

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования**  
**«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Л. Н. Милованова**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО**  
**ДИСЦИПЛИНЕ**

**Теоретическая механика**

для студентов направления подготовки 21.03.01 Нефтегазовое дело направленность (профиль)  
«Эксплуатация и обслуживание объектов добычи газа, газоконденсата и подземных хранилищ газа»

Ставрополь  
2026

УДК 531.8 (075.8)  
ББК 22.21 я 73  
М 60

Печатается по решению  
редакционно-издательского совета  
Северо-Кавказского федерального  
университета

**Милованова Л.Н.**  
М 60 **Теоретическая механика:** учебно-методическое пособие (практикум). – Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2014. – 236 с.

Пособие (практикум) составлено в соответствии с требованиями ФГОС ВПО к подготовке выпускника для получения квалификации бакалавра. Утверждено на заседании кафедры (протокол № 1 от 29 августа 2013 г.). Практикум содержит краткий теоретический обзор по теме практического занятия, задачи, практические задания, примеры решения заданий и методические рекомендации, задачи на самостоятельную проработку, вопросы в контексте формирования и развития общекультурных и профессиональных компетенций бакалавра.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 151900.62 (15.03.05.62) – Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 131000.62 (21.03.01.62) – Нефтегазовое дело, 270800.62 (08.03.01.62, 08.04.01.62) – Строительство.

УДК 531.8 (075.8)  
ББК 22.21 я 73

#### **Рецензенты:**

канд. техн. наук, доцент Г. А. Боронтов,  
канд. техн. наук, доцент А. Н. Пенкин

© ФГАОУ ВПО «Северо-Кавказский  
федеральный университет», 2014

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Цель дисциплины: дать представление о предмете классической механики, включая как физические ее основы, так и дифференциально–геометрические аспекты с использованием традиционных моделей движущихся объектов и среды.

Задачи дисциплины: изучение классической механики, т.е. механики, основанной на законах Ньютона, с формулировками задач с техническим содержанием и приемами решения таких задач средствами математического анализа.

Цели и задачи дисциплины соотнесены с общими целями основной образовательной программы и квалификационными характеристиками бакалавра и ориентированы на формирование и развитие общекультурных и профессиональных компетенций будущего специалиста.

Теоретическая механика относится к математическому и естественнонаучному циклу базовой части. Ее освоение происходит во 2 семестре в контексте формирования и развития общекультурных и профессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 270800.62 (08.03.01.62, 08.04.01.62) – Строительство:

ПК-1 – использует основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применяет методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования;

ПК-2 – способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат;

ПК-4 – способность понимать сущность и значение информации в развитии современного информационного общества, сознавать опасности и угрозы, возникающие в том процессе, соблюдать основные требования информационной безопасности, в том числе защиты государственной тайны;

ПК-5 – владеть основными методами, способами, и средствами получения, хранения, переработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией;

в 3 семестре по направлению подготовки 131000.62 (21.03.01.62) – Нефтегазовое дело:

ОК-1 – владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;

ОК-2 – умеет логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь;

ОК-4 – способен находить организационно-управленческие решения в нестандартных ситуациях и готов нести за них ответственность;

ОК-9 –стремится к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства;

ПК-1–использует основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применяет методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования;

ПК-2 – способен выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат;

ПК-6 – умеет применять процессный подход в практической деятельности, сочетать теорию и практику;

ПК-19 – способен составлять отчеты по выполненным работам, участвовать во внедрении результатов исследований и практических разработок;

ПК-22 – владеет методами оценки технического состояния и остаточного ресурса строительных объектов, оборудования;

во 2–3 семестрах по направлению подготовки 151900.62 (15.03.05.62) – Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств:

ОК-8 – способность осознавать социальную значимость своей будущей профессии, высокой мотивацией к выполнению профессиональной деятельности;

ОК-10 – способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования;

ПК-3 – способность использовать прикладные программные средства при решении практических задач профессиональной деятельности, методы стандартных испытаний по определению физико-механических свойств и технологических;

ПК-5 – способностью собирать и анализировать исходные информационные данные для проектирования технологических процессов изготовления машиностроительной продукции, средств технологического оснащения, автоматизации и управления.



# ПЛАНЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

## Раздел 1. СТАТИКА

### 1. Виды связей и их реакции

**Цель занятия:** свободное и несвободное абсолютно твердое тело, принцип освобожденности от связей, виды связей и их реакции. Реализация учебной цели практического занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося.

**Организационная форма:** решение задач.

#### *Методические рекомендации*

Тело, некоторым перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним тела, называется *несвободным*. Всякое тело, ограничивающее свободу перемещения данного твердого тела, является по отношению к нему *связью*.

В статике абсолютно твердого тела связи, налагаемые на рассматриваемое тело, чаще всего встречаются в виде *неподвижных поверхностей, линий и точек, а также в виде гибких нитей*.

Таким образом, твердое тело является несвободным, если на это тело наложены связи. Например, висящее на гибкой нити тело будет несвободным (рис. 1), так как на него наложена связь в виде нити и оно не может перемещаться вертикально вниз по направлению вытянутой нити, не разорвав ее.

Если на твердое тело не наложены никакие связи, то такое тело очевидно является *свободным*.

Сила, характеризующая действие связи на тело, называется *силой реакции связи*. Аксиома VI. *Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив их действие соответствующими силами реакций связей*.

Эта аксиома называется *аксиомой связей*, или *принципом освобожденности от связей*.

**Пример решения задачи:** Связь осуществляется посредством гибкого тела (нить, канат, и т. п.). Такая связь называется *гибкой*. Если на тело наложена гибкая связь, то сила реакции приложена к телу в точке прикрепления гибкой связи. Сила реакции гибкой связи направлена, вообще говоря, по касательной к связи в точке ее прикрепления к телу. В частности, сила реакции гибкой связи  $\vec{T}_A$  (рис. 1) может иметь линию действия – ось этой связи.

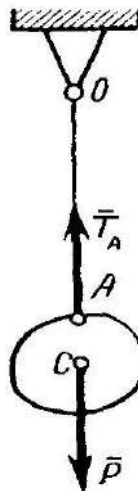


Рисунок 1

### ***Вопросы для обсуждения***

1. Свободное абсолютно твердое тело?
2. Несвободное абсолютно твердое тело?
3. Что такое связь? Реакция связи (опоры)?
4. Свободная опора–реакция связи?
5. Жесткая заделка плоская – реакция связи?
6. Неподвижная шарнирная опора плоская – реакция связи?
7. Гибкие связи – реакция связи?
8. Подвижная шарнирная опора плоская – реакция связи?
9. Скользящая заделка плоская вертикальная – реакция связи?
10. Абсолютно твёрдый невесомый стержень – реакция связи?
11. Скользящая заделка плоская горизонтальная – реакция связи?
12. Втулки – реакция связи?
13. Неподвижная шарнирная опора пространственная (сферический шарнир) – реакция связи?
14. Жесткая заделка пространственная – реакция связи?
15. Скользящая заделка плоская вертикальная – реакция связи?
16. Скользящая заделка пространственная – цилиндрический подшипник – реакция связи?
17. Пространственный подпятник – реакция связи?

### ***Литература<sup>1</sup>***

Основная: 1–6.

Интернет-ресурсы: 1.

## **2. Равнодействующая. Условия равновесия системы сил**

***Цель занятия:*** плоская система сходящихся сил, равнодействующая плоской системы сходящихся сил, равновесие плоской системы сходящихся сил, графический и геометрический способы уравнивания конструкции, проекция силы на ось, разложение силы на сходящиеся составляющие.

***Организационная форма:*** решение задач.

### ***Методические рекомендации***

Система сил, в которой линии действия всех сил лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке, называется *плоской системой сходящихся сил*.

---

<sup>1</sup> Общий список литературы смотри в конце пособия на стр. 233.

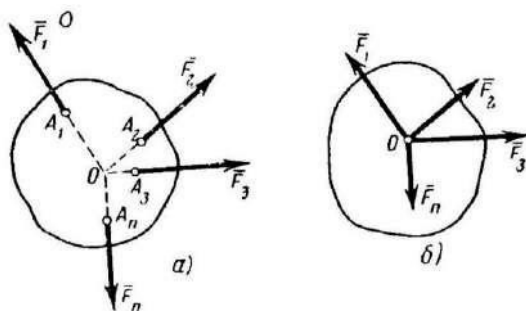


Рис. 2.

Замена сложной системы сил простой системой называется *приведением системы сил к простейшей, ей эквивалентной*. Если система сил приводится только к одной силе, ей эквивалентной, то эта одна сила называется *равнодействующей системы сил*, а *приведение системы сил* называется в этом случае *сложением сил*. Обратный процесс носит название *разложения сил*. *Плоская система сходящихся сил в общем случае эквивалентна одной силе, являющейся равнодействующей, которая приложена в точке пересечения линий действия всех этих сил и равна их векторной (геометрической) сумме:*

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad R = \sum_{i=1}^n F_i = 0. \quad (1)$$

Геометрическое (или графическое) условие равновесия: для равновесия пространственной, а также плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на векторах слагаемых сил этой системы, был замкнут.

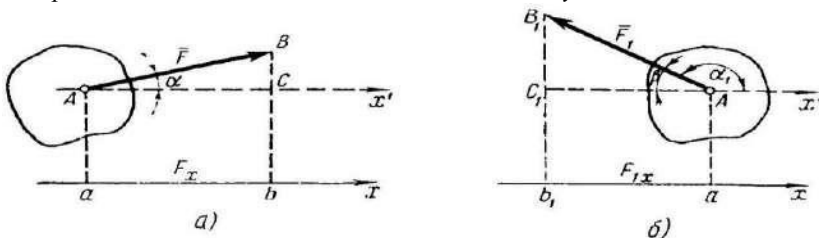


Рис. 3.

$$F_x = X = F \cos \alpha, \quad F_{1x} = X_1 = F_1 \cos \alpha_1, \quad (2)$$

т.е. проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением, оси проекций.

Задача:

Тяжелый шар весом  $P$  килограммов подвешен на нити (рис. 4, а) в точке  $A$  и удерживается в отклоненном на угол  $\alpha$  от вертикали отклонении горизонтальной нитью, привязанной в точке  $B$ . Найти натяжение нитей.

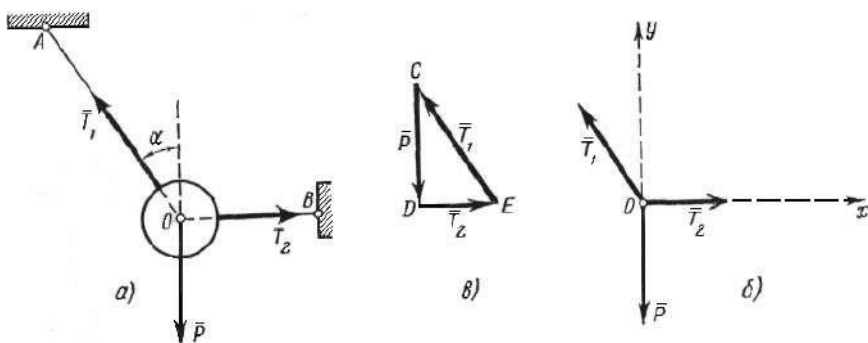


Рис. 4

Решение: Выбираем тело, равновесие которого будем рассматривать. Таким телом будет шар. Вес  $P$  шара известен. Будем рассматривать шар как материальную точку  $O$ . Эта точка несвободна. Связи, наложенные на нее, осуществляются нитями  $OA$  и  $OB$ . Отбрасываем связи (перережем мысленно нити) и заменяем их действие на точку  $O$  реакциями. Тогда точку  $O$  можно будет рассматривать как свободную и находящуюся в равновесии под действием плоской системы из трех сходящихся сил:

активной  $\vec{P}$  и реакций  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$  нитей (рисунком 4, б) которые направлены вдоль нитей. Реакции  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$  по модулю равны искомым натяжениям нитей. Следовательно, определение натяжений нитей можно заменить определением их реакций  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$ .

Рассмотрим графический и геометрический методы решения данной задачи.

Графический метод решения. Так как три силы  $\vec{P}$ ,  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$  находятся в равновесии, то силовой треугольник, составленный из этих сил, должен замыкаться. Строим этот силовой треугольник: для этого в определенном масштабе строим силу, которая нам известна по модулю и направлению, затем через начало и конец вектора  $\vec{P}$  проводим прямые, параллельные направлениям сил  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$ . Стороны  $DE$  и  $EC$  полученного таким образом замкнутого силового треугольника  $CDE$  (рисунок 4, в) дают модули и направления искоемых реакций нитей. Чтобы

найти их модули, а, следовательно, и натяжения нитей, остается изменить в принятом масштабе стороны  $DE$  и  $EC$ .

**Геометрический метод решения.** Искомые стороны  $DE$  и  $EC$  силового треугольника  $CDE$  можно найти не только путем непосредственного измерения, но и вычислением, применяя правила геометрии и тригонометрические формулы. Из способа построения силового треугольника  $CDE$  ясно, что  $\angle CDE = 90^\circ$ ,  $\angle DCE = \alpha$  и  $\angle DEC = 90^\circ - \alpha$  (рис. 4, а, б). Из силового треугольника  $CDE$  видно, что

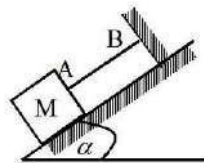
$$T_1 = \frac{P}{\cos \alpha} H; T = P \operatorname{tg} \alpha H. \quad (3)$$

2

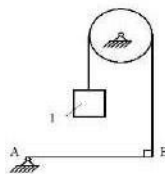
Нужно иметь в виду, что геометрический метод решения задач статики при числе сил больше трех становится неудобным.

### **Решить самостоятельно**

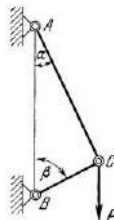
1. На абсолютно гладкой неподвижной плоскости, образующей с горизонтом угол  $\alpha$ , покоится тело  $M$ , удерживаемое нитью  $AB$ , которая расположена параллельно наклонной плоскости. Вес тела  $M$  равен  $\bar{P}$ . Определите натяжение нити  $\bar{T}$  и реакцию плоскости  $\bar{N}$ .



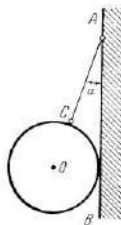
2. Определить реакции опоры  $A$  и вес груза 1, необходимый для того, чтобы однородная балка  $AB$  весом  $340 \text{ Н}$  в положении равновесия была горизонтальна.



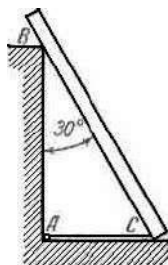
3. Стержни  $AC$  и  $BC$  соединены между собой и с вертикальной стеной посредством шарниров. На шарнирный болт  $C$  действует вертикальна сила  $P=1000 \text{ Н}$ . Определить реакции этих стержней на шарнирный болт  $C$ , если углы, составляемые стержнями со стеной, равны:  $\alpha = 30^\circ$  и  $\beta = 60^\circ$ .



4. К вертикально гладкой стене  $AB$  подвешен на тросе  $AC$  однородный шар  $O$ . Трос составляет со стеной угол  $\alpha$ , вес шара  $P$ . Определить натяжение троса  $T$  и давление  $Q$  шара на стену.



5. Однородная балка веса  $600\text{ Н}$  и длины  $4\text{ м}$  опирается одним концом на гладкий пол, а промежуточной точкой  $B$  — на столб высоты  $3\text{ м}$ , образуя с вертикалью угол  $30^\circ$ . Балка удерживается в таком положении веревкой  $AC$ , протянутой по полу. Пренебрегая трением, определить натяжение веревки  $T$  и реакции  $R_B$  столба и  $R_C$  пола.



Ответ:  $T = 150\text{ Н}$ ,  $R_B = 173\text{ Н}$ ,  $R_C = 513\text{ Н}$ .

### **Вопросы для обсуждения**

1. Плоская система сходящихся сил?
2. Равнодействующая плоской системы сходящихся сил?
3. Равновесие плоской системы сходящихся сил?
4. Графический и геометрический способы уравнивания конструкции?
5. Проекция силы на ось – построение, вычисление?
6. Разложение силы на сходящиеся составляющие – правило параллелограмма сил (аксиома)?

### **Литература**

Основная 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

### 3. Равнодействующая. Условия равновесия плоской системы сил

**Цель занятия:** проекции силы на ось, проекция равнодействующей плоской системы сил, условие равновесия плоской системы сил.

**Организационная форма:** решение задач.

#### Методические рекомендации

Проекция вектора равнодействующей  $R$  системы сил на координатную ось равна алгебраической сумме проекций сил, составляющих систему, на ту же ось.

$$\begin{aligned} 1) R_x &= \sum F_{kx}; \\ 2) R_y &= \sum F_{ky}; \\ 3) R_z &= \sum F_{kz}; \end{aligned} \quad (4)$$

Для пространственной системы сил имеют место уравнения 1), 2), 3). Для плоской системы сил имеют место уравнения 1), 2).

Модуль равнодействующей системы сил  $|\bar{R}|$  по ее проекциям на координатные оси определяется по формулам:

$$|\bar{R}| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2} - \text{для плоской системы сил}; \quad (5)$$

$$|\bar{R}| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2 + (R_z)^2} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2 + (\sum F_{kz})^2} - \text{для пространственной системы сил.} \quad (6)$$

$$\bar{R} = 0 - \text{условие равновесия системы сил.} \quad (7)$$

$$|\bar{R}| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2} = 0 - \text{для плоской системы сил.} \quad (8)$$

$$|\bar{R}| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2 + (R_z)^2} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2 + (\sum F_{kz})^2} = 0 - \text{для пространственной системы сил.} \quad (9)$$

Ориентация вектора сила в пространстве (на плоскости) определяется по направляющим косинусам:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\bar{F}_x; \bar{F}}) &= \frac{F_x}{F}; \\ \cos(\widehat{\bar{F}_y; \bar{F}}) &= \frac{F_y}{F}; \\ \cos(\widehat{\bar{F}_z; \bar{F}}) &= \frac{F_z}{F}. \end{aligned} \quad (10)$$

Задача 1.

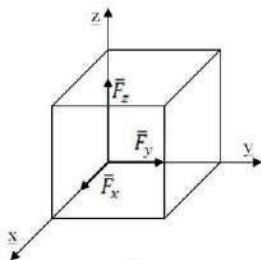


Рис. 5

По заданным проекциям силы  $\vec{F}$  на оси координат:

$F_x = 20 \text{ Н}; F_y = 25 \text{ Н}; F_z = 30 \text{ Н}$ , определить модуль этой силы.

Решение:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2} =$$

$$= \sqrt{(20)^2 + (25)^2 + (30)^2} = \sqrt{400 + 625 + 900} = \sqrt{1925} = 43,9 \text{ Н}$$

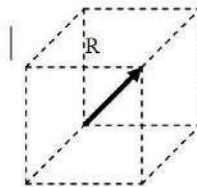
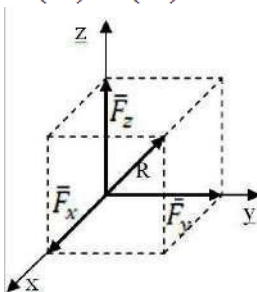
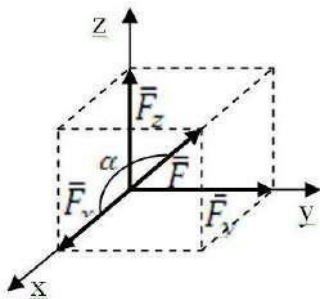


Рис. 6

Ответ:  $F=43,9 \text{ Н}$

Задача 2.

Определить косинус угла между вектором силы  $\vec{F} = 3\vec{i} + 2,45\vec{j} + 7\vec{k}$  и ось координат OX.



$$\cos(\vec{F}_x; \vec{F})$$

$$= \cos \alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{F_x}{\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{(3)^2 + (2,45)^2 + (7)^2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{9 + 6 + 49}} = \frac{3}{8} = 0,375$$

$$\text{Ответ: } \cos(\vec{F}_x; \vec{F}) = 0,375$$



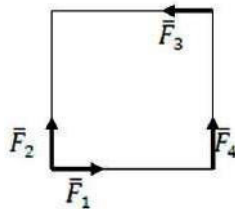
### Решить самостоятельно

Задача 1. Определить косинус угла между вектором силы  $\vec{F}$  и осью координат Oz, если сила (Н)  $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ . (0,707)

Задача 2. Две силы (Н)  $\vec{F}_1 = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 9\vec{k}$  и  $\vec{F}_2 = 4\vec{i} + 9\vec{j} + 11\vec{k}$  приложены в центре О системы прямоугольных координат Oxyz. Определить модуль равнодействующей силы. (27,1)

Задача 3. Силы  $F_1 = F_2 = 10$  Н и  $\vec{F}_3$  находятся в равновесии. Линии действия сил между собой образуют углы по  $120^\circ$ . Определить модуль силы  $\vec{F}_3$ . (10)

Задача 4. К квадрату приложена система четырех сил, причем силы  $F_1 = F_2 = F_3 = 1$  Н. Определить модуль силы  $F_4$ , при которой равнодействующая системы  $R=2$ Н (1,0)



### Вопросы для обсуждения

1. Проекция силы на ось – графически?
2. Модуль проекции вектора силы на ось?
3. Модуль проекции равнодействующей системы сил на оси координат?
4. Вектор равнодействующей системы сил  $\vec{R}$  –?
5. Геометрическое условие равновесия системы сил по определению равнодействующей  $\vec{R}$ ?
6. Аналитические условия равновесия системы сил по определению равнодействующей  $\vec{R}$ ?
7. Аналитическое условие равновесия плоской системы сил по определению равнодействующей  $\vec{R}$  –?
8. Аналитическое условие равновесия пространственной системы сил по определению равнодействующей  $\vec{R}$  –?

### Литература

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

#### 4. Равнодействующая. Условия равновесия пространственной системы сил

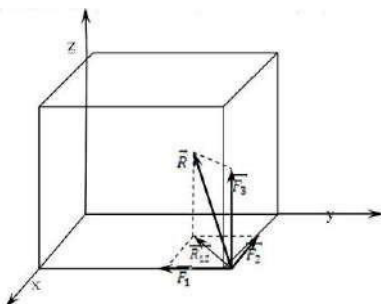
**Цель занятия:** Вектор равнодействующей пространственной системы сил, проекция вектора равнодействующей  $\vec{R}$  пространственной системы сил на оси координат, модуль вектора равнодействующей  $|\vec{R}|$  пространственной системы сил.

**Организационная форма:** решение задач.

##### Методические рекомендации

Вектор равнодействующей  $\vec{R}$  пространственной системы сил равен геометрической сумме векторов сил, образующих систему сил.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \quad (11)$$



Проекция вектора равнодействующей  $\vec{R}$  на оси координат равна алгебраической сумме проекций сил, составляющих данную систему, на соответствующие координатные оси:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} \dots + F_{nx} \\ R_y &= \sum F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} \dots + F_{ny} \\ R_z &= \sum F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} \dots + F_{nz} \end{aligned} \quad (12)$$

Модуль вектора равнодействующей  $\vec{R}$  пространственной системы сил вычисляется по формуле

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2} \text{ или } |\vec{R}| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2 + (R_z)^2} \quad (13)$$

Ориентация вектора силы в пространстве по отношению к координатным осям определяется по направляющим косинусам:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{F}_x; \vec{F}) &= \frac{F_x}{F} \\ \cos(\vec{F}_y; \vec{F}) &= \frac{F_y}{F} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\cos(\vec{\bar{F}}_z; \vec{\bar{F}}) = \frac{F_z}{F}$$

Задача 1. Определить косинусы углов между вектором силы  $\vec{F} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$  и осями координат  $ox$ ,  $oy$  и  $oz$ ?

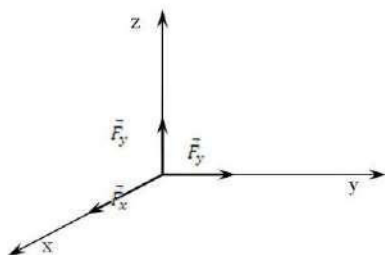


Рис. 8

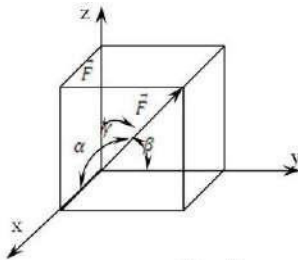


Рис. 9

$$\cos(\vec{\bar{F}}_x; \vec{\bar{F}}) = \frac{F_x}{F} = \cos\alpha = \frac{F_x}{\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{2}{\sqrt{45}} = 0,30$$

$$\cos(\vec{\bar{F}}_y; \vec{\bar{F}}) = \frac{F_y}{F} = \cos\beta = \frac{F_y}{\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{4}{\sqrt{45}} = 0,60$$

$$\cos(\vec{\bar{F}}_z; \vec{\bar{F}}) = \frac{F_z}{F} = \cos\gamma = \frac{F_z}{\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{5}{\sqrt{45}} = 0,75$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

Ответ:  $\cos\alpha = 0,30$ ;  $\cos\beta = 0,60$ ;  $\cos\gamma = 0,75$

Задача 2. Определить модуль равнодействующей сил  $F_1=12\text{H}$ ,  $F_2=10\text{H}$ ,  $F_3=9\text{H}$ , приложенных в точке А, как показано на рис. 10.

Решение:

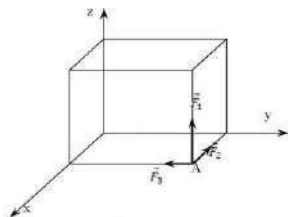


Рис. 10

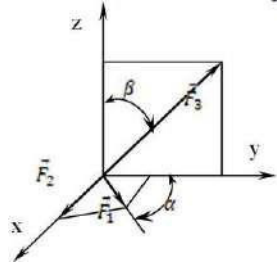
$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = \sqrt{(12)^2 + (10)^2 + (9)^2} = \sqrt{144 + 100 + 81} = \sqrt{325} = 18,03 \text{ H}$$

Ответ:  $|\vec{R}| = 18,03\text{H}$ .

### Решить самостоятельно

#### Задача 1.

Определить модуль равнодействующей сил  $F_1=15\text{H}$ ,  $F_2=20\text{H}$ ,  $F_3=25\text{H}$ . Углы, образованные линиями действия сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_3$  с осями координат, заданы:  $\alpha=60^\circ$  и  $\beta=45^\circ$ . (50,5)



#### Задача 2.

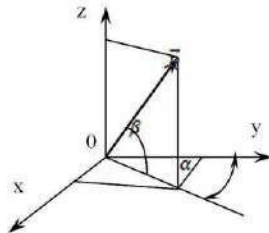
Направление равнодействующей трех сил  $R=33,8\text{H}$  задано косинусами направляющих углов:  $\cos(\vec{R};x) = 0,325$ ;  $\cos(\vec{R};y) = 0$ ;  $\cos(\vec{R};z) = 0,946$ . Проекции сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  на координатные оси соответственно равны:  $F_{1x}=7\text{H}$ ;  $F_{1y}=10\text{H}$ ;  $F_{1z}=0$ ;  $F_{2x}=-5\text{H}$ ;  $F_{2y}=15\text{H}$ ;  $F_{2z}=13\text{H}$ . Определить модуль силы  $\vec{F}_3$ . (32,6)

#### Задача 3.

Определить модуль равнодействующей трех сходящихся сил, если заданы проекции на оси координат:  $F_{1x}=7\text{H}$ ;  $F_{1y}=10\text{H}$ ;  $F_{1z}=0$ ;  $F_{2x}=-5\text{H}$ ;  $F_{2y}=15\text{H}$ ;  $F_{2z}=12\text{H}$ ;  $F_{3x}=6\text{H}$ ;  $F_{3y}=0$ ;  $F_{3z}=-6\text{H}$ . (26,9)

#### Задача 4.

Модуль равнодействующей  $\vec{R}$  пространственной системы сходящихся сил равен 150H. Определить ее проекцию на координатную ось Oy, если даны углы  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ .



### Вопросы для обсуждения

1. Вектор равнодействующей  $\vec{R}$  пространственной системы сил?
2. Проекция вектора равнодействующей  $\vec{R}$  пространственной системы сил на оси координат?
3. Модуль вектора равнодействующей  $\vec{R}$  пространственной системы сил?
4. Направляющие косинусы вектора равнодействующей  $\vec{R}$  пространственной системы сил?

### Литература

Основная: 1–4

Интернет-ресурсы: 1.

## 5. Равновесие плоской системы сходящихся сил. Аналитический способ уравнивания конструкции

**Цель занятия:** плоская система сходящихся сил, равнодействующая плоской системы сходящихся сил, равновесие плоской системы сходящихся сил, аналитический способ уравнивания конструкции.

**Организационная форма:** решение задач.

### Методические рекомендации

Система сил, в которой линии действия всех сил лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке, называется *плоской системой сходящихся сил*.

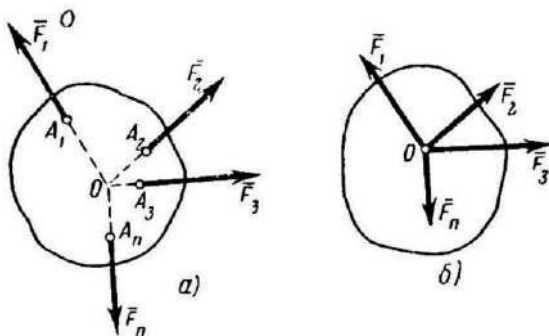


Рис. 11

Замена сложной системы сил простой системой называется *приведением системы сил к простейшей, ей эквивалентной*. Если система сил приводится только к одной силе, ей эквивалентной, то эта одна сила называется *равнодействующей* системы сил, а *приведение системы сил* называется в этом случае *сложением сил*. Обратный процесс носит название *разложения сил*. Плоская система сходящихся сил в общем случае эквивалентна одной силе, являющейся равнодействующей, которая приложена в точке пересечения линий действия всех этих сил и равна их векторной (геометрической) сумме:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (15)$$

Проекция равнодействующей плоской системы сходящихся сил на какую-либо ось равна алгебраической сумме: проекций составляющих сил на ту же ось.

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}$$

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i ; R_y = \sum_{i=1}^n Y_i . \quad (16)$$

Модуль равнодействующей в этом случае будет определяться по формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2} , \quad (17)$$

а ее направление – по формулам:

$$\cos \left( \overset{\wedge}{R, i} \right) = \frac{R_x}{R} = \frac{\sum X}{R} ; \cos \left( \overset{\wedge}{R, j} \right) = \frac{R_y}{R} = \frac{\sum Y}{R} . \quad (18)$$

Задача.

Тяжелый шар весом  $P$  килограммов подвешен на нити (рисунок 12, а) в точке  $A$  и удерживается в отклоненном на угол  $\alpha$  от вертикали отклонении горизонтальной нитью, привязанной в точке  $B$ . Найти натяжение нитей.

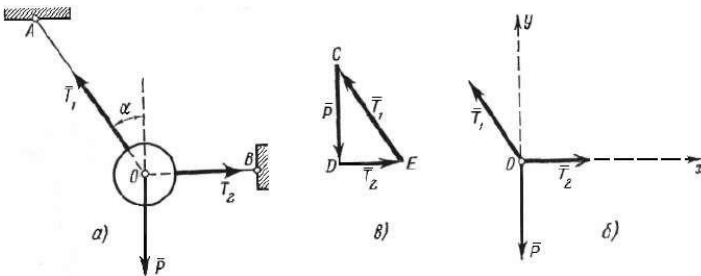


Рис.12

Решение: Выбираем тело, равновесие которого будем рассматривать. Таким телом будет шар. Вес  $P$  шара известен. Будем рассматривать шар как материальную точку  $O$ . Эта точка несвободна. Связи, наложенные на нее, осуществляются нитями  $OA$  и  $OB$ . Отбрасываем связи (перережем мысленно нити) и заменяем их действие на точку  $O$  реакциями. Тогда точку  $O$  можно будет рассматривать как свободную и находящуюся в равновесии под действием плоской системы из трех сходящихся сил: активной  $\bar{P}$  и реакций  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$  нитей (рисунок 12, б) которые направлены вдоль нитей. Реакции  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$  по модулю равны искомым натяжениям нитей. Следовательно, определение натяжений нитей можно заменить определением их реакций  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$ .

Аналитический метод решения:

Для составления уравнений равновесия необходимо выбрать оси координат. Выбирать систему координат так, чтобы проектирование сил в выбранной системе координат было наиболее удобным и выражения проекций были возможно проще. В данной задаче начало координат возьмем в точке  $O$ , равновесие которой мы рассматриваем. Направим ось  $Ox$  горизонтально вправо, а ось  $Oy$  – вертикально вверх (рисунок 12, б). Из сравнения рисунка 12, а и 12, б видно, что  $\angle(\vec{T}_1, \vec{j}) = \alpha$  и  $\angle(\vec{T}_2, \vec{j}) = 90^\circ$ . Составим теперь уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил.

$$\sum X = 0; \sum Y = 0. \quad (19)$$

Для этого алгебраически сложим проекции всех сил на каждую координатную ось и приравняем к нулю полученные алгебраические суммы:

$$\sum X = -T_1 \cos(90^\circ - \alpha) + T_2 = -T_1 \sin \alpha + T_2 = 0;$$

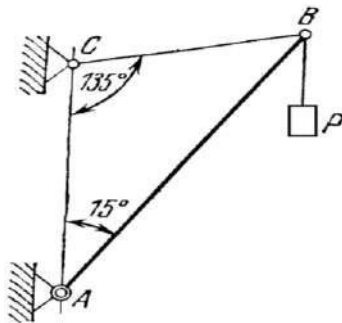
$$\sum Y = T_1 \cos \alpha - P = 0.$$

Решая эти уравнения равновесия, находим  $T_1 = \frac{P}{\cos \alpha} H$ ;  $T_2 = P \operatorname{tg} \alpha H$ .

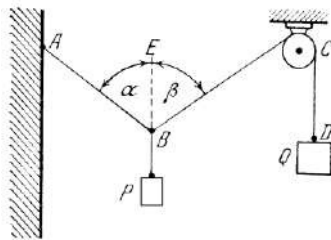
2

### Решить самостоятельно

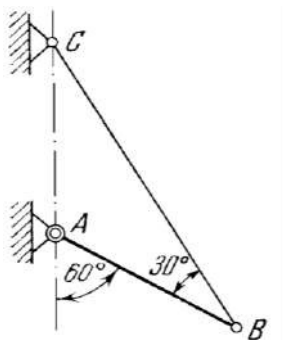
1. Мачтовый кран состоит из стрелы  $AB$ , прикрепленной к шарниру  $A$  к мачте, и цепи  $CB$ , к концу  $B$  стрелы подвешен груз  $P=2\text{ кН}$ ; углы  $BAC=15^\circ$ ,  $ACB=135^\circ$ . Определить натяжение  $T$  цепи  $CB$  и усилие  $Q$  в стрелке  $AB$ .



2. К верёвке  $AB$ , один конец которой закреплён в точке  $A$ , привязан в точке  $B$  груз  $P$  и верёвка  $BCD$ , перекинута через блок; к концу её  $D$  привязана гиря  $Q$  веса  $100\text{ Н}$ . Определить, пренебрегая трением на блоке, натяжение  $T$  верёвки  $AB$  и величину груза  $P$ , если в положении равновесия углы, образуемые верёвками с вертикалью  $BE$ , равны:  $\alpha=45^\circ$ ,  $\beta=60^\circ$ .



3. Однородный стержень  $AB$  прикреплен к вертикальной стене посредством шарнира  $A$  и удерживается под углом  $60^\circ$  к вертикали при помощи троса  $BC$ , образующего с ним угол  $30^\circ$ . Определить величину и направления реакции  $R$  шарнира, если известно, что вес стержня равен  $20\text{ Н}$ .



### **Вопросы для обсуждения**

1. Плоская система сходящихся сил?
2. Равнодействующая плоской системы сходящихся сил? Условие равновесия?
3. Равновесие плоской системы сходящихся сил? Аналитические условия равновесия?
4. Аналитический способ уравнивания конструкции?
5. Проекция силы на ось – построение, вычисление?
6. Разложение силы на сходящиеся составляющие – правило параллелограмма сил (аксиома)?

### **Литература**

Основная: 1–5.

Интернет-ресурсы: 1.

## **6. Равновесие пространственной системы сходящихся сил. Аналитический способ уравнивания конструкции**

**Цель занятия:** пространственная система сходящихся сил, равнодействующая пространственной системы сходящихся сил, равновесие пространственной системы сходящихся сил, геометрический способ уравнивания конструкции, аналитический способ уравнивания конструкции.

**Организационная форма:** решение задач.

### **Методические рекомендации**

Система сил, линии действия которых не лежат в одной плоскости, но пересекаются в одной точке, называется *пространственной системой сходящихся сил*.



Если в точке  $A$  тела приложены три силы  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  (рисунок 13),

линии действия которых не лежат в одной плоскости, то равнодействующая  $\vec{R}$  этой пространственной системы сходящихся сил изобразится по модулю и направлению диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах, и будет приложена в той же точке  $A$  (правило параллелепипеда сил). В самом деле, для трех сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  диагональ  $AD$  соответствующего параллелепипеда есть замыкающая сторона  $AD$  построенного многоугольника этих сил  $ABCD$ . Необходимо иметь в виду, что силовой многоугольник, получающийся при определении равнодействующей пространственной системы сходящихся сил (при любом числе сил), не будет плоским, так как линии действия сил этой системы не лежат в одной плоскости.

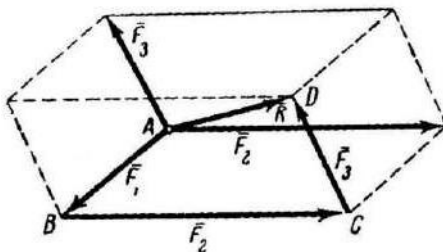


Рис. 13

Полученное правило определения равнодействующей системы сходящихся сил справедливо при любом числе сил, входящих в состав данной системы.

Нахождение равнодействующей системы сходящихся сил по правилу силового многоугольника называется векторным или геометрическим сложением сил. Пространственная система сходящихся сил в общем случае эквивалентна одной силе, являющейся равнодействующей, которая приложена в точке пересечения линий действия всех этих сил и равна их векторной (геометрической) сумме:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (20)$$

Для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этой системы сил равнялась нулю ( $\vec{R} = 0$ ).

Модуль равнодействующей пространственной системы сходящихся сил определяется по формуле

$$R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Z_i\right)^2}. \quad (21)$$

Аналитические условия равновесия пространственной системы сходящихся сил

$$\Sigma X_i = 0; \Sigma Y_i = 0; \Sigma Z_i = 0. \quad (22)$$

Для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из трех выбранных любым образом координатных осей.

Задача: Из трех прикрепленных к вертикальной стене стержней  $AO$ ,  $BO$  и  $CO$  стержни  $AO$  и  $BO$  расположены в горизонтальной плоскости и образуют со стеной угол  $\alpha = 60^\circ$ , а стержень  $CO$  образует со стеной угол  $\beta = 30^\circ$  (рисунок 14, а). Стержни прикреплены к стене шарнирами и скреплены шарниром в точке  $O$ , к которой прикреплен груз  $Q$  весом  $P = 300$  кг. Определить усилия, действующие вдоль стержней  $AO$ ,  $BO$  и  $CO$ .

Решение. Выбираем тело, равновесие которого будем рассматривать. Таким телом будет узел, или точка  $O$ . Эта точка несвободна; связями служат стержни  $AO$ ,  $BO$  и  $CO$ . Отбросим эти стержневые связи и заменим их действие на точку  $O$  силами реакций  $\overline{S}_A$ ,  $\overline{S}_B$  и  $\overline{S}_C$  линии действия которых направлены вдоль стержней  $AO$ ,  $BO$  и  $CO$ . Кроме этих трех сил, к узлу  $O$  приложена еще реакция  $\overline{T}$  веревки, на которой подвешен груз  $Q$ , равная, очевидно, по модулю весу  $\overline{P}$  груза  $Q$ . В точке  $O$ , таким образом, сходятся четыре силы:  $\overline{T}$ ,  $\overline{S}_A$ ,  $\overline{S}_B$  и  $\overline{S}_C$ .

Выберем оси координат, как показано на рисунке 14, б, совместив плоскость  $yOz$  с плоскостью, в которой действуют силы  $\overline{T}$  и  $\overline{S}_C$ . При этом силы  $\overline{S}_A$  и  $\overline{S}_B$  будут лежать в координатной плоскости  $xOy$ .

Составим теперь уравнения равновесия пространственной системы сходящихся сил:

$$\Sigma X = 0; \Sigma Y = 0; \Sigma Z = 0. \quad (23)$$

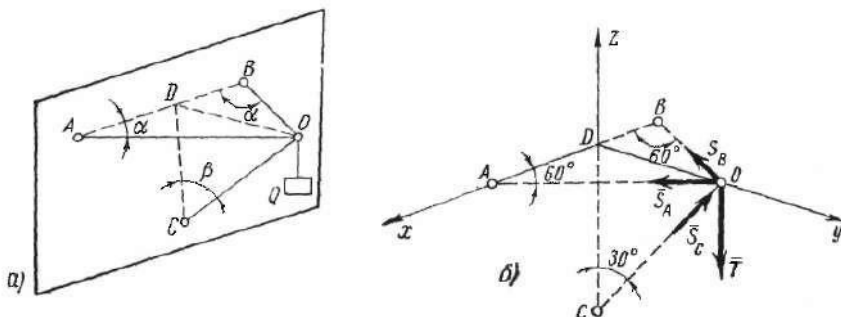


Рис. 14

Для этого алгебраически сложим проекции всех сил на каждую координатную ось и приравняем к нулю полученные алгебраические суммы.

$$\begin{aligned}\sum X &= S_B \cos 60^\circ - S_A \cos 60^\circ = 0; \\ \sum Y &= -(S_A + S_B) \cos 30^\circ + S_C \cos 60^\circ = 0; \\ \sum Z &= -T + S_C \cos 30^\circ = 0,\end{aligned}$$

Откуда

$$S_C = \frac{T}{\cos 30^\circ} = \frac{P}{\cos 30^\circ} = 346 \text{ Н};$$

$$S_A = S_B = \frac{S_C \cos 60^\circ}{2 \cos 30^\circ} = 100 \text{ Н}.$$

Все три силы:  $\overline{S_C}$ ,  $\overline{S_A}$  и  $\overline{S_B}$  — получились со знаком «плюс», следовательно, сделанное предположение об их направлении правильно.

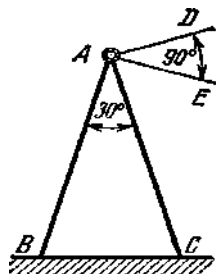
Выясним вопрос о том, какие стержни сжаты, какие — растянуты.

Так как стержни  $AO$  и  $BO$  действуют на точку  $O$  силами  $\overline{S_A}$  и  $\overline{S_B}$ , направленными от  $O$  к  $A$  и от  $O$  к  $B$ , то точка  $O$  действует на стержни  $AO$  и  $BO$  силами, обратно направленными и растягивающими эти стержни. Стержень  $CO$  действует на точку  $O$  с силой  $\overline{S_C}$ , направленной от  $C$  к  $O$ , следовательно, точка  $O$  действует на стержень  $CO$  силой, обратно направленной и сжимающей этот стержень. Таким образом, стержни  $AO$  и  $BO$  будут работать на растяжение, а стержень  $CO$  — на сжатие.

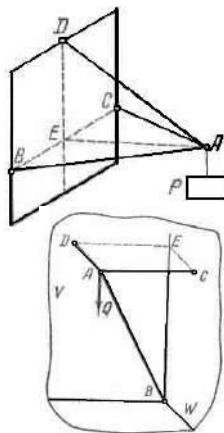
Если бы сразу не было очевидным, какой из стержней сжат и какой растянут, то можно было бы предварительно считать все стержни растянутыми. Отрицательное значение реакций того или иного стержня, полученное в результате решения уравнений равновесия, показало бы, что действительное направление этой реакции противоположно принятому.

### Решить самостоятельно

1. Угловой столб составлен из двух одинаково наклоненных брусев  $AB$  и  $AC$ , скрепленных в вершине посредством шарнира. Угол  $BAC = 30^\circ$ . Столб поддерживает два горизонтальных провода  $AD$  и  $AE$ , составляющих между собой прямой угол. Натяжение каждого провода равно 1 кН. Определить усилия в брусках, предполагая, что плоскость  $BAC$  делит пополам угол  $DAE$ , пренебрегая весом брусев.



2. Найти усилия  $S_1$  и  $S_2$  в стержнях  $AB$  и  $AC$  и усилие  $T$  в тросе  $AD$ , если дано, что угол  $CBA=BCA=60^\circ$ , угол  $EAD=30^\circ$ . Вес груза  $P$  равен 300 Н. Плоскость  $ABC$  горизонтальна. Крепления стержней в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  шарнирные.



3. Найти усилия в стержне  $AB$  и цепях  $AC$  и  $AD$ , поддерживающих груз  $Q$  веса 420 Н, если  $AB = 145$  см,  $AC = 80$  см,  $AD = 60$  см, плоскость прямоугольника  $CAD E$  горизонтальна, а плоскости  $V$  и  $W$  вертикальны. Крепление в точке  $B$  шарнирное.

### **Вопросы для обсуждения**

1. Пространственная система сходящихся сил?
2. Равнодействующая пространственной системы сходящихся сил? Условие равновесия?
3. Геометрические условия равновесия пространственной системы сходящихся сил?
4. Аналитические условия равновесия пространственной системы сходящихся сил?
5. Геометрический способ уравнивания конструкции?
6. Аналитический способ уравнивания конструкции?
7. Разложение силы на сходящиеся составляющие – правило параллелепипеда?

### **Литература**

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

## **7. Момент силы относительно неподвижной точки на плоскости. Пара сил. Момент пары сил**

**Цель занятия:** плоская произвольная система сил, пара сил, момент пары сил, условия равновесия плоской произвольной системы сил, аналитический способ уравнивания конструкции.

**Организационная форма:** решение задач.

### Методические рекомендации

Понятие момента силы возникло в связи с определением вращательного действия силы, приложенной к телу, имеющему неподвижную точку или неподвижную ось. Алгебраическим моментом силы относительно некоторой точки  $O$  на плоскости называется скалярная величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо относительно этой точки.

$$m_O(\vec{F}) = \pm Fd \quad (24)$$

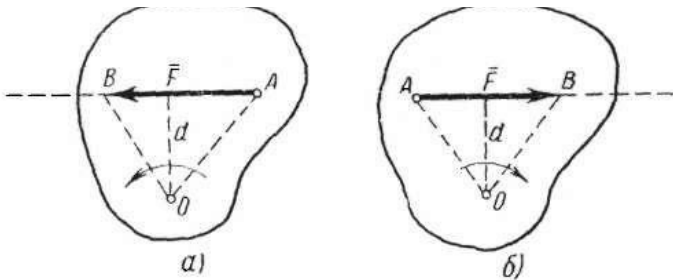


Рис. 15

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы моментов всех сил относительно каждой из трех любых точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , взятых в плоскости действия этой системы сил и не лежащих на одной прямой, были равны нулю:

$$\sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = 0; \sum_{i=1}^n m_B(\vec{F}_i) = 0; \sum_{i=1}^n m_C(\vec{F}_i) = 0. \quad (25)$$

Задача.

Между опорами двухконсольной горизонтальной балки  $CD$  (рис. 16, а) приложена пара  $(\vec{P}, \vec{P}')$ , к левой консоли – равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , а в точке  $D$  правой консоли – вертикальная нагрузка  $Q = 4,6$  Н. Определить реакции опор, если  $P = P' = 4$  Н,  $q = 4$  Н/м,  $a = 2,5$  м.

Решение. Двухконсольная балка  $CD$  является тем телом, равновесие которого мы должны рассмотреть. К ней приложена пара сил  $(\vec{P}, \vec{P}')$  с моментом  $m = Pa$  и две активные силы: в точке  $D$  сила  $\vec{Q}$  и на середине левой консоли сила  $\vec{R} = q \cdot CA$ , являющаяся равнодействующей равномерно распределенной нагрузки.

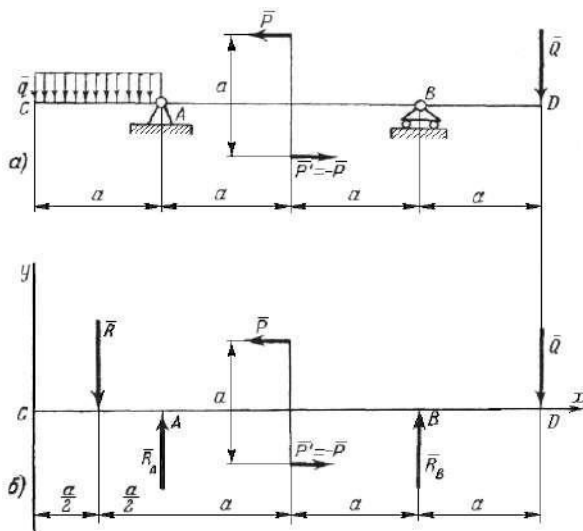


Рис. 16

Следовательно, все приложенные к балке  $CD$  активные силы являются вертикальными, так как пару сил  $(\bar{P}, \bar{P}')$ , не изменяя ее действия на балку, можно повернуть в плоскости рисунка так, чтобы составляющие пару  $(\bar{P}, \bar{P}')$  силы  $\bar{P}$  и  $\bar{P}' = -\bar{P}$  были вертикальны.

Связями, наложенными на балку  $CD$ , являются подвижная шарнирная опора  $B$  и неподвижная шарнирная опора  $A$ . Отбросим эти связи и заменим их действие на балку  $CD$  силами реакций. Реакция  $\bar{R}_B$  подвижной шарнирной

опоры  $B$  нормальна к плоскости опоры (рисунок 16, б). Так как все действующие на балку  $CD$  активные силы вертикальны, то реакция  $\bar{R}_A$  неподвижной

шарнирной опоры  $A$  также вертикальна. Рассмотрим теперь равновесие двухконсольной балки  $CD$  как свободного твердого тела, на которое действует указанная плоская система параллельных сил (рисунок 16, б). Для составления уравнений равновесия этой системы сил в форме

$$\sum m_A(\bar{F}_i) = 0; \sum m_B(\bar{F}_i) = 0 \quad (26)$$

Последовательно примем за центр моментов точки  $A$  и  $B$ . При этом уравнения моментов будут содержать только одно неизвестное.

Итак, в данном случае будем иметь

$$\sum m(\bar{F}) = qa \cdot \frac{a}{2} + m + R \cdot 2a - Q \cdot 3a = 0; \quad (27)$$

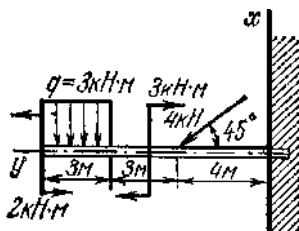
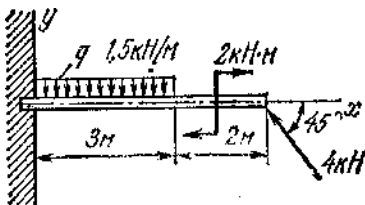
$$\sum_B m^A(F_i) = qa \left( \frac{a^2}{2} + 2a \right) - R^B \cdot 2a + m - Qa = 0. \tag{28}$$

Решая порознь уравнения (27) и (28), найдем

$$R_A = 11,5 \text{ Н}; R_B = 2,5 \text{ Н}.$$

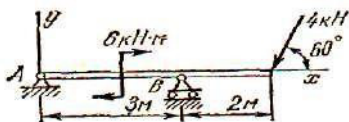
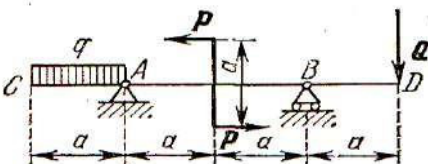
### Решить самостоятельно

1. Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенной силы и пары сил.

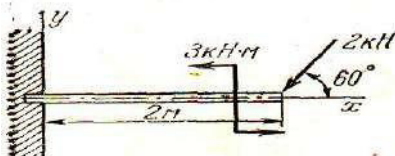


2. Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, одной сосредоточенной силы и двух пар сил.

3. На двухконсольную горизонтальную балку действует пара сил  $(P, P)$ , на левую консоль — равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q$ , а в точке  $D$  правой консоли — вертикальная нагрузка  $Q$ . Определить реакции опор, если  $P = 1 \text{ кН}$ ,  $Q = 2 \text{ кН}$ ,  $q = 2 \text{ кН/м}$ ,  $a = 0,8 \text{ м}$ .



4. Определить реакции опор  $A$  и  $B$  балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы и пары сил. Нагрузка и размеры указаны на рисунке.



5. Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием сосредоточенной силы и пары сил.



### ***Вопросы для обсуждения***

1. Плоская произвольная система сил?
2. Равномерно – распределённая нагрузка, равнодействующая?
3. Разложение силы на две составляющие по осям?
4. Пара сил. Момент пары сил?
5. Опоры (связи) и силы реакций опор?
6. Алгебраический момент силы относительно неподвижной точки на плоскости и его свойства?
7. Аналитические условия равновесия плоской произвольной системы сил?

### ***Литература***

Основная: 1–5.

Интернет-ресурсы: 1.

## **8. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей произвольной плоской системы сил**

***Цель занятия:*** плоская произвольная система сил, алгебраический момент силы относительно неподвижной точки на плоскости, теорема Вариньона, условия равновесия плоской произвольной системы сил, аналитический способ уравнивания конструкции.

***Организационная форма:*** решение задач.

### ***Методические рекомендации***

*Теорема Вариньона: Момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно некоторой точки, лежащей в плоскости сил, равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки.*

$$m_o(\bar{R}) = \sum_{i=1}^n m_o(\bar{F}_i). \quad (29)$$

Условие равновесия рычага согласно теории Вариньона

$$\sum_{i=1}^n m_o(\bar{F}_i) = 0, \quad (30)$$

*Для равновесия рычага необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов всех приложенных к рычагу сил относительно точки его опоры равнялась нулю.*

Задача.

На концы прямолинейного рычага  $AB$  длиной  $l$ , закрепленного на шарнире  $O$ , действуют силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , образующие с рычагом углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Найти расстояние  $OA$  при равновесии рычага (рисунок 17).

Решение. Так как рычаг  $AB$  находится в равновесии под действием сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , то алгебраическая сумма моментов этих сил относительно опоры  $O$  равна нулю, т. е.  $m_o(F_1) + m_o(F_2) = 0$ .

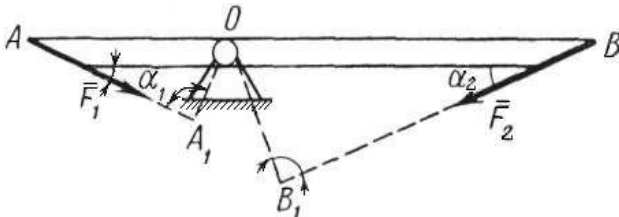


Рис. 17

Но  $m_o(F_1) = F \cdot OA$ ,  $m_o(F_2) = -F \cdot OB$ , где  $OA$  – плечо силы  $\vec{F}_1$  относительно точки  $O$ , а  $OB$  – плечо силы  $\vec{F}_2$  относительно той же точки  $O$ . Из треугольников  $OBB_1$  и  $OAA_1$  находим  $OB_1 = OB \sin \alpha_2$  и  $OA_1 = OA \sin \alpha_1$

$$OB_1 = OB \sin \alpha_2 = (AB - OA \sin \alpha_1) = (l - OA) \sin \alpha_2.$$

Следовательно,

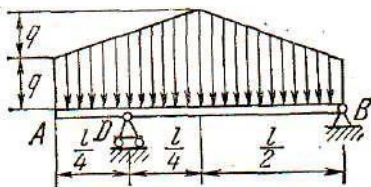
$$m_o(F_1) = F \cdot OA \cdot \sin \alpha_1; m_o(F_2) = -F (l - OA) \sin \alpha_2.$$

Уравнение равновесия рычага примет вид

$$\text{отсюда } OA = \frac{F_2 (l - OA) \sin \alpha_2}{F_1 \sin \alpha_1}.$$

$$F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2$$

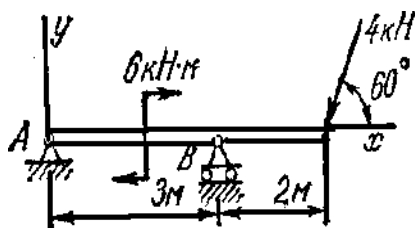
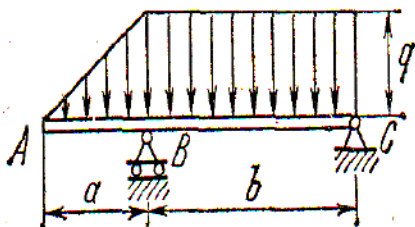
**Решить самостоятельно**



1. Балка  $AB$  длины  $l$  м несет распределенную нагрузку, показанную на рисунке. Интенсивность нагрузки равна  $q$  Н/м на концах  $A$  и  $B$  балки и  $2q$  Н/м в середине балки. Пренебрегая весом балки, найти ре-

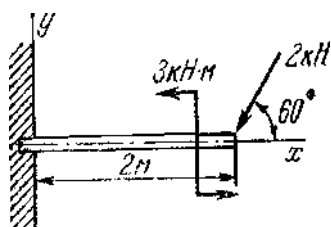
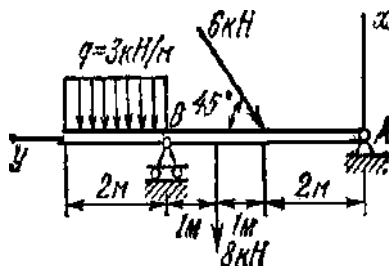
акции опор  $D$  и  $B$ .

2. Горизонтальная балка  $AC$ , опертая в точках  $B$  и  $C$ , несет между опорами  $B$  и  $C$  равномерно распределенную нагрузку интенсивности  $q$  Н/м; на участке  $AB$  интенсивность нагрузки уменьшается по линейному закону до нуля. Найти реакции опор  $B$  и  $C$ , пренебрегая весом балки.



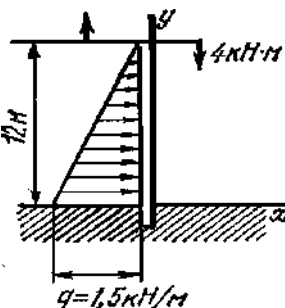
3. Определить реакции опор  $A$  и  $B$  балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы и пары сил. Нагрузка и размеры указаны на рисунке.

4. Определить реакции опор  $A$  и  $B$  балки, находящейся под действием двух сосредоточенных сил и равномерно распределенной нагрузки. Интенсивность распределенной нагрузки, величины сил и размеры указаны на рисунке.



5. Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием сосредоточенной силы и пары сил.

6. Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием пары сил и распределенной нагрузки, изменяющейся по закону треугольника.



### ***Вопросы для обсуждения***

1. Плоская произвольная система сил?
2. Равномерно-распределённая нагрузка, равнодействующая?
3. Разложение силы на две составляющие по осям?
4. Пара сил. Момент пары сил?
5. Опоры (связи) и силы реакций опор?
6. Алгебраический момент силы относительно неподвижной точки на плоскости и его свойства?
7. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей произвольной плоской системы сил?
8. Условие равновесия рычага?
9. Главный вектор и главный момент плоской произвольной системы сил – аналитические условия равновесия плоской произвольной системы сил?
10. Аналитические условия равновесия плоской произвольной системы сил?

### ***Литература***

Основная: 1-4.

Интернет – ресурсы: 1.

## **9. Определение реакций опор твердого тела. Плоская произвольная система сил**

***Цель занятия:*** аналитическое исследование – выбор рационального способа закрепления бруса с минимальными реактивными силами (реакциями опор), плоская произвольная система сил, алгебраический момент силы относительно неподвижной точки на плоскости, условия равновесия плоской произвольной системы сил, аналитический способ уравнивания конструкции.

***Организационная форма:*** решение задач.

### ***Методические рекомендации***

Понятие момента силы возникло в связи с определением вращательного действия силы, приложенной к телу, имеющему неподвижную точку или неподвижную ось. Алгебраическим моментом силы относительно некоторой точки  $O$  на плоскости называется скалярная величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо относительно этой точки.

$$m_o(\vec{F}) = \pm Fd \quad (31)$$

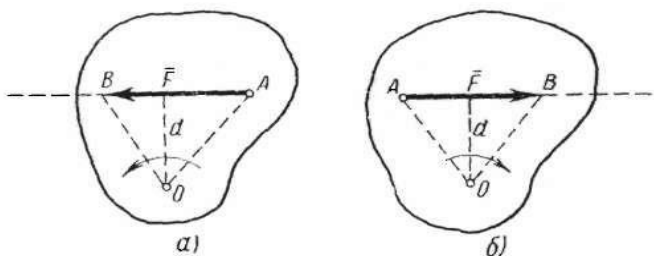


Рис. 18

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно и главный вектор, и главный момент этой системы относительно произвольно выбранного центра приведения равнялись нулю.

$$\overline{R'} = 0; M_o = 0, \quad (32)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \sum_{i=1}^n m_o(\vec{F}_i) = 0, \quad (33)$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из двух любым образом выбранных в плоскости действия этой системы сил координатных осей и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки той же плоскости были равны нулю.

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \sum_{i=1}^n m_o(F_i) = 0. \quad (34)$$

Задача.

Дано: схемы закрепления бруса (рис. 19 а, б, в);  $P = 2$  кН;  $M = 8$  кН/м;  $q = 2$  кН/м.

Определить реакции опор для того способа закрепления бруса, при котором реакция  $\overline{Y}_B$  опоры  $B$  имеет наименьшее числовое значение.

Решение.

1. Рассмотрим равновесие бруса. На него действуют: активные силы, заданные по условию задачи – сосредоточенная сила  $\overline{P}$  под углом  $30^\circ$  к горизонтальной оси системы отчёта  $XY$ ; пара сил с моментом  $M$ ; равномерно-распределённая нагрузка интенсивностью  $q$  и реактивные силы – реакции опор. На рис. 19а: реакцию неподвижной шарнирной опоры  $A$  изображаем двумя её составляющими  $\overline{X}_A$  и  $\overline{Y}_A$ , реакцию подвижной шарнирной опоры  $B$  изображаем  $\overline{Y}_B$  (линия действия шарнирной опоры на

катках направлена перпендикулярно опорной плоскости). На рис. 19б реакцию шарнирной опоры  $A$  (невесомого стержня) (стержень прикреплен к

брусу и к неподвижной опоре шарнирами) изображаем вдоль самого стержня произвольного направления  $\overline{X}_A$ , реакцию неподвижной шарнирной опоры  $B$  изображаем двумя её составляющими  $\overline{X}_B$  и  $\overline{Y}_B$ . На рис. 19в реакцию опоры  $A$  (невесомого стержня, стержень прикреплён к брусу и к неподвижной опоре шарнирами) изображаем вдоль самого стержня, произвольного направления  $\overline{Y}_A$ , реакцию неподвижной шарнирной опоры  $B$  изображаем двумя составляющими  $\overline{X}_B$  и  $\overline{Y}_B$ .

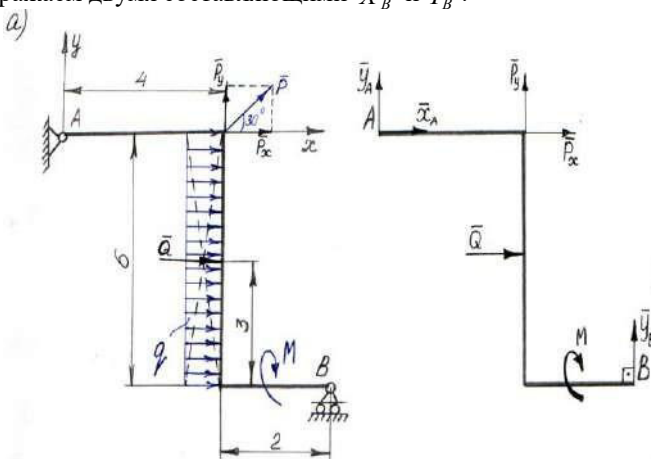


Рис. 19а

Сосредоточенную силу  $\overline{P}$  по «правилу параллелограмма сил» разлагаем на две составляющие по осям  $X$  и  $Y$  —  $\overline{P}_X$  и  $\overline{P}_Y$ . При графическом построении  $\overline{P}_X$  и  $\overline{P}_Y$  на рис. 19 а, б, в точка приложения силы должна остаться на конструкции.

Численно  $P_X$  и  $P_Y$  будут равны (используем соотношения прямоугольного треугольника).

$$P_x = P \cdot \cos 30 = 2 \cdot (\sqrt{3} / 2) = \sqrt{3} \text{ кН};$$

$$P_y = P \cdot \sin 30 = 2 \cdot (1 / 2) = 1 \text{ кН}.$$

Равномерно-распределённую нагрузку интенсивностью  $q$  заменяем равнодействующей  $\overline{Q}$ , численно равной площади прямоугольника (закон изменения распределённой нагрузки) и приложенной в центре тяжести прямоугольника (на пересечении диагоналей).

$$|\overline{Q}| = S \square = 6 \cdot q = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кН}.$$

Для полученной плоской произвольной системы сил можно составить три уравнения равновесия:



$$1) \Sigma F_{Kx} = 0; 2) \Sigma F_{Ky} = 0; 3) \Sigma Ma (\overline{F_K}) = 0 \text{ или} \quad (35)$$

$$1) \Sigma Ma (\overline{F_K}) = 0; 2) \Sigma Mb (\overline{F_K}) = 0; 3) \Sigma Mc (\overline{F_K}) = 0. \quad (36)$$

Для определения реакции  $\overline{Y_B}$  составим уравнение моментов относительно точки  $A$  – точки пересечения двух реакций опор  $\overline{X_A}$  и  $\overline{Y_A}$  (уравнение будет содержать меньше неизвестных):

$$\Sigma Ma (\overline{F_K}) = 0; 4Py + 3Q - M + 6Y_B = 0 \Rightarrow$$

$$Y_B = (M - 3Q - Py) / 6 = (8 - 3 \cdot 12 - 41) / 6 = -5,33 \text{ кН.}$$

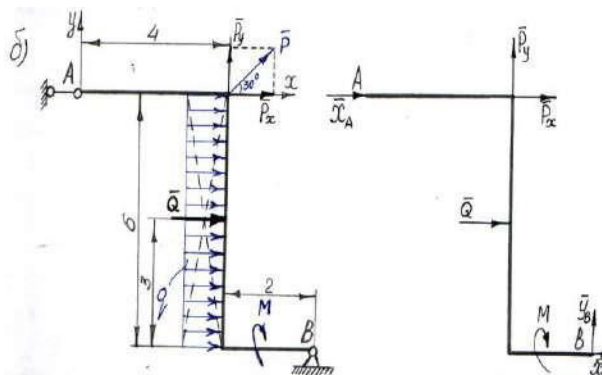


Рис. 19б

Для определения исследуемой реакции  $\overline{Y_B}$  из трёх возможных уравнений равновесия полученной произвольной системы сил рациональным является уравнение:

$$\Sigma F_{Ky} = 0; Py + Y_B = 0; \Rightarrow Y_B = -Py = -1 \text{ кН.}$$

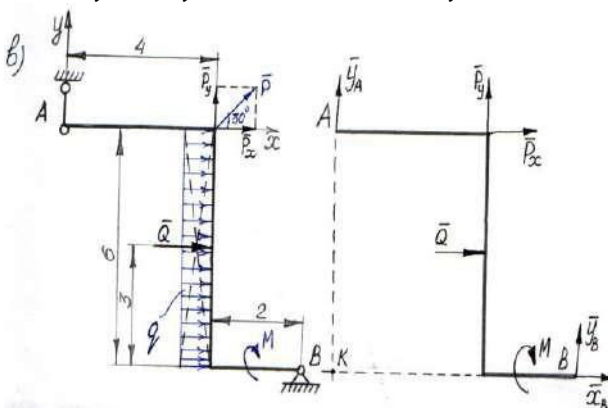


Рис. 19в

Для определения исследуемой реакции  $\overline{Y}_B$  из трёх возможных уравнений равновесия полученной произвольной системы сил рациональным (в уравнении наименьшее число неизвестных) является уравнение: алгебраическая сумма моментов всех сил относительно точки  $K$  – точки пересечения линий действия реакций  $\overline{X}_A$  и  $\overline{Y}_A$ :

$$\begin{aligned}\Sigma M_K (\overline{F}_K) &= 0; 4Py - 6Px - 3Q - M + 6Y_B = 0; \Rightarrow \\ \Rightarrow Y_B &= (6Px + 3Q + M - 4Y_B) / 6 = (6 \cdot (\sqrt{3}) + 3 \cdot 12 + 8 - 4 \cdot 1) / 6 = \\ &= 8,397 \text{ кН.}\end{aligned}$$

Знак «–» в значении реакции  $\overline{Y}_B$  (рис. 19а и 19б) указывает на то, что истинное направление  $\overline{Y}_B$ , обеспечивающее равновесие полученных систем сил, соответствует противоположно указанному на рис. 19а, 19б.

Так как  $\overline{Y}_B = |-1|$  кН – минимум по рис. 19б, следовательно, для этой схемы находим все остальные реакции опор –  $\overline{X}_A$  и  $\overline{X}_B$  и делаем проверку:

$$\begin{aligned}\Sigma M_B (\overline{F}_K) &= 0; -M - 3Q - 6Px - 2Py - 6X_A = 0; \Rightarrow \\ \Rightarrow X_A &= (-M - 3Q - 6Px - 2Py) / 6 = (-8 - 3 \cdot 12 - 6 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot 1) / 6 = -9,397 \text{ кН.} \\ \Sigma F_{Kx} &= 0; X_A + Px + Q + X_B = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow X_B &= -X_A - Px - Q = -(-9,397) - \sqrt{3} - 12 = -4,33 \text{ кН.}\end{aligned}$$

Уравновешенность конструкции бруса (правильность вычисления реакций опор  $A$  и  $B$ ) проверим, выполнив проверку:

$$\begin{aligned}\Sigma M_n (\overline{F}_K) &= 0; -4,5X_A - 4,5Px - 1,5Q - M + Y_B + 1,5X_B = 0; \\ -4,5 \cdot (-9,397) - 4,5 \cdot (\sqrt{3}) - 1,5 \cdot 12 - 8 + 2 \cdot (-1) + 1,5 \cdot (-4,33) &= 0; \\ 42,28 - 7,78 - 18 - 8 - 2 - 6,495 &= 0 \\ 42,28 - 42,28 &= 0; \\ 0 &\equiv 0.\end{aligned}$$

Знак «–» в значениях реакции  $\overline{X}_A$  и  $\overline{X}_B$  указывает на то, что истинное направление этих реактивных сил, обеспечивающее равновесие полученной системы сил, соответствует противоположно указанному на рис. 19б.

Результаты расчётов сводим в таблицу 1.

Таблица 1

| №<br>рисунка | Исследуемая реакция<br>$\bar{Y}_B$ (кН) | Реакции опор     |                  |
|--------------|-----------------------------------------|------------------|------------------|
|              |                                         | $\bar{X}_A$ (кН) | $\bar{X}_B$ (кН) |
| Рис. 19а     | – 5,33                                  | –                | –                |
| Рис. 19б     | – 1                                     | – 9,397          | – 4,33           |
| Рис. 19в     | 8,397                                   | –                | –                |

**Решить самостоятельно**

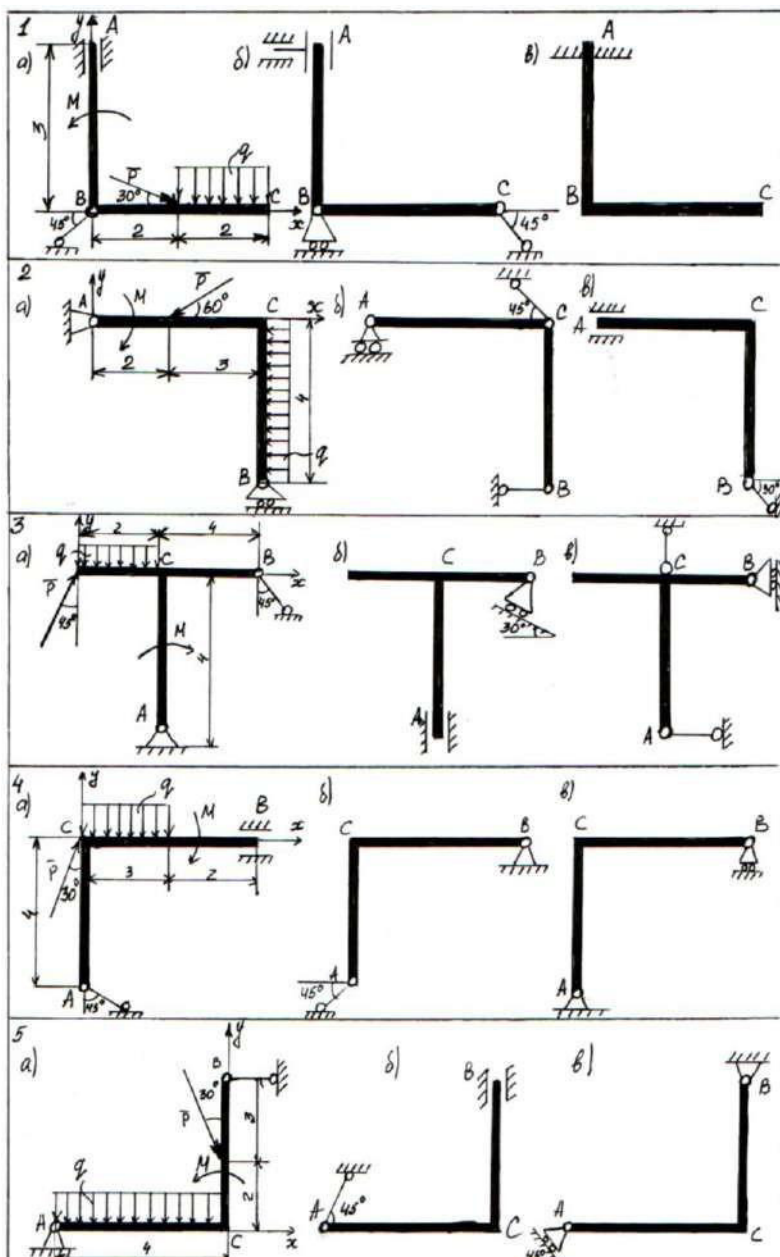
На рисунках 20–33 показаны три способа (а, б, в) закрепления бруса, ось которого ломаная линия. Заданная нагрузка (табл. 2) и размеры бруса (геометрическая конфигурация) во всех случаях одинаковы.

Определить реакцию опор для того способа закрепления бруса, при котором исследуемая реакция, указанная в табл. 2, имеет наименьший модуль.

Таблица 2

| № варианта<br>(рис. 20–34) | $P$ , кН | $M$ , кН · м | $q$ , кН / м | Исследуемая<br>реакция |
|----------------------------|----------|--------------|--------------|------------------------|
| 1                          | 2        | 3            | 4            | 5                      |
| 1                          | 12       | 8            | 1,5          | $M_A$                  |
| 2                          | 4        | 6            | 2            | $Y_A$                  |
| 3                          | 3        | 2            | 2,5          | $X_A$                  |
| 4                          | 2        | 3            | 2            | $Y_B$                  |
| 5                          | 10       | 2            | 2            | $X_B$                  |
| 6                          | 4        | 6            | 1            | $M_A$                  |
| 7                          | 2        | 2            | 18           | $X_A$                  |
| 8                          | 3        | 4            | 2            | $R_B$                  |
| 9                          | 4        | 8            | 2            | $M_A$                  |
| 10                         | 2        | 4            | 0,5          | $X_A$                  |
| 11                         | 4        | 8            | 2            | $Y_A$                  |
| 12                         | 8        | 3            | 1            | $Y_B$                  |
| 13                         | 6        | 5            | 2            | $X_A$                  |
| 14                         | 4        | 3            | 1            | $Y_A$                  |
| 15                         | 3        | 4            | 2            | $M_A$                  |
| 16                         | 2        | 4            | 3            | $X_A$                  |
| 17                         | 4        | 4            | 2            | $X_C$                  |
| 18                         | 8        | 4            | 2            | $X_A$                  |
| 19                         | 2        | 3            | 1            | $Y_C$                  |
| 20                         | 3        | 8            | 2            | $Y_B$                  |
| 21                         | 4        | 4            | 2            | $Y_A$                  |
| 22                         | 6        | 4            | 2            | $Y_A$                  |

|    |    |    |     |       |
|----|----|----|-----|-------|
| 23 | 4  | 3  | 2   | $X_A$ |
| 24 | 5  | 4  | 1   | $M_A$ |
| 25 | 4  | 3  | 1,5 | $Y_A$ |
| 26 | 3  | 4  | 1   | $X_A$ |
| 27 | 2  | 3  | 2   | $X_B$ |
| 28 | 4  | 3  | 2   | $Y_A$ |
| 29 | 2  | 4  | 2   | $X_B$ |
| 30 | 4  | 5  | 1   | $Y_B$ |
| 31 | 10 | 6  | 2   | $Y_A$ |
| 32 | 20 | 5  | 4   | $M_A$ |
| 33 | 15 | 8  | 1   | $Y_B$ |
| 34 | 5  | 2  | 1   | $Y_B$ |
| 35 | 10 | 4  | -   | $X_B$ |
| 36 | 6  | 2  | 1   | $M_A$ |
| 37 | 2  | 4  | 2   | $X_A$ |
| 38 | 20 | 10 | 4   | $R_B$ |
| 39 | 10 | 6  | -   | $Y_A$ |
| 40 | 2  | 4  | 2   | $X_A$ |
| 41 | 4  | 10 | 1   | $R_B$ |
| 42 | 10 | 5  | 2   | $Y_A$ |
| 43 | 20 | 12 | 2   | $Y_A$ |
| 44 | 15 | 4  | 3   | $Y_A$ |
| 45 | 10 | 5  | 2   | $X_A$ |
| 46 | 12 | 6  | 2   | $M_A$ |
| 47 | 20 | 4  | 3   | $Y_A$ |
| 48 | 14 | 4  | 2   | $X_A$ |
| 49 | 16 | 6  | 1   | $R_B$ |
| 50 | 10 | -  | 4   | $Y_A$ |
| 51 | 20 | 10 | 2   | $M_A$ |
| 52 | 6  | 6  | 1   | $Y_A$ |
| 53 | 10 | 4  | 2   | $M_A$ |
| 54 | 4  | 3  | 1   | $Y_A$ |
| 55 | 10 | 10 | 2   | $X_A$ |
| 56 | 20 | 5  | 2   | $M_A$ |
| 57 | 10 | 6  | 1   | $X_A$ |
| 58 | 20 | 10 | 2   | $Y_A$ |
| 59 | 25 | -  | 1   | $M_A$ |
| 60 | 20 | 10 | 2   | $R_B$ |



Puc. 20

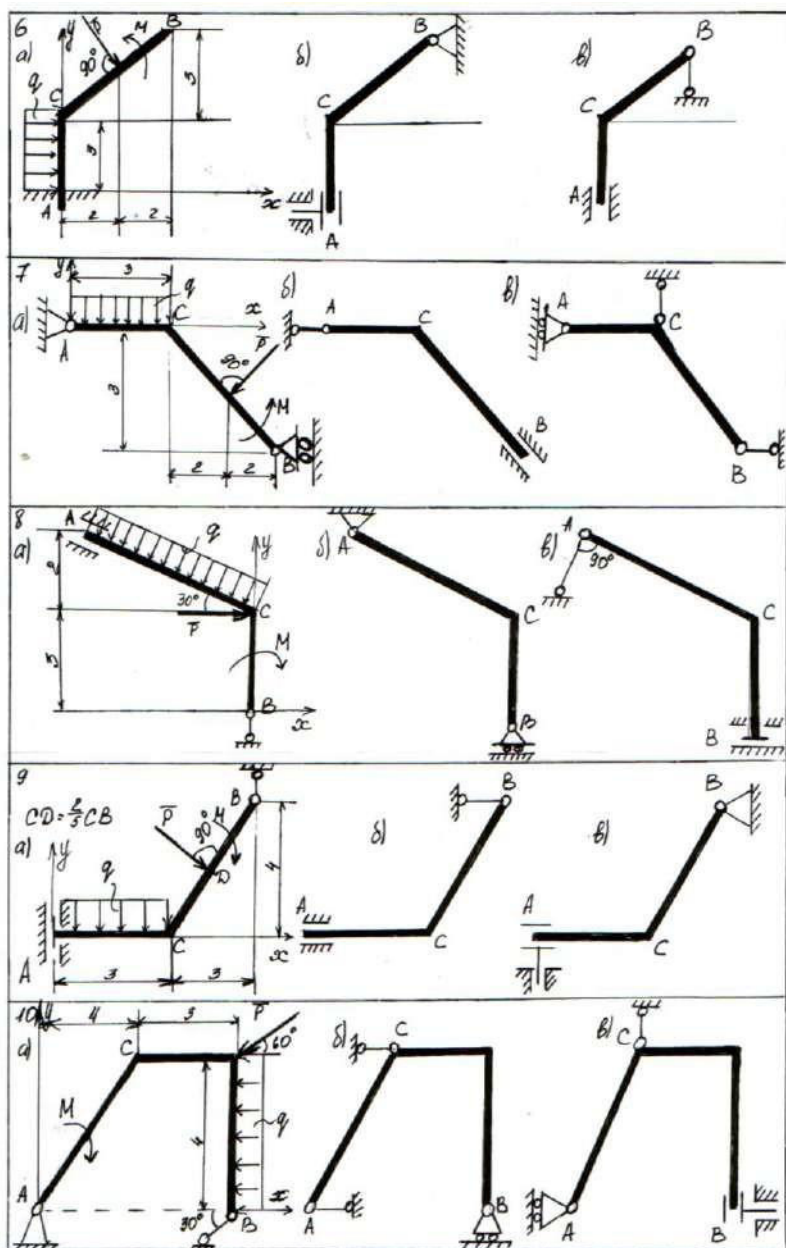


Рис.21

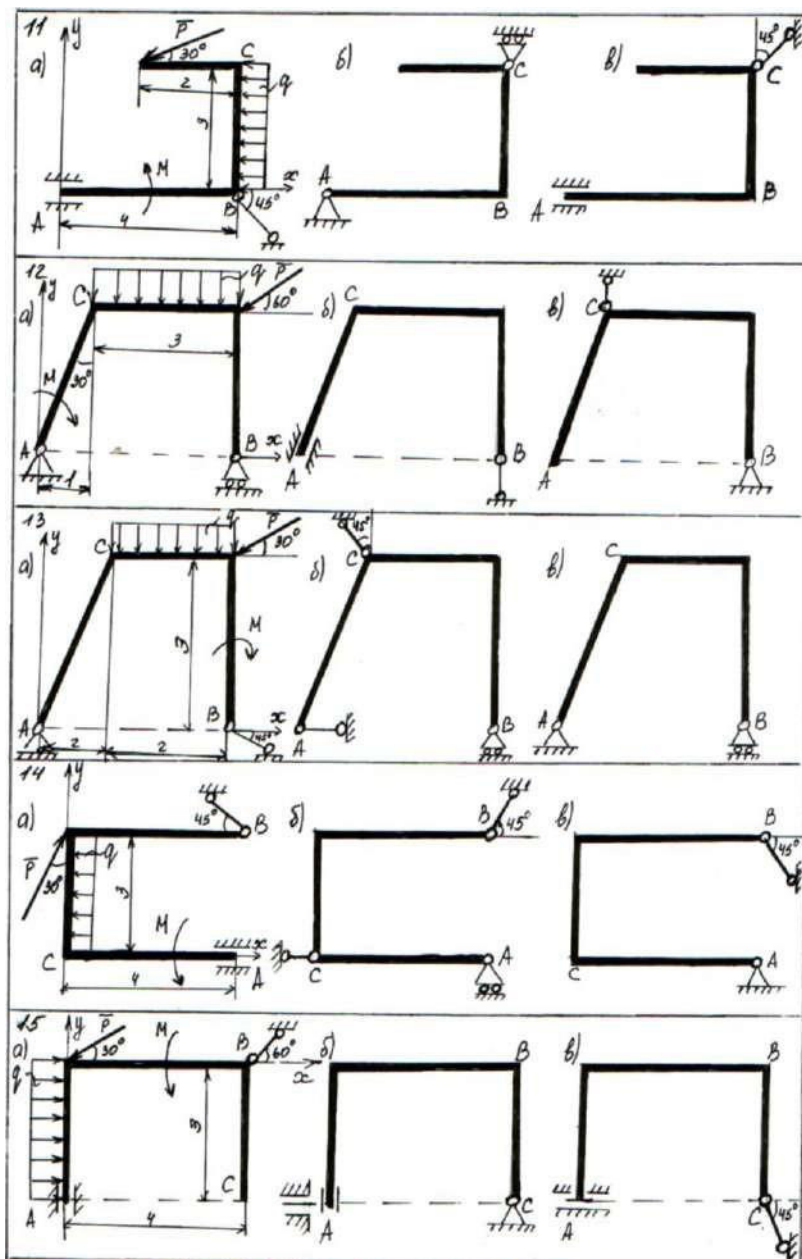


Рис. 22





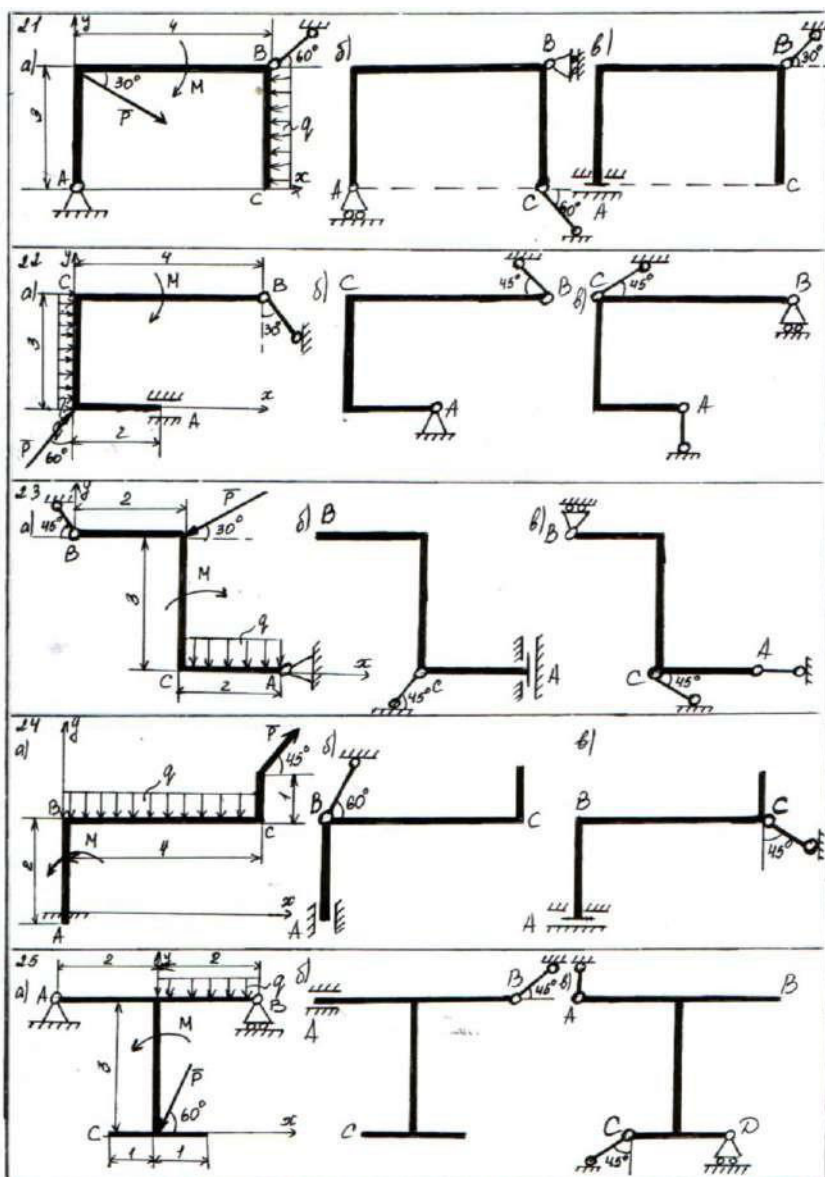
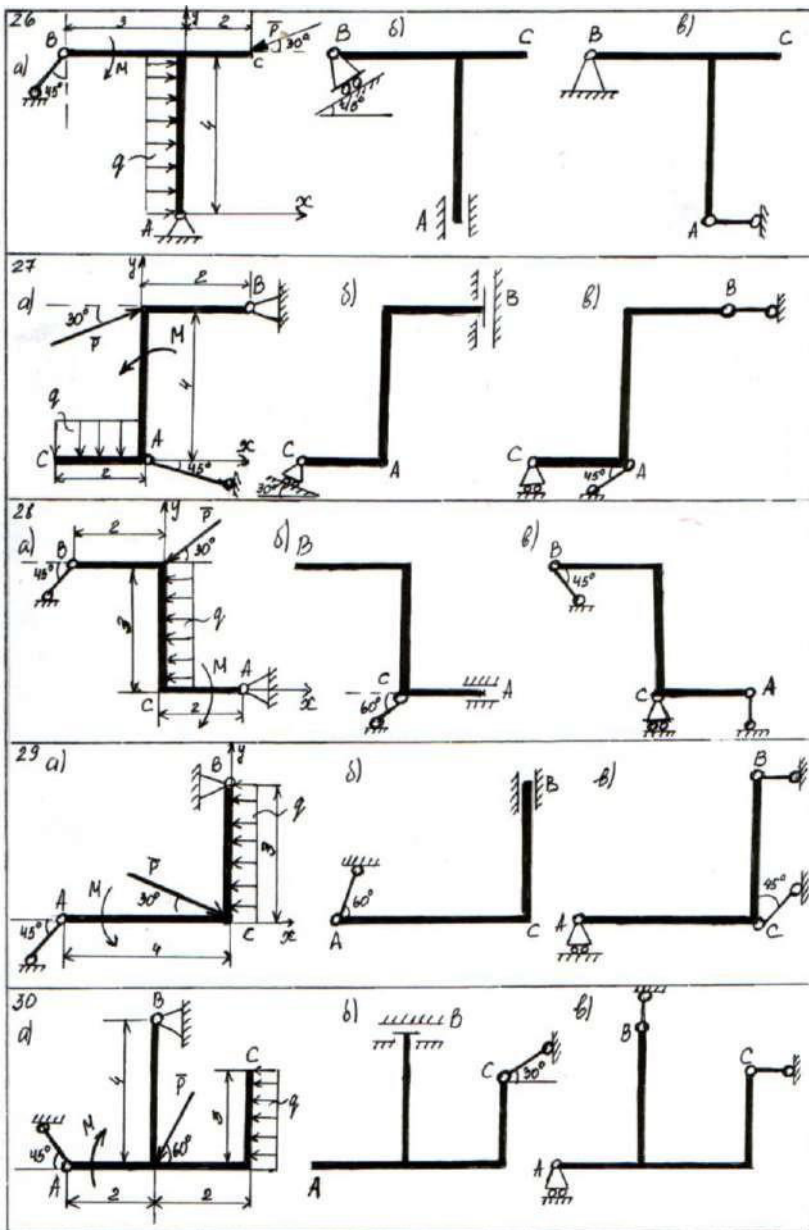
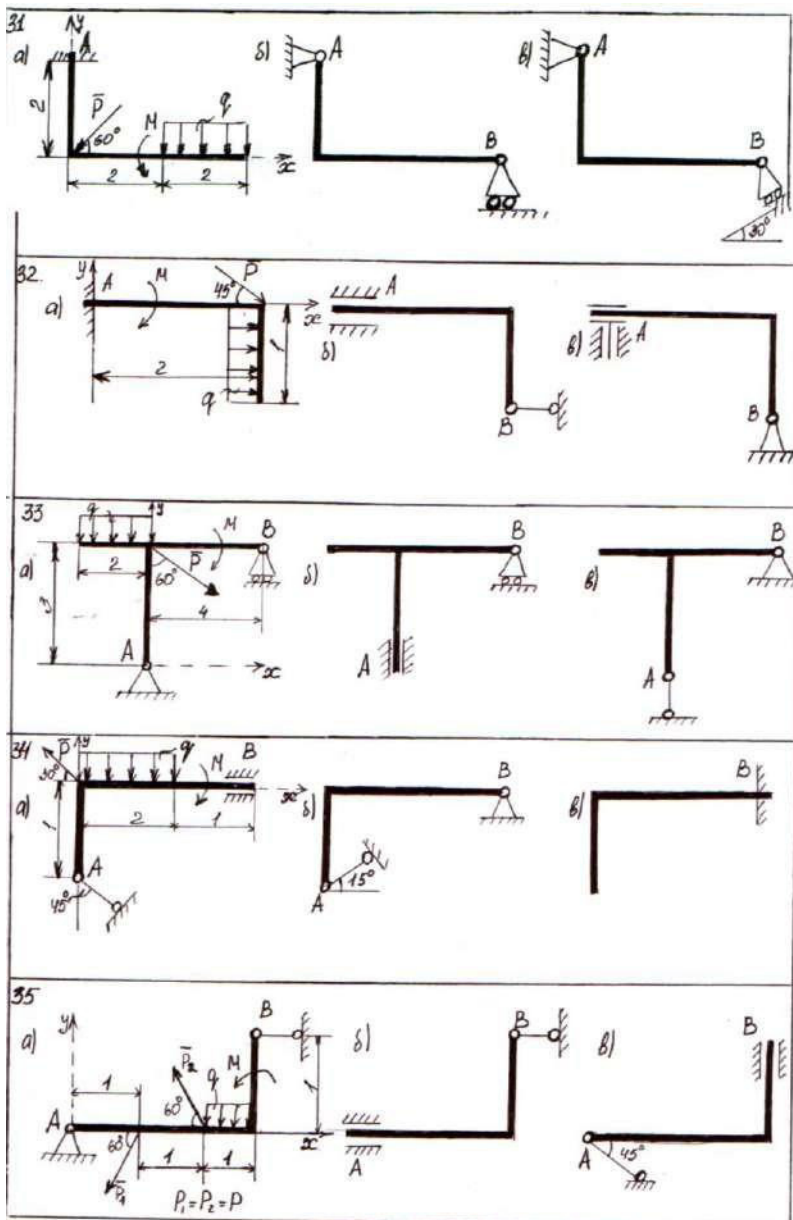


Рис. 24





Puc. 26

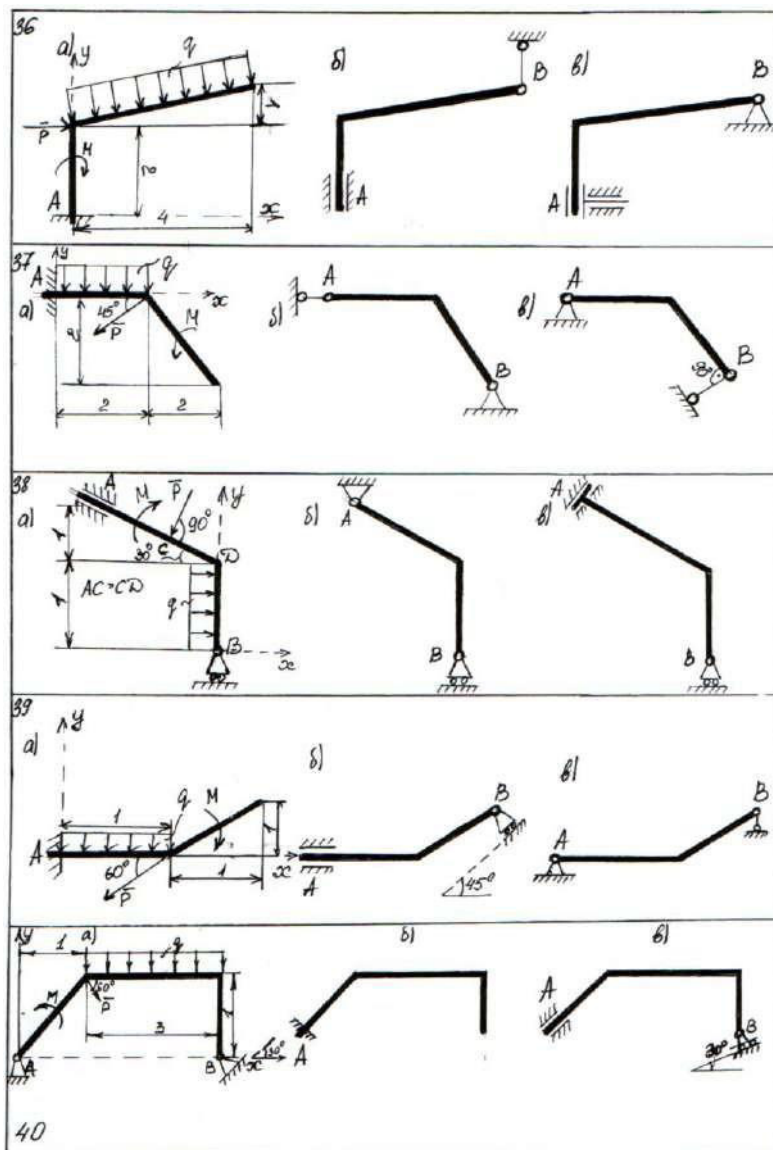


Рис. 27

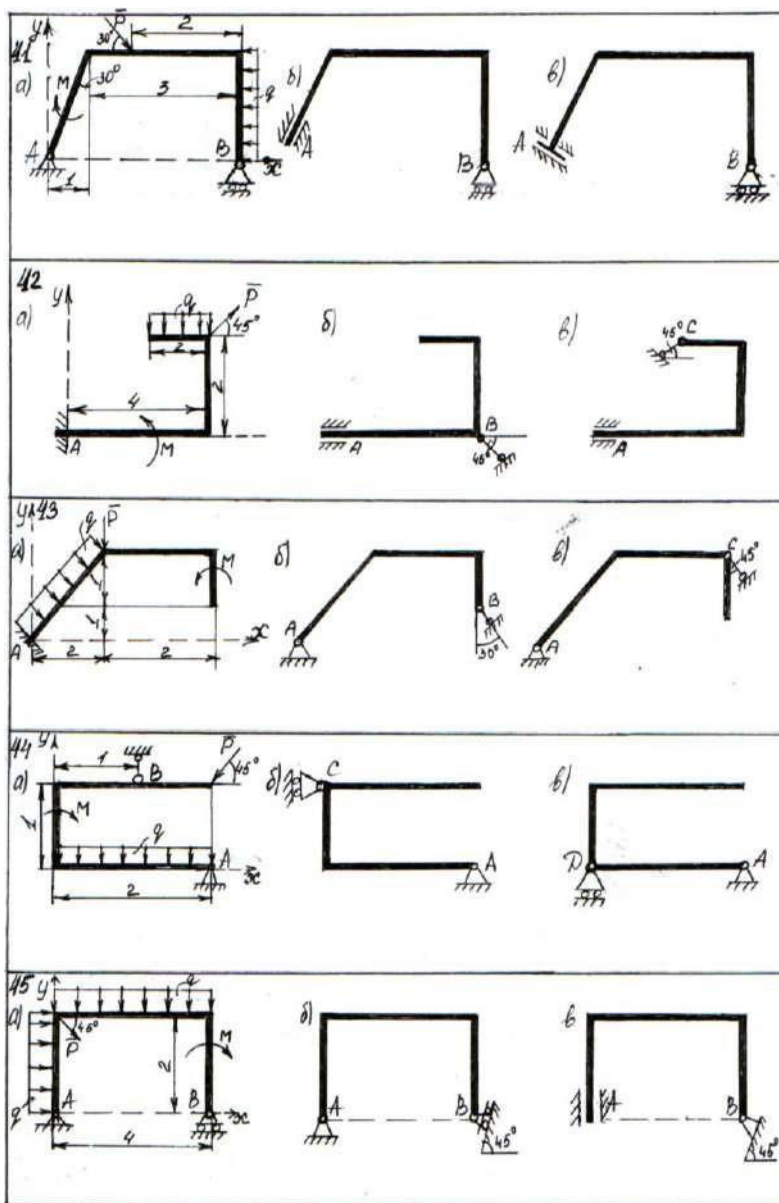
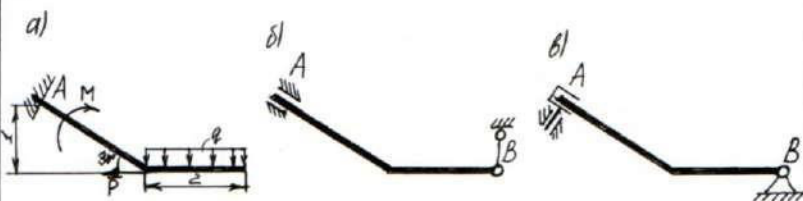
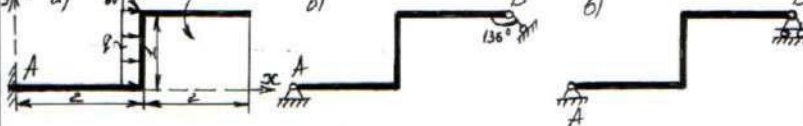


Рис. 28

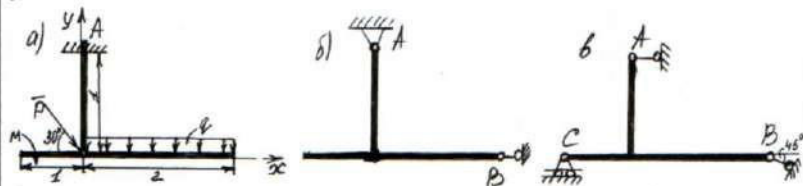
46



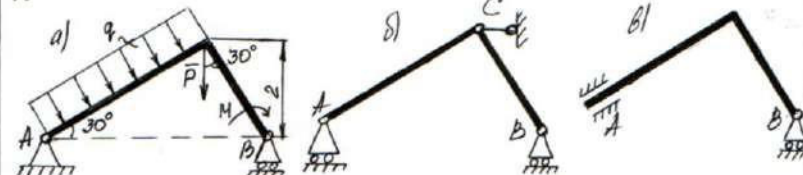
47



48



49



50

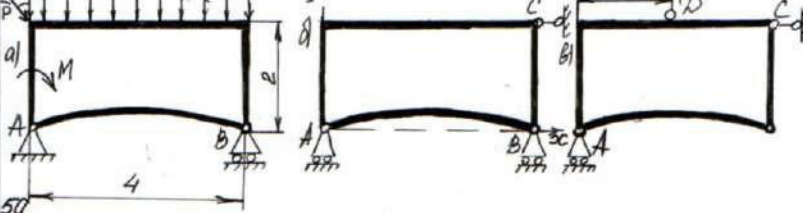


Рис. 29

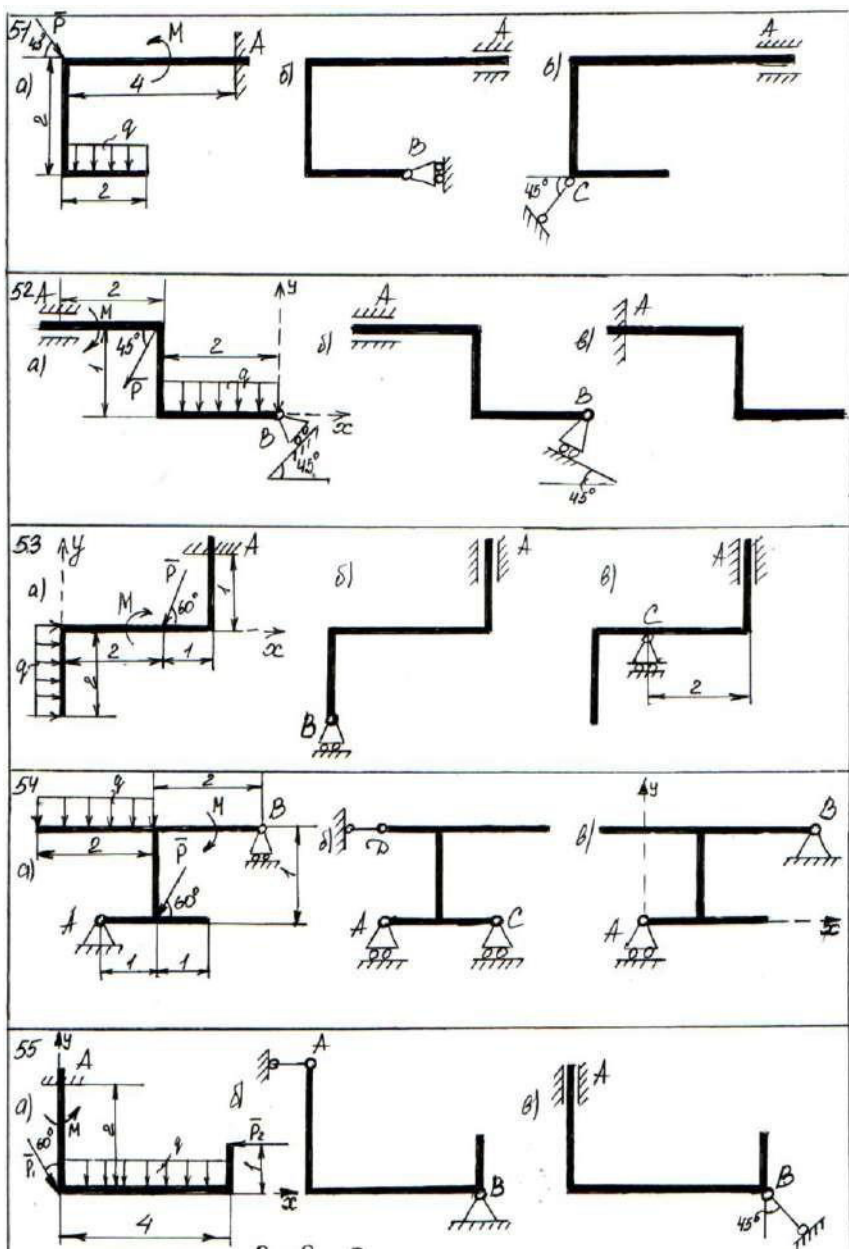


Рис. 30



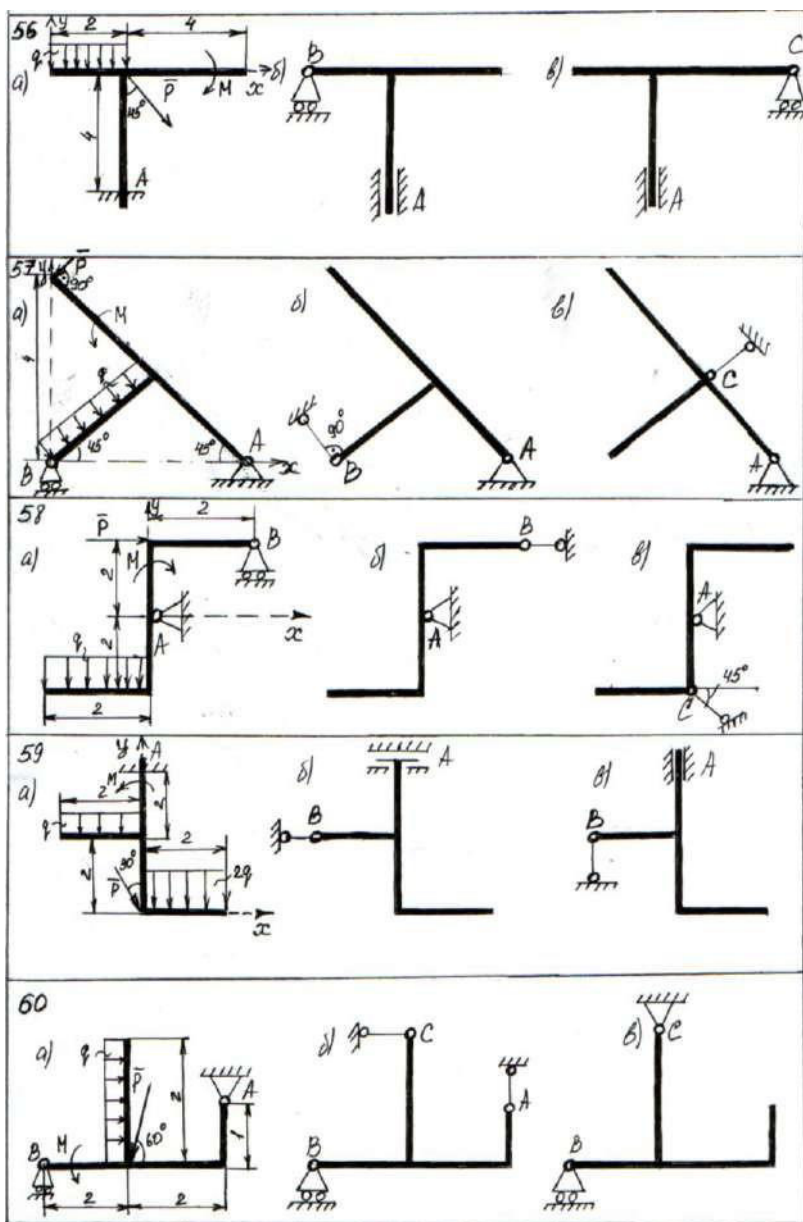


Рис. 31



|    | Рис. а |   |   | Рис. б |   |   | Рис. в |   |   |
|----|--------|---|---|--------|---|---|--------|---|---|
|    | A      | B | C | A      | B | C | A      | B | C |
| 1  |        |   |   |        |   |   |        |   |   |
| 2  |        |   |   |        |   |   |        |   |   |
| 3  |        |   |   |        |   |   |        |   |   |
| 4  |        |   |   |        |   |   |        |   |   |
| 5  |        |   |   |        |   |   |        |   |   |
| 6  |        |   |   |        |   |   |        |   |   |
| 7  |        |   |   |        |   |   |        |   |   |
| 8  |        |   |   |        |   |   |        |   |   |
| 9  |        |   |   |        |   |   |        |   |   |
| 10 |        |   |   |        |   |   |        |   |   |
| 11 |        |   |   |        |   |   |        |   |   |
| 12 |        |   |   |        |   |   |        |   |   |
| 13 |        |   |   |        |   |   |        |   |   |
| 14 |        |   |   |        |   |   |        |   |   |
| 15 |        |   |   |        |   |   |        |   |   |

Рис. 32

|    | Рис. а |   |   | Рис. б |   |   | Рис. в |   |   |
|----|--------|---|---|--------|---|---|--------|---|---|
|    | A      | B | C | A      | B | C | A      | B | C |
| 16 |        |   | — |        | — |   |        |   |   |
| 17 |        |   | — |        |   |   |        |   |   |
| 18 |        |   | — |        | — |   |        |   |   |
| 19 |        | — |   | —      |   |   |        |   |   |
| 20 |        |   |   | —      |   |   |        |   | — |
| 21 |        |   |   |        |   | — |        |   |   |
| 22 |        |   | — |        | — |   |        |   |   |
| 23 |        |   |   |        | — |   |        |   | — |
| 24 |        |   | — |        |   |   |        | — |   |
| 25 |        | — |   |        |   |   |        |   | — |
| 26 |        |   |   |        | — |   |        |   | — |
| 27 |        |   |   |        |   | — | —      |   |   |
| 28 |        |   | — |        |   |   |        |   | — |
| 29 | —      |   |   |        |   |   |        |   | — |
| 30 |        |   | — |        |   |   | —      |   |   |

Рис. 33

На рис. 20–33 указаны инварианты способов закрепления бруса (для вариантов № 1–30) в соответствии с указанным номером варианта схемы.

### ***Вопросы для обсуждения***

1. Что такое сила? Основные характеристики силы?
2. Что такое сосредоточенная сила?
3. Определение распределённой нагрузки?
4. Что такое равнодействующая? Правило параллелограмма сил?
5. Графическое и аналитическое определение проекции силы на ось?
6. Что такое: а) свободное тело? б) несвободное тело? Принцип освобожденности от связей?
7. Виды связей и их реакции?
8. Определение системы сил? Что называется плоской системой:  
а) сходящихся сил? б) параллельных сил? в) произвольной системой сил?
9. Определение алгебраического момента силы относительно неподвижной точки на плоскости и его свойства?
10. Определение пары сил? Момент пары сил? Свойства пары сил?
11. Теорема о парах сил? Эквивалентные преобразования с парами сил?
12. Уравнения равновесия плоской системы: а) сходящихся сил?  
б) параллельных сил? в) произвольной системы сил?
13. План решения задач статики?

### ***Литература***

Основная: 1-5.

Интернет – ресурсы: 1.

## **10. Равновесие сочленённой системы тел**

**Цель занятия:** сочленённая система тел, равновесие сочленённых конструкций, плоская произвольная система сил, внешние и внутренние связи.

**Организационная форма:** решение задач.

### ***Методические рекомендации***

Системы тел, свободно опирающихся друг на друга или соединённых между собой какими-нибудь связями и находящимися под действием произвольной плоской системы сил или плоской системы параллельных сил. Такую систему тел называют *сочленённой системой*.

После отбрасывания внешних связей (связи, скрепляющие сочленённую систему с не входящими в нее телами (например, с опорами), называются

внешними, в отличие от внутренних связей, соединяющих между собой тела данной сочлененной системы) сочлененная система тел не остается жесткой.

На основании принципа отвердевания система сил, действующая сочлененную систему тел, должна при равновесии удовлетворять условиям равновесия абсолютно твердого тела.

Например, трехшарнирная арка (рисунок 34), состоящая из двух тел (полуарок) с тремя шарнирами  $A$ ,  $B$  и  $C$ , из которых первые два являются неподвижными опорными шарнирами, а третий соединяет эти два тела (полуарки) между собой.

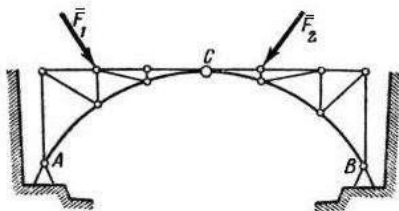


Рис. 34

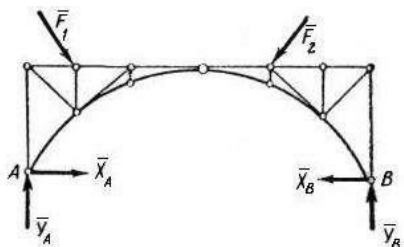


Рис. 35

В месте подвижного соединения – шарнир  $C$  – расчленим конструкцию на две составные части. Применяя принцип освобождения от связей, отбросим

мысленно шарнирные закрепления в точках  $A$  и  $B$  и заменим их действие силами реакций. Модули и направления этих реакций неизвестны. Поэтому необходимо неизвестную по направлению реакцию в каждой из двух шарнирно неподвижных опор  $A$  и  $B$  разложить на горизонтальную и вертикальную составляющие  $\overline{X_A}$ ,  $\overline{Y_A}$  и  $\overline{X_B}$ ,  $\overline{Y_B}$  (рисунок 35). Таким образом, для сочлененной системы тел, состоящей из двух полуарок (рисунок 35), можно составить три уравнения равновесия, в то время как число неизвестных сил реакций равно четырем. Однако данная задача является статически определенной. Докажем это утверждение. Для этого рассмотрим равновесие какой-либо полуарки (например, левой, рисунок 36, а). На левую полуарку действует одна активная сила  $\overline{F_1}$ . Отбрасывая мысленно шарниры  $A$  и  $C$  вместе с правой полуаркой, заменяем их действие силами реакций. Так как реакция в шарнире  $C$  также неизвестна по модулю и направлению, то ее тоже необходимо предварительно разложить на горизонтальную и вертикальную составляющие  $\overline{X_C}$  и  $\overline{Y_C}$ . Для левой полуарки можно составить три уравнения равновесия, имея при этом только две новые неизвестные  $\overline{X_C}$  и  $\overline{Y_C}$  (последнее объясняется тем, что реакция в шарнире  $A$  должна быть представлена двумя ранее выбранными составляющими  $\overline{X_A}$  и  $\overline{Y_A}$ ). Таким образом, рассматривая равно-

весие всей трехшарнирной арки в целом и левой полуарки, имеем шесть уравнений равновесия и шесть неизвестных. Эта же задача может быть решена и другим способом, если рассмотрим равновесие любой полуарки (рисунок 36, б). В этом случае число уравнений равновесия также равно числу неизвестных, так как согласно аксиоме IV  $\bar{X}'_C = -\bar{X}_C$  и  $\bar{Y}'_C = -\bar{Y}_C$ .

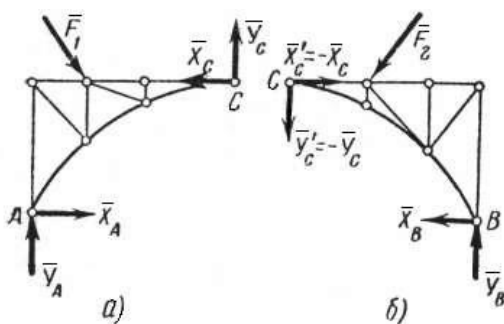


Рис. 36

Изложенный способ решения задач на равновесие сочлененной системы тел называется *методом расчленения*.

Для сочлененной системы из  $n$  тел, на каждое из которых действует произвольная плоская система сил, методом расчленения можно составить  $3n$  независимых уравнений равновесия, позволяющих найти  $3n$  неизвестных. Однако это вовсе не значит, что при составлении уравнений равновесия для сочлененной системы всегда следует рассматривать равновесие каждого тела в отдельности. Напротив, можно рассматривать и равновесие всей этой системы в целом как одного свободного абсолютно твердого тела или какой-нибудь совокупности тел, входящих в состав сочлененной системы.

Задача: На конструкцию (рис. 37), состоящую из балок  $AC$  и  $CB$ , действует сосредоточенная сила  $\bar{P}_1$ , равномерно-распределённая нагрузка интенсивностью  $\bar{q}$ , пара сил с моментом  $M$ .

Дано:  $P_1 = 2 \text{ кН}$ ;  $q = 2 \text{ кН/м}$ ;  $M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $\alpha = 60^\circ$ .

Определить реакции опор  $A$  и  $B$  и реакции промежуточного шарнира  $C$ .

Решение: Рассмотрим равновесие всей конструкции (рис. 38). Равномерно-распределённую нагрузку интенсивностью  $q$  заменяем равнодействующей  $\bar{Q}$ , численно равной  $Q = 6 \cdot q = 6 \cdot 2 = 12 [\text{м} \cdot (\text{кН/м})] = \text{кН}$  и приложенной в центре тяжести прямоугольника – на пересечении диагоналей. Вводим систему отчёта  $XAY$ .

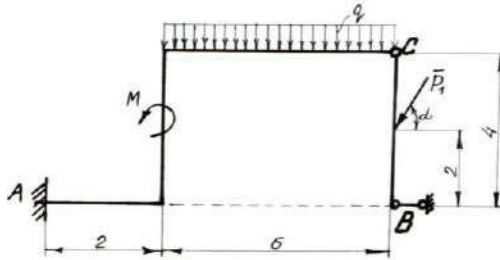


Рис. 37

Сосредоточенную силу  $\bar{P}_1$  разлагаем по правилу параллелограмма на две составляющие по осям  $X$  и  $Y$  –  $P_{1x}$  и  $P_{1y}$ , численно равные:

$$P_{1x} = P_1 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot (1/2) = 1 \text{ кН};$$

$$P_{1y} = P_1 \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot (\sqrt{3}/2) = \sqrt{3} = 1,73 \text{ кН}.$$

Применяя принцип освобождаемости от связей, отбрасываем опору  $A$  (жесткая заделка) и опору  $B$  (невесомый стержень) и заменяем их реакциями опор (рис. 37). Реакции опоры  $A$  –  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ ,  $M_a$ ; реакция опоры  $B$  –  $\bar{X}_B$  (направлена вдоль стержня). Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к конструкции.

Для полученной плоской произвольной системы сил (рис. 38) можно составить три уравнения равновесия:

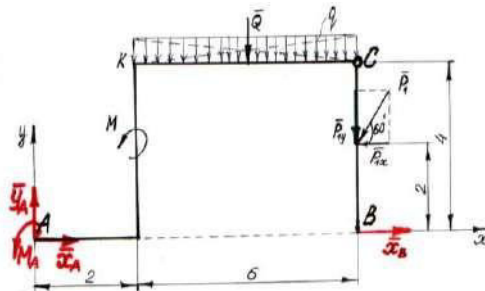
$$\sum F_{kx} = 0; X_B + X_A - P_{1x} = 0; \quad (37)$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_A - Q - P_{1y} = 0; \quad (38)$$

$$\text{из (2)} \Rightarrow Y_A = Q + P_{1y} = 12 + \sqrt{3} = 13,73 \text{ кН};$$

$$\sum M_a (\bar{F}_k) = 0; M_a + M - 5Q - 8P_{1y} + 2P_{1x} = 0; \quad (39)$$

$$\text{Из (3)} \Rightarrow M_a = -M + 5Q + 8P_{1y} - 2P_{1x} = -6 + 5 \cdot 12 + 8 \cdot \sqrt{3} = 65,84 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



$$-2 \cdot I =$$

Расчленим конструкцию на две составные части в точке подвижного соединения – шарнир  $C$  – и рассматриваем равновесие правой от шарнира  $C$  части конструкции (рис. 39). Реакцию шарнира  $C$  разлагаем на две составляющие –  $\bar{X}_c$ ,  $\bar{Y}_c$ . Эти реактивные силы отражают действие отброшенной левой части конструкции на рассматриваемую правую. Для полученной плоской произвольной системы сил (рис. 39) можно составить 3 уравнения равновесия:

$$\sum F_k x = 0; X_c + X_c - P_{lx} = 0; \quad (40)$$

$$\sum F_k y = 0; Y_c - P_{ly} = 0; \Rightarrow Y_c = P_{ly} = \sqrt{3} \text{ кН}; \quad (41)$$

$$\sum M_c (\bar{F}_k) = 0; -2P_{lx} + 4X_c = 0. \quad (42)$$

Из (6)  $\Rightarrow X_c = (2P_{lx}) / 4 = P_{lx} / 2 = 1 / 2 = 0,5 \text{ кН}$ .

Зная  $X_c$ , из уравнения (4) находим  $X_c$ :

$$X_c = P_{lx} - X_c = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ кН}.$$

Подставляем найденную  $X_c$  в уравнение (1) и определяем  $X_a$ :

$$X_a = P_{lx} - X_c = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ кН}.$$

Выполним проверку правильности вычисления реакций опор.

$$\sum M_k (\bar{F}_k) = 0; \text{ (рис. 38)}$$

$$-2Ya + Ma + 4Xa + M - 3Q - 6P_{ly} - 2P_{lx} + 4X_c = 0$$

$$\text{Рисунок 39 } -2 \cdot 13,73 + 65,84 + 4 \cdot 0,5 + 6 - 3 \cdot 12 - 6 \cdot 1,73 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 = 0$$

$$-27,46 + 65,84 + 2 + 6 - 36 - 10,38 - 2 + 2 = 0$$

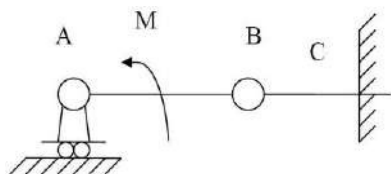
$$-27,46 + 65,84 + 2 + 6 - 36 - 10,38 - 2 + 2 = 0$$

$$-73,84 + 73,84 = 0; 0 = 0.$$

### Решить самостоятельно

#### Задача 1.

На балку АВ действует пара сил с моментом  $M = 800 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Определить момент в заделке С, если  $AB = 2 \text{ м}$  и  $BC = 0,5 \text{ м}$ . (200)



#### Задача 2.

На балку АВ действует линейно распределенная нагрузка интенсивностью  $q_{\max} = 3 \text{ кН/м}$ . Определить реакцию опоры В в кН, если расстояние  $AB = 2 \text{ м}$ . (1)

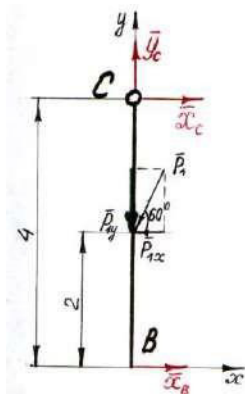
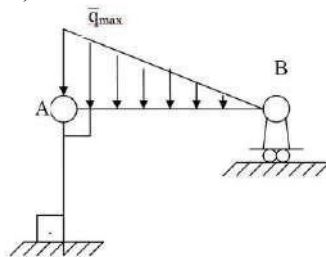
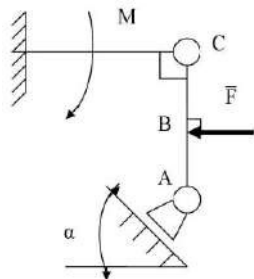
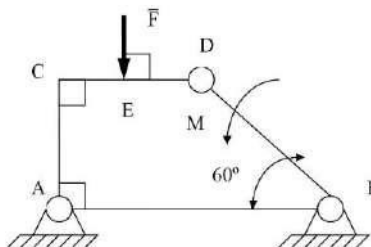


Рис. 39



### Задача 3.

Определить реакцию опоры А в кН, если сила  $F = 3 \text{ кН}$ , угол  $\alpha = 30^\circ$ , размеры  $AB=BC$ . (3)

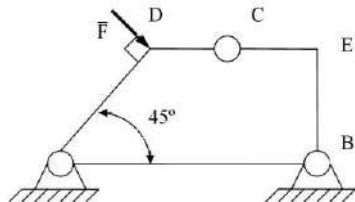
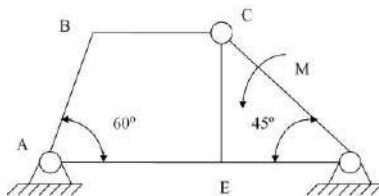


### Задача 4.

Определить в кН силу  $F$ , при которой вертикальная составляющая реакции в шарнире А равна 0 кН, если размеры  $AB = BD = 1 \text{ м}$ ,  $CE=DE$ , момент пары сил  $M=6 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . (4)

### Задача 5.

Определить в  $\text{кН} \cdot \text{м}$  момент  $M$  пары сил, при котором вертикальная составляющая реакции опоры А=10 кН, если размеры  $BC=CE=1 \text{ м}$ . (25,8)

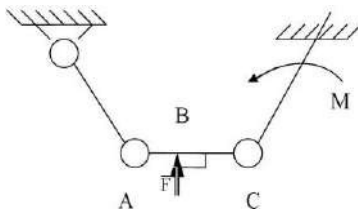


### Задача 6.

Определить вертикальную составляющую реакции в шарнире В, если сила  $F=850 \text{ Н}$ , а размеры  $DC = CE = DE$ . (401)

### Задача 7.

Найти вертикальную составляющую реакции в шарнире С, если сила  $F=600 \text{ Н}$ , размеры  $BC = 2AB$ . (200)



### Вопросы для обсуждения

1. Что такое сосредоточенная сила?
2. Дать определение распределённой нагрузки?
3. Правило разложения силы по правилу параллелограмма?

4. Вычисление проекции силы, разложенной по правилу параллелограмма?
5. Виды связей и их реакции?
6. Методы расчёта составных конструкций?
7. Уравнения равновесия плоской произвольной системы сил?
8. Внешние силы? Определение внутренних усилий и их свойства?
9. Определение пары сил? Свойства пары сил? Теорема о парах сил?
10. Определение алгебраического момента силы относительно неподвижной точки на плоскости и его свойства?

### ***Литература***

Основная: 1-5.

Интернет-ресурсы: 1.

## **11. Определение реакций опор составной конструкции. Система 2-х тел**

**Цель занятия:** сочленённая система тел, равновесие сочленённых конструкций, плоская произвольная система сил, внешние и внутренние связи.

**Организационная форма:** решение задач.

### ***Методические рекомендации***

Системы тел, свободно опирающихся друг на друга или соединённых между собой какими-нибудь связями и находящимися под действием произвольной плоской системы сил или плоской системы параллельных сил. Такую систему тел называют *сочленённой системой*.

После отбрасывания внешних связей (связи, скрепляющие сочленённую систему с не входящими в нее телами (например, с опорами), называются внешними, в отличие от внутренних связей, соединяющих между собой тела данной сочленённой системы) сочленённая система тел не остается жесткой.

На основании принципа отвердевания система сил, действующая на сочленённую систему тел, должна при равновесии удовлетворять условиям равновесия абсолютно твердого тела.

Например, трехшарнирная арка (рис. 40), состоящая из двух тел (полуарок) с тремя шарнирами *A*, *B* и *C*, из которых первые два являются неподвижными опорными шарнирами, а третий соединяет эти два тела (полуарки) между собой.

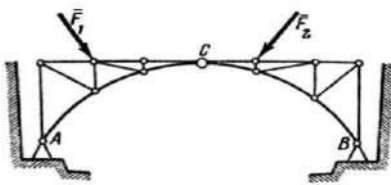


Рис. 40

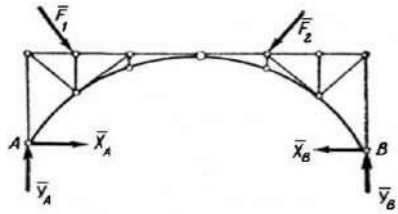


Рис. 41

В месте подвижного соединения – шарнир С – расчленяем конструкцию на две составные части. Применяя принцип освобождаемости от связей, отбросим мысленно шарнирные закрепления в точках А и В и заменим их действие силами реакций. Модули и направления этих реакций неизвестны. Поэтому необходимо неизвестную по направлению реакцию в каждой из двух шарнирно неподвижных опор А и В разложить на горизонтальную и вертикальную составляющие  $\overline{X}_A$ ,  $\overline{Y}_A$  и  $\overline{X}_B$ ,  $\overline{Y}_B$  (рис. 41).

Таким образом, для сочлененной системы тел, состоящей из двух полуарок (рис. 41), можно составить три уравнения равновесия, в то время как число неизвестных сил реакций равно четырем. Однако данная задача является статически определенной. Докажем это утверждение. Для этого рассмотрим равновесие какой-либо полуарки (например, левой, рисунок 42, а). На левую полуарку действует одна активная сила  $\overline{F}_1$ . Отбрасывая мысленно шарниры А и С вместе с правой полуаркой, заменяем их действие силами реакций. Так как реакция в шарнире С также неизвестна по модулю и направлению, то ее тоже необходимо предварительно разложить на горизонтальную и вертикальную составляющие  $\overline{X}_C$  и  $\overline{Y}_C$ . Для левой полуарки можно составить три уравнения равновесия, имея при этом только две новые неизвестные  $\overline{X}_C$  и  $\overline{Y}_C$  (последнее объясняется тем, что реакция в шарнире А должна быть представлена двумя ранее выбранными составляющими  $\overline{X}_A$  и  $\overline{Y}_A$ ).

Таким образом, рассматривая равновесие всей трехшарнирной арки в целом и левой полуарки, имеем шесть уравнений равновесия и шесть неизвестных. Эта же задача может быть решена и другим способом, если рассмотрим равновесие любой полуарки (рис. 42, б). В этом случае число уравнений равновесия также равно числу неизвестных, так как согласно аксиоме IV  $\overline{X}'_C = -\overline{X}_C$  и  $\overline{Y}'_C = -\overline{Y}_C$ .

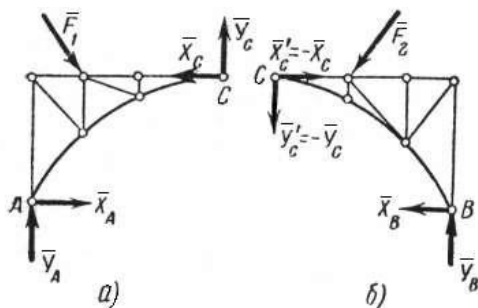


Рис. 42

Изложенный способ решения задач на равновесие сочлененной системы тел называется *методом расчленения*.

Для сочлененной системы из  $n$  тел, на каждое из которых действует произвольная плоская система сил, методом расчленения можно составить  $3n$  независимых уравнений равновесия, позволяющих найти  $3n$  неизвестных. Однако это вовсе не значит, что при составлении уравнений равновесия для сочлененной системы всегда следует рассматривать равновесие каждого тела в отдельности. Напротив, можно рассматривать и равновесие всей этой системы в целом как одного свободного абсолютно твердого тела или какой-нибудь совокупности тел, входящих в состав сочлененной системы.

Задача: На конструкцию (рис. 43), состоящую из балок  $AC$  и  $CB$ , действует сосредоточенная сила  $\bar{P}_1$ , равномерно-распределённая нагрузка интенсивностью  $\bar{q}$ , пара сил с моментом  $M$ .

Дано:  $P_1 = 2 \text{ кН}$ ;  $q = 2 \text{ кН/м}$ ;  $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $\alpha = 60^\circ$ . Определить реакции опор  $A$  и  $B$  и реакции промежуточного шарнира  $C$ .

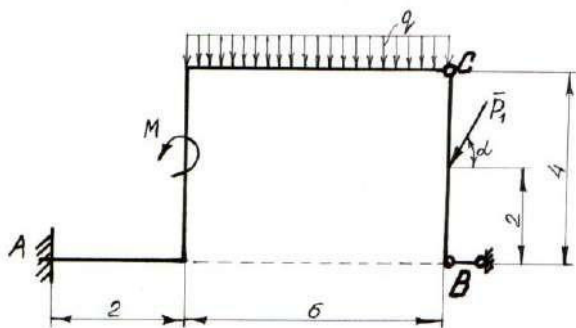


Рис. 43

Расчленим конструкцию на две составные части в точке подвижного соединения – шарнир  $C$  – и рассматриваем равновесие каждой (левой и

правой) части конструкции отдельно. Рассмотрим равновесие левой от шарнира  $C$  –  $AC$  – части конструкции (рис. 44). Реакцию шарнира  $C$  (действие отброшенной правой части на левую) разлагаем на две составляющие  $\bar{X}'_c$ ,  $\bar{Y}'_c$ . Причём  $\bar{X}'_c = -\bar{X}_c$ ,  $\bar{Y}'_c = -\bar{Y}_c$ . Для полученной плоской произвольной системы сил можно составить три уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0; X_a - X'_c = 0; \quad (43)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0; Y_a - Q - Y'_c = 0; \quad (44)$$

$$\Sigma M_a (\bar{F}_k) = 0; Ma + M - 5Q - 4X'_c - 8Y'_c = 0; \quad (45)$$

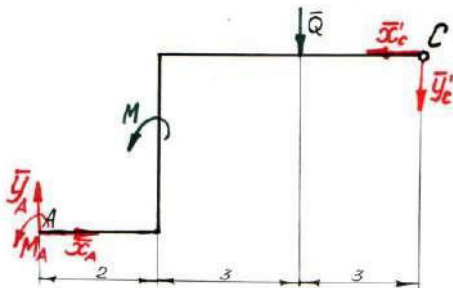


Рис. 44

Далее рассматриваем равновесие правой от шарнира  $C$  –  $CB$  – части конструкции (рис. 45) – уравнения (46), (47), (48). Подставляем найденную  $\bar{X}_c$  ( $\bar{X}'_c = -\bar{X}_c$ ) в уравнение (43) и вычисляем  $X_a = X'_c = X_c = 0,5$  кН.

Подставляем найденную  $Y'_c = Y_c$  в уравнение (44) и определяем

$$Y_c = Q + Y'_c = Q + Y_c = 12 + \sqrt{3} = 13,73 \text{ кН.}$$

Из уравнения (45) находим  $Ma = -M + 5Q - 4X'_c + 8Y'_c = -6 + 5 \cdot 12 - 4 \cdot 0,5 + 8 \cdot \sqrt{3} = -6 + 60 - 2 + 13,84 = 65,84 \text{ кН} \cdot \text{м.}$

Выполним проверку правильности определения реакции опор  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (рис. 46)

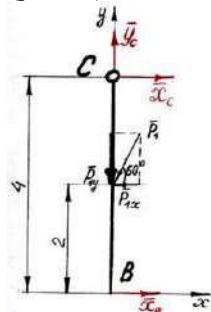


Рис. 45

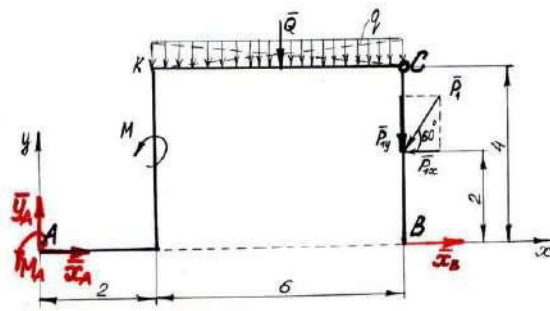


Рис. 46

$$\begin{aligned}\Sigma M_K (\bar{F}_K) &= 0; \text{ (рис. 46)} \\ -2Y_a + Ma + 4X_a + M - 3Q - 6P_{ly} - 2P_{lx} + 4X_b &= 0; \\ -2 \cdot 13,73 + 65,84 + 4 \cdot 0,5 + 6 - 3 \cdot 12 - 6 \cdot 1,73 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 &= 0; \\ -27,46 + 65,84 + 2 + 6 - 36 - 10,38 - 2 + 2 &= 0; \\ -73,84 + 73,84 &= 0; \\ 0 &\equiv 0.\end{aligned}$$

Результаты расчётов сводим в таблицу 1.

Таблица 1

| Реакция опоры А |            |              | Реакция опоры В | Реакция опоры С |              |
|-----------------|------------|--------------|-----------------|-----------------|--------------|
| $X_a$ , кН      | $Y_a$ , кН | $M_a$ , кН·м | $X_b$ , кН      | $X_c = X'_c$    | $Y_c = Y'_c$ |
| 0,5             | 13,73      | 65,84        | 0,5             | 0,5             | $\sqrt{3}$   |

### Решить самостоятельно

Конструкция состоит из двух частей, соединенных шарнирно. С – промежуточный шарнир конструкции. Прямые и изогнутые балки определяют геометрический контур конструкции. Размеры указаны на рис. 47–56 (вар. № 1–60). На конструкцию действуют: сосредоточенные силы  $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ ; равномерно-распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ ; пара сил с моментом  $M$ . Исходные данные для расчетов приведены в таблице 2. Весом балок пренебречь.

Определить реакции опор конструкции и реакции промежуточного шарнира С.

Таблица 2

| № варианта | $P_1$ , кН | $P_2$ , кН | $M$ , кН·м | $q$ , кН/м |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1          | 5          | -          | 24,0       | 0,8        |
| 2          | 6,0        | 10,0       | 22,0       | 1,0        |
| 3          | 7,0        | 9,0        | 20,0       | 1,2        |
| 4          | 8,0        | -          | 18,0       | 1,4        |
| 5          | 9,0        | -          | 16,0       | 1,6        |
| 6          | 10,0       | 8,0        | 25,0       | 1,8        |
| 7          | 11,0       | 7,0        | 20,0       | 2,0        |
| 8          | 12,0       | 6,0        | 15,0       | 2,2        |
| 9          | 13,0       | -          | 10,0       | 2,4        |
| 10         | 14,0       | -          | 12,0       | 2,6        |
| 11         | 15,0       | 5,0        | 14,0       | 2,8        |
| 12         | 12,0       | 4,0        | 16,0       | 3,0        |
| 13         | 9,0        | 6,0        | 18,0       | 3,2        |
| 14         | 6,0        | -          | 20,0       | 3,4        |
| 15         | 5,0        | 8,0        | 22,0       | 3,6        |

|    |      |      |      |     |
|----|------|------|------|-----|
| 16 | 7,0  | 10,0 | 14,0 | 3,8 |
| 17 | 9,0  | 12,0 | 26,0 | 4,0 |
| 18 | 11,0 | 10,0 | 18,0 | 3,5 |
| 19 | 13,0 | 9,0  | 30,0 | 3,0 |
| 20 | 15,0 | 8,0  | 25,0 | 2,5 |
| 21 | 10,0 | 7,00 | 20,0 | 2,0 |
| 22 | 5,0  | 6,0  | 15,0 | 1,5 |
| 23 | 8,0  | 5,0  | 10,0 | 1,4 |
| 24 | 11,0 | 4,0  | 5,0  | 1,3 |
| 25 | 14,0 | 6,0  | 7,0  | 1,2 |
| 26 | 12,0 | 8,0  | 9,0  | 1,1 |
| 27 | 10,0 | 7,0  | 11,0 | 1,0 |
| 28 | 8,0  | 9,0  | 13,0 | 1,2 |
| 29 | 6,0  | 10,0 | 15,0 | 1,4 |
| 30 | 10,0 | 12,0 | 17,0 | 1,6 |
| 31 | 15,0 | 14,0 | 10,0 | 3   |
| 32 | 13,0 | 12,0 | 6,0  | 2   |
| 33 | 11,0 | 10,0 | 5,0  | 1,0 |
| 34 | 9,0  | 8,0  | 14,0 | 3,0 |
| 35 | 7,0  | 6,0  | 12,0 | 2,0 |
| 36 | 8,0  | 5,0  | 4,0  | 1,0 |
| 37 | 7,0  | 4,0  | 10,0 | 2,0 |
| 38 | 6,0  | 6,0  | 7,0  | 1,0 |
| 39 | 5,0  | 8,0  | 8,0  | 3,0 |
| 40 | 4,0  | 10,0 | 6,0  | 2,0 |
| 41 | 12,0 | 11,0 | 12,0 | 1,0 |
| 42 | 10,0 | 6,0  | 10,0 | 2,0 |
| 43 | 9,0  | 5,0  | 6,0  | 1,0 |
| 44 | 7,0  | 10,0 | 13,0 | 2,0 |
| 45 | 6,0  | 8,0  | 5,0  | 1,0 |
| 46 | 3,0  | 10,0 | 10,0 | 2,0 |
| 47 | 1,0  | 8,0  | 8,0  | 1,0 |
| 48 | 3,0  | 6,0  | 6,0  | 3,0 |
| 49 | 5,0  | 4,0  | 7,0  | 2,0 |
| 50 | 7,0  | 2,0  | 5,0  | 1,0 |
| 51 | 10,0 | 9,0  | 4,0  | 2,0 |
| 52 | 8,0  | 7,0  | 7,0  | 1,0 |
| 53 | 6,0  | 5,0  | 8,0  | 2,0 |
| 54 | 4,0  | 3,0  | 3,0  | 1,0 |
| 55 | 2,0  | 1,0  | 2,0  | 2,0 |

|    |     |     |      |     |
|----|-----|-----|------|-----|
| 56 | 7,0 | 1,0 | 7,0  | 2,0 |
| 57 | 6,0 | 2,0 | 5,0  | 1,0 |
| 58 | 5,0 | 3,0 | 10,0 | 2,0 |
| 59 | 4,0 | 4,0 | 5,0  | 1,0 |
| 60 | 3,0 | 5,0 | 10,0 | 2,0 |

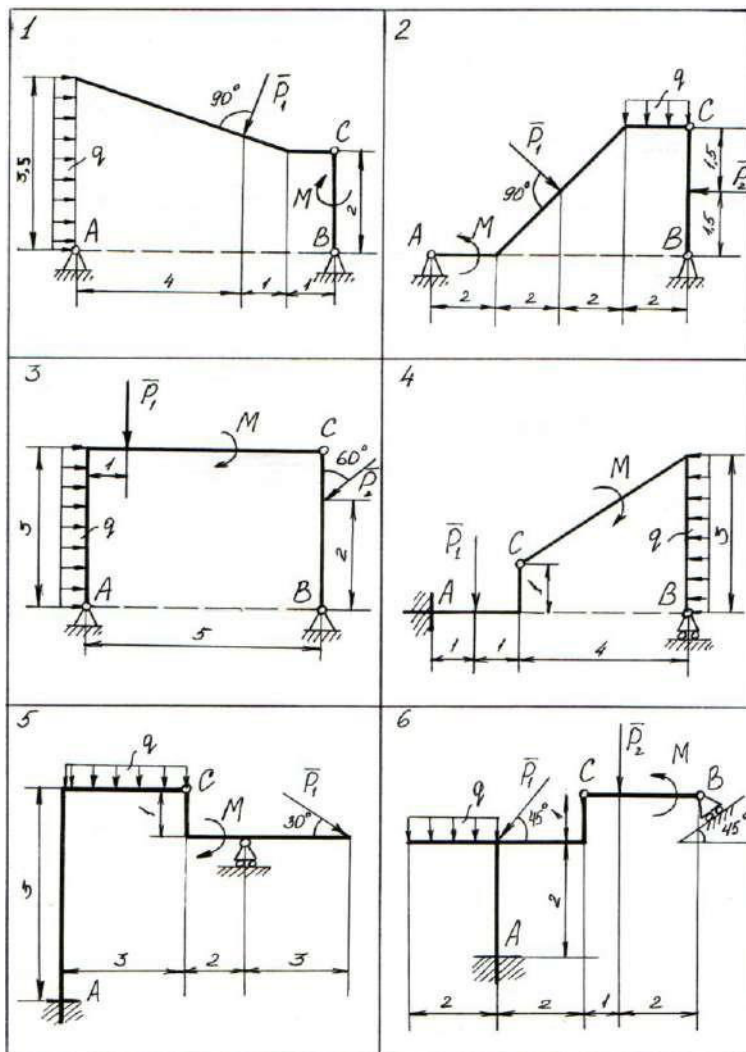
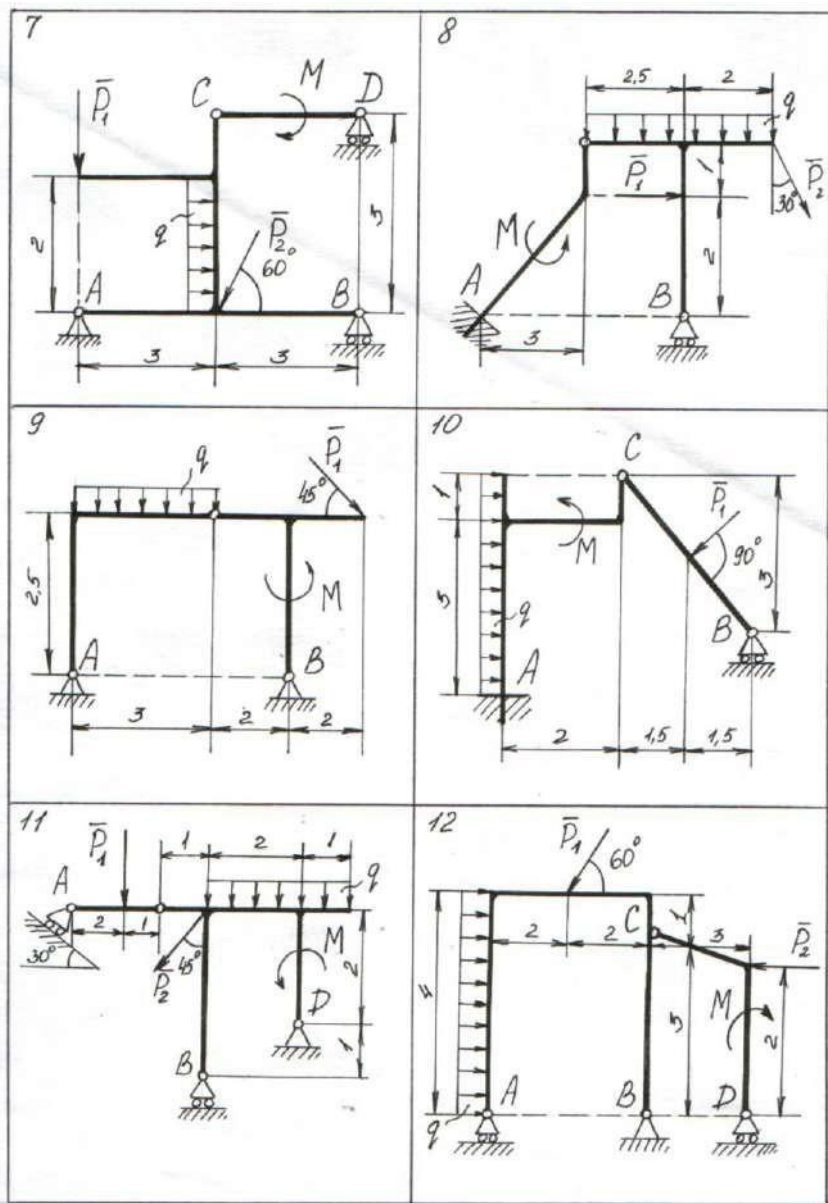
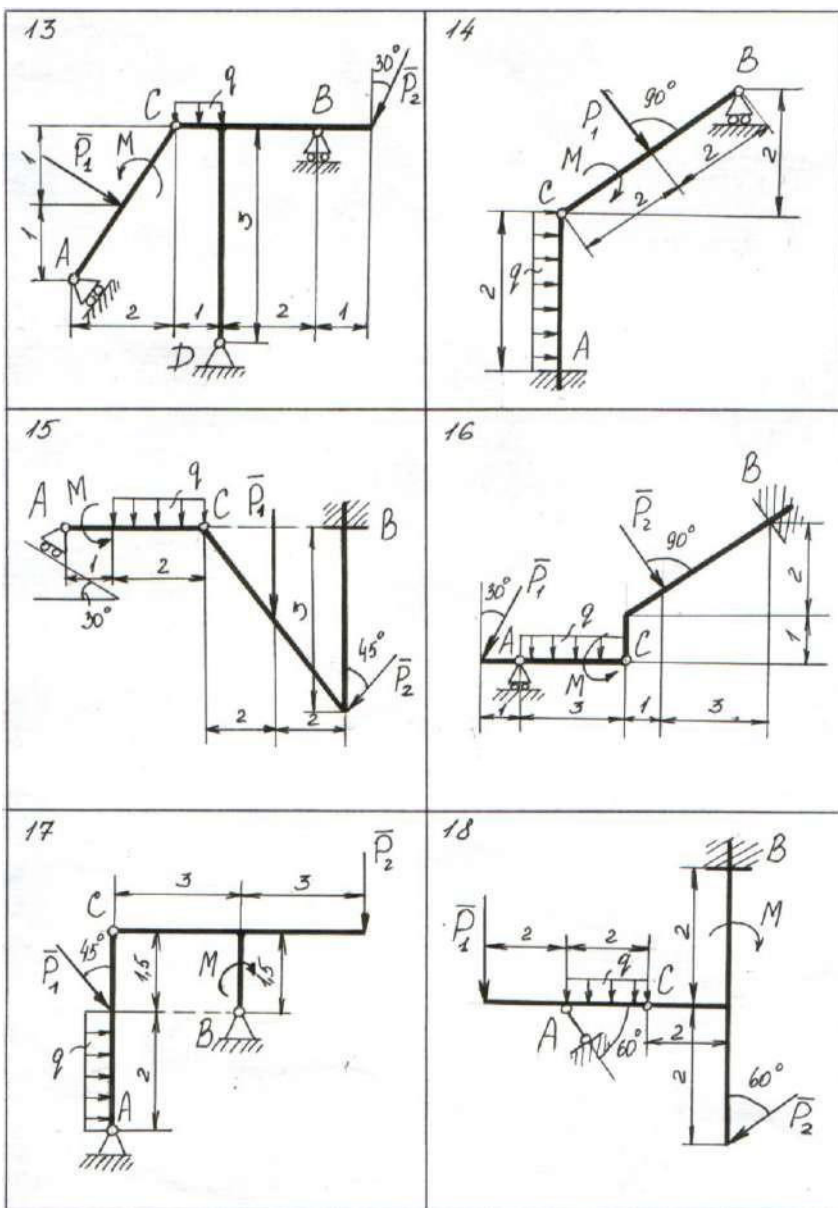
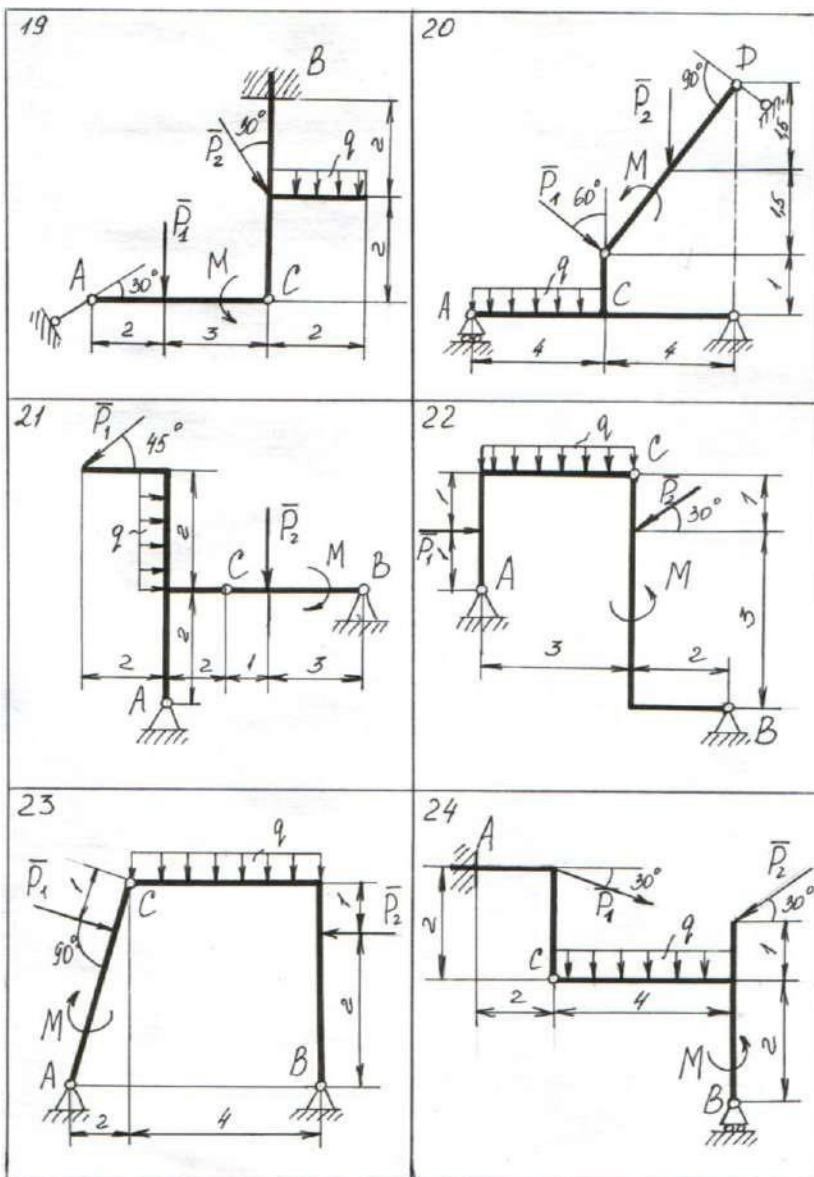


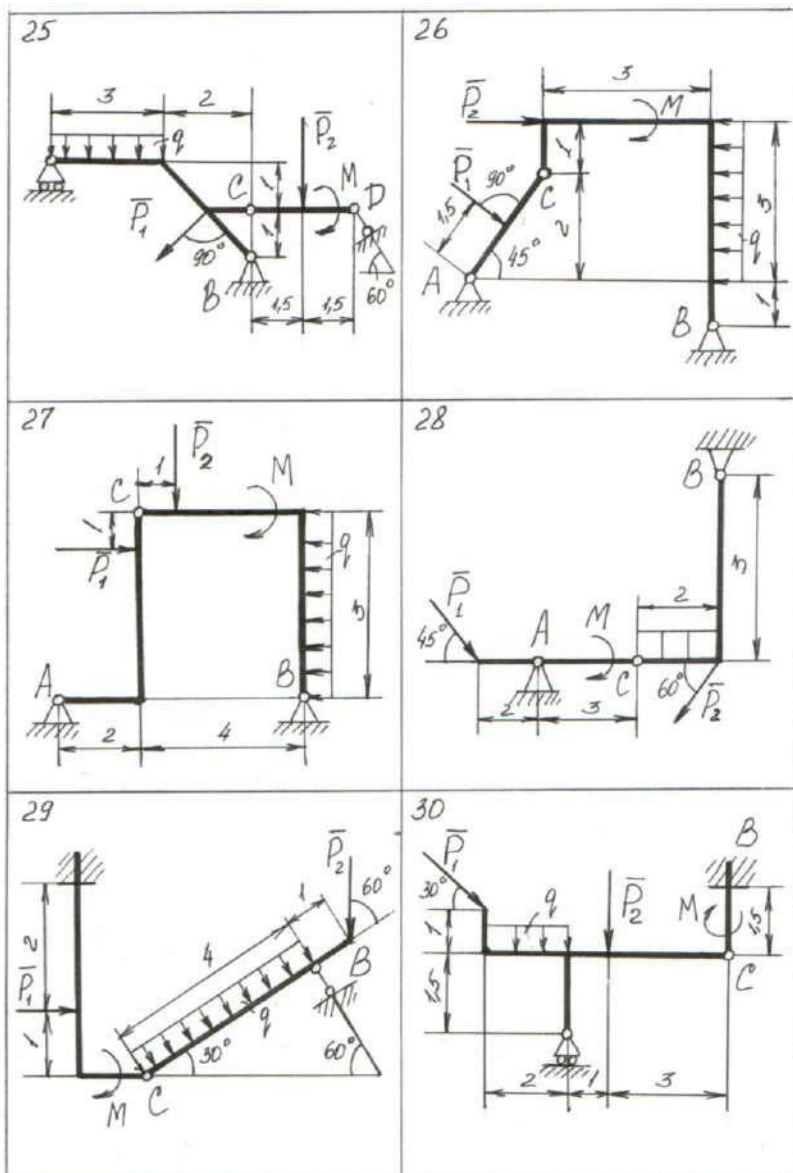
Рис. 47

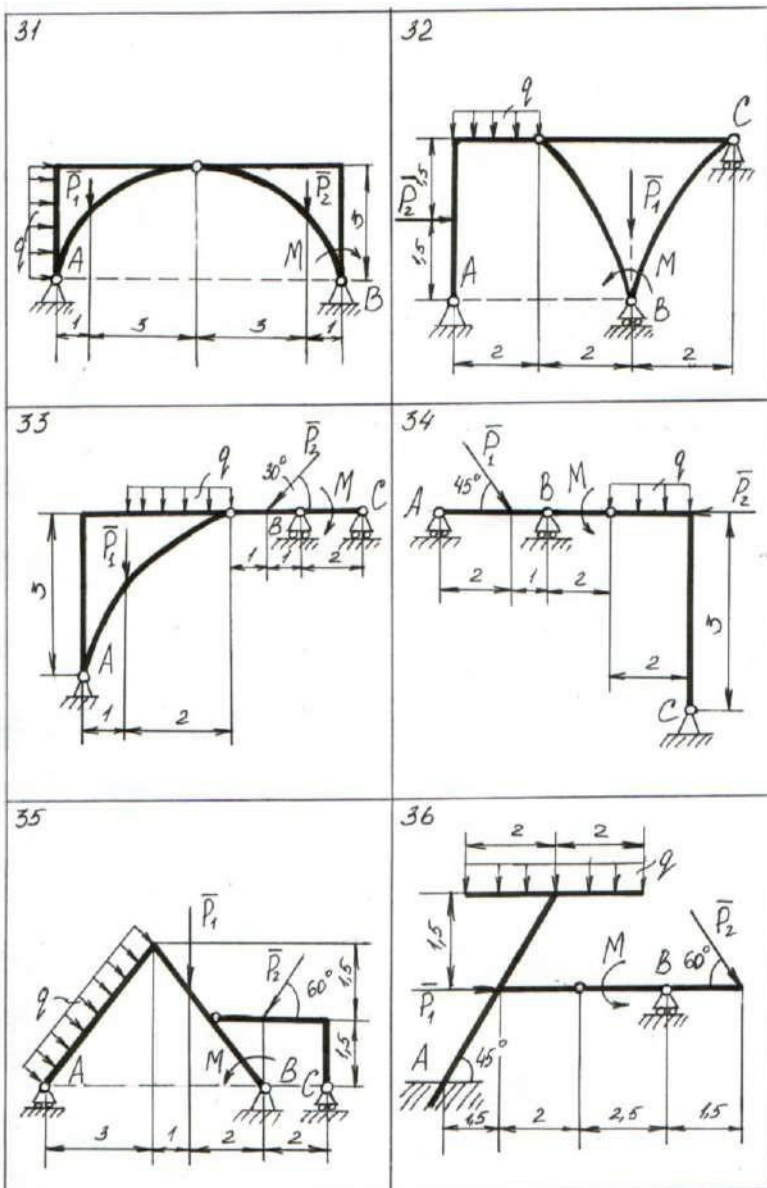


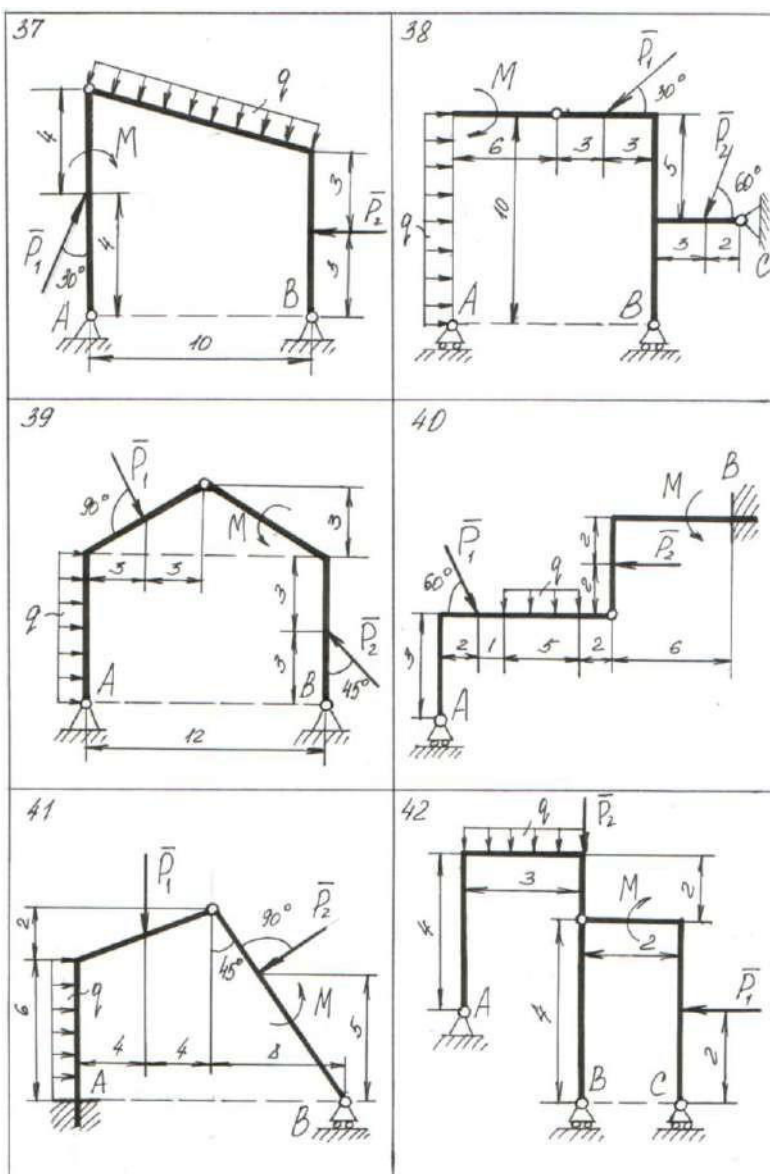


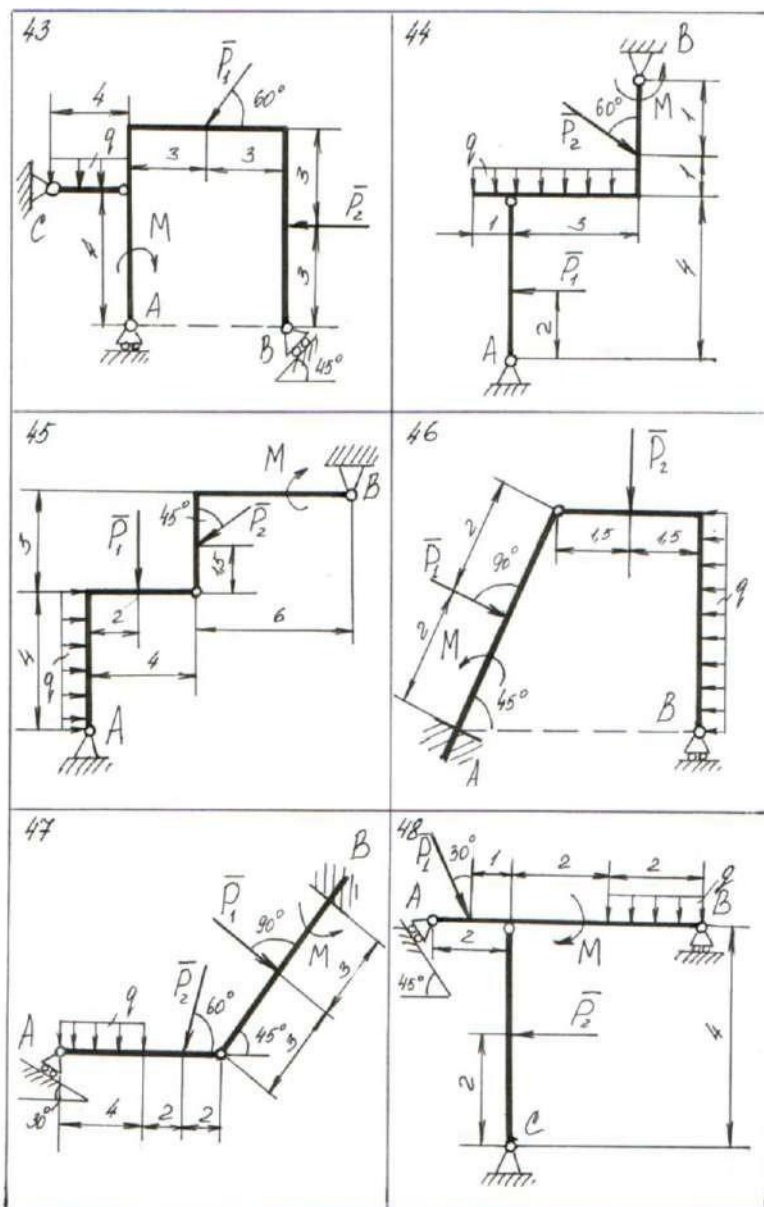














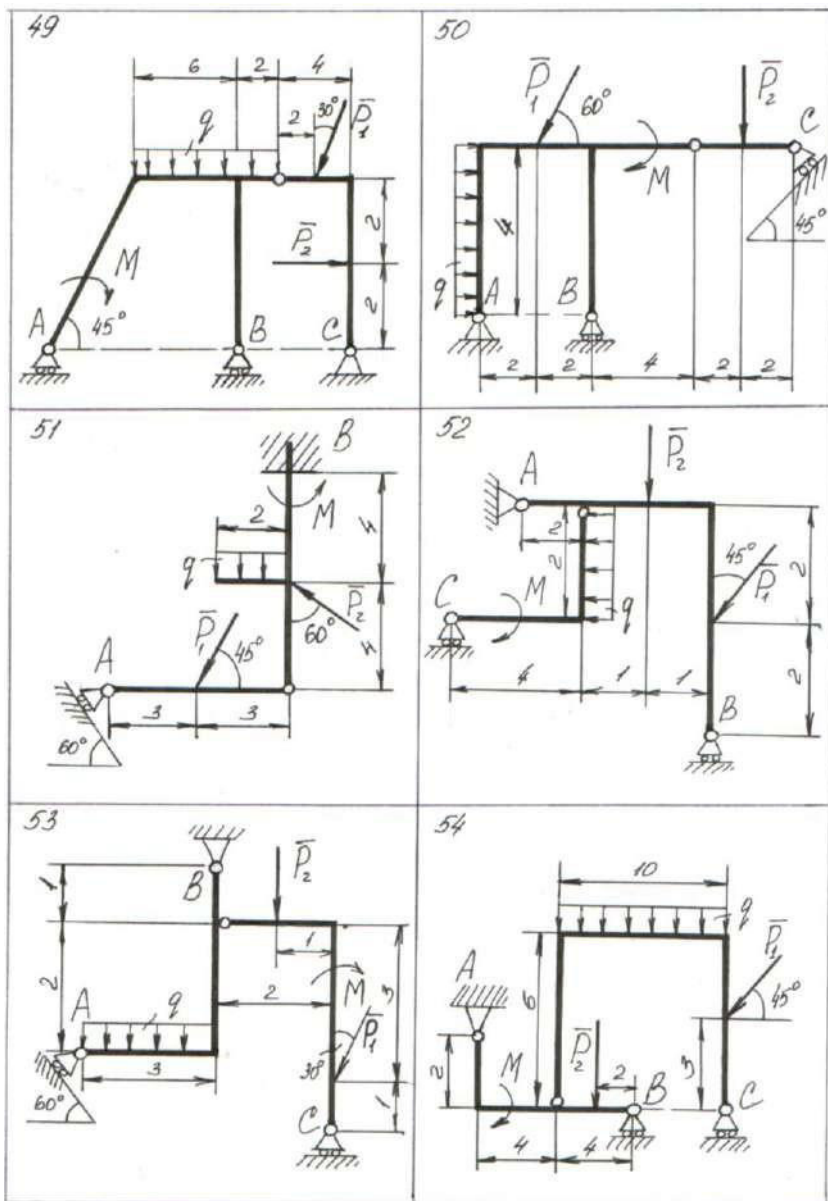


Рис. 55



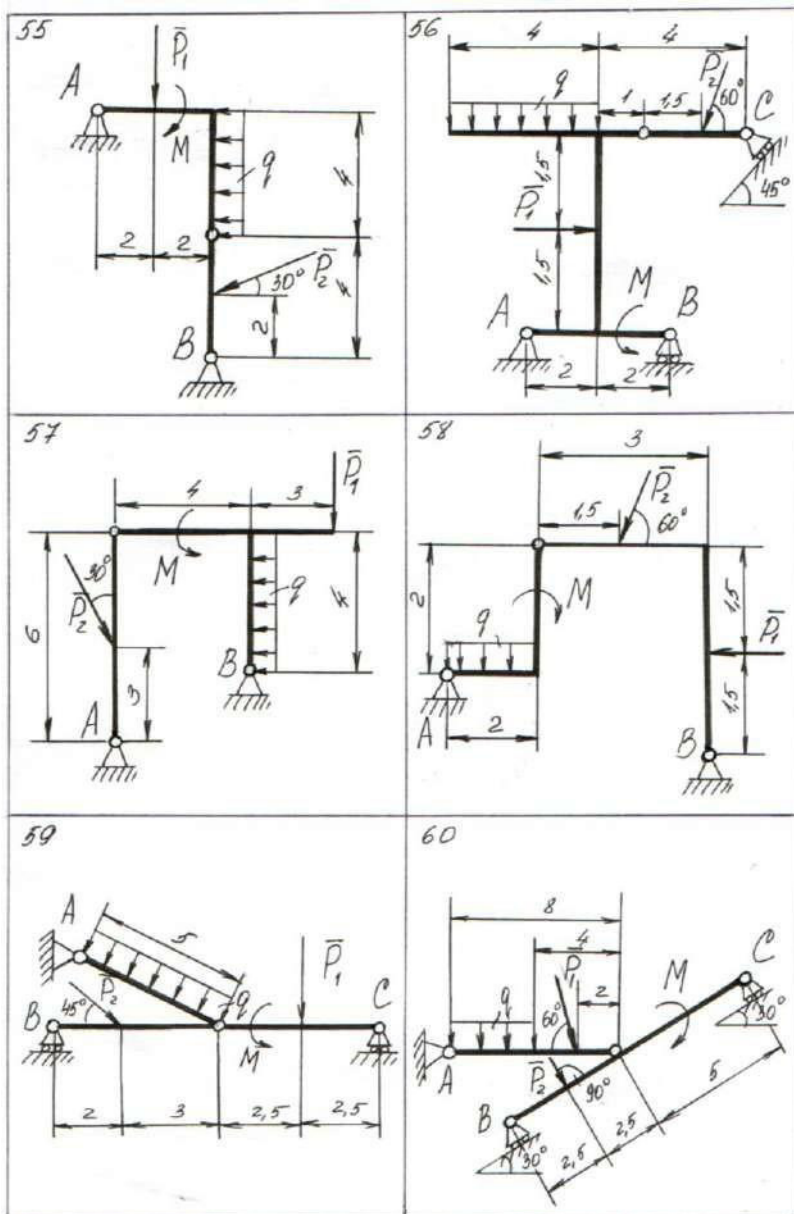


Рис. 56

### **Вопросы для обсуждения**

1. Что такое сосредоточенная сила?
2. Дать определение распределённой нагрузки?
3. Правило разложения силы по правилу параллелограмма?
4. Вычисление проекции силы, разложенной по правилу параллелограмма?
5. Виды связей и их реакции?
6. Методы расчёта составных конструкций?
7. Уравнения равновесия плоской произвольной системы сил?
8. Внешние силы? Определение внутренних усилий и их свойства?
9. Определение пары сил? Свойства пары сил? Теорема о парах сил?
10. Определение алгебраического момента силы относительно неподвижной точки на плоскости и его свойства?

### **Литература**

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

## **12. Момент силы относительно оси и его свойства. Уравнения равновесия пространственной системы сил**

**Цель занятия:** Определение реакций опор твёрдого тела. Пространственная произвольная система сил.

**Организационная форма:** решение задач.

### **Методические рекомендации**

*Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех этих сил на каждую из трех любым образом выбранных координатных осей равнялась нулю и чтобы алгебраическая сумма их моментов относительно каждой из этих осей также равнялась нулю.*

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= 0; & \sum_{i=1}^n Y_i &= 0; & \sum_{i=1}^n Z_i &= 0; \\ \sum_{i=1}^n m_i \overline{(F)}_x &= 0; & \sum_{i=1}^n m_i \overline{(F)}_y &= 0; & \sum_{i=1}^n m_i \overline{(F)}_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Условия (49) называются условиями равновесия произвольной пространственной системы сил в аналитической форме.

Задача.

Однородная прямоугольная плита весом  $\overline{P}$  со сторонами  $AB = 3L$ ,  $BC = 2L$  закреплена в точке  $B$  цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем  $CC'$  (рис. 58)

На плиту действуют: пара сил (лежащая в плоскости плиты) с моментом  $M$ ; сила  $\overline{F_1}$  – в плоскости, параллельной  $YZ$  (точка приложения  $-H$ ); сила  $\overline{F_2}$  – в плоскости параллельной  $XZ$  (точка приложения  $E$ ). Точки приложения сил ( $E$ ,  $H$ ) находятся в серединах сторон плиты.

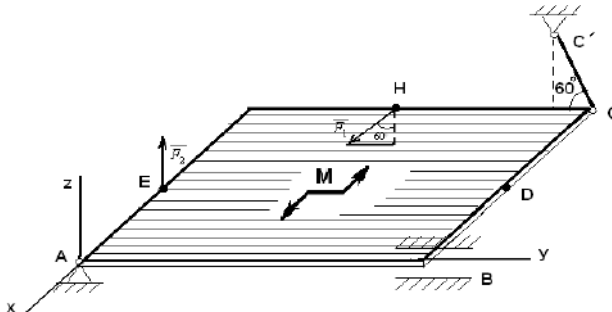


Рис. 58

Дано:  $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $F_1 = 2 \text{ кН}$ ;  $F_2 = 4 \text{ кН}$ ;  $L = 1 \text{ м}$ ;  $P = 8 \text{ кН}$ ;  $AB = 3L$  м;  $BC = 2L \text{ м}$ .

Определить реакции связей в точках  $A$ ,  $B$  и стержня  $CC'$ .

Решение:

1. Рассмотрим равновесие плиты. На неё действуют: пара сил (лежащая в плоскости плиты) с моментом  $M$ ; сила  $\overline{F_1}$  – в плоскости, параллельной  $YZ$  (точка приложения –  $H$ ) и её составляющие:

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ кН};$$

$$F_{1z} = F_1 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ кН}.$$

Сила  $\overline{F_2}$  – в плоскости, параллельной  $XZ$  (точка приложения  $E$ );

$\overline{F_2} \parallel AZ$ ; вес плиты  $\overline{P}$  – на пересечении диагоналей (в центре тяжести прямоугольной плиты), а также реакции связей: реакцию сферического шарнира  $A$  разлагаем на три составляющие  $\overline{X_A}$ ,  $\overline{Y_A}$ ,  $\overline{Z_A}$ ; реакцию цилиндрического шарнира (подшипника)  $B$  – на две составляющие  $\overline{X_B}$ ,  $\overline{Z_B}$  (в плос-

кости, перпендикулярной оси подшипника), реакцию  $S$  стержня направляем вдоль стержня  $CC'$ , предполагая, что он растянут и разлагаем  $S$  на

две составляющие :  $S_z = S \cdot \sin 60^\circ$  ;  $S_y = S \cdot \cos 60^\circ$  (так как стержень  $CC'$  в плоскости , параллельной  $yz$  ) – рис. 59.

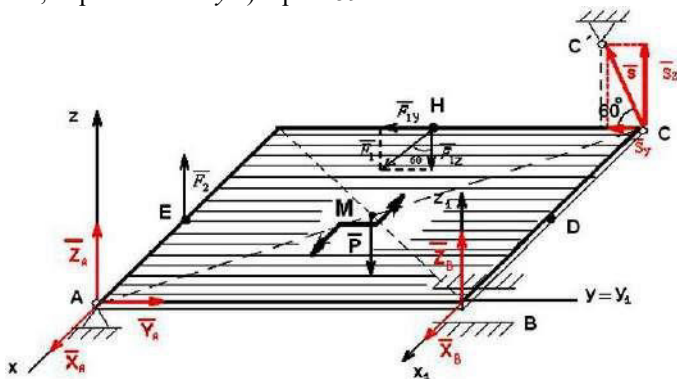


Рис. 59

2. Вводим систему отсчета  $BX_I Y_I Z_I$  (рис.59). Для полученной пространственной произвольной системы сил для определения шести неизвестных реакций опор –  $\overline{X}_A$ ,  $\overline{Y}_A$ ,  $\overline{Z}_A$ ,  $\overline{X}_B$ ,  $\overline{Y}_B$ ,  $\overline{S}$  – можно составить шесть уравнений равновесия:

- 1)  $\sum \overline{F}_{BXI} = 0$ ;  $X_A + X_B = 0$ ;
- 2)  $\sum \overline{F}_{BYI} = 0$ ;  $Y_A - F_{IY} - S \cdot \cos 60^\circ = 0$ ;
- 3)  $\sum \overline{F}_{BZI} = 0$ ;  $Z_A + Z_B - P + F_2 - F_{IZ} + S \cdot \sin 60^\circ = 0$ ;
- 4)  $\sum M_{BXI}(\overline{F}_K) = 0$ ;  $-3L \cdot Z_A - 3L \cdot F_2 + 1,5L \cdot F_{IZ} + 1,5L \cdot P = 0$ ;
- 5)  $\sum M_{BYI}(\overline{F}_K) = 0$ ;  $-L \cdot P + L \cdot F_2 - 2L \cdot F_{IZ} + 2L \cdot S \cdot \sin 60^\circ = 0$ ;
- 6)  $\sum M_{BZI}(\overline{F}_K) = 0$ ;  $3L \cdot X_A + M + 2L \cdot F_{IY} + 2L \cdot S \cdot \cos 60^\circ = 0$ .

Из уравнения 4) вычисляем  $\overline{Z}_A$ :

$$\overline{Z}_A = \frac{-3L \cdot F_2 + 1,5 \cdot L \cdot F_{IZ} + 1,5L \cdot P}{3L} = \frac{-3 \cdot 1 \cdot 4 + 1,5 \cdot 1 \cdot 1 + 1,5 \cdot 1 \cdot 8}{3 \cdot 1} = 0,5 \text{ кН.}$$

Из уравнения 5) определяем численное значение реакции  $\overline{S}$  стержня  $CC'$ :

$$\overline{S} = \frac{L \cdot P - L \cdot F_2 + 2L \cdot F_{IZ}}{2L \cdot \sin 60^\circ} = \frac{1 \cdot 8 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3}/2)} = 3,47 \text{ кН.}$$

Из уравнения 6), подставляя найденное значение  $\overline{S}$ , определяем величину реакции  $\overline{X}_A$ :

$$\overline{X}_A = \frac{-M - 2L \cdot F_{IY} - 2L \cdot S \cdot \cos 60^\circ}{3L} = \frac{-6 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot 1 \cdot 3,47 \cdot (1/2)}{3 \cdot 1} = -4,31 \text{ кН.}$$

Зная  $\overline{S}$  и  $\overline{Z_A}$ , из уравнения 3) определяем величину реакции  $\overline{Z_B}$  :

$$\overline{Z} = -Z_A + P - F_2 + F_{1Z} - S \cdot \sin 60^\circ = -0,5 + 8 - 4 + 1 - 3,47 \cdot (\sqrt{3}/2) = 1,49 \text{ кН.}$$

*B*

Из уравнения 2), зная  $\overline{S}$ , вычисляем значение реакции  $\overline{Y_A}$  :

$$\overline{Y_A} = F_{1Y} + S \cdot \cos 60^\circ = \sqrt{3} + 3,47 \cdot \frac{1}{2} = 3,47 \text{ кН.}$$

Зная  $\overline{X_A}$ , из уравнения 1)  $\overline{X_B} = -\overline{X_A} = -(-4,31) = 4,31 \text{ кН.}$

Проверка:

$$\sum F_{AX} = 0; X_A + X_B = 0;$$

$$4,31 - 4,31 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

$$\sum F_{AY} = 0; Y_A - F_{1Y} - S \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$3,47 - \sqrt{3} - 3,47 \cdot \frac{1}{2} = 0;$$

$$3,47 - 3,47 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

$$\sum F_{AZ} = 0; Z_A + Z_B - P + F_2 - F_{1Z} + S \cdot \sin 60^\circ = 0;$$

$$0,5 + 1,49 - 8 + 4 - 1 + 3,47 \cdot (\sqrt{3}/2) = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

Результаты расчётов сводим в таблицу 1.

Таблица 1

| $\overline{X_a}$ , кН | $\overline{Y_a}$ , кН | $\overline{Z_A}$ , кН | $\overline{Y_B}$ , кН | $\overline{Z_B}$ , кН | $\overline{S}$ , кН |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|
| 4,31                  | 3,47                  | 0,5                   | 4,53                  | 1,49                  | 3,47                |

### **Вопросы для обсуждения**

1. Виды связей и их реакции (пространственные опоры)?
2. Аналитическая форма условий равновесия пространственной системы: а) сходящихся сил; б) параллельных сил; в) произвольной системы сил.
3. Алгебраический момент силы относительно оси. Основные свойства момента?
4. Момент пары сил?

### **Литература**

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

### 13. Определение реакций опор твёрдого тела. Пространственная произвольная система сил

**Цель занятия:** Определение реакций опор твёрдого тела. Пространственная произвольная система сил.

**Организационная форма:** решение задач.

#### Методические рекомендации

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех этих сил на каждую из трех любым образом выбранных координатных осей равнялась нулю и чтобы алгебраическая сумма их моментов относительно каждой из этих осей также равнялась нулю.

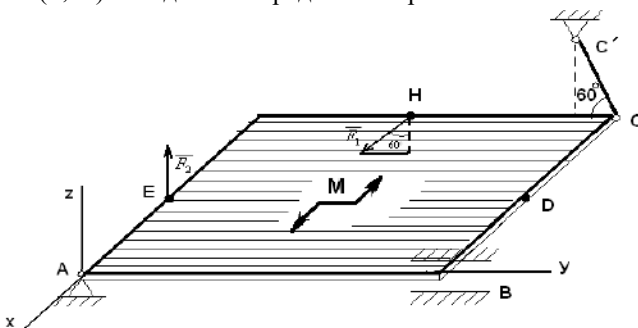
$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= 0; & \sum_{i=1}^n Y_i &= 0; & \sum_{i=1}^n Z_i &= 0; \\ \sum_{i=1}^n m(F)_{x_i} &= 0; & \sum_{i=1}^n m(F)_{y_i} &= 0; & \sum_{i=1}^n m(F)_{z_i} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Условия (50) называются условиями равновесия произвольной пространственной системы сил в аналитической форме.

Задача.

Однородная прямоугольная плита весом  $\bar{P}$  со сторонами  $AB = 3L$ ,  $BC = 2L$  закреплена в точке  $B$  цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем  $CC'$  (рис. 60)

На плиту действуют: пара сил (лежащая в плоскости плиты) с моментом  $M$ ; сила  $\bar{F}_1$  – в плоскости, параллельной  $YZ$  (точка приложения  $H$ ); сила  $\bar{F}_2$  – в плоскости параллельной  $XZ$  (точка приложения  $E$ ). Точки приложения сил ( $E$ ,  $H$ ) находятся в серединах сторон плиты.







Дано:  $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $F_1 = 2 \text{ кН}$ ;  $F_2 = 4 \text{ кН}$ ;  $L = 1 \text{ м}$ ;  $P = 8 \text{ кН}$ ;  $AB = 3L$  м;  $BC = 2L$  м.

Определить реакции связей в точках  $A$ ,  $B$  и стержня  $CC'$ .

Решение:

1. Рассмотрим равновесие плиты. На неё действуют: пара сил (лежащая в плоскости плиты) с моментом  $M$ ; сила  $\overline{F_1}$  – в плоскости, параллельной  $YZ$  (точка приложения –  $H$ ) и её составляющие:

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ кН};$$

$$F_{1z} = F_1 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ кН}.$$

Сила  $\overline{F_2}$  – в плоскости, параллельной  $XZ$  (точка приложения  $E$ );  $\overline{F_2} \parallel AZ$ ; вес плиты  $\overline{P}$  – на пересечении диагоналей (в центре тяжести прямоугольной плиты), а также реакции связей: реакцию сферического шарнира  $A$  разлагаем на три составляющие –  $\overline{X_A}$ ,  $\overline{Y_A}$ ,  $\overline{Z_A}$ ; реакцию цилиндрического шарнира (подшипника)  $B$  – на две составляющие  $\overline{X_B}$ ,  $\overline{Z_B}$  (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника), реакцию  $\overline{S}$  стержня направляем вдоль стержня  $CC'$ , предполагая, что он растянут и разлагаем  $S$  на две составляющие:  $S_z = S \cdot \sin 60^\circ$ ;  $S_y = S \cdot \cos 60^\circ$  (так как стержень  $CC'$  в плоскости, параллельной  $yz$ ).

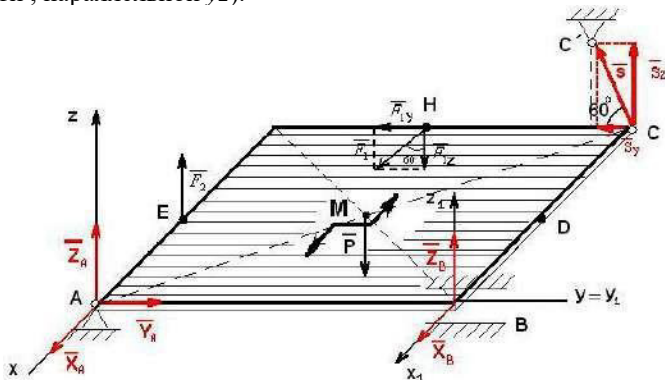


Рис. 61

2. Вводим систему отсчета  $BX_1Y_1Z_1$  (рис.61). Для полученной пространственной произвольной системы сил (рис.49) для определения шести неизвестных реакций опор –  $\overline{X_A}$ ,  $\overline{Y_A}$ ,  $\overline{Z_A}$ ,  $\overline{X_B}$ ,  $\overline{Z_B}$ ,  $\overline{S}$  – можно составить

шесть уравнений равновесия:

- 1)  $\sum \bar{F}_{BxI} = 0; X_A + X_B = 0;$
- 2)  $\sum \bar{F}_{ByI} = 0; Y_A - F_{IY} - S \cdot \cos 60^\circ = 0;$
- 3)  $\sum \bar{F}_{BzI} = 0; Z_A + Z_B - P + F_2 - F_{IZ} + S \cdot \sin 60^\circ = 0;$
- 4)  $\sum M_{BxI}(\bar{F}_K) = 0; -3L \cdot Z_A - 3L \cdot F_2 + 1,5L \cdot F_{IZ} + 1,5L \cdot P = 0;$
- 5)  $\sum M_{ByI}(\bar{F}_K) = 0; -L \cdot P + L \cdot F_2 - 2L \cdot F_{IZ} + 2L \cdot S \cdot \sin 60^\circ = 0;$
- 6)  $\sum M_{BzI}(\bar{F}_K) = 0; 3L \cdot X_A + M + 2L \cdot F_{IY} + 2L \cdot S \cdot \cos 60^\circ = 0.$

Из уравнения 4) вычисляем  $\bar{Z}_A$ :

$$\bar{Z}_A = \frac{-3L \cdot F_2 + 1,5 \cdot L \cdot F_{IZ} + 1,5L \cdot P}{3L} = \frac{-3 \cdot 1 \cdot 4 + 1,5 \cdot 1 \cdot 1 + 1,5 \cdot 1 \cdot 8}{3 \cdot 1} = 0,5 \text{ кН.}$$

Из уравнения 5) определяем численное значение реакции  $\bar{S}$  стержня  $CC'$ :

$$\bar{S} = \frac{L \cdot P - L \cdot F_2 + 2L \cdot F_{IZ}}{2L \cdot \sin 60^\circ} = \frac{1 \cdot 8 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3}/2)} = 3,47 \text{ кН.}$$

Из уравнения 6), подставляя найденное значение  $\bar{S}$ , определяем величину реакции  $\bar{X}_A$ :

$$\bar{X}_A = \frac{-M - 2L \cdot F_{IY} - 2L \cdot S \cdot \cos 60^\circ}{3L} = \frac{-6 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot 1 \cdot 3,47 \cdot (1/2)}{3 \cdot 1} = -4,31 \text{ кН.}$$

Зная  $\bar{S}$  и  $\bar{Z}_A$ , из уравнения 3) определяем величину реакции  $\bar{Z}_B$ :

$$\bar{Z}_B = -Z_A + P - F_2 + F_{IZ} - S \cdot \sin 60^\circ = -0,5 + 8 - 4 + 1 - 3,47 \cdot (\sqrt{3}/2) = 1,49 \text{ кН.}$$

$B$

Из уравнения 2), зная  $\bar{S}$ , вычисляем значение реакции  $\bar{Y}_A$ :

$$\bar{Y}_A = F_{IY} + S \cdot \cos 60^\circ = \sqrt{3} + 3,47 \cdot \frac{1}{2} = 3,47 \text{ кН.}$$

Зная  $\bar{X}_A$ , из уравнения 1)  $\bar{X}_B = -\bar{X}_A = -(-4,31) = 4,31 \text{ кН.}$

Проверка:

$$\sum F_{Ax} = 0; X_A + X_B = 0;$$

$$4,31 - 4,31 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

$$\sum F_{Ay} = 0; Y_A - F_{IY} - S \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$3,47 - \sqrt{3} - 3,47 \cdot \frac{1}{2} = 0;$$

$$3,47 - 3,47 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

$$\sum F_{Az} = 0; Z_A + Z_B - P + F_2 - F_{IZ} + S \cdot \sin 60^\circ = 0;$$

$$0,5 + 1,49 - 8 + 4 - 1 + 3,47 \cdot (\sqrt{3}) = 0.$$

$/2)=0;$

Результаты расчётов сводим в таблицу 1.

Таблица 1

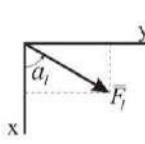
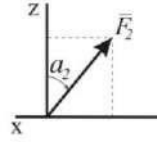
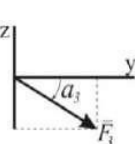
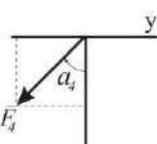
| $\overline{X}_a$ , кН | $\overline{Y}_a$ , кН | $\overline{Z}_A$ , кН | $\overline{Y}_B$ , кН | $\overline{Z}_B$ , кН | $\overline{S}$ , кН |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|
| -4,31                 | 3,47                  | 0,5                   | 4,53                  | 1,49                  | 3,47                |

**Решить самостоятельно**

Задача 1 (к вариантам 1–10) – рис. 62–63.

Однородная прямоугольная плита весом  $P = 5$  кН со сторонами  $AB = 3\ell$ ,  $BC = 2\ell$  закреплена в точке  $A$  сферическим шарниром, а в точке  $B$  – цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем  $CC'$  (вар. 1 – 10). На плиту действуют: пара сил с моментом  $M = 6$  кН·м, лежащая в плоскости плиты, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. 2. При этом силы  $\overline{F}_1$  и  $\overline{F}_4$  лежат в плоскостях, параллельных плоскости  $XU$ , сила  $\overline{F}_2$  – в плоскости, параллельной  $XZ$ , сила  $\overline{F}_3$  – в плоскости, параллельной  $YZ$ . Точки приложения сил ( $D$ ,  $E$ ,  $H$ ) находятся в серединах сторон плиты.

Таблица 2

| Силы          |  |              |  |              |  |              |  |              |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Номер условия | F1 = 4 кН                                                                         |              | F2 = 6 кН                                                                         |              | F3 = 8 кН                                                                         |              | F4 = 10 кН                                                                        |              |
|               | Точка приложения                                                                  | $a_1$ , град | Точка приложения                                                                  | $a_2$ , град | Точка приложения                                                                  | $a_3$ , град | Точка приложения                                                                  | $a_4$ , град |
| 0             | D                                                                                 | 60           | -                                                                                 | -            | E                                                                                 | 0            | -                                                                                 | -            |
| 1             | H                                                                                 | 90           | D                                                                                 | 30           | -                                                                                 | -            | -                                                                                 | -            |
| 2             | -                                                                                 | -            | E                                                                                 | 60           | -                                                                                 | -            | D                                                                                 | 90           |
| 3             | -                                                                                 | -            | -                                                                                 | -            | E                                                                                 | 30           | H                                                                                 | 0            |
| 4             | E                                                                                 | 0            | -                                                                                 | -            | H                                                                                 | 60           | -                                                                                 | -            |
| 5             | -                                                                                 | -            | D                                                                                 | 60           | H                                                                                 | 0            | -                                                                                 | -            |
| 6             | -                                                                                 | -            | H                                                                                 | 30           | -                                                                                 | -            | D                                                                                 | 90           |
| 7             | E                                                                                 | 30           | H                                                                                 | 90           | -                                                                                 | -            | -                                                                                 | -            |
| 8             | -                                                                                 | -            | -                                                                                 | -            | D                                                                                 | 0            | E                                                                                 | 60           |
| 9             | -                                                                                 | -            | E                                                                                 | 90           | D                                                                                 | 30           | -                                                                                 | -            |

Определить реакции связей в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ . При подсчётах принять  $\ell = 2$  м.

Указания: При решении задания следует учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси подшипника.

При вычислении момента силы  $\vec{F}$  удобно её разложить на две составляющие  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$ , параллельные координатным осям (или на три): тогда по теореме Вариньона  $M_x(\vec{F}) = M_x(\vec{F}') + M_x(\vec{F}'')$  и т. д.

Задача 2 (к вариантам 11–20) – рис. 63–65.

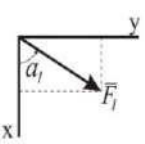
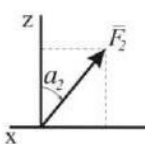
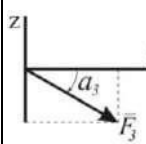
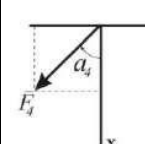
Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестки соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке  $A$ , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке  $B$  и невесомым стержнем  $1$  (вар. 11–18) или же двумя подшипниками в точках  $A$  и  $B$  и двумя невесомыми стержнями  $1$  и  $2$  (вар. 19–20); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках 63–65, вес большей плиты  $P_1 = 5$  кН, вес меньшей плиты  $P_2 = 3$  кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость  $xy$  – горизонтальная). На плиты действуют пара сил с моментом  $M = 4$  кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. 3; при этом силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_4$  лежат в плоскостях, параллельных плоскости  $XU$ , сила  $\vec{F}_2$  – в плоскости, параллельной  $XZ$ , сила  $\vec{F}_3$  – в плоскости, параллельной  $YZ$ . Точки приложения сил ( $D$ ,  $E$ ,  $H$ ,  $K$ ) находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках  $A$  и  $B$  и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять  $a = 2$  м.

Указания: При решении задания следует учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси подшипника. Реакция невесомого стержня всегда направлена вдоль стержня. При вычислении момента силы  $\vec{F}$  удобно её разложить на две составляющие  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$ , параллельные координатным осям (или на три): тогда по теореме Вариньона  $M_x(\vec{F}) = M_x(\vec{F}') + M_x(\vec{F}'')$  и т. д.

Таблица 3

| Силы          |  |              |  |              |  |              |  |              |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Номер условия | $F_1 = 6 \text{ кН}$                                                              |              | $F_2 = 8 \text{ кН}$                                                              |              | $F_3 = 10 \text{ кН}$                                                             |              | $F_4 = 12 \text{ кН}$                                                             |              |
|               | Точка приложения                                                                  | $a_1$ , град | Точка приложения                                                                  | $a_2$ , град | Точка приложения                                                                  | $a_3$ , град | Точка приложения                                                                  | $a_4$ , град |
| 0             | Е                                                                                 | 60           | Н                                                                                 | 30           | -                                                                                 | -            | -                                                                                 | -            |
| 1             | -                                                                                 | -            | Д                                                                                 | 60           | Е                                                                                 | 30           | -                                                                                 | -            |
| 2             | -                                                                                 | -            | -                                                                                 | -            | К                                                                                 | 60           | Е                                                                                 | 30           |
| 3             | К                                                                                 | 30           | -                                                                                 | -            | Д                                                                                 | 0            | -                                                                                 | -            |
| 4             | -                                                                                 | -            | Е                                                                                 | 30           | -                                                                                 | -            | Д                                                                                 | 60           |
| 5             | Н                                                                                 | 0            | К                                                                                 | 60           | -                                                                                 | -            | -                                                                                 | -            |
| 6             | -                                                                                 | -            | Н                                                                                 | 90           | Д                                                                                 | 30           | -                                                                                 | -            |
| 7             | -                                                                                 | -            | -                                                                                 | -            | Н                                                                                 | 60           | К                                                                                 | 90           |
| 8             | Д                                                                                 | 30           | -                                                                                 | -            | К                                                                                 | 0            | -                                                                                 | -            |
| 9             | -                                                                                 | -            | Д                                                                                 | 90           | -                                                                                 | -            | Н                                                                                 | 30           |

Задача 3 (к вариантам 21–35) – рис. 65–67.

Шесть невесомых стержней соединены своими концами шарнирно друг с другом в двух узлах и прикреплены другими концами (тоже шарнирно) к неподвижным опорам  $A, B, C, D, E, K, F, L$  (вар. 21–35). Стержни и узлы (узлы расположены в вершинах  $A, B, C, D, E, K, F, L$  прямоугольного параллелепипеда) на рисунках 65–67 не показаны и должны быть изображены решающим задачу по данным таблицы 4. В узле, который в каждом столбце таблицы указан первым, приложена сила  $P = 200 \text{ Н}$ ; во втором узле приложена сила  $Q = 100 \text{ Н}$ . Сила  $P$  образует с положительными направлениями координатных осей  $x, y, z$  углы, равные соответственно  $\alpha_1 = 45^\circ, \beta_1 = 60^\circ, \gamma_1 = 60^\circ$ , а сила  $Q$  – углы  $\alpha_2 = 60^\circ, \beta_2 = 45^\circ, \gamma_2 = 60^\circ$ ; направления осей  $x, y, z$  соответствует правой декартовой системе отсчёта.

Грани параллелепипеда, параллельные плоскости  $xy$ , – квадраты. Диагонали других боковых граней образуют с плоскостью  $xy$  угол  $\varphi = 60^\circ$ , а диаго-

наль параллелепипеда образует с этой плоскостью угол  $\theta = 51^\circ$ . Определить усилия в стержнях, указанных в табл. 4.

Таблица 4

| № варианта | 0                             | 1                             | 2                             | 3                             | 4                             |
|------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| Узлы       | <i>A, B</i>                   | <i>L, E</i>                   | <i>D, F</i>                   | <i>B, E</i>                   | <i>D, B</i>                   |
| Стержни    | <i>DL, DE, DF, CF, CK, BK</i> | <i>BK, CK, CF, DF, AK, DE</i> | <i>AD, AE, ED, EK, KB, KC</i> | <i>DA, DL, DC, FC, CK, AK</i> | <i>LE, LF, LD, CF, CK, AK</i> |
| № варианта | 5                             | 6                             | 7                             | 8                             | 9                             |
| Узлы       | <i>B, L</i>                   | <i>C, L</i>                   | <i>D, E</i>                   | <i>B, L</i>                   | <i>B, E</i>                   |
| Стержни    | <i>AE, AC, AD, DF, CF, KF</i> | <i>BA, BF, BK, AE, DE, DA</i> | <i>LF, FC, LD, KB, KC, AB</i> | <i>EA, ED, KF, KC, CF, FK</i> | <i>FC, CK, FK, LD, LA, DC</i> |

Указания: Система отсчёта вводится решающим самостоятельно. Изображать чертеж можно без соблюдения масштаба так, чтобы лучше были видны все шесть стержней. Стержни следует пронумеровать в том порядке, в каком они указаны в таблице; реакции стержней обозначать буквой с индексом, соответствующим номеру стержня. Реакция невесомого стержня всегда направлена вдоль стержня. При вычислении момента силы  $\vec{F}$  удобно её разложить на две составляющие  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$ , параллельные координатным осям (или на три): тогда по теореме Вариньона  $M_x(\vec{F}) = M_x(\vec{F}')$  +  $M_x(\vec{F}'')$  и т. д.

Задача 4 (к вариантам 36 – 40) – рис. 67 – 68.

Однородное тело весом  $G$  под действием наложенных на него связей и приложенных к нему систем сил находится в равновесии. Пренебрегая трением в местах сочленений, определить реакции опор  $A$  и  $B$ , а также усилия в стержнях. Вес стержней не учитывать. Необходимые для расчёта данные приводятся в таблице 5.

Таблица 5

| № варианта | $G$ , Н | $P_1$ , Н | $P_2$ , Н | $M_1$ , Н·м | $M_2$ , Н·м | $a$ , м | $b$ , м | $c$ , м | $\alpha$ , град | $\beta$ , град |
|------------|---------|-----------|-----------|-------------|-------------|---------|---------|---------|-----------------|----------------|
| 0          | 300     | 400       | -         | 200         | -           | 0,4     | 0,6     | 0,2     | 60              | 30             |
| 1          | 200     | 400       | 200       | 400         | 200         | 0,2     | 0,4     | 0,6     | 30              | 60             |
| 2          | 400     | -         | 100       | -           | 300         | 0,8     | 0,2     | 0,4     | -               | 30             |
| 3          | 600     | 200       | -         | 200         | -           | 0,6     | 0,8     | 0,6     | 60              | 45             |
| 4          | 300     | 100       | 400       | 200         | 400         | 0,4     | 0,6     | 0,2     | 45              | 30             |
| 5          | 200     | 200       | -         | 300         | -           | 0,6     | 0,4     | 0,2     | 30              | 60             |



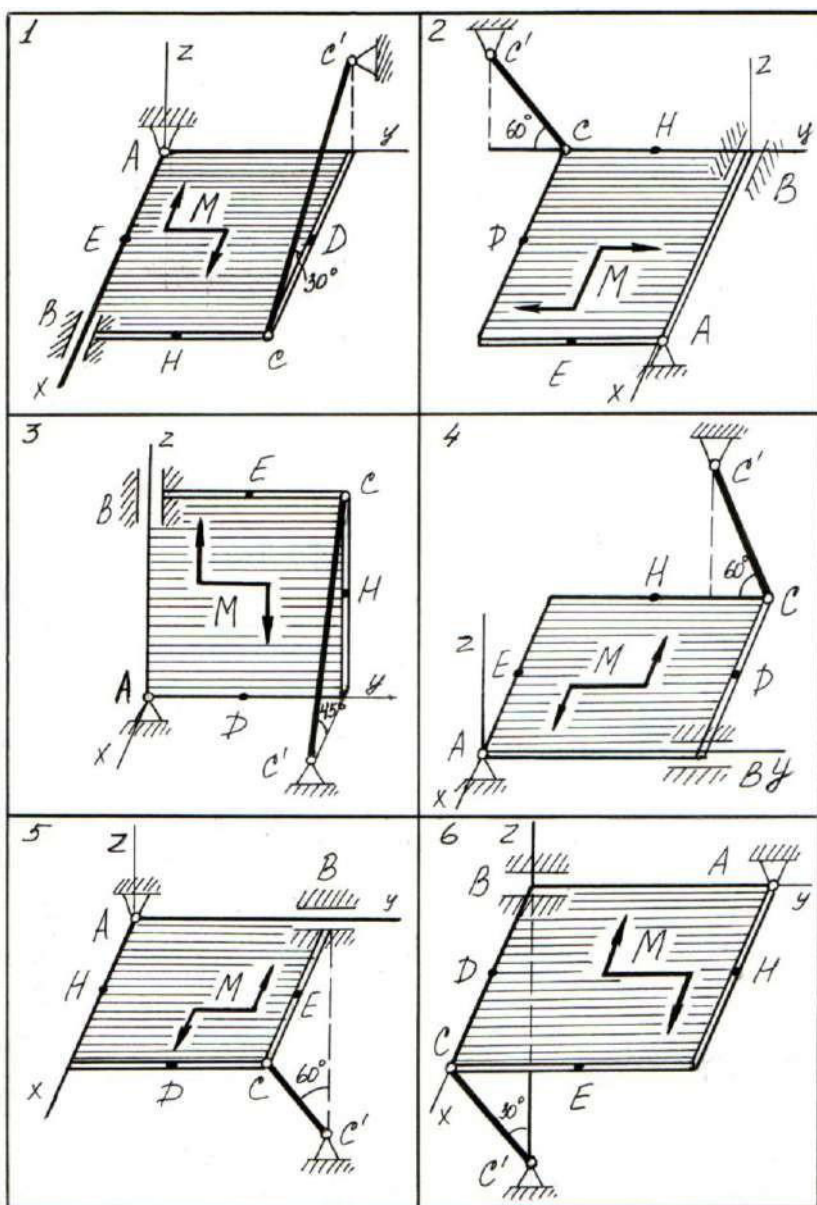
|   |     |     |     |     |     |     |     |     |    |    |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|
| 6 | 400 | -   | 400 | -   | 200 | 0,2 | 0,8 | 0,4 | -  | 45 |
| 7 | 600 | 200 | 400 | 200 | 600 | 0,8 | 0,6 | 0,2 | 30 | 60 |
| 8 | 400 | 300 | -   | 400 | -   | 0,4 | 0,6 | 0,4 | 60 | 45 |
| 9 | 200 | -   | 200 | -   | 400 | 0,8 | 0,2 | 0,4 | -  | 60 |

Задача 5 (к вариантам 41–60) – рис. 69–71.

Схемы конструкций представлены на рис. 60–71 (вар. 41–60). Найти реакции опор конструкции. Необходимые для расчёта данные приведены в таблице 6.

Таблица 6

| № варианта | $Q$ ,<br>Н | $T$ ,<br>Н | $G$ ,<br>Н | $a$<br>см | $b$<br>см | $c$<br>см | $R$<br>см | $r$<br>см |
|------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 41         | 2          | -          | 20         | 20        | 30        | 10        | 15        | 5         |
| 42         | 3          | -          | 2          | 30        | 20        | 40        | 15        | 10        |
| 43         | 1          | 4          | 2          | 40        | 30        | 20        | 20        | 10        |
| 44         | -          | 3          | 1          | 30        | 10        | 5         | 18        | 6         |
| 45         | 4          | 6          | 3          | 20        | 40        | 15        | 20        | 10        |
| 46         | 1          | 4          | 2          | 30        | 40        | 20        | 20        | 10        |
| 47         | -          | 2          | 1          | 20        | 30        | 15        | 15        | 10        |
| 48         | 4          | -          | 1          | 25        | 20        | 8         | 15        | 10        |
| 49         | 10         | -          | 5          | 40        | 30        | 20        | 25        | 15        |
| 50         | -          | 2          | 1          | 30        | 90        | 20        | 30        | 10        |
| 51         | 3          | -          | 2          | 60        | 20        | 40        | 20        | 5         |
| 52         | 4          | -          | 2          | 50        | 30        | -         | -         | -         |
| 53         | 2          | -          | 1          | 15        | 10        | 20        | 20        | 5         |
| 54         | 6          | -          | 2          | 60        | 40        | 60        | -         | -         |
| 55         | 4          | -          | -          | 60        | 40        | 20        | -         | -         |
| 56         | 2          | -          | -          | 40        | 60        | 30        | -         | -         |
| 57         | -          | -          | 4          | 40        | 30        | 50        | -         | -         |
| 58         | 10         | -          | -          | 50        | 30        | 50        | -         | -         |
| 59         | -          | 4          | 3          | 15        | 20        | 15        | 15        | 10        |
| 60         | 5          | -          | -          | 40        | 40        | 10        | -         | -         |



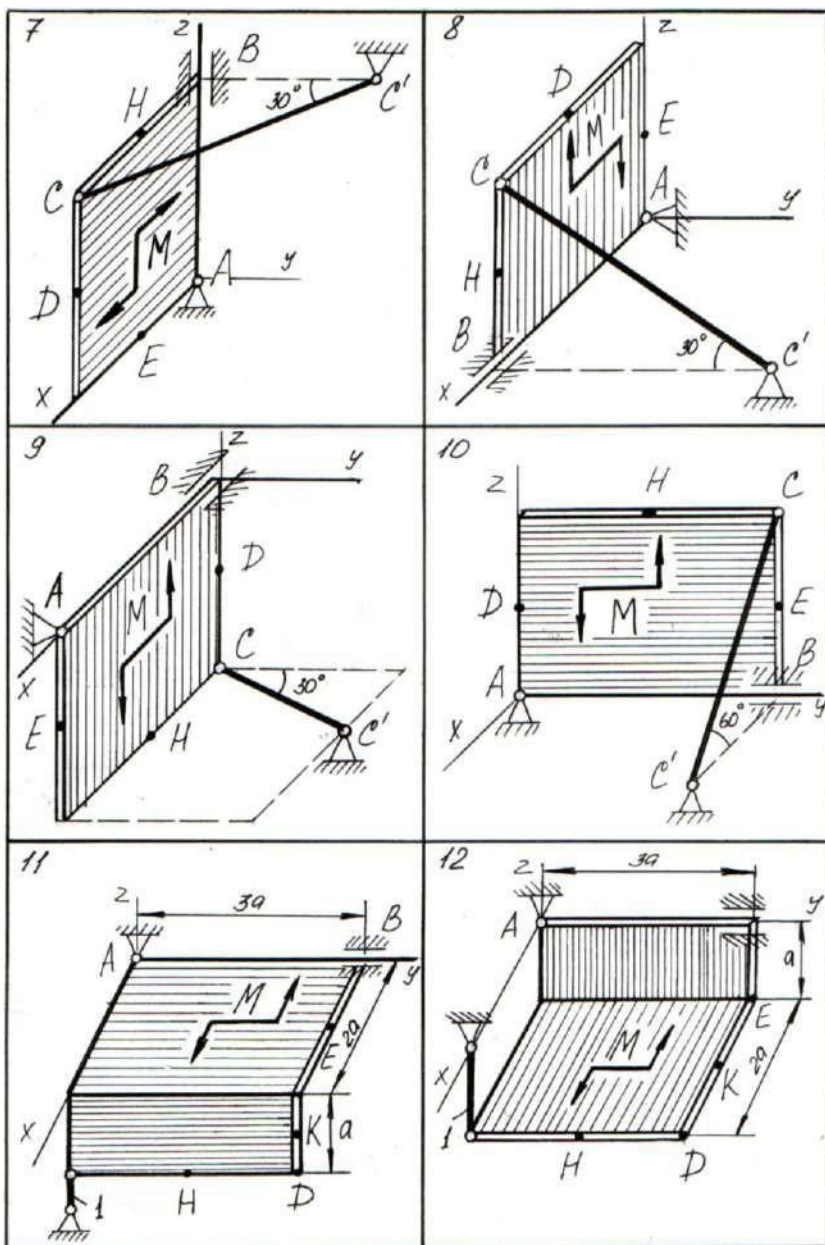


Рис. 63

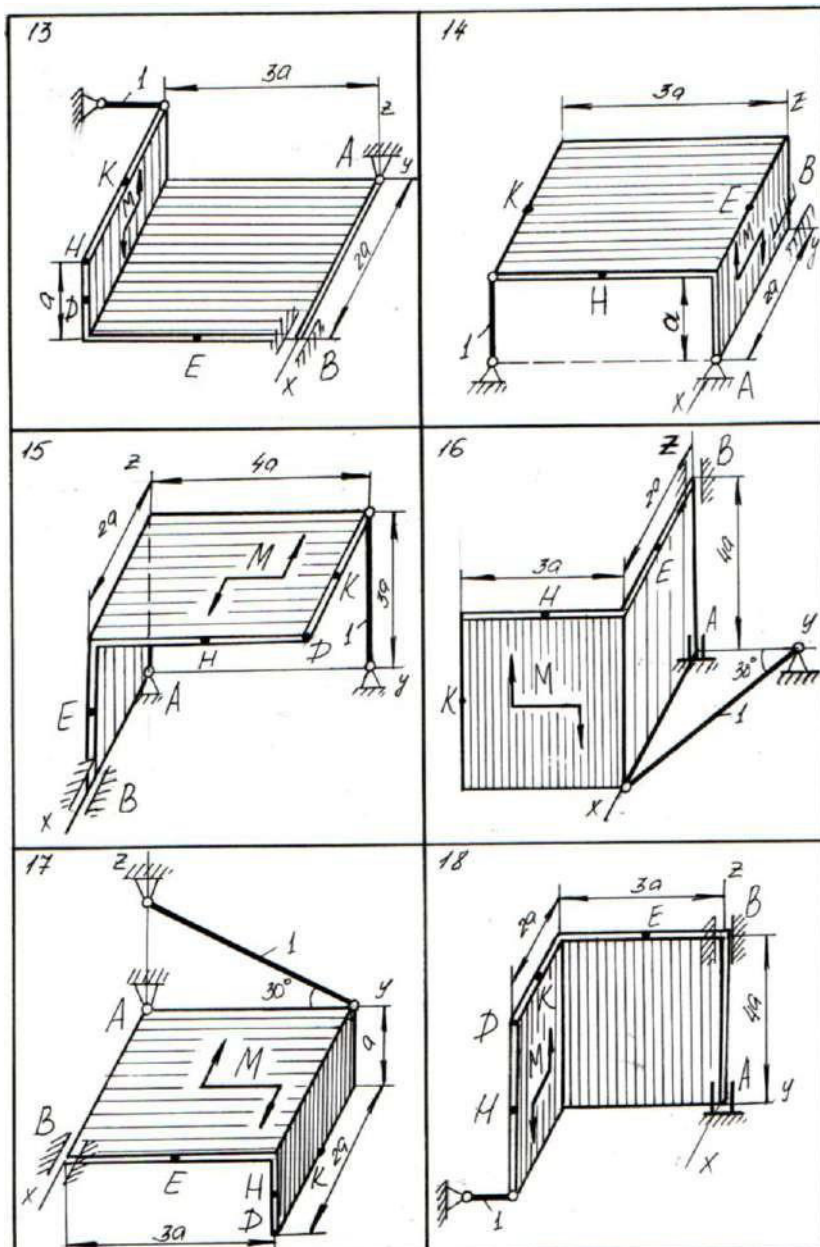


Рис. 64

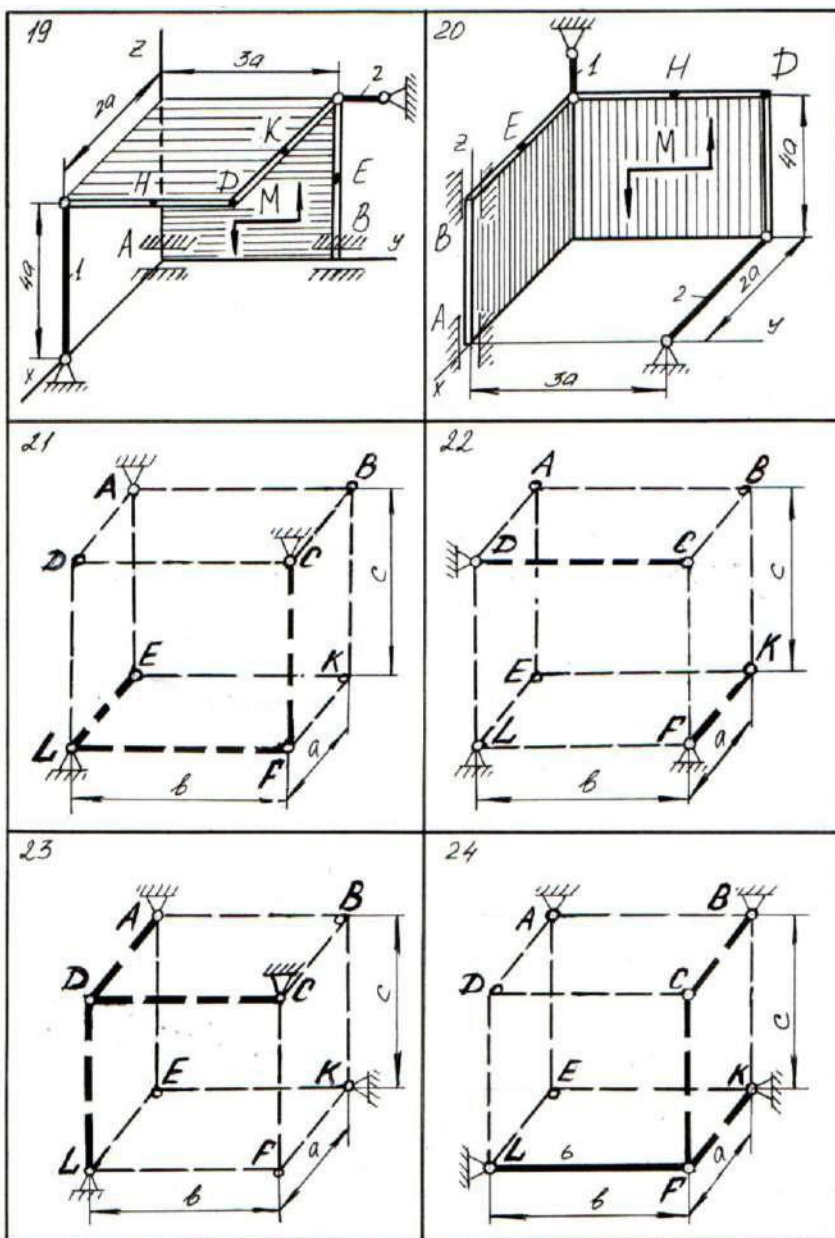


Рис. 65

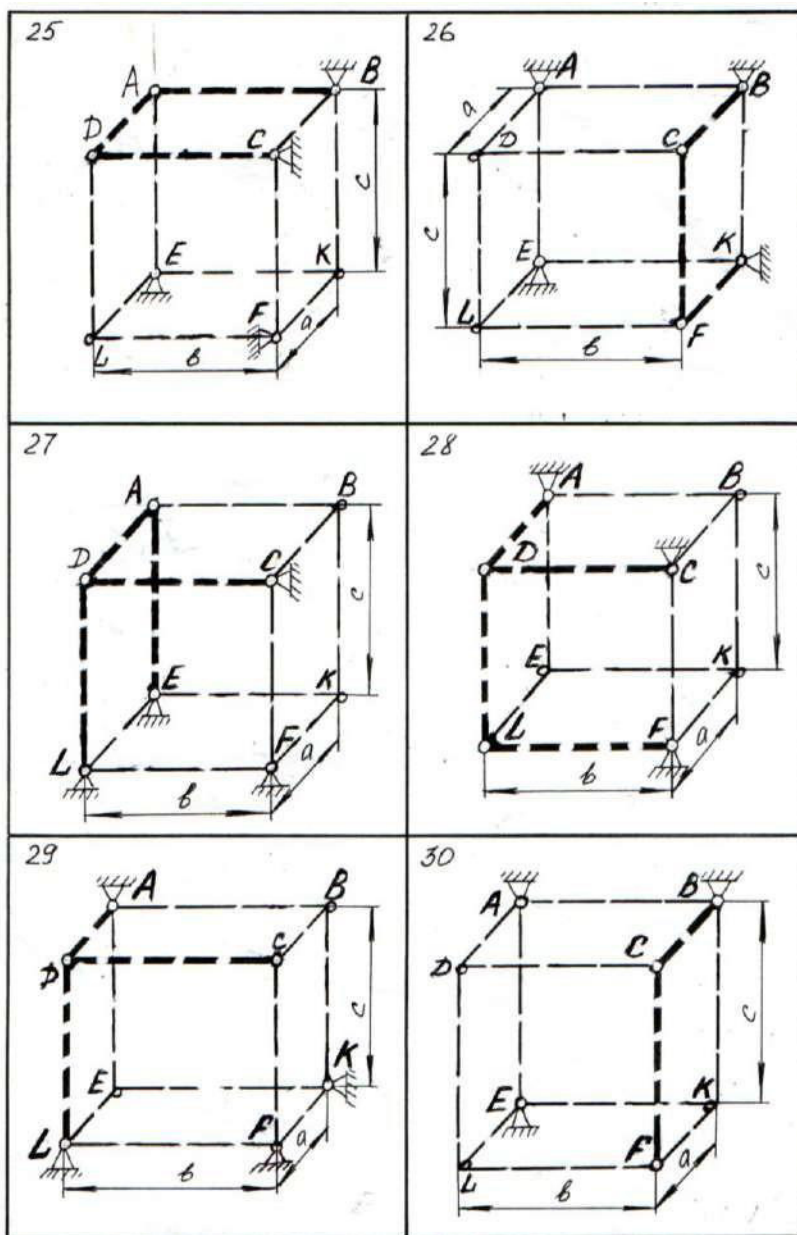


Рис. 66



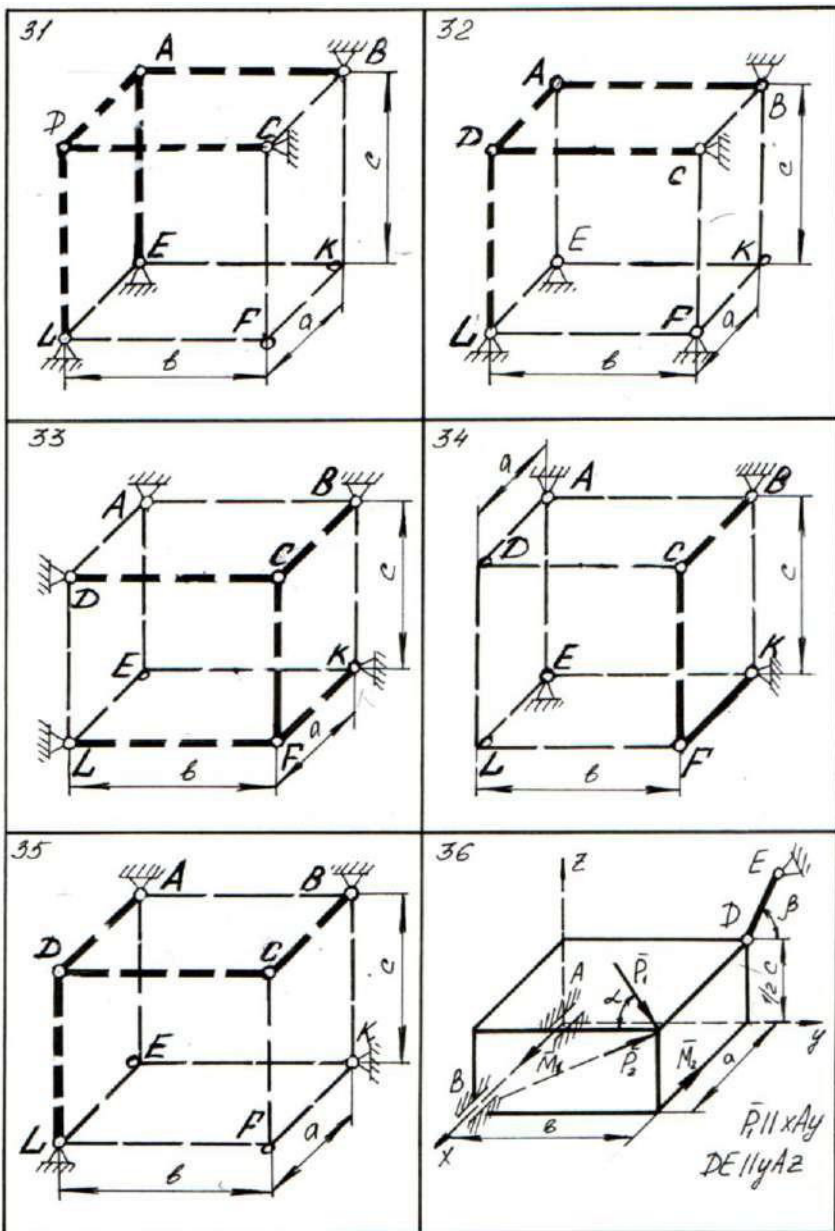
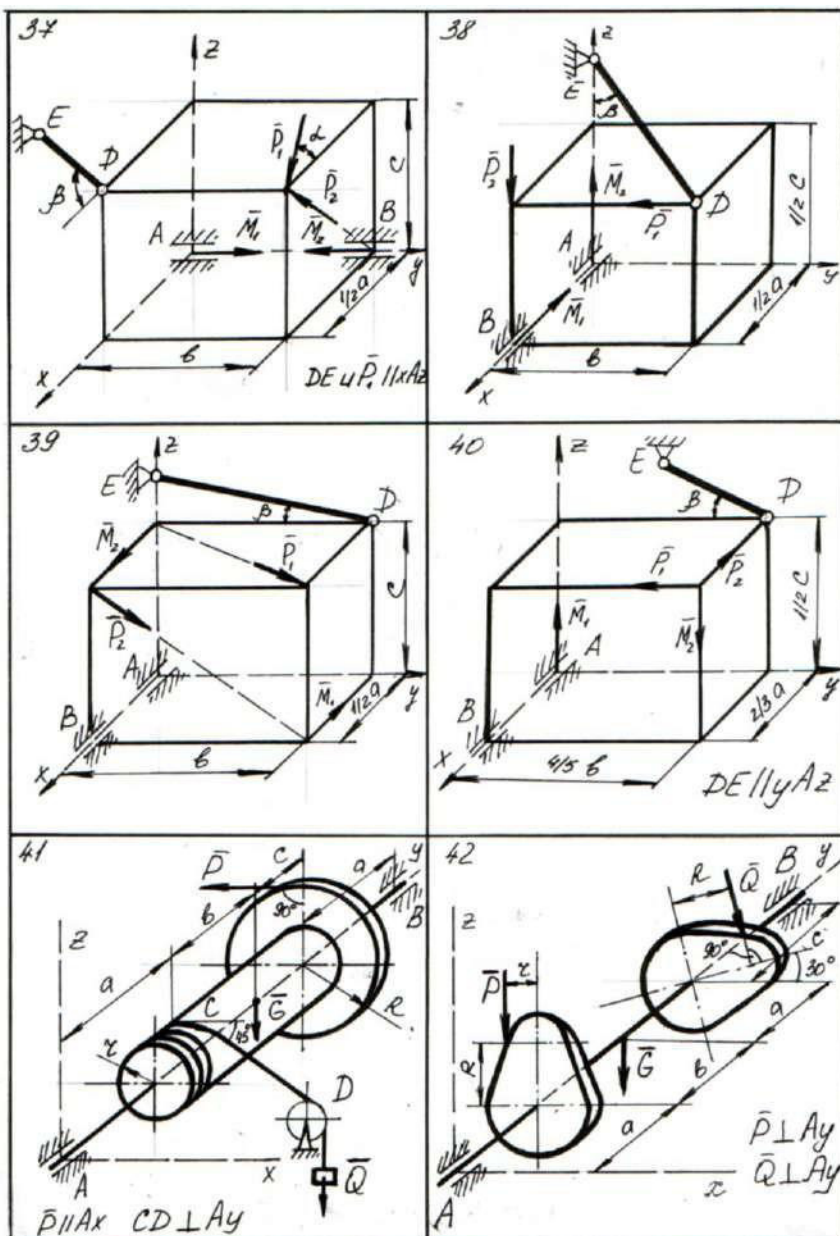
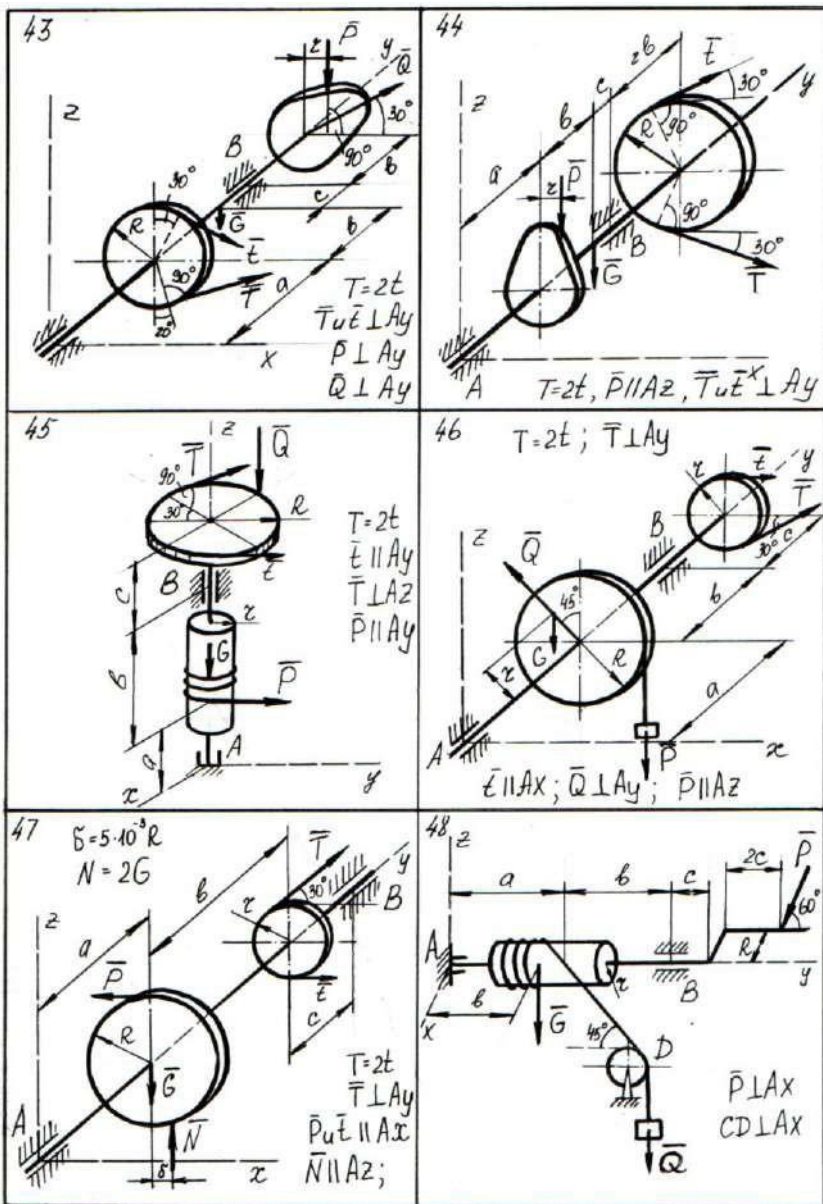
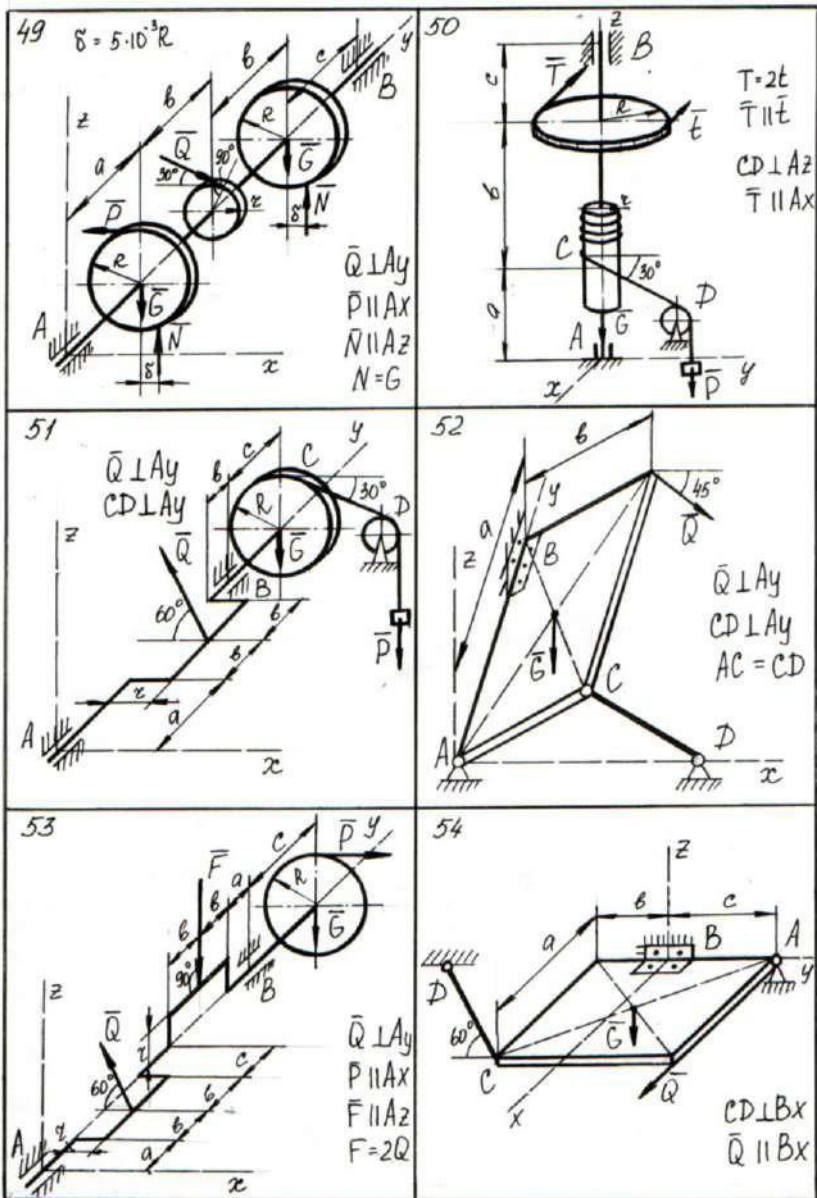


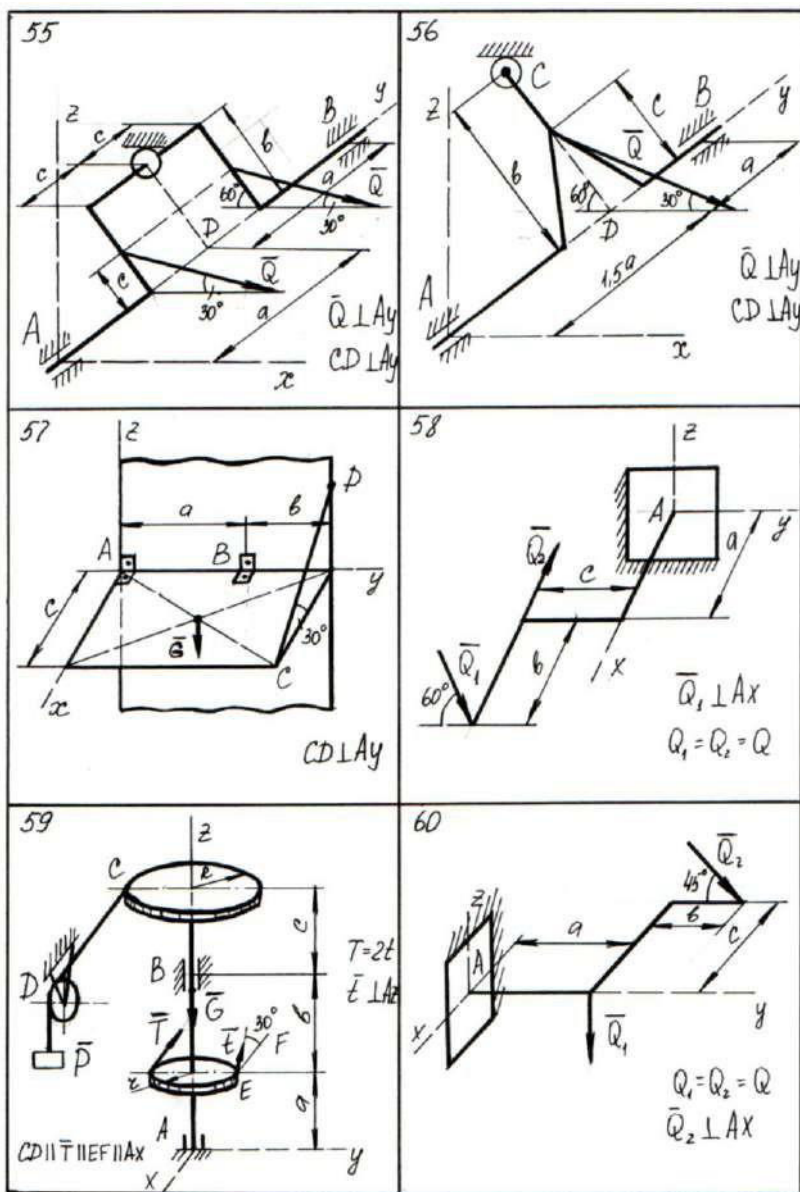
Рис. 67











### Вопросы для обсуждения

1. Виды связей и их реакции (пространственные опоры)?
2. Аналитическая форма условий равновесия пространственной системы:  
а) сходящихся сил; б) параллельных сил; в) произвольной системы сил.
3. Алгебраический момент силы относительно оси. Основные свойства момента?
4. Момент пары сил?

### Литература

Основная: 1–5.

Интернет-ресурсы: 1.

## 14. Расчёт плоской статически определимой фермы. Метод вырезания узлов

**Цель занятия:** внешнее уравнивание конструкции, определение внутренних усилий в стержнях фермы – метод вырезания узлов.

**Организационная форма:** решение задач:

### Методические рекомендации

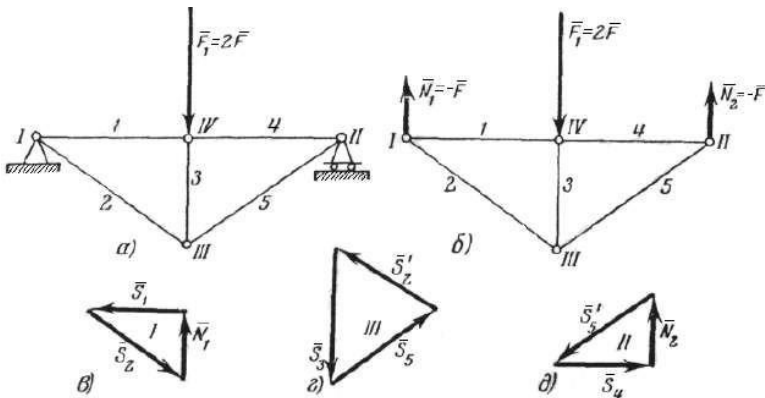


Рис. 72

В данной ферме (рис. 72) число узлов  $n = 4$ , а число стержней  $k = 5$ . Следовательно, соотношение  $k = 2n - 3$  выполняется, и ферма является статически определимой.

Ферма принимается на основании принципа отвердевания за абсолютно твердое тело. Внешнее уравнивание конструкции – это уравнивание активных сил и опорных реакций, которые образуют плоскую произвольную

систему сил. Аналитический способ уравнивания – три уравнения равновесия плоской произвольной системы сил.

*Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из двух взаимно перпендикулярных координатных осей и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки той же плоскости были равны нулю.*

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \sum_{i=1}^n m_i (\vec{F}_i) = 0. \quad (51)$$

Определение внутренних усилий в стержнях фермы по способу вырезания узлов. В число сил, приложенных к вырезанному узлу, входят реакции перерезанных стержней, равные по модулю искомым усилиям в этих стержнях, а также заданные силы и опорные реакции. Первым нужно вырезать тот узел, в котором соединяются только два стержня. Обычно такими бывают узлы на опорах. Затем уже нужно переходить к следующим узлам таким образом, чтобы в очередном узле было не более двух стержней с неизвестными еще реакциями, так как любой вырезанный узел – это плоская система сходящихся сил, для равновесия которой можно составить два уравнения равновесия. Свойства внутренних сил – они равны по модулю, противоположны по направлению и имеют общую линию действия. Проверочным является узел, в котором сходится максимальное количество стержней по геометрическому контуру фермы (рис. 72).

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad (52)$$

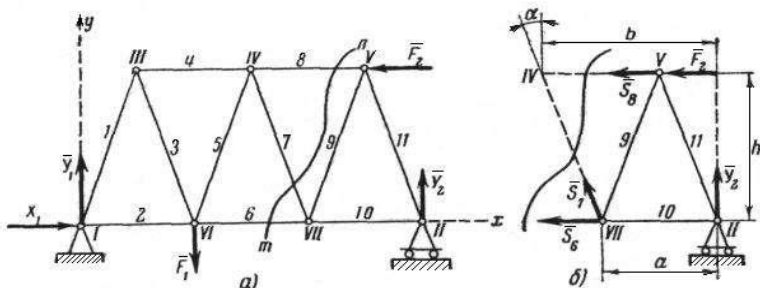


Рис. 73

Задача:

Расчет фермы, изображенной на рисунке 73, а. К этой ферме приложены две активные силы: вертикальная  $\vec{F}_1$  и горизонтальная  $\vec{F}_2$ . Размеры фермы указаны на рисунке 73, б. Требуется найти усилия в стержнях этой фермы.

Определим сначала опорные реакции. Неподвижная шарнирная опора  $I$  имеет две составляющие реакции: горизонтальную  $\overline{X}_I$ , и вертикальную  $\overline{Y}_I$ .

Подвижная же опора  $II$  имеет только вертикальную реакцию  $\overline{Y}_{II}$ . Для определения этих опорных реакций составим три уравнения равновесия всех действующих на ферму сил (активных сил и опорных реакций) в форме

$$\sum X_i = X_1 - F_2 = 0;$$

$$\sum m_i(\overline{F}_i) = -F_1 \cdot a + Y_2 \cdot 3a + F_2 \cdot h = 0;$$

$$\sum m_{II}(\overline{F}_i) = -Y_1 \cdot 3a + F_1 \cdot 2a + F_2 \cdot h = 0.$$

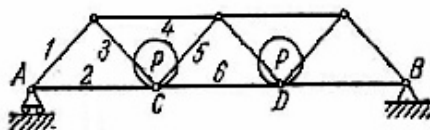
Из этих уравнений находим

$$\begin{matrix} X_1 = F_2; Y_1 = \frac{2}{3} F_1 + \frac{h}{3a} F_2; Y_2 = \frac{1}{3} F_1 - \frac{h}{3a} F_2. \end{matrix}$$

### Решить самостоятельно

#### Задача 1.

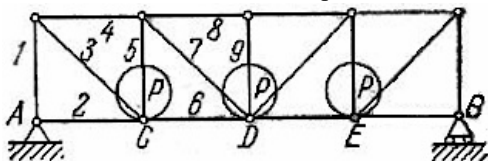
В мостовой ферме, изображенной на рисунке, на узлы  $C$  и  $D$  приходится одинаковая вертикальная нагрузка  $P = 100$  кН; наклонные стержни составляют углы  $45^\circ$  с горизонтом. Найти усилия в стержнях 1, 2, 3, 4, 5 и 6, вызываемые данной нагрузкой.



Ответ:  $S_1 = -141$  кН,  $S_2 = 100$  кН,  $S_3 = 141$  кН,  $S_4 = -200$  кН,  $S_5 = 0$ ,  $S_6 = 200$  кН.

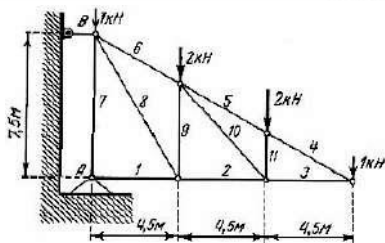
#### Задача 2.

В мостовой ферме, изображенной на рисунке, узлы  $C$ ,  $D$  и  $E$  загружены одинаковой вертикальной нагрузкой  $P = 100$  кН. Наклонные стержни составляют углы  $45^\circ$  с горизонтом. Найти усилия в стержнях 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, вызываемые данной нагрузкой.



Ответ:  $S_1 = -150$  кН,  $S_2 = 0$ ,  $S_3 = 212$  кН,  $S_4 = -150$  кН,  $S_5 = -50$  кН,  $S_6 = 150$  кН,  $S_7 = 71$  кН,  $S_8 = -200$  кН,  $S_9 = 0$ .

Задача 3. Определить опорные реакции и усилия в стержнях навесной фермы, изображенной вместе с действующими на нее силами на рисунке.

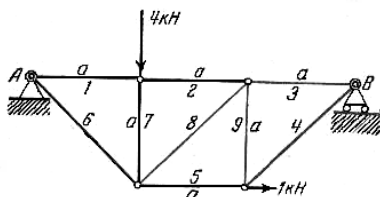


| Номер стержня | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6    | 7   | 8    | 9   | 10   | 11  |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-----|------|-----|------|-----|
| Усилие, кН    | - 5,4 | - 3,6 | - 1,8 | +2,06 | +2,06 | +4,1 | - 6 | +3,5 | - 3 | +2,7 | - 2 |

Ответ:  $X_A = 5,4$  кН,  $Y_A = 6$  кН,  $Y_B = - 5,4$  кН.

#### Задача 4.

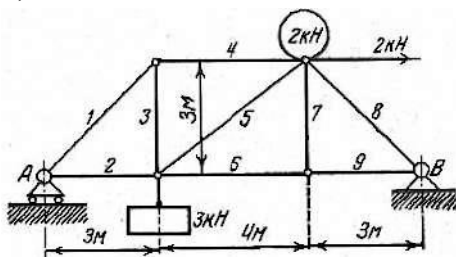
Определить опорные реакции и усилия в стержнях раскосной фермы, изображенной на рисунке вместе с нагрузкой.



| Номер стержня | 1   | 2   | 3   | 4      | 5   | 6      | 7   | 8      | 9   |
|---------------|-----|-----|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|
| Усилие, кН    | - 2 | - 2 | - 1 | + 1,41 | + 2 | + 4,24 | - 4 | + 1,41 | - 1 |

Ответ:  $X_A = - 1$  кН,  $Y_A = 3$  кН,  $Y_B = 1$  кН.

Задача 5. Определить опорные реакции и усилия в стержнях мостовой фермы, которая вместе с приложенными к ней силами изображена на рисунке.



| Номер стержня | 1      | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7 | 8     | 9     |
|---------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|---|-------|-------|
| Усилие, кН    | - 2,97 | + 2,1 | + 2,1 | - 2,1 | + 1,5 | + 0,9 | 0 | - 4,1 | + 0,9 |

Ответ:  $Y_A = 2,1$  кН,  $X_B = - 2$  кН,  $Y_B = 2,9$  кН.

#### Вопросы для обсуждения

1. Что такое ферма? Где используются фермы?
2. Алгоритм расчета статически определимой фермы?
3. Методы расчёта внутренних усилий в стержнях фермы: 1) метод вырезания узлов?
4. Какая зависимость существует между числом стержней и числом узлов фермы?
5. Как определяется статическая определимость фермы?
6. Уравнения равновесия плоской системы: а) сходящихся сил?
- б) произвольной системы сил?
7. Определение и свойства простейшей уравновешенной системы сил?
8. Определение и свойства внутренних усилий?

## Литература

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

### 15. Расчёт плоской статически определимой фермы. Метод Риттера

**Цель занятия:** внешнее уравнивание конструкции, определение внутренних усилий в стержнях фермы – метод Риттера.

**Организационная форма:** решение задач.

#### Методические рекомендации

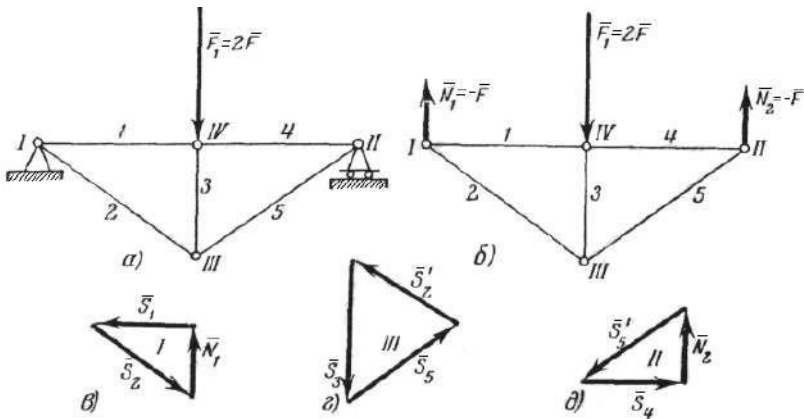


Рис. 74

В данной ферме (рис. 74) число узлов  $n = 4$ , а число стержней  $k = 5$ . Следовательно, соотношение  $k = 2n - 3$  выполняется, и ферма является статически определимой.

Ферма принимается на основании принципа отвердевания за абсолютно твердое тело. Внешнее уравнивание конструкции – это уравнивание активных сил и опорных реакций, которые образуют плоскую произвольную систему сил. Аналитический способ уравнивания – три уравнения равновесия плоской произвольной системы сил.

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из двух взаимно перпендикулярных координатных осей и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки той же плоскости были равны нулю.



$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \sum_{i=1}^n m \left( \overline{F} \right) = 0. \quad (51)$$

$\begin{matrix} O \\ i \end{matrix}$

Определение внутренних усилий в стержнях фермы по методу Риттера – методу сечений. Сечение должно нарушать целостность не более 3-х стержней, так как каждая отсечённая часть конструкции представляет плоскую произвольную систему сил, для равновесия которой можно составить три уравнения

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \sum_{i=1}^n m \left( \overline{F} \right) = 0. \quad (52)$$

$\begin{matrix} O \\ i \end{matrix}$

Число стержней с неизвестными в них внутренними усилиями не должно превышать число аналитических уравнений, иначе конструкция будет статически неопределимой (рис. 75).

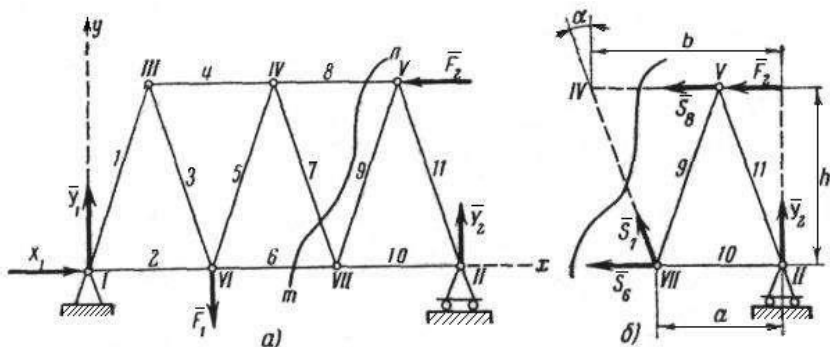


Рис. 75

Переходим теперь к определению внутренних усилий в стержнях фермы по методу Риттера. Для этого мысленно разрежем ферму на две части, проведя сечение  $mn$ , например, через стержни 6, 7 и 5. После этого удалим мысленно одну из частей фермы, например левую, и рассмотрим оставшуюся правую часть. Для того чтобы равновесие оставшейся части фермы не нарушилось, необходимо согласно принципу освобождаемости от связей заменить действие существовавших ранее связей их реакциями, т. е. реакциями  $S_6$ ,  $S_7$  и  $S_8$  перерезанных стержней 6, 7 и 8 на узлы  $V$  и  $VII$  (рис. 75, б). Реакция каждого стержня фермы может быть направлена только вдоль стержня, от узла, если стержень растянут, и к узлу, если он сжат. Заранее мы не знаем, какие из стержней растягиваются, а какие сжимаются. Поэтому будем считать предварительно все стержни растянутыми, т. е. будем направлять их реакции от узла, как показано на рисунок 75, б. Знак «минус» перед модулем найденной реакции стержня будет показывать, что действительное ее направление обратно

принятому, т. е. на то, что стержень сжат.

Таким образом, рассматриваемая часть фермы находится в равновесии под действием произвольной плоской системы из пяти сил:  $\overline{F}_2, \overline{Y}_2, \overline{S}_6, \overline{S}_7$  и  $\overline{S}_8$ . Так как для произвольной плоской системы сил можно составить только три независимых уравнения равновесия, то производить сечение фермы нужно таким образом, чтобы при этом перерезалось *не более трех стержней* с неизвестными реакциями. Для определения искомых реакций стержней удобнее всего составлять уравнения равновесия в форме уравнений моментов, беря последовательно за центры моментов точки, в которых пересекаются два из трех перерезанных стержней. При этом в каждое из этих уравнений равновесия будет входить только одна неизвестная сила реакции перерезанного стержня. Если из трех перерезанных стержней два параллельны и, следовательно, точка пересечения их лежит в бесконечности, то вместо третьего уравнения моментов составляют уравнение проекций сил на ось, перпендикулярную к параллельным стержням.

Пусть по условию задачи требуется определить реакцию перерезанного стержня 8, зная  $\overline{F}_2$  и  $\overline{Y}_2$  и не определяя неизвестных реакций  $\overline{S}_6$  и  $\overline{S}_7$  и двух других перерезанных стержней 6 и 7. Для этого нужно составить такое уравнение равновесия произвольной плоской системы сил  $\overline{F}_2, \overline{Y}_2, \overline{S}_6, \overline{S}_7, \overline{S}_8$ , в которое неизвестные  $\overline{S}_6$  и  $\overline{S}_7$  и не входили бы. Мы достигнем этой цели, если составим уравнение моментов относительно точки *VIII*, в которой пересекаются линии действия сил  $\overline{S}_6$  и  $\overline{S}_7$ , а именно:

$$\sum m_{IV}(\overline{F}_i) = S_8 h + F_2 h + Y_2 a = 0.$$

Из этого уравнения равновесия (находим)

$$S_8 = - \left( \frac{F_2 + Y_2}{h} \right),$$

где  $F_2, a$  и  $h$  – положительные числа. Если при этом и  $Y_2$  будет положительным числом, то знак «минус», стоящий в правой части соотношения (1), указывает на то, что на самом деле реакция  $S_8$  имеет направление, обратное показанному на рисунок 75, б, т. е. стержень 8 сжат.

Если же нам требуется определить усилие в стержне 6, не зная усилий в других стержнях (7 и 8), то нужно составить уравнение моментов относительно точки *IV*:

$$\sum m_{IV}(\overline{F}_i) = Y_2 b - S_6 h = 0.$$

Из этого уравнения равновесия находим

$$S_6 = \frac{b}{h} Y_2.$$

Если  $Y_2 > 0$ , то  $S_6 > 0$ , и, следовательно, стержень 6 будет растянут.

Наконец, если нам при том же сечении фермы потребуется найти  $\overline{S_7}$ , не зная  $\overline{S_6}$  и  $\overline{S_8}$ , то нельзя использовать уравнение моментов, ибо силы  $\overline{S_6}$  и  $\overline{S_8}$  параллельны (не пересекаются), и, следовательно, нет той точки, относительно которой их моменты одновременно равнялись бы нулю. Поэтому мы составляем уравнение проекции на ось, перпендикулярную к силам  $\overline{S_6}$  и  $\overline{S_8}$ , а именно:

$$\sum Y_i = S_7 \cos \alpha + Y_2 = 0.$$

Из этого уравнения равновесия находим

$$S_7 = -\frac{Y_2}{\cos \alpha}.$$

Если  $Y_2 > 0$ , то  $S_7 < 0$ , и, следовательно, стержень 7 будет сжиматься.

Преимущества метода Риттера перед методом вырезания узлов заключаются в том, что этот способ позволяет определить усилие в любом стержне фермы независимо от усилий в прочих стержнях. А методом вырезания узлов для нахождения усилия в одном определенном стержне требовалось найти усилия во всех стержнях, сходящихся в последующих узлах.

Недостатки метода Риттера заключаются в том, что точки пересечения перерезанных стержней, относительно которых берутся моменты, могут находиться и вне пределов чертежа.

### ***Решить самостоятельно***

Задача. Расчет плоской статической определимой фермы

На рисунке 76–82 показаны схемы ферм. Необходимые для расчета данные приведены в таблице 1. К узлам ферм приложены силы  $\overline{P_1}$ ,  $\overline{P_2}$ ,  $\overline{P_3}$ ,  $\overline{P_4}$ ,  $\overline{P_5}$ , причем на каждую ферму, в зависимости от варианта задачи, действуют лишь три из этих сил, указанные в таблице 1.

Определить:

- 1) является ли ферма статически определимой;
- 2) реакции опор А и В от заданной нагрузки;
- 3) усилия в стержнях фермы:
  - а) для всех стержней способом вырезания узлов (аналитически);
  - б) в трех стержнях фермы – способом Риттера (номера стержней указаны в таблице).

Таблица 1

| №<br>варианта<br>(рис. 1–60) | $P_1$      | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $a$ | $h$ | $\alpha$ ,<br>град | Номера<br>стержней<br>(способ<br>Риттера) |
|------------------------------|------------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|--------------------|-------------------------------------------|
|                              | $\kappa H$ |       |       |       |       | $M$ |     |                    |                                           |
| 1                            | 2          | 2     | -     | 4     | -     | 2   | -   | -                  | 2,8,12                                    |
| 2                            | 4          | —     | 6     | -     | 8     | 2   | -   | -                  | 3,6,10                                    |
| 3                            | -          | 6     | 8     | -     | 4     | 4   | -   | -                  | 5,6,15                                    |
| 4                            | 6          | 6     | -     | -     | 2     | 3   | -   | -                  | 2,3,9                                     |
| 5                            | 2          | 4     | 6     | -     | -     | 4   | -   | -                  | 4,7,10                                    |
| 6                            | 2          | -     | 2     | 4     | -     | 4   | -   | -                  | 3,6,11                                    |
| 7                            | 8          | -     | 6     | 4     | -     | 2   | -   | -                  | 3,9,13                                    |
| 8                            | -          | 3     | 4     | -     | 6     | 4   | -   | -                  | 2,6,11                                    |
| 9                            | -          | -     | 2     | 3     | 4     | 6   | -   | -                  | 4,8,13                                    |
| 10                           | 3          | -     | 3     | -     | 6     | 3   | -   | -                  | 6,8,9                                     |
| 11                           | 4          | -     | -     | 8     | 4     | 2   | 2   | -                  | 6,9,15                                    |
| 12                           | 2          | -     | 4     | 6     | -     | 4   | -   | -                  | 1,4,9                                     |
| 13                           | -          | 4     | 2     | 6     | -     | 2   | -   | -                  | 1,6,9                                     |
| 14                           | 2          | 2     | -     | 2     | -     | 2   | -   | -                  | 6,8,9                                     |
| 15                           | -          | -     | 8     | 2     | 4     | 4   | -   | -                  | 4,7,8                                     |
| 16                           | 4          | -     | 6     | 2     | -     | 4   | -   | -                  | 1,2,3                                     |
| 17                           | 6          | -     | 4     | -     | 8     | 2   | -   | -                  | 3,11,13                                   |
| 18                           | -          | -     | 2     | 4     | 6     | 4   | -   | -                  | 1,3,10                                    |
| 19                           | 2          | -     | 6     | -     | 4     | 2   | -   | -                  | 3,6,8                                     |
| 20                           | -          | 6     | -     | 6     | 6     | 3   | -   | -                  | 3,4,11                                    |
| 21                           | 3          | -     | 6     | -     | 9     | 2   | -   | -                  | 10,13,16                                  |
| 22                           | 6          | 6     | -     | -     | 6     | 2   | -   | -                  | 3, 8,12                                   |
| 23                           | -          | -     | 2     | 2     | 2     | 2   | -   | -                  | 2, 7,14                                   |
| 24                           | -          | -     | 4     | 4     | 4     | 4   | -   | -                  | 2, 8, 9                                   |
| 25                           | 6          | -     | 6     | -     | 6     | 2   | -   | -                  | 4, 8,11                                   |
| 26                           | 8          | -     | -     | 8     | 8     | 3   | -   | -                  | 3, 5,10                                   |
| 27                           | 2          | 6     | -     | 4     | -     | 4   | -   | -                  | 1, 8,12                                   |
| 28                           | 8          | -     | 4     | 6     | -     | 6   | -   | -                  | 3, 9,16                                   |
| 29                           | 6          | 2     | -     | 4     | -     | 2   | -   | -                  | 1, 4, 9                                   |
| 30                           | 4          | -     | 8     | -     | 6     | 4   | -   | -                  | 3,10,11                                   |
| 31                           | 9          | 6     | -     | -     | 3     | 3   | -   | -                  | 2,10,14                                   |
| 32                           | -          | 4     | -     | 2     | 4     | 2   | -   | -                  | 1, 9, 15                                  |
| 33                           | 2          | 2     | -     | 2     | -     | 2   | -   | -                  | 2, 7, 12                                  |
| 34                           | 4          | -     | 2     | -     | 2     | 4   | -   | -                  | 6, 9, 12                                  |
| 35                           | 6          | -     | 3     | 3     | -     | 3   | -   | -                  | 2, 7, 11                                  |

|    |    |    |   |   |    |     |   |    |          |
|----|----|----|---|---|----|-----|---|----|----------|
| 36 | 2  | -  | 2 | - | 2  | 2   | - | -  | 2, 4, 11 |
| 37 | 4  | -  | 4 | 4 | -  | 4   | - | -  | 1, 7, 14 |
| 38 | -  | 4  | - | 2 | 4  | 4   | - | -  | 4, 8, 9  |
| 39 | 2  | 4  | - | - | 6  | 2   | - | -  | 3, 6, 16 |
| 40 | 6  | -  | 6 | 6 | -  | 3   | - | -  | 8, 9, 10 |
| 41 | 4  | -  | 2 | 4 | -  | 6   | - | -  | 3, 6, 12 |
| 42 | -  | 2  | 4 | - | 2  | 2   | - | -  | 3, 5, 10 |
| 43 | 2  | -  | 4 | 4 | -  | 4   | - | -  | 4, 7, 11 |
| 44 | 6  | 2  | - | - | 4  | 2   | - | -  | 2, 3, 4  |
| 45 | 4  | -  | 2 | - | 4  | 2   | - | -  | 4, 8, 11 |
| 46 | 10 | 4  | - | 2 | -  | 2,5 | - | 60 | 2, 5, 11 |
| 47 | 2  | -  | 6 | - | 12 | 3   | - | 60 | 4,10,13  |
| 48 | 10 | 10 | - | 5 | -  | 4   | - | 60 | 3, 9, 12 |
| 49 | 2  | 4  | 2 | - | -  | -   | 2 | 60 | 6, 8, 10 |
| 50 | -  | -  | 4 | 8 | 2  | 4   | 3 | -  | 10,11,12 |
| 51 | 4  | 6  | - | - | 8  | 2   | - | 60 | 3, 7, 10 |
| 52 | 10 | -  | 5 | 5 | -  | 5   | - | 45 | 3, 4, 5  |
| 53 | -  | 2  | 8 | - | 10 | 4   | - | 60 | 4, 7, 14 |
| 54 | 8  | 6  | - | 2 | -  | 2   | 4 | -  | 2, 5, 8  |
| 55 | 2  | -  | 8 | - | 10 | 4   | - | 60 | 4, 6, 9  |
| 56 | -  | 4  | 2 | 6 | -  | 3   | 4 | -  | 2, 8, 11 |
| 57 | 8  | 6  | - | - | 2  | 2   | - | 60 | 3, 6, 9  |
| 58 | 4  | -  | 6 | 8 | -  | -   | 6 | 60 | 1, 4, 8  |
| 59 | -  | 3  | - | 6 | 6  | 6   | - | 45 | 4, 9, 12 |
| 60 | 8  | 4  | 6 | - | -  | 4   | - | 45 | 4, 8, 10 |
| 61 | -  | -  | 6 | 6 | 6  | 2   | - | 45 | 3, 8, 10 |
| 62 | 4  | 6  | 8 | - | -  | 3   | 4 | -  | 5, 8, 12 |
| 63 | 2  | 8  | - | 4 | -  | 4   | 3 | -  | 5, 9, 11 |
| 64 | -  | -  | 4 | 6 | 10 | 4   | - | 45 | 4, 7, 12 |
| 65 | 8  | 4  | - | - | 6  | 6   | 4 | -  | 2, 7, 11 |
| 66 | 6  | -  | 2 | 2 | -  | 2   | - | -  | 1, 7, 12 |
| 67 | 4  | -  | - | 8 | 4  | 4   | - | -  | 1,10,13  |
| 68 | 2  | -  | - | 6 | 8  | 4   | - | -  | 2, 6, 12 |
| 69 | -  | 10 | 8 | - | 8  | 2   | - | -  | 4,10,13  |
| 70 | 6  | 6  | - | 8 | -  | 4   | - | -  | 2, 6, 13 |

Пример:

Дано: схема фермы (рис. 16).  $P_1=10 \text{ кН}$ ;  $P_2= 20 \text{ кН}$ ;  $P_3=10 \text{ кН}$ ;  $a=2 \text{ м}$ .

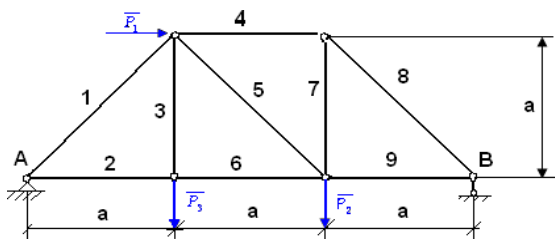


Рис. 76

Решение:

1. Производим проверку условия геометрической неизменяемости и статической определимости фермы по формуле  $S = 2n - 3$ , где  $S$  – число стержней фермы;  $n$  – число узлов фермы.

Подставляя  $S = 9$  и  $n = 6$ , получаем, что  $9 = 2 \cdot 6 - 3 = 9 \rightarrow 9 = 9$

Это означает, что форма статически определяемая.

2. Определение реакций опор А и В (т.е. уравновесить ферму внешне) – рис. 77.

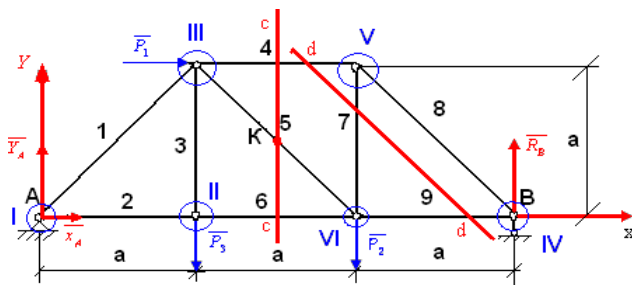


Рис. 77

Освобождаем ферму от связей, заменяя их действие соответствующими силами реакции:  $\overline{X_A}$ ,  $\overline{Y_A}$  – две составляющие реакции неподвижной шарнирной опоры А;  $\overline{R_B}$  – реакция опорного стержня В (направлена вдоль стержня) – рис. 77.

Заданные силы –  $\overline{P_1}$ ,  $\overline{P_2}$ ,  $\overline{P_3}$  (активные) и реакции опор –  $\overline{X_A}$ ,  $\overline{Y_A}$ ,  $\overline{R_B}$  (реактивные) образуют плоскую произвольную систему сил, для которой можно составить три уравнения равновесия:

$$1. \sum F_{kx} = 0; \overline{X_A} + \overline{P_1} = 0 \rightarrow \overline{X_A} = -\overline{P_1} = -10 \text{ кН};$$

$$2. \sum F_{ky} = 0; \overline{Y_A} - \overline{P_3} - \overline{P_2} + \overline{R_B} = 0$$

$$3. \sum M_A (\overline{F_K}) = 0; -a\overline{P_3} - a\overline{P_1} - 2a\overline{P_2} + 3a\overline{R_B} = 0 \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{aP_3 + aP_1 + 2aP_2}{3a} = \frac{10 + 10 + 2 \cdot 20}{3} = 20 \text{ кН.}$$

Подставляем найденное значение реакции  $\overline{R}_B$  в уравнение 2 и определяем реакцию  $Y_A$ :

$$Y_A = P_3 + P_2 - R_B = 10 + 20 - 20 = 10 \text{ кН}$$

Проверка: точка К находится на середине вертикального и горизонтального размеров фермы.

$$\begin{aligned} \sum M_A (\overline{F}_K) &= 0; -15aY_A + 0,5aX_A - 0,5aP_1 - 0,5aP_2 + 0,5aP_3 + 1,5aR_B = \\ 0; &=> -1,5 \cdot 2 \cdot 10 + 0,5 \cdot 2 \cdot (-10) - 0,5 \cdot 2 \cdot 10 + 0,5 \cdot 2 \cdot 10 - 0,5 \cdot 2 \cdot 20 + 1,5 \cdot 2 \cdot 20 = 0 \\ &=> -30 - 10 - 10 - 20 + 10 + 60 = 0; -70 + 70 = 0; 0 = 0. \end{aligned}$$

Знак «-» в значении реакции  $\overline{X}_A$  указывает на то, что она направлена противоположно, чем показано на рис. 77, чтобы обеспечить равновесие полученной плоской произвольной системы сил.

Итак,  $X_A = -10 \text{ кН}$ ;  $Y_A = 10 \text{ кН}$ ;  $R_B = 20 \text{ кН}$ .

### 3. Определение внутренних усилий в стержнях фермы.

а) способ вырезания узлов (аналитический).

Введем следующую нумерацию узлов и стержней фермы (узлы обозначены римскими, а стержни – арабскими цифрами) – рис. 77.

Вырезаем сначала узел I, в котором сходятся только 2 стержня с неизвестными усилиями. Усилия в стержне обозначим соответственно через  $\overline{S}_1$ ,  $\overline{S}_2$  ...  $\overline{S}_9$ . Действия перерезанных стержней 1 и 2 заменим усилиями  $\overline{S}_1$  и  $\overline{S}_2$ , направленные от узла, предполагая, что все стержни растянуты – рис. 77. Силы, действующие на узел I, образуют плоскую систему сходящихся сил, поэтому можно составить уравнения равновесия.

Узел I.

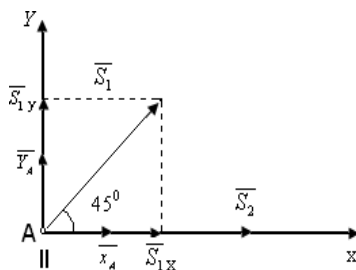


Рис. 78

$$\sum F_{kx} = 0; X_A + S_1 \cos 45^\circ + S_2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_A + S_1 \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

Решая полученную систему уравнений, находим усилия в стержнях 1 и 2:

Рисунок 78

$$\begin{aligned} \text{Из 2)} : S_1 &= -Y_A / \sin 45^\circ = -10 / \\ &(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -14,14 \text{ кН (сжат)} \end{aligned}$$

Подставляем найденные значения

$S_1$  в уравнение 1) и вычисляем  $S_2$ :

$$S_2 = -X_A - S_1 \cos 45^\circ = -(-10) - (-14,14) \cdot$$

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 10 + 10 = 20 \text{ кН (растянут)}$$



**Положительный знак** в значении  $S_2$  показывает, что стержень 2, из выше принятого предположения, действительно **растянут**, а **отрицательный знак** в значении  $S_1$  – что стержень сжат.

Следующим вырезаем узел II, в котором сходятся не более 2-х стержней (3 и 6) с неизвестными усилиями. Усилие  $S_2$  направляем соответственно тому, что это внутреннее усилие в стержне (простейшая уравновешенная система сил).

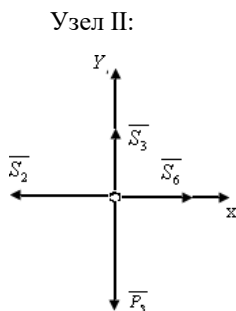


Рис. 79

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0; S_6 - S_2 = 0 \quad (1) \\ \Rightarrow S_6 &= S_2 = 20 \text{ кН (растянут).} \\ \sum F_{ky} &= 0; S_3 - P_3 = 0 \quad (2) \\ \Rightarrow S_3 &= P_3 = 10 \text{ кН (растянут).}\end{aligned}$$

Аналогично вырезаем все остальные узлы.

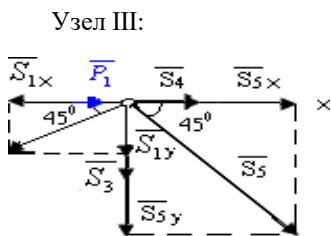


Рис. 80

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0; -S_1 \cdot \cos 45^\circ + P_1 + S_4 + S_5 \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad (1) \\ \sum F_{ky} &= 0; -S_1 \cdot \sin 45^\circ - S_3 - S_5 \cdot \sin 45^\circ = 0 \quad (2) \Rightarrow S_5 = \frac{-S_1 \cdot \sin 45^\circ - S_3}{\sin 45^\circ} \\ &= \frac{-(-14,14) \cdot (\sqrt{2} / 2) - 10}{(\sqrt{2} / 2)} = 0 \Rightarrow \text{(нулевой стержень).}\end{aligned}$$

Подставляем  $S_5$  в 1) и находим значение усилия  $S_4$ :

$$\begin{aligned}S_4 &= S_1 \cos 45^\circ - P_1 - S_5 \cos 45^\circ = -14,14 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 10 = \\ &= -10 - 10 = -20 \text{ кН (сжат).}\end{aligned}$$

Узел IV:

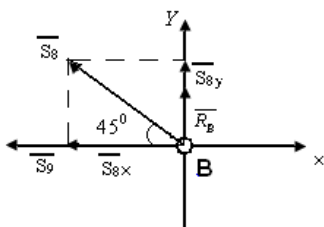


Рис. 81

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0; -S_9 - S_8 \cos 45^\circ = 0 \quad (1) \\ \sum F_{ky} &= 0; R_6 + S_8 \sin 45^\circ = 0 \quad (2) \Rightarrow \\ \Rightarrow S_8 &= -\frac{R_6}{\sin 45^\circ} = -\frac{20}{\sqrt{2} / 2} = -28,28 \text{ кН}\end{aligned}$$

(сжат).

$$\begin{aligned}\text{Из 1): } S_9 &= -S_8 \cos 45^\circ = -(-28,28) \cdot \\ &(\sqrt{2} / 2) = 20 \text{ кН (растянут)}.\end{aligned}$$

Узел V:

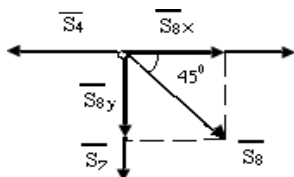


Рис. 82

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0; -S_4 + S_8 \cos 45^\circ = 0 \quad (1) \\ -(-20) - 28,28 \cdot (\sqrt{2} / 2) &= 0; 20 - 20 = 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; -S_7 - S_8 \sin 45^\circ = 0 \\ \Rightarrow S_7 &= -S_8 \sin 45^\circ = -(-28,28) \cdot (\sqrt{2} / 2) \\ &= 20 \text{ кН (растянут)}.\end{aligned}$$

Узел VI (проверочный):

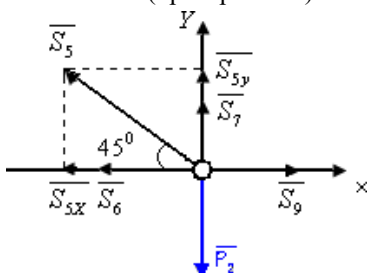


Рис. 83

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0; -S_5 \cdot \cos 45^\circ - S_6 + S_9 = 0; \quad (1) \\ -0 - 20 + 20 &= 0; 0 \equiv 0 \\ \sum F_{ky} &= 0; S_5 \cdot \sin 45^\circ + S_7 - P_2 = 0; \quad (2) \\ 0 \cdot (\sqrt{2} / 2) + 20 - 20 &= 0; 0 \equiv 0;\end{aligned}$$

б) способ Риттера (способ сечений) – определение усилий в стержнях 5, 6, 9.

Мысленно рассекаем ферму на две части так, чтобы число рассеченных стержней, в которых усилия еще не известны, не превышало трех.

Для стержней 5 и 6 сечение С-С (рис. 77). Рассматриваем равновесие левой от сечения С-С части фермы – рис. 84. Действие рассеченных стержней 4, 5, 6 заменяем их внутренними усилиями  $S_4$ ,  $S_5$ ,  $S_6$  соответственно, направленными по стержням от узлов, предполагая, что стержни

растянуты. Для полученной плоской произвольной системы сил можно составить 3 уравнения равновесия. Точка Риттера – это моментная точка.

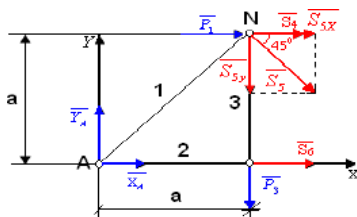


Рис. 84

Для стержня 6 точка N – точка Риттера – точка пересечения линий действия усилий  $S_4$  и  $S_5$ .

$$\sum M_N(F_K) = 0; a S_6 + a X_A - a Y_A = 0 \Rightarrow S_6 = \frac{a Y_A - a X_A}{a} = 10 - (-10) = 20 \text{ кН}$$

Для стержня 5 точки Риттера нет.

$$\sum F_{ky} = 0; -S_5 \sin 45^\circ - P_3 + Y_A = 0; \Rightarrow S_5 = \frac{-P_3 + Y_A}{\sin 45^\circ} = \frac{-10 + 10}{(\sqrt{2}/2)} = 0 \text{ (нулевая)}$$

вой стержень)

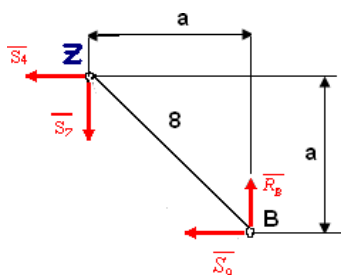


Рис. 85

Для определения внутреннего усилия в стержне 9 мысленно рассекаем ферму сечением d-d (рис. 77) и рассматриваем равновесие правой от сечения части фермы – рис. 85.

Точка Z – точка Риттера для стержня 9.

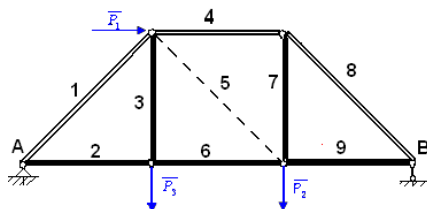
$$M_Z(F_K) = 0; -a S_9 + a R_B = 0 \Rightarrow S_9 = \frac{a R_B}{a} = R_B = 20 \text{ кН (растянут)}.$$

a

Численные значения внутренних усилий  $S_5, S_6, S_9$  соответственно стержней 5, 6,

9, определенные по методу вырезания узлов фермы и способом сечений (метод Риттера) абсолютно равны. Схема фермы с фактической картиной сил:

- ===== сжатый стержень;
- ===== растянутый стержень, сила которого равна нулю (нулевой)
- - - - - стержень)



Результаты расчетов внутренних усилий в стержнях фермы сводим в таблицу 2.

Ниже приводятся схемы расчётных задач для самостоятельного решения – рис. 87–93.

Таблица 2

| Номер стержня | 1     | 2  | 3  | 4  | 5 | 6  | 7  | 8     | 9  |
|---------------|-------|----|----|----|---|----|----|-------|----|
| Знак силы     | –     | +  | +  | –  | 0 | +  | +  | –     | +  |
| Сила, кН      | 14,14 | 20 | 10 | 20 | 0 | 20 | 20 | 28,28 | 20 |

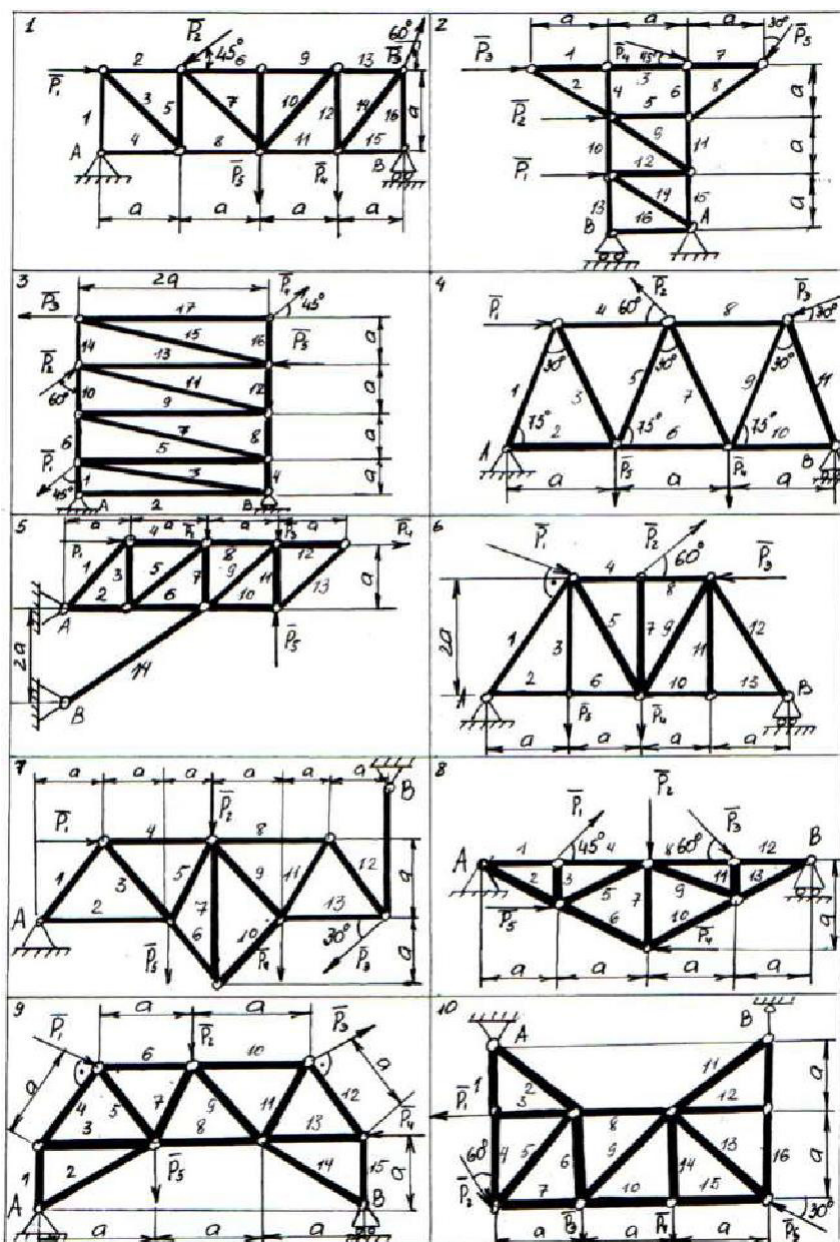
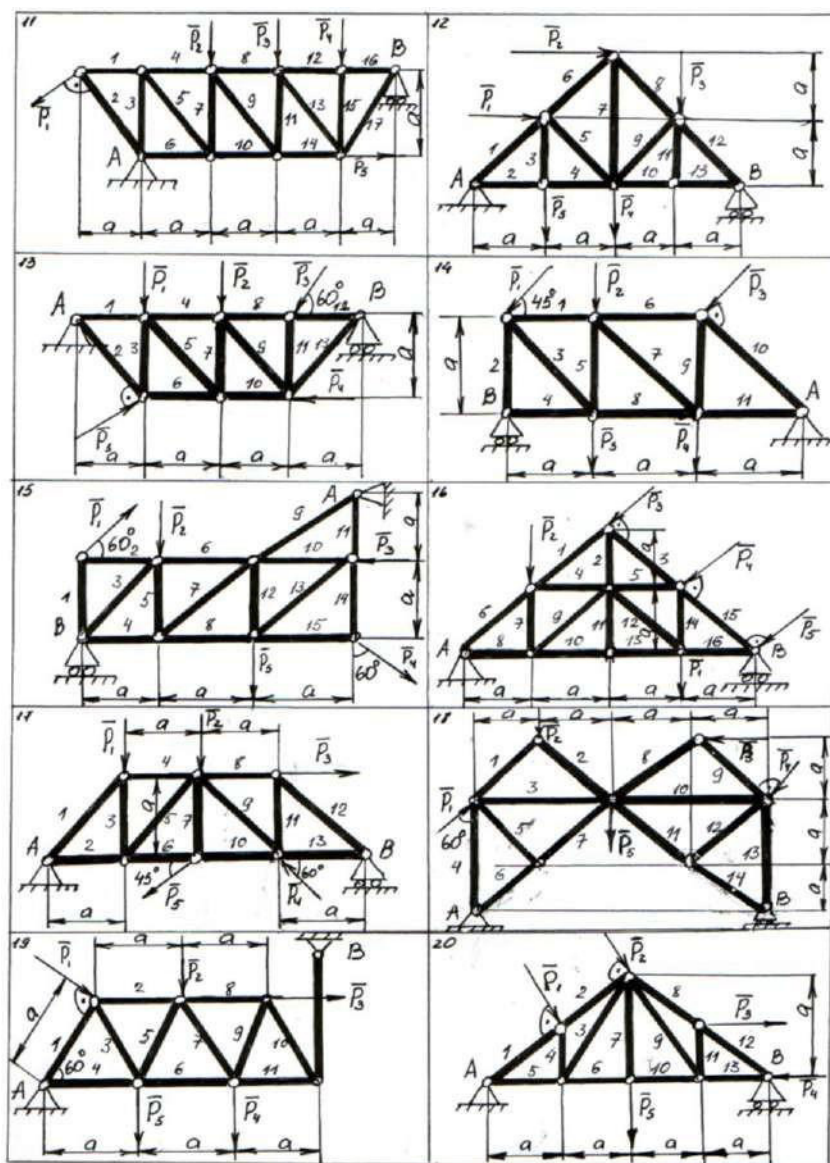


Рис. 87



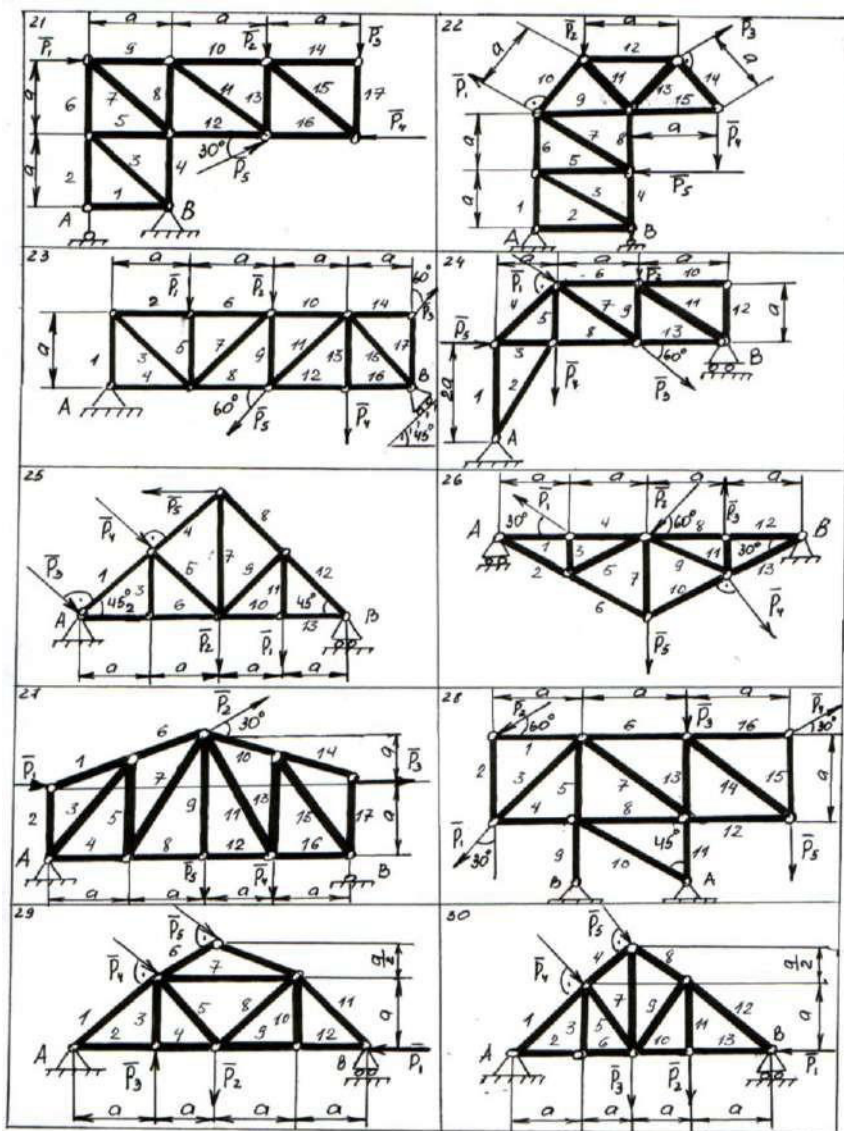


Рис. 89



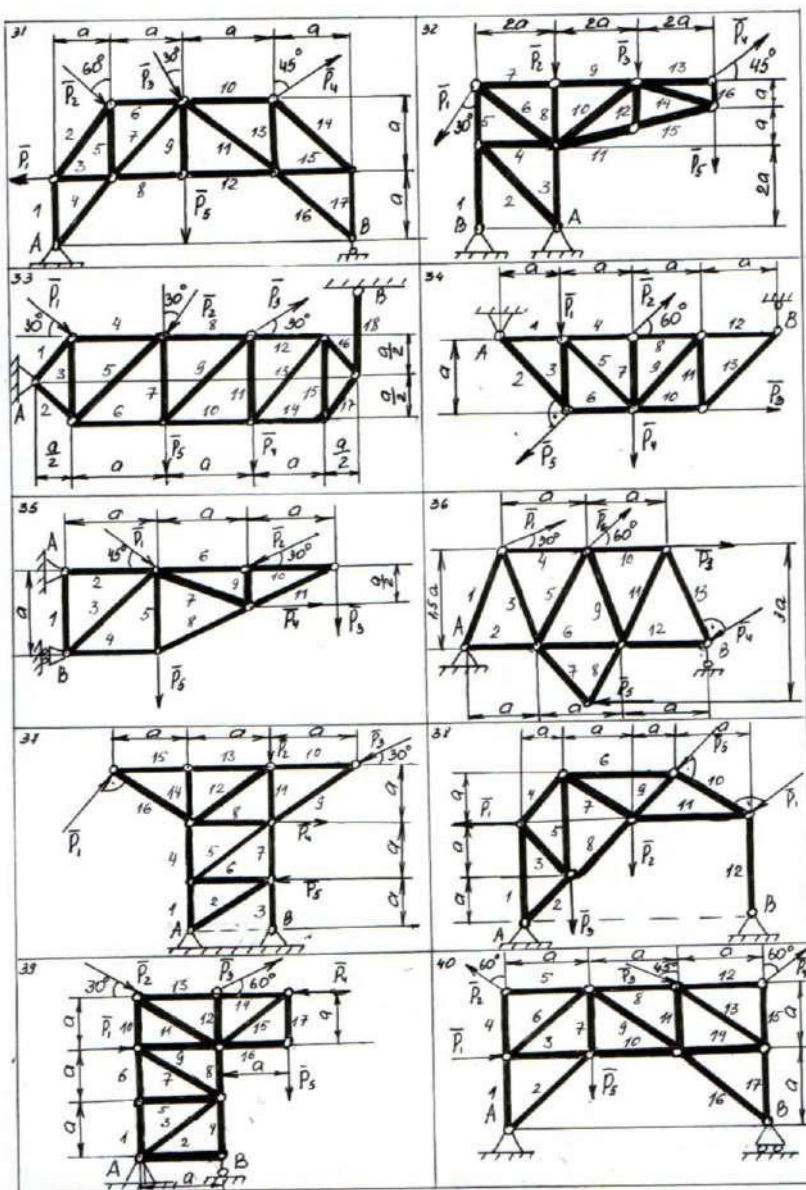


Рис. 90



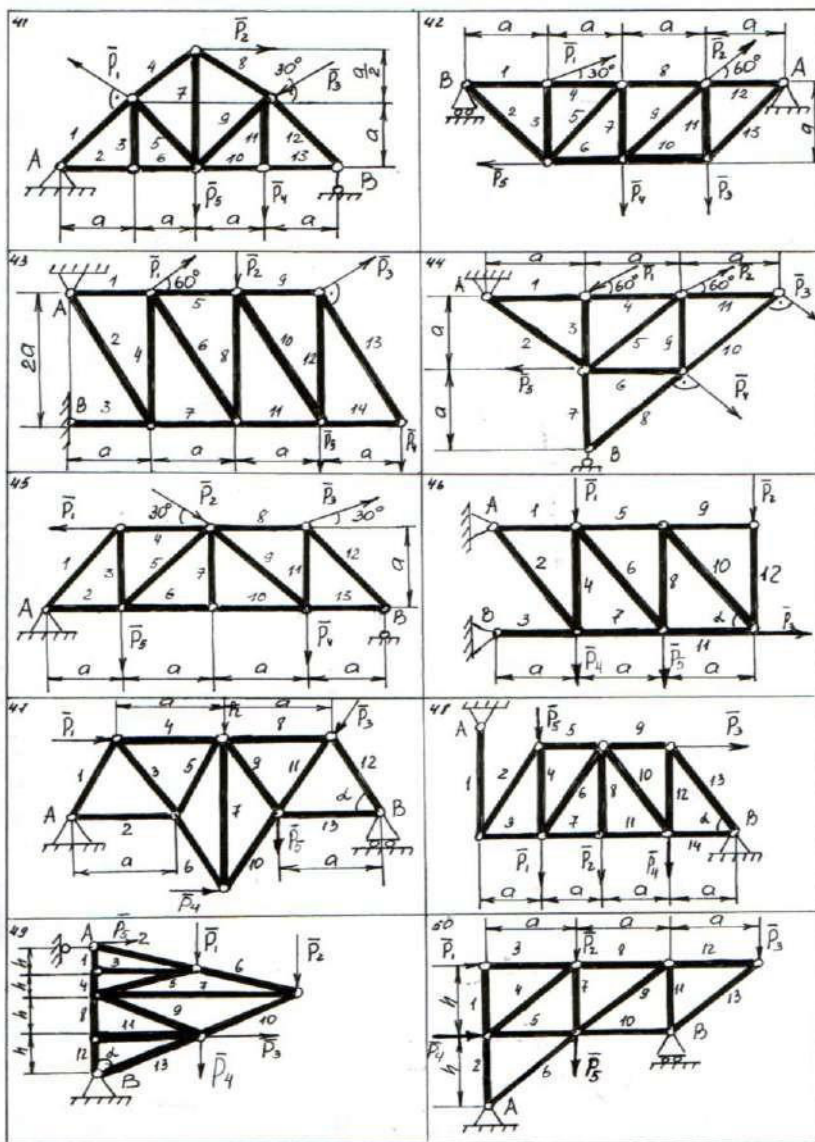


Рис. 91

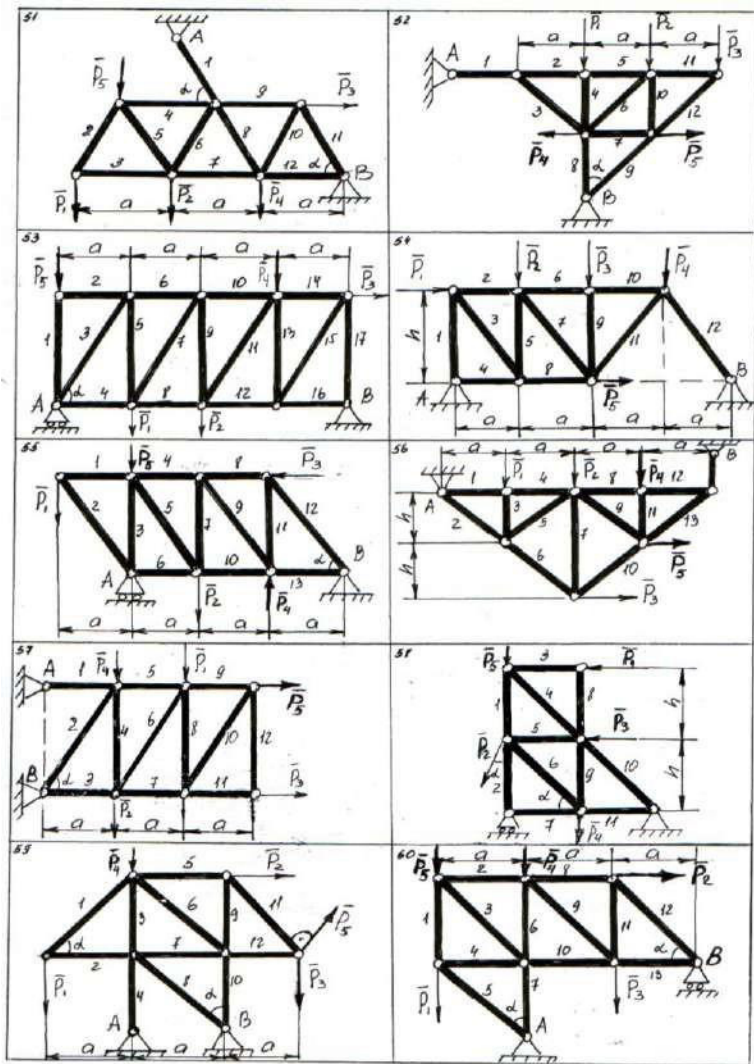


Рис. 92

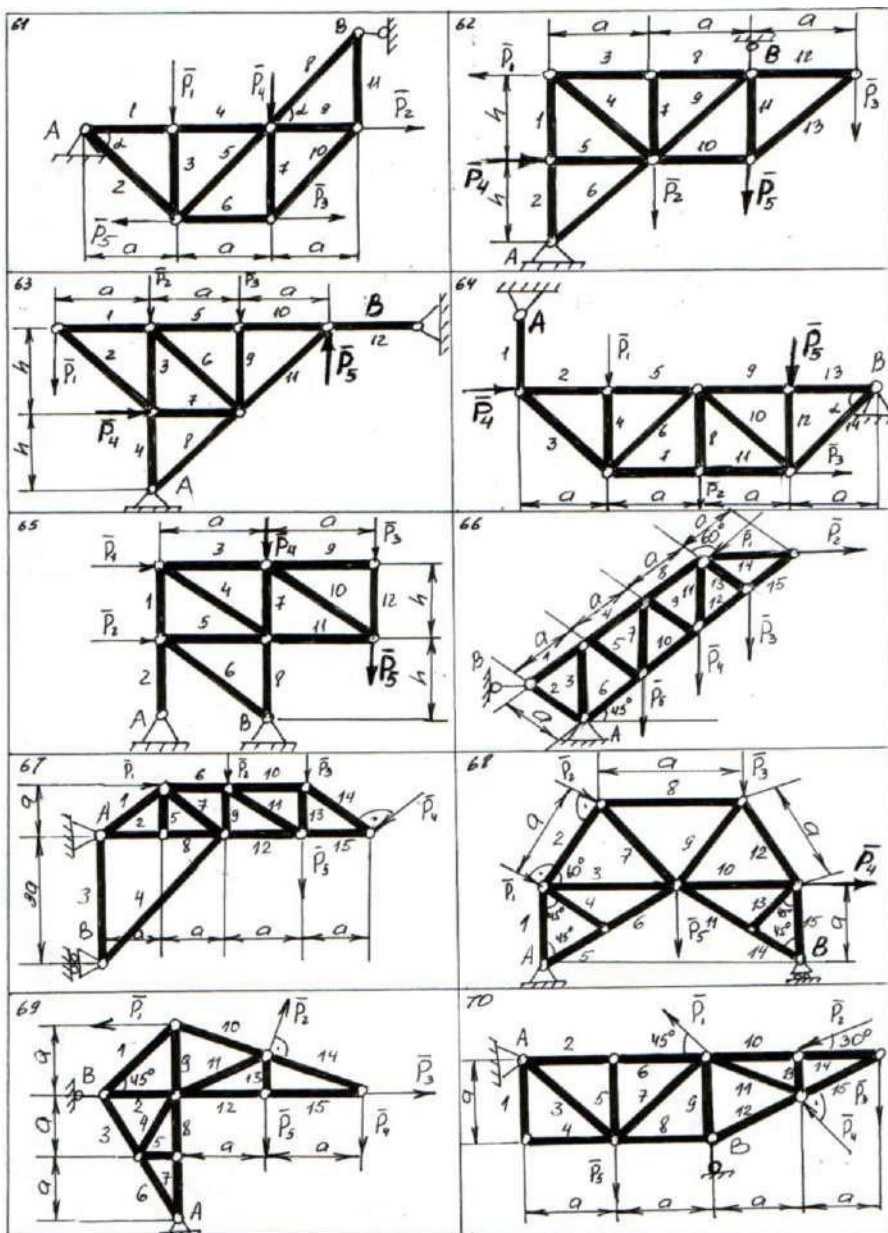


Рис. 93

### ***Вопросы для обсуждения***

1. Что такое ферма? Где используются фермы?
2. Алгоритм расчета статически определимой фермы?
3. Методы расчёта внутренних усилий в стержнях фермы: 1) метод вырезания узлов? 2) метод сечений – метод Риттера?
4. Какая зависимость существует между числом стержней и числом узлов фермы?
5. Как определяется статическая определимость фермы?
6. Уравнения равновесия плоской системы: а) сходящихся сил?  
б) произвольной системы сил?
7. Определение и свойства простейшей уравновешенной системы сил?
8. Определение и свойства внутренних усилий?

### ***Литература***

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

## 16. Скорость, ускорение точки при координатном и векторном способах задания движения точки. Классификация движений точки

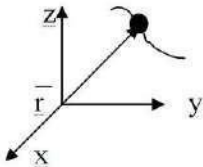
**Цель задания:** способы задания движения точки, скорость точки, ускорение точки.

**Организационная форма:** решение задач.

### Методические рекомендации

Координатный способ задания движения точки  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  – параметрические уравнения движения точки.

Векторный способ задания движения точки  $\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$



$$v_x = (\dot{x})^1; v_y = (\dot{y})^1; v_z = (\dot{z})^1; \vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z;$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} =$$

$$= \sqrt{(r_x')^2 + (r_y')^2 + (r_z')^2}$$

$$a_x = (\ddot{x})^1 = (\ddot{r}_x)^1 = (\dot{v}_x)^1;$$

$$a_y = (\ddot{y})^1 = (\ddot{r}_y)^1 = (\dot{v}_y)^1;$$

$$a_z = (\ddot{z})^1 = (\ddot{r}_z)^1 = (\dot{v}_z)^1;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(\dot{v}_x')^2 + (\dot{v}_y')^2 + (\dot{v}_z')^2} =$$

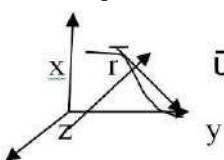
$$\sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2} = \sqrt{(\ddot{r}_x'')^2 + (\ddot{r}_y'')^2 + (\ddot{r}_z'')^2}$$

Задача.

Точка движется согласно уравнению  $\vec{r} = t^2 \vec{i} + 2t \vec{j} + 3 \vec{k}$ . Определить модуль скорости точки в момент времени  $t = 1$  с.

Решение.

Векторный способ задания движения точки:  $\vec{r} = t^2 \vec{i} + 2t \vec{j} + 3 \vec{k}$



$$\vec{r} = t^2 \vec{i} + 2t \vec{j} + 3 \vec{k}$$

$$v_x = (\dot{r}_x)^1 = (2t)^1 = 2 \text{ см/с}; v_y = (\dot{r}_y)^1 = (2)^1 = 2 \text{ см/с};$$

$$v_z = (\dot{r}_z)^1 = (3)^1 = 0;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(2t)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{4t^2 + 4};$$

$$\sqrt{4 \cdot 1^2 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$v(t) = \dots \text{ cm/c}^2;$$

$$\text{Ответ: } v(t = 1 \text{ c}) = 6,32 \text{ cm/c}^2.$$

### ***Решить самостоятельно***

Задача 1. Заданы уравнения движения точки  $x = 2t$ ,  $y = t$ . Определить время  $t$ , когда расстояние от точки до начала координат достигнет 10 м. (4,47)

Задача 2. Даны уравнения движения точки  $x = t^2$ ,  $y = \sin \Pi t$ ,  $z = \cos \Pi t$ . Определить модуль скорости точки в момент времени  $t = 1$  с. (3,72)

Задача 3. Точка движется по прямой с постоянным ускорением  $a = 0,3$  м/с<sup>2</sup>. Определить начальную скорость точки, если через 6 с скорость точки стала равной 3 м/с. (1,2)

Задача 4. Скорость точки задана уравнением  $v = 0,2$  t. Определить прямолинейную координату точки в момент времени  $t = 10$  с, если при  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$ . (10)

### ***Вопросы для обсуждения***

1. Координатный способ задания движения точки?
2. Векторный способ задания движения точки?
3. Скорость точки при координатном способе задания движения точки?
4. Скорость точки при векторном способе задания движения точки?
5. Ускорение точки при координатном способе задания движения точки?
6. Ускорение точки при векторном способе задания движения точки?
7. Скорость точки?
8. Ускорение точки?
9. Прямолинейное ускоренное движение точки. Основные кинематические характеристики?
10. Прямолинейное равноускоренное движение точки. Основные кинематические характеристики?
11. Прямолинейное замедленное движение точки. Основные кинематические характеристики?
12. Прямолинейное равнозамедленное движение точки. Основные кинематические характеристики?
13. Прямолинейное равномерное движение точки?
14. Криволинейное равномерное движение точки. Основные кинематические характеристики?
15. Криволинейное замедленное движение точки. Основные кинематические характеристики?
16. Криволинейное равнозамедленное движение точки. Основные кинематические характеристики?
17. Криволинейное ускоренное движение точки. Основные кинематические характеристики?
18. Криволинейное равноускоренное движение точки. Основные кинематические характеристики?

## Литература

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

### 17. Скорость, ускорение точки при естественном способе задания движения точки. Классификация движений точки

**Цель занятия:** естественный способ задания движения точки, скорость и ускорение точки, касательное и нормальное ускорение точки, радиус кривизны траектории, классификация движений.

**Организационная форма:** решение задач.

#### Методические рекомендации

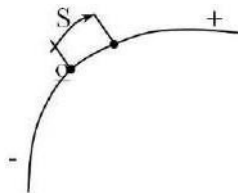
1).  $S=S(t)$ - закон движения при естественном способе задания движения точки.

2). «+» и «-» направления движения точки.

3). Точка  $o$  – точка начала отсчета.

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt}; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau; \quad |a| = \sqrt{(a_n)^2 + (a_\tau)^2};$$



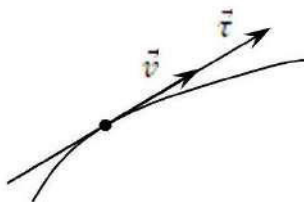
Задача 1. Скорость точки задана уравнением  $v = 0,2t$ . Определить криволинейную координату точки  $S$  в момент времени  $t=10c$ , если при  $t_0=10c$ ,  $S_0=0$ .

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = v dt$$

$$\rightarrow \int_{S_0=0}^S ds$$

$$= 0,2 \int_{t_0=0}^{t=10c} t dt$$

$$\rightarrow S \int_0^S = \frac{0,2t^2}{2} \int_0^{10} \rightarrow S = 0,1t^2 = 0,1 \cdot 10^2 = 10 \text{ м}$$



Ответ:  $S=10\text{м}$

Задача 2. Точка движения согласно уравнению  $S = 0,6t^2$ . Определить полное ускорение точки в момент времени  $t=2c$ , если радиус кривизны траектории  $\rho = 15\text{м}$ .



$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = (v)' = (0,6t^2)'' = (1,2t)' = 1,2 \frac{m}{c^2} > 0(const) - \text{точка}$$

движется криволинейно равноускоренно.  $\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{a}_{\tau}$ ;

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(s')^2}{\rho} = \frac{((0,6t^2)')^2}{15} = \frac{(1,2t)^2}{15} = \frac{(1,2 \cdot 2)^2}{15} = 0,38 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{(a_n)^2 + (a_{\tau})^2} = \sqrt{(1,2)^2 + (0,38)^2} = \sqrt{15,84} = 1,26 \text{ м/с}^2;$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_{\tau};$$

Ответ:  $a = 1.26 \text{ м/с}^2$ .

### ***Решить самостоятельно***

Задача 1. Точка движется по кривой со скоростью  $v=0,5t$ ; определить ее координату  $S$  в момент времени  $t=10\text{с}$ , если при  $t_0=0$  координата  $S_0=0(25)$ .

Задача 2. Точка движется по окружности согласно уравнению  $S = t^3 + 2t^2 + 3t$ . Определить криволинейную координату точки в момент времени когда ее касательное ускорение  $a_{\tau} = 16 \text{ м/с}^2$

Задача 3. По окружности радиуса  $r=7\text{м}$  движется точка согласно уравнению  $S = 0,3t^2$ . Определить время, когда нормальное ускорение точки  $a_n = 1,5 \text{ м/с}^2$  (5.40)

### ***Вопросы для обсуждения***

1. Естественный способ задания движения точки?
2. Скорость точки при естественном способе задания движения точки?
3. Ускорение точки при естественном способе задания движения точки?
4. Нормальное ускорение точки?
5. Касательное ускорение точки?
6. Криволинейное равномерное движение точки? Основные кинематические характеристики?
7. Криволинейное замедленное движение точки? Основные кинематические характеристики?
8. Криволинейное равнозамедленное движение точки? Основные кинематические характеристики?
9. Криволинейное ускоренное движение точки? Основные кинематические характеристики?

### ***Литература***

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

## 18. Определение траектории, положение точки на траектории, скорости точки, ускорения точки, нормального и касательного ускорения точки, радиуса кривизны траектории

**Цель занятия:** Способы задания движения точки, определение траектории, положение точки на траектории, скорости точки, ускорения точки, нормального и касательного ускорения точки, радиуса кривизны траектории.

**Организационная форма:** решение задач.

### *Методические рекомендации*

Для задания движения точки можно применять один из следующих трех способов:

1) векторный, 2) координатный, 3) естественный (или траекторный).  
2. *Координатный способ задания движения точки.*

Чтобы знать закон движения точки, т.е. её положение в пространстве в любой момент времени, надо знать значения координат точки для каждого момента времени, т.е. знать зависимости

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t) \quad (53)$$

Эти уравнения и есть уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Они определяют закон движения точки при координатном способе задания движения.

Если движение происходит в одной и той же плоскости, то, приняв эту плоскость за плоскость  $Oxy$ , получим

$$x = f_1(t), y = f_2(t) \quad (54)$$

При прямолинейном движении точки, если вдоль ее траектории направить координатную ось  $Ox$ , движение будет определяться одним уравнением

$$x = f(t) \quad (55)$$

Это и есть закон прямолинейного движения.

*Вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от соответствующего перемещения по времени.*

*Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от соответствующего перемещения точки по времени.*

*Проекция ускорения точки на касательную равна первой производной от числового значения скорости или второй производной от расстояния по времени, а проекция ускорения на главную нормаль равна квад-*

*рату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке кривой.*

Задача. Точка В движется в плоскости ХУ. Закон движения точки задан уравнениями  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$ , где  $x$  и  $y$  выражены в сантиметрах,  $t$  – в секундах.

По заданным уравнениям движения точки В найти уравнение траектории точки; для момента времени  $t$  (указанного в таблице) найти положение точки на траектории, определить её скорость, ускорение, касательное и нормальное ускорения, радиус кривизны в соответствующей точке траектории. Необходимые для решения данные приведены в таблице 1.

Таблица 1

|    |                                                |                                                |          |
|----|------------------------------------------------|------------------------------------------------|----------|
| 1  | $x = 6 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) - 3$   | $y = 12 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$      | $t = 1c$ |
| 2  | $x = 4 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$       | $y = 6 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$       | $t = 1c$ |
| 3  | $x = 2 - 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$   | $y = -3 \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$    | $t = 1c$ |
| 4  | $x = 2 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$       | $y = 4 - 3 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$   | $t = 1c$ |
| 5  | $x = 2 - 3 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$   | $y = 6 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$       | $t = 1c$ |
| 6  | $x = 3 - 3 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$   | $y = 6 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$       | $t = 1c$ |
| 7  | $x = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$       | $y = 2 - 3 \sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ | $t = 1c$ |
| 8  | $x = 6 \cos^2\left(\frac{\pi t}{3}\right) - 2$ | $y = 2 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$       | $t = 1c$ |
| 9  | $x = 1 - 3 \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ | $y = 2 - 3 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$   | $t = 1c$ |
| 10 | $x = 6 \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) - 1$ | $y = 3 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$       | $t = 1c$ |
| 11 | $x = 2 - 4 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$   | $y = 8 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) + 3$   | $t = 1c$ |
| 12 | $x = 4 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) - 3$   | $y = 1 - 6 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$   | $t = 1c$ |
| 13 | $x = 3 - 8 \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ | $y = 4 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) - 2$   | $t = 1c$ |

|    |                                                |                                                |          |
|----|------------------------------------------------|------------------------------------------------|----------|
| 14 | $x = 8\cos^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) - 1$  | $y = 2 - 4\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$    | $t = 1c$ |
| 15 | $x = 2 - 6\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$  | $y = 1 - 3\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$    | $t = 1c$ |
| 16 | $x = 6\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) - 2$   | $y = 4 - 6\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$   | $t = 1c$ |
| 17 | $x = 3 - 3\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$   | $y = 9\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) - 2$   | $t = 1c$ |
| 18 | $x = 6\cos^2\left(\frac{2\pi t}{3}\right) - 4$ | $y = 1 - 3\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$   | $t = 1c$ |
| 19 | $x = 4 - 6\sin^2\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$ | $y = 3\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) - 2$   | $t = 1c$ |
| 20 | $x = 3\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) - 2$   | $y = 1 - 3\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$   | $t = 1c$ |
| 21 | $x = 2\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) - 2$    | $y = 2 - 3\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$  | $t = 1c$ |
| 22 | $x = 6\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) - 2$    | $y = 12\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 3$   | $t = 1c$ |
| 23 | $x = 3 + 3\sin^2\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$ | $y = 1 - 6\cos^2\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$ | $t = 1c$ |
| 24 | $x = 4 - 3\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$   | $y = 3\sin^2\left(\frac{2\pi t}{3}\right) - 3$ | $t = 1c$ |
| 25 | $x = 4 - 4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$    | $y = 8\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) - 3$  | $t = 1c$ |
| 26 | $x = 2 - 4\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$    | $y = 16\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) - 2$   | $t = 1c$ |
| 27 | $x = 1 - 4\cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$   | $y = 2\sin\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$       | $t = 1c$ |
| 28 | $x = 3 - 6\sin\left(\frac{5\pi t}{8}\right)$   | $y = 12\cos\left(\frac{5\pi t}{8}\right) - 2$  | $t = 1c$ |
| 29 | $x = 2 - 4\sin\left(\frac{3\pi t}{8}\right)$   | $y = 3 + 8\cos\left(\frac{3\pi t}{8}\right)$   | $t = 1c$ |
| 30 | $x = 3 - 6\cos\left(\frac{\pi t}{8}\right)$    | $y = 2 + 8\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$    | $t = 1c$ |

|    |                                    |                                     |                    |
|----|------------------------------------|-------------------------------------|--------------------|
| 31 | $x = 4\sin(\frac{\pi t}{8})$       | $y = 4 - 8\sin(\frac{\pi t}{8})$    | $t = 1c$           |
| 32 | $x = 8\cos(\frac{\pi t}{8})$       | $y = 8 - 8\sin(\frac{\pi t}{16})$   | $t = 1c$           |
| 33 | $x = 2 + 4\sin(\frac{\pi t}{3})$   | $y = 4 - 16\cos(\frac{\pi t}{8})$   | $t = 1c$           |
| 34 | $x = -2t^2 + 3$                    | $y = -5t$                           | $t = \frac{1}{2}c$ |
| 35 | $x = 4\cos^2(\frac{\pi t}{3}) + 2$ | $y = 4\sin^2(\frac{\pi t}{3})$      | $t = 1c$           |
| 36 | $x = -\cos(\frac{\pi t^2}{3}) + 3$ | $y = \sin(\frac{\pi t^2}{3}) - 1$   | $t = 1c$           |
| 37 | $x = 4t + 4$                       | $y = \frac{-4}{(t+1)}$              | $t = 2c$           |
| 38 | $x = 2\sin(\frac{\pi t}{3})$       | $y = 3\cos(\frac{\pi t}{3}) + 4$    | $t = 1c$           |
| 39 | $x = 3t^2 + 2$                     | $y = -4t$                           | $t = \frac{1}{2}c$ |
| 40 | $x = 3t^2 - t + 1$                 | $y = 5t^2 - \frac{5}{3}t - 2$       | $t = 1c$           |
| 41 | $x = 7\sin(\frac{\pi t^2}{6}) + 3$ | $y = 2 - 7\cos(\frac{\pi t^2}{6})$  | $t = 1c$           |
| 42 | $x = \frac{-3}{(t+2)}$             | $y = 3t + 6$                        | $t = 2c$           |
| 43 | $x = -4\cos(\frac{\pi t}{3})$      | $y = -2\sin(\frac{\pi t}{3}) - 3$   | $t = 1c$           |
| 44 | $x = -4t^2 + 1$                    | $y = -3t$                           | $t = \frac{1}{2}c$ |
| 45 | $x = 5\sin^2(\frac{\pi t}{6})$     | $y = -5\cos^2(\frac{\pi t}{6}) - 3$ | $t = 1c$           |
| 46 | $x = 5\cos(\frac{\pi t^2}{3})$     | $y = -5\sin(\frac{\pi t^2}{3})$     | $t = 1c$           |
| 47 | $x = -2t - 2$                      | $y = \frac{-2}{(t+1)}$              | $t = 2c$           |

|    |                                      |                                      |                    |
|----|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------|
| 48 | $x = 4 \cos(\frac{\pi t}{3})$        | $y = -3 \sin(\frac{\pi t}{3})$       | $t = 1c$           |
| 49 | $x = 3t$                             | $y = 4t^2 + 1$                       | $t = \frac{1}{2}c$ |
| 50 | $x = 7 \sin^2(\frac{\pi t}{6}) - 5$  | $y = -7 \cos^2(\frac{\pi t}{6})$     | $t = 1c$           |
| 51 | $x = 1 + 3 \cos(\frac{\pi t^2}{3})$  | $y = 3 \sin(\frac{\pi t^2}{3}) + 3$  | $t = 1c$           |
| 52 | $x = -5t^2 - 4$                      | $y = 3t$                             | $t = 1c$           |
| 53 | $x = 2 - 3t - 6t^2$                  | $y = 3 - \frac{3}{2}t - 3t^2$        | $t = 0c$           |
| 54 | $x = 6 \sin(\frac{\pi t^2}{6}) - 2$  | $y = 6 \cos(\frac{\pi t^2}{6}) + 3$  | $t = 1c$           |
| 55 | $x = 7t^2 - 3$                       | $y = 5t$                             | $t = \frac{1}{2}c$ |
| 56 | $x = 3 - 3t^2 + t$                   | $y = 4 - 5t^2 + \frac{5t}{3}$        | $t = 1c$           |
| 57 | $x = -4 \cos(\frac{\pi t}{3}) - 1$   | $y = -4 \sin(\frac{\pi t}{3})$       | $t = 1c$           |
| 58 | $x = -6t$                            | $y = -2t^2 - 4$                      | $t = 1c$           |
| 59 | $x = 8 \cos^2(\frac{\pi t}{6}) + 2$  | $y = -8 \sin^2(\frac{\pi t}{6}) - 7$ | $t = 1c$           |
| 60 | $x = -3 - 9 \sin(\frac{\pi t^2}{6})$ | $y = -9 \cos(\frac{\pi t^2}{6}) + 5$ | $t = 1c$           |
| 61 | $x = -4t^2 + 1$                      | $y = -3t$                            | $t = 1c$           |
| 62 | $x = 5t^2 + \frac{5t}{3} - 3$        | $y = 3t^2 + t + 3$                   | $t = 1c$           |
| 63 | $x = 2 \cos(\frac{\pi t^2}{3}) - 2$  | $y = -2 \sin(\frac{\pi t^2}{3}) + 3$ | $t = 1c$           |

Указания: Задача относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул касательного и нормального ускорения точки. В некоторых вариантах задачи

при определении траектории или при последующих расчётах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1; \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Задача.

Исходные данные:  $x = 4 \cos(\pi t/3)$ ;  $y = -3 \sin(\pi t/3)$ ;  $t_c=1$  (х и у – в см, t – в с.)

Решение:

1. Уравнения движения точки  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$  можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнение траектории движения точки нужно исключить время t из данных уравнений движения:

$$\begin{cases} x/4 = \cos(\pi t/3); \\ y/3 = -\sin(\pi t/3); \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2)/16 = \cos^2(\pi t/3); \\ y^2/9 = \sin^2(\pi t/3); \end{cases}$$

Сложив эти уравнения (почленно – левые и правые части уравнений) получим:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 - \text{уравнение эллипса.}$$

Координаты центра эллипса  $x_c = 0$ ,  $y_c = 0$ . Радиус большой оси эллипса  $R_x = 4$  см, радиус малой оси эллипса  $r_y = 3$  см. В масштабе 1:1 на миллиметровке (рис. 94) строим эллипс. Чтобы определить, весь эллипс или какая – то его часть является траекторией движения точки, удовлетворяющей заданным уравнениям движения точки, определим пограничные условия:

$$\cos(\pi t/3) = 1 \Rightarrow x_{\max} = 4; \cos(\pi t/3) = -1 \Rightarrow x_{\min} = -4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$\sin(\pi t/3) = 1 \Rightarrow y_{\min} = -3; \sin(\pi t/3) = -1 \Rightarrow y_{\max} = 3 \Rightarrow -3 \leq y \leq 3$$

Определяем положение точки В в момент времени t:

При  $t=1$  с.

$$x = 4 \cos(\pi/3) = 4 \cdot 1/2 = 2 \text{ см.}$$

$$y = -3 \sin(\pi/3) = 3 \cdot \sqrt{3}/2 = -2,60 \text{ см.}$$

Момент начала движения  $t_0 = 0$

$$X_0 = 4 \cdot \cos 0 = 4 \cdot 1 = 4 \text{ см.}$$

$$Y_0 = -3 \sin 0 = -3 \cdot 0 = 0 \text{ см.}$$

Итак, эллипс, изображенный на рис. 94 является траекторией движения точки, удовлетворяющей заданным параметрическим уравнениям движения.

2. Скорость точки В<sub>1</sub> находим по её проекциям на координатные оси:

$$V_x = dx/dt = (4\cos(\pi t/3))' = 4 \cdot (-\sin(\pi t/3)) \cdot \pi/3 = -(4\pi)/3 \cdot \sin(\pi t/3);$$

$$V_x(t) = -((4 \cdot 3,14)/3) \cdot \sqrt{3}/2 = -3,63 \text{ см/с;}$$

$$V_y = dy/dt = (-3\sin(\pi t/3))' = -(3 \cdot \cos(\pi t/3)) \cdot \pi/3 = -\pi \cos(\pi t/3);$$

$$V_y(t) = -3,14 \cdot (1/2) = -1,57 \text{ см/с}$$

По найденным проекциям определяем модуль скорости точки В:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{-((4\pi)/3) \cdot \sin(\pi t/3))^2 + (-\pi \cdot \cos(\pi t/3))^2}$$



$$V_{(t)} = \sqrt{(-3,63)^2 + (-1,57)^2} = 3,96 \text{ см/с}$$

По найденным проекциям  $V_x$  и  $V_y$  строим вектор скорости точки  $B_1$  –  $\vec{V}_{(t)}$  на рис. 94. в масштабе 1:1.

3. Ускорение точки  $B_1$  находим аналогично:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = (- (4\pi)/3 \cdot \sin(\pi t/3))' = (- (4\pi)/3) \cdot \pi/3 \cdot \cos(\pi t/3) =$$

$$-\frac{4\pi^2}{9} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right);$$

$$a_{x(t)} = \frac{-4 \cdot 3,14^2}{9} \cdot \frac{1}{2} = -2,19 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = (-\pi \cos(\pi t/3))' = -\pi \cdot \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) = -\pi^2 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right);$$

$$a_{y(t)} = \frac{3,14^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,85 \text{ см/с}^2;$$

По найденным проекциям  $a_{x(t)}$  и  $a_{y(t)}$  определяем модуль ускорения точки  $B_1$ :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(-\frac{4\pi^2}{9} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right)^2 + \left(\frac{\pi^2}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right)^2};$$

$$a_{(t)} = \sqrt{a_{x(t)}^2 + a_{y(t)}^2} = \sqrt{(-2,19)^2 + (2,85)^2} = 3,59 \text{ см/с}^2;$$

По найденным проекциям  $a_{x(t)}$  и  $a_{y(t)}$  на рис. 94 в масштабе 1:1 строим вектор ускорения точки  $B_1$  –  $\vec{a}_{(t)}$ .

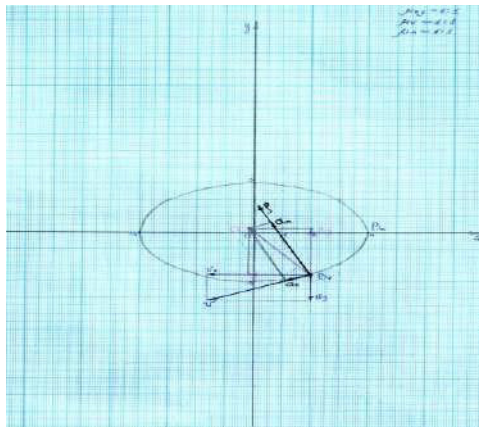


Рис. 94

4. Тангенциальное ускорение точки  $B_1$  находим согласно основного определения:

$$a\tau = \frac{dV}{dt} = \left( \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} \right)' = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y}{V};$$

$$a\tau_{(t)} = \frac{-3,63 \cdot (-2,19) + (-1,57) \cdot 2,85}{3,96} = 0,88 \text{ см/с}^2$$

$a\tau_{(t)} = 0,88 \text{ см/с}^2 > 0 \Rightarrow$  движение точки  $B_1$  криволинейное ускоренное  $\Rightarrow \overline{V_{(t)}} \uparrow \uparrow \overline{a\tau_{(t)}}$  (рис. 94)

5. Нормальное ускорение точки  $B_1$  находим:

$$|a| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \Rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \Rightarrow$$

$$a_{n(t)} = \sqrt{(3,59)^2 - (0,88)^2} = 3,48 \text{ см/с}^2$$

Вектор  $\overline{a_{n(t)}} \perp \overline{a\tau_{(t)}}$  к центру кривизны (рис. 94)

6. Радиус кривизны траектории в точке  $B_1$ , находим из условия:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^2}{a_n} \Rightarrow \rho = \frac{(3,96)^2}{3,48} = 4,51 \text{ см}$$

Результаты расчётов основных кинематических параметров движения точки  $B_1$  для заданного момента времени  $t = 1 \text{ с}$  приведены в таблице 2.

Таблица 2

| Координаты,<br>см. |       | Скорость,<br>см/с |                |      | Ускорение,<br>см/с <sup>2</sup> |                |      |      |                | Радиус<br>кривизны |
|--------------------|-------|-------------------|----------------|------|---------------------------------|----------------|------|------|----------------|--------------------|
| x                  | y     | V <sub>x</sub>    | V <sub>y</sub> | V    | a <sub>x</sub>                  | a <sub>y</sub> | a    | aτ   | a <sub>n</sub> | ρ                  |
| 2,0                | -2,60 | -3,63             | -1,57          | 3,96 | -2,19                           | 2,85           | 3,59 | 0,88 | 3,48           | 4,51               |

### Вопросы для обсуждения

1. В чём состоит векторный способ задания движения точки?
2. Как задаётся движение точки координатным способом?
3. Как по уравнениям движения точки в координатной форме определить траекторию движения точки?
4. В чём заключается естественный способ задания движения точки?
5. Что такое годограф переменного вектора?
6. Что называется траекторией движения точки?
7. Классификация траекторий?
8. Какие оси называют естественными осями координат при описании движения точки?
9. Что называется скоростью точки?
10. Какая зависимость существует между радиус-вектором движу-

щейся точки и вектором скорости этой точки?

11. Как определить проекцию вектора скорости на одну из координатных осей при векторном способе задания движения?
12. Как определяется модуль и направление скорости при векторном способе задания движения?
13. Как связаны проекция вектора скорости на одну из координатных осей и соответствующая координата движущейся точки?
14. Как определяется модуль и направление скорости при координатном способе задания движения точки?
15. Как связаны между собой векторный и координатный способы определения скорости точки?
16. Как определяется скорость при естественном способе задания движения точки?
17. Что вы понимаете под алгебраической скоростью?
18. В каком направлении происходит движение точки, если алгебраическая скорость: а) положительна? б) отрицательна?
19. Дайте определение ускорения точки?
20. Как определяется ускорение при векторном способе задания движения точки?
21. Как определяется модуль и направление ускорения при координатном способе задания движения точки?
22. Что такое естественная система координат? Нарисуйте эту систему координат и назовите оси естественной системы координат?
23. Как определяется ускорение точки при задании её движения естественным способом? Какая формула при этом используется?
24. Что такое кривизна и радиус кривизны траектории точки?
25. Назовите проекции ускорения точки на естественные оси координат? По каким формулам они вычисляются?
26. Напишите формулу для определения модуля полного ускорения точки при естественном способе задания движения точки?
27. Что характеризует касательное ускорение, нормальное ускорение? При каком движении отсутствует: касательное ускорение? нормальное?
28. Как определить, в каком случае движение точки будет ускоренным, замедленным?
29. Вывести формулу для вычисления ускорения, если движение точки задано уравнениями движения в координатной форме?
30. Как направлено нормальное ускорение по отношению к траектории? В каких точках траектории изменяется направление нормального ускорения?
31. Сделайте классификацию движений точки по скоростям и ускорениям ее движения?

### *Литература*

Основная: 1–4.

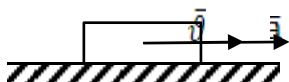
Интернет-ресурсы: 1.

## 19. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

**Цель занятия:** поступательное движение твердого тела, вращательное движение твердого тела, скорость и ускорение точек твердого тела при вращательном движении, классификация поступательного движения твердого тела, классификация вращательного движения твердого тела.

**Организационная форма:** решение задач.

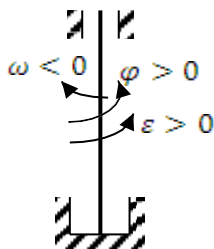
### Методические рекомендации



Поступательное движение твердого тела – любая прямая тела остается параллельной своему первоначальному положению. Траектория тела – прямая.

Ускорение любой точки тела при поступательном движении  $\vec{a} = \vec{a}_\tau$ ;

$$a = a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt}; a_n = \frac{\vartheta^2}{\rho \rightarrow \infty} = 0;$$



$\varphi = \varphi(t)$  – закон вращательного движения твердого тела.

$$\omega = (\varphi)' \text{ [рад/с]}; \varepsilon = (\omega)' = \varphi'' \text{ (рад/с}^2\text{)}$$

$$\vartheta = \omega r; a_n = \omega^2 r; a_\tau = \varepsilon r; \vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau;$$

$$a = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Задача 1.

Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону  $\varphi = t^2$  (рад). Определить скорость и ускорение точки тела на расстоянии  $r=0,5$  м от оси вращения в момент времени  $t=1$  с.

Решение:

$$\vartheta = \omega r;$$

$$\omega = (\varphi)' = (t^2)' = 2t;$$

$$\vartheta(t=1\text{с}) = 2tr = 2 \cdot 1 \cdot 0,5 = 1 \text{ м/с};$$

$$\vec{\vartheta} \perp r \text{ в сторону } \omega$$

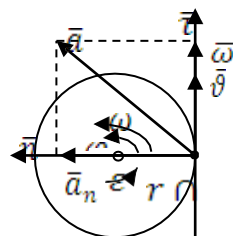
$$a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt} = \varepsilon r;$$

$$\varepsilon = (\omega)' = (2t)' = 2 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} > 0 (\text{const}) \Rightarrow \omega \uparrow \varepsilon - \text{вращение тела}$$

равно-ускоренное

$$a_\tau = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м/с}^2; \vec{a}_\tau \perp r \text{ в сторону } \varepsilon.$$

$$a_n = \omega^2 r = (2t)^2 r = 4 \cdot 1^2 \cdot 0,5 = 2 \text{ м/с}^2;$$



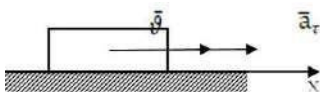
$\bar{a}_n$  вдоль  $r$  от точки к центру кривизны

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau; a = \sqrt{(a_n)^2 + (a_\tau)^2} = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2,83 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

Ответ:  $\vartheta = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}; a = 2,83 \text{ м/с}^2$ .

Задача 2. Тело движется поступательно согласно уравнению  $x=0,4t^2$ .

Определить скорость и ускорение тела при  $t=2\text{с}$ .



$$\vartheta = (x)' = (0,4t^2)' = 0,8t$$

$$\vartheta(t = 2\text{с}) = 0,8 \cdot 2 = 1,6 \text{ м/с}$$

$$\bar{\vartheta} \parallel x; a_n = \frac{\vartheta^2}{\rho \rightarrow \infty} = 0; a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt} = (x)'' = (0,8t)' = 0,8 \text{ м/с}^2 > 0 \Rightarrow$$

тело движется поступательно равноускоренно  $\bar{\vartheta} \uparrow \bar{a}_\tau = \bar{a}$ .

$$a_\tau = a = 0,8 \text{ м/с}^2;$$

Ответ:  $\vartheta = 1,6 \text{ м/с}; a = 0,8 \text{ м/с}^2$ .

### Решить самостоятельно

Задача 1. Тело движется поступательно с ускорением  $a=0,2t$ . Определить момент времени  $t$ , когда скорость тела будет равна  $2 \text{ м/с}$ , если при  $t_0 = 0$  скорость  $\vartheta_0 = 0$ . (4,47)

Задача 2. Тело движется поступательно по прямой ОХ с ускорением  $a_x = 0,7t$ . Определить закон поступательного движения тела  $x=x(t)$  и координату  $x$  точки тела в момент времени  $t=5\text{с}$ , если при  $t_0 = 0$  скорость  $\vartheta_0 = 0$  и координата  $x_0 = 0$ . (14,6)

Задача 3. Тело вращается согласно уравнению  $\omega = 2 - 8t^2$ . Определить время  $t$  остановки тела. (0,5)

Задача 4. Тело вращается по закону  $\varphi = 5 + 3t^2$ ; определить скорость и ускорение точки тела в момент времени  $t=1 \text{ с}$ , если радиус вращения  $r = 10 \text{ см}$ . (60 см/с; 60 см/с<sup>2</sup>).

### Вопросы для обсуждения

1. Поступательное движение твердого тела? Основные кинематические характеристики? Классификация поступательных движений твердого тела?

2. Вращательное движение твердого тела? Основные кинематические характеристики? Классификация вращательных движений твердого тела?

3. Скорость и ускорение точек тела при поступательном движении?

4. Скорость и ускорение точек тела при вращательном движении?

## Литература

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

## 20. Передаточные механизмы

**Цель занятия:** передаточные механизмы, преобразование поступательного и вращательного движения твердого тела в механизмах.

**Организационная форма:** решение задач.

### Методические рекомендации

Передаточные механизмы – это такие механизмы, в которых передается движение от ведущего звена к ведомому. Основная характеристика передаточного механизма – передаточное число.

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}, \text{ где } \omega_1 \text{ и } \omega_2 - \text{угловая скорость ведущего и ведомого валов;}$$

$r_1$  и  $r_2$  – радиусы ведомого и ведущего валов;

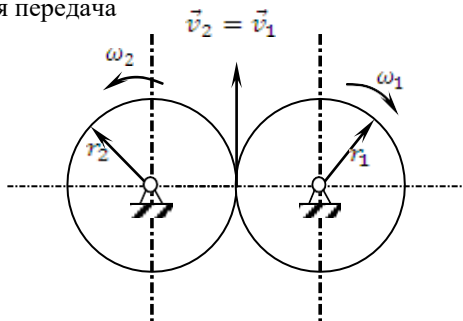
$z_1$  и  $z_2$  – число зубьев ведомого и ведущего зубчатых колес.

Например: внешняя зубчатая передача

$$v = \omega r$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2; \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$



Задача.

Груз 1 поднимается с помощью лебедки, барабан 2 которой вращается согласно закону  $\varphi = 5 + t^2$  [рад]. Определить скорость точки М барабана в момент времени  $t=1$ с, если диаметр барабана  $d=0,6$ м.



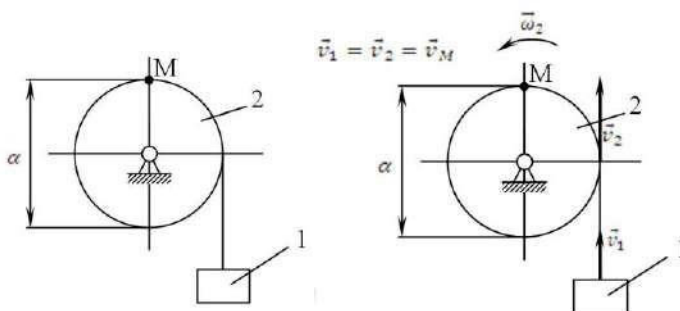


Рис. 96

Решение.

В Лебедке груз 1 связан с барабаном 2 гибкой связью (трос, нить).

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = v_M = \omega_2 r = \omega_2 \cdot \frac{d}{2};$$

$$\omega_2 = (\varphi)' = (5 + t^2)' = 2t \text{ - угловая скорость барабана 2.}$$

$$\omega_1(t = 1\text{с}) = 2 \cdot 1 = 2 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{0,6}{2} = 0,3 \text{ м};$$

$$v_M = 2 \cdot 0,3 = 0,6 \text{ м/с}$$

Ответ:  $v_M = 0,6 \text{ м/с}$

### Решить самостоятельно

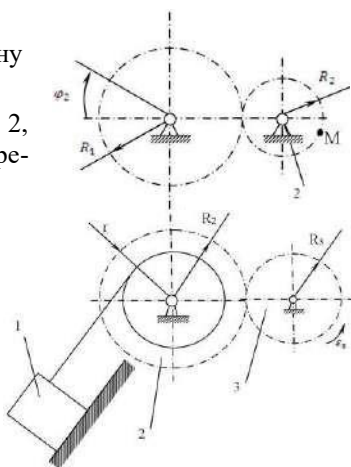
Задача 1.

Колесо 1 вращается согласно закону  $\varphi_1 = 20t$ .

Определить скорость точки М колеса 2, если радиусы колес  $R_1=0,8\text{м}$ ,  $R_2=0,5\text{м}$  и передаточное число механизма  $i$ -? (16; 0,625)

Задача 2.

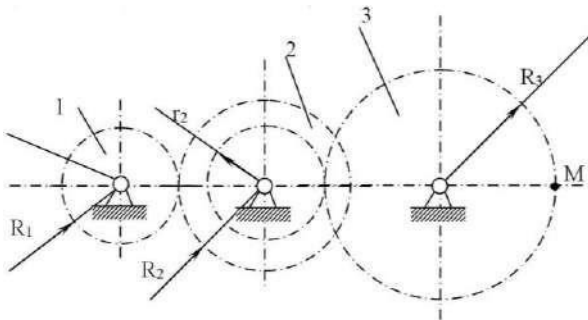
Зубчатое колесо 3 вращается равномерно с угловым ускорением  $\epsilon_3=8\text{рад/с}^2$ . Определить путь, пройденный грузом 1 за промежуток времени  $t=3\text{с}$ , если радиусы  $R_1=0,8\text{м}$ ,  $R_2=0,6\text{м}$ ,  $r=0,4\text{м}$ . Груз 1 в начале движения находился в покое. (10,8)



### Задача 3.

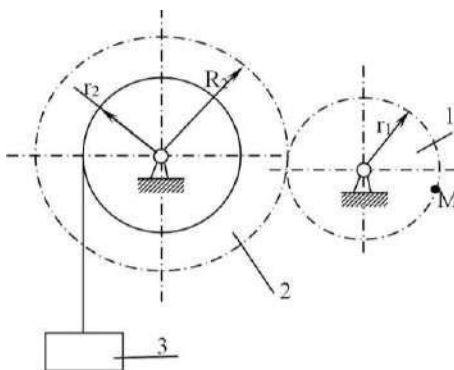
Зубчатое колесо 1 вращается согласно закону  $\varphi_1 = 4t^2$ .

Определить скорость точки М колеса 3 в момент времени  $t=2$ с, если радиусы  $R_1=0,4$ м,  $R_2=0,8$ м,  $r_2=0,4$ м,  $R_3=1$ м. (3,2)



### Задача 4.

Груз 3 движется вниз согласно закону  $S=0,4t_2+8t-1$ (м). Определить скорость точки М колеса 1 в момент времени  $t=1$ с, если радиусы колес равны  $R_2=1,6$ м,  $r_2=0,4$ м,  $r_1=0,8$ м. (35,2)



### Вопросы для обсуждения

1. Передаточные механизмы – внешнее зубчатое зацепление, внутреннее зубчатое зацепление (фрикционная передача), гибкие связи, механизм с кратным зацеплением, механизм с паразитными колесами?
2. Передаточное число?
3. Скорость тела при поступательном движении?
4. Скорость точки тела при вращательном движении?
5. Поступательное движение твердого тела? Основные кинематические характеристики?
6. Вращательные движения твердого тела? Основные кинематические характеристики?

### Литература

Основная: 1–5.

Интернет-ресурсы: 1.

## 21. Кинематический анализ передаточных механизмов

**Цель занятия:** Поступательное движение твёрдого тела – траектория, скорость, ускорение точек тела. Вращательное движение твёрдого тела – траектория, скорость, ускорение точек тела.

**Организационная форма:** решение задач.

### Методические рекомендации

Поступательным называется такое движение твёрдого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению. Скорости и ускорения всех точек тела абсолютно равны.

Скорость точки вращающегося твёрдого тела равно произведению угловой скорости тела на расстояние её до оси вращения.

Полное ускорение точки  $M$  при вращательном движении будет

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1)$$

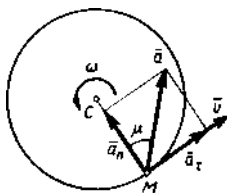
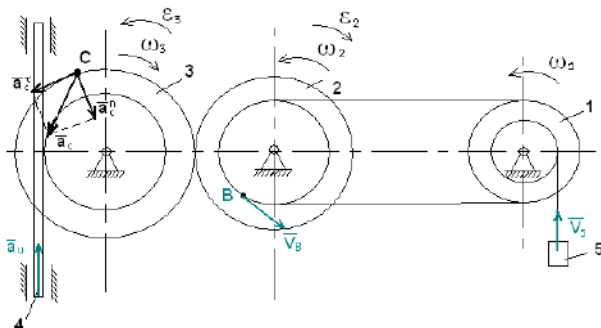


Рис. 97

Задача.

Дано:  $\omega_1 = 5t - 2t^2$ ;  $t_1 = 2c$ ;  $\tau_1 = 2$  см;  $R_1 = 4$  см;  $\tau_2 = 6$  см;  $R_2 = 8$  см;  $\tau_3 = 12$  см;  $R_3 = 16$  см;

Определить:  $U_5$ ;  $U'_B$ ;  $\varepsilon_2$ ;  $\alpha_c$ ;  $\alpha_4$ ;





Решение.

Обозначим скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса  $R_j$ ) – через  $U_j$ , а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса  $\tau_j$ ) – через  $u_i$ .

Рейка 4, ступенчатые колеса 3 радиусами  $R_3$  и  $\tau_3$  и колесо 2 с радиусами  $R_2$  и  $\tau_2$  находятся в зацеплении; колесо 2 связано с колесом 1 ременной передачей. На вал 1 намотана нить с грузом 5  $\Rightarrow U_5 = u_1 = \omega_1 \tau_1 = (5 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2) \cdot 2 = 4 \text{ см/с}$ ;

Так как колеса 2 и 1 связаны ременной передачей,  $\Rightarrow U_1 = u_2 \Rightarrow$

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 \tau_2; U_5 = \omega_2 \tau_2 \Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 = \omega_2 \tau_2 = (5 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2) \cdot 4 = 8 \text{ см/с};$$

$$\omega R = \omega \tau \Rightarrow \omega = \frac{\tau}{R} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_1 R_1}{\tau_2} \right) = \frac{R_1 \cdot (5 - 2t)}{\tau_2} = \frac{R_1 \cdot (5 - 4t)}{\tau_2} - \text{угловое}$$

$$\text{ускорение колеса 2 } \varepsilon_2 \text{ в момент времени } t_1 = 2 \text{ с } \varepsilon_{2(t1)} = \frac{4 \cdot (5 - 4 \cdot 2)}{6} = -2 \text{ с}^2$$

$\varepsilon_2$  и  $\omega_2$  разного направления  $\Rightarrow$  вращения колеса 2 замедленное

Так как колеса 2 и 3 находятся в зацеплении  $\Rightarrow \omega_2 R_2 = \omega_3 R_3$ ;  $U_2 = U_3$

$$\Rightarrow \omega_3 = \frac{\omega_2 R_2}{R_3} = \frac{1,33 \cdot 8}{16} = 0,67 \text{ рад/с};$$

$\varepsilon_3$  – угловое ускорение колеса 3;

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d(\omega_2 R_2)}{dt(R_3)} = \frac{\omega_1 R_1 \cdot R_2}{\tau_2 \cdot R_3} = 4 \cdot 8 \cdot (5 - 4t) = 4 \cdot 8 \cdot (5 - 4 \cdot 2) = -4 \text{ рад/с}^2;$$

$\varepsilon_3$  и  $\omega_3$  разного направления  $\Rightarrow$  вращение колеса 3 – замедленное.

$$\alpha_c^n = \omega_3^2 \cdot R_3 = 0,67^2 \cdot 16 = 0,45 \cdot 16 = 7,18 \text{ см/с}^2;$$

$$\alpha_c^\tau = \varepsilon_3 \cdot R_3 = 4 \cdot 16 = 64 \text{ см/с}^2;$$

$$(\alpha_c) = \sqrt{\alpha_c^{n2} + \alpha_c^{\tau2}} = \sqrt{7,18^2 + 64^2} = \sqrt{51,59 + 4096} = 64,4 \text{ см/с}^2;$$

Так как колесо 3 и рейка 4 находятся в зацеплении, то  $v_3 = v_4 \Rightarrow$

$$\omega_3 R_3 = v_4;$$

$$\frac{dv_4}{dt} = \frac{d(\omega_3 R_3)}{dt} = \left( \omega_2 \cdot R_2 \cdot R \right) \frac{d\omega}{dt} = R_2 \cdot \varepsilon_2 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ см/с}^2;$$

Ответ:  $v_5 = 4 \text{ см/с}$ ;  $v_B = 8 \text{ см/с}$ ;  $\varepsilon_2 = -2 \text{ с}^2$ ;  $\alpha_c = 64,4 \text{ см/с}^2$ ;  $\alpha_4 = 16 \text{ см/с}^2$ ;

Задача (к вариантам 1–30):

Движение груза 1 должно описываться уравнением

$$X = C_2 t^2 + C_1 t + C_0,$$

где  $t$  – время;  $C_2, C_1, C_0$  – некоторые постоянные.

В начальный момент времени ( $t = 0$ ) координата груза должна быть  $x_0$ , а его скорость –  $V_0$ .

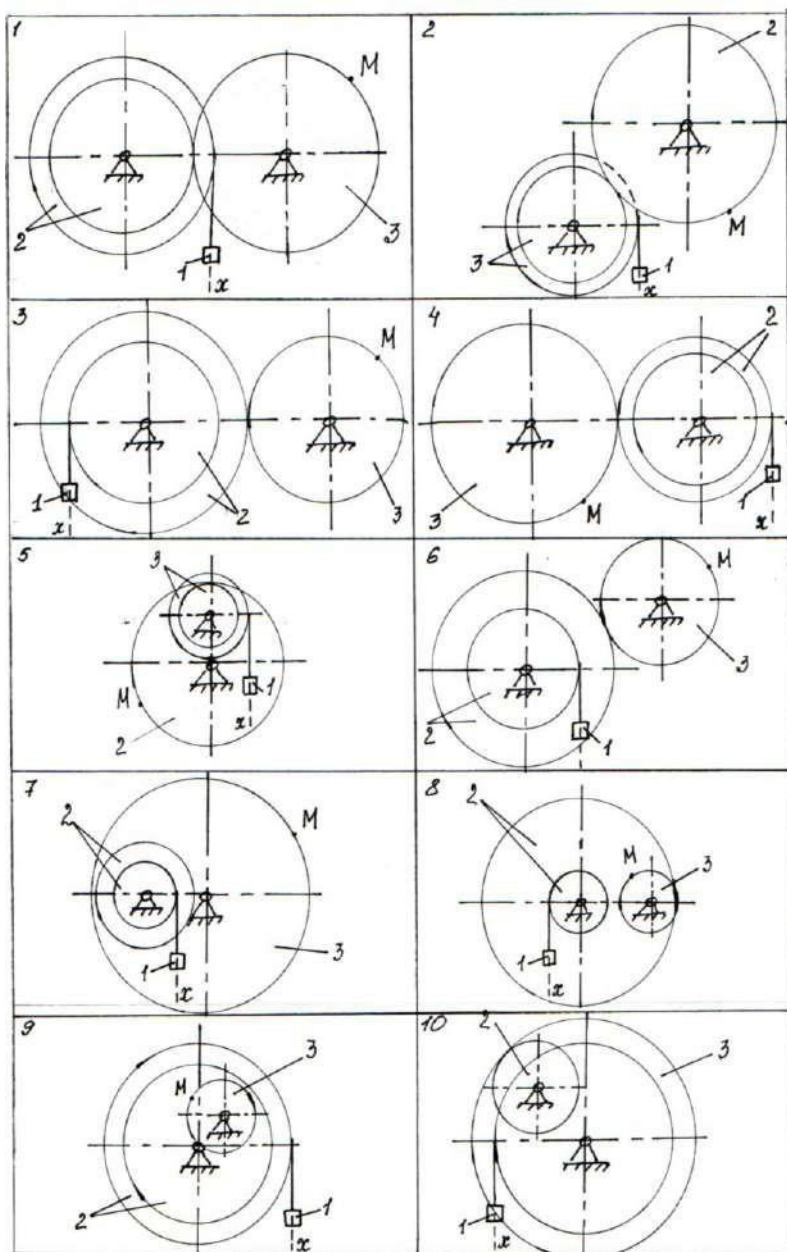
Кроме того, необходимо, чтобы координата груза в момент времени  $t = t_2$  была равна  $x_2$ .

Определить коэффициенты  $C_2$ ,  $C_1$ ,  $C_0$ , при которых осуществляется требуемое движение груза 1. Определить также в момент времени  $t = t_1$  скорость и ускорение груза 1 и точки М одного из колёс механизма.

Схемы механизмов показаны на рис. 99 – 102, а необходимые данные приведены в таблице 1.

Таблица 1

| Номер<br>варианта<br>(рис.<br>68 – 70) | Радиусы, см |       |       |       | Координаты и скорости<br>груза 1 |              |            | Расчетные<br>моменты<br>времени, с |       |
|----------------------------------------|-------------|-------|-------|-------|----------------------------------|--------------|------------|------------------------------------|-------|
|                                        | $R_2$       | $r_2$ | $R_3$ | $r_3$ | $x_0$ , см                       | $v_0$ , см/с | $x_2$ , см | $t_2$                              | $t_1$ |
| 1                                      | 60          | 45    | 36    | —     | 2                                | 12           | 173        | 3                                  | 2     |
| 2                                      | 80          | —     | 60    | 45    | 5                                | 10           | 41         | 2                                  | 1     |
| 3                                      | 100         | 60    | 75    | —     | 8                                | 6            | 40         | 4                                  | 2     |
| 4                                      | 58          | 45    | 60    | —     | 4                                | 4            | 172        | 4                                  | 3     |
| 5                                      | 80          | —     | 45    | 30    | 3                                | 15           | 102        | 3                                  | 2     |
| 6                                      | 100         | 60    | 30    | —     | 7                                | 16           | 215        | 4                                  | 2     |
| 7                                      | 45          | 35    | 105   | —     | 8                                | 5            | 124        | 4                                  | 3     |
| 8                                      | 35          | 10    | 10    | —     | 6                                | 2            | 111        | 3                                  | 2     |
| 9                                      | 40          | 30    | 15    | —     | 10                               | 7            | 48         | 2                                  | 1     |
| 10                                     | 15          | —     | 40    | 35    | 5                                | 3            | 129        | 4                                  | 3     |
| 11                                     | 40          | 25    | 20    | —     | 9                                | 8            | 65         | 2                                  | 1     |
| 12                                     | 20          | 15    | 10    | —     | 5                                | 10           | 179        | 3                                  | 2     |
| 13                                     | 30          | 20    | 40    | —     | 7                                | 0            | 557        | 5                                  | 2     |
| 14                                     | 15          | 10    | 15    | —     | 6                                | 3            | 80         | 2                                  | 1     |
| 15                                     | 15          | 10    | 15    | —     | 5                                | 2            | 189        | 4                                  | 2     |
| 16                                     | 20          | 15    | 15    | —     | 4                                | 6            | 220        | 4                                  | 3     |
| 17                                     | 15          | 10    | 20    | —     | 8                                | 4            | 44         | 2                                  | 1     |
| 18                                     | 20          | 15    | 10    | —     | 3                                | 12           | 211        | 4                                  | 1     |
| 19                                     | 15          | 10    | 20    | —     | 5                                | 10           | 505        | 5                                  | 3     |
| 20                                     | 25          | 15    | 10    | —     | 10                               | 8            | 277        | 3                                  | 1     |
| 21                                     | 20          | 10    | 30    | 10    | 6                                | 5            | 356        | 5                                  | 2     |
| 22                                     | 40          | 20    | 35    | —     | 7                                | 6            | 103        | 2                                  | 1     |
| 23                                     | 40          | 30    | 30    | 15    | 5                                | 9            | 194        | 3                                  | 2     |
| 24                                     | 30          | 15    | 40    | 20    | 9                                | 8            | 105        | 4                                  | 2     |
| 25                                     | 50          | 20    | 60    | —     | 8                                | 4            | 119        | 3                                  | 2     |
| 26                                     | 32          | 16    | 32    | 16    | 6                                | 14           | 862        | 4                                  | 2     |
| 27                                     | 40          | 18    | 40    | 18    | 5                                | 10           | 193        | 2                                  | 1     |
| 28                                     | 40          | 20    | 40    | 15    | 8                                | 5            | 347        | 3                                  | 2     |
| 29                                     | 25          | 20    | 50    | 25    | 4                                | 6            | 32         | 2                                  | 1     |
| 30                                     | 30          | 15    | 20    | —     | 10                               | 7            | 128        | 2                                  | 1     |





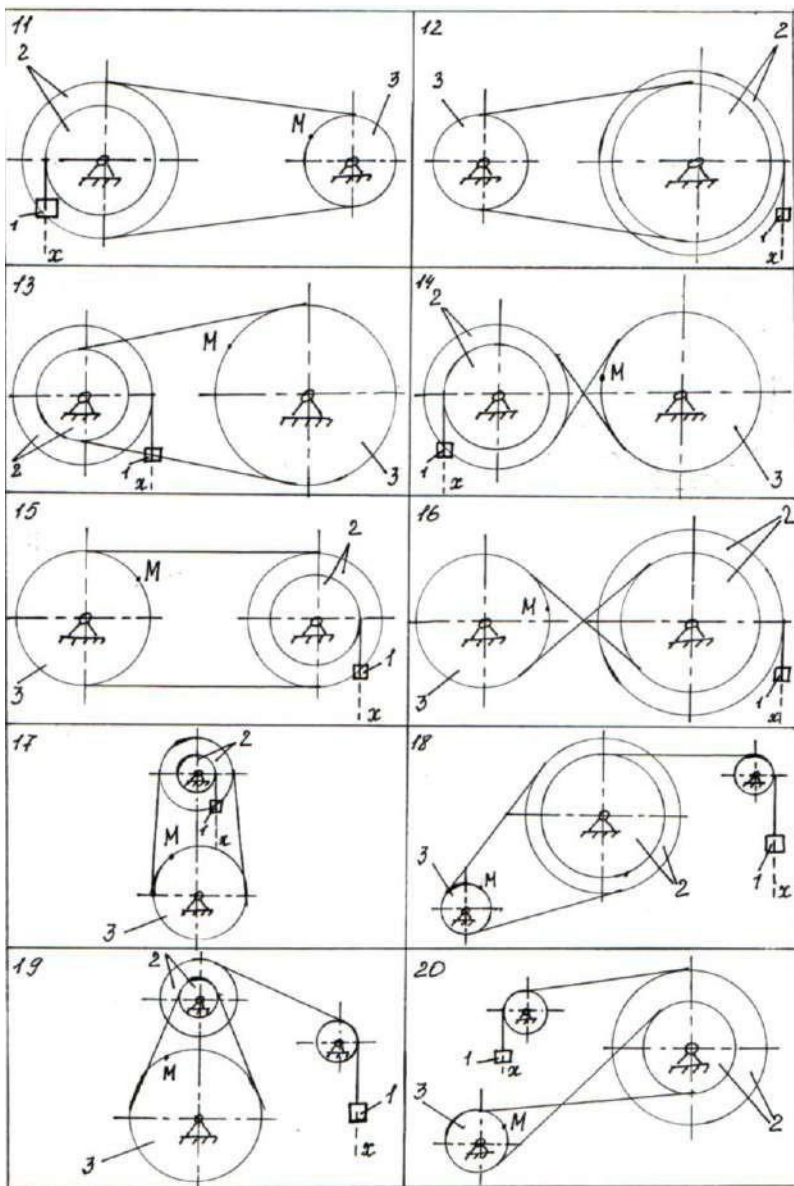


Рис.100

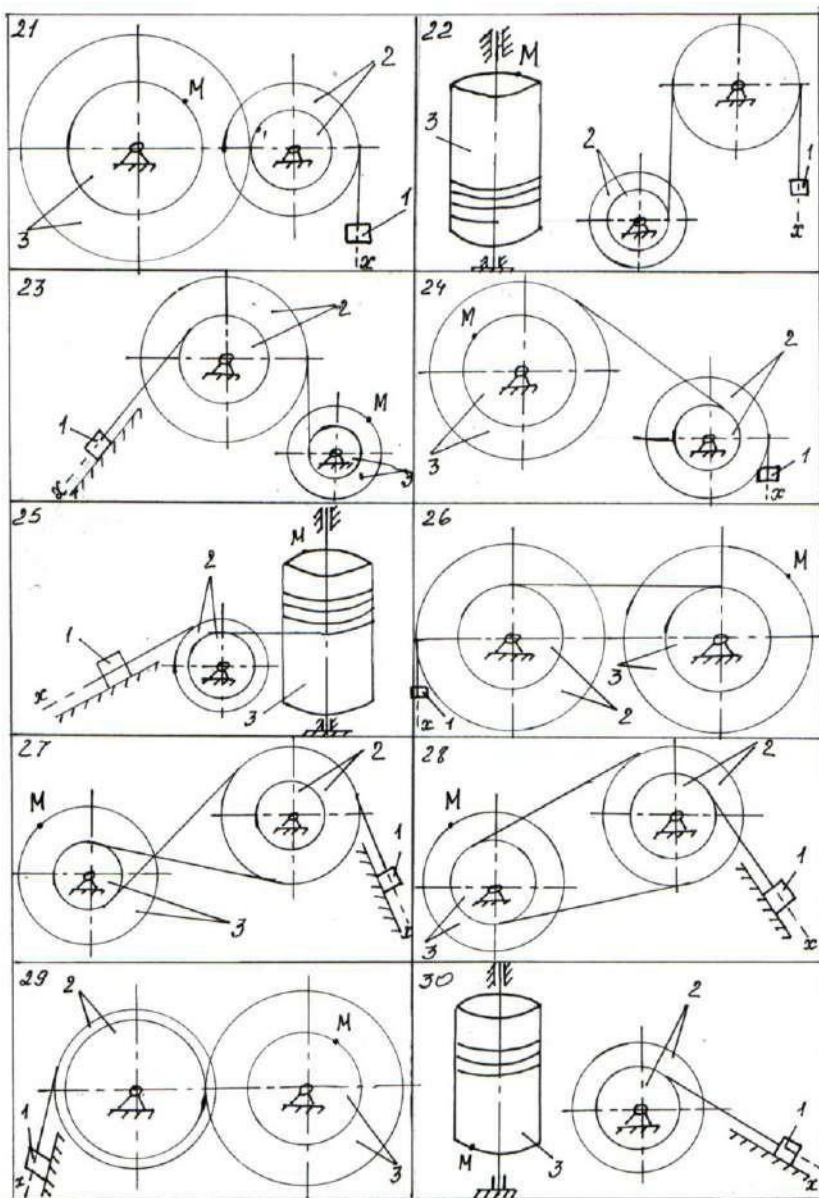


Рис. 101

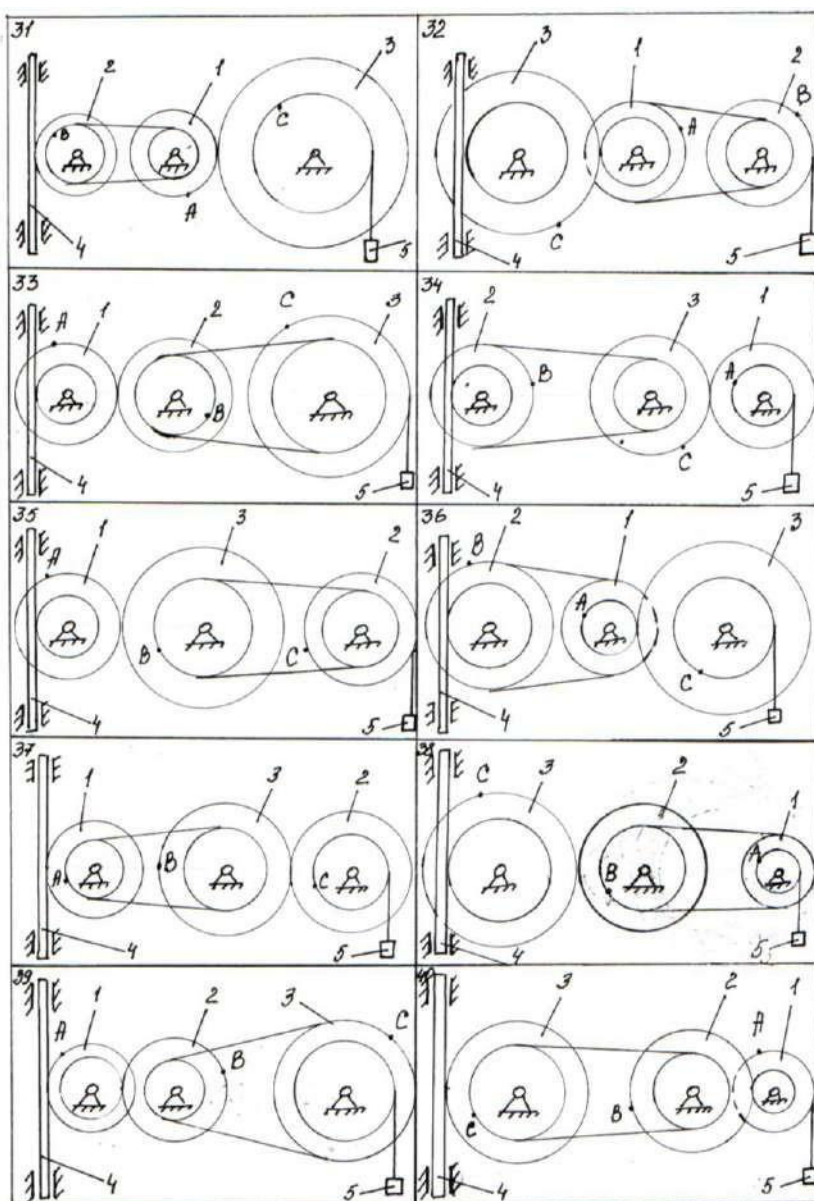


Рис. 102

### ***Вопросы для обсуждения***

1. Определение поступательного движения тела? Примеры поступательного движения тела?
2. Теорему о траекториях, скоростях и ускорениях точек тела, совершающих поступательное движение?
3. Сколько степеней свободы имеет тело, совершающее поступательное движение?
4. Определение вращательного движения тела? Примеры?
5. Сколько степеней свободы имеет тело, вращающееся вокруг неподвижной оси? Закон или уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси?
6. Определение угловой скорости и углового ускорения?
7. Как вычисляются угловая скорость и угловое ускорение?
8. Каким образом вводится понятие о векторах угловой скорости и углового ускорения? Можно ли сказать, что они являются скользящими векторами?
9. Классификацию вращений по угловому ускорению тела?
10. Вывод формулы для вычисления линейной (окружной) скорости точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
11. Составляющие ускорения точек тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси? По каким формулам они вычисляются?
12. Формулу для вычисления полного ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
13. Как можно представить скорость, касательное и нормальное ускорение в виде векторных произведений? Соответствующие выражения?

### ***Литература***

Основная: 1-4.  
Интернет-ресурсы: 1.

## **22. Мгновенный центр скоростей. Определение скоростей точек плоской фигуры**

***Цель занятия:*** плоскопараллельное движение твердого тела, мгновенный центр скоростей, определение скоростей точек плоской фигуры.

***Организационная форма:*** решение задач.

### ***Методические рекомендации***

*Плоскопараллельным (плоским) называется движение твердого тела, при котором траектории всех его точек лежат в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. Мгновенным центром ско-*

ростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Скорость точки равна произведению угловой скорости на величину мгновенного радиуса вращения – расстояния от точки до мгновенного центра скоростей.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Если фигура движется непоступательно, то такая точка в каждый момент времени  $t$  существует и притом единственная. Пусть в момент времени  $t$  точки  $A$  и  $B$  плоскости фигуры имеют скорости  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$ , непараллельные друг другу (рис. 104). Тогда точка  $P$ , лежащая на пересечении перпендикуляров  $Aa$  к вектору  $\vec{V}_A$  и  $Bb$  к вектору  $\vec{V}_B$ , и будет мгновенным центром скоростей, так как  $\vec{V}_P = 0$ .

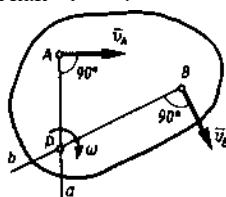


Рис. 104

В самом деле, если  $\vec{V}_P \neq 0$ , то по теореме о проекциях скоростей вектор  $\vec{V}_P$  должен быть одновременно перпендикулярен и  $AP$  (так как  $\vec{V}_A \perp AP$ ), и  $BP$  (так как  $\vec{V}_B \perp BP$ ), что невозможно. Из этой же теоремы видно, что никакая другая точка фигуры в этот момент времени не может иметь скорость, равную нулю.

Если теперь в момент времени  $t$  взять точку  $P$  за полюс. То скорость точки  $A$  будет

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP} = \vec{V}_{AP},$$

так как  $\vec{V}_P = 0$ . Такой же результат получается для любой другой точки фигуры. Тогда, скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей. При этом

$$V_A = \omega \cdot AP \quad (V_A \perp AP); V_B = \omega \cdot BP \quad (V_B \perp BP)$$

и так для любой точки фигуры.

Из этого следует еще, что  $\frac{V_A}{AP} = \omega$  и  $\frac{V_B}{BP} = \omega$ , тогда

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP},$$

т.е. что скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстоянию от мгновенного центра скоростей.

Полученные результаты приводят к следующим выводам:

1. Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей, например,  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$  каких-нибудь двух точек  $A$  и  $B$  плоской фигуры.

2. Для определения скорости любой точки плоской фигуры надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки  $A$  фигуры и направление скорости другой её точки  $B$ .

3. Угловая скорость  $\omega$  плоской фигуры равна в каждой момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к её расстоянию от мгновенного центра скоростей  $P$ :  $\omega = \frac{V_B}{BP}$ . (58)

Найдем, еще другое выражение для  $\omega$  из равенств  $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$  и  $(\vec{V}_{BA} \perp \vec{BA})$  следует, что  $V_{BA} = |\vec{V}_B - \vec{V}_A|$  и  $V_{BA} = \omega \cdot AB$ , откуда

$$\omega = \frac{|\vec{V}_B - \vec{V}_A|}{AB} = \frac{|\vec{V}_B + (-\vec{V}_A)|}{AB} \quad (59)$$

Задача.

Определить скорость точки  $B$  диска, если точка  $A$  диска имеет скорость 2 м/с.

Решение:

Диск катится по горизонтальной опорной плоскости, совершает плоское движение – центр  $C$  диска движется поступательно, диск вращается вокруг мгновенного центра скоростей  $P_{V(мцс)}$

$$v_A = \omega \cdot AP_V = \omega 2r;$$

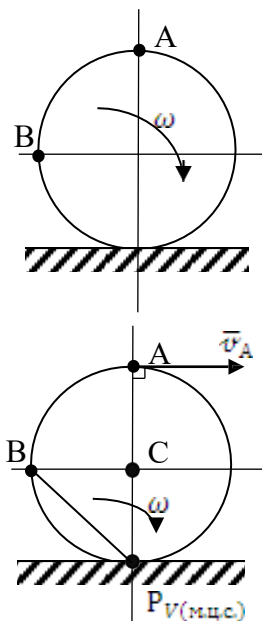
$$2 = \omega 2r \Rightarrow \omega = \frac{2}{2r} = \frac{1}{r} (с^{-1}); \quad v_B = \omega \cdot BR_V;$$

$$BP_V \text{ из } \triangle CBP_V \cdot BP_V = \sqrt{(BC)^2 + (CP_V)^2} =$$

$$v_B = \frac{1}{r} \cdot r\sqrt{2} = \sqrt{2} = 1,41 \text{ м/с}$$

Ответ:  $v_B = 1,41 \text{ м/с}$

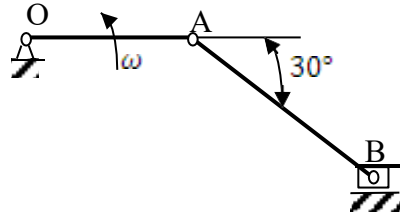
$$= \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2} \text{ м;}$$



**Решить самостоятельно**

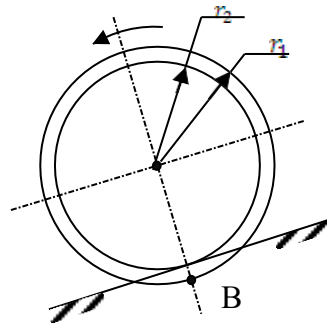
**Задача 1.**

Определить угловую скорость шатуна АВ кривошипно-ползунного механизма в указанном положении, если точка А имеет скорость  $v_A = 3 \text{ м/с}$ , а длина шатуна АВ=3 м. (1,15)



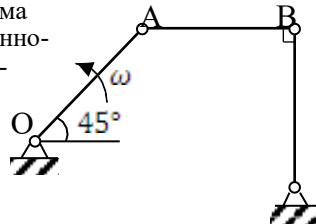
**Задача 2.**

Скорость центра А ступенчатого колеса  $v_A = 2 \text{ м/с}$ , радиусы  $r_1 = 0,6 \text{ м}$ ,  $r_2 = 0,5 \text{ м}$ . Определить скорость точки В. (0,4)



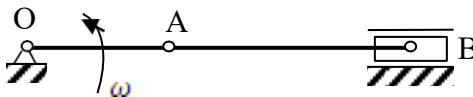
**Задача 3.**

Для изображенного положения механизма определить расстояние от точки А до мгновенного центра скоростей стержня АВ, если кривошип ОА вращается с угловой скоростью  $\omega = 10 \text{ рад/с}$ , а длина АВ = 0,6 м. (0,849)



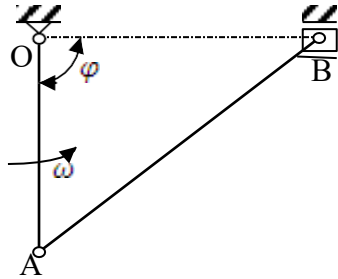
**Задача 4.**

Кривошип ОА вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Определить расстояние от точки А до мгновенного центра скоростей шатуна АВ, если длина кривошипа ОА = 80 мм, а длина шатуна АВ = 160 мм. (0,16)



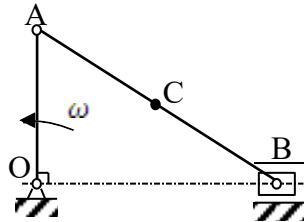
### Задача 5.

Кривошип ОА механизма, вращаясь равномерно, образует в данный момент времени с направлением ОВ угол  $\varphi = 90^\circ$ . Определить расстояние от мгновенного центра скоростей и шатуна АВ до ползуна В. ( $\infty$ )



### Задача 6.

Для данного положения механизма определить скорость точки С – середины шатуна АВ, если угловая скорость  $\omega = 1 \text{ рад/с}$ ; длины звеньев  $OA = 0,3 \text{ м}$ ;  $AB = 0,5 \text{ м}$ . (0,3)



### Задача 7.

Кривошип ОА длиной 0,5 м и шатун АВ длиной 1,57 м в данный момент времени находятся на одной прямой. Определить угловую скорость шатуна, если кривошип вращается с угловой скоростью  $\omega = 120\pi$ . (120)



### Вопросы для обсуждения

1. Определение плоскопараллельного движения твёрдого тела?
2. Определение понятия мгновенного центра скоростей –  $P_v$ ? Частные случаи?
3. Определение скорости любой точки тела, движущегося плоскопараллельно, с использованием мгновенного центра скоростей –  $P_v$ ?
4. Определение понятия мгновенного радиуса вращения?
5. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела?

### Литература

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.



## 23. Определение скоростей точек плоской фигуры

**Цель занятия:** плоскопараллельное движение твердого тела, мгновенный центр скоростей, определение скоростей точек плоской фигуры.

**Организационная форма:** решение задач.

### Методические рекомендации

Плоскопараллельным (плоским) называется движение твердого тела, при котором траектории всех его точек лежат в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Скорость точки равна произведению угловой скорости на величину мгновенного радиуса вращения – расстояния от точки до мгновенного центра скоростей.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Если фигура движется не поступательно, то такая точка в каждый момент времени  $t$  существует и притом единственная. Пусть в момент времени  $t$  точки  $A$  и  $B$  плоскости фигуры имеют скорости  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$ , непараллельные друг другу (рис. 104). Тогда точка  $P$ , лежащая на пересечении перпендикуляров  $Aa$  к вектору  $\vec{V}_A$  и  $Bb$  к вектору  $\vec{V}_B$ , и будет мгновенным центром скоростей, так как  $\vec{V}_P = 0$ .

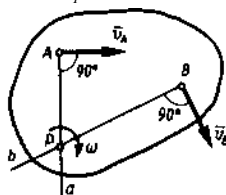


Рис. 105

В самом деле, если  $\vec{V}_P \neq 0$ , то по теореме о проекциях скоростей вектор  $\vec{V}_P$  должен быть одновременно перпендикулярен и  $AP$  (так как  $V_A \perp AP$ ), и  $BP$  (так как  $V_B \perp BP$ ), что невозможно. Из этой же теоремы видно, что никакая другая точка фигуры в этот момент времени не может иметь скорость, равную нулю.

Если теперь в момент времени  $t$  взять точку  $P$  за полюс. То скорость точки  $A$  будет

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP} = \vec{V}_{AP},$$

так как  $\vec{V}_P = 0$ . Такой же результат получается для любой другой точки фигуры. Тогда, *скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей*. При этом

$$V_A = \omega \cdot AP (\vec{V}_A \perp AP); \quad V_B = \omega \cdot BP (\vec{V}_B \perp BP) \quad (60)$$

и так для любой точки фигуры.

Из этого следует еще, что  $\frac{V_A}{AP} = \omega$  и  $\frac{V_B}{BP} = \omega$ , тогда

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}, \quad (61)$$

т. е. что *скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстоянию от мгновенного центра скоростей*.

Полученные результаты приводят к следующим выводам:

1. Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей, например,  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$  каких-нибудь двух точек  $A$  и  $B$  плоской фигуры.

2. Для определения скорости любой точки плоской фигуры надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки  $A$  фигуры и направление скорости другой её точки  $B$ .

3. Угловая скорость  $\omega$  плоской фигуры равна в каждый момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к её расстоянию от мгновенного центра скоростей  $P$ :

$$\omega = \frac{V_B}{BP}. \quad (62)$$

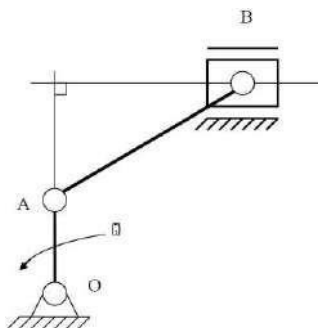
Найдем, еще другое выражение для  $\omega$  из равенств  $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$  и  $(\vec{V}_{BA} \perp \vec{BA})$  следует, что  $V_{BA} = |\vec{V}_B - \vec{V}_A|$  и  $V_{BA} = \omega \cdot AB$ , откуда

$$\omega = \frac{|\vec{V}_B - \vec{V}_A|}{AB} = \frac{|\vec{V}_B + (-\vec{V}_A)|}{AB} \quad (63)$$

### Решить самостоятельно

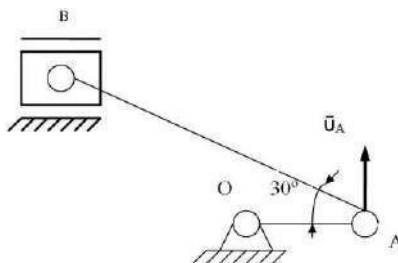
#### Задача 1.

Определить угловую скорость кривошипа  $OA$  в указанном положении, если скорость ползуна  $v_B = 2 \text{ м/с}$ , а длина кривошипа  $OA = 0,1 \text{ м}$ . (20)



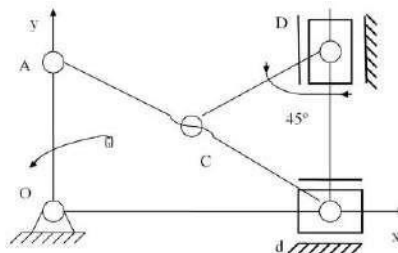
### Задача 2.

Определить угловую скорость шатуна АВ кривошипно-ползунного механизма в указанном положении, если точка А имеет скорость  $v_A = 3 \text{ м/с}$ , а длина шатуна  $AB = 1 \text{ м}$ . (3,46)



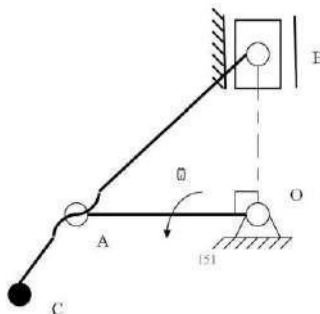
### Задача 3.

Для данного положения механизма определить расстояние от точки D до мгновенного центра скоростей звена CD, длина которого  $CD = 0,6 \text{ м}$ . (0,424)



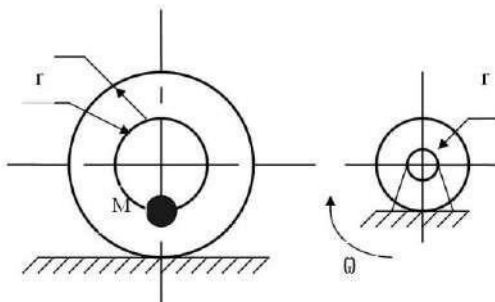
### Задача 4.

Определить угловую скорость кривошипа ОА в указанном положении, если скорость точки С шатуна  $v_C = 4 \text{ м/с}$ , длина кривошипа  $OA = 0,2 \text{ м}$ . (20)



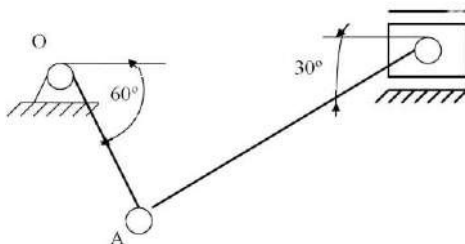
### Задача 5.

Угловая скорость барабана  $\omega_D = 1 \text{ рад/с}$ . Определить скорость точки М ступенчатого катка, катящегося без скольжения, если радиусы  $r = 0,1 \text{ м}$ ,  $R = 0,3 \text{ м}$ . (0,05)



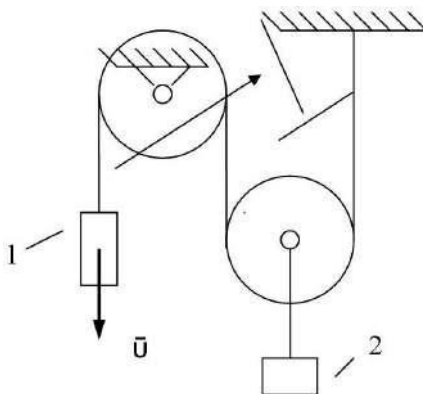
**Задача 6.**

Определить угловую скорость шатуна АВ кривошипно-ползунного механизма в указанном положении, если точка А имеет скорость  $v_A = 3 \text{ м/с}$ . Длина шатуна АВ = 1 м. (1,73)



**Задача 7.**

Скорость груза 1  $v_1 = 0,5 \text{ м/с}$ . Определить скорость груза 2. (0,25)



**Вопросы для обсуждения**

1. Определение плоскопараллельного движения твёрдого тела?
2. Понятие мгновенного центра скоростей –  $P_v$ ? Частные случаи?
3. Определение скорости любой точки тела, движущегося плоскопараллельно, с использованием мгновенного центра скоростей –  $P_v$ ?
4. Понятие мгновенного радиуса вращения?
5. Теорема о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры?

**Литература**

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

## 24. Определение ускорений точек плоской фигуры

**Цель занятия:** Плоскопараллельное движение твёрдого тела. Теорема об ускорениях точек плоской фигуры.

**Организационная форма:** решение задач.

### Методические рекомендации

Плоскопараллельным (плоским) называется движение твёрдого тела, при котором траектории всех его точек лежат в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Скорость точки равна произведению угловой скорости на величину мгновенного радиуса вращения – расстояния от точки до мгновенного центра скоростей. ускорение любой точки  $M$  плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой-нибудь точки  $A$ , принятой за полюс, и ускорения, которое точка  $M$  получает при вращении вокруг этого полюса.

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA} \quad (64)$$

Задача.

Механизм (рис. 106 состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В, соединённых друг с другом и с неподвижными опорами  $O_1$  и  $O_2$  шарнирами.

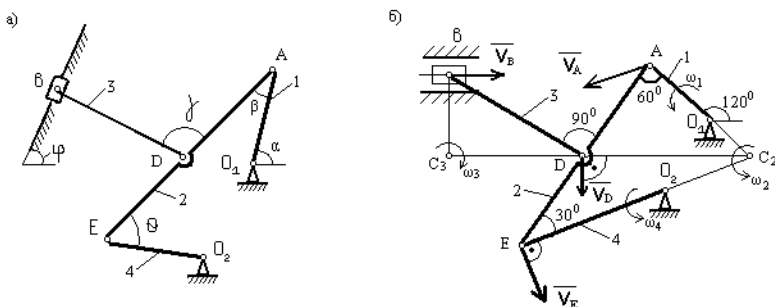


Рис.106

Дано:  $\alpha = 120^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 90^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $AD = DE$ ,  $l_1 = 0,6$  м,  $l_2 = 1,2$  м,  $\omega_1 = 5$  с<sup>-1</sup>,  $\varepsilon_1 = 8$  с<sup>-2</sup>.

Определить:  $v_B$ ,  $v_E$ ,  $\omega_3$  и  $\alpha_A$ .

Решение.

1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. 106,б)

2. Определяем  $v_E$ . Точка E принадлежит стержню AE. Чтобы найти  $v_E$ , надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление  $v_E$ . По данным задачи можем определить

$$v_A = \omega_1 l_1 = 5 \cdot 0,6 = 3 \text{ м/с}; \overline{v_A} \perp O_1 A.$$

Направление  $\overline{v_E}$  найдем, учтя, что точка E принадлежит одновременно стержню  $O_2 E$ , вращающемуся вокруг  $O_2$ ; следовательно,  $\overline{v_E} \perp O_2 E$ . Теперь, зная  $\overline{v_A}$  и направление  $\overline{v_E}$ , воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AE) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AE). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор  $\overline{v_E}$  (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции находим:

$$v_E \cos 60^\circ = v_A \cos 30^\circ; v_E = 3 \sqrt{3} = 5,2 \text{ м/с}.$$

3. Определяем  $v_B$ . Точка B принадлежит стержню BD. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить  $v_B$ , надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AE. Для этого, зная  $\overline{v_A}$  и  $\overline{v_E}$ , построим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AE; это точка  $C_2$ , лежащая на пересечении перпендикуляров к  $\overline{v_A}$  и  $\overline{v_E}$ , восстановленных из точек A и E (к  $\overline{v_E}$  и  $\overline{v_A}$  перпендикулярны стержни 1 и 4). По направлению вектора  $\overline{v_A}$  определяем направление поворота стержня AE вокруг МЦС  $C_2$ . Вектор  $\overline{v_D}$  будет перпендикулярен отрезку  $C_2 D$ , соединяющему точки D и  $C_2$ , и направлен в сторону поворота. Величину  $v_D$  найдем из пропорции:

$$\frac{v_D}{C_2 D} = \frac{v_A}{C_2 A}.$$

Чтобы вычислить  $C_2 D$  и  $C_2 A$ , заметим, что  $\triangle A C_2 E$  – прямоугольный, так как острые углы в нем равны  $30^\circ$  и  $60^\circ$ , и что  $C_2 A = AE \sin 30^\circ = 0,5 AE = AD$ . Тогда  $\triangle A C_2 D$  является равносторонним и  $C_2 A = C_2 D$ . В результате равенство (3) дает:

$$v_D = v_A = 3 \text{ м/с}; \overline{v_D} \perp C_2 D. \quad (67)$$

Так как точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно, то направление  $v_B$  известно. Тогда, восстанавливая из точек B и D перпендикуляры к скоростям  $\overline{v_D}$  и  $\overline{v_B}$ , построим МЦС  $C_3$  стержня BD. По направлению вектора  $\overline{v_D}$  определяем

направление поворота стержня BD вокруг центра  $C_3$ . Вектор  $\mathbf{v}_B$  будет

направлен в сторону поворота стержня BD. Из рис. 72, б видно, что  $\angle C_3DB = 30^\circ$ , а  $\angle DC_3B = 90^\circ$ , откуда  $C_3B = l_3 \sin 30^\circ$ ,  $C_3D = l_3 \cos 30^\circ$ . Составив теперь пропорцию, найдем, что:

$$\frac{v_B}{C_3B} = \frac{v_D}{C_3D}; v_B = v_D \operatorname{tg} 30^\circ = 1,7 \text{ м/с.}$$

4. Определяем  $\omega_3$ . Так как МЦС стержня 3 известен (точка  $C_3$ ), то:

$$\omega_3 = \frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_D}{l_3 \cos 30^\circ} = 2,9 \text{ с}^{-1}.$$

5. Определяем  $a_A$ . Так как  $\epsilon_1$  известно, то  $a_{At} = l_1 \epsilon_1$ . Далее  $a_{An} = v^2/l_1$ , или  $a_{An} = l_1 \omega^2$ . Тогда  $a_A = \sqrt{a_{At}^2 + a_{An}^2}$ . Произведя вычисления, получим  $a_A = 15,8 \text{ м/с}^2$ .

Ответ:  $v_E = 5,2 \text{ м/с}$ ,  $v_B = 1,7 \text{ м/с}$ ,  $\omega_3 = 2,9 \text{ с}^{-1}$ ,  $a_A = 15,8 \text{ м/с}^2$ .

### ***Решить самостоятельно***

Задачи в практическом занятии 25.

### ***Вопросы для обсуждения***

1. Плоскопараллельное движение твёрдого тела?
2. Мгновенный центр скоростей –  $P_v$ ? Частные случаи?
3. Определение скорости любой точки тела, движущегося плоскопараллельно, с использованием мгновенного центра скоростей –  $P_v$ ?
4. Мгновенный радиус вращения?
5. Теорема проекций скоростей двух точек тела?
6. Теорема об ускорениях точек плоской фигуры?

### ***Литература***

Основная: 1–4.

Интернет – ресурсы: 1.

## **25. Кинематический анализ плоского механизма**

**Цель занятия:** Плоскопараллельное движение твёрдого тела. Мгновенный центр скоростей плоской фигуры. Теорема проекций скоростей двух точек плоской фигуры. Мгновенный радиус вращения. Теорема об ускорениях точек плоской фигуры.

**Организационная форма:** решение задач.

### ***Методические рекомендации***

*Плоскопараллельным (плоским) называется движение твёрдого те-*



ла, при котором траектории всех его точек лежат в плоскостях, парал-

лельных некоторой неподвижной плоскости. Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Скорость точки равна произведению угловой скорости на величину мгновенного радиуса вращения – расстояния от точки до мгновенного центра скоростей. ускорение любой точки М плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой-нибудь точки А, принятой за полюс, и ускорения, которое точка М получает при вращении вокруг этого полюса.

$$V_A = \omega \cdot AP (\bar{V}_A \perp AP); V_B = \omega \cdot BP (\bar{V}_B \perp BP) \quad (65)$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA} \quad (66)$$

Задача.

Найти для заданного механизма скорости и ускорения точек В и С, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому принадлежат эти точки

Дано: Схема механизма в заданном положении,  $OA = 55 \text{ см} = 20 \text{ см}$   
 $\omega_{OA} = 2 \text{ рад} / \text{с}$   $E_{OA} = 5 \text{ рад} / \text{с}^2$  (рис. 107)

Решение:

1) Определение скоростей точек и угловой скорости звена

Вычислим модуль скорости точки А

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 55 = 110 \text{ см} / \text{с}$$

Скорость точки А направлена перпендикулярно ОА,  $V_A \uparrow \uparrow \omega_{OA}$  Рv является мгновенным центром скоростей

$$V_A = \omega_{AB} \cdot APv = r \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{V_A}{r} = \frac{110}{20} = 5,5 \text{ рад} / \text{с}$$

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BPv = 5,5 \cdot 10,35 = 57 \text{ см} / \text{с}$$

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CPv = 5,5 \cdot 34,64 = 190,5 \text{ см} / \text{с}$$

$$CPv = \sqrt{AC^2 + APv^2 - 2AC \cdot APv \cdot \cos 120^\circ}$$

По теореме косинусов из треугольника САРv

$$CPv = \sqrt{400 + 400 + 400} = 34,64 \text{ см}$$

ВРv по теореме косинусов из треугольника ВАРv:

$$\begin{aligned} BPv &= \sqrt{AB^2 + APv^2 - 2AB \cdot APv \cdot \cos 30^\circ} = \\ &= \sqrt{(20)^2 + (20)^2 - 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{400 + 400 - 400\sqrt{3}} = 10,35 \text{ см} \end{aligned}$$

Вектор скорости точки В направлен перпендикулярно ВРv и

направлен в сторону  $\omega_{AB} \uparrow \uparrow V_A$ )

Вектор скорости точки С направлен в сторону  $\omega_{AB}$

2) Определение ускорений точек и углового ускорения звена

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2}$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = (2)^2 \cdot 55 = 220 \text{ см/с}^2$$

Вектор  $\vec{a}_A^n$  направлена вдоль ОА от точки А

$$a_A^\tau = E_{OA} = 5 \cdot 55 = 275 \text{ см/с}^2$$

Вектор  $\vec{a}_A^n$  перпендикулярно  $\vec{a}_A^\tau$  в сторону  $E_{OA}$

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{(220)^2 + (275)^2} = 352,17 \text{ см/с}^2$$

Найдем ускорение точек В и С

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \quad (67)$$

$$a_C = a_A + a_{CA}$$

Так как АВ=ВС=r то

$$a_{BA}^n = a_{CA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \omega_{AB}^2 \cdot AC = \omega_{AB}^2 \cdot r = (5,5)^2 \cdot 20 = 605 \text{ см/с}^2$$

Вектор  $\vec{a}_{BA}^n$  направлен вдоль АВ от точки В

Вектор  $\vec{a}_{CA}^n$  направлен вдоль АС от точки С

$$a_{BA}^\tau = a_{CA}^\tau = E_{BA} \cdot AB = E_{BA} \cdot AC = E_{BA} \cdot r = 17,61 \cdot 20 = 352,17 \text{ см/с}^2$$

$$E_{BA} = (\omega_{AB})' = \frac{a_A}{AP_V} = \frac{352,17}{20} = 17,61 \text{ с}^{-2}$$

Вектор  $\vec{a}_{BA}^\tau$  перпендику-

лярен  $\vec{a}_{BA}^n$  в сторону  $E_{BA}$

$$(\omega_{BA} \uparrow \downarrow E_{BA})$$

Вектор  $\vec{a}_{CA}^\tau$  перпендику-

лярен  $\vec{a}_{CA}^n$  в сторону  $E_{CA}$

$$a_{BA} = a_{CA} = \sqrt{(a_{BA}^n)^2 + (a_{BA}^\tau)^2} = \sqrt{(a_{CA}^n)^2 + (a_{CA}^\tau)^2} = \sqrt{(605)^2 + (352,17)^2} = 719,22 \text{ см/с}^2$$

Введем систему координат Рvху

Проектируем (67) уравнения ускорения точек В и С на оси

$$\text{Pvx: } a_{BX} = a_A^n + \cos 30^\circ \cdot a_{BA}^n + \cos 60^\circ a_{BA}^\tau = 220 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 605 + \frac{1}{2} \cdot 352,17 = 920,0 \text{ cm} / \text{c}^2$$

$$\text{Pvy: } a_{BY} = a_A^\tau = \cos 30^\circ a_{BA}^\tau + \cos 60^\circ a_{BA}^n = 275 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 352,17 + \frac{1}{2} \cdot 605 = 272,5 \text{ cm} / \text{c}^2$$

$$a_B = \sqrt{a_{BX}^2 + a_{BY}^2} = \sqrt{(920)^2 + (272,5)^2} = 959,5 \text{ cm} / \text{c}^2$$

$$\text{Pvx: } a_{CX} = a_A^n - \cos 60^\circ \cdot a_{CA}^n - \cos 30^\circ a_{CA}^\tau = 220 - \frac{1}{2} \cdot 650 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 352,17 = -387,49 \text{ cm} / \text{c}^2$$

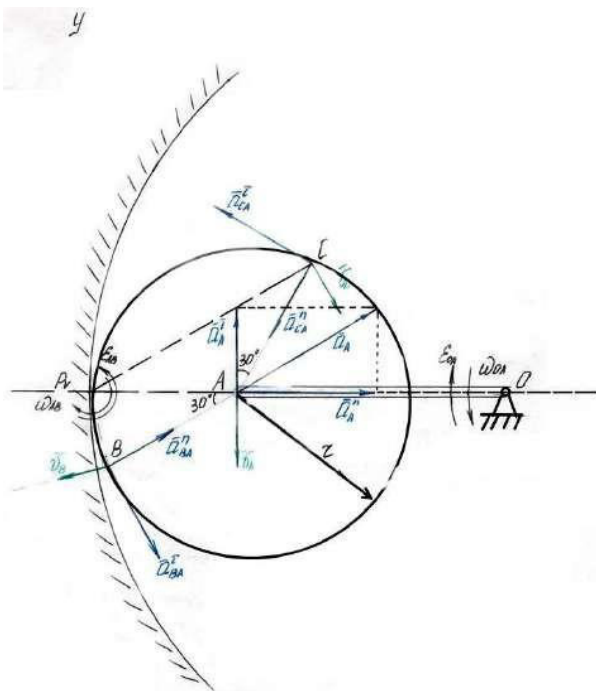


Рисунок 107

$$a_{CY} = a_A^t + \cos 60^\circ a_{CA}^t - \cos 30^\circ \cdot a_{CA}^n =$$

$$\text{Pry:} = 275 + \frac{1}{2} \cdot 352,17 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 605 = -72,86 \text{ см/с}^2$$

$$a_C = \sqrt{a_{CX}^2 + a_{CY}^2} = \sqrt{(-387,49)^2 + (-72,86)^2} = 394,28 \text{ см/с}^2$$

### Решить самостоятельно

Задача (к вариантам 1–30).

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек B и C, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат. Схемы механизмов на рис. 108–112, а необходимые для расчёта данные приведены в таблице 1.

Таблица 1

| № варианта | $OA$<br>(см) | $R$<br>(см) | $AB$<br>(см) | $AC$<br>(см) | $\dot{\omega}_{OA}$<br>рад/с | $\dot{\omega}_I$<br>рад/с | $\varepsilon_{OA}$<br>рад/с <sup>2</sup> | $V_A$<br>см/с | $a_A$<br>см/с <sup>2</sup> |
|------------|--------------|-------------|--------------|--------------|------------------------------|---------------------------|------------------------------------------|---------------|----------------------------|
| 1          | 40           | 15          | -            | 8            | 2                            | -                         | 2                                        | -             | -                          |
| 2          | 30           | 15          | -            | 8            | 3                            | -                         | 2                                        | -             | -                          |
| 3          | -            | 50          | -            | -            | -                            | -                         | -                                        | 50            | 100                        |
| 4          | 35           | -           | -            | 45           | 4                            | -                         | 8                                        | -             | -                          |
| 5          | 25           | -           | -            | 20           | 1                            | -                         | 1                                        | -             | -                          |
| 6          | 40           | 15          | -            | 6            | 1                            | 1                         | 0                                        | -             | -                          |
| 7          | 35           | -           | 75           | 60           | 5                            | -                         | 10                                       | -             | -                          |
| 8          | -            | -           | 20           | 10           | -                            | -                         | -                                        | 40            | 20                         |
| 9          | -            | -           | 45           | 30           | -                            | -                         | -                                        | 20            | 10                         |
| 10         | 25           | -           | 80           | 20           | 1                            | -                         | 2                                        | -             | -                          |
| 11         | -            | -           | 30           | 15           | -                            | -                         | -                                        | 10            | 0                          |
| 12         | -            | -           | 30           | 20           | -                            | -                         | -                                        | 20            | 20                         |
| 13         | 25           | -           | 55           | 40           | 2                            | -                         | 4                                        | -             | -                          |
| 14         | 45           | 15          | -            | 8            | 3                            | 12                        | 0                                        | -             | -                          |
| 15         | 40           | 15          | -            | 8            | 1                            | -                         | 1                                        | -             | -                          |
| 16         | 55           | 20          | -            | -            | 2                            | -                         | 5                                        | -             | -                          |
| 17         | -            | 30          | -            | 10           | -                            | -                         | -                                        | 80            | 50                         |
| 18         | 10           | -           | 10           | 5            | 2                            | -                         | 6                                        | -             | -                          |
| 19         | 20           | 15          | -            | 10           | 1                            | 2,5                       | 0                                        | -             | -                          |
| 20         | -            | -           | 20           | 6            | -                            | -                         | -                                        | 10            | 15                         |
| 21         | 30           | -           | 60           | 15           | 3                            | -                         | 8                                        | -             | -                          |
| 22         | 35           | -           | 60           | 40           | 4                            | -                         | 10                                       | -             | -                          |
| 23         | -            | -           | 60           | 20           | -                            | -                         | -                                        | 5             | 10                         |
| 24         | 25           | -           | 35           | 15           | 2                            | -                         | 3                                        | -             | -                          |
| 25         | 20           | -           | 70           | 20           | 1                            | -                         | 2                                        | -             | -                          |
| 26         | 20           | 15          | -            | 10           | 2                            | 1,2                       | 0                                        | -             | -                          |
| 27         | -            | 15          | -            | 5            | -                            | -                         | -                                        | 60            | 30                         |
| 28         | 20           | -           | 50           | 25           | 1                            | -                         | 1                                        | -             | -                          |
| 29         | 12           | -           | 35           | 15           | 4                            | -                         | 6                                        | -             | -                          |
| 30         | 40           | -           | -            | 20           | 5                            | -                         | 10                                       | -             | -                          |

Примечание.  $\omega_{OA}$  и  $\varepsilon_{OA}$  – угловая скорость и угловое ускорение кривошипа  $OA$  при заданном положении механизма;  $\omega_I$  – угловая скорость колеса  $I$  (постоянная);  $v_A$  и  $a_A$  – скорость и ускорение точки  $A$ . Качение колес происходит без скольжения.

Задача (к вариантам 31–40).

Плоский механизм состоит из стержней  $I$ – $4$  и ползуна  $B$ , соединенных друг с другом и с неподвижными опорами  $O_1$  и  $O_2$  шарнирами

(рис.111 –112). Длины стержней:  $l_1=0,4$  м,  $l_2=1,2$  м,  $l_3=1,4$  м,  $l_4=0,8$  м. Положение механизма определяется углами  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$ , которые вместе с другими величинами заданы в таблице 7. Точка  $D$  на всех рисунках и точка  $K$  на рис.111 –112 в середине соответствующего стержня. Определить величины, указанные в таблице в столбце «Найти». Найти также ускорение  $a_A$  точки  $A$  стержня  $I$ , если стержень  $I$  имеет в данный момент времени угловое ускорение  $\varepsilon_I=10$  с<sup>-2</sup>.

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа должны откладываться соответствующие углы, т.е. по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол  $\gamma$  на рис. 1 следует отложить от стержня  $DE$  против хода часовой стрелки, а на рис. 2 – от стержня  $AE$  по ходу часовой стрелки).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом  $\alpha$ ; ползун  $B$  и его направляющие для большей наглядности изобразить по данным. Заданную угловую скорость считать направленной против хода часовой стрелки, а заданную скорость  $v_B$  – от точки  $B$  к  $b$ .

Таблица 2

| № условия | Углы       |           |            |             |            | Дано            |                 |            | Найти                |
|-----------|------------|-----------|------------|-------------|------------|-----------------|-----------------|------------|----------------------|
|           | $\alpha^0$ | $\beta^0$ | $\gamma^0$ | $\varphi^0$ | $\theta^0$ | $\omega_1, 1/c$ | $\omega_4, 1/c$ | $v_B, м/с$ |                      |
| 0         | 30         | 150       | 120        | 0           | 60         | 2               | —               | —          | $v_B, v_E, \omega_2$ |
| 1         | 60         | 60        | 60         | 90          | 120        | —               | 3               | —          | $v_A, v_D, \omega_3$ |
| 2         | 0          | 120       | 120        | 0           | 60         | —               | —               | 10         | $v_A, v_E, \omega_2$ |
| 3         | 90         | 120       | 90         | 90          | 60         | 3               | —               | —          | $v_B, v_E, \omega_2$ |
| 4         | 0          | 150       | 30         | 0           | 60         | —               | 4               | —          | $v_B, v_A, \omega_2$ |
| 5         | 60         | 150       | 120        | 90          | 30         | —               | —               | 8          | $v_A, v_E, \omega_3$ |
| 6         | 30         | 120       | 30         | 0           | 60         | 5               | —               | —          | $v_B, v_E, \omega_3$ |
| 7         | 90         | 150       | 120        | 90          | 30         | —               | 5               | —          | $v_A, v_D, \omega_3$ |
| 8         | 0          | 60        | 30         | 0           | 120        | —               | —               | 6          | $v_A, v_E, \omega_2$ |
| 9         | 30         | 120       | 120        | 0           | 60         | 4               | —               | —          | $v_B, v_E, \omega_3$ |

Указания. Задача на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При её решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном



центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности.

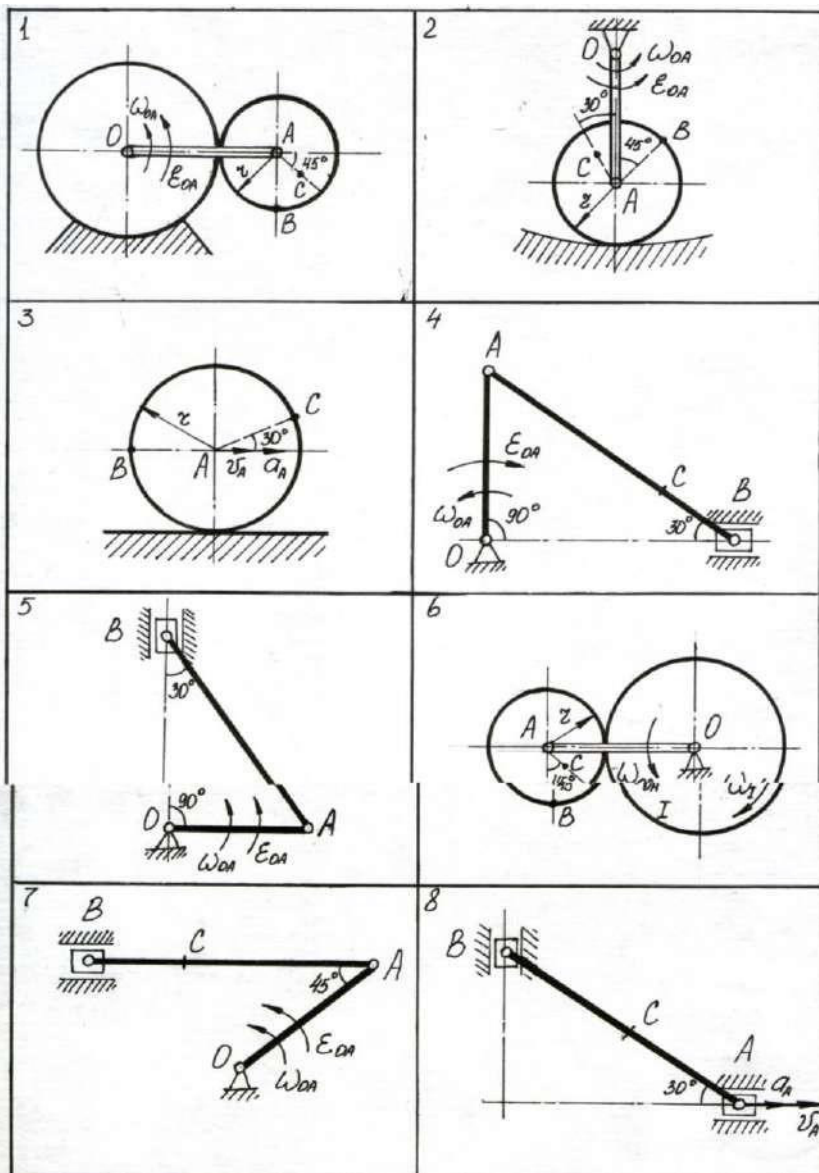
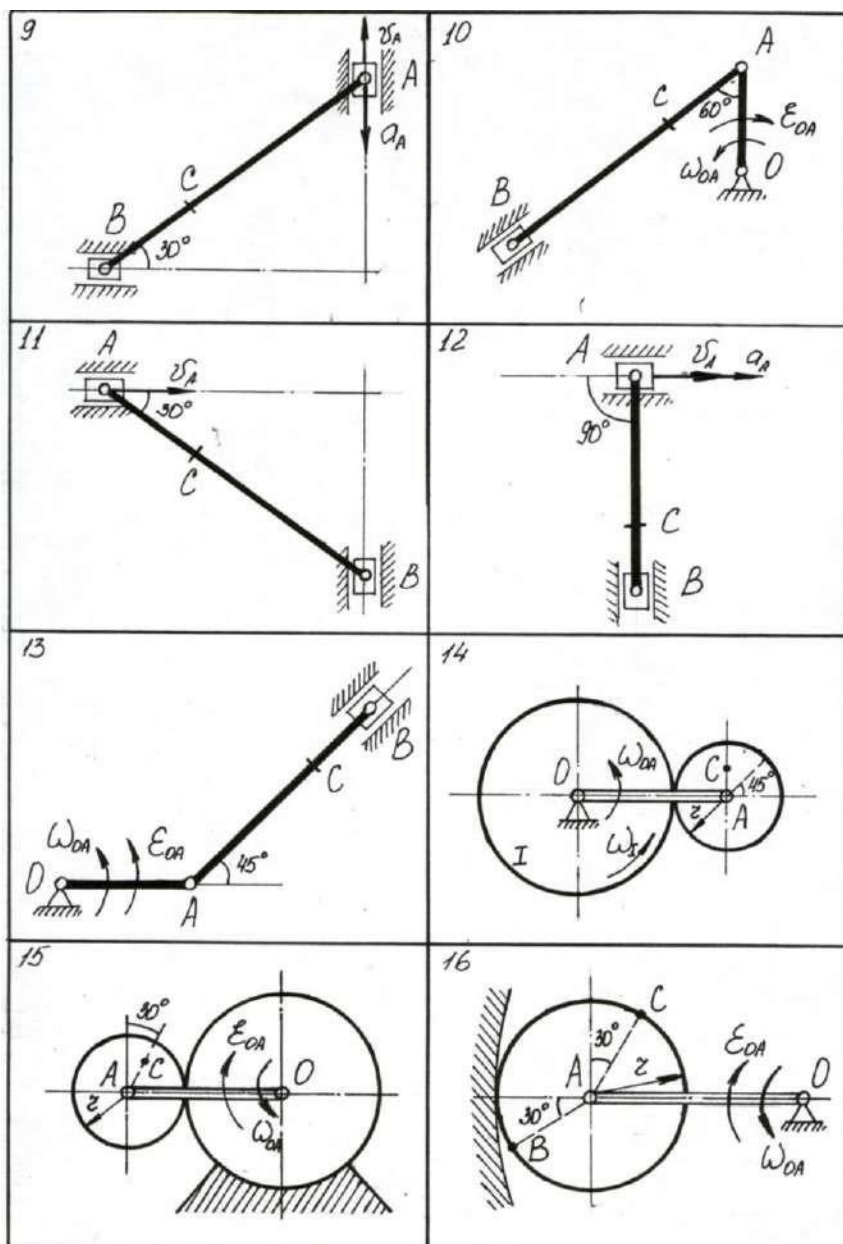


Рис. 108



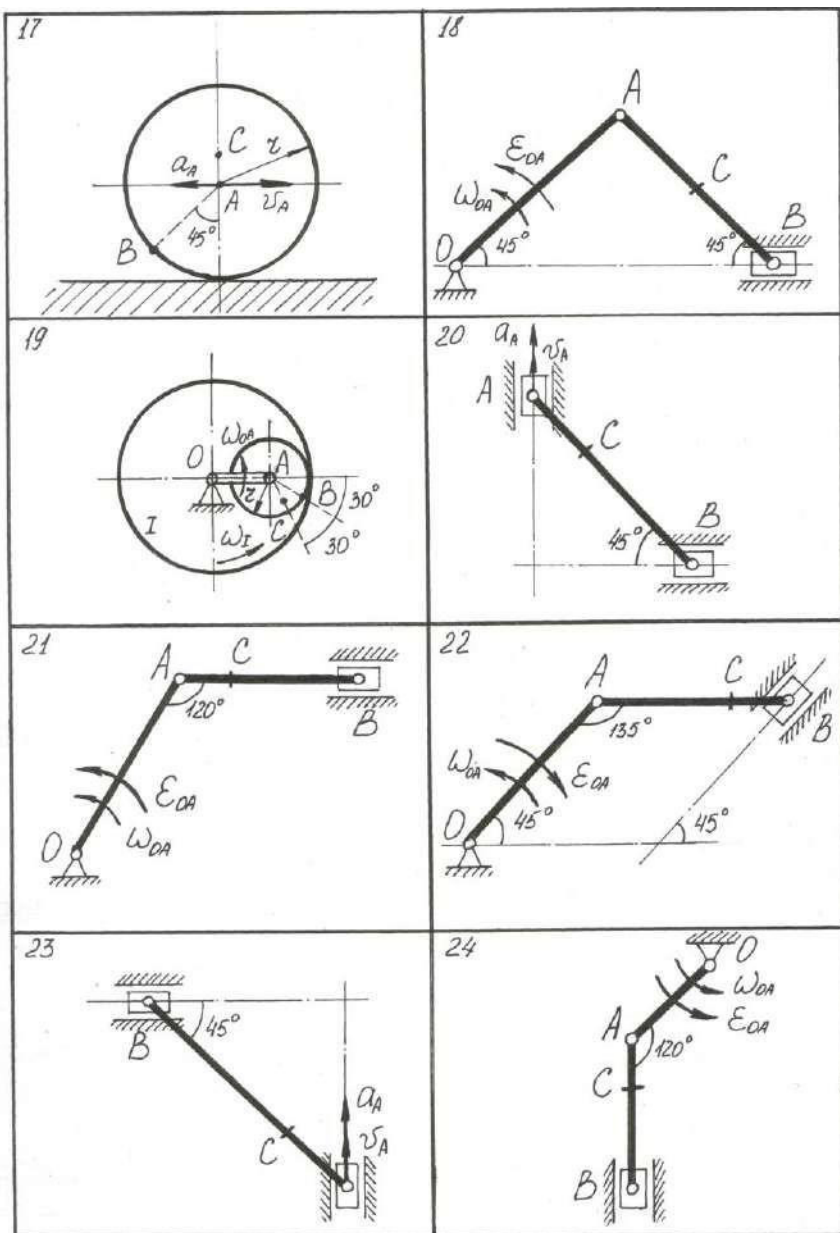


Рис. 110

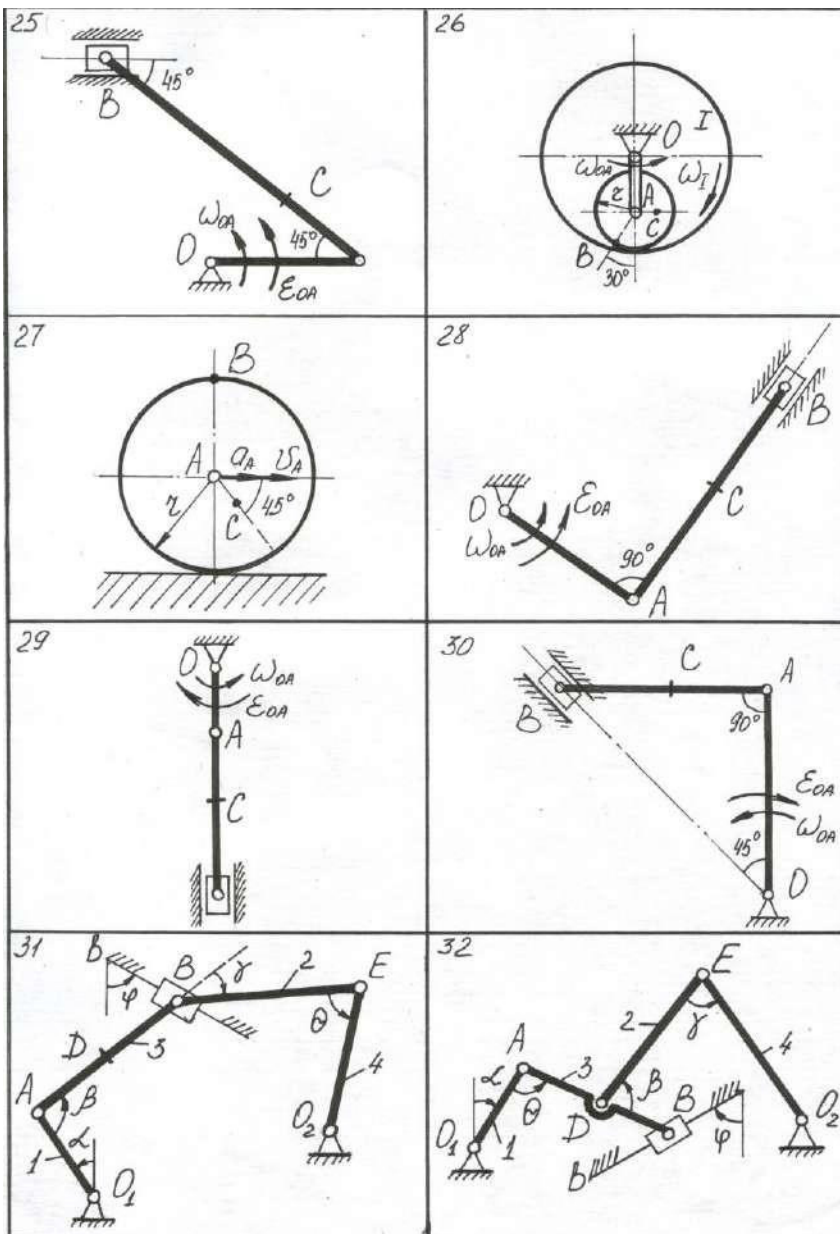


Рис. 111

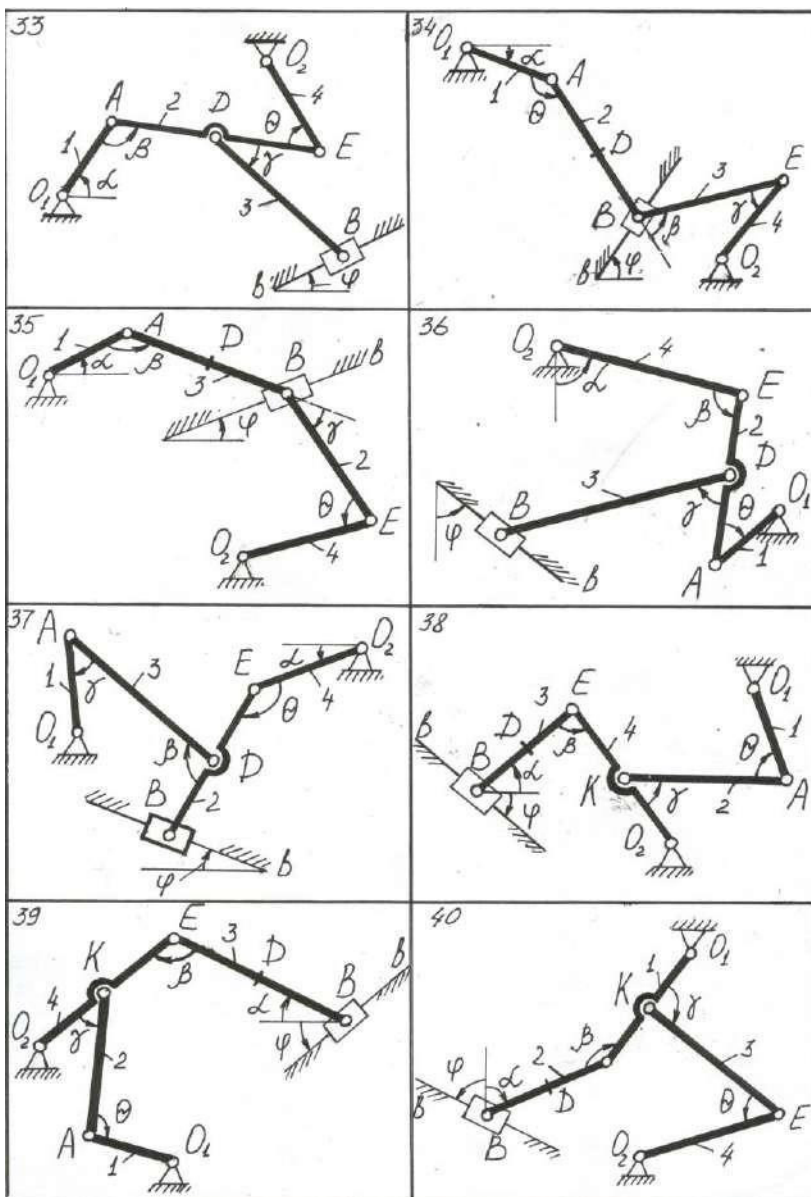


Рис. 112

Пример 1 (к вариантам 1 – 30):

Дано : схема механизма в заданном положении (рис. 113) исходные данные (табл. 3).

Таблица 3

| Размеры, см |      |      | $\omega_{OA}$ , рад/с | $\varepsilon_{OA}$ , рад/с |
|-------------|------|------|-----------------------|----------------------------|
| $OA$        | $AB$ | $AC$ |                       |                            |
| 10          | 60   | 20   | 1,5                   | 2                          |

Решение.

1. Определение скоростей точек и угловой скорости звена (рис.113).  
Вычисляем модуль скорости пальца  $A$  кривошипа  $OA$  при заданном положении механизма:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA.$$

Скорость точки  $A$  перпендикулярна кривошипу  $OA$ . Скорость ползуна  $B$  направлена по вертикали. Мгновенный центр скоростей  $P_{AB}$  шатуна  $AB$  находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек  $A$  и  $B$  к их скоростям.

Угловая скорость звена  $AB$ :

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB}.$$

Модули скоростей точек  $B$  и  $C$ :

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}; \quad v_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB}.$$

Расстояния  $AP_{AB}$ ,  $BP_{AB}$  и  $CP_{AB}$  определяются из рассмотрения треугольников  $ABP_{AB}$  и  $ACP_{AB}$ :

$$AP_{AB} = 52,0 \text{ см}; \quad BP_{AB} = 30,0 \text{ см}; \quad CP_{AB} = 36,1 \text{ см}.$$

В соответствии с этим  $v_A = 15,0 \text{ см/с}$ ;  $\omega_{AB} = 0,29 \text{ рад/с}$ ;  $v_B = 8,7 \text{ см/с}$ ;  $v_C = 10,5 \text{ см/с}$ .

Вектор  $v_C$  направлен перпендикулярно отрезку  $CP_{AB}$  в сторону, соответствующую направлению вращения звена  $AB$ .

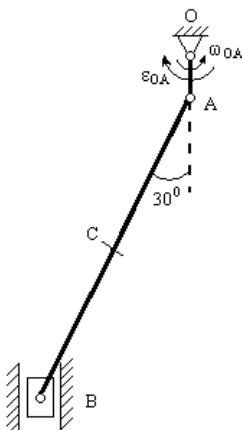


Рис. 113

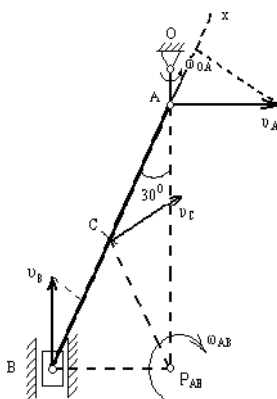


Рис. 114

Для проверки определим скорость точки  $B$  другим способом. Воспользуемся теоремой о равенстве проекции скоростей точек на ось, проведенную через эти точки.

Направим ось  $\overline{X}$  вдоль шатуна  $AB$  в направлении от  $B$  к  $A$ .

Имеем  $v_A \cos(\overline{v_A}, x) = v_B \cos(\overline{v_B}, x)$ , или, как видно из рис. 114

$$v_A \cos 60^\circ = v_B \cos 30^\circ.$$

Отсюда  $v_B = 8,7$  см.

Полезно убедиться, что и найденная ранее скорость точки  $C$  удовлетворяет этой теореме.

2. Определение ускорений точек и углового ускорения звена (рис. 115) Ускорение точки  $A$  складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

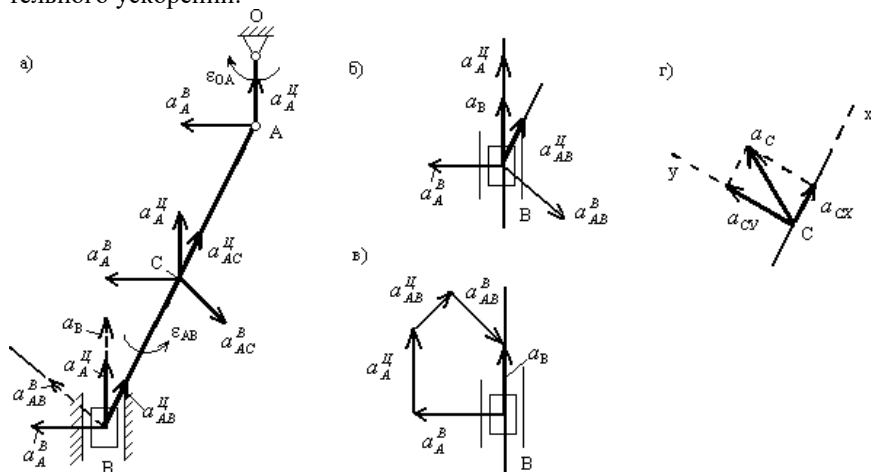


Рис. 115

$$\overline{a_A} = \overline{a_A^B} + \overline{a_A^H}; \quad a_A^B = \varepsilon \cdot OA; \quad a_A^H = \omega^2 \cdot OA.$$

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры,

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{AB}^B} + \overline{a_{AB}^H}, \quad (68)$$

или

$$\overline{a_B} = \overline{a_A^B} + \overline{a_A^H} + \overline{a_{AB}^B} + \overline{a_{AB}^H}. \quad (69)$$

Центростремительное ускорение точки  $B$  во вращательном движении шатуна  $AB$  вокруг полюса  $A$

$$a_{AB}^H = \omega_{AB}^2 \cdot AB.$$

По приведенным формулам вычисляем:

$$a_A^B = 200,0 \text{ cm/c}^2; \quad a^u = 22,5 \text{ cm/c}^2; \quad u = 5,0 \text{ cm/c}^2.$$



Вектор  $\overline{a_A^y}$  направлен от  $A$  к  $O$ . Вектор  $\overline{a_A^B}$  перпендикулярен вектору  $\overline{a_A^y}$  и направлен противоположно  $v_A$  (вращение кривошипа  $OA$  – замедленное).

Вектор  $\overline{a_{AB}^H}$  направлен от  $B$  к  $A$ . Что касается ускорения  $\overline{a_B}$  точки  $B$  и вращательного ускорения  $\overline{a_{AB}^B}$ , то известны только линии действия

этих векторов:  $\overline{a_B}$  – по вертикали вдоль направляющих ползуна,  $\overline{a_{AB}^B}$  – перпендикулярно  $AB$ .

Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям (рис. 115а). Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (69) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли истинное направление вектора принятому при расчете.

Выбрав направление осей  $x$  и  $y$ , как показано на рис. 115а получаем:

$$\overline{a_B} \cos 30^\circ = -\overline{a_{AB}^B} \cos 60^\circ + \overline{a_A^H} \cos 30^\circ + \overline{a_A^H}^y; \quad (70)$$

$$\overline{a_{AB}^B} \cos 60^\circ = \overline{a_{AB}^B}^x \cos 30^\circ + \overline{a_A^H}^x \cos 60^\circ + \overline{a_{AB}^B}^y. \quad (71)$$

Из уравнения (70) находим

$$\overline{a_B} = 16,7 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение  $\overline{a_B}$  направлено, как показано на рис. 115а.

Из уравнения (71) получаем

$$\overline{a_{AB}^B} = -20,2 \text{ см/с}^2.$$

Направление  $\overline{a_{AB}^B}$  противоположно показанному на рис. 115а.

Ускорение  $\overline{a_B}$  и все его составляющие с учетом их истинных направлений и масштаба показаны на рис. 115б.

Угловое ускорение шатуна  $AB$  с учетом того, что здесь  $\overline{a_{AB}^B}$  – алгебраическая величина, определяется по формуле:

$$\epsilon_{AB} = \left| \overline{a_{AB}^B} \right| / AB.$$

Вычисляя, находим:

$$\epsilon_{AB} = 0,34 \text{ рад/с}^2.$$

Направление ускорения  $\overline{a_{AB}^B}$  относительно полюса  $A$  определяет

направление углового ускорения  $\epsilon_{AB}$ . Здесь под направлением углового ускорения понимается направление дуговой стрелки, которое при ускоренном вращении звена совпадает с направлением его вращения, а при замедленном – противоположно ему. В данном случае угловое ускорение

противоположно направлению вращения шатуна.

Определить  $\overline{a_B}$  и  $\overline{a_{AB}^B}$  можно и графически – построением многоугольника ускорений.

Отложим из точки  $B$  согласно (69) в выбранном масштабе последовательно векторы  $\overline{a_A^B}$ ,  $\overline{a_A^{tt}}$ ,  $\overline{a_{AB}^{tt}}$  (рис.115в). Через конец вектора  $\overline{a_{AB}^{tt}}$  проведем прямую, параллельную вращательному ускорению  $\overline{a_{AB}^B}$ , т.е. перпендикулярно  $AB$ , до пересечения её с прямой, по которой направлено ускорение  $\overline{a_B}$ .

Последнее определяется как замыкающая сторона многоугольника ускорений.

Модули  $a_B$  и  $a_{AB}^B$  могут быть найдены измерением на чертеже.

Определяем ускорение точки  $C$ :

$$\overline{a_C} = \overline{a_A^B} + \overline{a_A^{tt}} + \overline{a_{AC}^B} + \overline{a_{AC}^{tt}}.$$

Вращательное и центростремительное ускорения точки  $C$  во вращательном движении  $AB$  вокруг полюса  $A$ :

$$a_{AC}^B = \varepsilon_{AB} \cdot AC; \quad a_{AC}^{tt} = \omega_{AB}^2 \cdot AC;$$

или

$$a_{AC}^B = 6,8 \text{ см/с}^2; \quad a_{AC}^{tt} = 1,7 \text{ см/с}^2.$$

Вектор  $\overline{a_{AC}^B}$  перпендикулярен вектору  $\overline{a_{AC}^{tt}}$  и направлен соответственно угловому ускорению  $\varepsilon_{AB}$ .

Ускорение точки  $C$  находим способом проекций (рис.115а):

$$a_{Cx} = a_{AC}^{tt} + a_A^{tt} \cos 30^\circ - a_A^B \cos 60^\circ,$$

$$a_{Cy} = a_{AC}^B \cos 60^\circ + a_A^B \cos 30^\circ - a_{AC}^{tt},$$

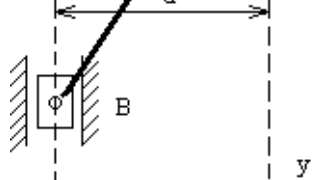
$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2}.$$

В результате вычислений получаем:  
 $a_{Cx} = 11,2 \text{ см/с}^2$ ;  $a_{Cy} = 21,8 \text{ см/с}^2$ ;  $a_C = 24,5 \text{ см/с}^2$  (рис.115г).

Приведем решение этой же задачи другим, более общим методом.

условия:

На рис.116 показана схема механизма в некотором произвольном положении. Проведем оси координат. Уравнениями связи для данного механизма являются



*Puc.116*

$$\overline{r_B} = \overline{OA} + \overline{AB} \quad (72)$$

( $\overline{r_B}$  – радиус-вектор точки  $B$ , проведенный из центра  $O$ ),

$$x_B = a = \text{const.} \quad (73)$$

Проецируя (72) на ось  $x$ , с учетом (73) имеем:

$$-OA \cdot \sin \alpha + AB \cdot \sin \beta = a. \quad (74)$$

Для определения угловой скорости звена  $AB$   $\omega_{AB} = \dot{\beta}$  и углового ускорения  $\varepsilon_{AB} = \ddot{\beta}$  нет необходимости выражать  $\beta$  из (74). Проще непосредственно дважды продифференцировать (74).

Имея в виду, что  $\alpha = \omega_{OA}$ , получаем в результате первого дифференцирования:

$$-OA \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{OA} + AB \cdot \cos \beta \cdot \omega_{AB} = 0. \quad (75)$$

Отсюда:

$$\omega_{AB} = \omega_{OA} \cdot OA \cos \alpha / (AB \cdot \cos \beta). \quad (76)$$

Дифференцируя (76) и учитывая, что  $\dot{\omega}_{OA} = \varepsilon_{OA}$ , имеем

$$OA \cdot \sin \alpha \cdot \omega^2 - OA \cdot \cos \alpha \cdot \varepsilon_{OA} - AB \cdot \sin \beta \cdot \omega_{AB}^2 + AB \cdot \cos \beta \cdot \varepsilon_{AB} = 0; \quad (77)$$

$$\varepsilon_{AB} = \omega_{AB}^2 \tan \beta + OA (\varepsilon_{OA} \cos \alpha - \omega_{OA}^2 \sin \alpha) / (AB \cdot \cos \beta).$$

Выражения (77) и (76) позволяют вычислять  $\omega_{AB}$  и  $\varepsilon_{AB}$  для любого положения механизма, в частности для заданного ( $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ).

Заметим, что  $\omega_{OA}$  и  $\varepsilon_{OA}$  входят в эти выражения со знаком «+» или «-» в соответствии с принятым направлением отсчета угла  $\alpha$ . В данном случае

$\omega_{OA} = 1,5$  рад/с,  $\varepsilon_{OA} = -2,0$  рад/с<sup>2</sup>. Смысл знаков  $\omega_{AB}$  и  $\varepsilon_{AB}$  определяется направлением отсчета угла  $\beta$ .

Модуль скорости точки  $B$   $v_B = \dot{y}_B$ . Модуль ускорения  $a_B = \ddot{y}_B$ . Проецируя (72) на ось  $y$ , получаем:

$$y_B = OA \cdot \cos \alpha + AB \cdot \cos \beta.$$

Отсюда после дифференцирования получаем:

$$\dot{y}_B = -OA \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{OA} - AB \cdot \sin \beta \cdot \omega_{AB};$$

$$\ddot{y}_B = -OA \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \sin \alpha \cdot \varepsilon_{OA} - AB \cdot \cos \beta \cdot \omega_{AB}^2 - AB \cdot \sin \beta \cdot \varepsilon_{AB}$$

Для определения скорости и ускорения точки  $C$  следует составить уравнения её движения в координатной форме, проецируя радиус-вектор  $\overline{r_C} = \overline{OA} + \overline{AC}$  на оси  $x$  и  $y$ .

### ***Вопросы***

1. Определение плоскопараллельного движения твёрдого тела?
2. Определение понятия мгновенного центра скоростей –  $P_v$ . Частные случаи?
3. Определение скорости любой точки тела, движущегося плоскопараллельно, с использованием мгновенного центра скоростей –  $P_v$ ?
4. Определение понятия мгновенного радиуса вращения?
5. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела?
6. Теорема об ускорении точки плоской фигуры?
7. Геометрический способ определения вектора ускорения точки плоской фигуры?
8. Аналитический способ определения модуля вектора ускорения точки плоской фигуры?

### ***Литература***

- Основная: 1–4.  
Интернет-ресурсы: 1.

## 26. Первая задача «Динамики точки»

**Цель занятия:** основной закон динамики точки, дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси декартовых координат и на оси естественного трехгранника, равнодействующей всех действующих на точку сил, первая задачи «Динамики точки».

**Организационная форма:** решение задач.

### Методические рекомендации

Основной закон динамики точки - закон Ньютона-  $m\vec{a} = \vec{F}$

Для свободной и несвободной на термальной точки  $\vec{m}\vec{a} = \sum \vec{F}k$  или  $m\vec{a} = \vec{F}$ .

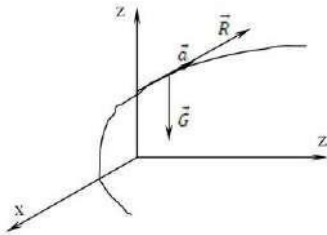


Рис. 117

В проекциях на оси декартовых координат имеем:

$$\left. \begin{aligned} ma_x &= R_x \\ ma_y &= R_y \\ ma_z &= R_z \end{aligned} \right\} \text{ или } \left. \begin{aligned} m_x &= \sum Fkx \\ m_y &= \sum Fky \\ m_z &= \sum Fkz \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки массой  $m$  в проекции на оси декартовых координат в проекциях на оси естественного трехгран-

ника  $m\vec{a} = \vec{R}$  принимают вид дифференциального уравнения движения материальной точки массой  $m$  в проекциях на естественные оси.

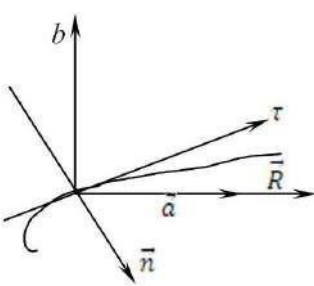


Рис. 118

$$\left. \begin{aligned} ma_n &= R_n \\ ma_\tau &= R_\tau \\ ma_b &= R_b \end{aligned} \right\} \text{ или } \left. \begin{aligned} m \frac{av^2}{s} &= R_n \\ m \frac{dv}{dt} &= R_\tau \\ ma_b &= R_b \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Первая задача «Динамики точки» – зная закон движения точки, определить модуль равнодействующей всех сил, действующих на точку массой  $m$ .

Задача 1. Определить модуль равнодействующей всех сил, действующих на материальную точку массой  $m=3$  кг в момент времени  $t=5$ с, если она движется по

оси  $Ox$  согласно уравнению  $x = 0,04t^3$ .



Решение.

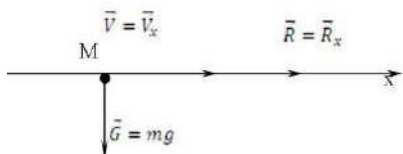


Рис. 119

$m\ddot{x} = R_x$  - дифференциальное уравнение движения точки М

$$m\ddot{x} = G_x + R_x \rightarrow$$

$$m\ddot{x} = R; \ddot{x} = (0,04t^3)'' = (0,12t^2)' = 24t$$

$$R = R_x = 3 \cdot 0,24 \cdot t = 3 \cdot 0,24 \cdot 5 = 3,6H$$

Ответ:  $|R|=3,6H$

Задача 2.

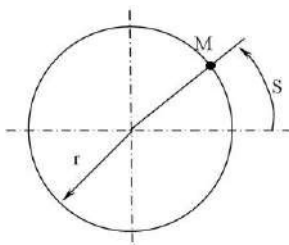


Рис. 120

Материальная точка М массой  $1,2$  кг движется по окружности радиуса  $r=0,6$  м согласно уравнению  $s=2,4t$ .

Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к материальной точке. (11,5)

Решение.

Дифференциальные уравнения движения точки М имеют вид:

$$ma_n = R_n; ma_\tau = R_\tau;$$

$$R_n = m \frac{v^2}{r} = 1,2 \cdot \frac{2,4^2}{0,6} = 11,52H$$

$$R_\tau = m \frac{dv}{dt} = m(S)' = m(2,4t)' = m \cdot 0 = 0;$$

$$|R| = \sqrt{(R_n)^2 + (R_\tau)^2} = \sqrt{(11,52)^2 + (0)^2} = 11,52H$$

$a_\tau = 0 \rightarrow v = \text{const}$  - точка М совершает равномерное криволинейное движение.

Ответ:  $R=R_n=11,52H$

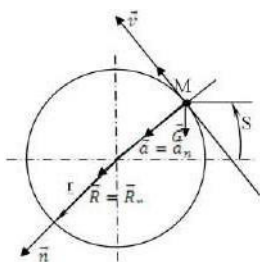


Рис. 121

### Решить самостоятельно

Задача 1. Материальная точка массой  $m=1,4$  кг движется прямолинейно по закону  $x=6t^2+6t+3$ . Определить модуль равнодействующей всех сил приложенных к точке. (16,8)

Задача 2. Материальная точка массой  $m=6$  кг движется в горизонтальной плоскости  $Oxy$  с ускорением  $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ . Определить модуль равнодействующей всех сил, действующих на нее, в плоскости ее движения. (30)

Задача 3. Материальная точка  $m=18 \text{ кг}$  движется по окружности радиуса  $R=8 \text{ м}$  согласно уравнению  $s=e^{0,3t}$ . Определить проекцию равнодействующей сил, приложенных к точке, на касательную к траектории в момент времени  $t=10 \text{ с}$ . (32,5)

Задача 4. Материальная точка массой  $m=22 \text{ кг}$  движется по окружности радиуса  $R=10 \text{ м}$  согласно уравнению  $s=0,3t^2$ . Определить модуль равнодействующей сил, действующих на точку, в момент времени  $t=5 \text{ с}$ . (23,8)

Задача 5. Материальная точка массой  $m=20 \text{ кг}$  движется по окружности радиуса  $R=6 \text{ м}$  согласно уравнению  $s=\ln t$ . определить проекцию равнодействующей сил, приложенных к точке на нормаль к траектории в момент времени  $t=0,5 \text{ с}$ . (13,3)

Задача 6. Тело массой  $m=50 \text{ кг}$ , подвешенное на тросе, поднимается вертикально с ускорением  $a=0,5 \text{ м/с}^2$ . Определить силу натяжения троса. (516)

Задача 7. Материальная точка массой  $m=1 \text{ кг}$  движется по окружности радиуса  $r=2 \text{ м}$  со скоростью  $v=2t$ . Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке в момент времени  $t=1 \text{ с}$ . (2,83)

Задача 8. Материальная точка массой  $m=14 \text{ кг}$  движется по окружности радиуса  $R=7 \text{ м}$  с постоянным касательным ускорением  $a_t=0,5 \text{ м/с}$ . Определить модуль равнодействующей сил, действующих на точку в момент времени  $t=4 \text{ с}$ , если при  $t_0=0$  скорость  $v_0=0$ . (10,6)

Задача 9. Трактор, двигаясь с ускорением  $a=m/c^2$  по горизонтальному участку пути, перемещает нагруженные сани массой  $600 \text{ кг}$ .

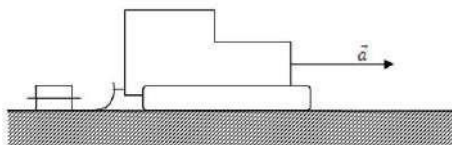


Рис. 122

Определить силу тяги на крюке, если коэффициент трения скольжения саней  $f=0,04$ . (835)

Задача 10. Точка массой  $m=4 \text{ кг}$  движется по горизонтальной прямой с ускорением  $a=0,3t$ . Определить модуль силы, действующей на точку в направлении ее движения в момент времени  $t=3 \text{ с}$ . (3,6)

Задача 11. Материальная точка массой  $m=16 \text{ кг}$  движется по окружности радиуса  $R=9 \text{ м}$  со скоростью  $v=0,8 \text{ м/с}$ . Определить проекцию равнодействующей сил, приложенных к точке на главную нормаль к траектории. (1,14)

Задача 12. Движение материальной точки массой  $m=8 \text{ кг}$  происходит в горизонтальной плоскости  $Oxy$  согласно уравнениям  $x=0,05t^3$  и  $y=0,3t^2$ . Определить модуль равнодействующей приложенных сил в момент времени  $t=4 \text{ с}$ . (10,7)

Задача 13. Движение материальной точки массой  $m=9 \text{ кг}$  в плоскости  $Oxy$  определяется радиусом-вектором  $\vec{r} = 0,6t^2\vec{i} + 0,5t^2\vec{j}$ . Определить модуль равнодействующей всех сил, приложенных к точке. (14, 1)

Задача 14. Материальная точка массой  $m=7 \text{ кг}$  движется в горизонтальной плоскости  $Oxy$  со скоростью  $\vec{v} = 0,4t^2\vec{i} + 0,5t^2\vec{j}$ . Определить модуль силы, действующей на нее в плоскости движения. (4, 48)

### **Вопросы для обсуждения**

1. Основной закон динамики точки?
2. Дифференцированные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси декартовых координат?
3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси естественного трехгранника?
4. Первая задача «Динамики точки»?
5. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения точки?
6. Определение скорости и ускорения при векторном способе задания движения точки?
7. Определение скорости и ускорения при естественном способе задания движения точки?
8. Определение равнодействующей  $\vec{R}$  по ее составляющим на оси декартовых координат и на естественные оси?

### **Литература**

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

## **27. Вторая задача «Динамики точки»**

**Цель занятия:** основной закон динамики точки, дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси декартовых координат и на оси естественного трехгранника, интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, вторая задача «Динамики точки».

**Организационная форма:** решение задач.

### **Методические рекомендации**

2-я «Динамики точки» – это, зная силы, действующие на точку, определить закон движения этой материальной точки.

Основной закон динамики точки – закон Ньютона –  $m\vec{a} = \vec{F}$

Для свободной и несвободной на термальной точки  $\vec{m}\vec{a} = \sum \vec{F}k$  или

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

В проекциях на оси декартовых координат имеем:

$$\left. \begin{aligned} ma_x &= R_x \\ ma_y &= R_y \\ ma_z &= R_z \end{aligned} \right\} \text{ или } \left. \begin{aligned} m_x &= \sum Fkx \\ m_y &= \sum Fky \\ m_z &= \sum Fkz \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

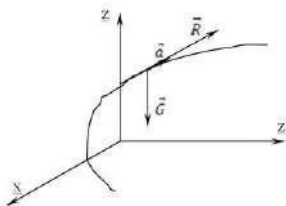


Рис. 123

Дифференциальные уравнения движения материальной точки массой  $m$  в проекции на оси декартовых координат в проекциях на оси естественного трехгранника  $m\vec{a} = \vec{R}$  принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} ma_n &= R_n \\ ma_\tau &= R_\tau \\ ma_b &= R_b \end{aligned} \right\} \text{ или } \left. \begin{aligned} m \frac{av^2}{s} &= R_n \\ m \frac{dv}{dt} &= R_\tau \\ ma_b &= R_b \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

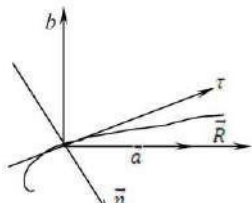


Рис. 124

дифференциальные уравнения движения материальной точки массой  $m$  в проекциях на естественные оси.

$$m\ddot{x} = R_x;$$

$$\begin{aligned} m \frac{d\vartheta_x}{dt} &= R_x \Rightarrow m d\vartheta_x = R_x dt \Rightarrow \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta_x = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t R_x dt \Rightarrow \vartheta - \vartheta_0 = \frac{1}{m} R_x t \Big|_{t_0}^t \Rightarrow \\ \Rightarrow \vartheta - \vartheta_0 &= \frac{1}{m} R_x t(t - t_0); \Rightarrow \vartheta = \frac{1}{m} R_x t(t - t_0) + \vartheta_x = \vartheta = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{t_0}^t \vartheta dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{x_0}^x dx &= \int_{t_0}^t \frac{1}{m} R_x (t - t_0) dt; \quad x - x_0 = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t R_x (t - t_0) dt \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{1}{m} \int_{t_0}^t R_x (t - t_0) dt + x_0 \end{aligned}$$

Задача 1. Материальная точка массой  $m = 9$  кг движется в пространстве под действием силы  $\vec{F} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$ . Определить модуль ускорения точки.

Дано:  $\vec{F} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$ ;  $a$  - ?

Решение:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}.$$

1-й способ:

Дифференциальные уравнения движения точки имеют вид:

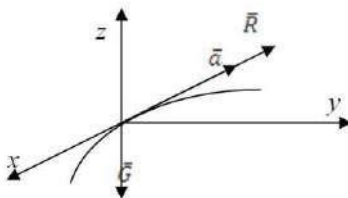


Рис. 125

$$\begin{cases} ma_x = R_x = F_x; & ma_x = F_x \Rightarrow a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{5}{9} = 0,56 \text{ м/с}^2 \\ ma_y = R_y = F_y; & \Rightarrow ma_y = F_y \Rightarrow a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{6}{9} = 0,67 \text{ м/с}^2; \\ ma_z = R_z = F_z; & ma_z = F_z \Rightarrow a_z = \frac{F_z}{m} = \frac{7}{9} = 0,78 \text{ м/с}^2 \end{cases} \quad (82)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \quad (83)$$

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2} = \sqrt{(0,56)^2 + (0,67)^2 + (0,78)^2} = \sqrt{0,32 + 0,45 + 0,61} = \sqrt{1,38} = 1,17 \text{ м/с}^2 \quad (84)$$

2-й способ:

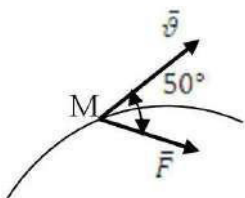
$$m\vec{a} = \vec{R}; \quad m(\vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z) = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z \quad (85)$$

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z; \quad (86)$$

$$\vec{R} = \vec{F} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{5^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 36 + 49} = \sqrt{110} = 10,49 \text{ Н}; \quad (87)$$

$$a = \frac{R}{m} = \frac{F}{m} = \frac{10,49}{9} = 1,17 \text{ м/с}^2 \quad (88)$$

Ответ:  $a = 1,17 \text{ м/с}^2$



Задача 2. Материальная точка М массой  $m=6 \text{ кг}$  перемещается в горизонтальной плоскости по криволинейной траектории под действием силы  $\vec{F} = 8 \text{ Н}$ . Определить касательное ускорение точки.

Решение:

Дано:

$m=6 \text{ кг}$

$F=8 \text{ Н}$

$a_\tau - ?$

$nM\tau \parallel Oxy$

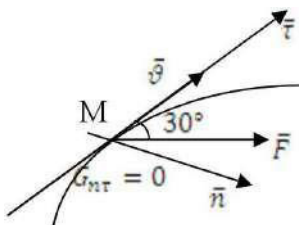


Рис. 126

Дифференциальное уравнение движения точки М в проекции на касательную  $\vec{\tau}$  имеет вид

$$ma_\tau = R_\tau \Rightarrow ma_\tau = F \cos 30^\circ \Rightarrow a_\tau = \frac{F \cos 30^\circ}{m} = \frac{6 \frac{\sqrt{3}}{2}}{6} = 1,15 \text{ м/с}^2 \quad (89)$$

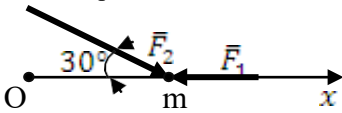
Ответ:  $a_{\tau} = 1,15 \text{ м/с}^2$

**Решить самостоятельно**

Задача 1. Тело движется по гладкой поверхности, которая наклонена под углом  $\alpha = 25^\circ$  к горизонту. Определить ускорение тела. (4,15)

Задача 2.

Материальная точка массой  $m=5$  кг движется под действием сил  $\vec{F}_1 = 3 \text{ Н}$  и  $\vec{F}_2 = 10 \text{ Н}$ . Определить проекцию ускорения точки на ось  $Ox$ . (1,13)



Задача 3. Тело движется вниз по наклонной шероховатой плоскости, которая образует с горизонтом угол  $40^\circ$ . Определить ускорение тела, если коэффициент трения скольжения  $f = 0,3$ . (4,05)

Задача 4. Материальная точка движется по криволинейной траектории под действием силы  $\vec{F} = 15\vec{e} + 0,3t\vec{n}$ . Определить массу точки, если в момент времени  $t=20$  с ее ускорение  $\vec{a} = 0,6 \text{ м/с}^2$ . (26,9)

Задача 5. Материальная точка массой  $m=2$  кг движется по криволинейной траектории под действием силы  $\vec{F} = 3\vec{e} + 4\vec{n}$ . Определить модуль ускорения точки. (2,5)

Задача 6. Материальная точка движется по криволинейной траектории под действием силы  $\vec{F} = 9\vec{e} + 8\vec{n}$ . Определить массу точки, если ее ускорение  $\vec{a} = 0,5 \text{ м/с}^2$ . (24,1)

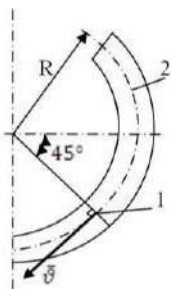
Задача 7. Материальная точка массой  $m=5$  кг движется по криволинейной траектории под действием силы, проекция которой на касательную  $F_\tau = 7H$ , на нормаль  $F_n = 0,1t^2$ . Определить модуль ускорения точки в момент времени  $t=12$  с. (3,20)

Задача 8. Материальная точка движется по криволинейной траектории под действием силы, тангенциальная составляющая которой  $F_\tau = 8H$ . Определить массу точки, если в момент времени  $t=10$  с ее ускорение  $\vec{a} = 0,7 \text{ м/с}^2$ . (30,8)

Задача 9. Материальная точка массой  $m=4$  кг движется по криволинейной траектории под действием силы  $\vec{F} = 0,4t\vec{e} + 3\vec{n}$ . Определить модуль ускорения точки в момент времени  $t=10$  с. (1,25)

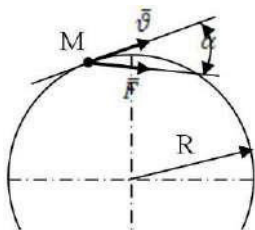
Задача 10. Материальная точка массой  $m=18$  кг движется в горизонтальной плоскости по криволинейной траектории под действием силы  $F=25$  Н. Определить радиус кривизны траектории в момент времени, когда скорость точки  $\vec{v} = 4$  м/с, а векторы скорости и силы образуют между собой угол  $55^\circ$ . (14,1)

Задача 11. Материальная точка массой  $m=10$  кг движется по криволинейной траектории под действием силы  $F=0,4t$ . Определить касательное ускорение точки в момент времени  $t=40$  с, когда угол наклона между силой и вектором скорости равен  $30^\circ$ . (1,39)



Задача 12. Материальная точка 1 массой  $m=30$  кг движется в вертикальной плоскости по трубке 2, изогнутой по дуге окружности радиуса  $R=12$  м (см. рис.). Определить касательное ускорение точки в указанном положении. (6,94)

Задача 13. Внутри гладкой трубки, изогнутой по окружности радиуса  $R=2$  м, в горизонтальной плоскости из состояния покоя движется материальная точка массой  $m=42$  кг под действием силы  $F=21$  Н. Определить горизонтальную составляющую реакции трубки в момент времени  $t=7$  с, если направление силы совпадает с вектором скорости. (257)



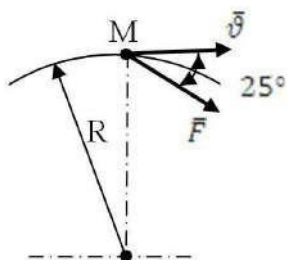
Задача 14. Материальная точка М массой  $m=8$  кг движется в горизонтальной плоскости по окружности радиуса  $R=18$  м. Определить угол  $\alpha$  в градусах между силой  $\vec{F}$  и скоростью  $\vec{v}$  в момент времени, когда скорость точки  $\vec{v} = 3$  м/с, а касательное ускорение  $a_\tau = 0,5$  м/с<sup>2</sup>. (45)

Задача 15. Материальная точка массой  $m=11$  кг движется по криволинейной траектории под действием равнодействующей силы  $F=20$  Н. Определить скорость точки в момент времени, когда радиус кривизны траектории  $\rho=15$  м и угол между силой и вектором скорости равен  $35^\circ$ . (3,96)

Задача 16. Материальная точка массой  $m=16$  кг движется в плоскости по криволинейной траектории под действием равнодействующей силы  $F=0,3t$ . Определить скорость точки в момент времени  $t=20$  с, когда

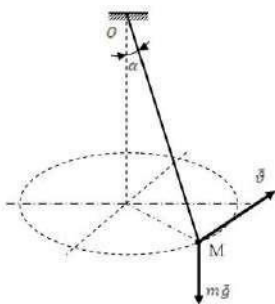


радиус кривизны траектории  $\rho=12$  м и угол между векторами силы и скорости  $\alpha = 50^\circ$ . (1,86)



Задача 17. Материальная точка М массой  $m=1,6$  кг движется из состояния покоя в горизонтальной плоскости по окружности радиуса  $R=12$  м под действием силы  $F=0,2$  т. Определить скорость точки в момент времени  $t=18$  с, если сила образует постоянный угол  $25^\circ$  с вектором скорости. (3,38)

Задача 18. Определить скорость точки М конического маятника, который при длине нити  $OM=1$  м описывает конус с углом при вершине  $\alpha = 45^\circ$  (см. рис.). (2,63)



Задача 19. Материальная точка массой  $m=14$  кг движется из состояния покоя по гладкой направляющей радиуса  $R$ , расположенной в горизонтальной плоскости. Определить путь, пройденный точкой за время  $t=5$  с после начала движения, если на нее действует сила  $F=24$  Н, которая образует постоянный угол  $45^\circ$  с касательной к траектории точки. (15,2)

Задача 20. Материальная точка массой  $m=12$  кг движется из состояния покоя по направляющей радиуса  $R$ , расположенной в горизонтальной плоскости. Определить скорость точки в момент времени  $t=4$  с после начала движения, если на нее действует сила  $F=22$  Н, которая образует постоянный угол  $40^\circ$  с касательной к траектории точки. (5,62)

Задача 21. Материальная точка массой  $m=15$  кг движется из состояния покоя по гладкой направляющей радиуса  $R$ , расположенной в горизонтальной плоскости, под действием силы  $F=0,5t$ . Определить скорость точки в момент времени  $t=30$  с, если сила образует постоянный угол  $50^\circ$  с вектором скорости. (9,64)

### Литература

Основная: 1–5.  
Интернет-ресурсы: 1.

## 28. Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки в декартовых координатах и в проекциях на оси естественного трёхгранника. Принцип Даламбера для материальной точки

**Цель занятия:** вторая основная задача динамики свободной и несвободной материальной точки, дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах и в проекциях на оси естественного трёхгранника. Принцип Даламбера для свободной и несвободной материальной точки.

**Организационная форма:** решение задач.

### Методические рекомендации

Пусть точка массы  $m$  движется прямолинейно под действием сил

$$\sum \vec{F}_k.$$

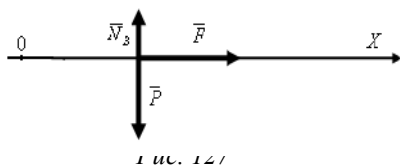
Основное уравнение динамики для данной точки запишется в виде  $m\vec{a} = \sum \vec{F}_k$ . Спроецируем это равенство на ось  $x$  ( $y$  или  $z$ ) относительно которой движется точка, получим  $ma_x = \sum F_{kx}$ . Так как  $a_x = \frac{dU_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ , то  $m\ddot{x} = \sum F_{kx}$  – дифференциальное уравнение прямоли-

нейного движения данной материальной точки в проекции на ось  $x$ .

Для определения закона движения точки нужно проинтегрировать уравнение  $m\ddot{x} = \sum F_{kx}$ . Определение закона движения точки массы  $m$  под действием заданных сил  $\sum \vec{F}_k$ , её начальному положению и начальной скорости является второй основной задачей динамики материальной точки.

**Задача 1.** Материальная точка массы  $m$  движется прямолинейно по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы, изменяющейся по закону  $F = F_0 \cos \omega t$ , где  $F_0$  и  $\omega$  – постоянные величины. В начальный момент точка находилась в положении  $x_0$  и имела начальную скорость  $\dot{x}_0 = U_0$ . Найти закон движения точки относительно оси  $x$ .

**Решение:** Изображаем точку на оси  $ox$  в произвольном положении и дей-



ствующим на неё силы: силу тяжести  $\vec{P}$ , реакцию  $\vec{N}$  и заданную силу  $\vec{F}$ . Дифференциальное уравнение движения данной точки в проекции на ось  $x$  будет  $m\ddot{x} = \sum F_{kx}$ . У нас

$$\sum F_{kx} = P_x + N_x + F_x = 0 + 0 + F = F_0 \cos \omega t .$$

Тогда  $m\ddot{x} = F_0 \cos \omega t$ . Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение.

Так как  $\dot{x} = \frac{dU_x}{dt}$ , то  $m \frac{dU_x}{dt} = F_0 \cos \omega t$  — получим дифференциаль-

ное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем:  $\frac{dU_x}{dt} = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$ ;

$$\int_{U_0}^{U_x} dU_x = \frac{F_0}{m\omega} \int_0^t \cos \omega t dt; \quad U_x \Big|_{U_0}^{U_x} = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t \Big|_0^t;$$

$$U_x = U_0 + \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t \text{ — закон изменения скорости данной точки.} \quad (89)$$

Так как  $U_x = \frac{dx}{dt}$ , то  $\frac{dx}{dt} = U_0 + \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t$ . Разделим переменные и

проинтегрируем:  $\int_{x_0}^x dx = U_0 \int_0^t dt + \frac{F_0}{m\omega^2} \int_0^t \sin \omega t dt$ ;  $x \Big|_{x_0}^x = U_0 t \Big|_0^t - \frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t \Big|_0^t$ ;

$$x = x_0 + U_0 t + \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) \text{ — искомый закон движения точки.} \quad (90)$$

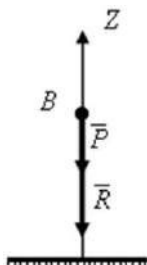


Рис. 128

Задача 2. На какую высоту  $H$  поднимется тело весом  $P$ , брошенное вертикально вверх со скоростью  $U_0$ , если сопротивление воздуха может быть выражено формулой  $R = k^2 p U^2$ , где  $U$  — величина скорости тела.

Решение: Примем тело за материальную точку. Изобразим на оси  $oz$  точку в произвольном положении и действующие на неё силы: силу тяжести  $\bar{P}$  и силу сопротивления воздуха  $\bar{R}$ . Дифференциальное уравнение движения данного тела в проекции на ось  $z$  будет  $m\ddot{x} = \sum F_{kz}$ . У нас

масса  $m = \frac{P}{g}$ ,  $\sum F_{kz} = -P - k^2 P U^2$ . Тогда  $\frac{P}{g} \frac{dU_z}{dt} = -g(1 + k^2 U^2)$ .

Умножим обе части этого равенства на  $dz$ , получим  $\frac{dU_z \cdot dz}{dt} = -g(1 + k^2 U^2) dz$ ; Так как  $\frac{dz}{dt} = U_z = U$ , то  $U dU = -g(1 + k^2 U^2) dz$ .

Так как в начальный момент начальное положение тела  $z_0 = 0$ , а конеч-

ная скорость  $U=0$ , то разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{1}{2k^2} \int_{U_0}^0 \frac{d(1+k^2U^2)}{1+k^2U^2} = -g \int_0^H dz; \quad \frac{1}{2k^2} \ln(1+k^2U^2) \Big|_{U_0}^0 = -gz \Big|_0^H; \quad \text{откуда}$$

$$\ln(1+k^2U^2)$$

$$H = \frac{0}{2gk^2}. \quad (91)$$

### Решить самостоятельно

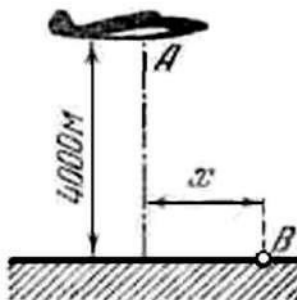
Задача 1. Тяжелая точка поднимается по негладкой наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом. В начальный момент скорость точки равнялась  $U_0 = 15$  м/с. Коэффициент трения  $f = 0,1$ . Какой путь пройдет точка до остановки? За какое время точка пройдет этот путь? *Ответ:*  $s = 19,57$  м,  $t = 2,61$  с.

Задача 2. Материальная точка массы  $m$  совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону  $F = F_0 \cos \omega t$ , где  $F_0$  и  $\omega$  – постоянные величины. В начальный момент точка имела скорость  $U_0 = U$ . Найти уравнение движения точки. *Ответ:*  $x = \frac{F_0}{m\omega^2} \left(1 - \frac{\sin kt}{k}\right)$ .

Задача 3. Частица массы  $m$ , несущая заряд электричества  $e$ , находится в однородном электрическом поле с переменным напряжением  $E = A \sin kt$  ( $A$  и  $k$  – заданные постоянные). Определить движение частицы, если известно, что в электрическом поле на частицу действует сила  $F = eE$ , направленная в сторону напряжения  $E$ . Влиянием силы тяжести пренебречь. Начальное положение частицы принять за начало координат; начальная скорость частицы равна нулю. *Ответ:*  $x = \frac{eA}{mk} \left(t - \frac{\sin kt}{k}\right)$ .

Задача 4. Точка массы  $m$  начинает двигаться из состояния покоя из положения  $x_0 = a$  прямолинейно под действием силы притяжения, пропорциональной расстоянию от начала координат:  $F_x = -c_1 mx$ , и силы отталкивания, пропорциональной кубу расстояния:  $Q_x = c_2 mx^3$ . При каком соотношении  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $a$  точка достигает начала координат и остановится? *Ответ:*  $c_1 = \frac{1}{2c_2 a^2}$ .

Задача 5. Самолет  $A$  летит на высоте 4000 м над землей с горизонтальной скоростью 140 м/с (см. рис.). На каком расстоянии  $x$ , измеряемом по горизонтальной прямой от данной точки  $B$ , должен быть сброшен с самолета без начальной относительной скорости какой-либо груз для того, чтобы он упал в эту точку? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ:  $x = 4000$  м.



Задача 6. Тело массы 2 кг, брошенное вертикально вверх со скоростью 20 м/с, испытывает сопротивление воздуха, которое при скорости  $U$  м/с равно  $0,4U$  Н. Найти, через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения. Ответ: 1,71 с.

### ***Вопросы для обсуждения***

1. 1-я задача динамики материальной точки?
2. От чего может зависеть сила, вызывающая движение материальной точки?
3. Сформулировать вторую основную задачу динамики материальной точки?
4. К каким силам, приложенным к материальной точке, присоединяют силу трения скольжения  $\vec{F}_{mp}$  ( $F_{mp} = fN$ )?
5. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекции на оси декартовых координат?
6. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекции на естественные оси?

### ***Литература***

- Основная: 1–4.  
Интернет-ресурсы: 1.

## 29. Работа силы. Мощность

**Цель занятия:** Работа силы. Мощность. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.

**Организационная форма:** решение задач.

### Методические рекомендации

Работа силы  $\vec{F}$  на любом конечном перемещении  $M_0M_1$ , при прямолинейном движении точки  $M$ , равна  $A = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F dS$ . При криволинейном

движении  $A = \int_{(M_0)} F_\tau dS$ , где  $F_\tau$  – проекция силы  $\vec{F}$  на касательную  $\tau$ .

Если сила  $\vec{F} = \text{const}$ , то элементарная работа  $A = FS$ , где  $S$  – путь пройденный точкой. Если точка движется по криволинейной траектории, то через проекции силы на оси декартовой системы координат, работа силы  $\vec{F}$  имеет вид:

$$A = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (92)$$

Мощность, в общем случае, равна  $N = F_\tau U$ , где  $U$  – скорость движения точки. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки записывается в виде:  $d(\frac{mU^2}{2}) = \sum dA_k$ , где  $\sum dA_k$  – сумма элементарных работ всех сил действующих на точку. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в конечной форме имеет вид:

$\frac{mU^2}{2} - \frac{mU_0^2}{2} = \sum_k A$ , где  $U_0$  – начальная скорость точки,  $U$  – конечная скорость точки,  $\sum A_k$  – алгебраическая сумма работ всех действующих на точку постоянных сил, при некотором её конечном перемещении.

Задача 1. Точка массы  $m$  движется по горизонтальной прямой по закону  $S = t^4$  под действием силы  $F = 12t^2$ . Определить работу этой силы при перемещении точки на расстояние  $S = 16$  м.



перемещении точки из положения точки  $S_0 = 0$  в положение  $S = 4$  м.

Решение.

$$A = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F dS = \int_{(M_0)}^{(M_1)} 12t^2 \cdot \underline{dS} \cdot dt = \int_{(M_0)}^{(M_1)} 12t^2 \cdot 4t^3 dt = 48 \int_{(M_0)}^{(M_1)} t^5 dt \cdot \quad (93)$$

Так как при  $S = 0$ , то  $t = 0$ , а при  $S = 4$  м,  $4 = t^4$ ;  $t = \sqrt[4]{2}C$ , то

$$A = 48 \int_0^{\sqrt{2}} t^5 dt = 48 \cdot \frac{t^6}{6} \Big|_0^{\sqrt{2}} = 8 \cdot (\sqrt{2})^6 = 8 \cdot 8 = 64 \text{ Дж.} \quad (94)$$

Таким образом, работа данной силы  $A = 64$  Дж.

Задача 2. Пусть точка  $M$ , на которую действует сила тяжести  $\vec{P}$ , переместилась из положения  $M_0$  в положение  $M_1$  (рис.129)

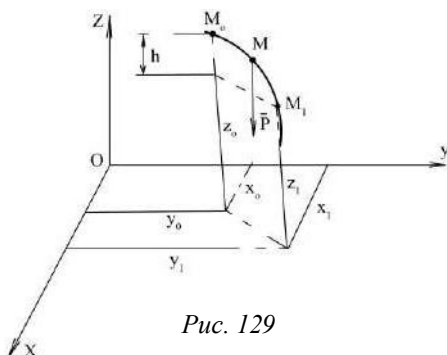


Рис. 129

Тогда  $P_x = \vec{P}_y = 0$ ,  $P_z = -P$ .

Подставляя эти значения в формулу (92), получим

$$A(\vec{P}) = \int_{z_0}^{z_1} (-\vec{P}) dz = P(z_0 - z_1),$$

обозначая  $z_0 - z_1 = \pm h$ , получим

$$A(\vec{P}) = \pm Ph \quad (95)$$

Если точка  $M_0$  выше (ниже) точки  $M_1$ , то  $A(\vec{P}) > 0$ ,  $(A(\vec{P}) < 0)$

Из равенства (93) видно, что работа силы тяжести не зависит от траектории движения точки  $M$ , а зависит только от ее вертикального перемещения  $h$ .

Задача 3. Тело  $M$  находится на шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом. Из состояния покоя телу сообщена начальная скорость  $U_0$ . Определить путь  $S$ , пройденный телом до остановки, если коэффициент трения при движении равен  $f$ .

Решение: Примем тело  $M$  за материальную точку. Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки в конечной форме:  $\frac{mU^2}{2} - \frac{mU_0^2}{2} = \sum_k A$

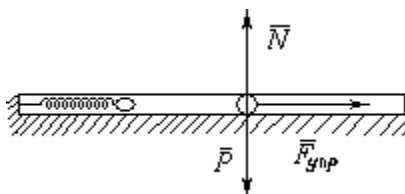
На данное тело действуют: сила тяжести  $\vec{P} = m\vec{g}$ , реакция  $\vec{N}$  и сила трения скольжения  $\vec{F}_{mp}$  ( $F_{mp} = fN = fmg \cos \alpha$ ). Определяем работу этих сил:

$$A(\vec{P}) = P \cdot h = mgS \sin \alpha; \quad A(\vec{N}) = 0;$$

$A(\overline{F_{mp}}) = -F_{mp}S = -fmgS \cos \alpha$ . Так как начальная скорость  $U_0$ , а конечная  $U_0 = 0$ , то  $0 - \frac{mU_0^2}{2} = mgS(f \cos \alpha - \sin \alpha)$ .

$$\text{Откуда } S = \frac{U_0^2}{2g(f \cos \alpha - \sin \alpha)}. \quad (96)$$

Задача 4. Пружина имеет в ненапряженном состоянии длину 20 см. Сила, необходимая для измерения ее длины на 1 см равна 1,96 Н. С какой



скоростью  $U$  вылетит из трубки шарик масса  $m = 30$  г, если пружина была сжата до длины 10 см? Трубка расположена горизонтально. Трением пренебречь.

Решение:

Воспользуемся теоремой об измерении кинетической энергии материальной точки, приняв шарик за точку, в конечной форме:  $\frac{mU^2}{2} - \frac{mU_0^2}{2} = \sum_k A$ . На шарик действуют

силы:  $\vec{P}$  – вес шарика,  $\vec{F}_{упр}$  – сила упругости пружины,  $\vec{N}$  – реакция.

Определяем сумму работ этих сил.  $A(\vec{P}) = A(\vec{N}) = 0$ , так как эти силы перпендикулярны движению шарика.  $A(\vec{F}_{упр}) = \frac{c}{2} (\Delta l_{нач}^2 - \Delta l_{кон}^2)$ . У нас

$m = 30 \text{ г} = 0,03 \text{ кг}$ ,  $c = 1,96 \text{ Н/см} = 196 \text{ Н/м}$ ,  $\Delta l_{нач} = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$ .

$\Delta l_{кон} = 0$ . Тогда учитывая, что начальная скорость шарика  $U_0 = 0$ , по-

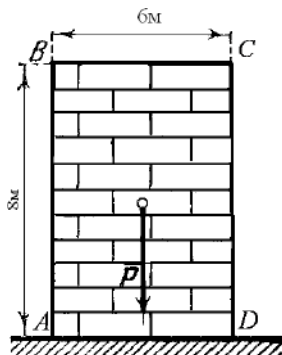
лучим  $\frac{0,03U^2}{2} = \frac{196}{2} (0,1^2 - 0)$ . Откуда  $U = 8,08 \text{ м/с}$ .

### Решить самостоятельно

Задача 1. Вычислить работу, которая производится при подъеме груза массы 20 кг по наклонной плоскости на расстоянии 6 м, если угол образующей плоскостью с горизонтом, равен  $30^\circ$ , а коэффициент трения равен 0,01. Ответ: 598 Дж.

Задача 2. Бетонный блок  $ABCD$ , размеры которого указаны на рисунке, имеет массу 4000 кг. Определить работу, которую надо затратить

196



на опрокидывание его вращением вокруг ребра  
*D.* Ответ: 39,24 кДж.

Задача 3. По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол  $30^\circ$ , спускается без начальной скорости тяжелое тело; коэффициент трения равен 0,1. Какую скорость будет иметь тело, пройдя 2 м от начала движения? Ответ: 4,02 м/с.

Задача 4. Материальная точка массы 3 кг по горизонтальной прямой влево со скоростью 5 м/с. К точке приложили постоянную силу, направленную вправо. Действие силы прекратилось через 30 с, и тогда скорость точки оказалась равной 55 м/с и направленной вправо. Найти величину этой силы и совершённую ею работу. Ответ:  $F=6$  Н,  $A=4,5$  кДж.

Задача 5. Брус начинает двигаться с начальной скоростью  $u_0$  по горизонтальной шероховатой плоскости и проходит до полной остановки расстояние  $s$ . Определить коэффициент трения скольжения, считая, что сила трения пропорциональна нормальному давлению. Ответ:  $f = \frac{U_0^2}{2gs}$

Задача 6. Гвоздь вбивается в стену, оказывающую сопротивление 700 Н. При каждом ударе молотка гвоздь углубляется в стену на длину  $l = 0,15$  см. Определить массу молотка, если при ударе о шляпку гвоздя он имеет скорость  $v = 1,25$  м/с. Ответ: 1,344 кг.

Задача 7. Упавший на Землю метеорит массы 39 кг углубился в почву на 1,875 м. Вычислено, что почва в месте падения метеорита оказывает проникающему в нее телу сопротивление  $5 \cdot 10^5$  Н. С какой скоростью метеорит достиг поверхности Земли? С какой высоты он должен был упасть без начальной скорости, чтобы у поверхности Земли приобрести указанную скорость? Считаем силу тяжести постоянной и пренебрегаем сопротивлением воздуха. Ответ:  $U = 219$  м/с,  $H = 2453$  м.

### ***Вопросы для обсуждения***

1. Чему равна кинетическая энергия материальной точки?
2. Чему равна работа силы тяжести?
3. От чего зависит работа силы тяжести?
4. Как определяется сила трения скольжения?
5. Зависит ли работа силы трения скольжения от изменения угла наклона плоскости, по которой движется точка, с горизонтом?
6. Работа силы упругости?
7. Работа силы постоянной по модулю и направлению?
8. Механический смысл  $c$  – коэффициента жёсткости пружины?

### ***Литература***

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: [www.mashin.ru](http://www.mashin.ru)

### 30. Кинетическая энергия материальной точки. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

**Цель занятия:** Кинетическая энергия материальной точки, теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.

**Организационная форма:** решение задач.

#### Методические рекомендации

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \text{ – кинетическая энергия материальной точки.} \quad (97)$$

$T - T_0 = \int_{S_0}^S F ds$  – изменение кинетической энергии материальной точки массой  $m$  на участке ее движения со скоростями  $\vec{v}$  и  $\vec{v}_0$  равно полной работе всех сил, действующих на точку по перемещению ее из положения  $S_0$  в положение  $S$ . (98)

Задача. Точка масса  $m$  брошена с поверхности земли под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту (рис. 130) с начальной скоростью  $v_0 = 30$  м/с. Определить наибольшую высоту  $h$  подъема точки.

Решение.

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки в конечной форме

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum_k A_k. \quad (99)$$

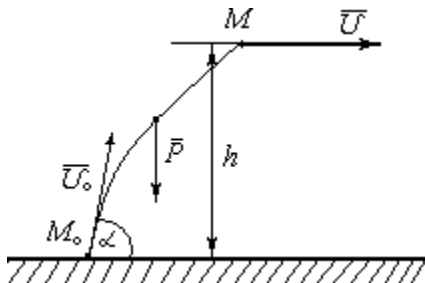


Рис. 130

Так как движение точки будет происходить только под действием силы тяжести, то

$\sum A_k = A(\vec{P}) = -Ph = -mgh$ . Точка будет подниматься до тех пор, пока ее вертикальная скорость станет равной нулю. Полагая  $v_{\text{вер}} = v = 0$ , а по условию  $v_{\text{вер}} = v_0 \sin \alpha$ , то по теореме,

получим 
$$0 - \frac{m(v_0 \sin \alpha)^2}{2} = -mgh.$$

Откуда 
$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} =$$

З  
н

ачит,  $h_{\text{max}} = 34,4$  м.

$$\frac{30^2 \sin^2 60^\circ}{2 \cdot 9,8} = \frac{34,4}{\text{m.}}$$

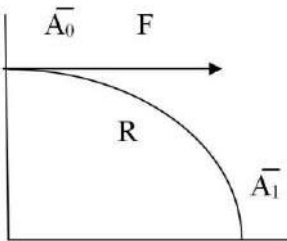
(100)



### Решить самостоятельно

Задача 1. Материальная точка массой  $m=10$  кг движется по прямой без начальной скорости под действием силы  $\vec{F} = 0,4t$ , направленной по той же прямой. Определить путь, пройденный точкой в момент времени, когда  $v=10$  м/с. (1)

Задача 2. Железнодорожный поезд движется по горизонтальному и прямолинейному участку пути. При торможении развивается сила сопротивления, равная  $0,1$  веса поезда. В момент начала торможения скорость поезда равняется  $20$  м/с. Найти время торможения и тормозной путь. (20,4;204)



Задача 3. Точка  $A$  – точка приложения постоянной горизонтальной силы  $\vec{F}=1$  Н перемещается по дуге окружности радиуса  $R=4$  м (см. рис.). Определить работу этой силы на перемещение точки  $A$  из начального положения  $\vec{A}_0$  в положение  $\vec{A}_1$ . (4)

Задача 4. Тело массой  $m=12$  кг из состояния покоя движется по горизонтальной прямой под действием силы  $F=0,6t$ , которая направлена по той же прямой. Определить путь, пройденный телом по истечении  $10$  с после начала движения. (8,33)

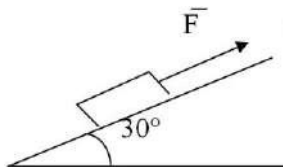
Задача 5. Материальная точка массой  $m=25$  кг начала движение из состояния покоя по горизонтальной прямой под действием силы  $F=20t$ , которая направлена по той же прямой. Определить путь, пройденный точкой за  $4$  с. (8,53)

Задача 6. Материальная точка массой  $m=50$  кг из состояния покоя движется по гладкой горизонтальной направляющей под действием силы  $F=50$  Н, вектор которой образует постоянный угол  $\alpha=20^\circ$  с направляющей. Определить путь, пройденный точкой за время  $t=20$  с. (188)

Задача 7. Тело движется вниз без начальной скорости по наклонной шероховатой плоскости, которая образует с горизонтом угол  $40^\circ$ . Определить путь, пройденный телом в тот момент времени, когда его скорость будет равна  $v=10$  м/с, коэффициент трения скольжения  $f = 0,1$ . (0,1)

Задача 8. Материальная точка массой  $m=10$  кг движется по горизонтальной прямой под действием силы  $F=10t$ , которая направлена по той же прямой. Определить путь, пройденный точкой до момента, когда  $v=10$  м/с, если  $v_0=2$  м/с. (12)

Задача 9. Ползун, получив некоторую начальную скорость  $v_0$  прошел по шероховатой плоскости расстояния  $s=1\text{м}$  и остановился. Определить начальную скорость ползуна, если коэффициент трения скольжения  $f = 0,1$ . (1,4)



Задача 10. Тело массой  $m=200\text{кг}$  из состояния покоя движется вверх по гладкой наклонной плоскости под действием силы  $\vec{F}=1\text{кН}$ . Определить перемещение тела за время  $t=4,33\text{с}$  после начала движения. (8)

### ***Вопросы для обсуждения***

1. Кинетическая энергия материальной точки?
2. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки?
3. Работа силы тяжести?
4. Работа силы трения скольжения?
5. Работа силы, постоянной по модулю и направлению?
6. Работа переменной силы?

### ***Литература***

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

### 31. Импульс силы. Теорема об изменении количества движения материальной точки

**Цель занятия:** импульс силы, количество движения материальной точки, теорема об изменении количества движения материальной точки.

**Организационная форма:** решение задач.

#### Методические рекомендации

$\vec{m\vec{v}}$  – вектор количества движения материальной точки ( $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$ ). (100)

$\vec{S} = \vec{F}t$  – элементарный импульс силы  $\vec{F}$  за время  $t$  ( $\text{Н} \cdot \text{с}$ ); (101)

$\vec{m\vec{v}} - m\vec{v}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F} dt$  – изменение вектора количества движения материальной точки массой  $m$  на участке ее движения со скоростями  $\vec{v}$  и  $\vec{v}_0$  равно полному импульсу всех сил, действующих на точку за время  $t_0 - t$ . (102)

В практических задачах теорема об изменении количества движения материальной точки применяется в проекциях на оси системы отсчета:  $t$

$$m\vec{v}_x - m\vec{v}_{0x} = \sum S_x(\vec{F}_k) \quad (103)$$

**Задача.** Внутри полой трубки движется шарик массой  $m$ . Время движения шарика на участке ВД  $t = 1$  с, коэффициент трения скольжения  $f = 0,3$ . Определить скорость шарика в положении Д, если  $v_B = 8$  м/с.

Дано:  $m$ , кг;  $v_B = 8$  м/с,  $f = 0,3$ ,  $t = 1$  с.  $v_D = ?$

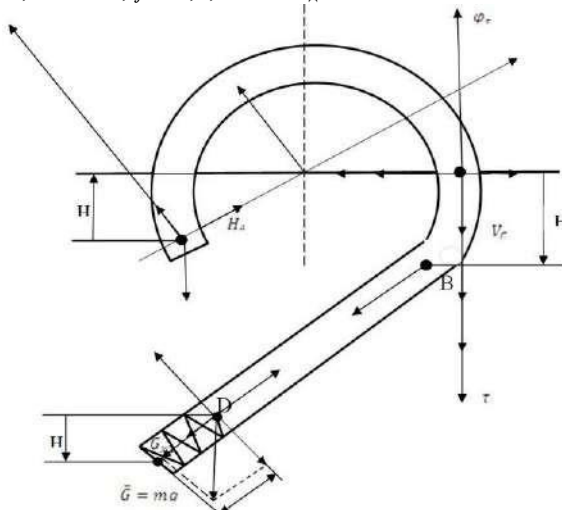


Рис. 131

Для нахождения  $V_D$  применим на участке BD теорему об изменении количества движения  $mV_{DX} - mV_{BX} = \sum S_X(\bar{F}_K)$ ;  $V_{DX} = BD$ ;  $V_{BX} = V_B$ ;

$$\sum S_X(\bar{F}_K) = S_X(\bar{G}) + S_X(\bar{N}_D) + S_X(\bar{F}_{TP.C}).$$

$$S_X(\bar{N}_D) = 0 * \tau_{BD} = 0; N_D = mg \sin \alpha; S_X(\bar{G}) = mg \sin \alpha * \tau_{BD};$$

$$S_X(\bar{F}_{TP.C}) = -Z * N_D * \tau_{BD};$$

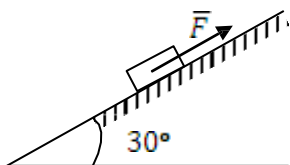
$$mV_D - mV_B = -Zmg \cos \alpha * \tau_{BD} + mg \sin \alpha * \tau_{BD};$$

$$V_D = -Zg \cos \alpha * \tau_{BD} + g \sin \alpha * \tau_{BD} + V_B = -9,81 * 0,30 * \frac{\sqrt{2}}{2} + 8 = 12,76 \text{ м/с}$$

Ответ:  $v_d = 12,76 \text{ м/с}$ .

### Решить самостоятельно

Задача 1. Материальная точка массой  $m=900 \text{ кг}$  движется по горизонтальной прямой под действием силы  $F=270t$ , которая направлена по той же прямой. Определить скорость точки в момент времени  $t=10 \text{ с}$ , если при  $t_0 = 0$  скорость  $v_0 = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . (25)



Задача 2. Тело массой  $m=200 \text{ кг}$  с начальной скоростью  $v_0 = \frac{2\text{м}}{\text{с}}$  движется вверх по гладкой наклонной плоскости под действием силы  $F=1 \text{ кН}$ . Определить время движения тела до полной остановки. (4,1)

Задача 3. На материальную точку массой  $m=200 \text{ кг}$ , которая находится на горизонтальной поверхности, действует вертикальная подъемная сила  $F=10t^2$ . Определить время  $t$ , при котором начинается движение точки. (14,0)

Задача 4. Материальная точка массой  $m=900 \text{ кг}$  движется по горизонтальной прямой под действием силы  $F=270t$ , которая направлена по той же прямой. Определить начальную скорость точки при  $t_0 = 0$ , если через  $t = 10 \text{ с}$   $v = 25 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . (10)

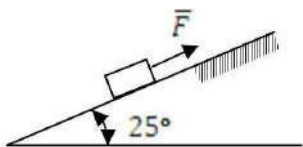
Задача 5. Ползун, получив начальную скорость  $v_0 = 1,4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ , движется по шероховатой горизонтальной плоскости до полной остановки. Определить время движения ползуна до остановки, если  $f=0,1$ . (1,43)

Задача 6. Материальная точка массой  $m=10 \text{ кг}$  движется без начальной скорости по горизонтальной прямой под действием силы  $F=10t$ , ко-

торая направлена по той же прямой. Определить время, когда скорость точки будет равна  $v = 10 \frac{м}{с}$ . (4,5)

Задача 7. Тело движется вниз по наклонной шероховатой плоскости, которая образует с горизонтом угол  $40^\circ$ . Определить начальную скорость тела, если спустя 10 с после начала движения со скоростью  $v = 12 \frac{м}{с}$ , коэффициент трения скольжения  $f=0,1$ . (5,8)

Задача 8. Тело движется без начальной скорости по наклонной шероховатой плоскости, которая составляет с горизонтом угол  $40^\circ$ . Определить время движения тела до того момента, когда скорость тела будет равна  $v = 10 \frac{м}{с}$ , коэффициент трения скольжения  $f=0,3$ . (0,4)



Задача 9. Тело массой  $m=200$  кг из состояния покоя движется вверх по гладкой наклонной плоскости под действием силы  $F=1$  кН. Определить время, за которое тело переместится на расстояние 8 м. (4,33)

Задача 10. Материальная точка движется из состояния покоя вниз по гладкой плоскости, которая наклонена под углом  $10^\circ$  к горизонту. Определить, за какое время точка пройдет путь 30 м. (5,93)

Задача 11. Материальная точка массой  $m=900$  кг движется по горизонтальной прямой под действием силы  $F=270t$ , которая направлена по той же прямой. Определить скорость, которую достигнет точка через  $t=5$  с, если  $t_0=0$ , скорость  $v_0 = 10 \frac{м}{с}$ . (5)

Задача 12. Материальная точка массой  $m=10$  кг движется по прямой под действием силы  $F=0,4t$ , которая по направлению совпадает с направлением движения точки. Определить время, за которое скорость точки увеличится с 2 до 8 м/с. (17,3)

Задача 13. Материальная точка массой  $m=900$  кг движется по горизонтальной прямой под действием силы  $F=270t$ , которая направлена по той же прямой. Определить время  $t$  после начала движения, за которое скорость точки изменилась с  $v_0 = 10 \frac{м}{с}$  до  $v = 25 \frac{м}{с}$ , если  $t_0=0$ . (10)

Задача 14. Материальная точка массой  $m=0,2$  кг движется вдоль оси Ох под действием силы  $F_x = -0,4t$ . Определить скорость точки в момент времени  $t=2$  с, если ее начальная скорость  $v_{x0} = 6 \frac{м}{с}$ . (2)

Задача 15. Определить путь, пройденный материальной точкой массой  $m$  по оси Ох за время  $t=1$ с, если она движется под действием силы  $F_x = 12mt^2$ . В момент времени  $t_0 = 0$  координата  $x_0 = 3$ м, скорость. (10)

Задача 16. Материальная точка массой  $m=100$  кг движется по горизонтальной прямой под действием силы  $F=10t$ , которая направлена по той же прямой. Определить время, за которое скорость точки увеличится с 5 до 25 м/с. (20)

### ***Вопросы для обсуждения***

1. Элементарный импульс силы?
2. Вектор количества движения материальной точки? Проекция вектора количества движения на ось?
3. Проекция вектора импульса силы на ось?
4. Теорема об изменении количества движения материальной точки?
5. Импульс переменной силы?

### ***Литература***

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

## **32. Применение общих теорем динамики к исследованию движения материальной точки**

**Цель занятия:** применение общих теорем динамики к исследованию движения материальной точки.

**Организационная форма:** решение задач.

### ***Методические рекомендации***

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum_k \vec{F} \quad (104)$$

– теорема об изменении количества движения материальной точки.  
Если  $F = \text{const}$ , то

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \sum_k \vec{S}_k \quad (105)$$

где  $S = Ft$  – элементарный импульс силы за время  $t$ .

Теорема об изменении количества движения точки в практических задачах применяется на тех участках траектории движения точки, где задано время движения точки или это время нужно определить. Теорема об изменении количества движения точки в практических задачах применяется в проекциях на оси выбранной системы координат для рассмотрения движения материальной точки:

$$m\upsilon_x - m\upsilon_{0x} = \sum S_{kx} \quad (106)$$

$$\sum (\bar{F}_k + \bar{N} + \bar{F}^u) = 0 \quad (107)$$

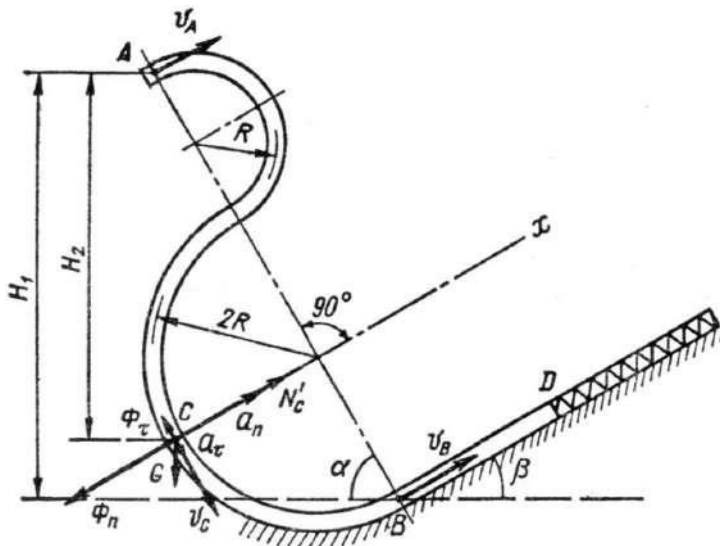
– это принцип Даламбера для материальной точки: геометрическая сумма заданных сил, сил реакций опор и сил инерции точки должны быть равны нулю.

Задача. Шарик, принимаемый за материальную точку, движется из положения *A* внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости (рис.132). Найти скорость шарика в положениях *B* и *C* и давление шарика на стенку трубки в положении *C*. Трением на криволинейных участках траектории пренебречь.

Дано:  $m = 0,5 \text{ кг}$ ;  $v_A = 0,8 \text{ м/с}$ ;  $\tau = 0,1 \text{ с}$  (время движения на участке *BD*);

$R = 0,2 \text{ м}$ ;  $f = 0,1$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ;  $\beta = 30^\circ$ ;  $h_0 = 0$ ;  $c = 10 \text{ Н/см} = 1000 \text{ Н/м}$ .

Определить  $v_B, v_C, N_C, v_D, h$ . (рис.132).







Решение: Для определения  $v_B$  и  $v_C$  применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки. Движение шарика на участках  $AC$  и  $AB$  траектории происходит под действием силы тяжести  $G$  (силы трения на криволинейных участках не учитываем):

$$m_B^2/2 - m_A^2/2 = \sum A_i = GH_1 = mgAB \sin \alpha = mg6R \sin \alpha; \quad (105)$$

$$\begin{aligned} v_B^2 - v_A^2 &= 2g6R \sin \alpha; \\ v_B &= 4,59 \text{ м/с}; \end{aligned} \quad (106)$$

$$mv_C^2/2 - mv_A^2/2 = \sum A_i = GH_2 = mg(4R \sin \alpha + 2R \cos \alpha); \quad (107)$$

$$\begin{aligned} v_C^2 - v_A^2 &= 4gR(2 \sin \alpha + \cos \alpha); \\ v_C &= \sqrt{v_A^2 + 4gR(2 \sin \alpha + \cos \alpha)}, \\ v_C &= 4,26 \text{ м/с}. \end{aligned} \quad (108)$$

Определяем давление шарика на стенку канала в положении  $C$ .

В соответствии с принципом Даламбера для материальной точки геометрическая сумма сил, приложенных к точке, и силы инерции этой точки равны нулю:

$$\vec{G} + \vec{N}'_C + \vec{\Phi} = 0. \quad (109)$$

Силу инерции материальной точки можно разложить на нормальную и касательную составляющие:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_\tau. \quad (110)$$

Сумма проекций сил  $\vec{G}$ ,  $N'_C$  и  $\vec{\Phi}$  на ось  $x$  должна быть равна нулю:

$$N'_C - G \cos 60^\circ - \Phi_n = 0. \quad (111)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} N'_C - G \cos 60^\circ - \Phi_n &= mg \cos 60^\circ + \frac{mv_C^2}{2R}, \\ N'_C &= 25,2 \text{ Н}. \end{aligned} \quad (112)$$

Реакцию  $N'_C$  можно также определить с помощью естественного уравнения движения:

$$\frac{mv_C^2}{R} = \sum P_i \cos(\vec{P}_i, \vec{n}) = N'_C - G \cos 60^\circ. \quad (113)$$

Отсюда

$$N'_C = G \cos 60^\circ + \frac{mv_C^2}{R}.$$



Искомое давление  $N_C$  шарика на стенку трубки по числовому значению равно найденной реакции  $N'_C$  и направлено в противоположную сторону.

Скорость шарика в положении  $D$  найдем, применив на участке  $BD$  теорему об изменении количества движения материальной точки (рис. 133):

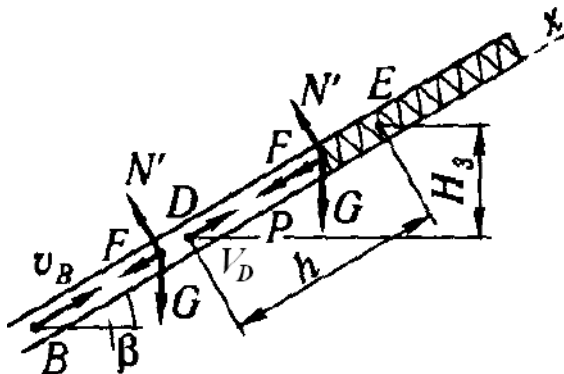


Рис. 133

$$mv_{Dx} - mv_{Bx} = \sum S_{ix}. \quad (115)$$

К точке приложена сила тяжести  $\vec{G}$ , реакция стенки трубки  $\vec{N}'$  и сила трения  $\vec{F}$ :

$$F = fN' = fG \cos \beta. \quad (116)$$

Так как

$$v_{Dx} = v_D, v_{Bx} = v_B, \sum S_{ix} = -G \sin \beta \cdot t - Ft = -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t, \quad (117)$$

$$\text{то } mv_D - mv_B = -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t, \quad (118)$$

Откуда  $v_D = 4,01 \text{ м/с}$ .

Для максимального сжатия  $h$  пружины воспользуемся на участке  $DE$  теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$mv_E^2/2 - mv_D^2/2 = \sum A_i = -ch^2/2 - CH_3 - Fh. \quad (119)$$

Учитывая, что  $v_E = 0$  и  $H_3 = h \sin \beta$ , получаем

$$ch^2/2 + G(\sin \beta + f \cos \beta) h - mv_D^2/2 = 0,$$

или

$$h^2 + 2Gh(\sin \beta + \cos \beta)/c - mv_D^2/c = 0. \quad (120)$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно  $h$ , получим  
 $h = (-0,003 \pm 0,090) \text{ м.}$

Принимаем в качестве искомой величины положительный корень  
 квадратного уравнения:  $h = -0,003 + 0,090 = 0,087 \text{ м.}$

Ответ:  $v_B = 4,59 \text{ м/с}$ ;  $v_C = 4,26 \text{ м/с}$ .  $N'_C = 25,2 \text{ Н}$ .  $v_D = 4,01 \text{ м/с}$ .  
 $h = -0,003 + 0,090 = 0,087 \text{ м.}$

### Решить самостоятельно

Задача.

Шарик, принимаемый за материальную точку, движется из положения  $A$  внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости (рис. 134–136). Найти скорость шарика в положениях  $B$  и  $C$  и давление шарика на стенку трубки в положении  $C$ . Трением на криволинейных участках траектории пренебречь. В вариантах 3, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 19, 25, 28, 29 шарик, пройдя путь  $h_0$ , отделяется от пружины.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 1. В задании приняты следующие обозначения:  $m$  – масса шарика;  $V_A$  – начальная скорость шарика;  $\tau$  – время движения шарика на участке  $AB$  (в вариантах 1, 2, 5, 8, 14, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 30) или на участке  $BD$  (в вариантах 3, 4, 6, 7, 9–13, 15–17, 19, 22, 25, 26, 28, 29);  $f$  – коэффициент трения скольжения шарика по стенке трубки;  $h_0$  – начальная деформация пружины;  $h$  – наибольшее сжатие пружины;  $c$  – коэффициент жесткости пружины;  $H$  – наибольшая высота подъема шарика;  $s$  – путь, пройденный шариком до остановки.

Таблица 1

| № варианта<br>(рис. 134–136) | $m$ ,<br>кг | $V_A$ ,<br>м/с | $\tau$ ,<br>с | $R$ ,<br>м | $f$  | $\alpha$ ,<br>град | $\beta$ ,<br>град | $h_0$ ,<br>см | $c$ ,<br>Н/см | Величины,<br>которые<br>требуется<br>определить<br>дополнительно |
|------------------------------|-------------|----------------|---------------|------------|------|--------------------|-------------------|---------------|---------------|------------------------------------------------------------------|
| 1                            | 0,5         | 20             | 2,0           | 2,0        | 0,20 | 30                 | 45                | -             | -             | -                                                                |
| 2                            | 0,6         | 16             | 0,2           | 4,0        | 0,10 | 45                 | 20                | -             | -             | $H$                                                              |
| 3                            | 0,4         | 0              | 2,0           | 0,2        | 0,15 | 30                 | -                 | 10            | 1             | $V_D$                                                            |
| 4                            | 0,2         | 5              | 0,5           | 1,0        | 0,10 | 45                 | -                 | -             | -             | $V_D$                                                            |
| 5                            | 0,1         | 8              | 1,5           | 2,0        | 0,20 | 30                 | -                 | -             | -             | -                                                                |
| 6                            | 0,3         | 2              | 2,0           | 4,0        | 0,10 | 30                 | 20                | 30            | 2             | $V_D$                                                            |

|    |     |    |     |     |      |    |    |     |     |          |
|----|-----|----|-----|-----|------|----|----|-----|-----|----------|
| 7  | 0,4 | 5  | 1,0 | 1,0 | 0,10 | 30 | -  | 50  | 5   | $V_D$    |
| 8  | 0,2 | 1  | 0,5 | 1,5 | 0,15 | 30 | 60 | 0   | 4   | $h$      |
| 9  | 0,5 | 2  | 1,5 | 4,0 | 0,25 | 20 | 60 | -   | -   | $V_D$    |
| 10 | 0,4 | 4  | 0,1 | 0,5 | 0,10 | 30 | 60 | 0,2 | 0,2 | $V_D$    |
| 11 | 0,2 | 6  | 1,0 | 1,0 | 0,30 | 45 | -  | -   | 3   | $V_D, h$ |
| 12 | 0,4 | 5  | 0,4 | 2,0 | 0,20 | 30 | 60 | -   | -   | $V_D$    |
| 13 | 0,3 | 0  | 0,1 | 1,0 | 0,10 | 30 | 60 | 50  | 10  | $V_D$    |
| 14 | 0,6 | 0  | 2,0 | 3,0 | 0,20 | 60 | 30 | -   | -   | $s$      |
| 15 | 0,1 | 1  | 0,1 | 1,0 | 0,15 | 60 | 20 | 50  | 0,2 | $V_D$    |
| 16 | 0,4 | 2  | 0,2 | 2,0 | 0,40 | 30 | -  | -   | -   | $V_D$    |
| 17 | 0,2 | 0  | 0,1 | 1,0 | 0,20 | 30 | -  | 40  | 1,0 | $V_D$    |
| 18 | 0,3 | 3  | 0,4 | 1,5 | 0,10 | 45 | -  | -   | -   | -        |
| 19 | 0,1 | 4  | 0,1 | 0,4 | 0,30 | 30 | 60 | 10  | 0,5 | $V_D$    |
| 20 | 0,2 | 10 | 1,0 | 0,5 | 0,10 | 60 | -  | 0   | 1,2 | $h$      |
| 21 | 0,7 | 3  | 0,3 | 0,3 | 0,20 | 45 | -  | -   | -   | -        |
| 22 | 0,4 | 1  | 0,2 | 0,2 | 0,40 | 45 | -  | 0   | 1,1 | $V_D, h$ |
| 23 | 0,6 | 2  | 0,4 | 0,2 | 0,20 | 45 | -  | -   | -   | -        |
| 24 | 0,5 | 0  | 0,5 | 0,6 | 0,30 | 60 | 30 | -   | -   | $H$      |
| 25 | 0,1 | 0  | 0,2 | 0,5 | 0,25 | -  | 30 | 30  | 0,4 | $V_D$    |
| 26 | 0,2 | 2  | 0,1 | 0,2 | 0,20 | 30 | -  | -   | -   | $V_D$    |
| 27 | 0,8 | 3  | 0,2 | 0,4 | 0,15 | 45 | -  | -   | -   | $V_D$    |
| 28 | 0,3 | 4  | 0,1 | 0,6 | 0,35 | 30 | 15 | 60  | 0,1 | $V_D$    |
| 29 | 0,5 | 0  | 0,2 | 0,5 | 0,20 | 45 | 30 | 50  | 0,8 | $V_D$    |
| 30 | 0,8 | 5  | 0,3 | 0,6 | 0,15 | 30 | -  | -   | -   | $V_{DE}$ |

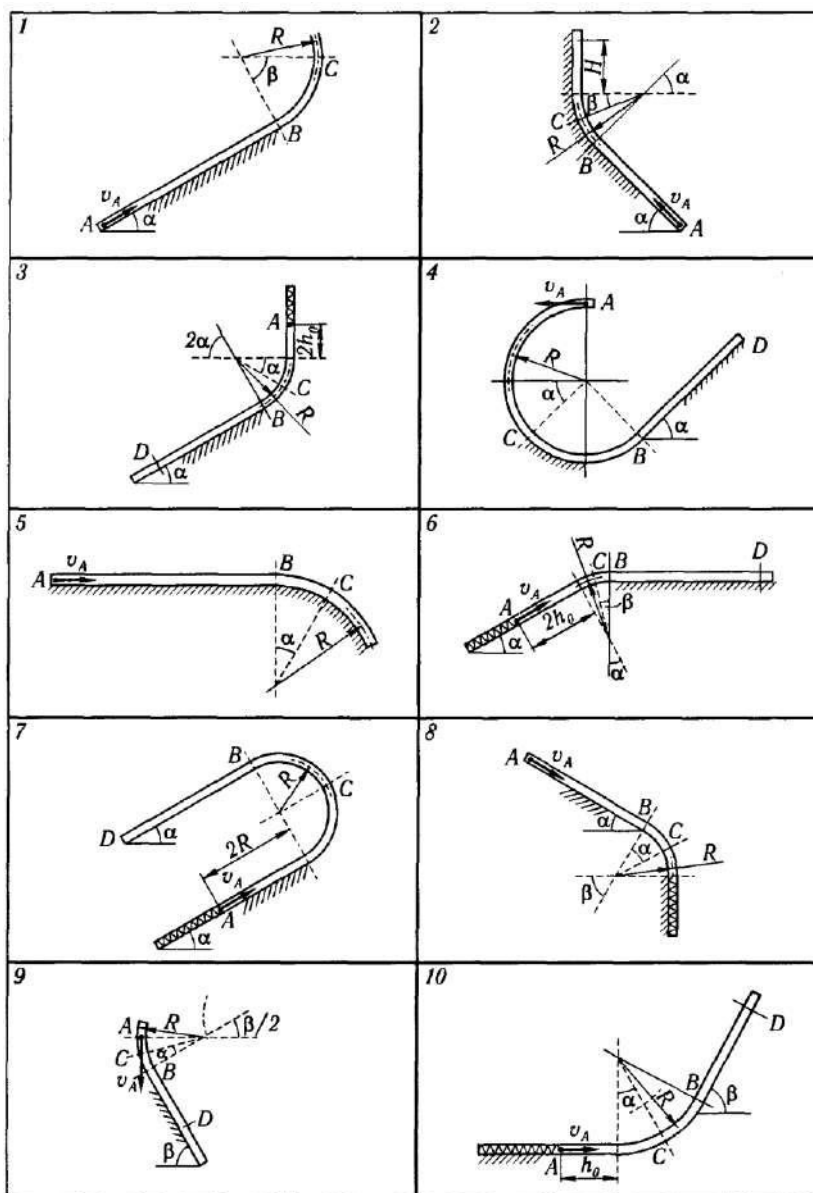


Рис.134

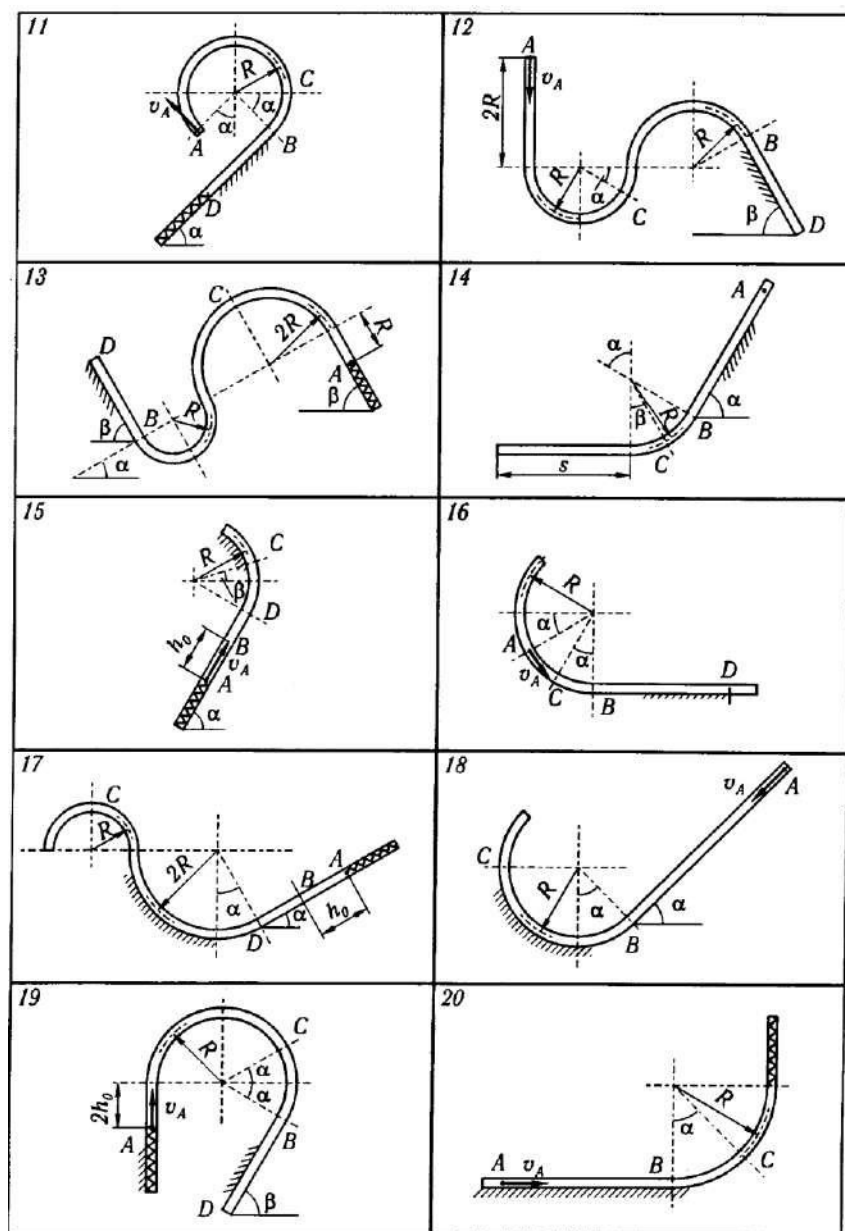


Рис. 135

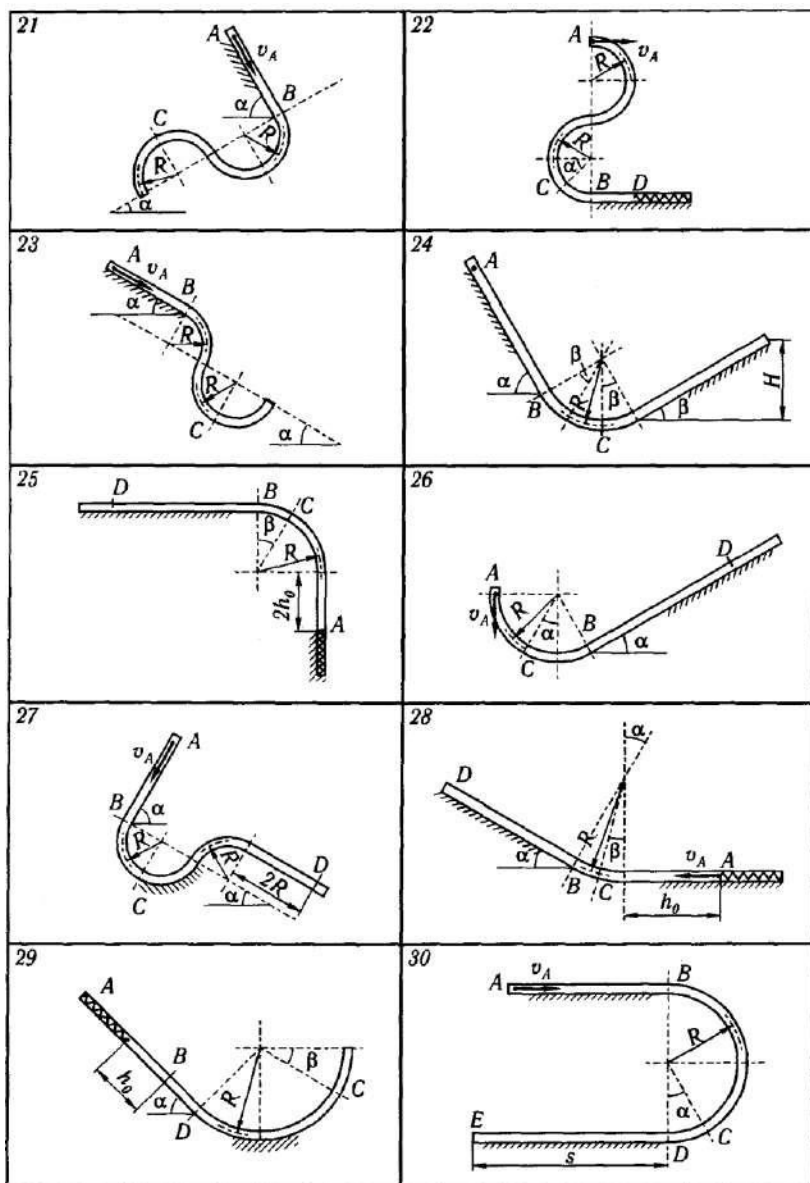


Рис. 136



### Вопросы для обсуждения

1. Дифференциальные уравнения материальной точки в проекции на оси декартовых координат?
2. Дифференциальные уравнения материальной точки в проекции на естественные оси?
3. Сила инерции?
4. Принцип Даламбера для свободной и несвободной материальной точки?
5. Теорема об изменении количества движения материальной точки?
6. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки?
7. Работа силы упругости?
8. Работа силы тяжести?
9. Работа силы трения скольжения?
10. Работа силы реакции нормального давления?

### Литература

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

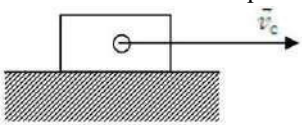
## 33. Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении

**Цель занятия:** поступательное движение твердого тела и основные кинематические характеристики, классификация поступательных движений твердого тела, кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении.

**Организационная форма:** решение задач.

### Методические рекомендации

При поступательном движении твердого тела мерой движения является кинетическая энергия твердого тела.

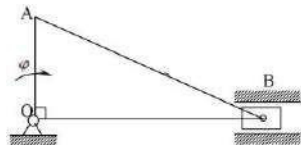


$$T = \frac{1}{2} m v_c^2, \text{ где } m - \text{масса тела, кг; } \quad (121)$$

$v_c$  – скорость центра масс тела, м/с.

Задача. Для данного положения механизма определить кинетическую энергию ползуна В, если кривошип ОА вращается согласно закона  $\varphi = 0,4t^3$  (рад), длина  $OA=0,2$  м,  $t=1$  с, масса ползуна В  $m=0,5$  кг.

Решение: Дано:  $\varphi = 0,4t^3$  (рад),  
 $OA=0,2$  м,  $t=1$  с,  $m=0,5$  кг;  $T_e$  - ?



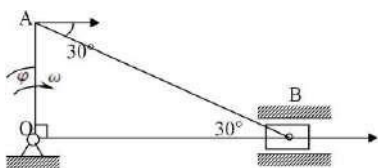


Рис. 139

1) кривошип ОА совершает вращательное движение вокруг опоры О с угловой скоростью

$$\omega = (\varphi)' = (0,4t^3)' = 0,4 \cdot 3t^2 = 1,2t^2;$$

$$\omega \uparrow \uparrow \varphi \quad (122)$$

2) Скорость точки А кривошипа ОА  $v_A = \omega \cdot OA = 1,2 \cdot (1)^2 \cdot 0,2 = 0,24 \text{ м/с}$

$v_A \perp OA$  в сторону угловой скорости  $\omega$ . (123)

3) По теореме о равенстве проекции скоростей  $\text{пр. } \vec{v}_A_{(AB)} = \text{пр. } \vec{v}_B_{(AB)} \rightarrow$  ползун В движется поступательно по горизонтальным направляющим вправо

$$v_A \cos 30^\circ = v_B \cos 30^\circ \rightarrow v_B = v_A = 0,24 \text{ м/с} \quad (124)$$

4) Кинетическая энергия ползуна В, совершающего поступательное движение

$$T_v = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot (0,24)^2 = 0,014 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \quad (125)$$

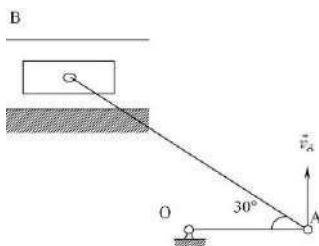
Ответ:  $T_B = 0,014 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$

### Решить самостоятельно

Задача 1. Ползун массой  $m=2 \text{ кг}$ , получив начальную скорость  $v_0=2 \text{ м/с}$  движется по шероховатой горизонтальной плоскости до полной остановки. Определить кинетическую энергию ползуна. [4]

Задача 2. Тело массой  $m=10 \text{ кг}$  движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой плоскости под действием силы  $F=10t$ , направленной параллельно плоскости движения. Определить кинетическую энергию данного тела, когда его скорость будет равна  $v=10 \text{ м/с}$ . (500)

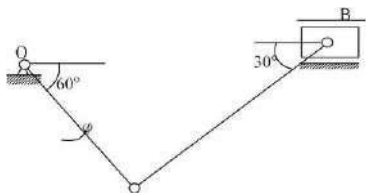
Задача 3. Тело массой  $m=0,2 \text{ кг}$  движется по горизонтальной гладкой плоскости под действием силы  $F=-0,4t$ , параллельной плоскости движения. Определить кинетическую энергию тела в момент времени  $t=2 \text{ с}$ , если его начальная скорость  $v_0=6 \text{ м/с}$ . (0,4)



Задача 4. Тело массой  $m=2 \text{ кг}$  движется по горизонтальной гладкой плоскости согласно закону  $S=0,4t^3+3t-1 \text{ (м)}$ . Определить кинетическую энергию тела в момент времени  $t=2 \text{ с}$ . (60,84)

Задача 5. Определить кинетическую энергию ползуна В кривошипно-ползун-

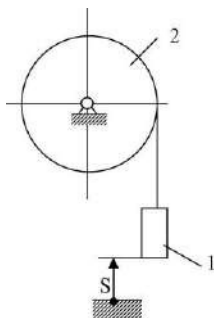
ного механизма в указанном положения, если масса ползуна В  $m=0,1 \text{ кг}$ , скорость точки А  $v_A=2 \text{ м/с}$ . (0,07)



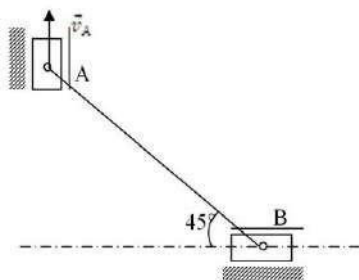
Задача 6. Определить кинетическую энергию ползуна В при кривошипно-ползунного механизма в момент времени  $t$  в указанном положении, если масса ползуна В  $m=2 \text{ кг}$ , угловая скорость кривошипа ОА

$$\omega = 0,2t^3 (\text{рад/с}), \text{ длина кривошипа}$$

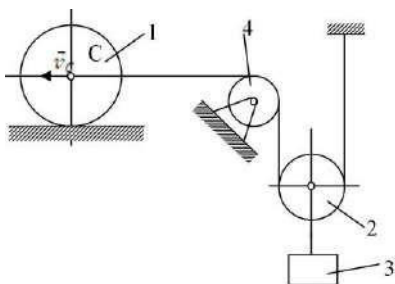
$$OA = 4 \text{ м}, t = 1 \text{ с}. (0,86)$$



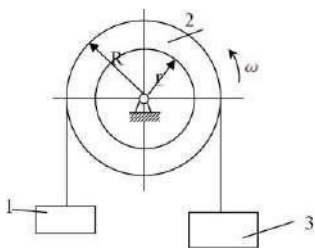
Задача 7. Груз 1 массой  $m=0,5 \text{ кг}$  поднимается с помощью лебедки 2. Закон движения груза 1 имеет вид  $s=7+5t^2(\text{м})$ . Определить кинетическую энергию груза 1 в момент времени  $t=10 \text{ с}$ . (2500)



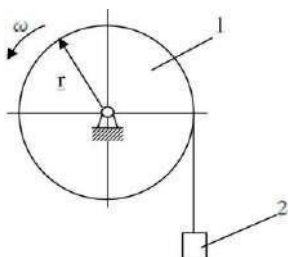
Задача 8. Определить кинетическую энергию ползуна В массой  $m=4 \text{ кг}$  в указанном положении механизма, если скорость ползуна А  $v_A=2 \text{ м/с}$ . (8)



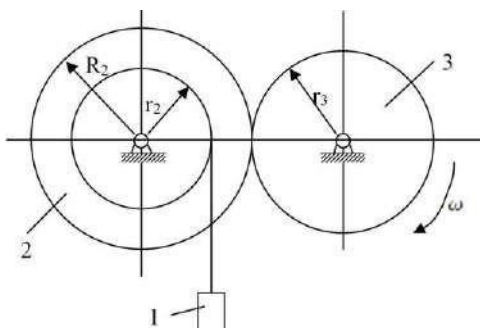
Задача 9. Определить кинетическую энергию груза 3, если центр масс цилиндра 1 движется со скоростью  $v_c=4 \text{ м/с}$ , масса груза 3  $m_3=12 \text{ кг}$ , тела 2 и 4 – однородные диски  $r_2=0,6 \text{ м}$ . (24)



Задача 10. На барабан 2 намотаны нити, к которым прикреплены грузы 1 и 3 массой  $m_1=2, m_3=2$  кг. Определить кинематическую энергию груза 1 и груза 3, если угловая скорость барабана 2  $\omega = 8$  (рад/с) и радиусы его ступеней  $R=2r=0,2$  м. (2,56; 0,32)

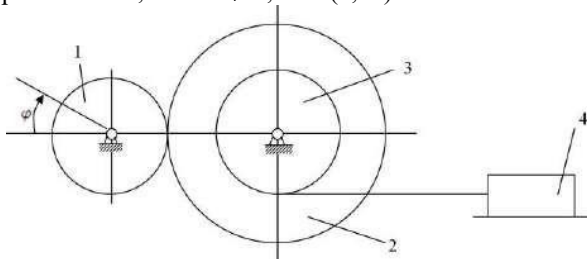


Задача 11. Цилиндр 1 вращается с угловой скоростью  $\omega = 20$  рад/с. Определить кинетическую энергию груза 2 массой  $m=1$  кг, если радиус цилиндра  $r=0,5$  м. (50)



Задача 12. Для подъема груза 1 массой  $m=200$  кг используется лебёдка. Угловая скорость ведущего зубчатого колеса 3  $\omega = 30$  рад/с. Определить кинетическую энергию груза 1, если радиусы  $r_2=0,1$  м,  $R_2=0,8$  м,  $r_3=0,4$  м. (2500)

Задача 13. Механизм состоит из зубчатых колес 1, 2 радиусами  $r_1=0,4$  м,  $R_2=1$  м, барабана 3 радиусом  $R_3=0,8$  м и груза 4. Закон движения зубчатого колеса:  $\varphi = 0,4t^2 + 9t$ . Определить кинетическую энергию груза 4 в момент времени  $t=1$  с, если  $m_4=0,2$  кг. (0,98)



### **Вопросы для обсуждения**

1. Поступательное движение твердого тела? Скорость, ускорение тела?
2. Классификация поступательных движений твердого тела?
3. Равномерное поступательное движение твердого тела. Основные кинематические характеристики?
4. Ускоренное поступательное движение твердого тела. Основные кинематические характеристики?
5. Равноускоренное поступательное движение твердого тела. Основные кинематические характеристики?
6. Замедленное поступательное движение твердого тела. Основные кинематические характеристики?
7. Равнозамедленное поступательное движение твердого тела. Основные кинематические характеристики?
8. Кинематическая энергия твердого тела при поступательном движении?

### **Литература**

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

## **34. Кинетическая энергия твердого тела при вращательном движении**

**Цель занятия:** вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси, основные кинетические характеристики, классификация вращательных движений твердого тела, кинетическая энергия твердого тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси.

**Организационная форма:** решение задач.

### **Методические рекомендации**

Мерой движения при вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси является кинетическая энергия тела.

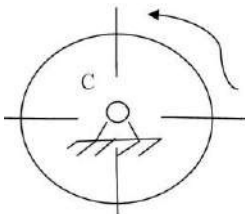


Рис. 140

$$\Omega T = \frac{1}{2} y_c \cdot \omega^2 [\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2] \quad (126)$$

$y_c$  [кг·м<sup>2</sup>] – момент инерции тела относительно центральной оси;  $\omega$  [рад/с] – угловая скорость вращения тела.

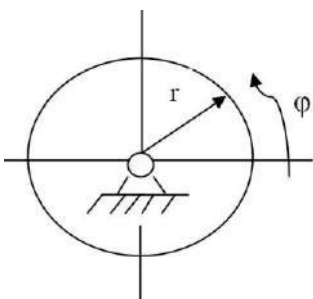


Рис. 141

Задача. Сплошной однородный цилиндр вращается согласно закону  $\varphi = t^3 + 2$  (рад). Определить кинетическую энергию цилиндра в момент времени  $t = 2$  с, если его радиус  $r = 0,5$  м,  $m = 4$  кг.

Решение: Дано:  $\varphi = t^3 + 2$ ;  $t = 2$  с;  $r = 0,5$  м;  $m = 4$  кг. Т-?

$$T = \frac{1}{2} Y_c \cdot \omega^2; \omega = (\varphi)' = (t^3 + 2)' = 3 t^2;$$

$$\omega(t) = 3 \cdot 2^2 = 12 (\text{рад/с}).$$

$$Y_c = \frac{1}{2} m \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (0,5)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (0,5)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0,25 = 0,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

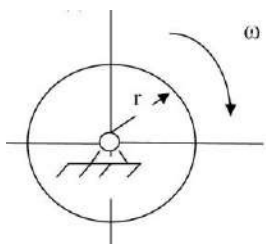
— момент инерции цилиндра относительно центральной оси. (127)

$$T = \frac{1}{2} 0,5 \cdot (12)^2 = 36 [\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2]. \quad (128)$$

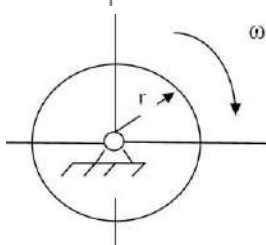
Ответ:  $T = 36 [\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2]$ .

### Решить самостоятельно

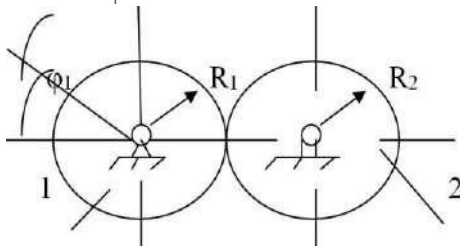
Задача 1. Угловая скорость диска массой  $m = 2$  кг изменяется согласно закону  $\omega = 2 - 8t^2$  (рад/с). Определить кинетическую энергию диска в момент времени  $t = 1$  с, если его радиус  $r = 0,5$  м. Масса диска равномерно распределена по ободу диска. (1,5)



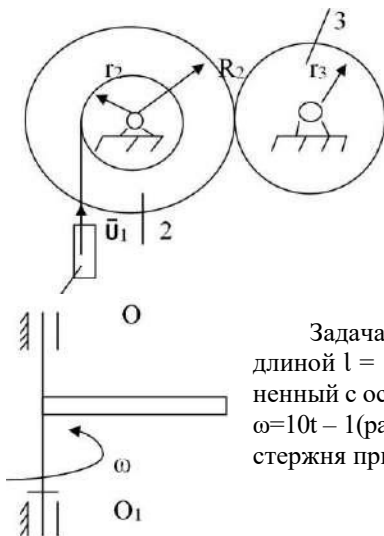
Задача 2. Груз 1 поднимается с помощью лебедки, барабан 2 которой — сплошной однородный цилиндр радиуса  $r = 0,5$  м. Определить кинетическую энергию барабана 2 массой  $m = 10$  кг в момент времени  $t = 1$  с, если закон движения груза 1  $S = 3t^3 + 1$  (м). (202,5)



Задача 3. Колесо 1 вращается согласно закону  $\varphi_1 = 20t$ . Масса колес 1 и 2 равномерно распределена по ободу колес. Определить кинетическую энергию колеса 2, если его масса  $m = 4$  кг и радиусы колес равны  $R_1 = 0,4$  м



и  $R_2 = 0,8\text{м.}$  (128).



Задача 4. Груз 1 поднимается со скоростью  $v=20t$  по нити, намотанной на сплошной однородный цилиндр 2. Колеса  $R_2 = 0,8\text{м}$  и  $r_3 = 0,6\text{м}$  – зубчатые колеса с равномерно-распределенной массой по ободу колес. Определить кинетическую энергию колеса 3 в момент времени  $t = 1\text{с}$ , если его масса  $m = 6\text{кг}$ . (675)

Задача 5. Сплошной однородный стержень длиной  $l = 1,2\text{м}$  массой  $m = 0,5\text{ кг}$ , жестко соединенный с осью вращения  $OO_1$ , вращается по закону  $\omega=10t - 1(\text{рад/с})$ . Определить кинетическую энергию стержня при  $t = 1\text{с}$ . (3)

### Вопросы для обсуждения

1. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси?
2. Равномерное вращение? Основные кинетические характеристики?
3. Ускоренное вращение? Основные кинетические характеристики?
4. Равноускоренное вращение? Основные кинетические характеристики?
5. Замедленное вращение? Основные кинетические характеристики?
6. Равнозамедленное вращение? Основные кинематические характеристики?
7. Момент инерции тела? Радиус инерции?

### Литература

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

## 35. Кинетическая энергия твердого тела при плоскопараллельном движении

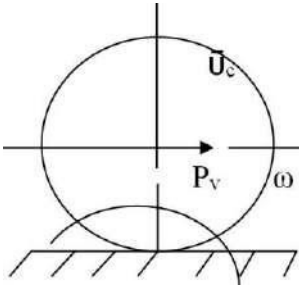
**Цель занятия:** плоское движение твердого тела, скорость точек плоской фигуры, мгновенный центр скоростей, вращение тела вокруг мгновенного центра скоростей, кинетическая энергия твердого тела при плоскопараллельном движении.

**Организационная форма:** решение задач.



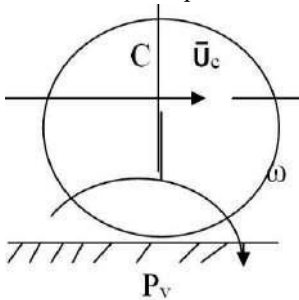
### Методические указания

Кинетическая энергия твердого тела при плоскопараллельном движении  $T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}Y_c \cdot \omega^2$ , где  $m$  – масса тела (кг),  $v_c$  – скорость центра масс тела, движущегося поступательно (м/с),  $Y_c$  – момент инерции тела при вращении вокруг мгновенного центра скоростей  $P_v$  (кг·м<sup>2</sup>),  $\omega$  – угловая скорость вращения вокруг мгновенного центра скоростей  $P_v$  (рад/с). (129)



Кинетическая энергия твердого тела при плоскопараллельном движении  $T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}Y_c \cdot \omega^2$ , где  $m$  – масса тела (кг),  $v_c$  – скорость центра масс тела, движущегося поступательно (м/с),  $Y_c$  – момент инерции тела при вращении вокруг мгновенного центра скоростей  $P_v$  (кг·м<sup>2</sup>),  $\omega$  – угловая скорость вращения вокруг мгновенного центра скоростей  $P_v$  (рад/с).

Задача: Однородный диск радиуса  $r = 4$  м массой  $m = 2$  кг катится по горизонтальной опорной плоскости без скольжения. Скорость центра диска  $v_c = 2$  м/с. Определить кинетическую энергию диска.



Решение: Дано:  $m = 2$  кг;  $r = 4$  м;  $v_c = 2$  м/с.  $T = ?$

Диск совершает плоскопараллельное движение. Центр диска движется поступательно со скоростью  $v_c = 2$  м/с. Диск вращается вокруг мгновенного центра скоростей  $P_v$  с угловой скоростью  $\omega$ .  $v_c = \omega \cdot CP_v = \omega \cdot r$ ;  $CP_v = r$  – мгновенный радиус вращения (м).

$$\omega = \frac{v_c}{r} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ (рад/с);}$$

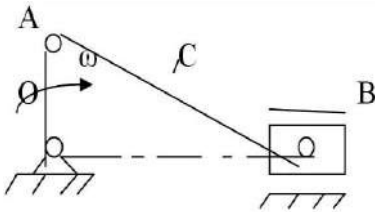
$Y_c = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}2 \cdot 4^2 = \frac{1}{2}2 \cdot 16 = 16$  [кг·м<sup>2</sup>] – момент инерции диска относительно центральной оси. (128)

Кинетическая энергия диска

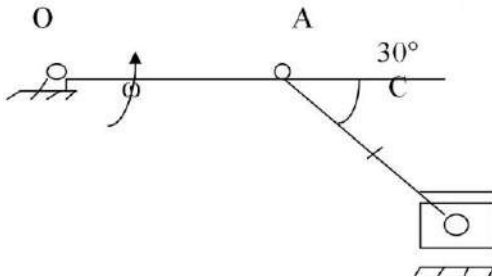
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}Y_c \cdot \omega^2 = \frac{1}{2}2 \cdot 2^2 + \frac{1}{2}16 \cdot 0,5^2 = \\ &= \frac{1}{2}2 \cdot 4 + \frac{1}{2}16 \cdot 0,25 = 4 + 2 = 6 \text{ [кг·м}^2\text{/с}^2\text{]} \end{aligned} \quad (130)$$

Ответ:  $T = 6$  [кг·м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>].

**Решить самостоятельно**

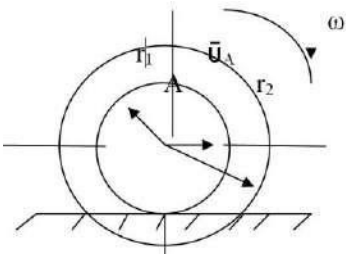
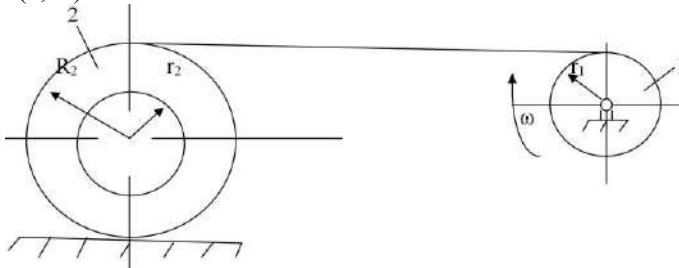


Задача 1. Для данного положения механизма определить кинетическую энергию шатуна AB с центром C массой  $m = 4$  кг, если угловая скорость кривошипа OA  $\omega = 1$  рад/с OA = 2 м, AB = 4 м. (8)

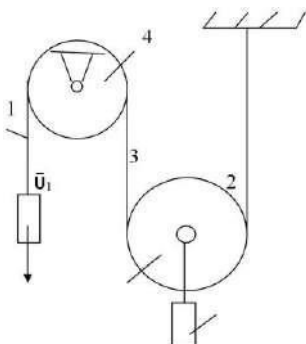


Задача 2. Для данного положения механизма определить кинетическую энергию шатуна AB с центром C массой  $m=2$  кг, если угловая скорость кривошипа OA  $\omega=2$ (рад/с), OA=2 м, AB=2 м. Шатун AB – тонкий однородный стержень. (7,12)

Задача 3. Угловая скорость барабана 1  $\omega=1$ (рад/с). Радиусы барабана 1 и ступенчатого колеса 2 равны  $r_1=0,2$  м;  $r_2=0,4$  м;  $R_2=0,6$ м;  $i_{2c}=0,5$  м. Определить кинетическую энергию ступенчатого колеса 2, если его масса  $m=1$  кг. (0,16)



Задача 4. Скорость центра A ступенчатого колеса  $v_A=2$  м/с, радиусы  $r_1=0,5$  м;  $r_2=0,6$  м; масса колеса  $m=4$  кг; радиус инерции  $i_c=0,4$  м. Определить кинетическую энергию данного ступенчатого колеса. (9,12)



Задача 5. Груз 1 опускается со скоростью  $v_1=0,5$  м/с. Диски 3, 4 – сплошные, однородные с радиусами  $2r_4 = r_3 = 0,6$  м. Определить кинетическую энергию диска 3, если его масса  $m = 0,8$  кг. (0,074)

### **Вопросы для обсуждения**

1. Плоское движение твердого тела?
2. Скорость точек плоской фигуры?
3. Мгновенный центр скоростей?
4. Вращение тела вокруг  $P_v$  – мгновенного центра скоростей?
5. Мгновенный радиус вращения?
6. Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении?

### **Литература**

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

## **36. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения механической системы**

**Цель занятия:** применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения механической системы.

**Организационная форма:** решение задач.

### **Методические указания**

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i, \quad (131)$$

(131) – теорема об изменении кинетической энергии механической системы – где  $T, T_0$  – кинетическая энергия системы в ее начальном и конечном положениях. Изменение кинетической энергии системы при перемещении ее точек из некоторого начального положения в конечное равно алгебраической сумме работ сил внешних и внутренних.

Кинетическая энергия абсолютно твердого тела при определенных видах его движения выражается формулами:

1. При поступательном движении

$$T = \frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} MV^c, \quad (132)$$

где  $V$  – скорость тела.

2. При вращении вокруг неподвижной оси

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \quad (133)$$

где  $J_z$  – момент инерции,  $\omega$  – угловая скорость.

3. При плоском движении

$$T = \frac{1}{2} M \overline{V}_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \quad (134)$$

где  $\overline{V}_c$  – скорость центра масс,  $J_c$  – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс (величина постоянная).

Задача.

Механическая система состоит из груза, трубы и блока, связанных гибкой нерастяжимой нитью. Груз опускается, труба катится без скольжения. Определить скорость  $\overline{V}$  и ускорение  $\overline{a}$  груза, в тот момент, когда он пройдет расстояние  $H$ . Движение начинается из состояния покоя. Дано:  $M$  – масса груза,  $m$  и  $R$  – масса и радиус трубы,  $m_s$  – момент сопротивления (постоянный). Массой блока и нити пренебречь.

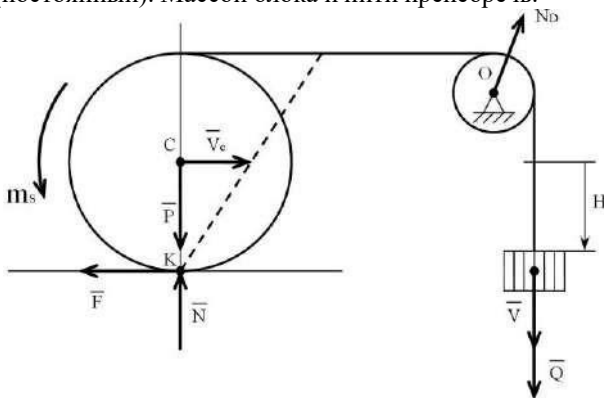


Рис. 142

Воспользуемся теоремой

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

По условию задачи  $T_0 = 0$ . Тела, входящие в систему, абсолютно твердые, а нить гибкая и нерастяжимая. Следовательно,  $\sum A_k^i = 0$ .

Внешние силы:  $\overline{P}$  и реакции работы не совершают. Остается раскрыть равенство  $T = A(\overline{Q}) + A(m_s)$ .

Кинетическая энергия  $T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mV_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2$ .

Здесь  $V_c = \frac{V}{2}$ ,  $\omega = \frac{V}{2R}$ ,  $J_c = mR^2$ .

Окончательно

$$T = \frac{1}{2}(M + m)V^2. \quad (135)$$

Работа силы  $\bar{Q}$  равна  $QH$ . Работа пары сил равна произведению ее момента на угол поворота трубы  $-\frac{m_s H}{2R}$ .

Полная работа

$$\sum_k A_k^e = QH - \frac{m_s H}{2R} = \left( Q - \frac{m_s}{2R} \right) H. \quad (136)$$

Приравнявая (135) и (136), получаем равенство

$$\frac{1}{2} \left( M + \frac{m}{2} \right) V^2 = \left( Q - \frac{m_s}{2R} \right) H. \quad (137)$$

Отсюда

$$V = \sqrt{\frac{2(2QR - m_s)H}{R(2M + m)}}. \quad (138)$$

Чтобы определить ускорение, продифференцируем по времени обе части равенства (137). Получим:

$$\left( M + \frac{m}{2} \right) Va = \left( Q - \frac{m_s}{2R} \right) H. \quad (139)$$

Отсюда, замечая, что  $V = H$ , находим

$$a = \frac{2QR - m_s}{R(2M + m)}. \quad (140)$$

### ***Решить самостоятельно***

Задача.

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на рис. 142–144. Учитывая трение скольжения тела 1 (варианты 1–3, 5, 6, 8–12, 17–23, 28–30) и сопротивление качению тела 3, катящегося без скольжения (варианты 2, 4, 6–9, 11, 13–15, 20, 21, 24, 27, 29), пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным  $s$ .

В задании приняты следующие обозначения:  $m_1, m_2, m_3, m_4$  – массы тел 1, 2, 3, 4;  $R_2, r_2, R_3, r_3$  радиусы больших и малых окружностей;  $i_{2x}, i_{3e}$  – радиусы инерции тел 2 и 3 относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести;  $\alpha, \beta$  – углы наклона плоскостей к горизонту;  $t$  – коэффициент трения скольжения;  $\delta$  – коэффициент трения качения.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 1. Блоки в катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Таблица 1

| №<br>варианта<br>(рис.<br>142-144) | $m_1$ | $m_2$   | $m_3$   | $m_4$   | $R_2$ | $R_3$ | $i_{2x}$ | $i_{3\varepsilon}$ | $\alpha$ | $\beta$ | $f$  | $\delta$ ,<br>см | $s$ ,<br>см | Примечание                                           |                                                      |
|------------------------------------|-------|---------|---------|---------|-------|-------|----------|--------------------|----------|---------|------|------------------|-------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
|                                    | кг    |         |         |         | см    |       | см       |                    | град     |         |      |                  |             |                                                      |                                                      |
| 1                                  | $m$   | $4m$    | $1/5m$  | $4/3m$  | -     | -     | -        | -                  | -        | 60      | 0,10 | -                | 2           | Массами звеньев $AB$ , $BC$ и ползуна $B$ пренебречь |                                                      |
| 2                                  | $m$   | $1/2m$  | $1/3m$  | -       | -     | 30    | -        | 20                 | 30       | 45      | 0,22 | 0,20             | 2           |                                                      |                                                      |
| 3                                  | $m$   | $m$     | $1/10m$ | $m$     | -     | -     | -        | -                  | 45       | -       | 0,10 | -                | 2           |                                                      |                                                      |
| 4                                  | $m$   | $2m$    | $40m$   | $m$     | 20    | 40    | 18       | -                  | -        | -       | -    | 0,30             | $0,1\pi$    |                                                      |                                                      |
| 5                                  | $m$   | $2m$    | $m$     | -       | 20    | 15    | 18       | -                  | 60       | -       | 0,12 | -                | $0,28\pi$   | Массой водила пренебречь                             |                                                      |
| 6                                  | $m$   | $3m$    | $m$     | -       | -     | 28    | -        | -                  | 30       | 45      | 0,10 | 0,28             | 1,5         |                                                      |                                                      |
| 7                                  | $m$   | $2m$    | $2m$    | -       | 16    | 25    | 14       | -                  | 30       | -       | -    | 0,20             | 2           |                                                      |                                                      |
| 8                                  | $m$   | $1/2m$  | $1/3m$  | -       | -     | 30    | -        | -                  | 30       | 45      | 0,15 | 0,20             | 1,75        |                                                      |                                                      |
| 9                                  | $m$   | $2m$    | $9m$    | -       | -     | 30    | -        | 20                 | 30       | -       | 0,12 | 0,25             | 1,5         |                                                      |                                                      |
| 10                                 | $m$   | $1/4m$  | $1/4m$  | $1/5m$  | -     | -     | -        | -                  | 60       | -       | 0,10 | -                | 3           |                                                      |                                                      |
| 11                                 | $m$   | $1/2m$  | $1/4m$  | -       | -     | 30    | -        | 25                 | 30       | 45      | 0,17 | 0,20             | 2,5         |                                                      |                                                      |
| 12                                 | $m$   | $1/2m$  | $1/5m$  | $m$     | 30    | -     | 20       | -                  | 30       | -       | 0,20 | -                | 2,5         |                                                      |                                                      |
| 13                                 | $m$   | $2m$    | $5m$    | $2m$    | 30    | 20    | 26       | -                  | 30       | -       | -    | 0,24             | 2           |                                                      |                                                      |
| 14                                 | $m$   | $1/2m$  | $5m$    | $4m$    | -     | 25    | -        | -                  | -        | -       | -    | 0,20             | 2           |                                                      |                                                      |
| 15                                 | $m$   | $1/2m$  | $4m$    | $1/2m$  | 20    | 15    | 18       | -                  | 60       | -       | -    | 0,25             | 1,5         | Массы каждого из четырех колес одинаковы             |                                                      |
| 16                                 | $m$   | $1/10m$ | $1/20m$ | $1/10m$ | 10    | 12    | -        | -                  | -        | -       | -    | -                | $0,05\pi$   |                                                      | Массой водила пренебречь                             |
| 17                                 | $m$   | $1/4m$  | $1/5m$  | $1/10m$ | 20    | -     | 15       | -                  | 60       | -       | 0,10 | -                | $0,16\pi$   |                                                      | Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень |

| №<br>варианта<br>(рис.<br>142-144) | $m1$ | $m2$ | $m3$  | $m4$ | $R2$ | $R3$ | $i2x$ | $i3\varepsilon$ | $\alpha$ | $\beta$ | $f$  | $\delta$ ,<br>см | $s$ ,<br>см | Примечание                                                                                             |
|------------------------------------|------|------|-------|------|------|------|-------|-----------------|----------|---------|------|------------------|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                    | $K2$ |      |       |      | $см$ |      | $см$  |                 | $град$   |         |      |                  |             |                                                                                                        |
| 18                                 | $m$  | 3m   | m     | -    | 35   | 15   | 32    | -               | 60       | -       | 0,15 | -                | 0,2π        | Массой водила пренебречь                                                                               |
| 19                                 | $m$  | 1/3m | 1/10m | m    | 24   | -    | 20    | -               | 60       | -       | 0,15 | -                | 1,5         | Массами звеньев $AB$ , $BC$ и ползуна $B$ пренебречь                                                   |
| 20                                 | $m$  | 2m   | 20m   | -    | 20   | 15   | 16    | -               | 30       | -       | 0,10 | 0,20             | 0,2π        |                                                                                                        |
| 21                                 | $m$  | m    | 2m    | -    | 20   | 20   | 16    | -               | 30       | 45      | 0,20 | 0,32             | 1,2         |                                                                                                        |
| 22                                 | $m$  | 1/2m | 1/4m  | -    | 20   | 10   | -     | -               | 60       | -       | 0,17 | -                | 0,1π        | Массой водила пренебречь                                                                               |
| 23                                 | $m$  | m    | 1/10m | 4/5m | 20   | -    | 18    | -               | 30       | -       | 0,10 | -                | 1           | Массами звеньев $AB$ , $BC$ , и ползуна $B$ пренебречь                                                 |
| 24                                 | $m$  | 3m   | 20m   | -    | 20   | 30   | 18    | -               | -        | -       | -    | 0,60             | 0,08π       |                                                                                                        |
| 25                                 | $m$  | 1/3m | 1/4m  | -    | 16   | 20   | -     | -               | -        | -       | -    | -                | 0,04π       |                                                                                                        |
| 26                                 | $m$  | 1/2m | m     | 1/3m | 30   | -    | 20    | -               | -        | -       | -    | -                | 0,6π        | Массы и моменты инерции блоков 2 и 5 одинаковы<br>Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень |
| 27                                 | $m$  | m    | 6m    | 1/2m | 20   | 20   | 16    | -               | 30       | -       | -    | 0,20             | 2           | Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень                                                   |
| 28                                 | $m$  | 2m   | 3m    | -    | 20   | -    | 14    | -               | 60       | -       | 0,10 | -                | 0,1π        |                                                                                                        |
| 29                                 | $m$  | 1/4m | 1/8m  | -    | -    | 35   | -     | -               | 15       | 30      | 0,20 | 0,20             | 2,4         |                                                                                                        |
| 30                                 | $m$  | 1/2m | 3/10m | 3/2m | 26   | 20   | 20    | 18              | 30       | -       | 0,12 | -                | 2           |                                                                                                        |



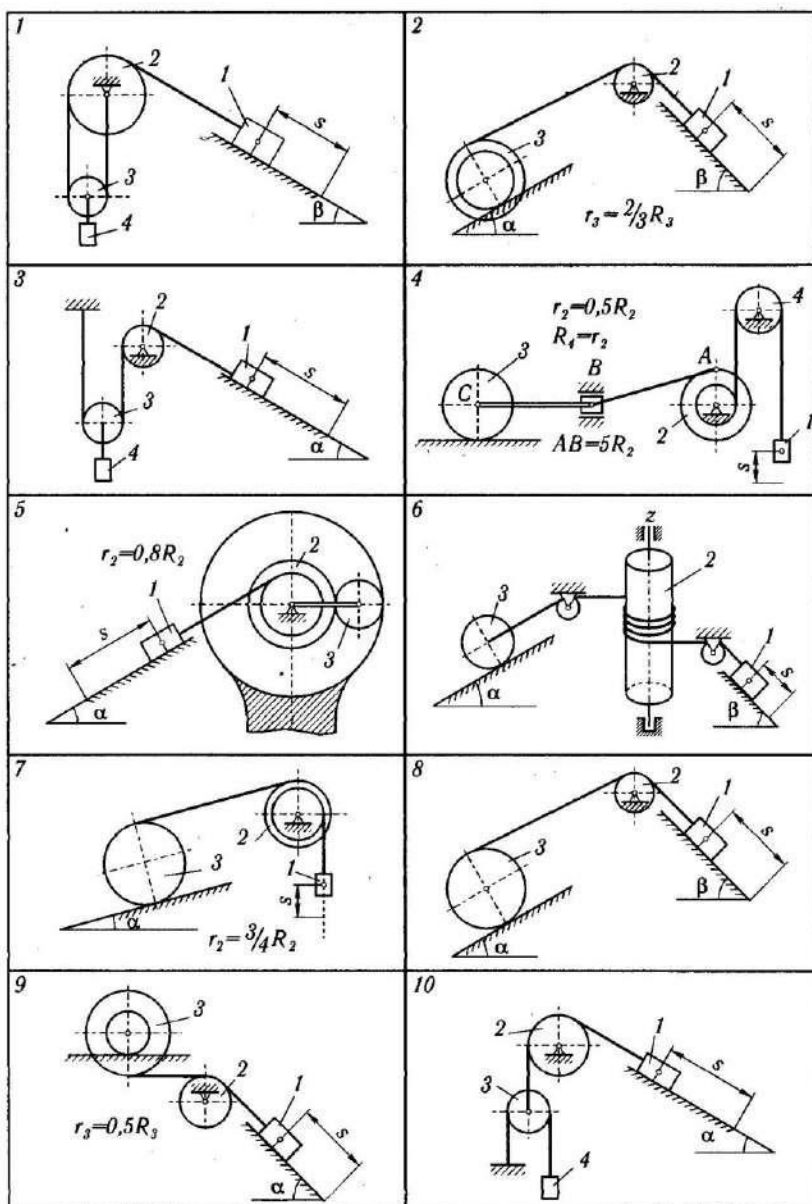


Рис. 142

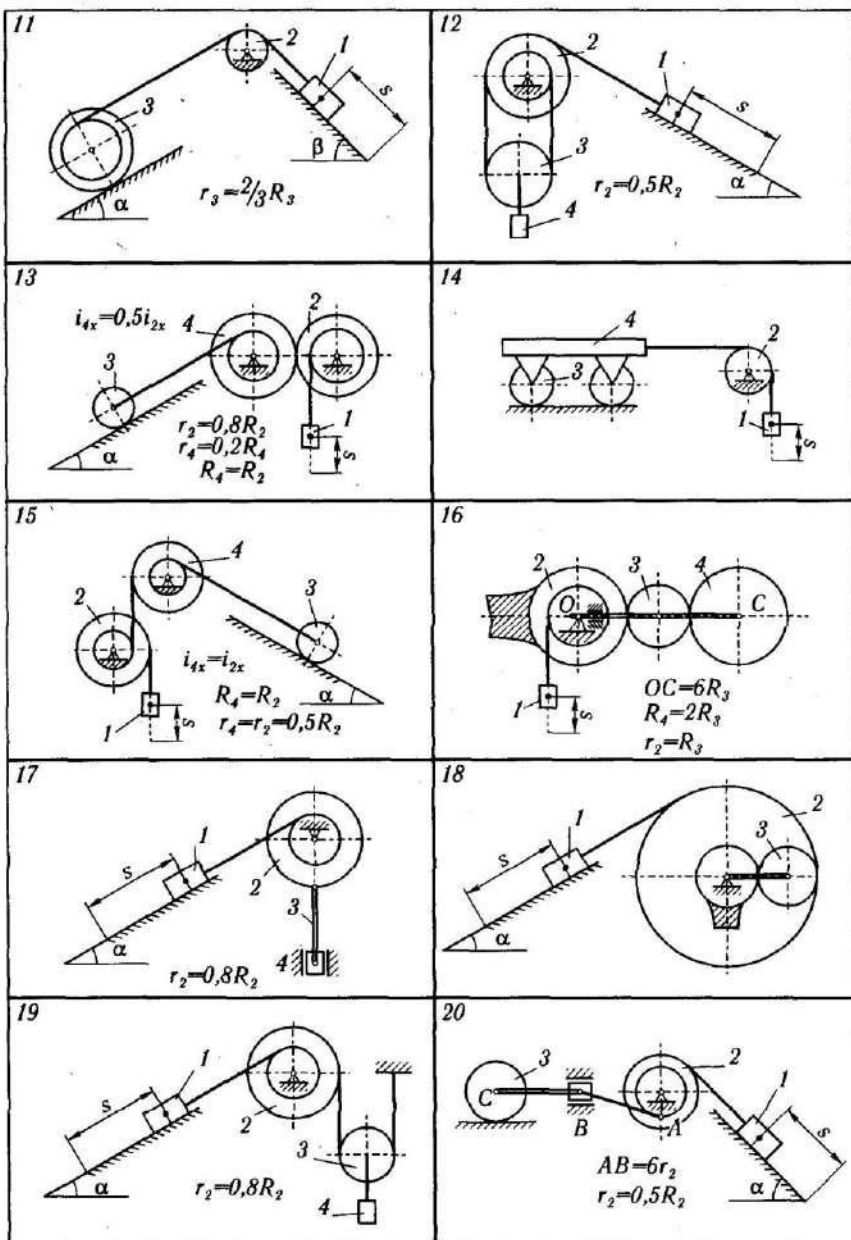
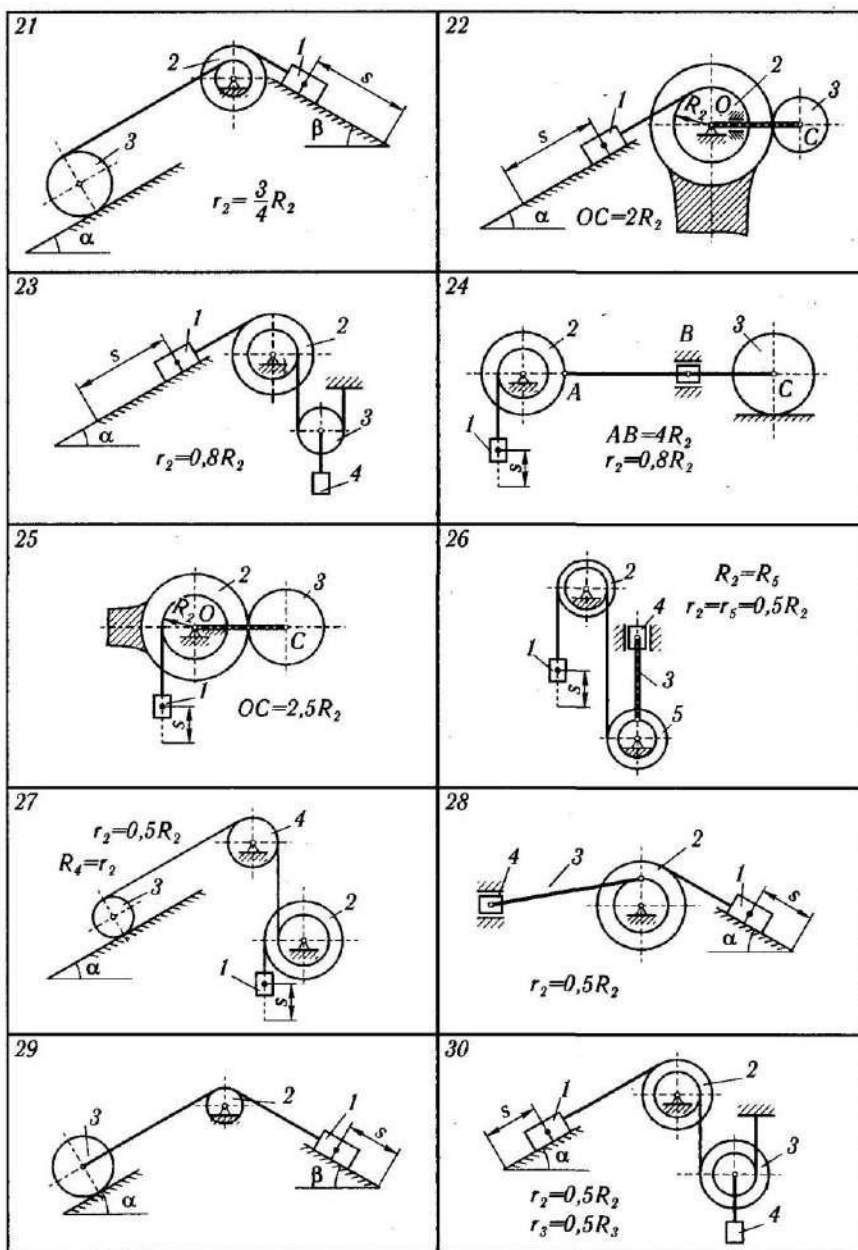


Рис. 143



### ***Вопросы для обсуждения***

1. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы?
2. Кинетическая энергия тела при поступательном движении?
3. Кинетическая энергия тела при вращательном движении?
4. Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении?
5. Дифференциальные уравнения материальной точки в проекции на оси декартовых координат?
6. Работа силы тяжести?
7. Работа силы трения скольжения?
8. Работа силы реакции нормального давления?
9. Работа момента сил сопротивления трению качения?
10. Внешние силы механической системы?
11. Внутренние силы механической системы?

### ***Литература***

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

## **37. Принцип Даламбера для механической системы. Общее уравнение динамики для исследования механической системы с одной степенью свободы**

***Цель работы:*** принцип Даламбера для механической системы. Общее уравнение динамики для исследования механической системы с одной степенью свободы.

***Организационная форма:*** решение задач.

### ***Методические указания***

Принцип Даламбера позволяет уравнения динамики записать в форме уравнения статики. Для механической системы этот принцип записывается так:

$$F_K^e + F_K^i + F_K^u = 0. \quad (141)$$

Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме непосредственно приложенных к ней внешних и внутренних сил приложить еще силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной. Но сумма элементарных работ уравновешенной системы сил (согласно принципу возможных перемещений) на любом возможном перемещении равна нулю. И мы приходим таким образом к общему уравнению динамики:

$$\sum \delta A_K^e + \sum \delta A_K^u = 0 \quad (142)$$

При движении механической системы с удельными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю.

Задача.

Для заданной механической системы определить ускорения грузов и натяжения в ветвях нитей, к которым прикреплены грузы. Массами нитей пренебречь. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Система движется из состояния покоя.

Дано:  $G_1 = G_2 = 2G$ ;  $G_3 = G_4 = G$ ;  $R = 2r$ ;  $i_{2x} = r\sqrt{2}$ ;  $f = 0,2$ .

Блок 3 – сплошной однородный цилиндр (рис. 145). Определить ускорения грузов 1 и 4 и натяжения ветвей нити 1–2 и 3–4.

В данном примере движение системы таково, что груз 1 опускается.

Покажем заданные силы: силы тяжести  $\vec{G}_1$  – груза 1,  $\vec{G}_2$  – блока 2,  $\vec{G}_3$  – блока 3 и  $\vec{G}_4$  – груза 4, а также  $\vec{F}$  – силу трения скольжения груза 1 по наклонной плоскости (рис. 145).

Приложим силы инерции. Сила инерции груза 1, движущегося поступательно с ускорением  $\vec{a}_1$ , выражается вектором  $\vec{\Phi}_1 = -m_1\vec{a}_1$ .

Силы инерции блока 2, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловым ускорением  $\varepsilon_2$ , приводятся к паре, момент которой  $M_2^\Phi = J_{2x}\varepsilon_2$ .

Силы инерции блока 3 совершающего плоское движение, приводятся к вектору  $\vec{\Phi}_3 = -m_3\vec{a}_3$ ; где  $\vec{a}_3$  – ускорение центра масс блока 3, и к паре сил, момент которой  $M_3^\Phi = J_{3x}\varepsilon_3$ , где  $\varepsilon_3$  – угловое ускорение блока.

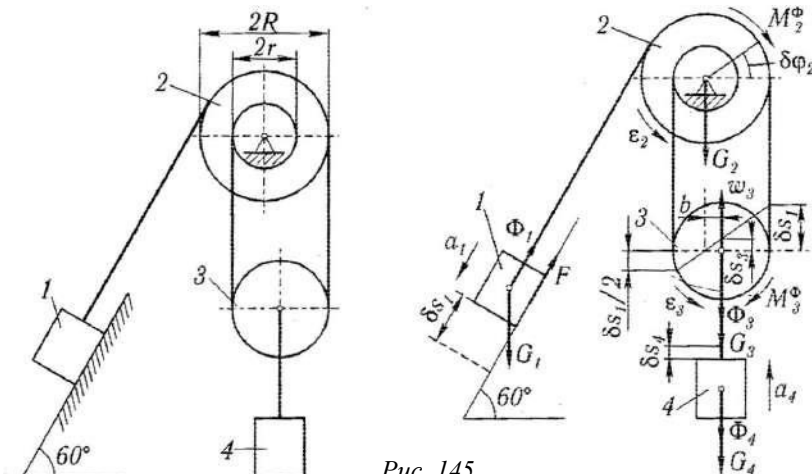


Рис. 145

Сила инерции груза 4, движущегося поступательно с ускорением  $\vec{a}_4$ ,  
 $\vec{\Phi} = -m_4 \vec{a}_4$ .

Сообщим системе возможное перемещение в направлении ее действительного движения (рис. 145) (Можно сообщить возможное перемещение и в обратном направлении).

Составим общее уравнение динамики:

$$\begin{aligned} G_1 \delta s_1 \sin 60^\circ - F \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 - M_2^\Phi \delta \varphi_2 - G_3 \delta s_3 - \Phi_3 \delta s_3 - M_3^\Phi \delta \varphi_3 - \\ G_4 \delta s_4 - \Phi_4 \delta s_4 = 0 \end{aligned} \quad , (143)$$

где  $\delta \varphi_3$  и  $\delta \varphi_4$  – углы поворотов блоков 2 и 3.

Зависимости между возможными перемещениями такие же, как и между соответствующими скоростями.

Выразим скорость центров масс и угловые скорости тел системы через скорость тела 1 (составим уравнения связей).

Как показано на рис. 145, мгновенный центр скоростей блока 3 находится на одной вертикали с центром блока 2. Расстояние между мгновенным центром скоростей и центром блока 3  $b = 3r/2 - r = r/2$ .

Теперь находим

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 = \omega_3 = v_1/R = v_1/2r; \\ v_3 = v_4 = \omega_3 b = v_1/4. \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

Такие же зависимости и между возможными перемещениями:

$$\left. \begin{aligned} \delta \varphi_2 = \delta \varphi_3 = \delta s_1/(2r); \\ \delta s_3 = \delta s_4 = \delta s_1/4. \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

Уравнение (141) с учетом (143) принимает вид

$$G_1 \sin 60^\circ - F - \Phi_1 - M_2^\Phi/(2r) - G_3/4 - \Phi_3/4 - M_3^\Phi/(2r) - G_4/4 - \Phi_4/4 = 0 \quad (146)$$

Учитывая, что  $G_1 = G_2 = 2G = 2mg$ ;  $G_3 = G_4 = G = mg$ ,

Имеем  $F = f G_1 \cos 60^\circ = f mg$ ;

$$\Phi_1 = m_1 a_1 = 2m a_1;$$

$$M_2^\Phi = J_{2x} \varepsilon_2 = m_2 i_{2x}^2 \varepsilon_2 = 4mr^2 \varepsilon_2; \quad (147)$$

$$\Phi_3 = m_3 a_3 = m a_3;$$

$$M_3^\Phi = J_{3x} \varepsilon_3 = [m_3 (1,5r)^2 / 2] \varepsilon_3 = 9mr^2 \varepsilon_3 / 8;$$

$$\Phi_4 = m_4 a_4 = m a_4.$$

Зависимости между ускорениями в соответствии с (144)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = a_1/(2r); \\ a_3 = a_4 = a_1/4. \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

Подставляя (147) и (148) в (146), получим  
 $g\sqrt{3} - fg - 2a_1 - a_1 - g/4 - a_1/16 - 9a_1/32 - g/4 - a_1/16 = 0$ ,  
откуда

$$a_1 = \frac{g(\sqrt{3} - a - 0,5)}{3,41}; a_1 = 2,69 \text{ м/с}^2; a_4 = a_1/4; a_4 = 0,74 \text{ м/с}^2.$$

Для определения натяжения в ветви нити 1–2 мысленно разрежем нить и заменим ее действие на груз 2 реакцией  $T_{1-2}$  (рис. 147).

Общее уравнение динамики

$$G_1 \delta s_1 \sin 60^\circ - F \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 - T_{1-2} \delta s_1 = 0, \quad (147)$$

откуда

$$T_{1-2} = G_1 \sin 60^\circ - A - \Phi_1 = 2G \sin 60^\circ - 2Gf \cos 60^\circ - 2(G/g)a_1; \\ T_{1-2} = 0,93G. \quad (148)$$

Для определения натяжения в нити 3–4 мысленно разрежем эту нить и заменим ее действие на груз 4 реакцией  $T_{3-4}$  (рис. 146).

Не составляя общего уравнения динамики, на основании принципа Даламбера имеем

$$T_{3-4} = G_4 + \Phi_4 = G + (G/g)a_4; T_{3-4} = 10,8G. \quad (149)$$

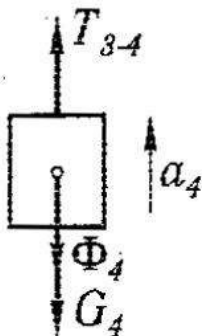


Рис. 146

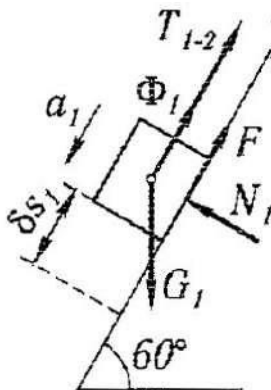


Рис. 147

### Решить самостоятельно

Задача: Для заданной механической системы определить ускорения грузов и натяжения в ветвях нитей, к которым прикреплены грузы. Массами нитей пренебречь. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Система движется из состояния покоя.

Варианты показаны на рис. (148–150), а необходимые для решения данные приведены в табл. 1.

Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Таблица 1

| Номер варианта | Сила тяжести |       |       |       | $R/r$ | Радиусы инерции |          | Коэффициент трения скольжения | $P$  | Дополнительные данные                                                                                         |
|----------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-----------------|----------|-------------------------------|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                | $G_1$        | $G_2$ | $G_3$ | $G_4$ |       | $i_2$<br>$x$    | $i_{3x}$ |                               |      |                                                                                                               |
| 1              | $G$          | $G$   | $3G$  | –     | 2     |                 | –        | –                             | –    | $r_2=r_3$                                                                                                     |
| 2              | $G$          | $G$   | $G$   | –     | 2     |                 | –        | –                             | –    |                                                                                                               |
| 3              | $3G$         | $G$   | $G$   | –     | 2     |                 | –        | 0,1                           | –    |                                                                                                               |
| 4              | $G$          | $G$   | $2G$  | –     | –     | –               | –        | 0,2                           | –    |                                                                                                               |
| 5              | $2G$         | $G$   | $G$   | $G$   | 3     | $2r$            | –        | –                             | –    |                                                                                                               |
| 6              | $2G$         | $G$   | $2G$  | –     | 3     | $2r$            | –        | 0,2                           | –    |                                                                                                               |
| 7              | $2G$         | $G$   | $2G$  | –     | 3     | $2r$            | –        | 0,2                           | –    |                                                                                                               |
| 8              | $2G$         | $G$   | $2G$  | –     | 3     | $2r$            | –        | 0,2                           | –    |                                                                                                               |
| 9              | $2G$         | $2G$  | $2G$  | –     | 3     | $2r$            | –        | 0,2                           | 0,2G |                                                                                                               |
| 10             | $2G$         | $G$   | $G$   | –     | 4     | –               | $2r$     | 0,4                           | G/3  |                                                                                                               |
| 11             | $2G$         | $G$   | $2G$  | 0,2G  | 3     | $2r$            | –        | 0,2                           | –    | $r_2=2r_3$ ; $R_2=R_3$<br>$r_2=2r_3$ ; $R_3=1,5R_2$<br>$r_2=2r_3$ ; $R_3=1,5R_2$<br>$r_2=2r_3$ ; $R_3=1,5R_2$ |
| 12             | $2G$         | $G$   | $2G$  | 0,2G  | 3     | $2r$            | –        | 0,2                           | –    |                                                                                                               |
| 13             | $4G$         | $2G$  | $G$   | $4G$  | –     |                 | $2r_3$   | –                             | –    |                                                                                                               |
| 14             | –            | $G$   | $G$   | $4G$  | –     |                 | $2r_3$   | –                             | 8G   |                                                                                                               |
| 15             | $4G$         | $2G$  | $2G$  | $4G$  | –     |                 | $2r_3$   | –                             | –    |                                                                                                               |
| 16             | –            | $G$   | $2G$  | $4G$  | –     |                 | $2r_3$   | –                             | 4G   |                                                                                                               |
| 17             | $2G$         | $G$   | $G$   | –     | 2     |                 | –        | 0,1                           | –    |                                                                                                               |
| 18             | $3G$         | 0,2G  | 0,1G  | 0,5G  | 2     | –               | –        | 0,4                           | –    |                                                                                                               |
| 19             | $4G$         | 0,3G  | 0,2G  | $3G$  | 3     | $2r$            | 1,2r     | 0,1                           | –    |                                                                                                               |
| 20             | $4G$         | 0,2G  | 0,1G  | $3G$  | 2     | 1,6r            |          | 0,2                           | –    | $R_3=1,2r$<br>Массы четырех колес одинаковы<br>$r_3=r_4$<br>$r_3=r_4$<br>$i_{4x}=i_{3x}$                      |
| 21             | $5G$         | 0,1G  | 0,2G  | –     | 3     | –               |          | –                             | G    |                                                                                                               |
| 22             | $G$          | 0,2G  | 0,3G  | –     | 2     | –               |          | –                             | G    |                                                                                                               |
| 23             | $G$          | 0,2G  | 0,1G  | –     | 1,5   | 1,2             | –        | –                             | 2G   |                                                                                                               |
| 24             | $2G$         | $G$   | $G$   | 8G    | –     | –               | –        | –                             | –    |                                                                                                               |
| 25             | 6G           | 2G    | 2G    | $G$   | –     | –               | –        | –                             | –    |                                                                                                               |
| 26             | 6G           | $G$   | 2G    | –     | –     | –               | –        | –                             | –    |                                                                                                               |
| 27             | $G$          | $G$   | $G$   | 4G    | 2     | –               | –        | –                             | –    |                                                                                                               |
| 28             | 3G           | $G$   | $G$   | –     | 2     | –               | –        | 0,1                           | –    |                                                                                                               |
| 29             | 6G           | 3G    | $G$   | $G$   | 2     |                 |          | –                             | –    |                                                                                                               |
| 30             | 8G           | $G$   | $G$   | 2G    | –     |                 | –        | 0,1                           | –    |                                                                                                               |



П р и м е ч а н и е:

1. Радиусы инерции даны относительно центральных осей, перпендикулярных плоскости чертежа.

2. Коэффициент трения принимать одинаковым как при скольжении тела по плоскости, так и при торможении колодкой (варианты 9–12).

К решению задачи можно применить общее уравнение динамики. Так как система приходит в движение из состояния покоя, направления ускорений тел соответствуют направлениям их движения. Ввиду того, что среди сил, действующих на тела системы, есть сила трения, целесообразно по исходным данным найти истинное направление движения системы, чтобы правильно показать направление силы трения.

Если направление движения системы выбрано ошибочно, то искомое ускорение получается со знаком « – ». В этом случае необходимо изменить направление силы трения и сил инерции и внести соответствующие поправки в общее уравнение динамики.

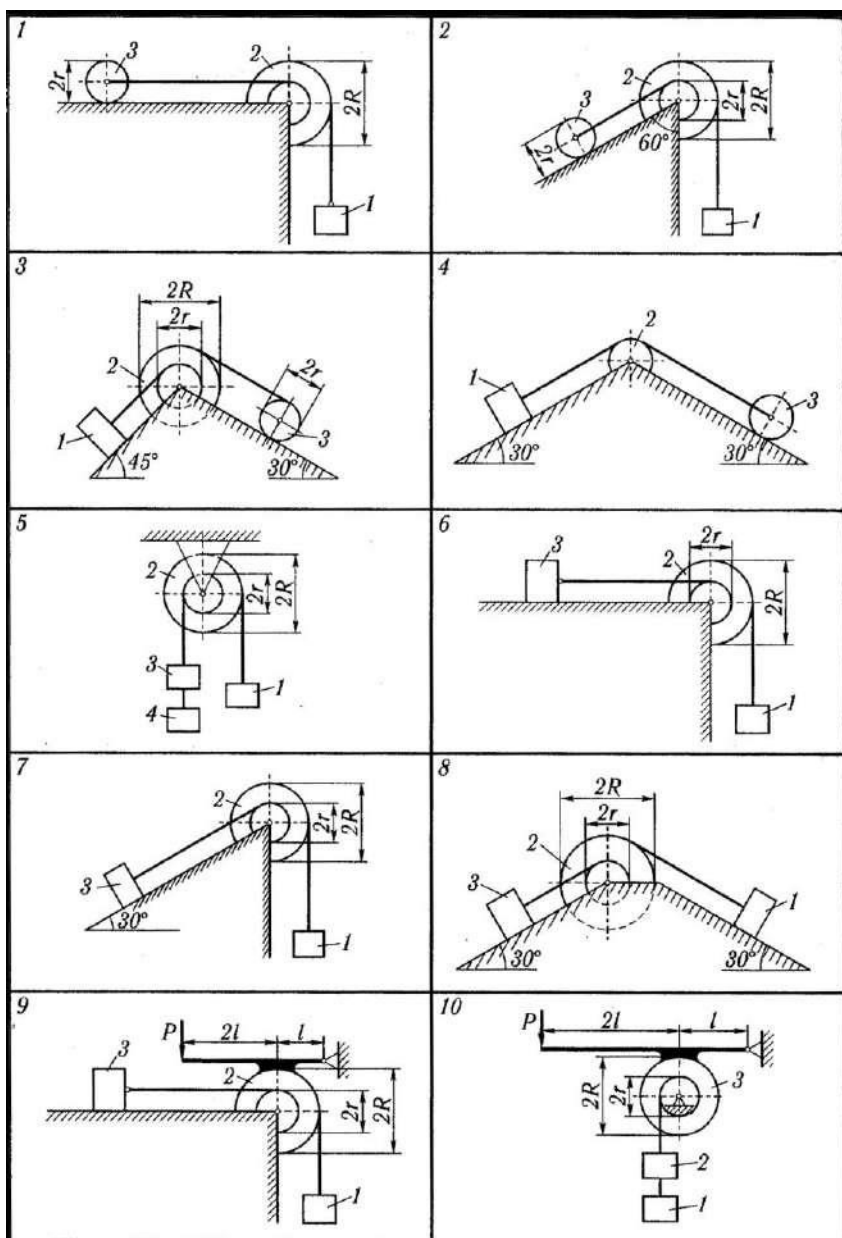


Рис. 148

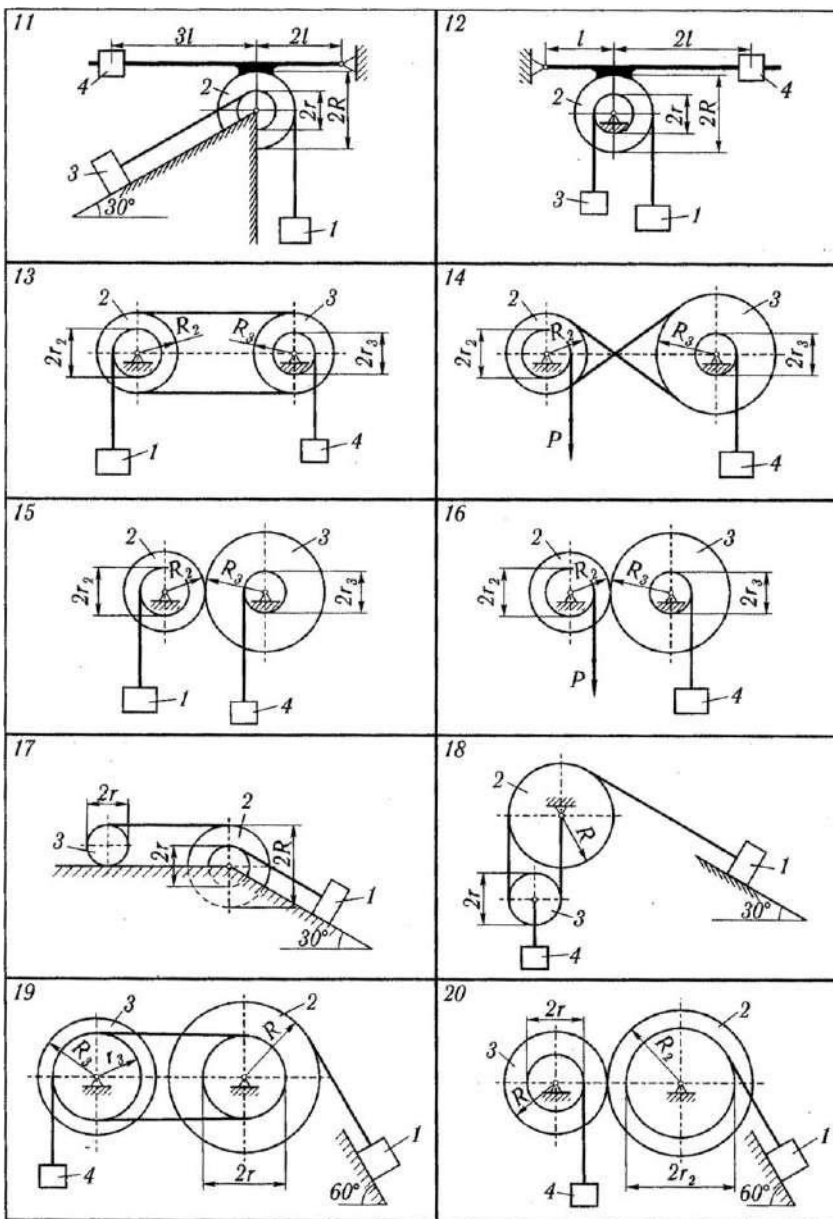
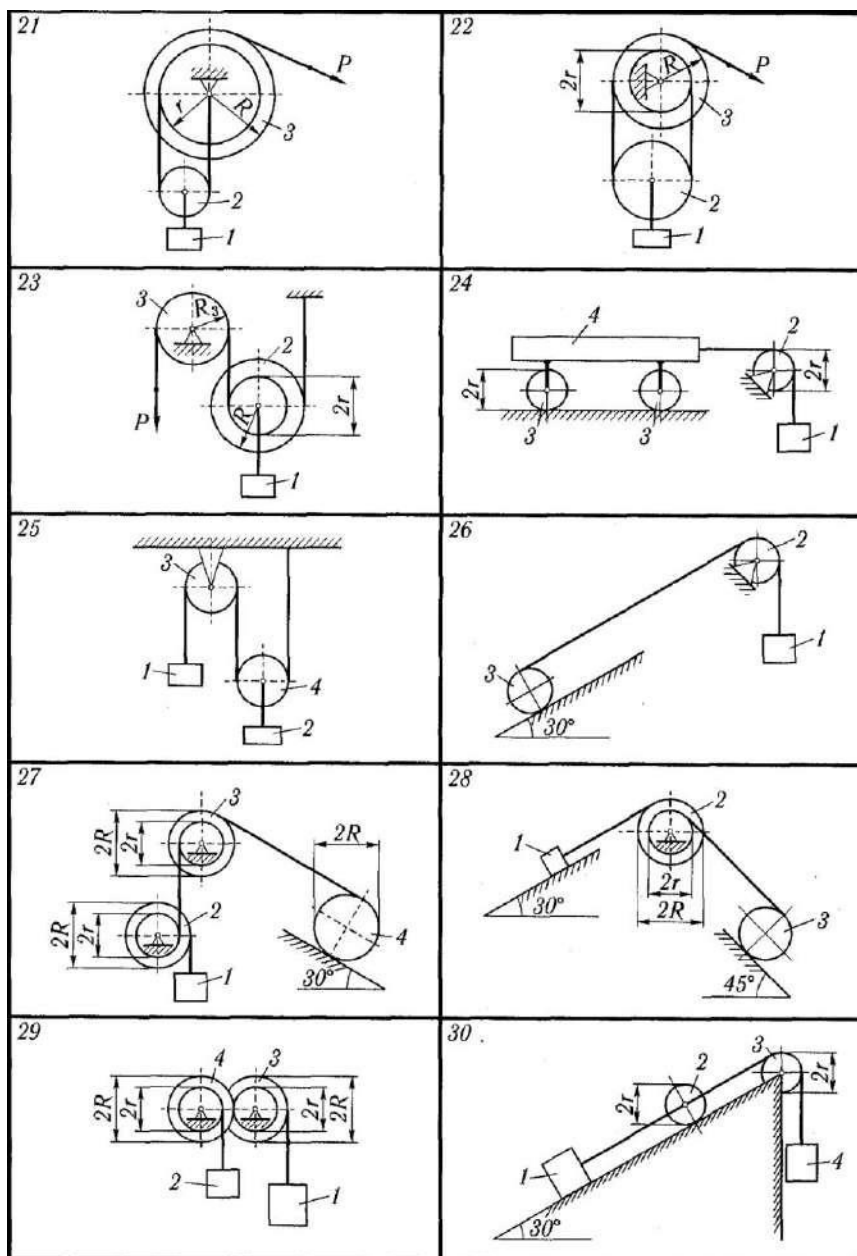


Рис. 149



### ***Вопросы для обсуждения***

1. Принцип Даламбера для механической системы?
2. Общее уравнение динамики для механической системы?
3. Виды связей и их реакции опор?
4. Кинематический анализ плоского механизма?
5. Работа силы тяжести?
6. Работа силы трения скольжения?
7. Работа момента сил сопротивления трению качения?
8. Принцип возможных перемещений?
9. Внешние силы механической системы?
10. Внутренние силы механической системы?

### ***Литература***

Основная: 1–4.

Интернет-ресурсы: 1.

## ГЛОССАРИЙ

**Статика** – раздел теоретической механики, в котором изучаются силы, системы сил, эквивалентные преобразования в системах сил, равновесие конструкций, находящихся под действием различных систем сил.

**Линия действия силы** – точка приложения вектора силы и его направление образуют линию действия силы.

**Система сил** – силы, одновременно действуют на (точку) тело, расположены в одной плоскости или разных плоскостях, линии действия сил пересекаются (сходятся) в одной точке, параллельны или расположены произвольно.

**Абсолютно твёрдое тело** – это такое тело, расстояние между двумя точками которого не изменяется, то есть недеформируемое тело.

**Точка** – тело, у которого для исследования его механического движения не учитываются химический состав, размеры.

**Материальная точка** – учитывается масса тела для рассмотрения его движения.

**Механическая система материальных точек (тел)** – это взаимосвязанные между собой материальные точки (тела) таким образом, что изменение положения одного из них влечёт за собой изменение положения всех остальных. Это механизм.

**Кинематика** – это раздел теоретической механики, в котором изучаются основные законы движения точки, твёрдого тела без учёта массы и действующих сил. По характеру рассматриваемых задач кинематика делится на «Кинематику точки», «Кинематику твёрдого тела», «Кинематика механизмов».

**Динамика** – это раздел теоретической механики, в котором изучаются движения точки или механической системы с учётом массы и действующих сил. По характеру рассматриваемых задач динамика делится на «Динамику материальной точки», «Динамику абсолютно твёрдого тела», «Динамику механической системы».

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

### Основная

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учебное пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
3. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под ред. А.А. Яблонского. – М.: КноРус, 2010. – 392 с.
4. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: в 2 т. Т. 1. Статика и кинематика: учебное пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.
5. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: в 2 т. Т. 2. Динамика: учебное пособие. – 9-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 640 с.: ил.
6. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

### Дополнительная

1. Тарг СМ. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш.шк., 2004.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: учебное пособие / под ред. А.А. Яблонского. – М., 2004.
3. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. – М.: Интеграл – Пресс, 2004.
4. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – СПб.: Лань, 2001.
5. Цивильский Б.Л. Теоретическая механика. – М: Высш.шк., 2001.
6. Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 2000.
7. Сахарный Н.Ф. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1964.
8. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высш.шк., 1985.
9. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: учебное пособие / под ред. А.А. Яблонского. – М., 1985.
10. Добронравов В.В. и др. Курс теоретической механики: учебник. – М, 1965.
11. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики: учебник. – М., 1985 – Т. 1,2.
12. Бать М.И. и др. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие. Т. 1, 2. – М., 1984.

13. Бражниченко Н. А. и др. Сборник задач по теоретической механике. – М., 1974.
14. Кепе О.Э. и др. Сборник коротких задач по теоретической механике: учебное пособие. – М., 1989.
15. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: Наука, 1961.
16. Четаев Н. Г. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1987.

### **Интернет-ресурсы**

1. [www.mashin.ru](http://www.mashin.ru)



## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                               |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Предисловие.....                                                                                                              | 3          |
| <b>Планы практических занятий.....</b>                                                                                        | <b>5</b>   |
| <b>Раздел 1. СТАТИКА .....</b>                                                                                                | <b>5</b>   |
| 1. Виды связей и их реакции.....                                                                                              | 5          |
| 2. Равнодействующая. Условия равновесия системы сил .....                                                                     | 6          |
| 3. Равнодействующая. Условия равновесия плоской системы сил.....                                                              | 11         |
| 4. Равнодействующая. Условия равновесия пространственной системы сил.....                                                     | 14         |
| 5. Равновесие плоской системы сходящихся сил. Аналитический способ уравнивания конструкции.....                               | 17         |
| 6. Равновесие пространственной системы сходящихся сил. Аналитический способ уравнивания конструкции .....                     | 20         |
| 7. Момент силы относительно неподвижной точки на плоскости. Пара сил. Момент пары сил.....                                    | 24         |
| 8. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей произвольной плоской системы сил .....                                        | 28         |
| 9. Определение реакций опор твёрдого тела. Плоская произвольная система сил.....                                              | 31         |
| 10. Равновесие сочленённой системы тел.....                                                                                   | 52         |
| 11. Определение реакций опор составной конструкции. Система 2-х тел.....                                                      | 58         |
| 12. Момент силы относительно оси и его свойства. Уравнения равновесия пространственной системы сил .....                      | 74         |
| 13. Определение реакций опор твёрдого тела. Пространственная произвольная система сил.....                                    | 78         |
| 14. Расчёт плоской статически определимой фермы. Метод вырезания узлов. ....                                                  | 96         |
| 15. Расчёт плоской статически определимой фермы. Метод Риттера. ....                                                          | 100        |
| <b>Раздел 2. КИНЕМАТИКА .....</b>                                                                                             | <b>119</b> |
| 16. Скорость, ускорение точки при координатном и векторном способах задания движения точки. Классификация движений точки.     |            |
| 17. Скорость, ускорение точки при естественном способе задания движения точки. Классификация движений точки.....              | 119        |
| 18. Определение траектории, скорости, ускорения, нормального и касательного ускорения точки, радиуса кривизны траектории..... | 121        |
| 19. Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела при поступательном и вращательном движениях.....                    | 123        |
| 20. Передаточные механизмы.....                                                                                               | 132        |
| 21. Кинематический анализ передаточных механизмов.....                                                                        | 134        |
| 22. Мгновенный центр скоростей. Определение скоростей точек                                                                   |            |

|                     |     |
|---------------------|-----|
| плоской фигуры..... | 137 |
|---------------------|-----|

|                                                                                                                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 23. Определение скоростей точек плоской фигуры .....                                                                                                                                                                 | 144 |
| 24. Определение ускорений точек плоской фигуры .....                                                                                                                                                                 | 149 |
| 25. Кинематический анализ плоского механизма .....                                                                                                                                                                   | 153 |
| <b>Раздел 3. ДИНАМИКА</b> .....                                                                                                                                                                                      | 155 |
| 26. Первая задача «Динамики точки» .....                                                                                                                                                                             | 172 |
| 27. Вторая задача «Динамики точки» .....                                                                                                                                                                             | 175 |
| 28. Дифференциальные уравнения движения свободной<br>и несвободной материальной точки в декартовых координатах и<br>в проекциях на оси естественного трёхгранника. Принцип<br>Даламбера для материальной точки ..... | 181 |
| 29. Работа силы. Мощность .....                                                                                                                                                                                      | 185 |
| 30. Кинетическая энергия материальной точки. Теорема<br>об изменении кинетической энергии материальной точки .....                                                                                                   | 189 |
| 31. Импульс силы. Теорема об изменении количества движения<br>материальной точки .....                                                                                                                               | 192 |
| 32. Применение общих теорем динамики к исследованию<br>движения материальной точки .....                                                                                                                             | 195 |
| 33. Кинетическая энергия твёрдого тела при поступательном<br>движении .....                                                                                                                                          | 204 |
| 34. Кинетическая энергия твёрдого тела при вращательном<br>движении .....                                                                                                                                            | 208 |
| 35. Кинетическая энергия твёрдого тела при плоскопараллельном<br>движении .....                                                                                                                                      | 210 |
| 36. Применение теоремы об изменении кинетической энергии<br>к исследованию движения механической системы .....                                                                                                       | 213 |
| 37. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение<br>динамики .....                                                                                                                                                 | 222 |
| Глоссарий .....                                                                                                                                                                                                      | 232 |
| Литература .....                                                                                                                                                                                                     | 233 |

---

Редактор, технический редактор, компьютерная верстка М. И. Толмачёв

Подписано в печать 19.11.2014

Формат 60x84 1/16

Усл. печ. л. 13,72

Уч.-изд. л. 11,95

Бумага офсетная

Заказ 365

Тираж 40 экз.

---

Отпечатано в Издательско-полиграфическом комплексе  
ФГАОУ ВПО «Северо-Кавказский федеральный университет»  
355029, г. Ставрополь, пр-т Кулакова, 2

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«СЕВЕРО – КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МИЛОВАНОВА Л. Н.

Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине  
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

Специальность – 21.05.06 – «Нефтегазовая техника и технологии»

Специализация – "Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений"

Ставрополь

2023

| Содержание                                                                                                                          | стр. |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Введение.                                                                                                                           | 3    |
| План лабораторных занятий                                                                                                           |      |
| Раздел 1. Статика.                                                                                                                  |      |
| Тема 2. Эквивалентные преобразования систем сил.                                                                                    |      |
| 1. Лабораторная работа №1. Равнодействующая. Условия равновесия плоской системы сходящихся сил.                                     | 4    |
| 2. Лабораторная работа №2. Равнодействующая. Условия равновесия пространственной системы сходящихся сил.                            | 10   |
| Тема 4. Равновесие плоской произвольной системы сил.                                                                                |      |
| 3. Лабораторная работа №3. Условия равновесия плоской системы сил.                                                                  | 15   |
| Тема 5. Пространственная произвольная система сил.                                                                                  |      |
| 4. Лабораторная работа №4. Условия равновесия пространственной системы сил.                                                         | 21   |
| Раздел 2. Кинематика.                                                                                                               |      |
| Тема 6. Кинематика точки.                                                                                                           |      |
| 5. Лабораторная работа №5. Скорость, ускорение точки при координатном способе задания движения точки. Классификация движений точки. | 41   |
| 6. Лабораторная работа №6. Скорость, ускорение точки при векторном способе задания движения точки. Классификация движений точки.    | 44   |
| 7. Лабораторная работа №7. Скорость, ускорение точки при естественном способе задания движения точки. Классификация движений точки. | 47   |
| Тема 8. Кинематика механизмов.                                                                                                      |      |
| 8. Лабораторная работа №8. Передаточные механизмы. Типы передаточных механизмов. Передаточное число.                                | 50   |
| 9. Лабораторная работа №9. Кинематический анализ передаточных механизмов.                                                           | 55   |
| Литература.                                                                                                                         | 64   |

## Введение

Цель дисциплины: дать представление о предмете классической механики, включая как физические ее основы, так и дифференциально–геометрические аспекты с использованием традиционных моделей движущихся объектов и среды.

Задачи дисциплины: изучение классической механики, т.е. механики, основанной на законах Ньютона, с формулировками задач с техническим содержанием и приемами решения таких задач средствами математического анализа.

Цели и задачи дисциплины соотнесены с общими целями основной образовательной программы и квалификационными характеристиками специалиста и ориентированы на формирование и развитие общепрофессиональных компетенций будущего специалиста ОПК–1.

Теоретическая механика относится к математическому и естественнонаучному циклу базовой части. Ее освоение происходит во 2 семестре в контексте формирования и развития общепрофессиональных компетенций специалиста по специальности 21.05.06 – «Нефтегазовая техника и технологии» (специализация – Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений).

Методические указания по выполнению лабораторных работ составлены в соответствии с требованиями ФГОС ВО к подготовке выпускника для получения квалификации специалиста, предназначено для студентов очной и заочной формы обучения специальности 21.05.06 – «Нефтегазовая техника и технологии» (специализация – "Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений").

Методические указания по выполнению лабораторных работ содержат краткий теоретический обзор по теме лабораторного занятия, задания, лабораторные задания, примеры выполнения заданий и методические рекомендации, задания на самостоятельную проработку, вопросы в контексте формирования и развития общепрофессиональных компетенций специалиста ОПК–1.

## План лабораторных занятий

### Раздел 1. Статика.

#### Тема 2. Эквивалентные преобразования систем сил.

1. Лабораторная работа №1. Равнодействующая. Условия равновесия плоской системы сходящихся сил.

Цель занятия: плоская система сходящихся сил, равнодействующая плоской системы сходящихся сил, равновесие плоской системы сходящихся сил, графический и геометрический способы уравнивания конструкции, проекция силы на ось, разложение силы на сходящиеся составляющие. Реализация учебной цели лабораторного занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОК–1, ОПК–5.

Организационная форма: аналитическое исследование.

Методические рекомендации к лабораторному занятию:

Краткий теоретический обзор:

Система сил, в которой линии действия всех сил лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке, называется *плоской системой сходящихся сил*.

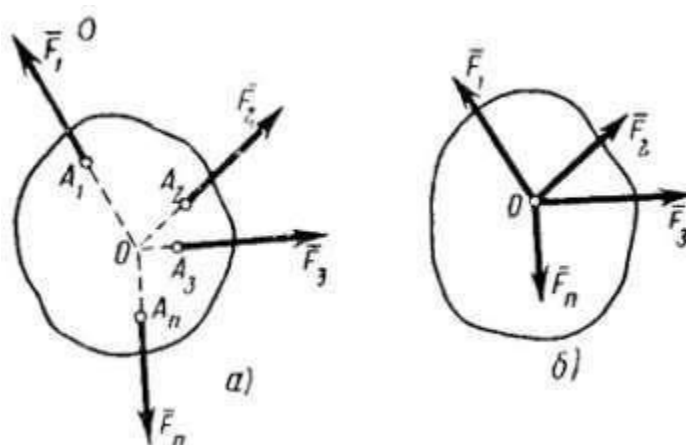


Рисунок 1

Замена сложной системы сил простой системой называется *приведением системы сил к простейшей, ей эквивалентной*. Если система сил приводится только к одной силе, ей эквивалентной, то эта одна сила называется *равнодействующей* системы сил, а *приведение* системы сил называется в этом случае *сложением сил*. Обратный процесс носит название *разложения сил*. Плоская система сходящихся сил в общем случае эквивалентна одной силе, являющейся равнодействующей, которая приложена в точке пересечения линий действия всех этих сил и равна их векторной (геометрической) сумме:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (1)$$

Геометрическое (или графическое) условие равновесия: для равновесия пространственной, а также плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на векторах слагаемых сил этой системы, был замкнут.

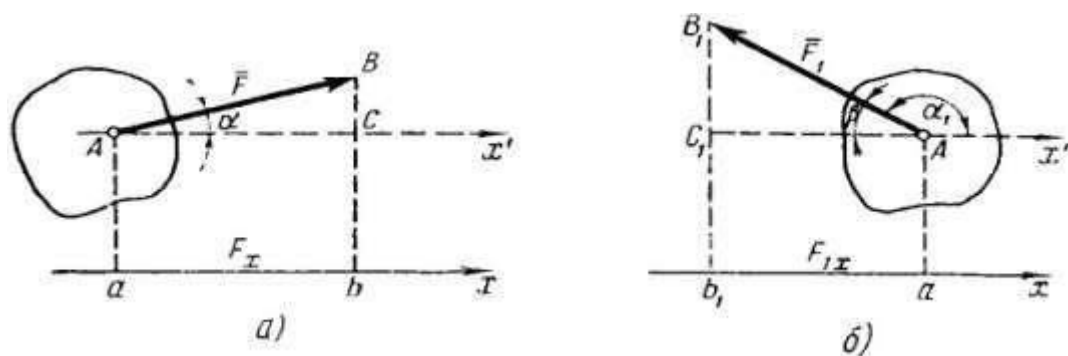


Рисунок 2

$$F_x = X = F \cos \alpha, \quad F_{1x} = X_1 = F \cos \alpha, \quad (2)$$

т. е. проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением, оси проекций.

Задание:

Тяжелый шар весом  $P$  килограммов подвешен на нити (рисунок 2, а) в точке  $A$  и удерживается в отклоненном на угол  $\alpha$  от вертикали отложении горизонтальной нитью, привязанной в точке  $B$ . Найти натяжение нитей.



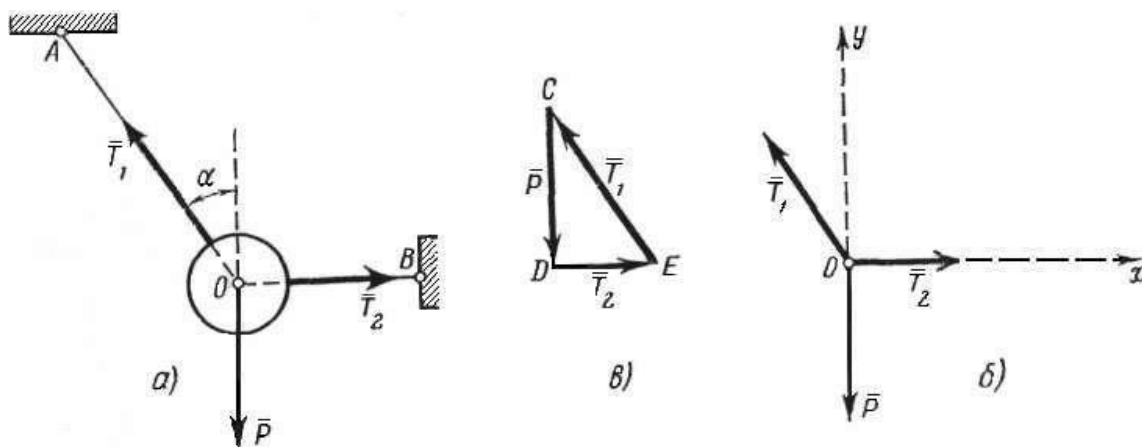


Рисунок 3

Пример выполнения: Выбираем тело, равновесие которого будем рассматривать. Таким телом будет шар. Вес  $P$  шара известен. Будем рассматривать шар как материальную точку  $O$ . Эта точка несвободна. Связи, наложенные на нее, осуществляются нитями  $OA$  и  $OB$ . Отбрасываем связи (перережем мысленно нити) и заменяем их действие на точку  $O$  реакциями. Тогда точку  $O$  можно будет рассматривать как свободную и находящуюся в равновесии под действием плоской системы из трех сходящихся сил: активной  $\vec{P}$  и реакций  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$  нитей (рисунок 2, б) которые направлены вдоль нитей. Реакции  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$  по модулю равны искомым натяжениям нитей. Следовательно, определение натяжений нитей можно заменить определением их реакций  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$ .

Рассмотрим графический и геометрический методы выполнения задания.

Графический метод выполнения. Так как три силы  $\vec{P}$ ,  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$  находятся в равновесии, то силовой треугольник, составленный из этих сил, должен замыкаться. Строим этот силовой треугольник: для этого в определенном масштабе строим силу, которая нам известна по модулю и направлению, затем через начало и конец вектора  $\vec{P}$  проводим прямые, параллельные направлениям сил  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$ . Стороны  $DE$  и  $EC$  полученного таким образом замкнутого силового треугольника  $CDE$  (рисунок 2, в) дают модули и направления искомых реакций нитей. Чтобы найти их модули, а следовательно, и натяжения нитей, остается измерить в принятом масштабе стороны  $DE$  и  $EC$ .

Геометрический метод выполнения. Искомые стороны  $DE$  и  $EC$  силового треугольника  $CDE$  можно найти не только путем непосредственного измерения, но и вычислением, применяя правила геометрии и

тригонометрические формулы. Из способа построения силового треугольника  $CDE$  ясно, что  $\angle CDE = 90^\circ$ ,  $\angle DCE = \alpha$  и  $\angle DEC = 90^\circ - \alpha$  (рисунок 2, а, б). Из силового треугольника  $CDE$  видно, что

$$T_1 = \frac{P}{\cos \alpha} H; \quad T_2 = P \operatorname{tg} \alpha H. \quad (3)$$

Нужно иметь в виду, что геометрический метод выполнения при числе сил больше трех имеет высокую погрешность результата.

Аналитический метод выполнения.

Модуль равнодействующей системы сил  $|\bar{R}|$  по ее проекциям на координатные оси определяется по формулам:

$$|\bar{R}| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2} \quad \text{— для плоской системы сил} \quad (4)$$

$$\bar{R} = 0 \quad \text{— условие равновесия системы сил.} \quad (5)$$

$$|\bar{R}| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2} = 0 \quad \text{— для плоской системы сил.} \quad (6)$$

Ориентация вектора сила на плоскости определяется по направляющим косинусам:

$$\cos(\bar{F}_x; \bar{F}) = \frac{F_x}{F}, \quad (7)$$

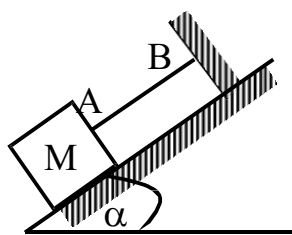
$$\cos(\bar{F}_y; \bar{F}) = \frac{F_y}{F}; \quad (8)$$

Оборудование и материалы: тетрадь для лабораторных работ - в клетку - 48 листов; ручка шариковая, цвет чернил в ручке шариковой – синий, чёрный; карандаш простой – М,2М; карандаши цветные – М,2М; ластик, линейка до 25 см – дерево, пластик, металл, алюминий; линейка рейсшина 22см с металлическим роликом УЧП-22; трафарет графических функций; циркуль металлический; калькулятор инженерного типа.

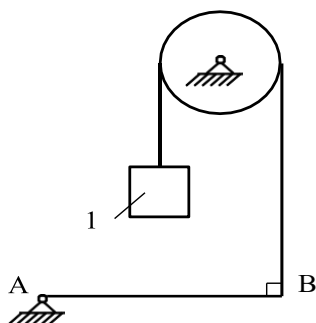
Указания по технике безопасности соответствуют нормативам эргономики при использовании указанного оборудования и материалов.

Выполнить задания самостоятельно:

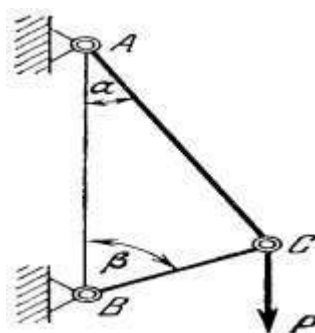
1. На абсолютно гладкой неподвижной плоскости, образующей с горизонтом угол  $\alpha$ , покоится тело М, удерживаемое нитью АВ, которая расположена параллельно наклонной плоскости. Вес тела М равен  $\bar{P}$ . Определите натяжение нити  $\bar{T}$  и реакцию плоскости  $\bar{N}$ .



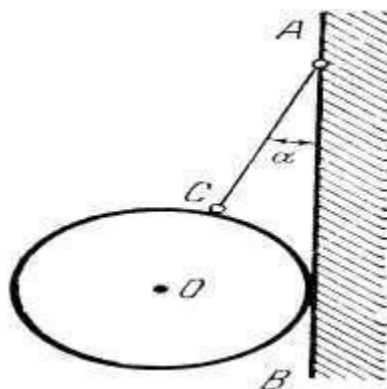
2. Определить реакции опоры A и вес груза 1, необходимый для того, чтобы однородная балка AB весом 340 Н в положении равновесия была горизонтальна.



3. Стержни AC и BC соединены между собой и с вертикальной стеной посредством шарниров. На шарнирный болт C действует вертикальная сила  $P=1000\text{ Н}$ . Определить реакции этих стержней на шарнирный болт C, если углы, составляемые стержнями со стеной, равны:  $\alpha = 30^\circ$  и  $\beta = 60^\circ$ .



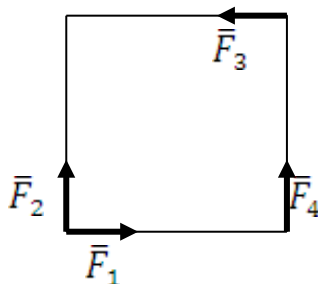
4. К вертикально гладкой стене AB подвешен на тросе AC однородный шар O. Трос составляет со стеной угол  $\alpha$ , вес шара P. Определить натяжение троса T и давление Q шара на стену.



5. Однородная балка веса 600 Н и длины 4 м опирается одним концом на гладкий пол, а промежуточной точкой  $B$  — на столб высоты 3 м, образуя с вертикалью угол  $30^\circ$ . Балка удерживается в таком положении веревкой  $AC$ , протянутой по полу. Пренебрегая трением, определить натяжение веревки  $T$  и реакции  $R_B$  столба и  $R_C$  пола.

6. Силы  $F_1 = F_2 = 10$  Н и  $\vec{F}_3$  находятся в равновесии. Линии действия сил между собой образуют углы по  $120^\circ$ . Определить модуль силы  $\vec{F}_3$ . (10)

7. К квадрату приложена система четырех сил, причем силы  $F_1 = F_2 = F_3 = 1$  Н. Определить модуль силы  $F_4$ , при которой равнодействующая системы  $R=2$ Н (1,0)



Содержание отчёта:

– пример выполнения задания в методических указаниях – пример оформления самостоятельно выполненного студентом лабораторного задания;

– допуск к лабораторным занятиям происходит при наличии у студента рукописного варианта отчета. Защита отчета проходит в форме доклада студента по выполнению лабораторного задания и ответов на вопросы преподавателя.

Максимальное количество баллов студент получает, если оформление отчета соответствует установленным требованиям, а отчет полностью раскрывает тему занятия.

Основанием для снижения оценки являются:

- слабое знание темы и основной терминологии;
- отсутствие умения применять теоретические знания для выполнения лабораторных заданий.

Отчет может быть отправлен на доработку, если:

- лабораторное задание выполнено неверно;
- несоответствие отчета установленным требованиям;
- слабое знание темы и неправильные ответы на поставленные вопросы.

Вопросы для обсуждения:

1. Плоская система сходящихся сил?
2. Равнодействующая плоской системы сходящихся сил?

3. Равновесие плоской системы сходящихся сил?
4. Графический и геометрический способы уравнивания конструкций?
5. Разложение силы на сходящиеся составляющие – правило параллелограмма сил (аксиома)?
6. Проекция силы на ось – графически?
7. Модуль проекции вектора силы на ось?
8. Модуль проекции равнодействующей системы сил на оси координат?
9. Вектор равнодействующей системы сил  $\vec{R}$  –?
10. Геометрическое условие равновесия системы сил по определению равнодействующей  $\vec{R}$ ?
11. Аналитические условия равновесия системы сил по определению равнодействующей  $\vec{R}$ ?
12. Аналитическое условие равновесия плоской системы сил по определению равнодействующей?

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб.пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.
4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: [www.mashin.ru](http://www.mashin.ru)

2. Лабораторная работа №2. Равнодействующая. Условия равновесия пространственной системы сходящихся сил.

Цель занятия: пространственная система сходящихся сил, равнодействующая пространственной системы сходящихся сил, вектор равнодействующей пространственной системы сил, проекция вектора равнодействующей  $\vec{R}$  пространственной системы сил на оси координат, модуль вектора равнодействующей  $|\vec{R}|$  пространственной системы сил, равновесие пространственной системы сходящихся сил, графический и геометрический

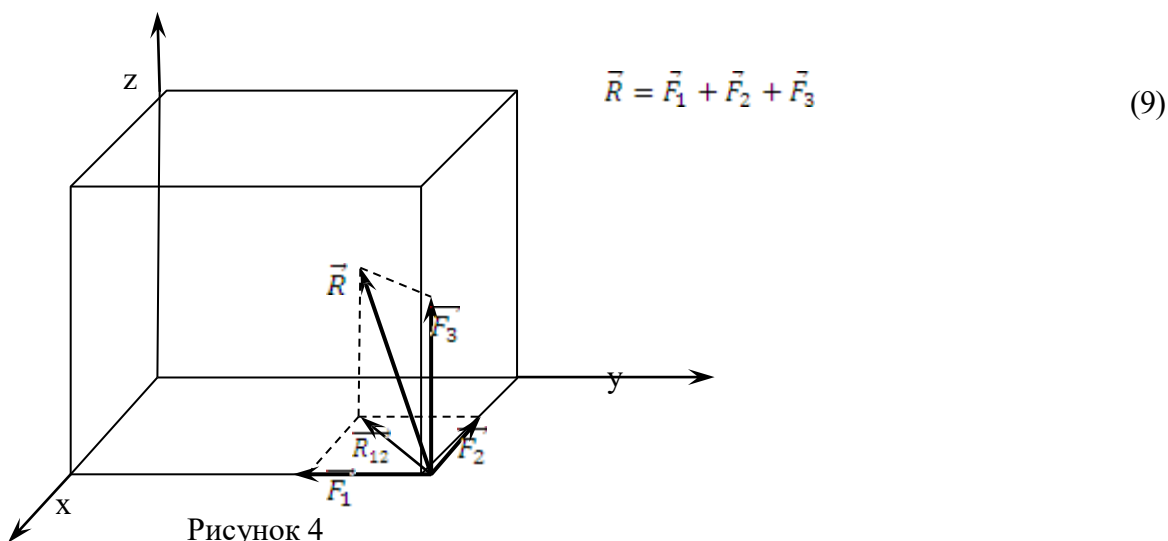
способы уравнивания конструкции, проекция силы на ось, разложение силы на сходящиеся составляющие. Реализация учебной цели лабораторного занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОК–1, ОПК–5.

Организационная форма: аналитическое исследование.

Методические рекомендации к лабораторному занятию:

Краткий теоретический обзор:

Вектор равнодействующей  $\vec{R}$  пространственной системы сил равен геометрической сумме векторов сил, образующих систему сил.



Проекция вектора равнодействующей  $\vec{R}$  на оси координат равна алгебраической сумме проекций сил, составляющих данную систему, на соответствующие координатные оси:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} \dots + F_{nx} \\ R_y &= \sum F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} \dots + F_{ny} \\ R_z &= \sum F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} \dots + F_{nz} \end{aligned} \quad (10)$$

Модуль вектора равнодействующей  $\vec{R}$  пространственной системы сил вычисляется по формуле

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2} \quad \text{или} \quad |\vec{R}| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2 + (R_z)^2} \quad (11)$$

Ориентация вектора силы в пространстве по отношению к координатным осям определяется по направляющим косинусам:

$$\cos(\widehat{\vec{F}_x; \vec{F}}) = \frac{F_x}{F}$$

$$\cos(\widehat{\vec{F}_y; \vec{F}}) = \frac{F_y}{F}$$

$$\cos(\widehat{\vec{F}_z; \vec{F}}) = \frac{F_z}{F}$$

(12)

Задание 1.

Определить косинусы углов между вектором силы  $\vec{F} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$  и осями координат  $ox$ ,  $oy$  и  $oz$ ?

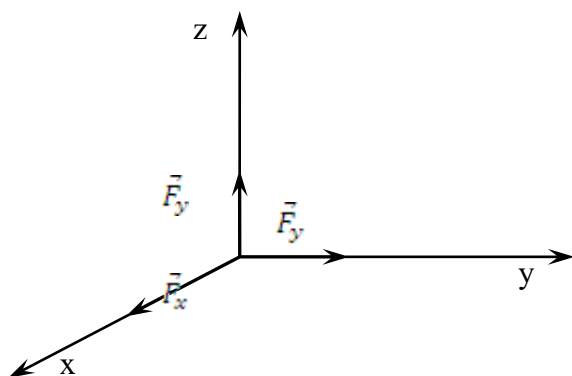


Рис.5

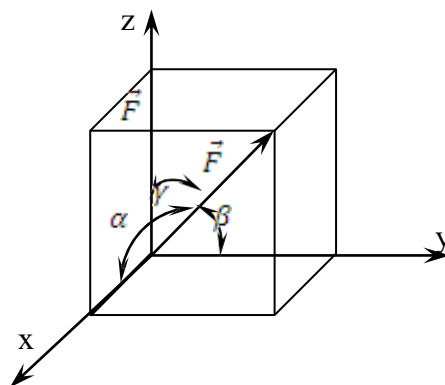


Рис.6

$$\cos(\widehat{\vec{F}_x; \vec{F}}) = \frac{F_x}{F} = \cos\alpha = \frac{F_x}{\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{2}{\sqrt{45}} = 0,30$$

$$\cos(\widehat{\vec{F}_y; \vec{F}}) = \frac{F_y}{F} = \cos\beta = \frac{F_y}{\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{4}{\sqrt{45}} = 0,60$$

$$\cos(\widehat{\vec{F}_z; \vec{F}}) = \frac{F_z}{F} = \cos\gamma = \frac{F_z}{\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{5}{\sqrt{45}} = 0,75$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

Ответ:  $\cos\alpha = 0,30$ ;  $\cos\beta = 0,60$ ;  $\cos\gamma = 0,75$

Задание 2.

Определить модуль равнодействующей сил  $F_1=12\text{Н}$ ,  $F_2=10\text{Н}$ ,  $F_3=9\text{Н}$ , приложенных в точке А, как показано на рис. 7.

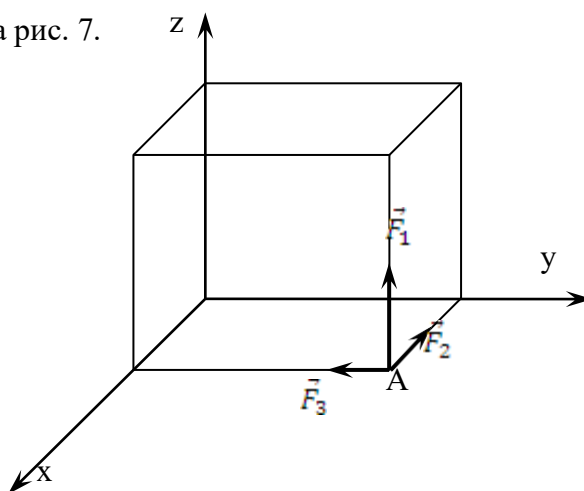


Рисунок 7

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = \sqrt{(12)^2 + (10)^2 + (9)^2} = \sqrt{144 + 100 + 81} = \sqrt{325} = 18,03 \text{ Н}$$

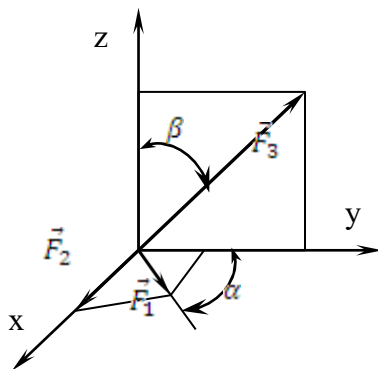
Ответ:  $|\vec{R}|=18,03\text{Н}$ .

Оборудование и материалы: тетрадь для лабораторных работ - в клетку - 48 листов; ручка шариковая, цвет чернил в ручке шариковой – синий, чёрный; карандаш простой – М,2М; карандаши цветные – М,2М; ластик, линейка до 25 см – дерево, пластик, металл, алюминий; линейка рейсшина 22см с металлическим роликом УЧП-22; трафарет графических функций; циркуль металлический; калькулятор инженерного типа.

Указания по технике безопасности соответствуют нормативам эргономики при использовании указанного оборудования и материалов.

Выполнить самостоятельно:

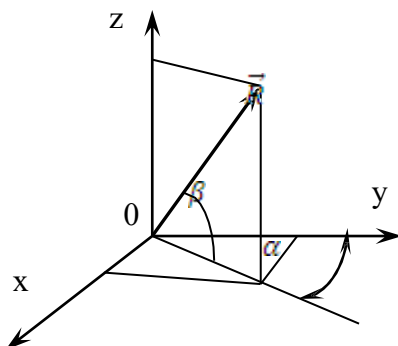
1. Определить модуль равнодействующей сил  $F_1=15\text{Н}$ ,  $F_2=20\text{Н}$ ,  $F_3=25\text{Н}$ . Углы, образованные линиями действия сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_3$  с осями координат, заданы:  $\alpha=60^\circ$  и  $\beta=45^\circ$ . (50,5)



2. Направление равнодействующей трех сил  $R=33,8\text{Н}$  задано косинусами направляющих углов:  $\cos(\vec{R}; x) = 0,325$ ;  $\cos(\vec{R}; y) = 0$ ;  $\cos(\vec{R}; z) = 0,946$ . Проекция сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  на координатные оси соответственно равны:  $F_{1x}=7\text{Н}$ ;  $F_{1y}=10\text{Н}$ ;  $F_{1z}=0$ ;  $F_{2x}=-5\text{Н}$ ;  $F_{2y}=15\text{Н}$ ;  $F_{2z}=13\text{Н}$ . Определить модуль силы  $\vec{F}_3$ . (32,6)

3. Определить модуль равнодействующей трех сходящихся сил, если заданы проекции на оси координат:  $F_{1x}=7\text{Н}$ ;  $F_{1y}=10\text{Н}$ ;  $F_{1z}=0$ ;  $F_{2x}=-5\text{Н}$ ;  $F_{2y}=15\text{Н}$ ;  $F_{2z}=12\text{Н}$ ;  $F_{3x}=6\text{Н}$ ;  $F_{3y}=0$ ;  $F_{3z}=-6\text{Н}$ . (26,9)

4. Модуль равнодействующей  $\vec{R}$  пространственной системы сходящихся сил равен 150Н. Определить ее проекцию на координатную ось Оу, если даны углы  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ .





5. Определить косинус угла между вектором силы  $\vec{F}$  и осью координат Oz, если сила (Н)  $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ . (0,707)

6. Две силы (Н)  $\vec{F}_1 = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 9\vec{k}$  и  $\vec{F}_2 = 4\vec{i} + 9\vec{j} + 11\vec{k}$  приложены в центре О системы прямоугольных координат Охуз. Определить модуль равнодействующей силы. (27,1)

Содержание отчёта:

– пример выполнения задания в методических указаниях – пример оформления самостоятельно выполненного студентом лабораторного задания;

– допуск к лабораторным занятиям происходит при наличии у студента рукописного варианта отчета. Защита отчета проходит в форме доклада студента по выполнению лабораторного задания и ответов на вопросы преподавателя.

Максимальное количество баллов студент получает, если оформление отчета соответствует установленным требованиям, а отчет полностью раскрывает тему занятия.

Основанием для снижения оценки являются:

– слабое знание темы и основной терминологии;  
– отсутствие умения применять теоретические знания для выполнения лабораторных заданий.

Отчет может быть отправлен на доработку, если:

– лабораторное задание выполнено неверно;  
– несоответствие отчета установленным требованиям;  
– слабое знание темы и неправильные ответы на поставленные вопросы.

Вопросы для обсуждения:

1. Вектор равнодействующей  $\vec{R}$  пространственной системы сил?
2. Проекция вектора равнодействующей  $\vec{R}$  пространственной системы сил на оси координат?
3. Модуль вектора равнодействующей  $\vec{R}$  пространственной системы сил?
4. Направляющие косинусы вектора равнодействующей  $\vec{R}$  пространственной системы сил?
5. Геометрическое условие равновесия системы сил по определению равнодействующей  $\vec{R}$ ?
6. Аналитические условия равновесия системы сил по определению равнодействующей  $\vec{R}$ ?

7. Аналитическое условие равновесия пространственной системы сил по определению равнодействующей  $\bar{R}$  –?

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб.пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.
4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: [www.mashin.ru](http://www.mashin.ru)

Тема 4. Равновесие плоской произвольной системы сил.

3. Лабораторная работа №3. Условия равновесия плоской системы сил.

Цель занятия: плоская произвольная система сил, алгебраический момент силы относительно неподвижной точки на плоскости, условия равновесия плоской произвольной системы сил, аналитический способ уравнивания конструкции. Реализация учебной цели лабораторного занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОК–1, ОПК–5.

Организационная форма: аналитическое исследование.

Методические рекомендации к лабораторному занятию:

Краткий теоретический обзор:

Понятие момента силы возникло в связи с определением вращательного действия силы, приложенной к телу, имеющему неподвижную точку или неподвижную ось. Алгебраическим моментом силы относительно некоторой точки  $O$  на плоскости называется скалярная величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо относительно этой точки.

$$m_o(\bar{F}) = \pm Fd \quad (13)$$

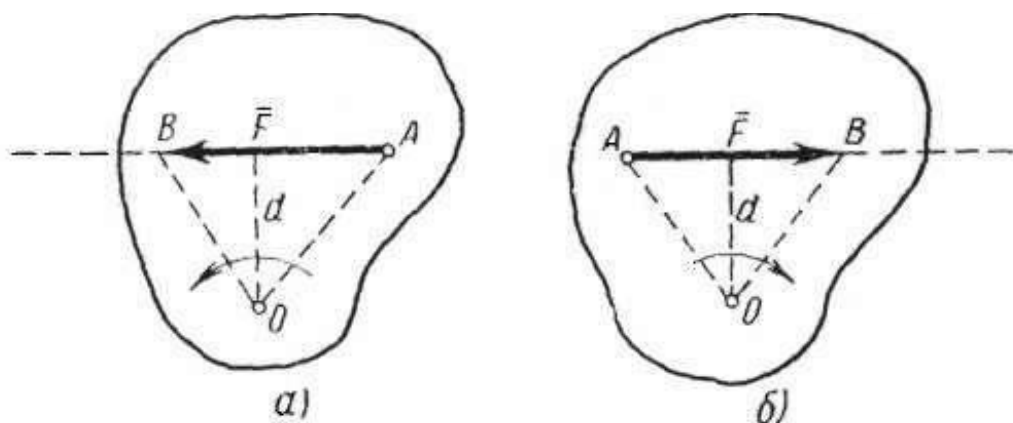


Рисунок 8

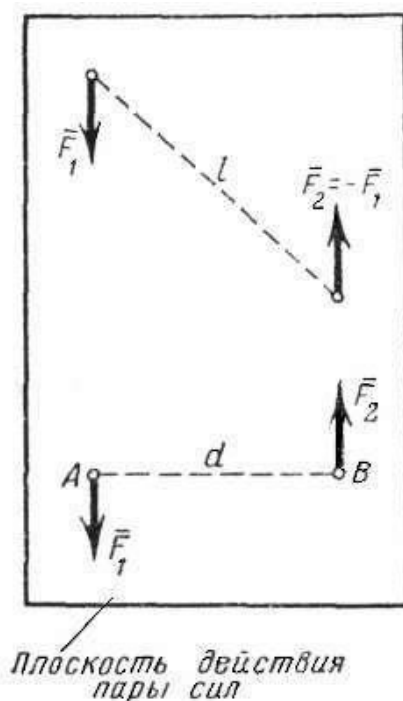


Рисунок 9

Система двух равных по модулю параллельных друг другу и направленных в разные стороны сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , линии действия которых не совпадают (рисунок 9). Такая система двух сил образует так называемую *пару сил*, или просто *пару*, для обозначения которой будем пользоваться символом  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ .

Плоскость в которой расположена пара сил, называется *плоскостью действия пары*.

Кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ , т. е. длина перпендикуляра, опущенного из точки приложения  $A$  одной из сил пары на линию действия второй силы, называется *плечом пары*  $d$ . Пара сил, приложенная к твердому телу,

способна привести его во вращательное движение. Вращательное действие пары на тело будет тем больше, чем больше плечо пары и модули сил, образующих эту пару, и измеряется так называемым моментом пары. При этом *численное значение момента пары определяется как произведение модуля одной из сил пары на плечо этой пары. моментом пары называется скалярная величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на ее плечо.* Будет обозначать момент пары символом  $m$  или  $M$  ( $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ ). Тогда

$$m = \pm F_1 d = \pm F_2 d . \quad (14)$$

Будем считать *положительным* момент такой пары которая стремится повернуть тело против направления вращения часовой стрелки, и *отрицательным* — момент такой пары, которая стремится повернуть тело по направлению вращения часовой стрелки.

*Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно и главный вектор, и главный момент этой системы относительно произвольно выбранного центра приведения равнялись нулю.*

$$\overline{R}' = 0 ; M_o = 0 , \quad (15)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \overline{F}_i = 0 ; \sum_{i=1}^n m_o (\overline{F}_i) = 0 , \quad (16)$$

*Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из двух любым образом выбранных в плоскости действия этой системы сил координатных осей и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки той же плоскости были равны нулю.*

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0 ; \sum_{i=1}^n Y_i = 0 ; \sum_{i=1}^n m_o (\overline{F}_i) = 0 . \quad (17)$$

*Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы моментов всех сил относительно каждой из трех любых точек A, B и C, взятых в плоскости действия этой системы сил и не лежащих на одной прямой, были равны нулю:*

$$\sum_{i=1}^n m_A (\overline{F}_i) = 0 ; \sum_{i=1}^n m_B (\overline{F}_i) = 0 ; \sum_{i=1}^n m_C (\overline{F}_i) = 0 . \quad (18)$$

Оборудование и материалы: тетрадь для лабораторных работ - в клетку - 48 листов; ручка шариковая, цвет чернил в ручке шариковой – синий, чёрный; карандаш простой – М,2М; карандаши цветные – М,2М; ластик, линейка до 25 см – дерево, пластик, металл, алюминий; линейка рейсшина 22см с металлическим роликом УЧП-22; трафарет графических функций; циркуль металлический; калькулятор инженерного типа.

Указания по технике безопасности соответствуют нормативам эргономики при использовании указанного оборудования и материалов.

Задание 1:

Между опорами двухконсольной горизонтальной балки  $CD$  (рисунок 10, а) приложена пара  $(\bar{P}, \bar{P}')$ , к левой консоли – равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , а в точке  $D$  правой консоли – вертикальная нагрузка  $Q = 4,6$  Н. Определить реакции опор, если  $P = P' = 4$  Н,  $q = 4$  Н/м,  $a = 2,5$  м.

Двухконсольная балка  $CD$  является тем телом, равновесие которого мы должны рассмотреть. К ней приложена пара сил  $(\bar{P}, \bar{P}')$  с моментом  $m = Pa$  и две активные силы: в точке  $D$  сила  $\bar{Q}$  и на середине левой консоли сила  $\bar{R} = \bar{q} \cdot CA$ , являющаяся равнодействующей равномерно распределенной нагрузки.

Следовательно, все приложенные к балке  $CD$  активные силы являются вертикальными, так как пару сил  $(\bar{P}, \bar{P}')$ , не изменяя ее действия на балку, можно повернуть в плоскости рисунка так, чтобы составляющие пару  $(\bar{P}, \bar{P}')$  силы  $\bar{P}$  и  $\bar{P}' = -\bar{P}$  были вертикальны.

Связями, наложенными на балку  $CD$ , являются подвижная шарнирная опора  $B$  и

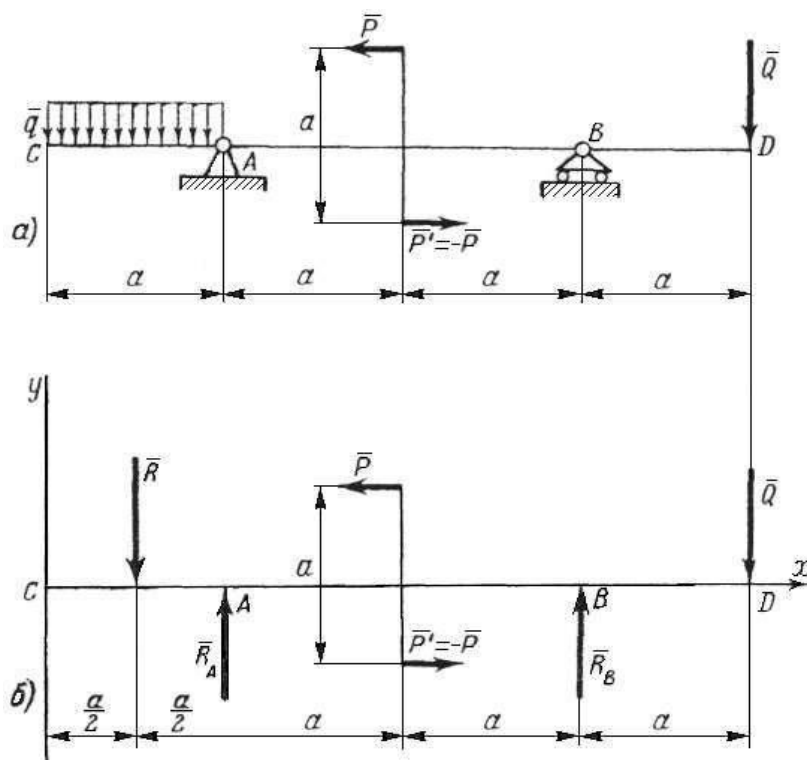


Рисунок 10

неподвижная шарнирная опора  $A$ . Отбросим эти связи и заменим их действие на балку  $CD$  силами реакций. Реакция  $\overline{R}_B$  подвижной шарнирной опоры  $B$  нормальна к плоскости опоры (рисунок 10, б). Так как все действующие на балку  $CD$  активные силы вертикальны, то реакция  $\overline{R}_A$  неподвижной шарнирной опоры  $A$  также вертикальна. Рассмотрим теперь равновесие двухконсольной балки  $CD$  как свободного твердого тела, на которое действует указанная плоская система параллельных сил (рисунок 10, б). Для составления уравнений равновесия этой системы сил в форме

$$\sum m_A(\overline{F}_i) = 0; \quad \sum m_B(\overline{F}_i) = 0 \quad (19)$$

Последовательно примем за центр моментов точки  $A$  и  $B$ . При этом уравнения моментов будут содержать только одно неизвестное.

Итак, в данном случае будем иметь

$$\sum m_A(\overline{F}_i) = qa \cdot \frac{a}{2} + m + R_B \cdot 2a - Q \cdot 3a = 0; \quad (20)$$

$$\sum m_B(\overline{F}_i) = qa \left( \frac{a}{2} + 2a \right) - R_A \cdot 2a + m - Qa = 0. \quad (21)$$

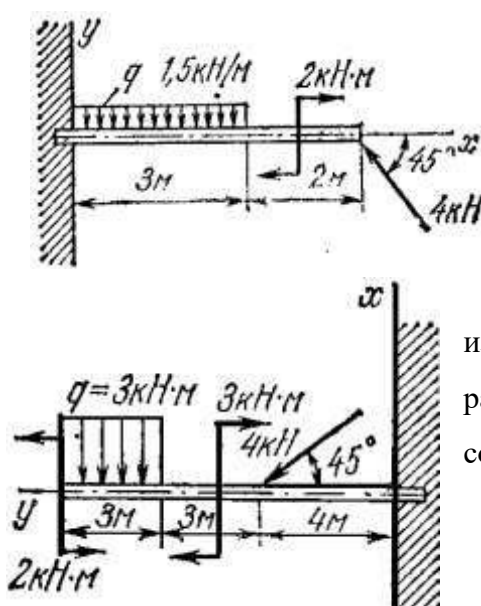
Решая порознь уравнения (20) и (21), найдем

$$R_A = 11,5 \text{ Н}; \quad R_B = 2,5 \text{ Н}.$$

Оборудование и материалы: тетрадь для лабораторных работ - в клетку - 48 листов; ручка шариковая, цвет чернил в ручке шариковой – синий, чёрный; карандаш простой – М,2М; карандаши цветные – М,2М; ластик, линейка до 25 см – дерево, пластик, металл, алюминий; линейка рейсшина 22см с металлическим роликом УЧП-22; трафарет графических функций; циркуль металлический; калькулятор инженерного типа.

Указания по технике безопасности соответствуют нормативам эргономики при использовании указанного оборудования и материалов.

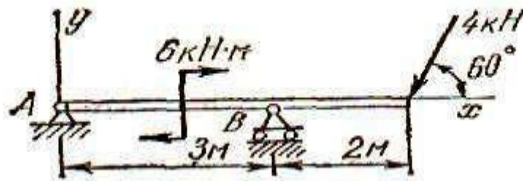
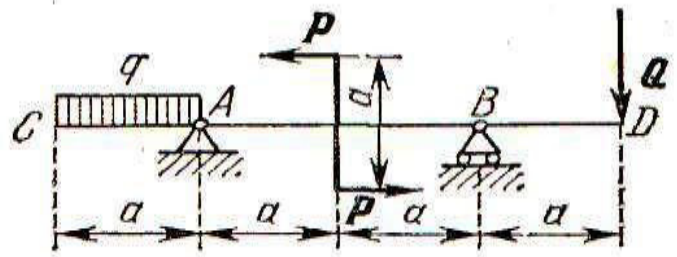
Выполнить самостоятельно:



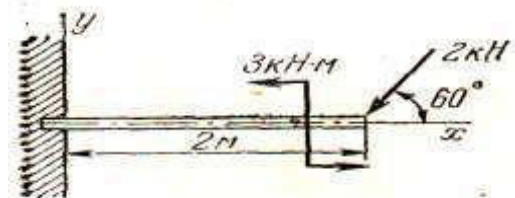
1. Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенной силы и пары сил.

2. Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, одной сосредоточенной силы и двух пар сил.

3. На двухконсольную горизонтальную балку действует пара сил  $(P, P)$ , на левую консоль — равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q$ , а в точке  $D$  правой консоли — вертикальная нагрузка  $Q$ . Определить реакции опор, если  $P = 1$  кН,  $Q = 2$  кН,  $q = 2$  кН/м,  $a = 0,8$  м.



5. Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием сосредоточенной силы и пары сил.



4. Определить реакции опор  $A$  и  $B$

балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы и пары сил. Нагрузка и размеры указаны на рисунке.

Содержание отчёта:

- пример выполнения задания в методических указаниях – пример оформления самостоятельно выполненного студентом лабораторного задания;
- допуск к лабораторным занятиям происходит при наличии у студента рукописного варианта отчета. Защита отчета проходит в форме доклада студента по выполнению лабораторного задания и ответов на вопросы преподавателя.

Максимальное количество баллов студент получает, если оформление отчета соответствует установленным требованиям, а отчет полностью раскрывает тему занятия.

Основанием для снижения оценки являются:

- слабое знание темы и основной терминологии;
- отсутствие умения применять теоретические знания для выполнения лабораторных заданий.

Отчет может быть отправлен на доработку, если:

- лабораторное задание выполнено неверно;
- несоответствие отчета установленным требованиям;
- слабое знание темы и неправильные ответы на поставленные вопросы.

Вопросы для обсуждения:

1. Плоская произвольная система сил?
2. Равномерно – распределённая нагрузка, равнодействующая?

3. Разложение силы на две составляющие по осям?
4. Пара сил. Момент пары сил?
5. Опоры (связи) и силы реакций опор?
6. Алгебраический момент силы относительно неподвижной точки на плоскости и его свойства?
7. Аналитические условия равновесия плоской произвольной системы сил?

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб.пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.
4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: [www.mashin.ru](http://www.mashin.ru)

Тема 5. Пространственная произвольная система сил.

4. Лабораторная работа №4. Условия равновесия пространственной системы сил.

Цель занятия: Определение реакций опор твёрдого тела. Пространственная произвольная система сил. Реализация учебной цели лабораторного занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОК–1, ОПК–5.

Организационная форма: аналитическое исследование.

Методические рекомендации к лабораторному занятию:

Краткий теоретический обзор:

*Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех этих сил на каждую из трех любым образом выбранных координатных осей равнялась нулю и чтобы алгебраическая сумма их моментов относительно каждой из этих осей также равнялась нулю.*



$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \overline{X_i} &= 0; & \sum_{i=1}^n \overline{Y_i} &= 0; & \sum_{i=1}^n \overline{Z_i} &= 0; \\ \sum_{i=1}^n \overline{m_x(F_i)} &= 0; & \sum_{i=1}^n \overline{m_y(F_i)} &= 0; & \sum_{i=1}^n \overline{m_z(F_i)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Условия (22) называются *условиями равновесия произвольной пространственной системы сил в аналитической форме*.

Задание.

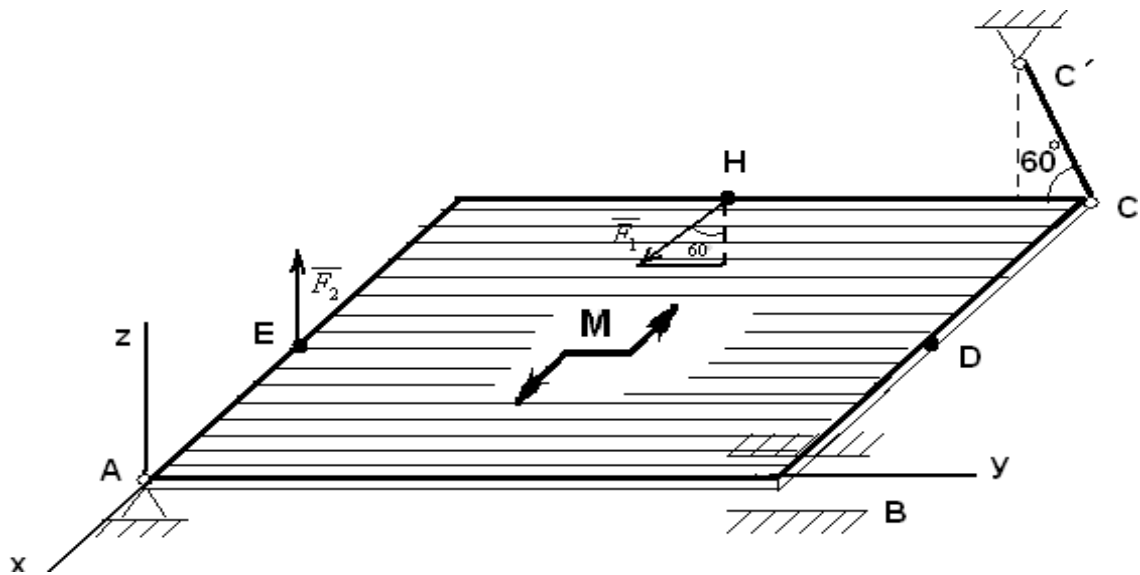


Рисунок 11

Однородная прямоугольная плита весом  $\bar{P}$  со сторонами  $AB = 3L$ ,  $BC = 2L$  закреплена в точке  $B$  цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем  $CC'$  (рис. 11)

На плиту действуют: пара сил (лежащая в плоскости плиты) с моментом  $M$ ; сила  $\bar{F}_1$  – в плоскости, параллельной  $YZ$  (точка приложения –  $H$ ); сила  $\bar{F}_2$  – в плоскости параллельной  $XZ$  (точка приложения  $E$ ). Точки приложения сил ( $E$ ,  $H$ ) находятся в серединах сторон плиты.

Дано:  $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $F_1 = 2 \text{ кН}$ ;  $F_2 = 4 \text{ кН}$ ;  $L = 1 \text{ м}$ ;  $P = 8 \text{ кН}$ ;  $AB = 3L \text{ м}$ ;  $BC = 2L \text{ м}$ .

Определить реакции связей в точках  $A$ ,  $B$  и стержня  $CC'$ .

1. Рассмотрим равновесие плиты. На неё действуют: пара сил (лежащая в плоскости плиты) с моментом  $M$ ; сила  $\bar{F}_1$  – в плоскости, параллельной  $YZ$  (точка приложения –  $H$ ) и её составляющие:

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ кН};$$

$$F_{1z} = F_1 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ кН.}$$

Сила  $\overline{F_2}$  – в плоскости, параллельной  $XZ$  (точка приложения  $E$ );  $\overline{F_2} \parallel AZ$ ; вес плиты  $\overline{P}$  – на пересечении диагоналей (в центре тяжести прямоугольной плиты), а также реакции связей: реакцию сферического шарнира  $A$  разлагаем на три составляющие –  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Z_A$ ;

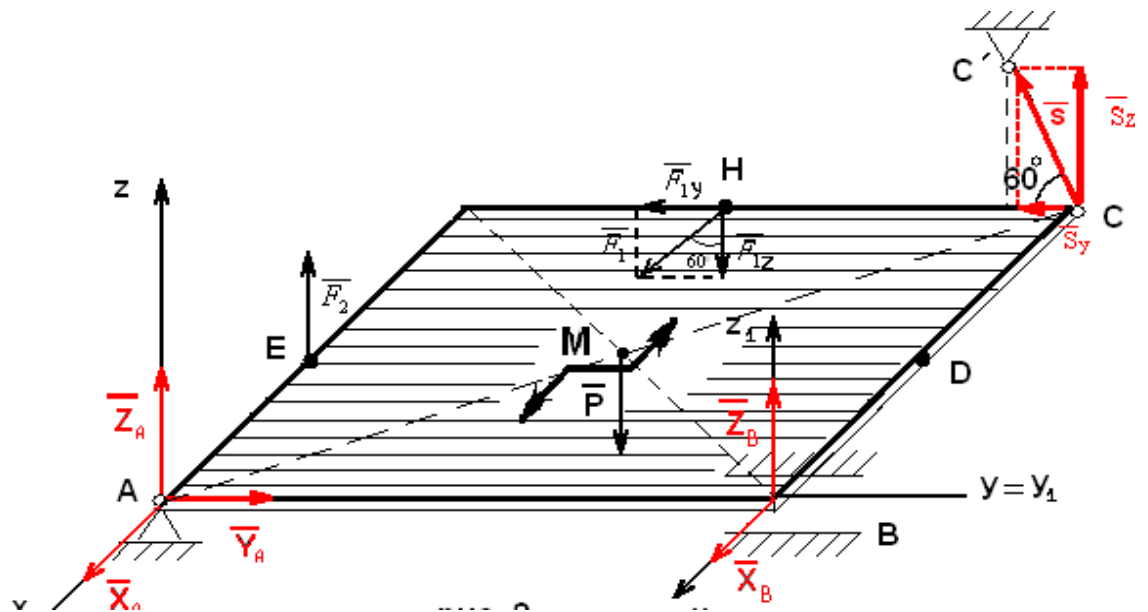


Рисунок 12

реакцию цилиндрического шарнира (подшипника)  $B$  – на две составляющие  $\overline{X_B}$ ,  $\overline{Z_B}$  (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника), реакцию  $\overline{S}$  стержня направляем вдоль стержня  $CC'$ , предполагая, что он растянут и разлагаем  $\overline{S}$  на две составляющие:  $S_z = S \cdot \sin 60^\circ$ ;  $S_y = S \cdot \cos 60^\circ$  (так как стержень  $CC'$  в плоскости, параллельной  $yz$ ) – рис. 12.

2. Вводим систему отсчета  $BX_I Y_I Z_I$  (рис.12). Для полученной пространственной произвольной системы сил (рис.12) для определения шести неизвестных реакций опор –  $\overline{X_A}$ ,  $\overline{Y_A}$ ,  $\overline{Z_A}$ ,  $\overline{X_B}$ ,  $\overline{Z_B}$ ,  $\overline{S}$  – можно составить шесть уравнений равновесия:

- 1)  $\sum \overline{F}_{BXI} = 0$ ;  $X_A + X_B = 0$ ;
- 2)  $\sum \overline{F}_{BYI} = 0$ ;  $Y_A - F_{1Y} - S \cdot \cos 60^\circ = 0$ ;
- 3)  $\sum \overline{F}_{BZI} = 0$ ;  $Z_A + Z_B - P + F_2 - F_{1Z} + S \cdot \sin 60^\circ = 0$ ;
- 4)  $\sum M_{BXI}(\overline{F}_K) = 0$ ;  $-3L \cdot Z_A - 3L \cdot F_2 + 1,5L \cdot F_{1Z} + 1,5L \cdot P = 0$ ;
- 5)  $\sum M_{BYI}(\overline{F}_K) = 0$ ;  $-L \cdot P + L \cdot F_2 - 2L \cdot F_{1Z} + 2L \cdot S \cdot \sin 60^\circ = 0$ ;
- 6)  $\sum M_{BZI}(\overline{F}_K) = 0$ ;  $3L \cdot X_A + M + 2L \cdot F_{1Y} + 2L \cdot S \cdot \cos 60^\circ = 0$ .

Из уравнения 4) вычисляем  $\overline{Z_A}$ :

$$\overline{Z_A} = \frac{-3L \cdot F_2 + 1,5 \cdot L \cdot F_{1Z} + 1,5L \cdot P}{3L} = \frac{-3 \cdot 1 \cdot 4 + 1,5 \cdot 1 \cdot 1 + 1,5 \cdot 1 \cdot 8}{3 \cdot 1} = 0,5 \text{ кН.}$$

Из уравнения 5) определяем численное значение реакции  $\overline{S}$  стержня  $CC'$ :

$$\overline{S} = \frac{L \cdot P - L \cdot F_2 + 2L \cdot F_{1Z}}{2L \cdot \sin 60^\circ} = \frac{1 \cdot 8 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3}/2)} = 3,47 \text{ кН.}$$

Из уравнения 6), подставляя найденное значение  $\overline{S}$ , определяем величину реакции  $\overline{X_A}$ :

$$\overline{X_A} = \frac{-M - 2L \cdot F_{1Y} - 2L \cdot S \cdot \cos 60^\circ}{3L} = \frac{-6 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot 1 \cdot 3,47 \cdot (1/2)}{3 \cdot 1} = -4,31 \text{ кН.}$$

Зная  $\overline{S}$  и  $\overline{Z_A}$ , из уравнения 3) определяем величину реакции  $\overline{Z_B}$ :

$$\overline{Z_B} = -Z_A + P - F_2 + F_{1Z} - S \cdot \sin 60^\circ = -0,5 + 8 - 4 + 1 - 3,47 \cdot (\sqrt{3}/2) = 1,49 \text{ кН.}$$

Из уравнения 2), зная  $\overline{S}$ , вычисляем значение реакции  $\overline{Y_A}$ :

$$\overline{Y_A} = F_{1Y} + S \cdot \cos 60^\circ = \sqrt{3} + 3,47 \cdot \frac{1}{2} = 3,47 \text{ кН.}$$

Зная  $\overline{X_A}$ , из уравнения 1)  $\overline{X_B} = -\overline{X_A} = -(-4,31) = 4,31 \text{ кН.}$

Проверка:

$$\sum F_{AX} = 0; X_A + X_B = 0;$$

$$4,31 - 4,31 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

$$\sum F_{AY} = 0; Y_A - F_{1Y} - S \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$3,47 - \sqrt{3} - 3,47 \cdot \frac{1}{2} = 0;$$

$$3,47 - 3,47 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

$$\sum F_{AZ} = 0; Z_A + Z_B - P + F_2 - F_{1Z} + S \cdot \sin 60^\circ = 0;$$

$$0,5 + 1,49 - 8 + 4 - 1 + 3,47 \cdot (\sqrt{3}/2) = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

Результаты расчётов сводим в таблицу 1.

Таблица 1.

| $\overline{X}_a$ ,<br>кН | $\overline{Y}_a$ ,<br>кН | $\overline{Z}_A$ ,<br>кН | $\overline{Y}_B$ ,<br>кН | $\overline{Z}_B$ ,<br>кН | $\overline{S}$ ,<br>кН |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|------------------------|
| 4,31                     | 3,47                     | 0,5                      | 4,53                     | 1,49                     | 3,47                   |

Оборудование и материалы: тетрадь для лабораторных работ - в клетку - 48 листов; ручка шариковая, цвет чернил в ручке шариковой – синий, чёрный; карандаш простой – М,2М; карандаши цветные – М,2М; ластик, линейка до 25 см – дерево, пластик, металл, алюминий; линейка рейсшина 22см с металлическим роликом УЧП-22; трафарет графических функций; циркуль металлический; калькулятор инженерного типа.

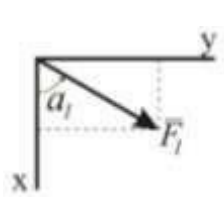
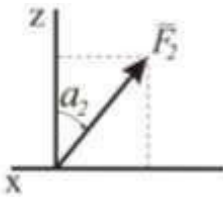
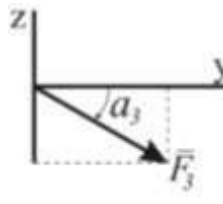
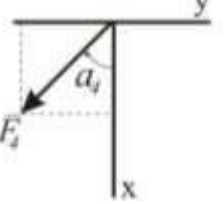
Указания по технике безопасности соответствуют нормативам эргономики при использовании указанного оборудования и материалов.

Выполнить самостоятельно:

Задание 1 (к вариантам 1 – 10) – рис. 14 – 15.

Однородная прямоугольная плита весом  $P = 5$  кН со сторонами  $AB = 3\ell$ ,  $BC = 2\ell$  закреплена в точке  $A$  сферическим шарниром, а в точке  $B$  – цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем  $CC'$  (вар. 1 – 10). На плиту действуют: пара сил с моментом  $M = 6$  кН·м, лежащая в плоскости плиты, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. 2. При этом силы  $\overline{F}_1$  и  $\overline{F}_4$  лежат в плоскостях, параллельных плоскости  $XV$ , сила  $\overline{F}_2$  – в плоскости, параллельной  $XZ$ , сила  $\overline{F}_3$  – в плоскости, параллельной  $YZ$ . Точки приложения сил ( $D$ ,  $E$ ,  $H$ ) находятся в серединах сторон плиты.

Таблица 2.

| Силы          |  |              |  |              |  |              |  |              |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Номер условия | F1= 4 кН                                                                            |              | F2= 6 кН                                                                            |              | F3= 8 кН                                                                             |              | F4= 10 кН                                                                             |              |
|               | Точка приложения                                                                    | $a_1$ , град | Точка приложения                                                                    | $a_2$ , град | Точка приложения                                                                     | $a_3$ , град | Точка приложения                                                                      | $a_4$ , град |

|   |   |    |   |    |   |    |   |    |
|---|---|----|---|----|---|----|---|----|
| 0 | D | 60 | - | -  | E | 0  | - | -  |
| 1 | H | 90 | D | 30 | - | -  | - | -  |
| 2 | - | -  | E | 60 | - | -  | D | 90 |
| 3 | - | -  | - | -  | E | 30 | H | 0  |
| 4 | E | 0  | - | -  | H | 60 | - | -  |
| 5 | - | -  | D | 60 | H | 0  | - | -  |
| 6 | - | -  | H | 30 | - | -  | D | 90 |
| 7 | E | 30 | H | 90 | - | -  | - | -  |
| 8 | - | -  | - | -  | D | 0  | E | 60 |
| 9 | - | -  | E | 90 | D | 30 | - | -  |

Определить реакции связей в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ . При подсчётах принять  $\ell = 2$  м.

Указания: При решении задания следует учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси подшипника. При вычислении момента силы  $F$  удобно её разложить на две составляющие  $F'$  и  $F''$ , параллельные координатным осям (или на три): тогда по теореме Вариньона  $M_x(F) = M_x(\overline{F'}) + M_x(\overline{F''})$  и т. д.

Задание 2 (к вариантам 11 – 20) – рис. 15 – 16.

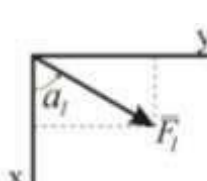
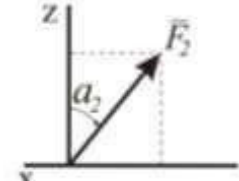
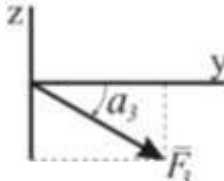
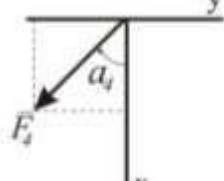
Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестки соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке  $A$ , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке  $B$  и невесомым стержнем  $I$  (вар. 11 – 18) или же двумя подшипниками в точках  $A$  и  $B$  и двумя невесомыми стержнями  $I$  и  $2$  (вар. 19 – 20); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках 15 – 16, вес большей плиты  $P_1 = 5$  кН, вес меньшей плиты  $P_2 = 3$  кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость  $xu$  – горизонтальная). На плиты действуют пара сил с моментом  $M = 4$  кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. 3; при этом силы  $\overline{F}_1$  и  $\overline{F}_4$  лежат в плоскостях, параллельных плоскости  $XU$ , сила  $\overline{F}_2$  – в плоскости, параллельной  $XZ$ , сила  $\overline{F}_3$  – в плоскости, параллельной  $YZ$ . Точки приложения сил ( $D$ ,  $E$ ,  $H$ ,  $K$ ) находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках  $A$  и  $B$  и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять  $a = 2$  м.

Указания: При решении задания следует учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси подшипника. Реакция невесомого стержня всегда направлена вдоль стержня. При вычислении момента силы  $F$  удобно её разложить на две составляющие  $F'$  и  $F''$ , параллельные координатным осям (или на три): тогда по теореме Вариньона  $M_x(F) = M_x(F') + M_x(F'')$  и т. д.

Таблица 3.

| Силы          |  |              |  |              |  |              |  |              |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------|------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Номер условия | $F_1 = 6 \text{ кН}$                                                              |              | $F_2 = 8 \text{ кН}$                                                              |              | $F_3 = 10 \text{ кН}$                                                              |              | $F_4 = 12 \text{ кН}$                                                               |              |
|               | Точка приложения                                                                  | $a_1$ , град | Точка приложения                                                                  | $a_2$ , град | Точка приложения                                                                   | $a_3$ , град | Точка приложения                                                                    | $a_4$ , град |
| 0             | Е                                                                                 | 60           | Н                                                                                 | 30           | -                                                                                  | -            | -                                                                                   | -            |
| 1             | -                                                                                 | -            | Д                                                                                 | 60           | Е                                                                                  | 30           | -                                                                                   | -            |
| 2             | -                                                                                 | -            | -                                                                                 | -            | К                                                                                  | 60           | Е                                                                                   | 30           |
| 3             | К                                                                                 | 30           | -                                                                                 | -            | Д                                                                                  | 0            | -                                                                                   | -            |
| 4             | -                                                                                 | -            | Е                                                                                 | 30           | -                                                                                  | -            | Д                                                                                   | 60           |
| 5             | Н                                                                                 | 0            | К                                                                                 | 60           | -                                                                                  | -            | -                                                                                   | -            |
| 6             | -                                                                                 | -            | Н                                                                                 | 90           | Д                                                                                  | 30           | -                                                                                   | -            |
| 7             | -                                                                                 | -            | -                                                                                 | -            | Н                                                                                  | 60           | К                                                                                   | 90           |
| 8             | Д                                                                                 | 30           | -                                                                                 | -            | К                                                                                  | 0            | -                                                                                   | -            |
| 9             | -                                                                                 | -            | Д                                                                                 | 90           | -                                                                                  | -            | Н                                                                                   | 30           |

Задание 3 (к вариантам 21 – 35) – рис. 16 – 18.

Шесть невесомых стержней соединены своими концами шарнирно друг с другом в двух узлах и прикреплены другими концами (тоже шарнирно) к неподвижным опорам  $A, B, C, D, E, K, F, L$  (вар. 21 – 35). Стержни и узлы (узлы расположены в вершинах  $A, B, C, D, E, K, F, L$  прямоугольного параллелепипеда) на рисунках 16 – 18 не показаны и должны быть изображены решающим задачу по данным таблицы 4. В узле, который в каждом столбце таблицы указан первым, приложена сила  $P = 200 \text{ Н}$ ; во втором узле приложена сила  $Q = 100 \text{ Н}$ . Сила  $\vec{P}$  образует с положительными направлениями

координатных осей  $x, y, z$  углы, равные соответственно  $\alpha_1 = 45^\circ, \beta_1 = 60^\circ, \gamma_1 = 60^\circ$ , а сила  $\bar{Q}$  – углы  $\alpha_2 = 60^\circ, \beta_2 = 45^\circ, \gamma_2 = 60^\circ$ ; направления осей  $x, y, z$  соответствует правой декартовой системе отсчёта.

Грани параллелепипеда, параллельные плоскости  $xy$ , – квадраты. Диагонали других боковых граней образуют с плоскостью  $xy$  угол  $\varphi = 60^\circ$ , а диагональ параллелепипеда образует с этой плоскостью угол  $\theta = 51^\circ$ . Определить усилия в стержнях, указанных в табл. 4.

Таблица 4.

| № варианта | 0                        | 1                        | 2                        | 3                        | 4                        |
|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Узлы       | $A, B$                   | $L, E$                   | $D, F$                   | $B, E$                   | $D, B$                   |
| Стержни    | $DL, DE, DF, CF, CK, BK$ | $BK, CK, CF, DF, AK, DE$ | $AD, AE, ED, EK, KB, KC$ | $DA, DL, DC, FC, CK, AK$ | $LE, LF, LD, CF, CK, AK$ |
| № варианта | 5                        | 6                        | 7                        | 8                        | 9                        |
| Узлы       | $B, L$                   | $C, L$                   | $D, E$                   | $B, L$                   | $B, E$                   |
| Стержни    | $AE, AC, AD, DF, CF, KF$ | $BA, BF, BK, AE, DE, DA$ | $LF, FC, LD, KB, KC, AB$ | $EA, ED, KF, KC, CF, FK$ | $FC, CK, FK, LD, LA, DC$ |

Указания: Система отсчёта вводится решающим самостоятельно. Изображать чертеж можно без соблюдения масштаба так, чтобы лучше были видны все шесть стержней. Стержни следует пронумеровать в том порядке, в каком они указаны в таблице; реакции стержней обозначать буквой с индексом, соответствующим номеру стержня. Реакция невесомого стержня всегда направлена вдоль стержня. При вычислении момента силы  $\bar{F}$  удобно её разложить на две составляющие  $\bar{F}'$  и  $\bar{F}''$ , параллельные координатным осям (или на три): тогда по теореме Вариньона  $M_x(\bar{F}) = M_x(\bar{F}') + M_x(\bar{F}'')$  и т. д.

Задание 4 (к вариантам 36 – 40) – рис. 18 – 19.

Однородное тело весом  $G$  под действием наложенных на него связей и приложенных к нему систем сил находится в равновесии. Пренебрегая трением в местах сочленений, определить реакции опор  $A$  и  $B$ , а также усилия в стержнях. Вес стержней не учитывать. Необходимые для расчёта данные приводятся в таблице 5.

Таблица 5.

| № варианта | $G, \text{Н}$ | $P_1, \text{Н}$ | $P_2, \text{Н}$ | $M_1, \text{Н}\cdot\text{м}$ | $M_2, \text{Н}\cdot\text{м}$ | $a, \text{м}$ | $b, \text{м}$ | $c, \text{м}$ | $\alpha, \text{град}$ | $\beta, \text{град}$ |
|------------|---------------|-----------------|-----------------|------------------------------|------------------------------|---------------|---------------|---------------|-----------------------|----------------------|
| 0          | 300           | 400             | -               | 200                          | -                            | 0,4           | 0,6           | 0,2           | 60                    | 30                   |
| 1          | 200           | 400             | 200             | 400                          | 200                          | 0,2           | 0,4           | 0,6           | 30                    | 60                   |
| 2          | 400           | -               | 100             | -                            | 300                          | 0,8           | 0,2           | 0,4           | -                     | 30                   |
| 3          | 600           | 200             | -               | 200                          | -                            | 0,6           | 0,8           | 0,6           | 60                    | 45                   |



|   |     |     |     |     |     |     |     |     |    |    |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|
| 4 | 300 | 100 | 400 | 200 | 400 | 0,4 | 0,6 | 0,2 | 45 | 30 |
| 5 | 200 | 200 | -   | 300 | -   | 0,6 | 0,4 | 0,2 | 30 | 60 |
| 6 | 400 | -   | 400 | -   | 200 | 0,2 | 0,8 | 0,4 | -  | 45 |
| 7 | 600 | 200 | 400 | 200 | 600 | 0,8 | 0,6 | 0,2 | 30 | 60 |
| 8 | 400 | 300 | -   | 400 | -   | 0,4 | 0,6 | 0,4 | 60 | 45 |
| 9 | 200 | -   | 200 | -   | 400 | 0,8 | 0,2 | 0,4 | -  | 60 |

Задача 5 (к вариантам 41 – 60) – рис. 19 – 22.

Схемы конструкций представлены на рис. 19 – 22 (вар. 41 – 60). Найти реакции опор конструкции. Необходимые для расчёта данные приведены в таблице 6.

Таблица 6.

| №<br>варианта | $Q$ , Н | $T$ , Н | $G$ , Н | $a$<br>см | $b$<br>см | $c$<br>см | $R$<br>см | $r$<br>см |
|---------------|---------|---------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 41            | 2       | -       | 20      | 20        | 30        | 10        | 15        | 5         |
| 42            | 3       | -       | 2       | 30        | 20        | 40        | 15        | 10        |
| 43            | 1       | 4       | 2       | 40        | 30        | 20        | 20        | 10        |
| 44            | -       | 3       | 1       | 30        | 10        | 5         | 18        | 6         |
| 45            | 4       | 6       | 3       | 20        | 40        | 15        | 20        | 10        |
| 46            | 1       | 4       | 2       | 30        | 40        | 20        | 20        | 10        |
| 47            | -       | 2       | 1       | 20        | 30        | 15        | 15        | 10        |
| 48            | 4       | -       | 1       | 25        | 20        | 8         | 15        | 10        |
| 49            | 10      | -       | 5       | 40        | 30        | 20        | 25        | 15        |
| 50            | -       | 2       | 1       | 30        | 90        | 20        | 30        | 10        |
| 51            | 3       | -       | 2       | 60        | 20        | 40        | 20        | 5         |
| 52            | 4       | -       | 2       | 50        | 30        | -         | -         | -         |
| 53            | 2       | -       | 1       | 15        | 10        | 20        | 20        | 5         |
| 54            | 6       | -       | 2       | 60        | 40        | 60        | -         | -         |
| 55            | 4       | -       | -       | 60        | 40        | 20        | -         | -         |
| 56            | 2       | -       | -       | 40        | 60        | 30        | -         | -         |
| 57            | -       | -       | 4       | 40        | 30        | 50        | -         | -         |
| 58            | 10      | -       | -       | 50        | 30        | 50        | -         | -         |
| 59            | -       | 4       | 3       | 15        | 20        | 15        | 15        | 10        |
| 60            | 5       | -       | -       | 40        | 40        | 10        | -         | -         |

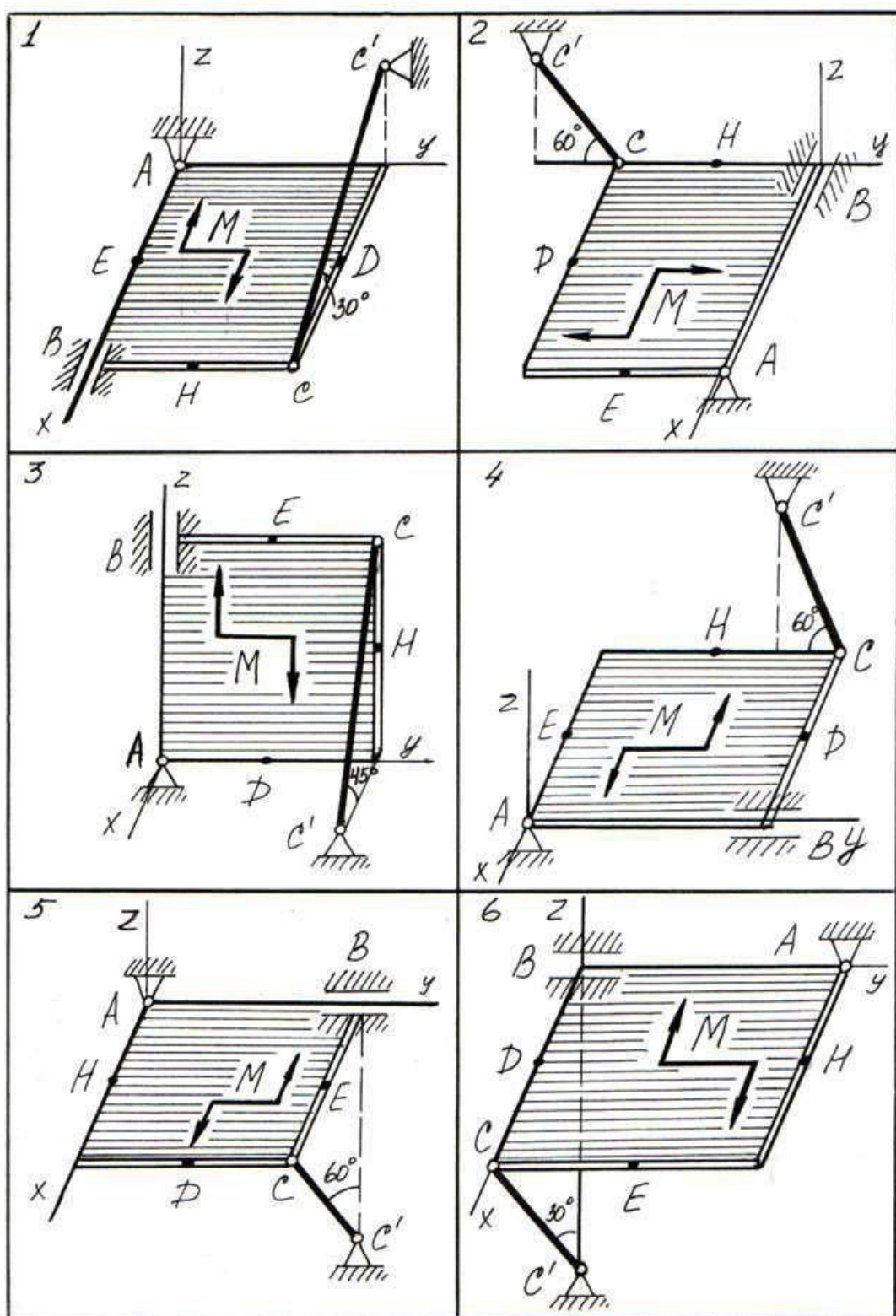


Рисунок 14

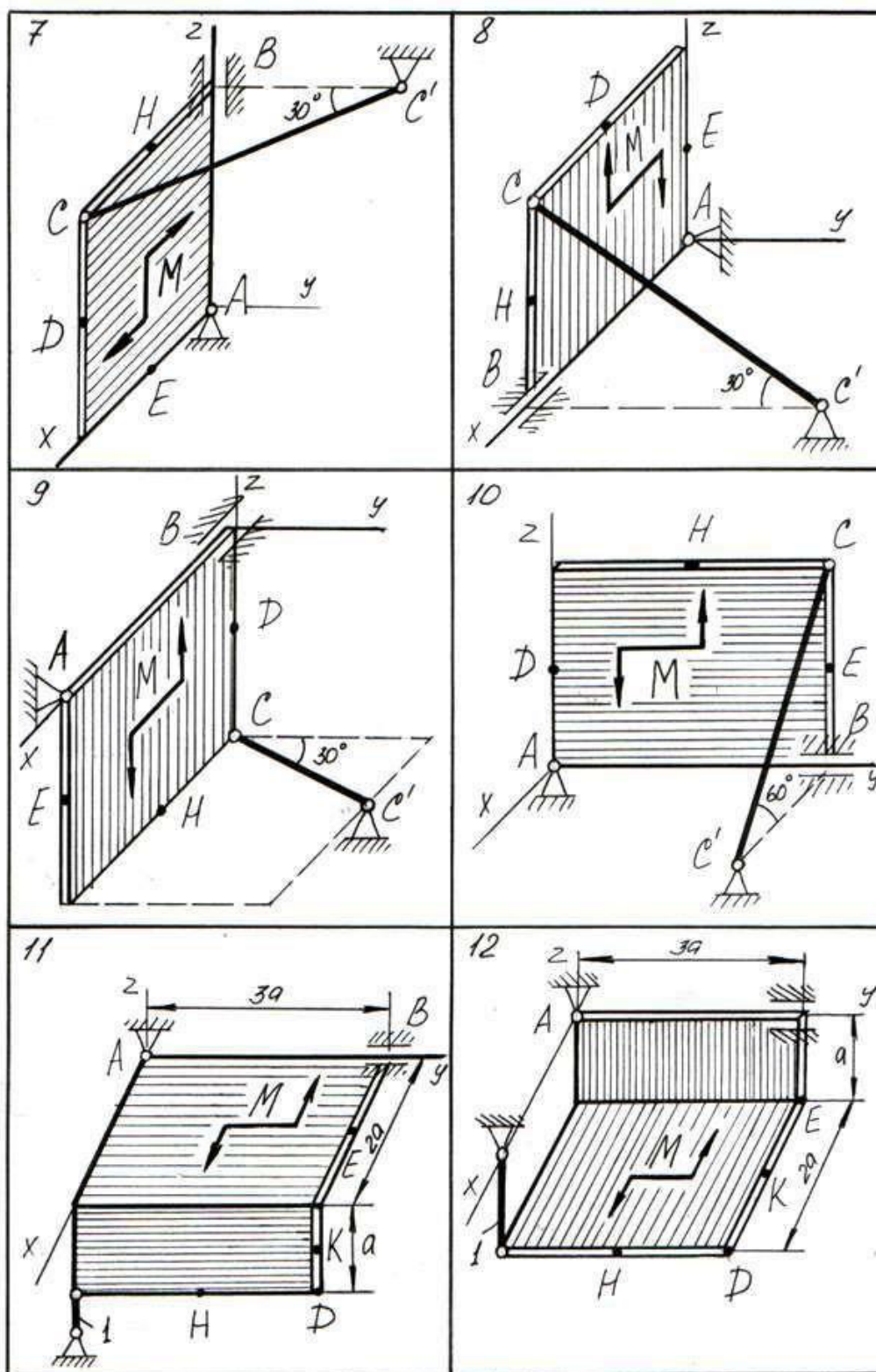


Рисунок 15

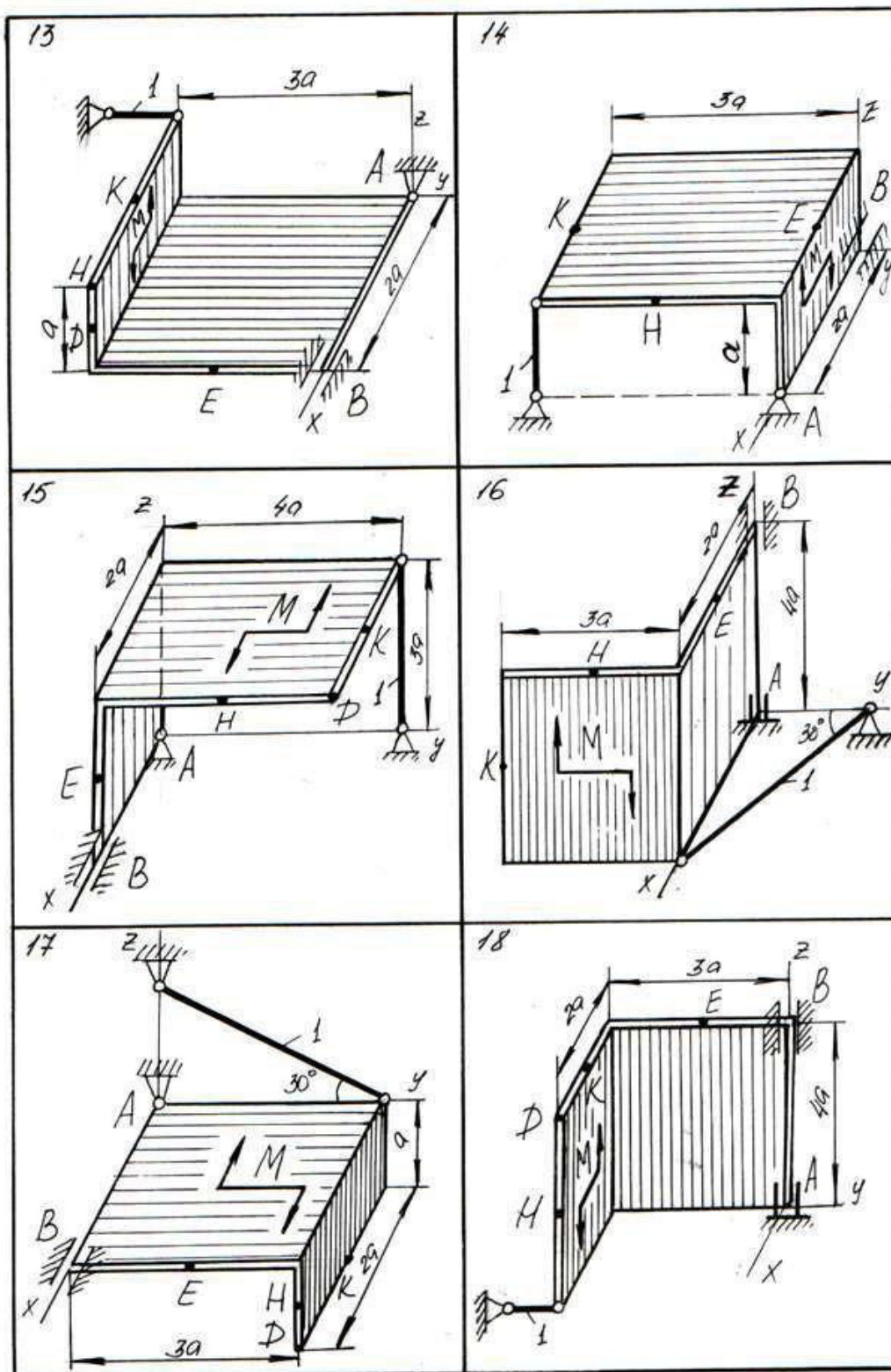


Рисунок 16



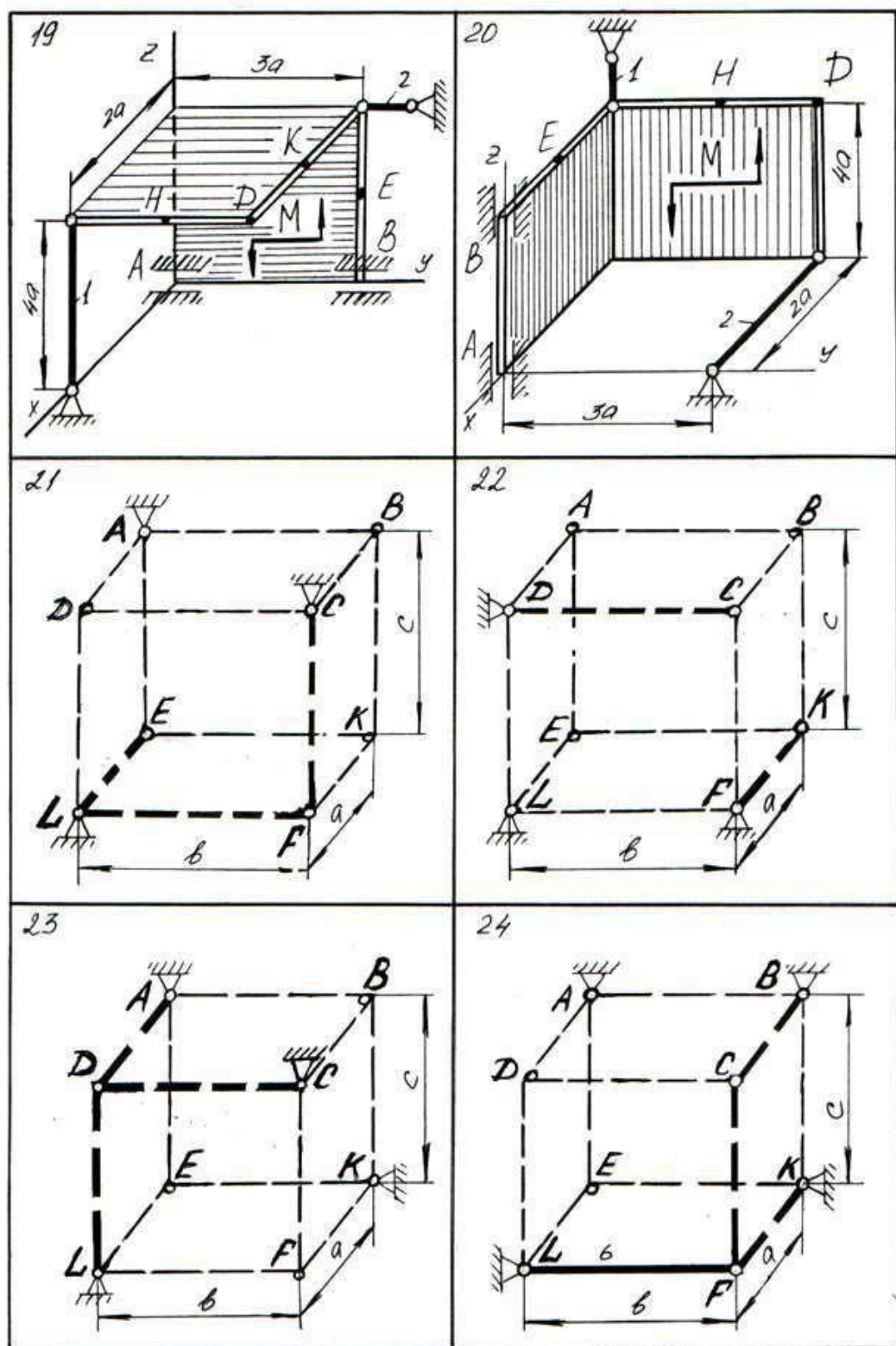


Рисунок 17

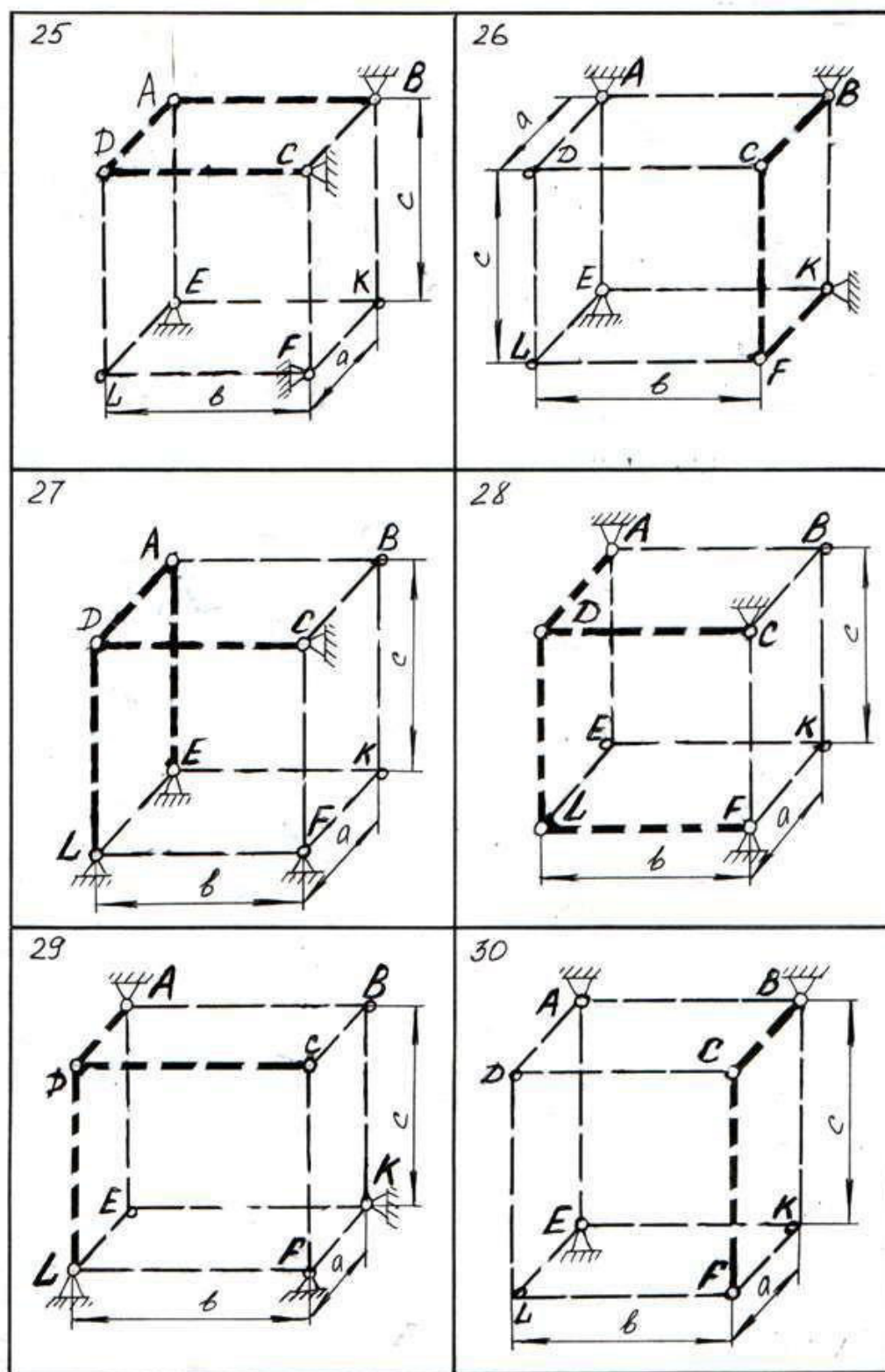


Рисунок 18

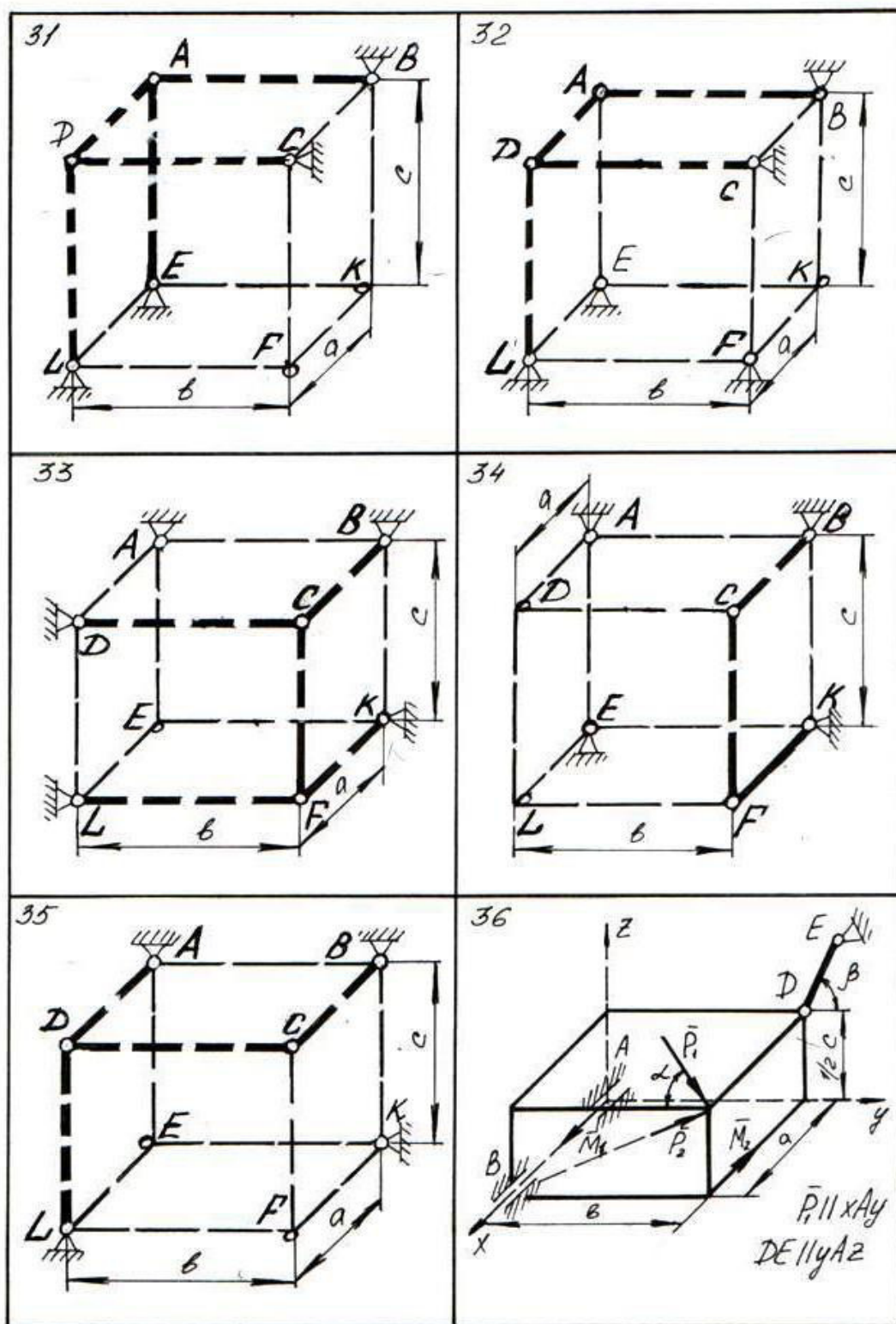


Рисунок 19



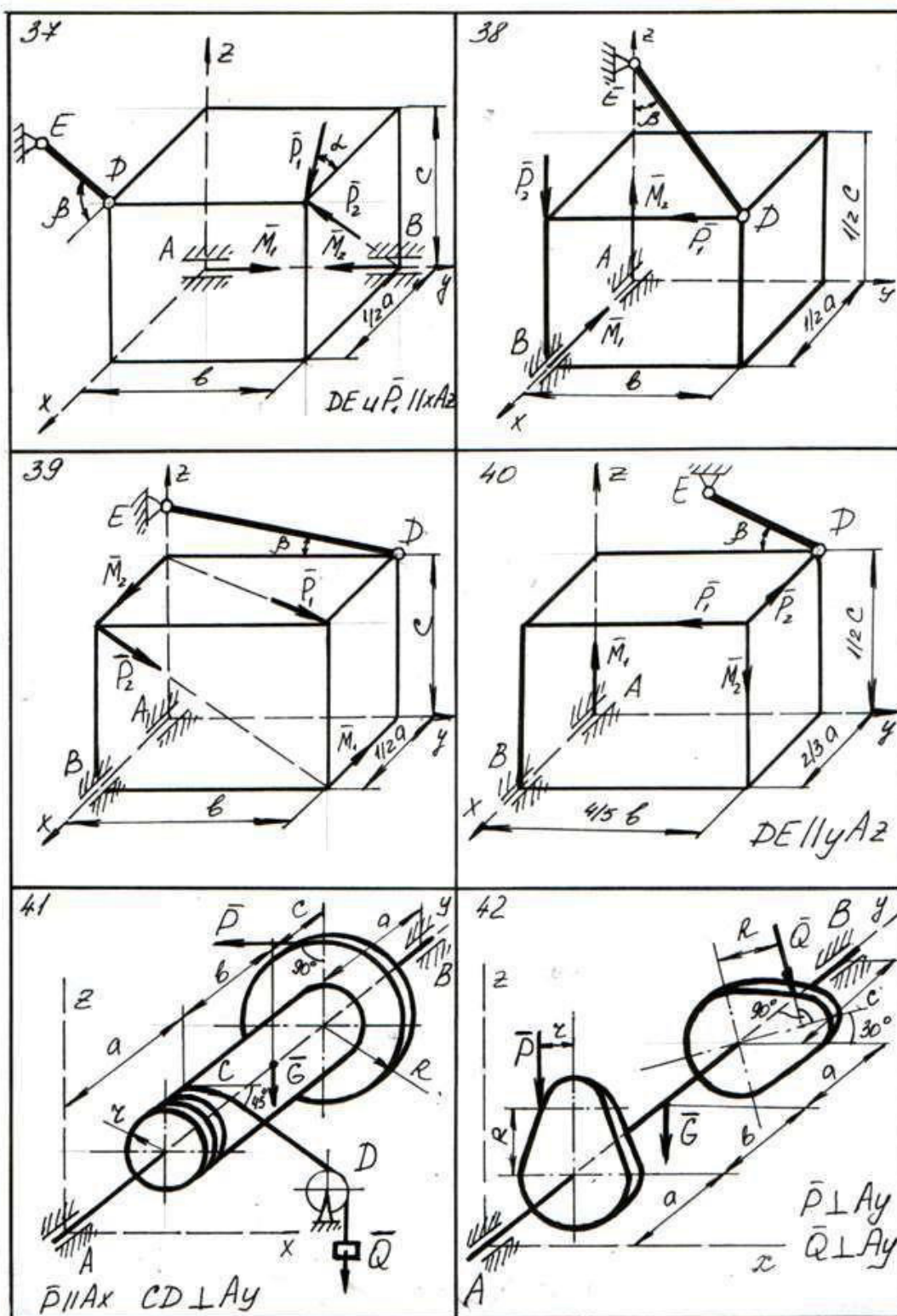


Рисунок 20



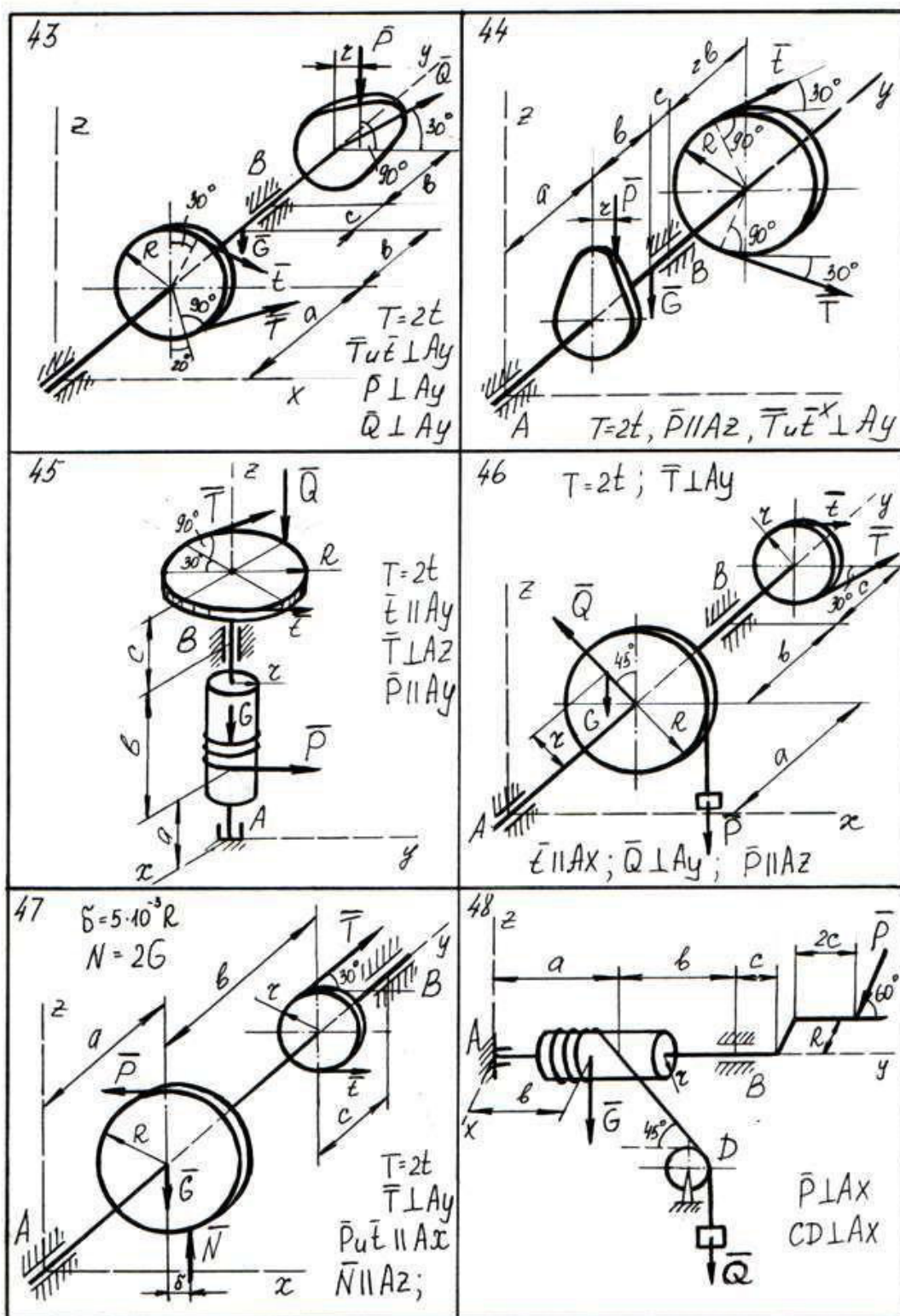


Рисунок 21

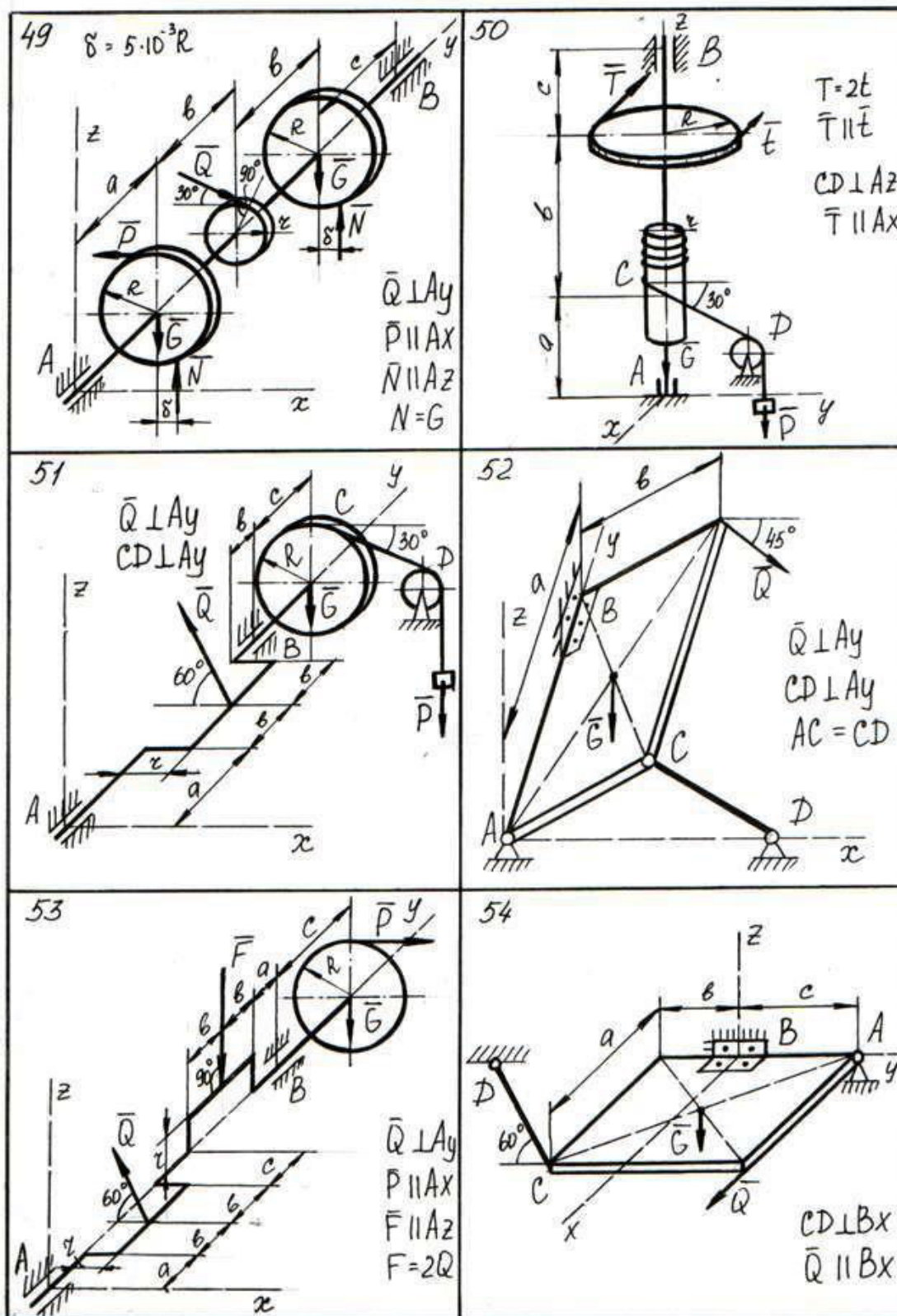


Рисунок 22

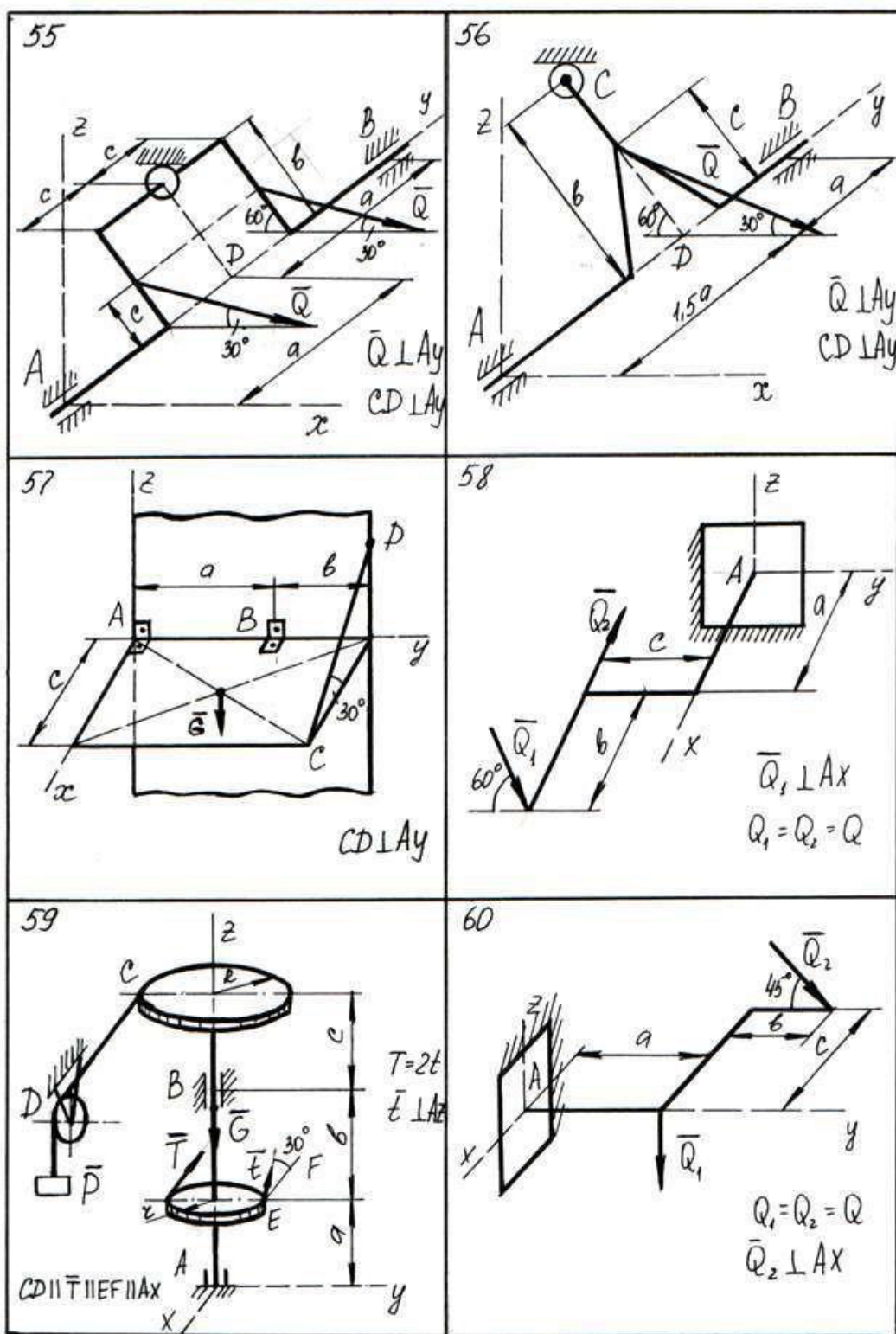


Рисунок 23

#### Содержание отчёта:

- пример выполнения задания в методических указаниях – пример оформления самостоятельно выполненного студентом лабораторного задания;
- допуск к лабораторным занятиям происходит при наличии у студента рукописного варианта отчета. Защита отчета проходит в форме доклада студента по выполнению лабораторного задания и ответов на вопросы преподавателя.

Максимальное количество баллов студент получает, если оформление отчета соответствует установленным требованиям, а отчет полностью раскрывает тему занятия.

Основанием для снижением оценки являются:

- слабое знание темы и основной терминологии;
- отсутствие умения применять теоретические знания для выполнения лабораторных заданий.

Отчет может быть отправлен на доработку, если:

- лабораторное задание выполнено неверно;
- несоответствие отчета установленным требованиям;
- слабое знание темы и неправильные ответы на поставленные вопросы.

Вопросы для обсуждения:

1. Виды связей и их реакции (пространственные опоры)?
2. Аналитическая форма условий равновесия пространственной системы: а) сходящихся сил; б) параллельных сил; в) произвольной системы сил.
3. Алгебраический момент силы относительно оси. Основные свойства момента?
4. Момент пары сил?

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб.пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.
4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: [www.mashin.ru](http://www.mashin.ru)

## Раздел 2. Кинематика.

### Тема 6. Кинематика точки.

5. Лабораторная работа №5. Скорость, ускорение точки при координатном способе задания движения точки. Классификация движений точки.

Цель занятия: координатный способ задания движения точки, скорость точки, ускорение точки, классификация движений точки. Реализация учебной цели лабораторного занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОК–1, ОПК–5.

Организационная форма: аналитическое исследование.

Методические рекомендации к лабораторному занятию:

Краткий теоретический обзор:

Координатный способ задания движения точки  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  – параметрические уравнения движения точки.

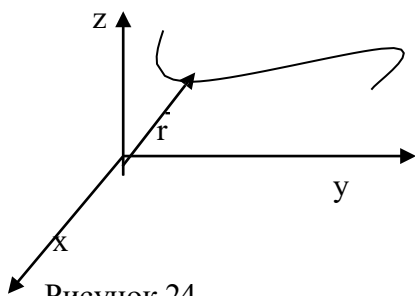


Рисунок 24

$$v_x = (x)^1; v_y = (y)^1; v_z = (z)^1; \vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z;$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$$

$$a_x = (x)'' = (v_x)^1;$$

$$a_y = (y)'' = (v_y)^1;$$

$$a_z = (z)'' = (v_z)^1;$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(v_x')^2 + (v_y')^2 + (v_z')^2} = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}$$

Задание.

Точка движется согласно уравнениям :  $x = 4 \cos(\pi t/3)$  (см);  
 $y = -3 \sin(\pi t/3)$  (см). Определить скорость и ускорение точки в момент времени  $t_c = 1$  с

2. Скорость точки находим по её проекциям на координатные оси:

$$V_x = dx/dt = (4\cos(\pi t/3))' = 4 \cdot (-\sin(\pi t/3)) \cdot \pi/3 = -(4\pi)/3 \cdot \sin(\pi t/3);$$

$$V_x(t) = -((4 \cdot 3,14)/3) \cdot \sqrt{3}/2 = -3,63 \text{ см/с};$$

$$V_y = dy/dt = (-3\sin(\pi t/3))' = -(3 \cdot \cos(\pi t/3)) \cdot \pi/3 = -\pi \cos(\pi t/3);$$



$$V_y(t) = -3,14 \cdot (1/2) = -1,57 \text{ см/с}$$

По найденным проекциям определяем модуль скорости точки:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{-((4\pi)/3) \cdot \sin(\pi t/3))^2 + (-\pi \cdot \cos(\pi t/3))^2}$$

$$V_{(t)} = \sqrt{(-3,63)^2 + (-1,57)^2} = 3,96 \text{ см/с}$$

3. Ускорение точки:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = (- (4\pi)/3 \cdot \sin(\pi t/3))' = (- (4\pi)/3) \cdot \pi/3 \cdot \cos(\pi t/3) = \frac{-4\pi^2}{9} \cdot \cos(\frac{\pi t}{3});$$

$$a_{x(t)} = \frac{-4 \cdot 3,14^2}{9} \cdot \frac{1}{2} = -2,19 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = (-\pi \cos(\pi t/3))' = -\pi \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \sin(\frac{\pi t}{3}) = \frac{\pi^2}{3} \sin(\frac{\pi t}{3});$$

$$a_{y(t)} = \frac{3,14^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,85 \text{ см/с}^2;$$

По найденным проекциям  $a_{x(t)}$  и  $a_{y(t)}$  определяем модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-\frac{4\pi^2}{9} \cdot \cos(\frac{\pi t}{3}))^2 + (\frac{\pi^2}{3} \cdot \sin(\frac{\pi t}{3}))^2};$$

$$a_{(t)} = \sqrt{a_{x(t)}^2 + a_{y(t)}^2} = \sqrt{(-2,19)^2 + (2,85)^2} = 3,59 \text{ см/с}^2;$$

$$V_{(t)} = 3,96 \text{ см/с}; \quad a_{(t)} = 3,59 \text{ см/с}^2;$$

Оборудование и материалы: тетрадь для лабораторных работ - в клетку - 48 листов; ручка шариковая, цвет чернил в ручке шариковой – синий, чёрный; карандаш простой – М,2М; карандаши цветные – М,2М; ластик, линейка до 25 см – дерево, пластик, металл, алюминий; линейка рейсшина 22см с металлическим роликом УЧП-22; трафарет графических функций; циркуль металлический; калькулятор инженерного типа.

Указания по технике безопасности соответствуют нормативам эргономики при использовании указанного оборудования и материалов.

Выполнить самостоятельно:

Задание 1. Заданы уравнения движения точки  $x = 2t$ ,  $y = t$ . Определить время  $t$ , когда расстояние от точки до начала координат достигнет 10 м. (4,47)

Задание 2. Даны уравнения движения точки  $x = t^2$ ,  $y = \sin \pi t$ ,  $z = \cos \pi t$ . Определить модуль скорости точки в момент времени  $t = 1$  с. (3,72)

Задание 3. Точка движется по прямой с постоянным ускорением  $a = 0,3 \text{ м/с}^2$ . Определить начальную скорость точки, если через 6 с скорость точки стала равной 3 м/с. (1,2)

Задание 4. Скорость точки задана уравнением  $v = 0,2 t$ . Определить прямолинейную координату точки в момент времени  $t = 10$  с, если при  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$ . (10)

Содержание отчёта:

– пример выполнения задания в методических указаниях – пример оформления самостоятельно выполненного студентом лабораторного задания;

– допуск к лабораторным занятиям происходит при наличии у студента рукописного варианта отчета. Защита отчета проходит в форме доклада студента по выполнению лабораторного задания и ответов на вопросы преподавателя.

Максимальное количество баллов студент получает, если оформление отчета соответствует установленным требованиям, а отчет полностью раскрывает тему занятия.

Основанием для снижения оценки являются:

– слабое знание темы и основной терминологии;  
– отсутствие умения применять теоретические знания для выполнения лабораторных заданий.

Отчет может быть отправлен на доработку, если:

– лабораторное задание выполнено неверно;  
– несоответствие отчета установленным требованиям;  
– слабое знание темы и неправильные ответы на поставленные вопросы.

Вопросы для обсуждения:

1. Координатный способ задания движения точки?
2. Скорость точки при координатном способе задания движения точки?
3. Ускорение точки при координатном способе задания движения точки?
4. Скорость точки?
5. Ускорение точки?
6. Прямолинейное ускоренное движение точки. Основные кинематические характеристики?
7. Прямолинейное равноускоренное движение точки. Основные кинематические характеристики?
8. Прямолинейное замедленное движение точки. Основные кинематические характеристики?
9. Прямолинейное равнозамедленное движение точки. Основные кинематические характеристики?
10. Прямолинейное равномерное движение точки?

11. Криволинейное равномерное движение точки. Основные кинематические характеристики?

12. Криволинейное замедленное движение точки. Основные кинематические характеристики?

13. Криволинейное равнозамедленное движение точки. Основные кинематические характеристики?

14. Криволинейное ускоренное движение точки. Основные кинематические характеристики?

15. Криволинейное равноускоренное движение точки. Основные кинематические характеристики?

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.

2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб.пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.

3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.

4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: [www.mashin.ru](http://www.mashin.ru)

6. Лабораторная работа №6. Скорость, ускорение точки при векторном способе задания движения точки. Классификация движений точки.

Цель занятия: векторный способ задания движения точки, скорость точки, ускорение точки, классификация движений точки. Реализация учебной цели лабораторного занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОК–1, ОПК–5.

Организационная форма: аналитическое исследование.

Методические рекомендации к лабораторному занятию:

Краткий теоретический обзор:

Векторный способ задания движения точки  $\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$



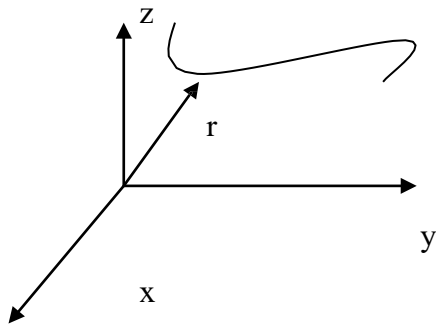


Рисунок 25

$$v_x = (r_x)^1; v_y = (r_y)^1; v_z = (r_z)^1; \vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z;$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2} = \sqrt{(r_x^1)^2 + (r_y^1)^2 + (r_z^1)^2}$$

$$a_x = (r_x)'' = (v_x)^1;$$

$$a_y = (r_y)'' = (v_y)^1;$$

$$a_z = (r_z)'' = (v_z)^1;$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(v_x')^2 + (v_y')^2 + (v_z')^2} =$$

$$= \sqrt{(r_x'')^2 + (r_y'')^2 + (r_z'')^2}$$

Задание.

Задача: Точка движется согласно уравнению  $\vec{r} = t^2 \vec{i} + 2t \vec{j} + 3 \vec{k}$ . Определить модуль скорости точки в момент времени  $t = 1$  с.

Векторный способ задания движения точки:  $\vec{r} = t^2 \vec{i} + 2t \vec{j} + 3 \vec{k}$

$$v_x = (r_x)^1 = (3t^2)^1 = 6t; v_y = (r_y)^1 = (2t)^1 = 2 \text{ см/с}^2;$$

$$v_z = (r_z)^1 = (3)^1 = 0;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(6t)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{36t^2 + 4};$$

$$v(t) = \sqrt{36 \cdot 1^2 + 4} = \sqrt{40} = 6,32 \text{ см/с}^2;$$

$$v(t = 1 \text{ с}) = 6,32 \text{ см/с}^2.$$

$$v(t = 1 \text{ с}) = 6,32 \text{ см/с}^2.$$

Оборудование и материалы: тетрадь для лабораторных работ - в клетку - 48 листов; ручка шариковая, цвет чернил в ручке шариковой – синий, чёрный; карандаш простой – М,2М; карандаши цветные – М,2М; ластик, линейка до 25 см – дерево, пластик, металл, алюминий; линейка рейсшина 22см с металлическим роликом УЧП-22; трафарет графических функций; циркуль металлический; калькулятор инженерного типа.

Указания по технике безопасности соответствуют нормативам эргономики при использовании указанного оборудования и материалов.

Выполнить самостоятельно:

Задание 1. Заданы уравнения движения точки  $x = 2t$ ,  $y = t$ . Определить время  $t$ , когда расстояние от точки до начала координат достигнет 10 м.

Задание 2. Точка движется согласно уравнению  $\vec{r} = 0,6t^2 \vec{i} + 6t \vec{j} + 4\vec{k}$ . Определить модуль скорости и модуль ускорения точки в момент времени  $t = 1$  с.

Задание 3. Точка движется согласно уравнению  $\vec{v} = 0,6t^2 \vec{i} + 6t \vec{j} + 4\vec{k}$ . Определить модуль ускорения точки в момент времени  $t = 1$  с.

Задание 4. Точка движется согласно уравнению  $\vec{v} = 0,6t^2 \vec{i} + 6t \vec{j} + 4\vec{k}$ . Определить модуль радиуса-вектора точки в момент времени  $t = 1$  с.

Содержание отчёта:

– пример выполнения задания в методических указаниях – пример оформления самостоятельно выполненного студентом лабораторного задания;

– допуск к лабораторным занятиям происходит при наличии у студента рукописного варианта отчета. Защита отчета проходит в форме доклада студента по выполнению лабораторного задания и ответов на вопросы преподавателя.

Максимальное количество баллов студент получает, если оформление отчета соответствует установленным требованиям, а отчет полностью раскрывает тему занятия.

Основанием для снижения оценки являются:

- слабое знание темы и основной терминологии;
- отсутствие умения применять теоретические знания для выполнения лабораторных заданий.

Отчет может быть отправлен на доработку, если:

- лабораторное задание выполнено неверно;
- несоответствие отчета установленным требованиям;
- слабое знание темы и неправильные ответы на поставленные вопросы.

Вопросы для обсуждения:

1. Векторный способ задания движения точки?
2. Скорость точки при векторном способе задания движения точки?

3. Ускорение точки при векторном способе задания движения точки?
4. Скорость точки?
5. Ускорение точки?
6. Прямолинейное ускоренное движение точки. Основные кинематические характеристики?
7. Прямолинейное равноускоренное движение точки. Основные кинематические характеристики?
8. Прямолинейное замедленное движение точки. Основные кинематические характеристики?
9. Прямолинейное равнозамедленное движение точки. Основные кинематические характеристики?
10. Прямолинейное равномерное движение точки?
11. Криволинейное равномерное движение точки. Основные кинематические характеристики?
12. Криволинейное замедленное движение точки. Основные кинематические характеристики?
13. Криволинейное равнозамедленное движение точки. Основные кинематические характеристики?
14. Криволинейное ускоренное движение точки. Основные кинематические характеристики?
15. Криволинейное равноускоренное движение точки. Основные кинематические характеристики?

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб.пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.
4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: [www.mashin.ru](http://www.mashin.ru)

7. Лабораторная работа №7. Скорость, ускорение точки при естественном способе задания движения точки. Классификация движений точки.

Цель занятия: естественный способ задания движения точки, скорость и ускорение точки, касательное и нормальное ускорение точки, радиус кривизны траектории, классификация движений. Реализация учебной цели лабораторного занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОК–1, ОПК–5.

Организационная форма: аналитическое исследование.

Методические рекомендации к лабораторному занятию:

Краткий теоретический обзор:

- 1).  $S = S(t)$  – закон движения при естественном способе задания движения точки.
- 2). «+» и «-» направления движения точки.
- 3). Точка о – точка начала отсчета.

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt}; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau; \quad |a| = \sqrt{(a_n)^2 + (a_\tau)^2};$$

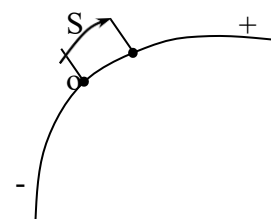


Рисунок 26

Задание 1. Скорость точки задана уравнением  $v = 0,2t$ . Определить криволинейную координату точки  $S$  в момент времени  $t=10c$ , если при  $t_0=10c$ ,  $S_0=0$ .

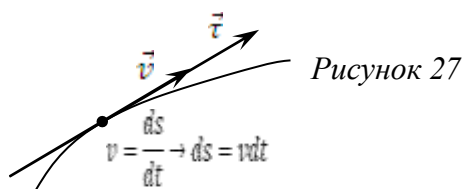


Рисунок 27

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = v dt \\ \rightarrow \int_{S_0=0}^S ds & \\ &= 0,2 \int_{t_0=0}^{t=10c} t dt \\ \rightarrow S \int_0^S &= \frac{0,2t^2}{2} \int_0^{10} \rightarrow S = 0,1t^2 = 0,1 \cdot 10^2 = 10 \text{ м} \end{aligned}$$

$$S=10 \text{ м}$$

Задание 2. Точка движения согласно уравнению  $S = 0,6t^2$ . Определить полное ускорение точки в момент времени  $t=2c$ , если радиус кривизны траектории  $\rho = 15 \text{ м}$ .

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = (v)' = (0,6t^2)'' = (1,2t)' = 1,2 \frac{м}{с^2} > 0(const)\text{-точка движется}$$

криволинейно равноускоренно.  $\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{a}_{\tau}$ ;

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(s')^2}{\rho} = \frac{((0,6t^2)')^2}{15} = \frac{(1,2t)^2}{15} = \frac{(1,2 \cdot 2)^2}{15} = 0,38 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{(a_n)^2 + (a_{\tau})^2} = \sqrt{(1,2)^2 + (0,38)^2} = \sqrt{15,84} = 1,26 \text{ м/с}^2;$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_{\tau};$$

$$a = 1,26 \text{ м/с}^2$$

Оборудование и материалы: тетрадь для лабораторных работ - в клетку - 48 листов; ручка шариковая, цвет чернил в ручке шариковой – синий, чёрный; карандаш простой – М,2М; карандаши цветные – М,2М; ластик, линейка до 25 см – дерево, пластик, металл, алюминий; линейка рейсшина 22см с металлическим роликом УЧП-22; трафарет графических функций; циркуль металлический; калькулятор инженерного типа.

Указания по технике безопасности соответствуют нормативам эргономики при использовании указанного оборудования и материалов.

Выполнить самостоятельно:

Задание 1. Точка движется по кривой со скоростью  $v=0,5t$ ; определить ее координату  $S$  в момент времени  $t=10с$ , если при  $t_0=0$  координата  $S_0=0(25)$ .

Задание 2. Точка движется по окружности согласно уравнению  $S = t^3 + 2t^2 + 3t$ . Определить криволинейную координату точки в момент времени когда ее касательное ускорение  $a_{\tau} = 16 \text{ м/с}^2$

Задание 3. По окружности радиуса  $r=7м$  движется точка согласно уравнению  $S = 0,3t^2$ . Определить время, когда нормальное ускорение точки  $a_n = 1,5 \text{ м/с}^2$  (5.40)

Содержание отчёта:

- пример выполнения задания в методических указаниях – пример оформления самостоятельно выполненного студентом лабораторного задания;
- допуск к лабораторным занятиям происходит при наличии у студента рукописного варианта отчета. Защита отчета проходит в форме доклада студента по выполнению лабораторного задания и ответов на вопросы преподавателя.

Максимальное количество баллов студент получает, если оформление отчета соответствует установленным требованиям, а отчет полностью раскрывает тему занятия.

Основанием для снижением оценки являются:

- слабое знание темы и основной терминологии;
- отсутствие умения применять теоретические знания для выполнения лабораторных заданий.

Отчет может быть отправлен на доработку, если:

- лабораторное задание выполнено неверно;
- несоответствие отчета установленным требованиям;
- слабое знание темы и неправильные ответы на поставленные вопросы.

Вопросы для обсуждения:

1. Естественный способ задания движения точки?
2. Скорость точки при естественном способе задания движения точки?
3. Ускорение точки при естественном способе задания движения точки?
4. Нормальное ускорение точки?
5. Касательное ускорение точки?
6. Криволинейное равномерное движение точки? Основные кинематические характеристики?
7. Криволинейное замедленное движение точки? Основные кинематические характеристики?
8. Криволинейное равнозамедленное движение точки? Основные кинематические характеристики?
9. Криволинейное ускоренное движение точки? Основные кинематические характеристики?

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб.пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.
4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: [www.mashin.ru](http://www.mashin.ru)

Тема 8. Кинематика механизмов.

8. Лабораторная работа №8. Передаточные механизмы. Типы передаточных механизмов. Передаточное число.

Цель занятия: передаточные механизмы, типы передаточных механизмов, передаточное число, кинематический анализ передаточных механизмов –

преобразование поступательного и вращательного движения твердого тела в механизмах.

Реализация учебной цели лабораторного занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОК–1, ОПК–5.

Организационная форма: аналитическое исследование.

Методические рекомендации к лабораторному занятию:

Краткий теоретический обзор:

Передаточные механизмы – это такие механизмы, в которых передается движение от ведущего звена к ведомому. Основная характеристика передаточного механизма – передаточное число.

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}, \text{ где } \omega_1 \text{ и } \omega_2 \text{ – угловая скорость ведущего и ведомого валов;}$$

$r_1$  и  $r_2$  – радиусы ведомого и ведущего валов;

$z_1$  и  $z_2$  – число зубьев ведомого и ведущего зубчатых колес.

Например: внешняя зубчатая передача

$$v = \omega r$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2; \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

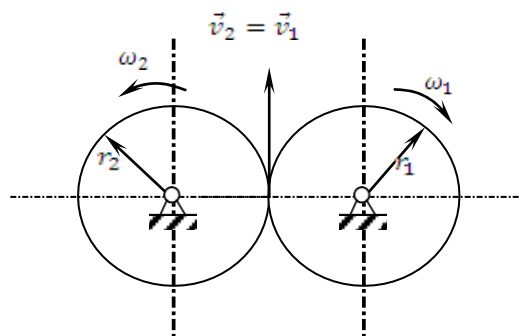


Рисунок 28

Задание 1: Груз 1 поднимается с помощью лебедки, барабан 2 которой вращается согласно закону  $\varphi = 5 + t^2$  [рад]. Определить скорость точки М барабана в момент времени  $t=1$ с, если диаметр барабана  $d=0,6$ м. (рис. 29)

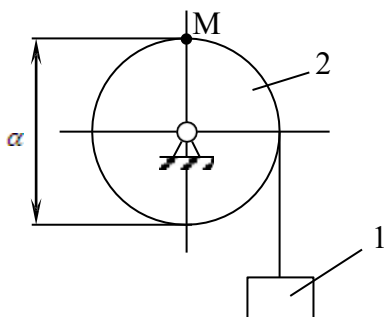


Рисунок 29

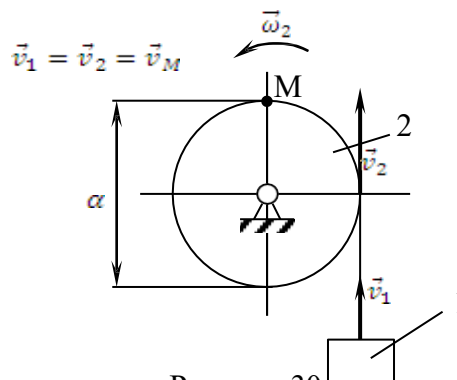


Рисунок 30

В лебедке груз 1 связан с барабаном 2 гибкой связью (трос, нить) – рис. 30

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = v_M = \omega_2 r = \omega_2 \cdot \frac{d}{2};$$

$\omega_2 = (\varphi)' = (5 + t^2)' = 2t$ - угловая скорость барабана 2.

$$\omega_1(t = 1\text{с}) = 2 \cdot 1 = 2 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad r = \frac{d}{2} = \frac{0,6}{2} = 0,3 \text{ м};$$

$$v_M = 2 \cdot 0,3 = 0,6 \text{ м/с}$$

$$v_M = 0,6 \text{ м/с}$$

Оборудование и материалы: тетрадь для лабораторных работ - в клетку - 48 листов; ручка шариковая, цвет чернил в ручке шариковой – синий, чёрный; карандаш простой – М,2М; карандаши цветные – М,2М; ластик, линейка до 25 см – дерево, пластик, металл, алюминий; линейка рейсшина 22см с металлическим роликом УЧП-22; трафарет графических функций; циркуль металлический; калькулятор инженерного типа.

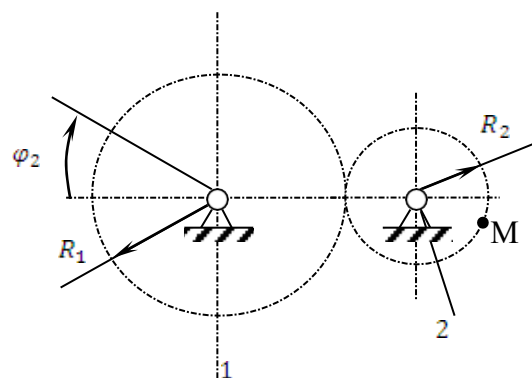
Указания по технике безопасности соответствуют нормативам эргономики при использовании указанного оборудования и материалов.

Выполнить самостоятельно:

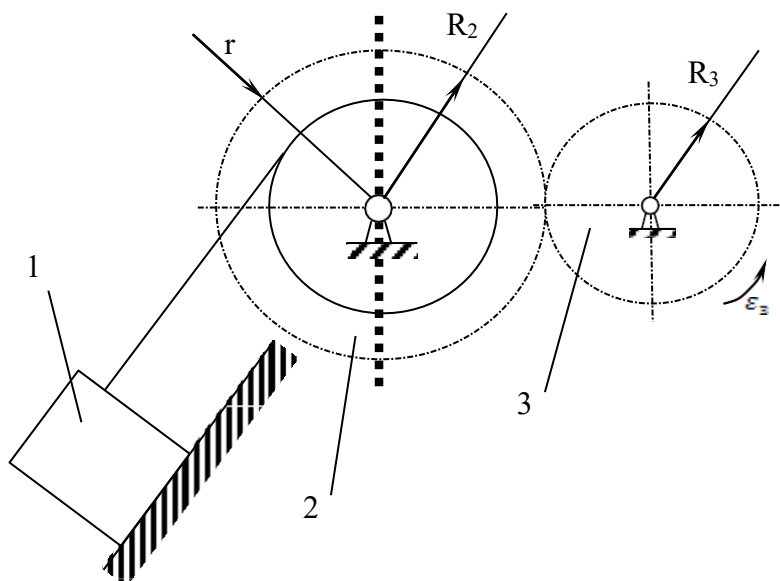
Задание 1.

Колесо 1 вращается согласно закону  $\varphi_1 = 20t$ .

Определить скорость точки М колеса 2, если радиусы колес  $R_1=0,8\text{м}$ ,  $R_2=0,5\text{м}$  и передаточное число механизма  $i$ —? (16; 0,625)



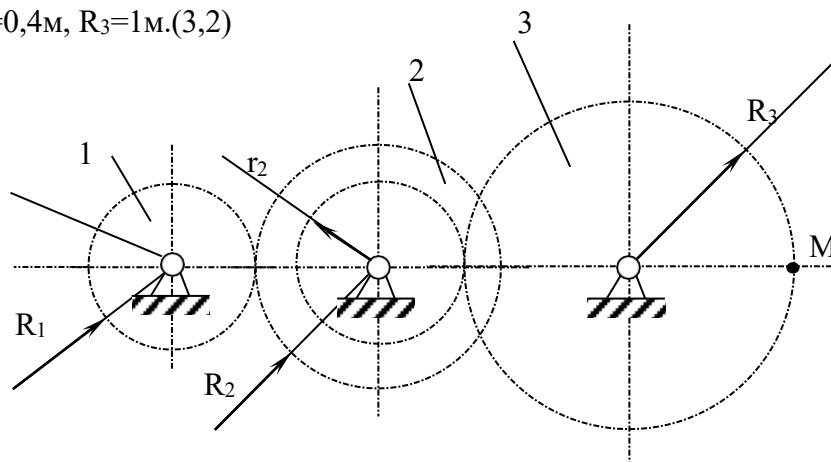
Задание 2. Зубчатое колесо 3 вращается равнопеременно с угловым ускорением  $\epsilon_3 = 8 \text{ рад/с}^2$ . Определить путь, пройденный грузом 1 за промежуток времени  $t=3\text{с}$ , если радиусы  $R_1=0,8\text{м}$ ,  $R_2=0,6\text{м}$ ,  $r=0,4\text{м}$ . Груз 1 в начале движения находился в покое. (10,8)



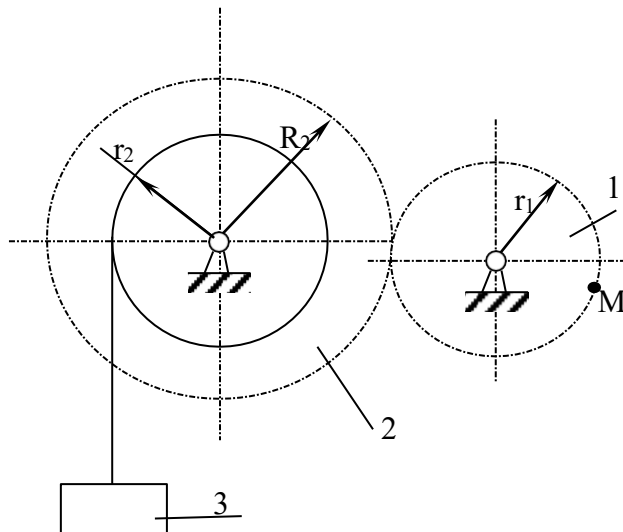


Задание 3. Зубчатое колесо 1 вращается согласно закону  $\varphi_1 = 4t^2$ .

Определить скорость точки М колеса 3 в момент времени  $t=2$ с, если радиусы  $R_1=0,4$ м,  $R_2=0,8$ м,  $r_2=0,4$ м,  $R_3=1$ м. (3,2)



Задание 4. Груз 3 движется вниз согласно закону  $S=0,4t_2+8t-1$ (м). Определить скорость точки М колеса 1 в момент времени  $t=1$ с, если радиусы колес равны  $R_2=1,6$ м,  $r_2=0,4$ м,  $r_1=0,8$ м. (35,2)



Содержание отчёта:

- пример выполнения задания в методических указаниях – пример оформления самостоятельно выполненного студентом лабораторного задания;
- допуск к лабораторным занятиям происходит при наличии у студента рукописного варианта отчета. Защита отчета проходит в форме доклада студента по выполнению лабораторного задания и ответов на вопросы преподавателя.

Максимальное количество баллов студент получает, если оформление отчета соответствует установленным требованиям, а отчет полностью раскрывает тему занятия.

Основанием для снижением оценки являются:

- слабое знание темы и основной терминологии;
- отсутствие умения применять теоретические знания для выполнения лабораторных заданий.

Отчет может быть отправлен на доработку, если:

- лабораторное задание выполнено неверно;
- несоответствие отчета установленным требованиям;
- слабое знание темы и неправильные ответы на поставленные вопросы.

Вопросы для обсуждения:

1. Определение поступательного движения тела? Примеры поступательного движения тела?
2. Теорему о траекториях, скоростях и ускорениях точек тела, совершающих поступательное движение?
3. Определение вращательного движения тела? Примеры?
4. Закон или уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси?
5. Определение угловой скорости и углового ускорения?
6. Как вычисляются угловая скорость и угловое ускорение?
7. Каким образом вводится понятие о векторах угловой скорости и углового ускорения?

Можно ли сказать, что они являются скользящими векторами?

8. Классификацию вращений по угловому ускорению тела?
9. Вывод формулы для вычисления линейной (окружной) скорости точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
10. Составляющие ускорения точек тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси? По каким формулам они вычисляются?
11. Формулу для вычисления полного ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
12. Передаточные механизмы - внешнее зубчатое зацепление, внутреннее зубчатое зацепление(фрикционная передача), гибкие связи, механизм с кратным зацеплением, механизм с паразитными колесами?
13. Передаточное число?

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. –

416 с.

2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб.пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.

3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.

4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: [www.mashin.ru](http://www.mashin.ru)

#### 9. Лабораторная работа № 9. Кинематический анализ передаточных механизмов.

Цель занятия: передаточные механизмы, типы передаточных механизмов, передаточное число, кинематический анализ передаточных механизмов – преобразование поступательного и вращательного движения твердого тела в механизмах.

Реализация учебной цели лабораторного занятия способствует формированию и развитию общекультурных и профессиональных компетенций обучающегося ОК–1, ОПК–5.

Организационная форма: аналитическое исследование.

Методические рекомендации к лабораторному занятию:

Краткий теоретический обзор:

Передаточные механизмы - это такие механизмы, в которых передается движение от ведущего звена к ведомому. Основная характеристика передаточного механизма - передаточное число.

$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  - угловая скорость ведущего и ведомого валов;

$r_1$  и  $r_2$  – радиусы ведомого и ведущего валов;

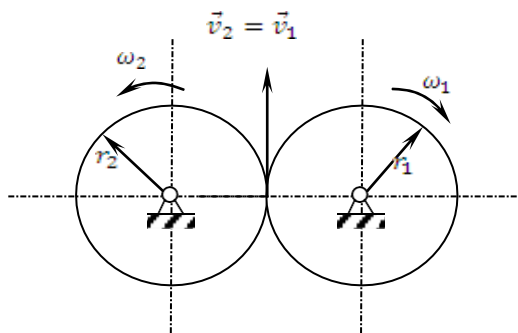
$z_1$  и  $z_2$  – число зубьев ведомого и ведущего зубчатых колес.

Например: внешняя зубчатая передача

$$v = \omega r$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2; \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_1}{r_2}$$



Задание 1.

Дано:  $\omega_1 = 5t - 2t^2$ ;  $t_1 = 2$  с;  $\tau_1 = 2$  см;  $R_1 = 4$  см;  $\tau_2 = 6$  см;  $R_2 = 8$  см;  $\tau_3 = 12$  см;  $R_3 = 16$

см;

Определить:  $U_5$ ;  $U_B$ ;  $\varepsilon_2$ ;  $\alpha_c$ ;  $\alpha_4$ ;

Обозначим скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса  $R_j$ ) – через  $U_j$ , а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса  $\tau_j$ ) – через  $u_j$ . – рис.31

Рейка 4, ступенчатые колеса 3 радиусами  $R_3$  и  $\tau_3$  и колесо 2 с радиусами  $R_2$  и  $\tau_2$  находятся в зацеплении; колесо 2 связано с колесом 1 ременной передачей. На вал 1 намотана нить с грузом 5  $\Rightarrow U_5 = u_1 = \omega_1 \tau_1 = (5 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2) \cdot 2 = 4$  см/с;

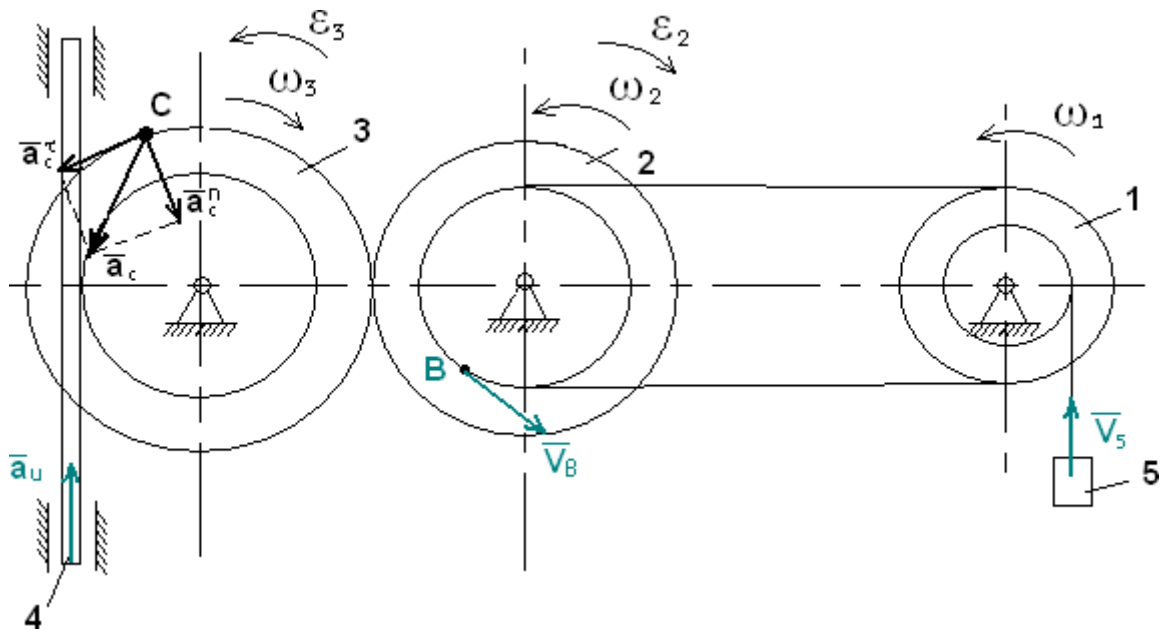


Рисунок 31

Так как колеса 2 и 1 связаны ременной передачей,  $\Rightarrow U_1 = u_2 \Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 \tau_2$ ;  $U_B = \omega_2 \tau_2 \Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 = \omega_B = (5 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2) \cdot 4 = 8$  см/с;

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 \tau_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1 R_1}{\tau_2} = \frac{(5 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2) \cdot 4}{6} \frac{2 \cdot 4}{6} = 1,33 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt(\tau_2)} = \frac{R \cdot (5t - 2t^2)'}{\tau_2} = \frac{R \cdot (5 - 4t)}{\tau_2} - \text{угловое ускорение колеса 2}$$

$$\varepsilon_2 \text{ в момент времени } t_1 = 2 \text{ с } \varepsilon_{2(t_1)} = \frac{4 \cdot (5 - 4 \cdot 2)}{6} = -2 \text{ с}^2$$

$\varepsilon_2$  и  $\omega_2$  разного направления  $\Rightarrow$  вращения колеса 2 замедленное

$$\text{Так как колеса 2 и 3 находятся в зацеплении } \Rightarrow \omega_2 R_2 = \omega_3 R_3; U_2 = U_3 \Rightarrow \omega_3 = \frac{\omega_2 R_2}{R_3} \\ = \frac{1,33 \cdot 8}{16} = 0,67 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$\varepsilon_3$  – угловое ускорение колеса 3;

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d(\omega_2 R_2)}{dt(R_3)} = \frac{\omega_1 R_1 \cdot R_2}{\tau_2 \cdot R_3} = \frac{4 \cdot 8 \cdot (5 - 4t)}{6 \cdot 16} = \frac{4 \cdot 8 \cdot (5 - 4 \cdot 2)}{6 \cdot 4} = -4 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2};$$

$\varepsilon_3$  и  $\omega_3$  разного направления  $\Rightarrow$  вращение колеса 3 – замедленное.

$$\alpha_c^n = \omega_3^2 \cdot R_3 = 0,67^2 \cdot 16 = 0,45 \cdot 16 = 7,18 \text{ см/с}^2;$$

$$\alpha_c^\tau = \varepsilon_3 \cdot R_3 = 4 \cdot 16 = 64 \text{ см/с}^2;$$

$$(\alpha_c) = \sqrt{\alpha_c^{h2} + \alpha_c^{\tau 2}} = \sqrt{7,18^2 + 64^2} = \sqrt{51,59 + 4096} = 64,4 \text{ см/с}^2;$$

Так как колесо 3 и рейка 4 находятся в зацеплении, то  $v_3 = v_4 \Rightarrow \omega_3 R_3 = v_4$ ;

$$\frac{dv_4}{dt} = \frac{d(\omega_3 R_3)}{dt} = \left( \frac{d(\omega_2 \cdot R_2 \cdot R)}{R_3} \right) = R_2 \frac{d\omega_2}{dt} = R_2 \cdot \varepsilon_2 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ см/с}^2;$$

$$v_5 = 4 \text{ см/с}; v_B = 8 \text{ см/с}; \varepsilon_2 = -2 \text{ с}^{-2}; \alpha_c = 64,4 \text{ см/с}^2; \alpha_4 = 16 \text{ см/с}^2;$$

Оборудование и материалы: тетрадь для лабораторных работ - в клетку - 48 листов; ручка шариковая, цвет чернил в ручке шариковой – синий, чёрный; карандаш простой – М,2М; карандаши цветные – М,2М; ластик, линейка до 25 см – дерево, пластик, металл, алюминий; линейка рейсшина 22см с металлическим роликом УЧП-22; трафарет графических функций; циркуль металлический; калькулятор инженерного типа.

Указания по технике безопасности соответствуют нормативам эргономики при использовании указанного оборудования и материалов.

Выполнить самостоятельно:

Задание 2.

Движение груза 1 должно описываться уравнением

$$X = C_2 t^2 + C_1 t + C_0,$$

где  $t$  – время;  $C_2, C_1, C_0$  - некоторые постоянные.

В начальный момент времени ( $t = 0$ ) координата груза должна быть  $x_0$ , а его скорость –  $V_0$ .

Кроме того, необходимо, чтобы координата груза в момент времени  $t = t_2$  была равна  $x_2$ .

Определить коэффициенты  $C_2, C_1, C_0$ , при которых осуществляется требуемое движение груза 1. Определить также в момент времени  $t = t_1$  скорость и ускорение груза 1 и точки М одного из колёс механизма.

Схемы механизмов показаны на рис. 32 – 35, а необходимые данные приведены в таблице 1.

Таблица 1.

| Номер<br>варианта<br>(рис.<br>68 – 70) | Радиусы, см |       |       |       | Координаты и скорости<br>груза <i>I</i> |              |            | Расчетные<br>моменты<br>времени, с |       |
|----------------------------------------|-------------|-------|-------|-------|-----------------------------------------|--------------|------------|------------------------------------|-------|
|                                        | $R_2$       | $r_2$ | $R_3$ | $r_3$ | $x_0$ , см                              | $v_0$ , см/с | $x_2$ , см | $t_2$                              | $t_1$ |
| 1                                      | 60          | 45    | 36    | —     | 2                                       | 12           | 173        | 3                                  | 2     |
| 2                                      | 80          | —     | 60    | 45    | 5                                       | 10           | 41         | 2                                  | 1     |
| 3                                      | 100         | 60    | 75    | —     | 8                                       | 6            | 40         | 4                                  | 2     |
| 4                                      | 58          | 45    | 60    | —     | 4                                       | 4            | 172        | 4                                  | 3     |
| 5                                      | 80          | —     | 45    | 30    | 3                                       | 15           | 102        | 3                                  | 2     |
| 6                                      | 100         | 60    | 30    | —     | 7                                       | 16           | 215        | 4                                  | 2     |
| 7                                      | 45          | 35    | 105   | —     | 8                                       | 5            | 124        | 4                                  | 3     |
| 8                                      | 35          | 10    | 10    | —     | 6                                       | 2            | 111        | 3                                  | 2     |
| 9                                      | 40          | 30    | 15    | —     | 10                                      | 7            | 48         | 2                                  | 1     |
| 10                                     | 15          | —     | 40    | 35    | 5                                       | 3            | 129        | 4                                  | 3     |
| 11                                     | 40          | 25    | 20    | —     | 9                                       | 8            | 65         | 2                                  | 1     |
| 12                                     | 20          | 15    | 10    | —     | 5                                       | 10           | 179        | 3                                  | 2     |
| 13                                     | 30          | 20    | 40    | —     | 7                                       | 0            | 557        | 5                                  | 2     |
| 14                                     | 15          | 10    | 15    | —     | 6                                       | 3            | 80         | 2                                  | 1     |
| 15                                     | 15          | 10    | 15    | —     | 5                                       | 2            | 189        | 4                                  | 2     |
| 16                                     | 20          | 15    | 15    | —     | 4                                       | 6            | 220        | 4                                  | 3     |
| 17                                     | 15          | 10    | 20    | —     | 8                                       | 4            | 44         | 2                                  | 1     |
| 18                                     | 20          | 15    | 10    | —     | 3                                       | 12           | 211        | 4                                  | 1     |
| 19                                     | 15          | 10    | 20    | —     | 5                                       | 10           | 505        | 5                                  | 3     |
| 20                                     | 25          | 15    | 10    | —     | 10                                      | 8            | 277        | 3                                  | 1     |
| 21                                     | 20          | 10    | 30    | 10    | 6                                       | 5            | 356        | 5                                  | 2     |
| 22                                     | 40          | 20    | 35    | —     | 7                                       | 6            | 103        | 2                                  | 1     |
| 23                                     | 40          | 30    | 30    | 15    | 5                                       | 9            | 194        | 3                                  | 2     |
| 24                                     | 30          | 15    | 40    | 20    | 9                                       | 8            | 105        | 4                                  | 2     |
| 25                                     | 50          | 20    | 60    | —     | 8                                       | 4            | 119        | 3                                  | 2     |
| 26                                     | 32          | 16    | 32    | 16    | 6                                       | 14           | 862        | 4                                  | 2     |
| 27                                     | 40          | 18    | 40    | 18    | 5                                       | 10           | 193        | 2                                  | 1     |
| 28                                     | 40          | 20    | 40    | 15    | 8                                       | 5            | 347        | 3                                  | 2     |
| 29                                     | 25          | 20    | 50    | 25    | 4                                       | 6            | 32         | 2                                  | 1     |
| 30                                     | 30          | 15    | 20    | —     | 10                                      | 7            | 128        | 2                                  | 1     |

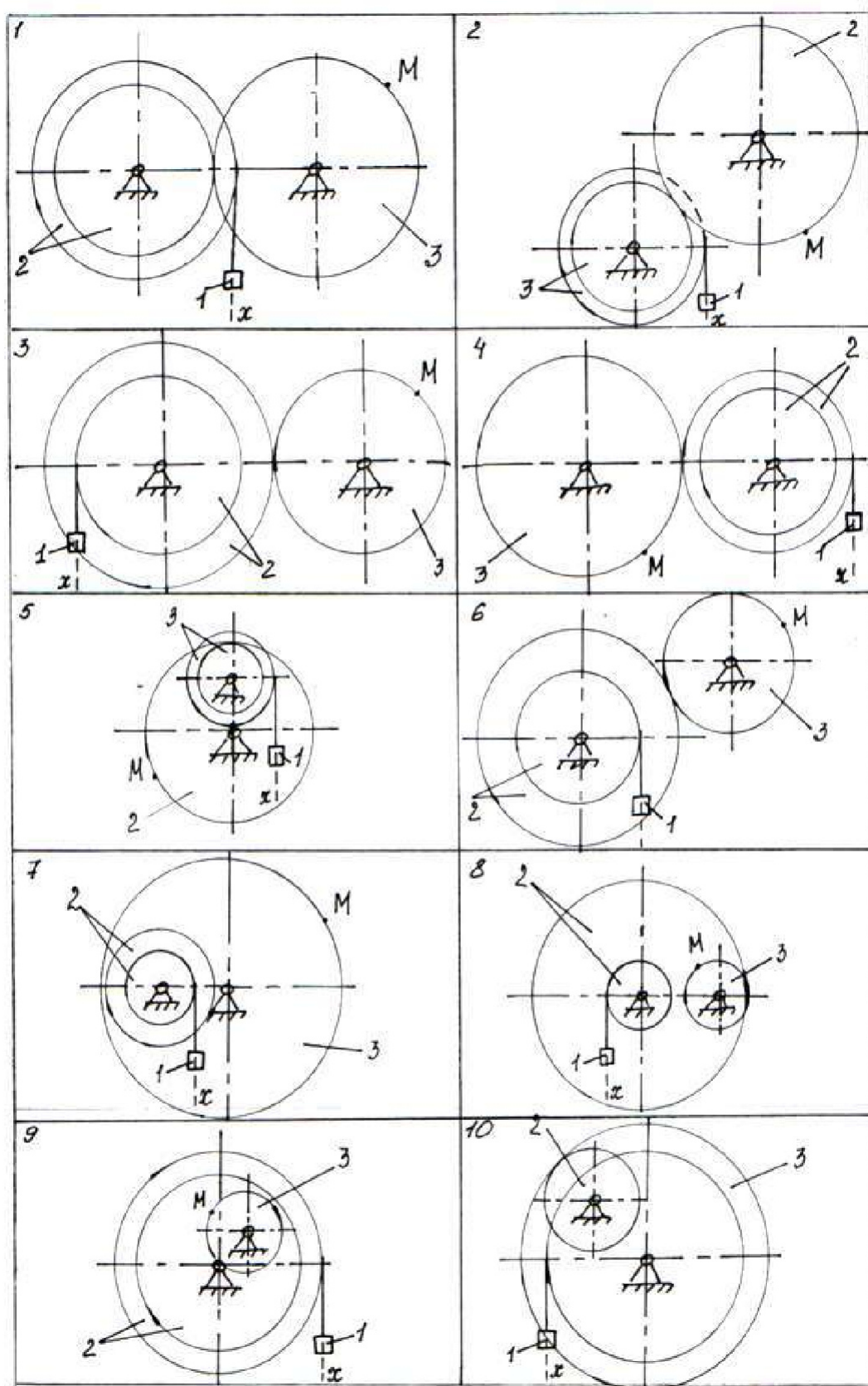


Рисунок 32



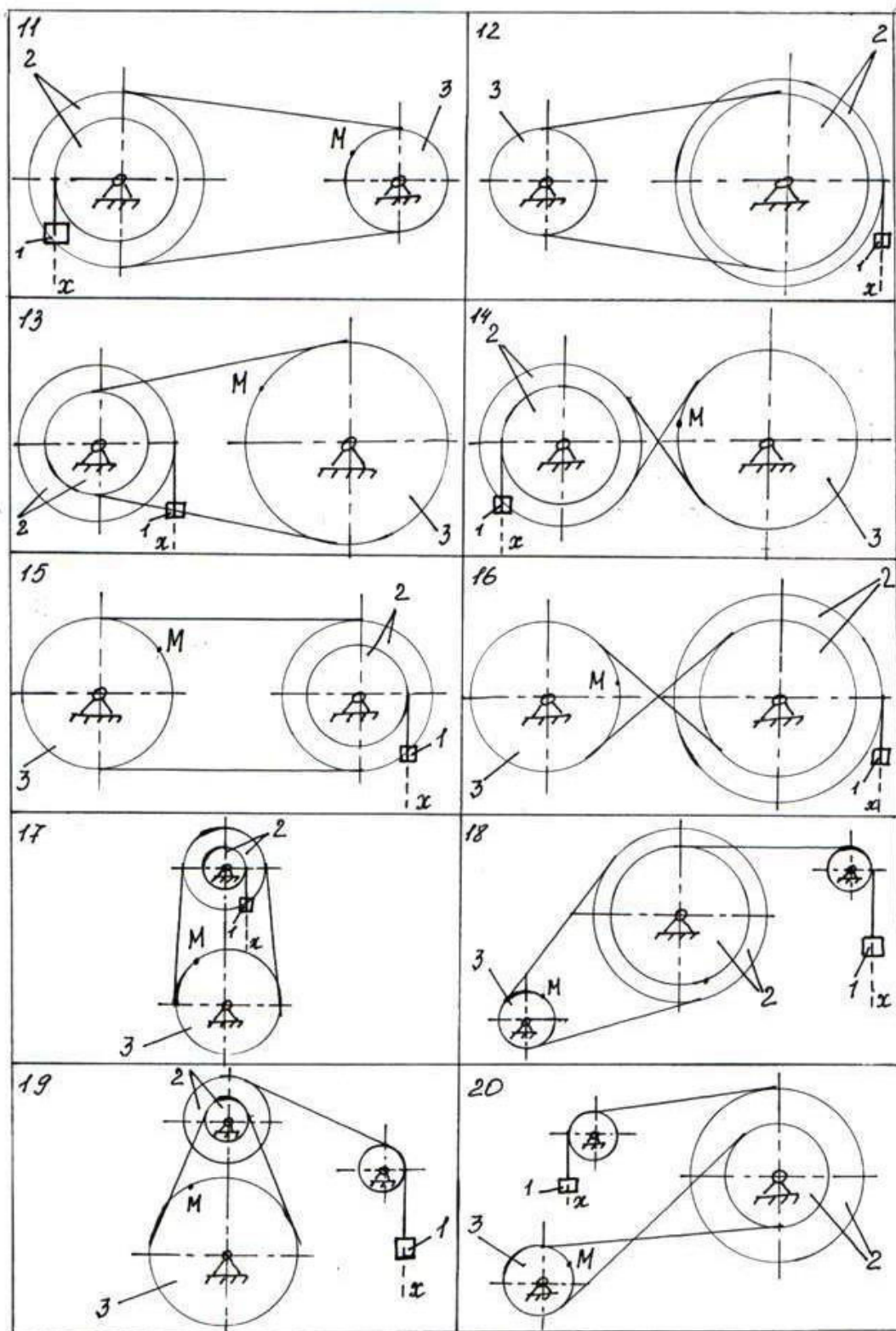


Рисунок 33



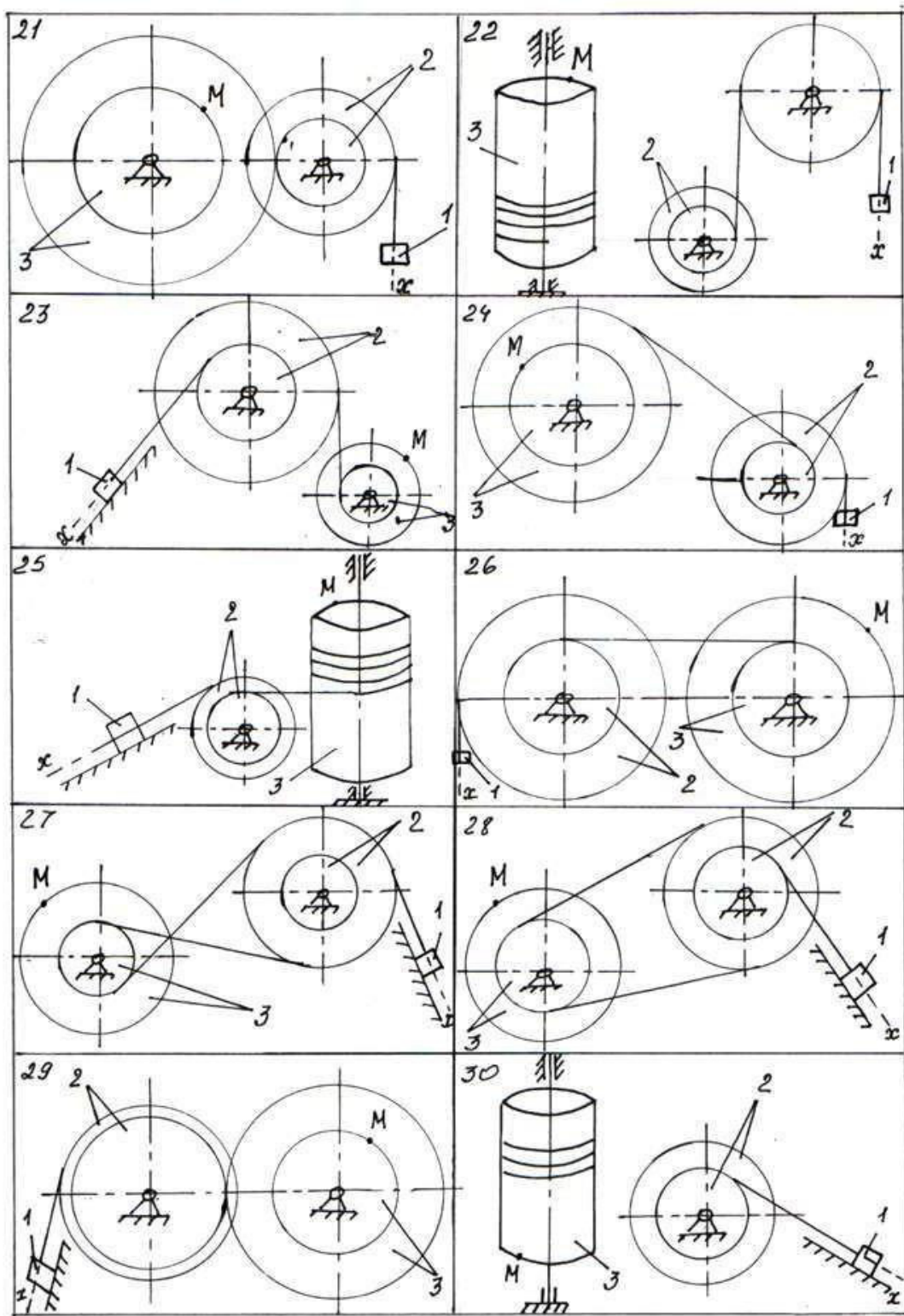


Рисунок 34

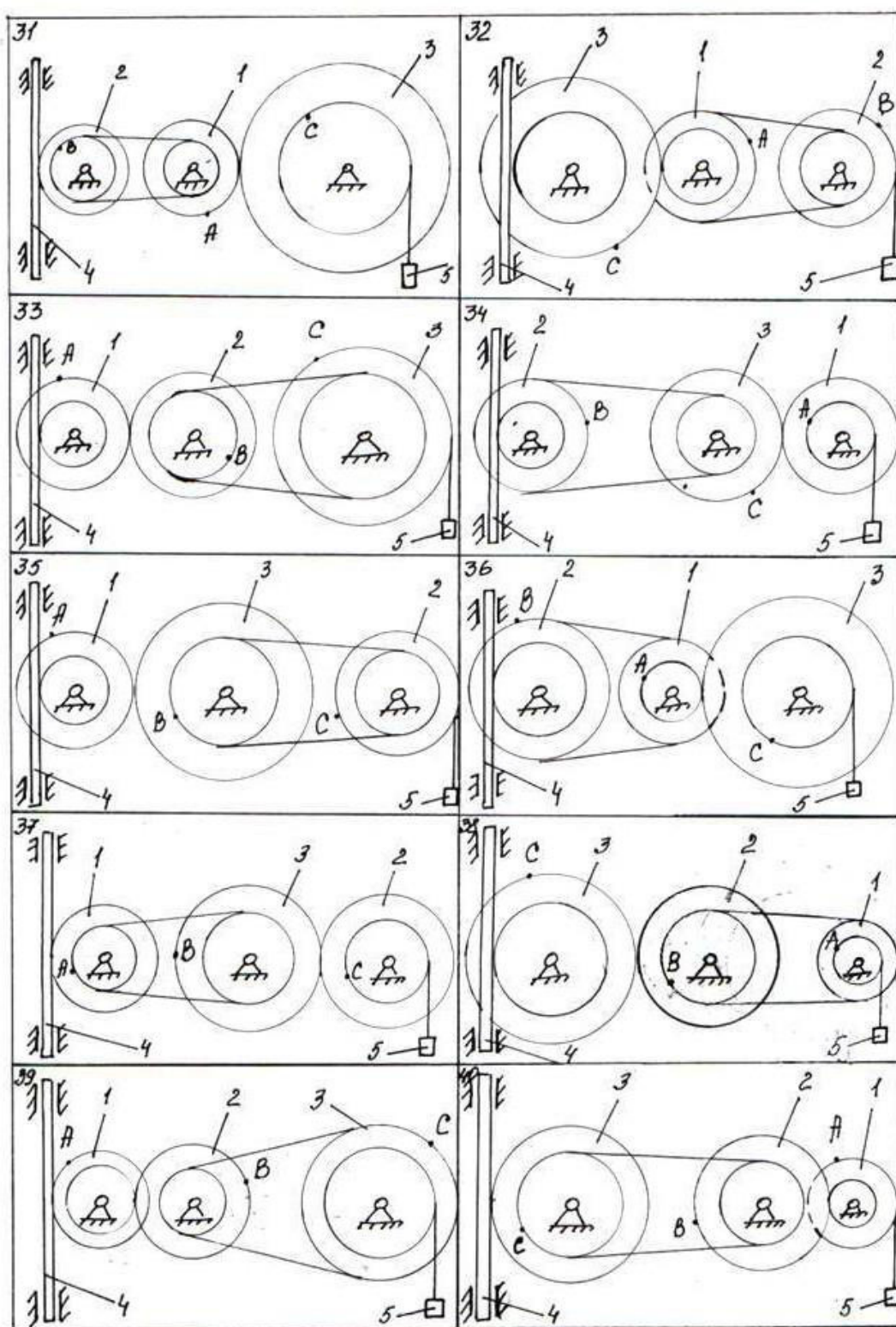


Рисунок 35

Содержание отчёта:

– пример выполнения задания в методических указаниях – пример оформления самостоятельно выполненного студентом лабораторного задания;

– допуск к лабораторным занятиям происходит при наличии у студента рукописного варианта отчета. Защита отчета проходит в форме доклада студента по выполнению лабораторного задания и ответов на вопросы преподавателя.

Максимальное количество баллов студент получает, если оформление отчета соответствует установленным требованиям, а отчет полностью раскрывает тему занятия.

Основанием для снижением оценки являются:

– слабое знание темы и основной терминологии;  
– отсутствие умения применять теоретические знания для выполнения лабораторных заданий.

Отчет может быть отправлен на доработку, если:

– лабораторное задание выполнено неверно;  
– несоответствие отчета установленным требованиям;  
– слабое знание темы и неправильные ответы на поставленные вопросы.

Вопросы для обсуждения:

1. Определение поступательного движения тела? Примеры поступательного движения тела?

2. Теорему о траекториях, скоростях и ускорениях точек тела, совершающих поступательное движение?

3. Определение вращательного движения тела? Примеры?

4. Закон или уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси?

5. Определение угловой скорости и углового ускорения?

6. Как вычисляются угловая скорость и угловое ускорение?

7. Каким образом вводится понятие о векторах угловой скорости и углового ускорения?

Можно ли сказать, что они являются скользящими векторами?

8. Классификацию вращений по угловому ускорению тела?

9. Вывод формулы для вычисления линейной (окружной) скорости точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

10. Составляющие ускорения точек тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси? По каким формулам они вычисляются?

11. Формулу для вычисления полного ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

12. Передаточные механизмы - внешнее зубчатое зацепление, внутреннее зубчатое зацепление(фрикционная передача), гибкие связи, механизм с кратным зацеплением, механизм с паразитными колесами?

13. Передаточное число?

14. Кинематический анализ передаточных механизмов – преобразование поступательного и вращательного движения твердого тела в механизмах.

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.

2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб.пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.

3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.

4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.

Интернет - ресурсы: [www.mashin.ru](http://www.mashin.ru)

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное автономное**  
**образовательное учреждение высшего образования**  
**«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

**Методические рекомендации для студентов по организации самостоятельной работы**

для студентов направления подготовки 21.03.01 Нефтегазовое дело  
направленность (профиль) «Эксплуатация и обслуживание объектов добычи  
нефти»

Ставрополь, 2022

Методические рекомендации для студентов ОФО и ЗФО по организации самостоятельной работы составлены в соответствии с требованиями ОС ВО СКФУ.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 21.05.06 – Нефтегазовая техника и технологии; Специализация: Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. ВВЕДЕНИЕ .....                                                       | 3  |
| 2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ<br>СТУДЕНТА .....        | 5  |
| 3. Методические рекомендации по изучению теоретического материала ..... | 6  |
| 4. Методические указания.....                                           | 6  |
| 5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины .....    | 11 |

## Введение

Цель и задачи освоения дисциплины ориентированы на формирование и развитие общекультурных и профессиональных компетенций будущего специалиста. Цель дисциплины: дать представление о предмете классической механики, включая как физические ее основы, так и дифференциально-геометрические аспекты с использованием традиционных моделей движущихся объектов и среды. Задачи дисциплины: изучение классической механики, т.е. механики, основанной на законах Ньютона, с формулировками задач с техническим содержанием и приемами решения таких задач средствами математического анализа. Цели и задачи дисциплины соотнесены с общими целями основной образовательной программы и квалификационными характеристиками специалиста. Изучение теоретической механики в базовой части общепрофессиональных дисциплин способствует формированию и развитию профессиональных и культурных компетенций будущего специалиста. Инженер по специальности 21.05.06 - «Нефтегазовые техника и технологии» должен решать следующие профессиональные задачи:

- осуществлять технологические процессы строительства, ремонта, реконструкции и восстановления нефтяных и газовых скважин на суше и на море;
- эксплуатировать и обслуживать технологическое оборудование, используемое при строительстве, ремонте, реконструкции и восстановлении нефтяных и газовых скважин на суше и на море;
- осуществлять технологические процессы добычи нефти и газа, сбора и подготовки скважинной продукции;
- эксплуатировать и обслуживать технологическое оборудование, используемое при добыче нефти и газа, сборе и подготовке скважинной продукции;
- эксплуатировать и обслуживать технологическое оборудование, используемое при трубопроводном транспорте нефти и газа, подземном хранении газа;
- анализировать информацию по технологическим процессам и техническим устройствам в области бурения скважин, добычи нефти и газа, промыслового контроля и регулирования извлечения углеводородов на суше и на море, трубопроводного транспорта нефти и газа, подземного хранения газа, хранения и сбыта нефти, нефтепродуктов и сжиженных газов;
- проводить регламентированные методиками экспериментальные исследования технологических процессов и технических устройств в области бурения скважин, добычи нефти и газа, промыслового контроля и регулирования извлечения углеводородов на суше и на море, трубопроводного транспорта нефти и газа, подземного хранения газа, хранения и сбыта нефти, нефтепродуктов и сжиженных газов;
- выполнять статистическую обработку результатов экспериментов, составлять отчетную документацию.
- собирать и представлять по установленной форме исходные данные для разработки проектной документации на бурение скважин, добычу нефти и газа, промысловый контроль и регулирование извлечения углеводородов на суше и на море, трубопроводный транспорт нефти и газа, подземное хранение газа, хранение и сбыт нефти, нефтепродуктов и сжиженных газов;
- составлять в соответствии с установленными требованиями типовые проектные, технологические и рабочие документы;
- участвовать в составлении проектных решений по управлению качеством в нефтегазовом производстве.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины:

| Код     | Формулировка:                                                                                                                                                              |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОПК – 1 | – Способен решать задачи, относящиеся к профессиональной деятельности, применяя методы моделирования, математического анализа, естественнонаучные и общеинженерные знания. |



## **В результате освоения дисциплины обучающийся должен:**

### *Знать:*

- понятия теоретической механики;
- законы механики;
- теоремы теоретической механики;
- принципы теоретической механики.

### *Уметь:*

- решать практические с использованием способов и методов механики;
- решать прикладные задачи с использованием способов и методов механики;

### *Владеть:*

- навыками решения практических задач с использованием способов и методов теоретической механики;
- навыками решения прикладных задач с использованием способов и методов теоретической механики.

## **2. Общая характеристика самостоятельной работы студента**

Основными видами учебной работы по достижению результатов освоения дисциплины являются лекции, практические работы, лабораторные работы и самостоятельная работа студентов (СРС).

На лекциях раскрываются основные положения и понятия курса, формируются знания в области практических и лабораторных работ по теоретической механике. На практических и лабораторных работах формируются умения и навыки, необходимые для решения практических и прикладных задач профессиональной деятельности.

Приступая к изучению учебной дисциплины, необходимо ознакомиться с учебной программой, получить в библиотеке или на кафедре рекомендованные учебные пособия, а также получить у ведущего преподавателя в электронном виде конспекты лекций, методические рекомендации к практическим и лабораторным работам, завести отдельные тетради для конспектирования лекций, практических работ, лабораторных работ.

Для изучения дисциплины предлагается список основной и дополнительной литературы. Основная литература предназначена для обязательного изучения, дополнительная – поможет более глубоко освоить отдельные вопросы, подготовить и выполнить исследовательские задания для самостоятельной работы.

В ходе лекционных занятий студент обязан осуществлять конспектирование учебного материала, особое внимание обращая на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных понятий, физических явлений, процессов, эффектов. В рабочих конспектах желательно оставлять поля, на которых следует делать пометки из рекомендованной литературы, дополнять материал прослушанной лекции, формулировать научные выводы и практические рекомендации. Студент имеет право задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью выяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

Самостоятельная работа студентов над материалом учебной дисциплины является неотъемлемой частью учебного процесса и должна предполагать углубление знания учебного материала, излагаемого на аудиторных занятиях, и приобретение дополнительных знаний по отдельным вопросам самостоятельно.

Основными видами самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине являются:

- самостоятельное изучение учебного материала по заданным темам;
- подготовка к практическим занятиям, оформление отчета по выполненному практическому занятию и подготовка к собеседованию по результатам работы;
- подготовка к лабораторным занятиям, оформление отчета по выполненному лабораторному занятию и подготовка к собеседованию по результатам работы;
- выполнение типовых расчётных заданий по темам практических и лабораторных занятий.

Основными методами самостоятельной работы студентов являются:

1) для овладения знаниями:

- чтение текста (конспекта лекций, учебника, дополнительной литературы) и конспектирование текста;

- работа с нормативными документами;

- поиск информации в Интернет;

2) для закрепления и систематизации знаний:

- работа с конспектом лекции (обработка текста);

- повторная работа над учебным материалом (учебника, дополнительной литературы);

- изучение нормативных документов;

- ответы на вопросы для обсуждения или вопросы для собеседования;

3) для формирования умений:

- подготовка к практическим занятиям;

- подготовка к лабораторным занятиям;

- решение задач и практических заданий;

- выполнение лабораторных заданий;

- подготовка отчетов по практическим занятиям

- подготовка отчетов по лабораторным занятиям;

- рефлексивный анализ профессиональных умений.

В случае пропуска учебного занятия студент может воспользоваться содержанием различных блоков учебно–методического комплекса (лекции, практические занятия, контрольные вопросы) для самоподготовки и освоения темы. Для самоконтроля необходимо использовать вопросы для обсуждения и задания, предлагаемые к практическим и лабораторным занятиям, а также варианты типовых заданий по темам практических и лабораторных занятий.

### 3. Методические рекомендации по изучению теоретического материала

| № п/п | Виды самостоятельной работы | Рекомендуемые источники информации (№ источника) |                |              |                  |
|-------|-----------------------------|--------------------------------------------------|----------------|--------------|------------------|
|       |                             | Основная                                         | Дополнительная | Методическая | Интернет-ресурсы |
| 1     | Раздел 1. Темы 1– 5         | 1–5                                              | 1-4            | 1,2          | 1-5              |
| 2     | Раздел 2. Тема 6 – 8        | 1–5                                              | 1-4            | 1,2          | 1-5              |

### 4. Методические указания

В контексте формирования и развития необходимых компетенций ОК–1, ОПК–5 студенты выполняют самостоятельно под руководством преподавателя типовые расчётные задания по темам практических занятий и лабораторных работ. Расчётное

задание – учебно–исследовательское задание – первый научный труд студента, который является начальным этапом перехода от теории к практике.

Цель расчётных заданий – проверка уровня знаний, формирования и развития умений и навыков решения практических и прикладных задач по теоретической механике.

Задачи выполнения расчётных заданий:

- в контексте реализации межпредметных связей подготовка студентов к выполнению курсовых и дипломных проектов по специализированным дисциплинам на старших курсах обучения по специальности 21.05.06.
- формирование умений и развитие навыков творческого мышления;
- мотивация студентов к дальнейшей научно–исследовательской деятельности;
- повышение информационной компетенции и образовательного потенциала студентов;
- реализация компетентного подхода в процессе обучения студентов.

Для выполнения типовых расчётных заданий по темам практических занятий и лабораторных работ по дисциплине отводится время в течении семестра с 1 по 14 неделю, с последующей доработкой и исправлением ошибок, как в течении семестра, так и в течении 16 и 17 недели семестра. При выполнении задания необходимо пользоваться методическими указаниями, учебной литературой:

1. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике/ Под ред. А.А. Яблонского. – М.: КноРус, 2010. – 392 с.
2. Милованова Л.Н. Учебно – методическое пособие (практикум) по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов специальности 21.05.06 – Нефтегазовая техника и технологии (специализация – "Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений") – рукопись – 2022. – 72с.
3. Милованова Л.Н. Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине "Теоретическая механика" для студентов специальности 21.05.06 – Нефтегазовая техника и технологии (специализация – "Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений") – рукопись – 2022. – 64с.
4. Милованова Л.Н. Методические рекомендации для студентов специальности 21.05.06 – Нефтегазовая техника и технологии (специализация – "Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений") по организации самостоятельной работы по дисциплине "Теоретическая механика" – рукопись – 2022. – 14с.

Структура расчётного задания по теме в методических указаниях – индивидуальное задание, пример выполнения типового задания – пример выполнения и оформления расчётного задания; вопросы для обсуждения.

Методические рекомендации по работе с методическими указаниями при выполнении расчётного задания:

- по вопросам обсуждения выучить теоретические положения, применяемые при выполнении расчётного задания;
- разобраться с примером выполнения расчётного задания – теоретические и практические вопросы;
- выполнить свой вариант расчётного задания в тетради для практических работ и представить на проверку преподавателю;
- с учётом доработок, исправления ошибок оформить расчётное задание в соответствии с основными положениями ГОСТа 7.32–2001, ГОСТа 2.105–95, ГОСТа Р 7.0.5–2008 (ГОСТ 7.1–84) и правилами ЕСКД, предъявляемыми к оформлению текстовых документов (лист А4 с чертёжной рамкой);
- защита расчётного задания.

При проверке расчётных заданий самостоятельной работы по темам практических занятий оцениваются:

- последовательность и рациональность выполнения задания;
- точность расчетов;
- необходимые пояснения к расчетам и необходимые рисунки, поясняющие принятые решения.

Студент представляет печатный или рукописный вариант отчета расчётного задания самостоятельной работы к защите. Защита расчётных заданий самостоятельной работы в устно–письменном виде проходит по указанному в методических указаниях графику и заключается в проверке теоретических и практических знаний соответствующей темы и раздела в течение 15–30 минут. Форма общения с преподавателем – диалог – обратная связь: преподаватель–студент, студент– преподаватель. При подготовке к защите студенту предоставляется право пользования ручкой, линейкой, карандашом, калькулятором, учебно – методическим пособием (практикумом) по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов специальностей

21.05.06. Проверка теоретических знаний соответствующей темы осуществляется по вопросам собеседования. Собеседование проводится преподавателем, читающим лекции в качестве оценочного мероприятия для проверки теоретических знаний, практических умений и навыков в контексте формирования и развития необходимых компетенций ОК–1, ОПК–4.

При собеседовании оцениваются:

- знание понятий теоретической механики, законов механики, теорем, методов и способов решения задач и прикладных задач, использование дополнительного материала;
- умение решать задачи и прикладные задачи с использованием способов и методов механики, выполнять сравнительный анализ полученных результатов;
- владение навыками решения задач и прикладных задачах с использованием способов и методов механики, выполнения сравнительного анализа и синтеза полученных результатов и формулировки выводов.

### **Вопросы для собеседования**

#### **Базовый уровень**

##### **Знать:**

Раздел 1. Статика.

1. Сила, линия действия силы. Аксиома 2. Следствие из аксиомы.
2. Система сил. Аксиома 1.
3. Плоские системы сил и их классификация.
4. Эквивалентные и уравновешенные системы сил.
5. Равнодействующая плоской системы сил. Аксиома 3 (правило параллелограмма сил). Условие равновесия.
6. Аксиома 4 (закон равенства действия и противодействия).
7. Аксиома 5 (принцип отвердевания).

Раздел 2. Кинематика.

8. Способы задания движения точки: векторный, естественный, координатный.
9. Вектор скорости точки.
10. Вектор ускорения точки.

##### **Уметь, Владеть:**

11. Аксиома 6 (принцип освобожденности от связей). Свободное и несвободное абсолютное твёрдое тело. Связь. Реакция связи.
12. Система сходящихся сил. Равнодействующая системы сходящихся сил. Геометрические и Аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил.
13. Алгебраический момент силы относительно точки и его свойства.
14. Пара сил. Момент пары сил.

15. Аналитические условия равновесия плоской произвольной системы сил – I – основная форма.
16. Скорость и ускорение точки при координатном способе задания движения точки.
17. Скорость и ускорение точки при векторном способе задания движения точки.
18. Скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения точки.
19. Определение ускорения точки по его проекциям на оси естественного трёхгранника: касательное и нормальное ускорения точки.
20. Прямолинейное ускоренное (равноускоренное) движение точки.
21. Прямолинейное замедленное (равнозамедленное) движение точки.
22. Прямолинейное равномерное движение точки.
23. Криволинейное ускоренное (равноускоренное) движение точки.
24. Криволинейное замедленное (равнозамедленное) движение точки.
25. Криволинейное равномерное движение точки.

### **Повышенный уровень**

#### **Знать:**

1. Пространственные системы сил и их классификация.
2. Равнодействующая пространственной системы сил. Аксиома 3 (правило параллелепипеда сил). Условие равновесия.
3. Аналитические условия равновесия плоской произвольной системы сил – II форма.
4. Аналитические условия равновесия плоской произвольной системы сил – III форма.
5. Пространственная система сходящихся сил. Равнодействующая пространственной системы сходящихся сил.
6. Пространственная система сходящихся сил. Равнодействующая. Геометрические условия равновесия пространственной системы сходящихся сил.
7. Пространственная система сходящихся сил. Равнодействующая. Аналитические условия равновесия пространственной системы сходящихся сил.
8. Алгебраический момент силы относительно оси и его свойства.
9. Аналитические условия равновесия пространственной системы сил.
10. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твёрдого тела при поступательном движении.
11. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Уравнение (закон) вращательного движения твёрдого тела.
12. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Вектор угловой скорости и вектор углового ускорения.

#### **Уметь, Владеть:**

13. Аналитические условия равновесия пространственной системы сил. Метод блуждающих осей.
14. Скорость и ускорение точек твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Вектор скорости и вектор ускорения точек тела.
15. Ускоренное вращательное движение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.
16. Равноускоренное вращательное движение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.
17. Замедленное вращательное движение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.
18. Равнозамедленное вращательное движение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.
19. Равномерное вращательное движение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.
20. Ускоренное (равноускоренное) поступательное движение твердого тела.
21. Замедленное (равнозамедленное) вращательное движение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.
22. Равномерное поступательное движение твердого тела.
23. Передаточные механизмы. Передаточное число.
24. Типы передаточных механизмов.
25. Кинематический анализ передаточных механизмов.

Максимальное количество баллов студент получает, если оформление отчета соответствует установленным требованиям, если он знает: понятия теоретической механики, законы механики, теоремы, принципы механики, методы и способы решения задач и прикладных задач, использует дополнительный материал; умеет: решать задачи и прикладные задачи с использованием способов и методов механики, выполнять сравнительный анализ и синтез полученных результатов; владеет: навыками решения задач и прикладных задачах с использованием способов и методов механики, выполняет сравнительный анализ и синтез полученных результатов, делает выводы самостоятельно. Необходимые компетенции ОК–1, ОПК–5 в основном сформированы, все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения достаточно высокое.

Основанием для снижения оценки являются:

- если оформление отчета не соответствует установленным требованиям;
- слабое знание темы и основной терминологии;
- отсутствие умения применять теоретические знания для решения практических задач.

Отчет может быть отправлен на доработку в следующих случаях:

- неверно выполненные расчеты;
- несоответствия отчета установленным требованиям;
- слабое знание темы и неправильные ответы на поставленные вопросы.

### Оценочный лист

| ПК                                                                                                                                                                                | Пункты оценки                                                                                                                                               | Отметка о сформированности         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| <b>Базовый уровень</b>                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                             |                                    |
| ОПК – 1 – Способен решать задачи, относящиеся к профессиональной деятельности, применяя методы моделирования, математического анализа, естественнонаучные и общеинженерные знания | правильность и четкость ответов – знание основных понятий, законов, теорем, принципов теоретической механики; методов и способов решения практических задач | ОПК – 1 – в основном сформирована; |
|                                                                                                                                                                                   | практические умения и навыки решения практических задач с использованием способов и методов механики.                                                       | ОПК – 1 – частично сформирована;   |
|                                                                                                                                                                                   | практические умения и навыки решения практических задач с использованием способов и методов механики.                                                       | ОПК – 1 – частично не сформирована |
| <b>Повышенный уровень</b>                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                             |                                    |
| ОПК – 1 – Способен решать задачи, относящиеся к профессиональной деятельности, применяя                                                                                           | последовательно, четко и логически стройно излагает материал – знание основных понятий, законов, теорем,                                                    |                                    |

|                                                                                           |                                                                                                                                                                             |                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| методы моделирования, математического анализа, естественнонаучные и общеинженерные знания | принципов механики, методов и способов решения практических и прикладных задач, использует в ответе дополнительный материал.                                                | ОПК – 1 – в основном сформирована |
|                                                                                           | практические умения и навыки решения практических и прикладных задач с использованием способов и методов механики, выполнения сравнительного анализа и формулировки выводов |                                   |

## **5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **5.1. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

#### **5.1.1. Перечень основной литературы:**

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2014. – 416 с.
2. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб.пособие. – СПб.: Лань, 2013. – 448 с.
3. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике/ Под ред. А.А.Яблонского. – М.: КноРус, 2014. – 392 с.
4. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб.пособие. – СПб.: Лань, 2013. – 672 с.: ил.
5. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 2. Динамика : учеб.пособие. – 9-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2013. – 640 с.: ил.

#### **5.1.2. Перечень дополнительной литературы:**

1. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.
2. Цивильский Б.Л. Теоретическая механика. - М: Высш.шк., 2001.
3. Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике. - М.: Высш.шк., 2000.
4. Кепе О.Э. и др. Сборник коротких задач по теоретической механике. Учебное пособие. – М., 1989.

### **5.2. Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

1. Милованова Л.Н. Учебно – методическое пособие (практикум) по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов специальности 21.05.06 – Нефтегазовые техника и технологии (специализация – "Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений") – рукопись – 2022. – 72с.
2. Милованова Л.Н. Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине "Теоретическая механика" для студентов специальности 21.05.06 – Нефтегазовые техника и технологии (специализация – "Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений") – рукопись – 2022. – 64с.

3. Милованова Л.Н. Методические рекомендации для студентов специальности 21.05.06 – Нефтегазовая техника и технологии (специализация – "Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений") по организации самостоятельной работы по дисциплине "Теоретическая механика" – рукопись – 2022. – 14с.

**5.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. <http://www.elibraru.ru/> - Научная электронная библиотека eLIBRARY
2. <http://www.biblioclub.ru> – Университетская библиотека онлайн
3. <http://biblio-online.ru/>- Biblio-online.ru
4. [teoretmeh.ru](http://teoretmeh.ru) - электронный учебный курс для студентов очной и заочной формы обучения. Научно - популярные фильмы.
5. [ru.wikipedia.org](http://ru.wikipedia.org) - учебники по теоретической механике.
6. [twirpx.com](http://twirpx.com) - Андронов В.В. Часть 1. Статика. 20 лекций.
7. [termeh.ru](http://termeh.ru) - примеры решения задач по всем основным разделам курса.
8. [studFiles.ru](http://studFiles.ru) - решение задач по всем темам и разделам курса.