	23	56	74	12	21	43
87	16	86	84	87	62	67	48	03	11
07	38	31	13	11	25	65	01	98	90
49	46	42	75	67	05	88	89	96	32
Вариант № 8									
99	86	91	23	08	75	68	47	92	23
33	58	80	98	03	14	28	94	03	40
39	01	69	03	11	62	86	50	75	90
08	54	44	49	04	60	85	15	74	81
87	48	63	35	82	46	05	32	54	09
76	46	16	28	35	45	54	49	94	91
68	70	29	73	14	45	35	33	53	69
84	36	93	68	72	68	03	91	76	62
79	32	97	92	65	19	75	10	57	48
70	90	55	35	75	21	48	57	28	33
Вариант № 9									
94	40	12	42	48	64	11	10	00	39
23	59	00	54	28	69	64	05	18	91
95	74	61	46	45	39	26	45	74	93
52	92	85	02	38	05	02	05	16	47
34	07	98	67	09	97	14	90	56	33
20	12	86	07	46	37	97	55	96	07
81	96	11	96	38	76	96	54	54	99
77	51	92	43	37	04	29	19	65	69
56	68	66	57	48	76	18	26	73	97
86	22	10	94	05	77	58	52	60	01
Вариант № 10									
01	53	15	66	61	39	95	27	07	18
25	87	94	73	04	19	67	89	75	92
00	54	35	07	45	97	26	89	80	24
47	96	37	05	33	63	64	89	47	64
48	42	59	91	12	02	45	42	72	92
99	59	36	78	38	52	48	47	82	44
43	54	62	24	44	85	31	55	91	72
93	33	35	13	54	53	62	96	77	31
42	24	80	52	40	48	37	54	20	20
68	83	60	94	97	83	00	80	13	80
Вариант № 11									
36	86	46	36	08	91	01	39	09	47

71	41	32	97	31	74	87	37	92	57
19	49	33	32	54	69	41	94	15	94
24	04	69	06	39	74	20	11	74	23
42	83	74	17	16	52	06	28	89	37
22	77	28	14	40	52	77	05	93	88
52	05	56	70	70	05	07	17	86	90
09	89	43	54	85	62	81	18	88	51
52	15	95	66	00	14	00	23	18	46
80	43	23	60	02	98	10	35	45	09
Вариант № 12									
00	46	45	38	79	04	19	47	60	33
52	74	94	06	62	01	96	38	27	98
14	71	18	37	56	45	98	14	50	27
13	69	99	48	56	78	87	15	76	68
80	70	74	02	75	52	77	55	73	21
72	43	66	79	45	49	43	15	59	51
07	20	15	12	33	04	87	95	25	10
65	31	01	02	46	25	74	63	05	33
49	91	82	60	89	73	28	59	93	46
22	97	79	01	71	39	19	02	52	94
Вариант № 13									
92	43	54	11	71	12	80	99	33	55
34	27	11	83	33	97	52	07	98	40
82	32	80	35	57	11	39	80	82	53
20	21	42	13	11	07	97	34	40	59
93	24	04	94	27	96	75	24	63	35
71	05	33	51	29	56	69	17	56	84
48	59	38	17	15	98	39	66	09	44
77	45	31	82	23	56	74	12	21	43
87	16	86	84	87	62	67	48	03	11
38	45	86	25	10	24	25	49	61	35
Вариант № 14									
43	03	08	53	67	67	19	64	50	97
34	07	98	67	09	97	14	90	56	33
23	59	00	54	28	69	64	05	18	91
54	51	94	94	03	54	36	16	81	56
34	04	98	26	47	09	45	24	02	07
93	23	20	90	25	89	60	42	88	26
86	22	10	94	05	77	58	52	60	01
81	96	11	96	38	76	96	54	54	99
08	34	88	88	15	19	53	86	01	43
84	44	99	90	88	48	96	08	39	62
Вариант № 15									
98	50	66	17	33	81	34	07	27	85
96	37	23	17	22	25	73	20	88	63
70	84	63	29	17	65	16	50	53	82
42	32	11	31	59	40	39	80	82	01
87	48	63	35	82	46	05	32	54	09
68	36	69	73	61	47	70	06	65	57
98	68	93	59	14	83	16	52	26	37

44	40	21	95	25	93	63	60	43	64
77	13	74	67	00	54	78	80	29	50
70	90	55	35	75	21	48	57	28	33
Вариант № 16									
06	10	83	34	54	06	28	89	06	80
68	06	79	30	43	01	75	87	68	53
82	53	32	35	57	39	80	82	82	77
20	59	21	13	11	97	34	40	20	87
39	90	01	03	11	86	50	75	39	84
50	72	56	82	96	48	45	47	18	29
40	41	92	15	14	85	56	67	66	54
45	31	82	23	56	74	12	11	21	43
16	86	84	87	62	67	48	07	03	11
36	93	68	72	68	03	91	62	76	62
Вариант № 17									
08	81	54	49	04	85	15	74	08	79
94	39	40	42	48	11	10	00	94	20
23	91	59	54	28	64	05	18	23	81
95	93	74	46	45	26	45	74	95	77
25	92	87	73	04	67	89	75	25	43
32	97	92	65	19	75	10	60	57	48
12	86	07	46	37	97	55	64	96	07
96	11	96	38	76	96	54	69	54	99
51	92	43	37	04	29	19	39	65	69
54	62	24	44	85	31	55	19	91	72
Вариант № 18									
00	24	54	07	45	26	89	80	00	93
47	64	96	05	33	64	89	47	47	42
24	23	04	06	39	20	11	74	24	52
42	37	83	17	16	06	28	89	42	80
14	27	71	37	56	98	14	50	14	65
33	35	13	54	53	62	96	97	77	31
24	80	52	40	48	37	54	63	20	20
15	95	66	00	14	00	23	74	18	46
43	23	60	02	98	10	35	52	45	09
31	01	02	46	25	74	63	45	05	33
Вариант № 19									
13	68	69	48	56	87	15	76	13	49
80	21	70	02	75	77	55	73	80	22
52	98	74	06	62	96	38	27	52	07
91	17	86	33	90	76	52	01	91	35
43	97	03	53	67	19	64	50	43	93
91	82	60	89	73	28	59	78	93	46
97	79	01	71	39	19	02	52	52	94
20	15	12	33	04	87	95	01	25	10
34	67	35	48	25	76	09	95	80	73
23	20	90	25	89	60	42	67	88	26
Вариант № 20									
34	33	07	67	09	14	90	56	34	86
96	63	37	17	22	73	20	88	96	98

70	82	84	29	17	16	50	53	70	44
42	01	32	31	59	39	80	82	42	77
00	24	54	07	45	26	89	80	00	93
22	10	94	05	77	58	52	97	60	01
68	93	59	14	83	16	52	25	26	37
40	21	95	25	93	63	60	65	43	64
13	74	67	00	54	78	80	40	29	50
33	35	13	54	53	62	96	97	77	31
Вариант № 21									
10	83	06	34	54	06	28	89	06	80
33	07	34	67	09	14	90	56	34	86
06	79	68	30	43	01	75	87	68	53
53	32	82	35	57	39	80	82	82	77
59	21	20	13	11	97	34	40	20	87
50	72	56	82	96	48	45	47	18	29
22	10	94	05	77	58	52	97	60	01
40	41	92	15	14	85	56	67	66	54
45	31	82	23	56	74	12	11	21	43
16	86	84	87	62	67	48	07	03	11
Вариант № 22									
81	54	08	49	04	85	15	74	08	79
82	84	70	29	17	16	50	53	70	44
98	74	52	06	62	96	38	27	52	07
01	32	42	31	59	39	80	82	42	77
21	70	80	02	75	77	55	73	80	22
32	97	92	65	19	75	10	60	57	48
40	21	95	25	93	63	60	65	43	64
20	15	12	33	04	87	95	01	25	10
13	74	67	00	54	78	80	40	29	50
97	79	01	71	39	19	02	52	52	94
Вариант № 23									
90	01	39	03	11	86	50	75	39	84
39	40	94	42	48	11	10	00	94	20
91	59	23	54	28	64	05	18	23	81
93	74	95	46	45	26	45	74	95	77
92	87	25	73	04	67	89	75	25	43
36	93	68	72	68	03	91	62	76	62
12	86	07	46	37	97	55	64	96	07
96	11	96	38	76	96	54	69	54	99
51	92	43	37	04	29	19	39	65	69
54	62	24	44	85	31	55	19	91	72
Вариант № 24									
24	54	00	07	45	26	89	80	00	93
64	96	47	05	33	64	89	47	47	42
23	04	24	06	39	20	11	74	24	52
37	83	42	17	16	06	28	89	42	80
27	71	14	37	56	98	14	50	14	65
33	35	13	54	53	62	96	97	77	31
24	80	52	40	48	37	54	63	20	20
15	95	66	00	14	00	23	74	18	46

43	23	60	02	98	10	35	52	45	09
31	01	02	46	25	74	63	45	05	33
Вариант № 25									
68	69	13	48	56	87	15	76	13	49
21	70	80	02	75	77	55	73	80	22
98	74	52	06	62	96	38	27	52	07
17	86	91	33	90	76	52	01	91	35
97	03	43	53	67	19	64	50	43	93
91	82	60	89	73	28	59	78	93	46
97	79	01	71	39	19	02	52	52	94
20	15	12	33	04	87	95	01	25	10
34	67	35	48	25	76	09	95	80	73
23	20	90	25	89	60	42	67	88	26
Вариант № 26									
63	37	96	17	22	73	20	88	96	98
82	84	70	29	17	16	50	53	70	44
01	32	42	31	59	39	80	82	42	77
79	43	75	87	06	53	40	41	92	68
21	11	34	40	59	87	16	86	84	20
68	93	59	14	83	16	52	25	26	37
40	21	95	25	93	63	60	65	43	64
13	74	67	00	54	78	80	40	29	50
15	14	85	56	30	67	01	66	68	54
87	62	67	48	13	07	97	03	20	11
Вариант № 27									
54	04	15	74	81	79	32	97	92	08
84	17	50	53	82	44	40	21	95	70
32	59	80	82	01	77	13	74	67	42
01	11	50	75	90	84	36	93	68	39
40	48	10	00	39	20	12	86	07	94
65	19	75	10	49	60	85	57	08	48
25	93	63	60	29	65	16	43	70	64
00	54	78	80	31	40	39	29	42	50
72	68	03	91	03	62	86	76	39	62
46	37	97	55	42	64	11	96	94	07
Вариант № 28									
18	29	73	48	56	87	15	76	13	59
55	70	80	02	75	77	12	73	32	01
24	74	52	06	62	96	38	27	52	07
17	86	91	33	90	76	52	01	91	35
64	03	43	53	67	19	64	50	43	93
91	82	60	89	73	28	59	78	93	46
97	79	01	71	39	19	02	52	52	94
20	15	12	33	04	87	95	01	25	10
34	67	35	48	25	76	09	95	80	73
23	20	90	25	89	60	42	67	88	34
Вариант № 29									
13	68	69	48	56	87	15	76	13	49
80	21	70	02	75	77	55	73	80	22
52	98	74	06	62	96	38	27	52	07

91	17	86	33	90	76	52	01	91	35
43	97	03	53	67	19	64	50	43	93
91	82	60	89	73	28	59	78	93	46
97	79	01	71	39	19	02	52	52	94
20	15	12	33	04	87	95	01	25	10
34	67	35	48	25	76	09	95	80	73
23	20	90	25	89	60	42	67	88	26
Вариант № 30									
87	48	63	35	82	46	05	32	54	09
03	78	73	53	52	93	03	62	96	44
13	69	99	48	56	78	87	15	76	68
64	01	88	00	47	36	86	50	75	93
71	50	65	74	95	03	17	46	85	86
70	90	55	35	75	21	48	57	28	33
47	35	80	83	42	57	82	79	60	64
49	91	82	60	89	73	28	59	93	46
84	36	76	66	79	02	51	68	90	54
09	58	04	77	69	76	74	48	73	11

Таблица 2. Данные для задания № 2 ИЗ – 1

варианты							варианты						
1	x_i	1	2	5	7	12	16	x_i	3	6	8	12	25
	n_i	2	4	13	1	5		n_i	2	4	13	6	4
2	x_i	3	4	6	8	16	17	x_i	3	5	13	17	23
	n_i	2	5	8	3	5		n_i	2	4	13	1	5
3	x_i	2	4	7	6	17	18	x_i	1	3	4	7	32
	n_i	8	9	12	3	6		n_i	7	13	15	5	18
4	x_i	5	7	9	14	16	19	x_i	4	10	12	14	20
	n_i	5	9	2	4	13		n_i	6	13	4	7	13
5	x_i	6	8	10	13	17	20	x_i	1	5	8	21	30
	n_i	15	22	3	7	8		n_i	8	5	15	12	2
6	x_i	1	3	7	9	54	21	x_i	2	3	9	14	19
	n_i	12	2	4	13	4		n_i	5	9	2	4	13
7	x_i	5	7	9	16	29	22	x_i	3	5	7	12	23
	n_i	5	13	4	22	3		n_i	2	14	8	3	5
8	x_i	3	5	6	7	17	23	x_i	4	5	9	15	18
	n_i	1	5	18	12	2		n_i	12	2	4	13	4
9	x_i	4	5	8	9	37	24	x_i	8	9	10	21	31
	n_i	2	4	13	13	4		n_i	5	13	4	22	3
10	x_i	2	5	9	13	25	25	x_i	6	10	12	16	35
	n_i	8	12	2	22	3		n_i	8	11	12	3	6
11	x_i	3	6	8	12	51	26	x_i	1	2	5	7	12
	n_i	7	13	20	5	18		n_i	2	4	13	1	5

12	x_i	4	6	9	22	55
	n_i	6	13	4	7	13
13	x_i	5	9	10	12	14
	n_i	8	5	18	12	2
14	x_i	4	5	8	28	31
	n_i	14	8	2	4	13
15	x_i	3	7	17	28	32
	n_i	22	3	12	2	5
27	x_i	3	4	6	8	16
	n_i	2	5	8	3	5
28	x_i	2	4	7	6	17
	n_i	8	9	12	3	6
29	x_i	5	7	9	14	16
	n_i	5	9	2	4	13
30	x_i	6	8	10	13	17
	n_i	15	22	3	7	8

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите задачи математической статистики.
2. Какое обследование называется выборочным?
3. Какая совокупность объектов (наблюдений) называется генеральной? Что называется объемом генеральной совокупности?
4. Какая совокупность объектов (наблюдений) называется выборочной совокупностью или выборкой? Что называется объемом выборочной совокупности?
5. Что означает репрезентативность выборки? Как она обеспечивается?
6. Какая выборка называется повторной?
7. Какая выборка называется бесповторной?
8. Что называется вариантами?
9. Что называется вариационным рядом?
10. Что называется частотами?
11. Что называется относительными частотами?
12. Что называется размахом вариационного ряда?
13. Что называется таблицей статистического распределения выборки?
14. Что называется накопленной частотой?
15. Что называется интервальным вариационным рядом?
16. Запишите формулу Стёрджесса. Что она позволяет найти?
17. Что называется полигоном частот?
18. Что называется гистограммой?
19. Как строится кумулята?
20. Как находится выборочная средняя?
21. Что представляет собой выборочная дисперсия? (запишите две формулы)
22. Какая статистическая оценка является несмещенной?
23. Когда статистическая оценка является смещенной?
24. Как устранить смещенность выборочной дисперсии? (как найти «исправленную» выборочную дисперсию s^2)

Тема 3. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Цель: в результате изучения данной темы студент должен быть способен осуществлять анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных задач.

Оборудование: листы заданий для аудиторной работы, карточки с ИЗ, калькуляторы.

Форма проведения: занятие – практикум, включающий в себя следующие этапы: актуализация теоретических знаний, пробное решение несколькими студентами заданий у

доски, самостоятельная работа студентов, контроль преподавателем индивидуальных заданий (ИЗ) студентов, выполненных самостоятельно.

Форма контроля: проверка выполнения ИЗ -2.

Основные формулы

t- критерий Стьюдента(Проверка гипотез о равенстве средних величин)

Правило 1.	Правило 2.	Правило 3.
$H_0: M(X)=M(Y)$		
$H_1: M(X) \neq M(Y)$	$H_1: M(X)>M(Y)$	$H_1: M(X)<M(Y)$
$t_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}$		
$\Phi(t_{\text{кр}}) = \frac{1-\alpha}{2}$	$\Phi(t_{\text{кр}}) = \frac{1-2\alpha}{2}$	
Если $ t_{\text{набл}} < t_{\text{кр}} \Rightarrow H_0$. Если $ t_{\text{набл}} > t_{\text{кр}} \Rightarrow H_1$.	Если $t_{\text{набл}} < t_{\text{кр}} \Rightarrow H_0$. Если $t_{\text{набл}} > t_{\text{кр}} \Rightarrow H_1$	Если $t_{\text{набл}} > -t_{\text{кр}} \Rightarrow H_0$. Если $t_{\text{набл}} < -t_{\text{кр}} \Rightarrow H_1$

χ^2 - критерий(Сравнение исправленной выборочной дисперсии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокупности)

Правило 1.	Правило 2.	Правило 3.
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$		
$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$
$\chi_{\text{набл}}^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$		
$\chi_{\text{кр}}^2(\alpha; k) \quad k=n-1$	$\chi_{\text{лев.кр}}^2\left(1-\frac{\alpha}{2}; k\right) \chi_{\text{прав.кр}}^2\left(\frac{\alpha}{2}; k\right)$	$\chi_{\text{кр}}^2\left(1-\frac{\alpha}{2}; k\right)$
Если $\chi_{\text{набл}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2 \Rightarrow H_0$. Если $\chi_{\text{набл}}^2 > \chi_{\text{кр}}^2 \Rightarrow H_1$	Если $\chi_{\text{набл}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2 \Rightarrow H_0$. Если $\chi_{\text{набл}}^2 > \chi_{\text{кр}}^2 \Rightarrow H_1$.	Если $\chi_{\text{набл}}^2 > \chi_{\text{кр}}^2(1-\alpha; k) \Rightarrow H_0$. Если $\chi_{\text{набл}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2(1-\alpha; k) \Rightarrow H_1$.

Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

Правило 1.	Правило 2.
$H_0: D(X)=D(Y)$	
$H_1: D(X)>D(Y)$	$H_1: D(X) \neq D(Y)$
$F_{\text{набл}} = \frac{S_{\text{больш}}^2}{S_{\text{меньш}}^2}$	
$F_{\text{кр}}(\alpha; k_1; k_2) \quad k_1 = n_1 - 1; \quad k_2 = n_2 - 1$	$F_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}; k_1; k_2\right) \quad k_1 = n_1 - 1; \quad k_2 = n_2 - 1$
Если $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}} \Rightarrow H_0$. Если $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}} \Rightarrow H_1$	

Решение типового варианта

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n=40$ и $m=50$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние: $\bar{X}=130$ и $\bar{Y}=140$. Генеральные дисперсии известны: $D(X)=80$, $D(Y)=100$. Требуется при уровне значимости $0,01$ проверить нулевую гипотезу $H_0: M(X)=M(Y)$ при конкурирующей гипотезе $H_1: M(X) \neq M(Y)$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$t_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}} = \frac{130 - 140}{\sqrt{\frac{80}{40} + \frac{100}{50}}} = -5$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) \neq M(Y)$, поэтому критическая область – двусторонняя. Найдем правую критическую точку из равенства

$$\Phi(t_{\text{кр}}) = \frac{1 - 2\alpha}{2} = \frac{1 - 0,01}{2} = 0,495$$

По таблице функции Лапласа (Приложение № 2) находим $t_{\text{кр}}=2,58$.

Так как $|t_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}}$, то в соответствии с правилом 1 нулевую гипотезу отвергаем.

Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

2. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=21$ и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия $s^2=16,2$. Требуется при уровне значимости $0,01$ проверить нулевую гипотезу $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 15$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы $H_1: \sigma_0^2 > 15$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(21-1) \cdot 16,2}{15} = 21,6$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $\sigma^2 > 15$, поэтому конкурирующая гипотеза - правосторонняя (правило 1). По таблице (Приложение №4) по уровню значимости $0,01$ и числу степеней свободы $k=n-1=21-1=20$ находим критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(0,01; 20) = 37,6$

Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ - нет оснований отвергать нулевую гипотезу о равенстве генеральной дисперсии гипотетическому значению $\sigma_0^2 = 15$. Другими словами, различие между исправленной дисперсией (16,2) и гипотетической генеральной дисперсией (15) незначительно.

3. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1=11$ и $n_2=14$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y , найдены исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 0,76$ и $s_y^2 = 0,38$. При уровне значимости $\alpha = 0,05$, проверить нулевую гипотезу $H_0: D(X)=D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий, при конкурирующей гипотезе $H_1: D(X) > D(Y)$.

Решение. Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{\text{набл}} = \frac{0,76}{0,38} = 2$$

По условию конкурирующая гипотеза имеет вид $D(X) > D(Y)$, поэтому критическая область правосторонняя.

По таблице (Приложение № 5), по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числам степеней свободы $k_1 = n_1 - 1 = 11 - 1 = 10$ и $k_2 = n_2 - 1 = 14 - 1 = 13$ находим критическую точку

$$F_{кр}(0,05; 10; 13) = 2,67$$

Так как $F_{набл} < F_{кр}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Другими словами, выборочные исправленные дисперсии различаются незначительно.

ИЗ - 2

1. t- критерий Стьюдента (Проверка гипотез о равенстве средних величин)

По двум независимым выборкам X и Y (таблица 3), извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, проверьте при уровне значимости α нулевую гипотезу $H_0: M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гипотезе $H_1: M(X) \neq M(Y)$.

Результат представить по следующей форме:

Дано:

X_i	...	...	...	...		Y_i	...	...	...	...	...
n_i	...	...	...	...		n_i	...	...	...	...	...

$$\alpha = n =$$

$$m =$$

	$\bar{x}$	$\overline{x^2}$	$\bar{y}$	$\overline{y^2}$	D(X)	D(Y)	$t_{набл}$	$\Phi(t_{кр})$	$t_{кр}$
Формулы для нахождения	...	...	...	...	...	...	...	...	по таблице приложения 2
Результат									

Вывод: т.к. $|t_{набл}| (< \text{или } >) t_{кр}$, то гипотеза отвергается и принимается гипотеза, следовательно средние величины в двух выборках статистически (различаются или не различаются).

2. χ^2 - критерий (Сравнение исправленной выборочной дисперсии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокупности)

Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка (таблица 4).

Требуется при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$.

Результат представить по следующей форме:

Дано:

X_i	...	...	...	...
n_i	...	...	...	...

$$\alpha = n =$$

$$\sigma_0^2 =$$

$$k = n - 1 =$$

	$\bar{x}$	$\overline{x^2}$	D(X)	s^2	$\chi_{набл}^2$	$\chi_{кр}^2(\alpha; k)$
Формулы для нахождения						по таблице приложения 4
Результат						

Вывод: т.к. $\chi_{набл}^2 (< \text{или } >) \chi_{кр}^2(\alpha; k)$, то гипотеза отвергается и принимается гипотеза, следовательно различие между исправленной дисперсией s^2 и гипотетической генеральной дисперсией σ_0^2 статистически (значимо или незначимо).

3. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

Даны две независимые выборки, извлеченные из нормальных генеральных совокупностей X и Y (таблица 5). При уровне значимости α , проверить нулевую гипотезу $H_0: D(X)=D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий, при конкурирующей гипотезе $H_1: D(X)>D(Y)$.

Результат представить по следующей форме:

Дано:

X_i	...	...	...	...		y_i	...	...	...	...	...
n_i	...	...	...	...		n_i	...	...	...	...	...

$$\alpha = k_1 = \quad k_2 =$$

	$\bar{X}$	$\overline{x^2}$	$\bar{Y}$	$\overline{y^2}$	$D(X)$	$D(Y)$	s_x^2	s_y^2	$F_{\text{набл}}$	$F_{\text{кр}}(\alpha; k_1; k_2)$
Формулы для нахождения	...	...	...	...	...	...	...	...		по таблице приложения 5
Результат										

Вывод: Так как $F_{\text{набл}} (< \text{или} >) F_{\text{кр}}$ – то гипотеза отвергается и принимается гипотеза, следовательно, выборочные исправленные дисперсии различаются статистически (значимо или незначимо).

Таблица 3 Данные к заданию 1ИЗ-2

B	α	ВЫБОРКА X					ВЫБОРКА Y				
1	0,1	X _i	2	5	7	12	y _i	7	15	16	22
		N _i	4	7	1	5	N _i	8	2	7	1
2	0,05	X _i	4	6	8	16	y _i	6	8	9	26
		N _i	5	8	3	5	N _i	6	2	5	8
3	0,02	X _i	4	7	6	17	y _i	6	8	10	13
		N _i	9	4	3	6	N _i	1	3	7	2
4	0,01	X _i	7	9	14	16	y _i	4	7	8	21
		N _i	9	2	4	5	N _i	5	5	6	2
5	0,02	X _i	8	10	13	17	y _i	7	9	20	36
		N _i	6	3	7	8	N _i	4	3	1	3
6	0,001	X _i	3	7	9	54	y _i	6	8	12	25
		N _i	2	4	3	4	N _i	4	5	6	4
7	0,1	X _i	7	9	16	29	y _i	5	13	17	23
		N _i	3	4	5	3	N _i	4	3	1	5
8	0,05	X _i	5	6	7	17	y _i	3	4	7	32
		N _i	5	4	2	2	N _i	8	4	5	1
9	0,02	X _i	5	8	9	37	y _i	7	15	16	22
		N _i	4	5	3	4	N _i	8	2	7	1
10	0,01	X _i	5	9	13	25	y _i	5	8	9	26
		N _i	7	2	2	3	N _i	7	5	5	3
11	0,02	X _i	6	8	12	51	y _i	6	8	10	13
		N _i	6	3	5	3	N _i	2	3	7	8
12	0,001	X _i	6	9	22	55	y _i	4	7	8	21

		N_I	5	4	7	2	N_I	5	3	4	2
13	0,1	X_I	9	10	12	14	Y_I	7	9	20	36
		N_I	5	4	3	2	N_I	1	3	5	3
14	0,05	X_I	5	8	28	31	Y_I	6	8	12	25
		N_I	8	2	4	3	N_I	4	3	6	4
15	0,02	X_I	7	17	28	32	Y_I	5	13	17	23
		N_I	3	2	2	5	N_I	4	3	1	5
16	0,01	X_I	7	15	16	22	Y_I	1	2	5	7
		N_I	8	2	7	7	N_I	2	4	3	1
17	0,02	X_I	6	8	9	26	Y_I	3	4	6	8
		N_I	6	1	5	8	N_I	2	5	8	3
18	0,001	X_I	6	8	4	3	Y_I	2	4	7	6
		N_I	4	3	7	2	N_I	8	5	2	3
19	0,1	X_I	4	7	8	21	Y_I	5	7	9	14
		N_I	5	3	5	2	N_I	5	9	2	4
20	0,05	X_I	7	9	20	36	Y_I	6	8	10	13
		N_I	2	3	6	3	N_I	5	2	3	7
21	0,02	X_I	6	8	12	25	Y_I	1	3	7	9
		N_I	4	2	6	4	N_I	3	2	4	3
22	0,01	X_I	5	13	17	23	Y_I	5	7	9	16
		N_I	4	5	1	5	N_I	5	1	4	2
23	0,02	X_I	3	4	7	32	Y_I	3	5	6	7
		N_I	7	2	5	3	N_I	1	5	2	12
24	0,1	X_I	2	5	7	12	Y_I	7	15	16	22
		N_I	4	7	1	5	N_I	8	2	7	1
25	0,05	X_I	4	6	8	16	Y_I	6	8	9	26
		N_I	5	8	3	5	N_I	6	2	5	8
26	0,02	X_I	4	7	6	17	Y_I	6	8	10	13
		N_I	9	4	3	6	N_I	1	3	7	2
27	0,01	X_I	7	9	14	16	Y_I	4	7	8	21
		N_I	9	2	4	5	N_I	5	5	6	2
28	0,02	X_I	8	10	13	17	Y_I	7	9	20	36
		N_I	6	3	7	8	N_I	4	3	1	3
29	0,001	X_I	3	7	9	54	Y_I	6	8	12	25
		N_I	2	4	3	4	N_I	4	5	6	4
30	0,1	X_I	7	9	16	29	Y_I	5	13	17	23
		N_I	3	4	5	3	N_I	4	3	1	5

Таблица 4 Данные к заданию 2Д3-2

В	ВЫБОРКА					α	σ_0^2
1	X_I	3	7	9	54	0,01	128
	N_I	2	4	3	4		
2	X_I	7	9	16	29	0,025	17

	N _I	3	4	5	3		
3	X _I	5	6	7	17	0,05	53
	N _I	5	4	2	2		
4	X _I	5	8	9	37	0,01	112
	N _I	4	5	3	4		
5	X _I	5	9	13	25	0,025	68
	N _I	7	2	2	3		
6	X _I	6	8	12	51	0,05	48
	N _I	6	3	5	3		
7	X _I	6	9	22	55	0,01	86
	N _I	5	4	7	2		
8	X _I	9	10	12	14	0,025	18
	N _I	5	4	3	2		
9	X _I	5	8	28	31	0,05	122
	N _I	8	2	4	3		
10	X _I	7	17	28	32	0,01	57
	N _I	3	2	2	5		
11	X _I	7	15	16	22	0,025	69
	N _I	8	2	7	7		
12	X _I	6	8	9	26	0,05	65
	N _I	6	1	5	8		
13	X _I	6	8	4	3	0,01	89
	N _I	4	3	7	2		
14	X _I	4	7	8	21	0,025	99
	N _I	5	3	5	2		
15	X _I	7	9	20	36	0,05	151
	N _I	2	3	6	3		
16	X _I	6	8	12	25	0,01	52
	N _I	4	2	6	4		
17	X _I	5	13	17	23	0,025	58
	N _I	4	5	1	5		
18	X _I	3	4	7	32	0,05	21
	N _I	7	2	5	3		
19	X _I	7	15	16	22	0,01	146
	N _I	8	2	7	1		
20	X _I	6	8	9	26	0,025	59
	X _I	6	2	5	8	0,01	52
21	X _I	6	8	10	13	0,05	21
	N _I	1	3	7	2		
22	X _I	4	7	8	21	0,01	87
	N _I	5	5	6	2		
23	X _I	7	9	20	36	0,025	95

	N_I	4	3	1	3		
24	X_I	3	7	9	54	0,01	128
	N_I	2	4	3	4		
25	X_I	7	9	16	29	0,025	17
	N_I	3	4	5	3		
26	X_I	5	6	7	17	0,05	53
	N_I	5	4	2	2		
27	X_I	5	8	9	37	0,01	112
	N_I	4	5	3	4		
28	X_I	5	9	13	25	0,025	68
	N_I	7	2	2	3		
29	X_I	6	8	12	51	0,05	48
	N_I	6	3	5	3		
30	X_I	6	9	22	55	0,01	86
	N_I	5	4	7	2		

Таблица 5 Данные к заданию 3 ИЗ-2

В	α	ВЫБОРКА X					ВЫБОРКА Y				
1	0,01	x_I	6	8	12	51	y_I	6	9	22	55
		N_I	2	3	5	3	N_I	1	4	3	2
2	0,05	x_I	5	13	17	23	y_I	6	8	10	13
		N_I	4	2	1	5	N_I	2	3	4	1
3	0,01	x_I	6	9	22	55	y_I	4	7	8	21
		N_I	3	4	1	2	N_I	3	3	4	2
4	0,05	x_I	5	7	9	16	y_I	4	7	8	21
		N_I	5	1	4	2	N_I	3	3	4	2
5	0,01	x_I	6	8	12	25	y_I	7	9	20	36
		N_I	4	2	3	4	N_I	2	3	4	3
6	0,05	x_I	1	3	7	9	y_I	6	8	10	13
		N_I	3	2	4	3	N_I	5	2	3	2
7	0,01	x_I	2	4	7	6	y_I	4	7	8	21
		N_I	1	5	2	3	N_I	5	3	2	2
8	0,05	x_I	5	7	9	14	y_I	6	8	4	3
		N_I	2	3	2	4	N_I	4	3	2	2
9	0,01	x_I	1	2	5	7	y_I	6	8	9	26
		N_I	2	4	3	1	N_I	3	1	5	2
10	0,05	x_I	3	4	6	8	y_I	7	15	16	22
		N_I	2	5	1	3	N_I	4	2	3	1
11	0,01	x_I	6	8	12	25	y_I	7	17	28	32
		N_I	4	3	1	4	N_I	3	2	2	5
12	0,05	x_I	5	13	17	23	y_I	5	8	28	31

		N_I	4	3	1	5	N_I	1	2	4	3
13	0,01	x_I	7	9	20	36	y_I	9	10	12	14
		N_I	1	3	5	3	N_I	1	4	3	2
14	0,05	x_I	5	8	9	26	y_I	6	9	22	55
		N_I	1	2	5	3	N_I	5	4	1	2
15	0,01	x_I	4	7	8	21	y_I	5	9	13	25
		N_I	4	3	4	2	N_I	1	2	2	3
16	0,05	x_I	3	4	7	32	y_I	5	8	9	37
		N_I	2	4	5	1	N_I	4	1	3	4
17	0,01	x_I	7	15	16	22	y_I	5	6	7	17
		N_I	1	2	4	1	N_I	5	4	2	2
18	0,05	x_I	5	13	17	23	y_I	7	9	16	29
		N_I	4	3	1	5	N_I	3	4	2	3
19	0,01	x_I	7	9	20	36	y_I	3	7	9	54
		N_I	4	3	1	3	N_I	2	4	3	4
20	0,05	x_I	6	8	12	25	y_I	8	10	13	17
		N_I	4	2	1	4	N_I	6	3	2	1
21	0,01	x_I	4	7	8	21	y_I	7	9	14	16
		N_I	1	1	6	2	N_I	1	2	4	5
22	0,05	x_I	6	8	9	26	y_I	4	7	6	17
		N_I	1	2	5	1	N_I	1	4	5	2
23	0,05	x_I	5	13	17	23	y_I	7	9	16	29
		N_I	4	3	1	5	N_I	3	4	2	3
24	0,01	x_I	6	8	12	51	y_I	6	9	22	55
		N_I	2	3	5	3	N_I	1	4	3	2
25	0,05	x_I	5	13	17	23	y_I	6	8	10	13
		N_I	4	2	1	5	N_I	2	3	4	1
26	0,01	x_I	6	9	22	55	y_I	4	7	8	21
		N_I	3	4	1	2	N_I	3	3	4	2
27	0,05	x_I	5	7	9	16	y_I	4	7	8	21
		N_I	5	1	4	2	N_I	3	3	4	2
28	0,01	x_I	6	8	12	25	y_I	7	9	20	36
		N_I	4	2	3	4	N_I	2	3	4	3
29	0,05	x_I	1	3	7	9	y_I	6	8	10	13

		N_i	3	2	4	3		N_i	5	2	3	2
30	0,01	χ_i	2	4	7	6		y_i	4	7	8	21
		N_i	1	5	2	3		N_i	5	3	2	2

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение статистической гипотезы.
2. Что такое статистический критерий?
3. Какая гипотеза может быть нулевой? альтернативной?
4. Объясните, что такое ошибка первого рода.
5. Объясните, что такое ошибка второго рода.
6. Можно ли одновременно уменьшить ошибки первого и второго рода?
7. Объясните, что такое левосторонняя, правосторонняя и двусторонняя критические области.
8. В чем состоит алгоритм проверки статистической гипотезы?

Тема 4. КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ

Цель: в результате изучения данной темы студент должен быть способен осуществлять анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных задач.

Оборудование: листы заданий для аудиторной работы, карточки с ИЗ, калькуляторы.

Форма проведения: занятие – практикум, включающий в себя следующие этапы: актуализация теоретических знаний, пробное решение несколькими студентами заданий у доски, самостоятельная работа студентов, контроль преподавателем индивидуальных заданий (ИЗ) студентов, выполненных самостоятельно.

Форма контроля: проверка выполнения ИЗ -3.

Основные формулы

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - m_i^T)^2}{m_i^T}$$

$$k = m - r - 1$$

$$\text{Если } \chi^2_{\text{набл}} < \chi^2(\alpha; k) \Rightarrow H_0$$

$$\text{Если } \chi^2_{\text{набл}} > \chi^2(\alpha; k) \Rightarrow H_1$$

Решение типового варианта

Измерены 100 обработанных деталей, отклонения от заданного размера приведены в таблице:

x_i	$[-3; -2)$	$[-2; -1)$	$[-1; 0)$	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; 4)$	$[4; 5)$
n_i	3	10	15	24	25	13	7	3

Проверить при уровне значимости $\alpha = 0,01$ гипотезу H_0 о том, что отклонения от проектного размера подчиняются нормальному закону распределения.

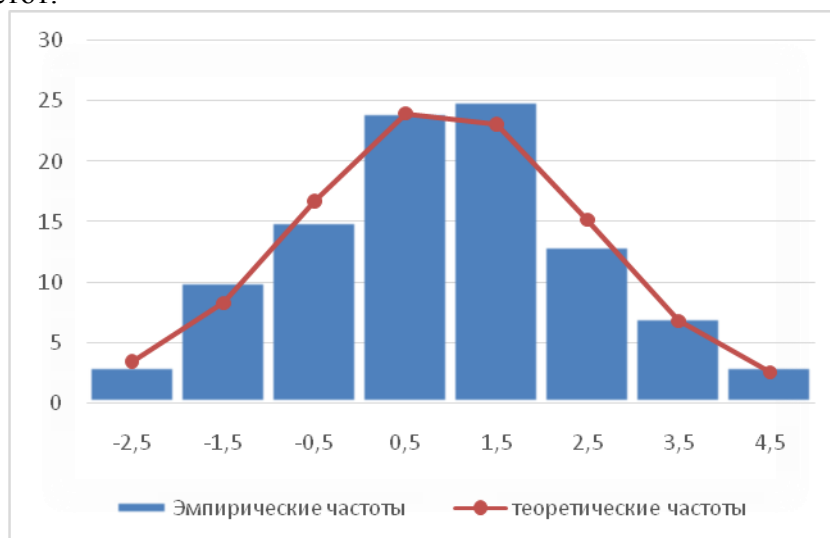
Решение. Случайную величину – отклонения – обозначим X . Найдем числовые характеристики:

$$\bar{x} = 0,9; \quad D_x = 2,54; \quad \sigma = 1,594$$

Для нахождения наблюдаемого значения параметра заполним таблицу:

Интервал, $[x_i; x_{i+1})$	Эмпирич. част., n_i	$\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$	$\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{\sigma}$	$\Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}\right)$	$\Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{\sigma}\right)$	p_i	Теорет част., np_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
$(-\infty; -2)$	3	$-\infty$	-1,8196	-0,5	-0,4656	0,0344	3,44	0,056279
$[-2; -1)$	10	-1,8196	-1,1922	-0,4656	-0,3830	0,0826	8,26	0,366538
$[-1; 0)$	15	-1,1922	-0,5647	-0,3830	-0,2157	0,1673	16,73	0,178894
$[0; 1)$	24	-0,5647	0,0628	-0,2157	0,0239	0,2396	23,96	6,68E-05
$[1; 2)$	25	0,06275	0,6902	0,0239	0,2549	0,231	23,1	0,156277
$[2; 3)$	13	0,6902	1,3177	0,2549	0,4066	0,1517	15,17	0,310409
$[3; 4)$	7	1,3177	1,9451	0,4066	0,4744	0,0678	6,78	0,007139
$[4; +\infty)$	3	1,9451	$+\infty$	0,4744	0,5	0,0256	2,56	0,075625
	100					1	100	1,151227

Построим на одном чертеже гистограмму эмпирических частот и кривую теоретических частот.



Находим число степеней свободы. По выборке рассчитаны два параметра, $r = 2$. Количество интервалов $m = 8$, следовательно, $k = m - r - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$. По таблице $\chi^2_{кр}(0,01; 5) = 15,1$. Т.к. $\chi^2_{набл} = 1,1512 < \chi^2_{кр}(0,01; 5) = 15,1$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

ИЗ-3

Темп роста курса акций 100 фирм по сравнению с предыдущим периодом (%) представлен в таблице 6. Построить по этим данным интервальный вариационный ряд случайной величины X и начертить гистограмму. Вычислить среднее арифметическое выборки, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратичное отклонение. Используя критерий χ^2 - Пирсона по данному вариационному ряду при уровне значимости $\alpha = 0,05$, проверить гипотезу о том, что случайная величина X распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и теоретическую нормальную кривую.

Таблица 6 Данные к ИЗ-3

В-1	28,5	24,8	17,8	20,7	15,7	21,3	24,0	23,6	36,6	21,3
	37,4	29,3	24,4	14,1	27,7	35,3	24,3	10,1	18,7	24,3
	23,3	32,2	17,5	25,8	27,6	24,3	33,5	34,1	17,8	22,0
	17,9	22,7	10,9	32,3	17,2	24,1	21,2	28,2	30,9	25,9
	20,2	31,4	23,7	27,1	25,1	23,3	28,9	17,9	15,3	28,1
	33,2	14,5	24,5	17,1	27,9	23,3	32,9	33,1	20,4	28,3
	25,8	18,7	24,1	20,7	29,1	25,1	31,4	20,6	31,3	33,6
	28,9	30,8	28,2	25,1	24,9	22,0	30,9	26,3	20,6	22,7
	20,0	27,1	23,7	22,6	34,2	37,1	35,2	25,5	29,0	18,2
	25,9	16,5	18,8	26,2	14,4	24,8	29,8	20,1	21,0	20,4
В-2	32,9	20,1	34,0	30,1	30,7	22,6	21,4	30,4	28,2	33,0
	26,3	30,9	31,4	27,7	25,1	35,5	22,5	20,1	26,5	38,0
	35,5	24,5	30,1	35,5	22,6	15,6	33,1	19,8	28,8	20,7
	33,0	24,5	30,5	22,5	34,6	24,1	25,1	17,6	31,7	22,2
	22,5	20,4	27,9	23,0	17,8	30,0	22,5	16,5	22,1	29,0
	17,7	16,6	25,0	28,5	26,0	20,2	24,6	18,8	25,6	35,4
	22,4	31,2	18,5	24,0	22,8	12,3	18,1	26,6	25,8	23,6
	23,4	22,5	25,9	25,1	32,3	14,1	18,9	24,6	30,1	25,6
	17,8	16,6	25,3	26,6	21,9	31,0	26,4	28,3	23,6	23,6
	27,3	31,1	21,7	31,2	28,0	34,1	18,0	23,0	21,1	39,6
В-3	22,6	16,6	18,9	26,5	16,3	19,9	25,2	20,3	24,9	20,8
	17,2	17,1	23,9	29,9	23,2	23,6	16,1	23,8	21,4	31,3
	14,7	24,8	20,6	17,4	32,0	29,4	25,3	18,5	29,3	27,6
	27,6	34,8	19,2	14,0	39,9	28,0	34,6	21,7	32,0	20,4
	21,4	26,9	21,7	32,1	19,0	14,0	21,9	19,2	19,7	22,0
	22,7	18,7	19,1	24,0	23,3	26,3	27,3	13,7	27,3	21,3
	24,4	26,1	26,2	30,1	34,5	23,1	21,5	27,7	23,4	22,4
	29,9	23,5	26,5	20,8	29,5	21,4	18,0	27,9	26,6	19,7
	25,6	25,9	22,7	29,0	23,4	20,1	22,2	24,1	20,8	34,9
	34,6	21,0	24,4	25,7	19,8	22,2	23,7	21,1	34,4	21,9
В-4	31,2	23,0	24,5	33,5	24,2	29,0	21,6	42,9	32,7	20,3
	19,8	21,6	30,9	22,6	27,3	23,2	32,9	33,0	27,8	32,0
	33,1	33,0	31,9	15,2	23,0	42,1	28,6	27,9	34,5	20,2
	24,9	25,5	30,1	31,5	27,5	20,9	16,2	31,8	22,5	24,2
	25,4	17,7	31,7	21,2	22,1	31,9	23,7	26,6	23,8	23,5

	24,5	28,5	12,9	31,9	15,3	19,3	14,7	34,3	13,2	33,3
	30,2	30,0	16,6	24,1	28,3	23,4	22,8	17,1	21,6	29,8
	24,5	16,6	16,5	16,0	26,5	30,9	18,0	16,4	37,4	25,3
	22,8	23,0	25,2	18,6	16,6	34,1	26,3	27,3	23,0	28,7
	22,0	13,5	17,9	29,9	24,0	16,0	25,5	24,8	14,2	30,4
B-5	35,6	20,1	21,2	24,4	28,4	22,0	29,3	15,5	27,3	17,8
	27,6	18,5	19,3	23,1	30,8	27,9	31,2	11,8	25,1	31,1
	38,9	21,8	22,1	21,9	24,0	30,1	23,3	35,7	26,4	20,3
	29,1	28,6	24,7	25,7	29,4	31,4	30,6	28,1	27,2	22,4
	13,7	25,7	27,5	25,6	18,1	26,9	23,6	17,6	17,6	28,5
	16,3	19,7	31,6	16,2	26,4	24,9	27,1	30,9	21,6	34,7
	27,2	29,5	19,6	31,3	18,5	18,0	28,8	28,1	25,6	20,5
	26,0	16,0	23,7	16,5	36,3	24,3	20,3	30,0	22,6	35,4
	22,4	26,9	20,6	30,4	22,3	12,9	29,6	39,1	21,4	26,2
	14,5	30,6	20,9	28,3	14,9	25,7	30,1	21,6	27,6	20,5
B-6	54,8	35,3	38,3	56,0	61,9	39,1	41,6	65,8	58,6	56,1
	58,7	46,0	45,6	42,7	41,4	44,1	51,0	59,5	57,4	39,9
	48,9	48,9	40,5	55,4	46,2	40,2	47,4	62,8	57,2	59,4
	48,4	36,0	51,0	51,8	71,9	48,6	46,9	47,2	56,7	43,9
	47,4	60,6	42,3	59,6	46,7	54,6	60,1	56,1	63,3	63,3
	53,9	42,8	50,5	51,8	32,5	48,5	58,9	64,5	54,1	52,6
	52,4	33,6	45,4	54,3	49,3	44,2	65,5	48,2	51,5	49,8
	40,2	46,6	48,6	50,8	65,4	29,0	65,8	65,9	36,3	48,3
	54,5	46,8	55,0	63,0	38,1	47,8	56,8	49,8	55,4	32,2
	66,3	58,0	40,2	51,8	42,2	48,1	42,6	36,2	50,1	53,0
B-7	48,9	48,1	60,5	36,4	33,2	71,0	50,1	50,7	38,2	44,9
	57,4	69,6	50,2	44,9	45,5	45,6	44,6	64,6	48,2	51,9
	49,9	52,5	47,3	39,0	53,1	56,8	37,3	63,9	52,8	52,9
	42,0	54,2	53,8	57,6	47,2	52,6	48,2	58,5	38,7	48,4
	58,1	38,8	40,9	42,0	67,9	53,8	58,9	43,0	64,6	47,4
	47,4	30,2	64,7	46,8	47,6	36,7	51,8	58,8	59,1	41,7
	52,4	61,5	35,1	48,6	49,7	49,2	59,4	44,4	51,8	54,3
	50,7	47,1	44,0	31,2	63,0	34,2	42,1	49,6	49,9	33,7
	33,4	51,4	52,9	38,1	46,0	53,3	55,0	58,8	40,8	54,0
	36,7	44,7	54,5	58,7	58,7	35,1	48,8	49,4	71,9	46,6
B-8	45,7	58,5	49,6	50,7	53,1	62,8	57,8	49,6	62,0	55,2
	35,0	32,2	57,9	62,6	48,2	68,2	31,9	49,9	63,4	51,8
	44,8	55,1	54,2	53,6	57,6	46,6	63,4	51,6	38,4	48,8
	56,8	43,0	40,4	55,7	49,3	51,7	59,8	46,8	46,5	48,5
	58,1	64,3	33,1	26,3	40,8	50,3	49,1	38,5	42,7	51,4
	55,8	48,2	48,7	44,2	54,5	48,3	58,5	51,1	53,7	47,9
	82,8	46,5	51,8	59,2	35,1	42,5	58,0	68,4	46,2	58,0
	53,7	49,2	57,7	38,9	65,8	39,0	62,3	52,3	46,9	43,4
	51,1	43,1	32,6	57,1	50,5	52,6	50,5	41,6	45,0	56,7
	54,3	51,1	46,5	35,7	56,8	44,4	54,9	53,3	52,9	55,9
B-9	33,3	38,8	38,3	39,6	37,9	48,7	58,4	55,7	61,7	51,9
	35,5	45,9	53,7	55,3	46,3	42,1	48,9	47,3	54,6	46,5
	46,5	28,9	51,0	46,4	51,2	58,8	40,5	53,6	51,7	59,4
	73,4	37,5	54,3	47,8	68,1	70,1	72,2	56,1	47,2	41,8

	53,4	61,0	51,1	52,4	41,2	47,3	63,3	50,7	40,4	51,8
	49,5	48,4	40,2	40,9	43,5	71,2	55,1	50,0	53,8	57,0
	55,7	51,1	38,6	47,1	41,8	49,9	35,7	57,6	40,1	46,6
	58,3	56,4	64,2	65,8	35,2	34,4	32,4	47,7	43,5	64,9
	48,6	48,2	42,6	48,0	53,9	39,5	41,0	58,2	37,9	46,0
	42,2	36,0	47,5	45,5	60,4	48,4	55,4	49,3	51,7	43,3
B-10	50,4	63,7	38,8	46,6	41,3	48,9	47,2	50,1	43,8	31,1
	51,6	47,5	33,9	33,8	41,6	63,9	56,2	59,2	50,5	52,3
	49,8	40,2	60,8	38,9	54,5	60,2	49,4	51,1	46,8	38,0
	61,7	48,7	56,1	57,6	63,2	48,3	58,6	48,0	26,0	41,9
	60,3	31,1	43,5	72,6	56,9	48,2	54,2	55,3	49,5	47,9
	43,4	54,0	40,2	49,0	47,7	56,8	48,4	56,7	51,1	42,6
	58,9	79,6	66,2	53,3	47,1	30,3	34,1	48,0	72,6	54,7
	68,6	31,8	35,7	64,8	45,2	35,0	52,6	36,7	65,3	38,9
	46,4	56,8	52,3	58,9	37,6	54,8	67,1	61,5	37,2	44,8
	46,3	47,3	41,9	68,6	73,4	44,6	56,3	53,7	49,9	42,1
B-11	27,6	24,3	33,5	34,1	17,8	22	23,3	32,2	17,5	25,8
	17,2	24,1	21,2	28,2	30,9	25,9	17,9	22,7	10,9	32,3
	25,1	23,3	28,9	17,9	15,3	28,1	20,2	31,4	23,7	27,1
	27,9	23,3	32,9	33,1	20,4	28,3	33,2	14,5	24,5	17,1
	29,1	25,1	31,4	20,6	31,3	33,6	25,8	18,7	24,1	20,7
	24,9	22	30,9	26,3	20,6	22,7	28,9	30,8	28,2	25,1
	34,2	37,1	35,2	25,5	29	18,2	20	27,1	23,7	22,6
	14,4	24,8	29,8	20,1	21	20,4	25,9	16,5	18,8	26,2
	15,7	21,3	24	23,6	36,6	21,3	28,5	24,8	17,8	20,7
	27,7	35,3	24,3	10,1	18,7	24,3	37,4	29,3	24,4	14,1
B-12	21,9	31	26,4	28,3	23,6	23,6	17,8	16,6	25,3	26,6
	28	34,1	18	23	21,1	39,6	27,3	31,1	21,7	31,2
	30,7	22,6	21,4	30,4	28,2	33	32,9	20,1	34	30,1
	25,1	35,5	22,5	20,1	26,5	38	26,3	30,9	31,4	27,7
	22,6	15,6	33,1	19,8	28,8	20,7	35,5	24,5	30,1	35,5
	34,6	24,1	25,1	17,6	31,7	22,2	33	24,5	30,5	22,5
	17,8	30	22,5	16,5	22,1	29	22,5	20,4	27,9	23
	26	20,2	24,6	18,8	25,6	35,4	17,7	16,6	25	28,5
	22,8	12,3	18,1	26,6	25,8	23,6	22,4	31,2	18,5	24
	32,3	14,1	18,9	24,6	30,1	25,6	23,4	22,5	25,9	25,1
B-13	29	23,4	20,1	22,2	24,1	20,8	34,9	25,6	25,9	22,7
	25,7	19,8	22,2	23,7	21,1	34,4	21,9	34,6	21	24,4
	26,5	16,3	19,9	25,2	20,3	24,9	20,8	22,6	16,6	18,9
	29,9	23,2	23,6	16,1	23,8	21,4	31,3	17,2	17,1	23,9
	17,4	32	29,4	25,3	18,5	29,3	27,6	14,7	24,8	20,6
	14	39,9	28	34,6	21,7	32	20,4	27,6	34,8	19,2
	32,1	19	14	21,9	19,2	19,7	22	21,4	26,9	21,7
	24	23,3	26,3	27,3	13,7	27,3	21,3	22,7	18,7	19,1
	30,1	34,5	23,1	21,5	27,7	23,4	22,4	24,4	26,1	26,2
	20,8	29,5	21,4	18	27,9	26,6	19,7	29,9	23,5	26,5
B-14	25,2	18,6	16,6	34,1	26,3	27,3	23	28,7	22,8	23
	17,9	29,9	24	16	25,5	24,8	14,2	30,4	22	13,5

	24,5	33,5	24,2	29	21,6	42,9	32,7	20,3	31,2	23
	30,9	22,6	27,3	23,2	32,9	33	27,8	32	19,8	21,6
	31,9	15,2	23	42,1	28,6	27,9	34,5	20,2	33,1	33
	30,1	31,5	27,5	20,9	16,2	31,8	22,5	24,2	24,9	25,5
	31,7	21,2	22,1	31,9	23,7	26,6	23,8	23,5	25,4	17,7
	12,9	31,9	15,3	19,3	14,7	34,3	13,2	33,3	24,5	28,5
	16,6	24,1	28,3	23,4	22,8	17,1	21,6	29,8	30,2	30
	16,5	16	26,5	30,9	18	16,4	37,4	25,3	24,5	16,6
B-15	20,6	30,4	22,3	12,9	29,6	39,1	21,4	26,2	22,4	26,9
	20,9	28,3	14,9	25,7	30,1	21,6	27,6	20,5	14,5	30,6
	21,2	24,4	28,4	22	29,3	15,5	27,3	17,8	35,6	20,1
	19,3	23,1	30,8	27,9	31,2	11,8	25,1	31,1	27,6	18,5
	22,1	21,9	24	30,1	23,3	35,7	26,4	20,3	38,9	21,8
	24,7	25,7	29,4	31,4	30,6	28,1	27,2	22,4	29,1	28,6
	27,5	25,6	18,1	26,9	23,6	17,6	17,6	28,5	13,7	25,7
	31,6	16,2	26,4	24,9	27,1	30,9	21,6	34,7	16,3	19,7
	19,6	31,3	18,5	18	28,8	28,1	25,6	20,5	27,2	29,5
B-16	23,7	16,5	36,3	24,3	20,3	30	22,6	35,4	26	16
	63	38,1	47,8	56,8	49,8	55,4	32,2	54,5	46,8	55
	51,8	42,2	48,1	42,6	36,2	50,1	53	66,3	58	40,2
	56	61,9	39,1	41,6	65,8	58,6	56,1	54,8	35,3	38,3
	42,7	41,4	44,1	51	59,5	57,4	39,9	58,7	46	45,6
	55,4	46,2	40,2	47,4	62,8	57,2	59,4	48,9	48,9	40,5
	51,8	71,9	48,6	46,9	47,2	56,7	43,9	48,4	36	51
	59,6	46,7	54,6	60,1	56,1	63,3	63,3	47,4	60,6	42,3
	51,8	32,5	48,5	58,9	64,5	54,1	52,6	53,9	42,8	50,5
B-17	54,3	49,3	44,2	65,5	48,2	51,5	49,8	52,4	33,6	45,4
	50,8	65,4	29	65,8	65,9	36,3	48,3	40,2	46,6	48,6
	38,1	46	53,3	55	58,8	40,8	54	33,4	51,4	52,9
	58,7	58,7	35,1	48,8	49,4	71,9	46,6	36,7	44,7	54,5
	36,4	33,2	71	50,1	50,7	38,2	44,9	48,9	48,1	60,5
	44,9	45,5	45,6	44,6	64,6	48,2	51,9	57,4	69,6	50,2
	39	53,1	56,8	37,3	63,9	52,8	52,9	49,9	52,5	47,3
	57,6	47,2	52,6	48,2	58,5	38,7	48,4	42	54,2	53,8
	42	67,9	53,8	58,9	43	64,6	47,4	58,1	38,8	40,9
B-18	46,8	47,6	36,7	51,8	58,8	59,1	41,7	47,4	30,2	64,7
	48,6	49,7	49,2	59,4	44,4	51,8	54,3	52,4	61,5	35,1
	31,2	63	34,2	42,1	49,6	49,9	33,7	50,7	47,1	44
	57,1	50,5	52,6	50,5	41,6	45	56,7	51,1	43,1	32,6
	35,7	56,8	44,4	54,9	53,3	52,9	55,9	54,3	51,1	46,5
	50,7	53,1	62,8	57,8	49,6	62	55,2	45,7	58,5	49,6
	62,6	48,2	68,2	31,9	49,9	63,4	51,8	35	32,2	57,9
	53,6	57,6	46,6	63,4	51,6	38,4	48,8	44,8	55,1	54,2
	55,7	49,3	51,7	59,8	46,8	46,5	48,5	56,8	43	40,4
	26,3	40,8	50,3	49,1	38,5	42,7	51,4	58,1	64,3	33,1
	44,2	54,5	48,3	58,5	51,1	53,7	47,9	55,8	48,2	48,7
	59,2	35,1	42,5	58	68,4	46,2	58	82,8	46,5	51,8

	38,9	65,8	39	62,3	52,3	46,9	43,4	53,7	49,2	57,7
B-19	42,6	48	53,9	39,5	41	58,2	37,9	46	48,6	48,2
	47,5	45,5	60,4	48,4	55,4	49,3	51,7	43,3	42,2	36
	38,3	39,6	37,9	48,7	58,4	55,7	61,7	51,9	33,3	38,8
	53,7	55,3	46,3	42,1	48,9	47,3	54,6	46,5	35,5	45,9
	51	46,4	51,2	58,8	40,5	53,6	51,7	59,4	46,5	28,9
	54,3	47,8	68,1	70,1	72,2	56,1	47,2	41,8	73,4	37,5
	51,1	52,4	41,2	47,3	63,3	50,7	40,4	51,8	53,4	61
	40,2	40,9	43,5	71,2	55,1	50	53,8	57	49,5	48,4
	38,6	47,1	41,8	49,9	35,7	57,6	40,1	46,6	55,7	51,1
	64,2	65,8	35,2	34,4	32,4	47,7	43,5	64,9	58,3	56,4
B-20	52,3	58,9	37,6	54,8	67,1	61,5	37,2	44,8	46,4	56,8
	41,9	68,6	73,4	44,6	56,3	53,7	49,9	42,1	46,3	47,3
	38,8	46,6	41,3	48,9	47,2	50,1	43,8	31,1	50,4	63,7
	33,9	33,8	41,6	63,9	56,2	59,2	50,5	52,3	51,6	47,5
	60,8	38,9	54,5	60,2	49,4	51,1	46,8	38	49,8	40,2
	56,1	57,6	63,2	48,3	58,6	48	26	41,9	61,7	48,7
	43,5	72,6	56,9	48,2	54,2	55,3	49,5	47,9	60,3	31,1
	40,2	49	47,7	56,8	48,4	56,7	51,1	42,6	43,4	54
	66,2	53,3	47,1	30,3	34,1	48	72,6	54,7	58,9	79,6
	35,7	64,8	45,2	35	52,6	36,7	65,3	38,9	68,6	31,8
B-21	27,7	35,3	24,3	10,1	18,7	24,3	37,4	29,3	24,4	14,1
	34,2	37,1	35,2	25,5	29	18,2	20	27,1	23,7	22,6
	14,4	24,8	29,8	20,1	21	20,4	25,9	16,5	18,8	26,2
	15,7	21,3	24	23,6	36,6	21,3	28,5	24,8	17,8	20,7
	24,9	22	30,9	26,3	20,6	22,7	28,9	30,8	28,2	25,1
	27,6	24,3	33,5	34,1	17,8	22	23,3	32,2	17,5	25,8
	17,2	24,1	21,2	28,2	30,9	25,9	17,9	22,7	10,9	32,3
	25,1	23,3	28,9	17,9	15,3	28,1	20,2	31,4	23,7	27,1
	27,9	23,3	32,9	33,1	20,4	28,3	33,2	14,5	24,5	17,1
	29,1	25,1	31,4	20,6	31,3	33,6	25,8	18,7	24,1	20,7
B-22	18,5	24	22,8	12,3	18,1	26,6	25,8	23,6	22,4	31,2
	25,9	25,1	32,3	14,1	18,9	24,6	30,1	25,6	23,4	22,5
	25,3	26,6	21,9	31	26,4	28,3	23,6	23,6	17,8	16,6
	21,7	31,2	28	34,1	18	23	21,1	39,6	27,3	31,1
	34	30,1	30,7	22,6	21,4	30,4	28,2	33	32,9	20,1
	31,4	27,7	25,1	35,5	22,5	20,1	26,5	38	26,3	30,9
	30,1	35,5	22,6	15,6	33,1	19,8	28,8	20,7	35,5	24,5
	30,5	22,5	34,6	24,1	25,1	17,6	31,7	22,2	33	24,5
	27,9	23	17,8	30	22,5	16,5	22,1	29	22,5	20,4
	25	28,5	26	20,2	24,6	18,8	25,6	35,4	17,7	16,6
B-23	21,5	27,7	23,4	22,4	24,4	26,1	26,2	30,1	34,5	23,1
	18	27,9	26,6	19,7	29,9	23,5	26,5	20,8	29,5	21,4
	22,2	24,1	20,8	34,9	25,6	25,9	22,7	29	23,4	20,1
	23,7	21,1	34,4	21,9	34,6	21	24,4	25,7	19,8	22,2
	25,2	20,3	24,9	20,8	22,6	16,6	18,9	26,5	16,3	19,9
	16,1	23,8	21,4	31,3	17,2	17,1	23,9	29,9	23,2	23,6

	25,3	18,5	29,3	27,6	14,7	24,8	20,6	17,4	32	29,4
	34,6	21,7	32	20,4	27,6	34,8	19,2	14	39,9	28
	21,9	19,2	19,7	22	21,4	26,9	21,7	32,1	19	14
	27,3	13,7	27,3	21,3	22,7	18,7	19,1	24	23,3	26,3
B-24	28,3	23,4	22,8	17,1	21,6	29,8	30,2	30	16,6	24,1
	26,5	30,9	18	16,4	37,4	25,3	24,5	16,6	16,5	16
	16,6	34,1	26,3	27,3	23	28,7	22,8	23	25,2	18,6
	24	16	25,5	24,8	14,2	30,4	22	13,5	17,9	29,9
	24,2	29	21,6	42,9	32,7	20,3	31,2	23	24,5	33,5
	27,3	23,2	32,9	33	27,8	32	19,8	21,6	30,9	22,6
	23	42,1	28,6	27,9	34,5	20,2	33,1	33	31,9	15,2
	27,5	20,9	16,2	31,8	22,5	24,2	24,9	25,5	30,1	31,5
	22,1	31,9	23,7	26,6	23,8	23,5	25,4	17,7	31,7	21,2
	15,3	19,3	14,7	34,3	13,2	33,3	24,5	28,5	12,9	31,9
B-25	18,5	18	28,8	28,1	25,6	20,5	27,2	29,5	19,6	31,3
	36,3	24,3	20,3	30	22,6	35,4	26	16	23,7	16,5
	22,3	12,9	29,6	39,1	21,4	26,2	22,4	26,9	20,6	30,4
	14,9	25,7	30,1	21,6	27,6	20,5	14,5	30,6	20,9	28,3
	28,4	22	29,3	15,5	27,3	17,8	35,6	20,1	21,2	24,4
	30,8	27,9	31,2	11,8	25,1	31,1	27,6	18,5	19,3	23,1
	24	30,1	23,3	35,7	26,4	20,3	38,9	21,8	22,1	21,9
	29,4	31,4	30,6	28,1	27,2	22,4	29,1	28,6	24,7	25,7
	18,1	26,9	23,6	17,6	17,6	28,5	13,7	25,7	27,5	25,6
	26,4	24,9	27,1	30,9	21,6	34,7	16,3	19,7	31,6	16,2
B-26	44,2	65,5	48,2	51,5	49,8	52,4	33,6	45,4	54,3	49,3
	29	65,8	65,9	36,3	48,3	40,2	46,6	48,6	50,8	65,4
	47,8	56,8	49,8	55,4	32,2	54,5	46,8	55	63	38,1
	48,1	42,6	36,2	50,1	53	66,3	58	40,2	51,8	42,2
	39,1	41,6	65,8	58,6	56,1	54,8	35,3	38,3	56	61,9
	44,1	51	59,5	57,4	39,9	58,7	46	45,6	42,7	41,4
	40,2	47,4	62,8	57,2	59,4	48,9	48,9	40,5	55,4	46,2
	48,6	46,9	47,2	56,7	43,9	48,4	36	51	51,8	71,9
	54,6	60,1	56,1	63,3	63,3	47,4	60,6	42,3	59,6	46,7
	48,5	58,9	64,5	54,1	52,6	53,9	42,8	50,5	51,8	32,5
B-27	59,4	44,4	51,8	54,3	52,4	61,5	35,1	48,6	49,7	49,2
	42,1	49,6	49,9	33,7	50,7	47,1	44	31,2	63	34,2
	55	58,8	40,8	54	33,4	51,4	52,9	38,1	46	53,3
	48,8	49,4	71,9	46,6	36,7	44,7	54,5	58,7	58,7	35,1
	50,1	50,7	38,2	44,9	48,9	48,1	60,5	36,4	33,2	71
	44,6	64,6	48,2	51,9	57,4	69,6	50,2	44,9	45,5	45,6
	37,3	63,9	52,8	52,9	49,9	52,5	47,3	39	53,1	56,8
	48,2	58,5	38,7	48,4	42	54,2	53,8	57,6	47,2	52,6
	58,9	43	64,6	47,4	58,1	38,8	40,9	42	67,9	53,8
	51,8	58,8	59,1	41,7	47,4	30,2	64,7	46,8	47,6	36,7
B-28	42,5	58	68,4	46,2	58	82,8	46,5	51,8	59,2	35,1
	39	62,3	52,3	46,9	43,4	53,7	49,2	57,7	38,9	65,8
	52,6	50,5	41,6	45	56,7	51,1	43,1	32,6	57,1	50,5

	44,4	54,9	53,3	52,9	55,9	54,3	51,1	46,5	35,7	56,8
	62,8	57,8	49,6	62	55,2	45,7	58,5	49,6	50,7	53,1
	68,2	31,9	49,9	63,4	51,8	35	32,2	57,9	62,6	48,2
	46,6	63,4	51,6	38,4	48,8	44,8	55,1	54,2	53,6	57,6
	51,7	59,8	46,8	46,5	48,5	56,8	43	40,4	55,7	49,3
	50,3	49,1	38,5	42,7	51,4	58,1	64,3	33,1	26,3	40,8
	48,3	58,5	51,1	53,7	47,9	55,8	48,2	48,7	44,2	54,5
В-29	49,9	35,7	57,6	40,1	46,6	55,7	51,1	38,6	47,1	41,8
	34,4	32,4	47,7	43,5	64,9	58,3	56,4	64,2	65,8	35,2
	39,5	41	58,2	37,9	46	48,6	48,2	42,6	48	53,9
	48,4	55,4	49,3	51,7	43,3	42,2	36	47,5	45,5	60,4
	48,7	58,4	55,7	61,7	51,9	33,3	38,8	38,3	39,6	37,9
	42,1	48,9	47,3	54,6	46,5	35,5	45,9	53,7	55,3	46,3
	58,8	40,5	53,6	51,7	59,4	46,5	28,9	51	46,4	51,2
	70,1	72,2	56,1	47,2	41,8	73,4	37,5	54,3	47,8	68,1
	47,3	63,3	50,7	40,4	51,8	53,4	61	51,1	52,4	41,2
	71,2	55,1	50	53,8	57	49,5	48,4	40,2	40,9	43,5
В-30	30,3	34,1	48	72,6	54,7	58,9	79,6	66,2	53,3	47,1
	35	52,6	36,7	65,3	38,9	68,6	31,8	35,7	64,8	45,2
	54,8	67,1	61,5	37,2	44,8	46,4	56,8	52,3	58,9	37,6
	44,6	56,3	53,7	49,9	42,1	46,3	47,3	41,9	68,6	73,4
	48,9	47,2	50,1	43,8	31,1	50,4	63,7	38,8	46,6	41,3
	63,9	56,2	59,2	50,5	52,3	51,6	47,5	33,9	33,8	41,6
	60,2	49,4	51,1	46,8	38	49,8	40,2	60,8	38,9	54,5
	48,3	58,6	48	26	41,9	61,7	48,7	56,1	57,6	63,2
	48,2	54,2	55,3	49,5	47,9	60,3	31,1	43,5	72,6	56,9
	56,8	48,4	56,7	51,1	42,6	43,4	54	40,2	49	47,7

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое критерии согласия?
2. В чем состоит суть критерия Пирсона?
3. Расскажите алгоритм проверки критерия согласия?
4. Если нет оснований отвергать нулевую гипотезу, то о чем это говорит?

Тема 5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ

Цель: в результате изучения данной темы студент должен быть способен на основе описания процессов и явлений строить стандартные теоретические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты.

Оборудование: листы заданий для аудиторной работы, карточки с ИЗ, калькуляторы.

Форма проведения: занятие – практикум, включающий в себя следующие этапы: актуализация теоретических знаний, пробное решение несколькими студентами заданий у доски, самостоятельная работа студентов, контроль преподавателем индивидуальных заданий (ИЗ) студентов, выполненных самостоятельно.

Форма контроля: проверка выполнения ИЗ -4.

Основные формулы

Выборочный коэффициент корреляции

$$r_B = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Выборочное уравнение прямой регрессии Y на X:

$$y_x - \bar{y} = r_B \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$$

Выборочное уравнение прямой регрессии X на Y:

$$x_y - \bar{x} = r_B \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y})$$

Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

$$H_0: r_B = 0 \quad H_1: r_B \neq 0,$$

$$T_{\text{набл}} = |r_B| \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r_B^2}}$$

$k = n-2$ $t_{\text{кр}}(\alpha; k)$ по приложению №3.

$$\text{Если } |T_{\text{набл}}| < t_{\text{кр}} \Rightarrow H_0$$

$$\text{Если } |T_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}} \Rightarrow H_1$$

Ранговая корреляция (коэффициент ранговой корреляции Спирмена)

$$\rho_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n^3 - n}$$

Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента ранговой корреляции Спирмена

$$H_0: \rho_B = 0, \quad H_1: \rho_B \neq 0$$

$$T_{\text{набл}} = |\rho_B| \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-\rho_B^2}}$$

$t_{\text{кр}}(\alpha; k)$ по приложению №3

$$\text{Если } T_{\text{набл}} < t_{\text{кр}} \Rightarrow H_0. \quad \text{Если } T_{\text{набл}} > t_{\text{кр}} \Rightarrow H_1$$

Решение типового варианта

1. Определить коэффициент линейной корреляции между двумя рядами показателей. Найти уравнения выборочной прямой регрессии Y на X и X на Y.

x	1	2	3	3	7	12
y	2	3	8	4	5	8

При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции. Другими словами, требуется проверить, является ли значимой корреляционная связь между этими рядами.

Решение.

$$1. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1+2+3+3+7+12}{6} = 4,67$$

$$2. \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i \cdot x_i^2}{n} = \frac{n_1 \cdot x_1^2 + n_2 \cdot x_2^2 + \dots + n_n \cdot x_n^2}{n} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 7^2 + 12^2}{6} = 36$$

$$3. D(X) = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 36 - 4,67^2 = 14,19$$

$$4. \sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{14,19} = 3,77$$

$$5. \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{2+3+8+4+5+8}{6} = 5$$

$$6. \overline{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i \cdot y_i^2}{n} = \frac{2^2 + 3^2 + 8^2 + 4^2 + 5^2 + 8^2}{6} = 30,33$$

$$7. D(Y) = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 30,33 - 5^2 = 5,33$$

$$8. \sigma_y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{5,33} = 2,31$$

9.

$$\overline{x \cdot y} = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n}{n} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 12 \cdot 8}{6} = 29,17$$

$$10. r_b = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{29,17 - 4,67 \cdot 5}{3,77 \cdot 2,31} = 0,67$$

11. Найдем выборочное уравнение прямой регрессии Y на X:

$$y_x - 5 = 0,67 \cdot \frac{2,31}{3,77} (x - 4,67)$$

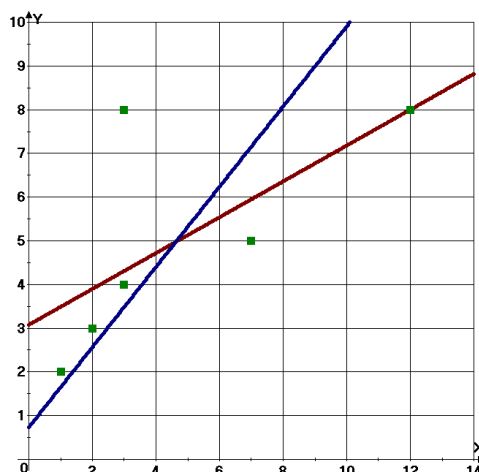
$$y_x = 0,41x + 3,08$$

12. Найдем выборочное уравнение прямой регрессии X на Y:

$$x_y - 4,67 = 0,67 \cdot \frac{3,77}{2,31} (y - 5)$$

$$x_y = 1,09y - 0,8$$

Изобразим на одном чертеже точками эмпирические данные и выборочные уравнения прямой регрессии Y на X и X на Y.



Проверим, является ли значимой корреляционная связь между этими рядами
Вычислим наблюдаемое значение критерия

$$T_{\text{набл}} = |r_b| \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r_b^2}} = |0,67| \cdot \sqrt{\frac{6-2}{1-0,67^2}} = 1,805$$

Найдем критическую точку двусторонней критической области распределения Стьюдента по уровню значимости $\alpha = 0,01$ и числу степеней свободы $k=n-1=6-2=4$. Найдем критическую точку (приложение 3): $t_{\text{кр}}(0,01;8) = 4,6$

$$\text{Итак, } T_{\text{набл}} = 1,805 < t_{\text{кр}}(0,01;8) = 4,6$$

Так как $T_{\text{набл}} < t_{\text{кр}}$ - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции. Другими словами, корреляционная связь между оценками по двум тестам незначимая.

2. Два контролера А и В расположили образцы изделий, изготовленных девятью мастерами, в порядке ухудшения качества (в скобках помещены порядковые номера изделий одинакового качества):

(А) 1 2 (3, 4, 5) (6, 7, 8, 9)
(В) 2 1 4 3 5 (6, 7) 8 9

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена между рангами изделий, присвоенными им двумя контролерами. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции Спирмена. Другими словами, требуется проверить, является ли значимой ранговая корреляционная связь между оценками по двум тестам.

Решение. Учитывая, что ранги изделий одинакового качества равны среднему арифметическому порядковых номеров изделий: $\frac{3+4+5}{3} = 4, \frac{6+7+8+9}{4} = 7,5,$

$\frac{6+7}{2} = 6,5$, напомним последовательности рангов, присвоенные изделиям контролерами:

x_i 1 2 4 4 4 7,5 7,5 7,5 7,5
 y_i 2 1 4 3 5 6,5 6,5 8 9

Найдем выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена, учитывая, что $\sum d_i^2 = 8,5, \quad n = 9$:

$$\rho_b = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6 \cdot 8,5}{9^3 - 9} = 0,93$$

Итак, $\rho_b = 0,93$.

Вычислим наблюдаемое значение критерия

$$T_{\text{набл}} = |\rho_b| \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-\rho_b^2}} = |0,64| \cdot \sqrt{\frac{10-2}{1-0,64^2}} = 2,356$$

Найдем критическую точку двусторонней критической области распределения Стьюдента по уровню значимости $\alpha = 0,01$ и числу степеней свободы $k=n-1=10-2=8$ (приложение 3): $t_{\text{кр}}(0,01;8) = 3,36$.

Итак, $T_{\text{набл}} = 2,356, t_{\text{кр}}(0,01;8) = 3,36$

Так как $T_{\text{набл}} < t_{\text{кр}}(0,01;8)$ -нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента ранговой корреляции Спирмена. Другими словами, ранговая корреляционная связь между оценками по двум тестам незначимая.

ИЗ-4

1. Коэффициент линейной корреляции. Определить коэффициент линейной корреляции между двумя рядами показателей X и Y (таблица 7). При уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции (т.е. требуется проверить, является ли значимой корреляционная связь между этими рядами).

Результат представить по следующей форме:

Дано:

x						
y						

$\alpha = n=$

	$\bar{x}$	$\overline{x^2}$	D(X)	σ_x	$\bar{y}$	$\overline{y^2}$	D(Y)	σ_y	$\overline{x \cdot y}$	r_s	$T_{\text{набл}}$	$t_{\text{кр}}(\alpha; k)$
Формулы для нахождения												по таблице приложения 3
Результат												

Вывод:

2. Ранговая корреляция(Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена). Преподавателя интересует, влияет ли интерес студентов к учебному курсу на их успеваемость. С помощью некоторой методики удалось измерить величину интереса студентов к учению и выразить его в виде ряда чисел X. Так же были определены средние оценки этих же студентов по данному курсу, представленные соответственно рядом Y (таблица 8).

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена между двумя показателями. При уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента ранговой корреляции Спирмена (проверить, является ли значимой ранговая корреляционная связь между этими двумя показателями).

Результат представить по следующей форме:

Дано:

X	...	...	...	...	...	...
Y						

$\alpha = n=$

Интерес	...	...	...	...	...	...
---------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Ранг x_i						
Средние оценки						
Ранг y_i						
$d_i = x_i - y_i$						
d_i^2						
$\sum d_i^2$						
ρ_B						
$T_{наб.л}$						
$t_{кр}(\alpha; k)$						

Вывод:

Таблица 7 Данные к заданию 1 ИЗ-4

В								α	В								α
1	X	1	1	3	5	7	8	0,001	16	X	4	6	7	12	16	17	0,01
	Y	2	4	5	10	15	21			Y	1	11	14	18	22	24	
2	X	1	2	4	8	10	12	0,002	17	X	1	7	7	18	16	24	0,02
	Y	5	1	7	10	15	21			Y	23	12	11	1	9	3	
3	X	2	4	5	8	9	11	0,01	18	X	2	5	7	10	11	16	0,05
	Y	24	15	9	6	3	1			Y	6	5	11	16	13	23	
4	X	5	6	8	9	13	17	0,02	19	X	1	2	4	5	7	11	0,1
	Y	5	1	5	10	22	31			Y	2	3	5	6	15	28	
5	X	3	4	7	9	13	71	0,05	20	X	1	5	8	9	12	22	0,001
	Y	14	12	9	1	5	2			Y	5	4	5	10	28	33	
6	X	1	3	4	6	11	18	0,1	21	X	4	4	7	7	13	15	0,002
	Y	4	1	6	9	25	21			Y	11	12	10	1	6	2	
7	X	2	3	10	18	19	27	0,001	22	X	2	3	6	6	14	18	0,01
	Y	26	14	19	7	3	2			Y	5	4	6	8	17	21	
8	X	4	6	7	12	16	17	0,002	23	X	1	8	10	13	16	24	0,02
	Y	1	18	14	15	22	35			Y	17	14	12	7	3	1	
9	X	1	5	7	10	16	24	0,01	24	X	4	4	7	15	16	20	0,05
	Y	28	12	15	1	7	3			Y	1	13	14	15	24	28	
10	X	3	5	7	8	11	17	0,02	25	X	3	5	10	10	16	22	0,1
	Y	6	1	11	15	13	27			Y	21	11	15	1	9	3	
11	X	1	4	5	10	19	31	0,05	26	X	1	1	3	5	7	8	0,001
	Y	27	19	9	7	3	2			Y	2	4	5	10	15	21	
12	X	4	8	8	9	10	17	0,1	27	X	1	2	4	8	10	12	0,002
	Y	9	1	2	3	27	34			Y	5	1	7	10	15	21	
13	X	2	7	10	12	13	17	0,001	28	X	2	4	5	8	9	11	0,01
	Y	34	28	21	6	4	3			Y	24	15	9	6	3	1	
14	X	1	3	5	5	7	10	0,002	29	X	5	6	8	9	13	17	0,02
	Y	2	4	6	10	19	16			Y	5	1	5	10	22	31	
15	X	1	5	4	8	10	12	0,01	30	X	3	4	7	9	13	71	0,05

	Y	8	1	12	10	20	21			Y	14	12	9	1	5	2	
--	---	---	---	----	----	----	----	--	--	---	----	----	---	---	---	---	--

Таблица 8 Данные к заданию 2 ИЗ-4

B								α
1	X	9	5	8	7	4	8	0,1
	Y	5	3,5	4,8	3,4	2,8	4,3	
2	X	7	5	9	6	2	7	0,05
	Y	4,1	3,7	4,6	4,1	3,8	2,9	
3	X	5	6	10	6	4	3	0,02
	Y	3,4	2,3	3,7	3,4	4,2	5	
4	X	7	5	8	7	8	9	0,01
	Y	3,4	4,5	2,2	4,5	2,9	4,9	
5	X	5	1	6	7	4	6	0,002
	Y	2,9	2	3,6	4,6	3,1	4	
6	X	8	7	3	5	9	7	0,001
	Y	4,5	4,2	2,4	4,2	4,8	3,9	
7	X	3	6	8	4	6	10	0,1
	Y	2,8	3,5	4,5	3,1	3,7	4,9	
8	X	2	5	6	7	5	3	0,05
	Y	2,1	2,8	4,3	4,8	3,1	4,3	
9	X	5	7	8	3	7	6	0,02
	Y	3,4	4,2	4,6	2,8	4,4	4,3	
10	X	6	8	10	3	3	4	0,01
	Y	3,9	4,3	4,9	2,4	3,5	4,1	
11	X	8	6	8	7	6	8	0,002
	Y	5	3,4	4,8	3,6	2,9	4,3	
12	X	6	5	10	6	3	6	0,001
	Y	4,2	3,7	4,7	4,1	3,6	2,8	
13	X	5	7	10	7	3	3	0,1
	Y	3,5	2,9	4,7	3,4	4,2	5	
14	X	6	4	8	8	8	9	0,05
	Y	3,8	4,5	2,2	4,5	2,7	4,2	
15	X	6	2	6	8	2	6	0,02
	Y	3,9	2,1	3,6	4,6	3,6	4	
16	X	6	2	4	7	3	7	0,02
	Y	4,2	4	3,8	4,3	2,4	4,5	
17	X	5	5	9	6	7	6	0,01
	Y	2,5	3,8	4,9	3,7	4,9	3,2	
18	X	8	3	7	8	4	7	0,002
	Y	4,3	2,3	4,5	4,3	2,3	4,2	
19	X	5	7	2	8	9	5	0,001
	Y	3,6	4,4	2,1	4,4	4,8	3,2	

20	X	7	4	9	3	8	4	0,1
	Y	4,4	3,1	4,6	2,4	4,3	2,4	
21	X	7	4	7	5	3	9	0,05
	Y	4,2	3,4	4,6	3,4	2,9	4,5	
22	X	7	4	8	9	5	6	0,02
	Y	3,3	2,4	4,5	4,5	2,4	4,4	
23	X	6	6	3	7	10	4	0,01
	Y	3,4	4,6	2,7	4,6	4,8	3,5	
24	X	8	3	8	4	9	4	0,002
	Y	4,6	2,1	4,6	2,3	4,3	2,5	
25	X	8	4	6	6	3	8	0,001
	Y	4,6	3,2	4,6	3,2	2,8	4,5	
26	X	9	5	8	7	4	8	0,1
	Y	5	3,5	4,8	3,4	2,8	4,3	
27	X	7	5	9	6	2	7	0,05
	Y	4,1	3,7	4,6	4,1	3,8	2,9	
28	X	5	6	10	6	4	3	0,02
	Y	3,4	2,3	3,7	3,4	4,2	5	
29	X	7	5	8	7	8	9	0,01
	Y	3,4	4,5	2,2	4,5	2,9	4,9	
30	X	5	1	6	7	4	6	0,002
	Y	2,9	2	3,6	4,6	3,1	4	

Вопросы для самоконтроля

1. Запишите формулу для нахождения коэффициента линейной корреляции.
2. Что характеризует коэффициент корреляции?
3. В каких пределах могут изменяться значения коэффициента корреляции?
4. Что такое ложная корреляция?
5. Объясните алгоритм нахождения коэффициента корреляции.
6. В чем состоит проверка значимости коэффициента корреляции?
7. Если при проверки значимости коэффициента корреляции нет оснований отвергать нулевую гипотезу, то о чем это говорит?
8. В каких случаях необходимо использовать ранговую корреляцию?

Тема 6. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Цель: в результате изучения данной темы студент должен быть способен на основе описания процессов и явлений строить стандартные теоретические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты.

Вопросы:

1. Понятие о дисперсионном анализе.
2. Общая, факторная и остаточная суммы.
3. Сравнение нескольких средних методом дисперсионного анализа.

Практические задания

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми генеральными дисперсиями.

1)

Номер испытания i	Уровни фактора F_j				
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1	42	66	35	64	70
2	55	91	50	70	79
3	67	96	60	79	88
4	67	98	69	81	90
$\overline{x}_{гj}$	57,75	87,75	53,50	73,50	81,75

2)

Номер испытания i	Уровни фактора F_j			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	6	6	9	7
2	7	7	12	9
3	8	11	13	10
4	11	12	14	10
$\overline{x}_{гj}$	8	9	12	9

Вопросы для самоконтроля:

1. В чём состоит суть метода дисперсионного анализа и когда его применяют на практике?
2. Приведите общую схему сравнения нескольких средних методом дисперсионного анализа.

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы:

1. Матальцкий М. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / М. А. Матальцкий, Г. А. Хацкевич. - Минск: Вышэйшая школа, 2017. - 592 с. - ISBN 978-985-06-2855-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/90834.html>
2. Чернова Н. М. Основы теории вероятностей : учебное пособие / Н. М. Чернова. - 3-е изд. - Москва, Саратов: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2020. - 107 с. - ISBN 978-5-4497-0348-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/89462.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Климов Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Г. П. Климов. - Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2011. - 368 с. - ISBN 978-5-211-05846-0. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/13115.html>
2. Гусак А. А. Теория вероятностей. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. - Минск: ТетраСистемс, 2013. - 287 с. - ISBN 978-985-536-385-0. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28244.html>
3. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие (курс лекций) / Е. О. Тарасенко, И. В. Зайцева, П. К. Корнеев, А. В. Гладков. - Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2018. - 229 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/92605.html>

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
- <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
- <http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.
- <http://www.mathedu.ru/> Электронная библиотека по математике и вопросам ее преподавания. Включает [популярные книги и пособия](#), [методические руководства](#), [учебники](#), [журналы](#), [исторические работы](#), [авторефераты](#), [диафильмы](#).
- <http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.
- <http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).
- <http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Методические указания по организации и проведению
самостоятельной работы**

по дисциплине

Теория вероятностей и математическая статистика

для студентов направления подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студента).

Самостоятельная работа студента является важным видом учебной и научной деятельности студента. Федеральным государственным образовательным стандартом предусматривается значительный объем времени из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу. В связи с этим, обучение включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому самостоятельная работа должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования – подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности.

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

Самостоятельная работа студента предполагает, прежде всего, его научно-исследовательскую и практическую деятельность, поскольку именно эти виды учебной работы в первую очередь готовят к самостоятельному выполнению профессиональных задач. Конечной целью самостоятельной работы является организация самостоятельной познавательной деятельности, формирование умения самостоятельно анализировать информацию, выделять главное и второстепенное.

Основными формами самостоятельной работы студентов по дисциплине **«Теория вероятностей»** является подготовка к практическим занятиям и подготовка к экзамену.

В результате освоения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» формируются общепрофессиональные компетенции ОПК-1, ОПК-3, в соответствии с которыми студент должен:

Знать:

методы использования математического аппарата теории вероятностей для решения прикладных задач.

Уметь:

использовать математический аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач.

Владеть:

навыками использования математического аппарата теории вероятностей для решения прикладных задач.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «Теория вероятностей»

Самостоятельная работа проводится в виде подготовки к практическим занятиям по темам дисциплины «Теория вероятностей» и подготовка к сдаче экзамена. Основной целью этих видов самостоятельной работы является улучшение профессиональной подготовки бакалавров высшей квалификации, направленное на формирование действенной системы фундаментальных и профессиональных знаний, умений и навыков, которые они могли бы свободно и самостоятельно применять в практической деятельности.

Цели самостоятельной работы:

- научить студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свою квалификацию.
- закрепление, расширение и углубление знаний, умений и навыков, полученных студентами на аудиторных занятиях под руководством преподавателей;
- изучение студентами дополнительных материалов по изучаемым дисциплинам и умение выбирать необходимый материал из различных источников; воспитание у студентов самостоятельности, организованности, самодисциплины, творческой активности, потребности развития познавательных способностей и упорства в достижении поставленных целей.

Предлагаемый подход к освоению материала усиливает мотивацию к аудиторной и внеаудиторной активности, что обеспечивает необходимый уровень знаний по изучаемым дисциплинам.

Приступая к изучению учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», студенты должны ознакомиться с учебной программой, учебной, научной и методической литературой, имеющейся в библиотеке, получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

В ходе лекционных занятий вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью выяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

В ходе подготовки к практическим занятиям изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях: журналах, газетах и т.д. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой. После подведения итогов лабораторного занятия устранить недостатки, отмеченные преподавателем.

В ходе организации самостоятельной работы **решаются следующие задачи:**

- углублять и расширять их профессиональные знания;
- формировать у них интерес к учебно-познавательной деятельности;
- развивать у бакалавров самостоятельность, активность, ответственность;
- развивать познавательные способности специалистов.

Учебный процесс в высшем учебном заведении в значительной степени строится на самостоятельной работе студентов, без которой трудно в полной мере овладеть сложным программным материалом и научиться, в дальнейшем, постоянно совершенствовать приобретенные знания и умения.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Как уже отмечалось, самостоятельная работа по изучению теоретического материала (а также самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях) – это важнейшее условие формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

- Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать».

- Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

- Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).

- Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.

- При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...

- Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

- Если книга – Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора (это очень хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).

- Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать), и это может занять немалое время (у кого-то – до нескольких недель и даже месяцев); опыт показывает, что после этого студент каким-то «чудом» начинает буквально заглатывать книги и чуть ли не видеть «сквозь обложку», стоящая это работа или нет...

- «Либо читайте, либо перелистывайте материал, но не пытайтесь читать быстро... Если текст меня интересует, то чтение, размышление и даже фантазирование по этому поводу сливаются в единый процесс, в то время как вынужденное скорочтение не только не способствует качеству чтения, но и не приносит чувства удовлетворения, которое мы получаем, размышляя о прочитанном», – советует Г. Селье (Селье, 1987. – С. 325-326).

- Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент (или молодой ученый) будет как бы искать аргументы

«за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Проблема лишь в том, как найти «свою» идею...

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того насколько осознанно читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют четыре основные установки в чтении научного текста:

1. **информационно-поисковый** (задача – найти, выделить искомую информацию)
2. **усваивающая** (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)
3. **аналитико-критическая** (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)
4. **творческая** (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких видов чтения:

1. **библиографическое** – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
2. **просмотровое** – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
3. **ознакомительное** – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;
4. **изучающее** – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;
5. **аналитико-критическое и творческое чтение** – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВИДАМ РАБОТ, ПРЕДУСМОТРЕННЫХ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Предполагается, что отдельные вопросы тем дисциплины изучаются студентами самостоятельно. Знания указанных вопросов проверяется наличием конспектов и

собеседованием. Ниже приведены вопросы для собеседования по всем темам дисциплины «Теория вероятностей». Ответы на теоретические вопросы в рамках каждого практического занятия (собеседование) показывают умения и навыки студентов анализировать теоретический материал и готовность к применению теоретических знаний в практической деятельности.

Данное оценочное мероприятие проводится на каждом практическом занятии на основании материалов и знаний, полученных на лекциях, а также при изучении основной и дополнительной литературы.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования материалами лекций, основной и дополнительной литературы, а также интернет-ресурсов.

При проверке задания оцениваются:

- правильность ответов;
- чёткое знание терминологии;
- умение грамотно, четко и последовательно излагать материал;
- использование дополнительной литературы при подготовке;
- умение анализировать теоретический материал и сопоставлять его с практикой;
- умение приводить конкретные примеры.

В процессе самостоятельного изучения отдельных вопросов тем дисциплины рекомендуется работа с литературой, перечень которой приведен в конце методических указаний.

Вопросы для собеседования

Собеседование №1 Базовый уровень

1. Основные понятия теории вероятностей.
2. Классификация событий.
3. Случайные события и их вероятности.
4. Классическое, геометрическое и статистическое определение вероятности.
5. Комбинаторика, основные правила комбинаторики.
6. Виды соединений: перестановки, размещения, сочетания без повторений.
7. Основные формулы комбинаторики и их применение к вычислению вероятностей.
8. Совместные и несовместные события, определение, примеры.
9. Зависимые и независимые события, примеры.
10. Алгебра событий: сумма и произведение событий, примеры.
11. Сумма совместных и несовместных событий.
12. Произведение зависимых и независимых событий.
13. Вычисление вероятности события, которое может появиться с одним из событий, образующих полную группу (формула полной вероятности).
14. Схема Бернулли.
15. Формула Бернулли. Условия её применения.
16. Условия применения локальной теоремы Муавра-Лапласа, отличие условий применения от формулы Бернулли. Вычисление вероятности появления события в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз, интегральная теорема Муавра-Лапласа.
17. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.

Повышенный уровень

1. Предмет теории вероятностей. Исторический обзор развития теории вероятностей как науки.
2. Основные разделы современной теории вероятностей.
3. Связь между теорией вероятностей и математической статистикой.
4. Перестановки, размещения, сочетания с повторениями.
5. Условная вероятность.

6. Полная группа событий, противоположные события.
7. Вероятность появления хотя бы одного события.
8. Вероятность перераспределённых гипотез (формула Байеса).
9. Вывод формулы Бернулли.
10. Найвероятнейшее число наступления события.
11. Условия применения формулы Пуассона, отличие от условий применения формулы Бернулли и локальной теоремы Муавра-Лапласа.

Собеседование №2

Базовый уровень

1. Понятие случайной величины. Виды случайных величин и законы их распределения.
2. Числовые характеристики дискретной случайной величины.
3. Биномиальное распределение, числовые характеристики.
4. Распределение Пуассона, числовые характеристики.
5. Геометрическое распределение, числовые характеристики.
6. Непрерывная случайная величина. Дифференциальная и интегральная функции распределения, определение, свойства, взаимосвязь.
7. Определение вероятности попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.
8. Нахождение числовых характеристик непрерывной случайной величины.
9. Равномерное распределение. Числовые характеристики.
10. Нормальное распределение. Числовые характеристики.
11. Показательное распределение. Числовые характеристики

Повышенный уровень

1. Сформулируйте и докажите свойства математического ожидания дискретной случайной величины.
2. Сформулируйте и докажите свойства дисперсии дискретной случайной величины.
3. Понятие многомерной случайной величины.
4. Функция распределения многомерной случайной величины.
5. Плотность вероятности двумерной случайной величины. Условные законы распределения.
6. Числовые характеристики двумерной случайной величины.
7. Выведите формулы для вычисления числовых характеристик случайной величины, имеющей равномерное распределение.
8. Выведите формулы для вычисления числовых характеристик случайной величины, имеющей показательное распределение.
9. В чём заключается правило 3-х σ , для какого закона распределения оно справедливо?

Собеседование №3

Базовый уровень

1. Какие теоремы входят в «закон больших чисел»?
2. Запишите неравенство Чебышева, при решении каких задач оно применяется.
3. Теорема Чебышева.
4. Неравенство Маркова.

Повышенный уровень

1. Сформулируйте теорему Бернулли.
2. Центральная предельная теорема.

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка **«отлично»** выставляется студенту, если студент показал глубокое, прочное и аргументированное освоение учебного материала по теме, при этом поставленные вопросы (включая вопросы повышенного уровня) раскрыты последовательно, четко и логически стройно, в полном исчерпывающем объеме. Основные категории, понятия и определения темы сформулированы правильно и при ответе не допущено ошибок.

Оценка **«хорошо»** выставляется студенту, если студент показал твердое знание базового учебного материала по теме, при этом поставленные вопросы раскрыты грамотно и по существу, в достаточно полном объеме. Основные категории, понятия и определения темы сформулированы правильно, но при ответе допущены отдельные неточности или одна ошибка.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется студенту, если студент показал знание только базовой части темы, при этом поставленные вопросы раскрыты с нарушением логической последовательности или не в полном объеме. В ходе ответа были допущены неточные формулировки основных определений, понятий и теорем заданной темы, а также ошибки (не более двух) или ряд незначительных неточностей, не исказивших существенно суть ответа.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется студенту, если студент не знает значительной части вопросов темы, допускает существенные ошибки (более двух) и существенно искажает суть излагаемого материала. Оценка неудовлетворительно выставляется также, если студент отказался проходить собеседование.

Методические указания по подготовке к экзамену

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается экзаменом. Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

Экзаменационная сессия - это серия экзаменов, установленных учебным планом. Между экзаменами интервал 3-4 дня. Не следует думать, что 3-4 дня достаточно для успешной подготовки к экзаменам.

В эти 3-4 дня нужно систематизировать уже имеющиеся знания. На консультации перед экзаменом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к экзаменам те же, что и при занятиях в течение семестра, но соблюдаться они должны более строго. Во-первых, очень важно соблюдение режима дня; сон не менее 8 часов в сутки, занятия заканчиваются не позднее, чем за 2-3 часа до сна. Оптимальное время занятий, особенно по математике - утренние и дневные часы. В перерывах между занятиями рекомендуются прогулки на свежем воздухе, неустойчивые занятия спортом. Во-вторых, наличие хороших собственных конспектов лекций. Даже в том случае, если была пропущена какая-либо лекция, необходимо во время ее восстановить (переписать ее на кафедре), обдумать, снять возникшие вопросы для того, чтобы запоминание материала было осознанным. В-третьих, при подготовке к экзаменам у студента должен быть хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз

целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Правила подготовки к экзамену:

- Лучше сразу сориентироваться во всем материале и обязательно расположить весь материал согласно экзаменационным вопросам (или вопросам, обсуждаемым на семинарах), эта работа может занять много времени, но все остальное – это уже технические детали (главное – это ориентировка в материале!).

- Сама подготовка связана не только с «запоминанием». Подготовка также предполагает и переосмысление материала, и даже рассмотрение альтернативных идей.

- Готовить «шпаргалки» полезно, но пользоваться ими рискованно. Главный смысл подготовки «шпаргалок» – это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету, что само по себе прекрасно – это очень сложная и важная для студента работа, более сложная и важная, чем простое поглощение массы учебной информации. Если студент самостоятельно подготовил такие «шпаргалки», то, скорее всего, он и экзамены сдавать будет более уверенно, так как у него уже сформирована общая ориентировка в сложном материале.

- Как это ни парадоксально, но использование «шпаргалок» часто позволяет отвечающему студенту лучше демонстрировать свои познания (точнее – ориентировку в знаниях, что намного важнее знания «запомненного» и «тут же забытого» после сдачи экзамена).

- Сначала студент должен продемонстрировать, что он «усвоил» все, что требуется по программе обучения (или по программе данного преподавателя), и лишь после этого он вправе высказать иные, желательно аргументированные точки зрения.

Примерные вопросы к экзамену

1. Предмет теории вероятностей. Исторический обзор развития теории вероятностей как науки.
2. Основные понятия теории вероятностей.
3. Классификация событий.
4. Случайные события и их вероятности.
5. Классическое, геометрическое и статистическое определение вероятности.
6. Комбинаторика, основные правила комбинаторики.
7. Виды соединений: перестановки, размещения, сочетания без повторений.
8. Основные формулы комбинаторики и их применение к вычислению вероятностей.
9. Совместные и несовместные события, определение, примеры.
10. Зависимые и независимые события, примеры.
11. Алгебра событий: сумма и произведение событий, примеры.
12. Сумма совместных и несовместных событий.
13. Произведение зависимых и независимых событий.
14. Вычисление вероятности события, которое может появиться с одним из событий, образующих полную группу (формула полной вероятности).
15. Схема Бернулли.
16. Формула Бернулли. Условия её применения.
17. Условия применения локальной теоремы Муавра-Лапласа, отличие условий применения от формулы Бернулли. Вычисление вероятности появления события в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз, интегральная теорема Муавра-Лапласа.
18. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
19. Понятие случайной величины. Виды случайных величин и законы их распределения.
20. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

21. Биномиальное распределение, числовые характеристики.
22. Распределение Пуассона, числовые характеристики.
23. Геометрическое распределение, числовые характеристики.
24. Непрерывная случайная величина. Дифференциальная и интегральная функции распределения, определение, свойства, взаимосвязь.
25. Определение вероятности попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.
26. Нахождение числовых характеристик непрерывной случайной величины.
27. Равномерное распределение. Числовые характеристики.
28. Нормальное распределение. Числовые характеристики.
29. Показательное распределение. Числовые характеристики
30. Какие теоремы входят в «закон больших чисел»?
31. Запишите неравенство Чебышева, при решении каких задач оно применяется.
32. Теорема Чебышева.
33. Неравенство Маркова.
34. Сформулируйте теорему Бернулли.
35. Центральная предельная теорема.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Перечень основной литературы:

1. Матальцкий М. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / М. А. Матальцкий, Г. А. Хацкевич. - Минск: Вышэйшая школа, 2017. - 592 с. - ISBN 978-985-06-2855-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/90834.html>
2. Чернова Н. М. Основы теории вероятностей : учебное пособие / Н. М. Чернова. - 3-е изд. - Москва, Саратов: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2020. - 107 с. - ISBN 978-5-4497-0348-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/89462.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Климов Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Г. П. Климов. - Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2011. - 368 с. - ISBN 978-5-211-05846-0. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/13115.html>
2. Гусак А. А. Теория вероятностей. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. - Минск: ТетраСистемс, 2013. - 287 с. - ISBN 978-985-536-385-0. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28244.html>
3. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие (курс лекций) / Е. О. Тарасенко, И. В. Зайцева, П. К. Корнеев, А. В. Гладков. - Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2018. - 229 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/92605.html>

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
- <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

<http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.

<http://www.mathedu.ru/> Электронная библиотека по математике и вопросам ее преподавания. Включает [популярные книги и пособия](#), [методические руководства](#), [учебники](#), [журналы](#), [исторические работы](#), [авторефераты](#), [диафильмы](#).

<http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

<http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).

<http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.