

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Северо-Кавказский федеральный университет»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ**

по дисциплине

«Прикладная математика»

Направление подготовки 09.04.02 «Информационные системы и технологии»
Направленность (профиль) «Искусственный интеллект, математическое моделирование и
суперкомпьютерные технологии в разработке информационных систем»

Ставрополь
2026

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	3
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1. Точные методы решения систем алгебраических уравнений	5
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2. Приближенные методы решения систем линейных уравнений	21
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3 Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений	26
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4. Приближенные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений	50
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5 Уравнения гиперболического типа.....	54
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6. Уравнения параболического типа. Решение однородного уравнения теплопроводности методом разделения переменных (Фурье).....	56
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ 7 Уравнения эллиптического типа. Решение уравнения Пуассона	59
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 8. Теория приближенных вычислений	62
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 9 Построение распределений дискретных случайных величин	69
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 10 Построение доверительных интервалов основных числовых характеристик выборки, параметров распределения и вероятности	75
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 11. Проверка статистических гипотез	83
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 12. Проверка статистических гипотез о равенстве математических ожиданий	93
Рекомендуемая литература	106
Основная литература.....	106
Дополнительная литература.....	107

ВВЕДЕНИЕ

Целями освоения дисциплины «Прикладная математика» являются изучение математических методов и получение навыков их применения при создании и анализе математических моделей процессов и систем, а также выработки у студентов умения выбирать и применять аналитические или численные методы, программные средства решения задач, возникающих при использовании искусственного интеллекта в прикладных областях, а также формирование на их основе компетенций будущего магистра по направлению подготовки 09.04.02 – Информационные системы и технологии, направленности (профиля) «Искусственный интеллект, математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии в разработке информационных систем».

Задачи изучения дисциплины: ознакомление обучающихся с основными понятиями и методами прикладной математики как инструментами решения задач, встречающихся в сфере науки и производства, развитие на этой основе математического и алгоритмического мышления обучающихся, раскрытие их творческого потенциала; формирование и развитие у обучающихся навыков естественного применения формальных методов прикладной математики, связанных с разработкой и эксплуатацией средств вычислительной техники; ознакомление обучающихся с идеями и алгоритмами решения наиболее распространенных задач, решаемых при помощи методов прикладной математики с указанием типичных проблем данной специальности, которые сводятся к соответствующим математическим задачам, формирование навыков самостоятельной работы, организации исследовательской работы.

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы:

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ОПК-1 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте	ОПК-1.1 Приобретает и адаптирует математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте	Владеет навыками самостоятельного приобретения математических, естественнонаучных, социально-экономических и профессиональных знаний для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте. Адаптирует математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте. Развивает математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте Применяет математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте
	ОПК-1.2 Применяет математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач компетенции	Имеются математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач компетенции Применяет математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач компетенции Владеет навыками применения математических, естественнонаучных, социально-экономических и профессиональных знаний для решения нестандартных задач компетенции

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1. Точные методы решения систем алгебраических уравнений

Цель: изучить основные точные методы решения систем линейных уравнений.

Организационная форма занятий: решение проблемных задач, разбор конкретных ситуаций

Вопросы для обсуждения на практическом занятии: изучение методов решения линейных уравнений: метод Гаусса, правило Крамера.

Формируемые компетенции: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПКД-1.1 ОПКД-1.2

Теоретическое обоснование

Системы линейных уравнений. Основные понятия

Система уравнений вида

[illegible]

называется системой m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Коэффициенты $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ уравнений системы можно записать в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

которая называется главной матрицей системы.

Числа $b_1, b_2, \dots, b_m$, стоящие в правых частях уравнений, образуют столбец

свободных элементов $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных.

Главная матрица системы, дополненная справа столбцом свободных членов, называется расширенной матрицей системы и обозначается

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Если все свободные элементы b_i ($i = \overline{1, m}$) равны нулю, то система называется однородной, в противном случае неоднородной.

Упорядоченный набор n чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ называется решением системы (1.1), если каждое уравнение системы обращается в истинное равенство после подстановки в него чисел α_i вместо соответствующих неизвестных x_i , $i = \overline{1, n}$.

Система уравнений (1.1) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной в противном случае.

Две системы линейных уравнений называются равносильными, если множества их решений совпадают, т. е. каждое решение первой системы является решением второй и, наоборот, каждое решение второй системы является решением первой.

Если совместная система уравнений имеет единственное решение, то она называется определенной, если бесконечное множество решений, то неопределенной.

Критерием совместности системы линейных уравнений служит теорема Кронекера-Капелли. Для того чтобы система линейных уравнений (1.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы $rg A = rg \overline{A}$.

Замечание.

1. Если $rg A = rg \overline{A} = n$, где n – число неизвестных системы, то решение системы (1.1) единственно.

2. Если $rg A = rg \overline{A} < n$, то система (1.1) имеет бесчисленное множество решений.

Переменные, соответствующие базисным столбцам матрицы A сов-

местной системы уравнений, называются базисными, а остальные свободными.

Решение неопределенной системы уравнений, в котором базисные переменные выражены через свободные, называется общим решением. Если подставить численные значения свободных переменных, то получим частное решение.

Решение систем линейных уравнений можно находить:

- по правилу Крамера;
- матричным способом (с помощью обратной матрицы);
- методом Гаусса.

Правило Крамера

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными

[illegible]

Если главный определитель системы (определитель главной матрицы системы A) $\det A = \Delta \neq 0$, то система (1.3) имеет единственное решение, которое по правилу Крамера определяется формулами

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (i = \overline{1, n}) \quad (1.4)$$

где Δ_i – определители, получающиеся из главного определителя Δ заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

по правилу Крамера.

Решение. Вычислим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5(-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 8(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(2 - 6) - 8(-3 - 12) + (3 + 4) = 107 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, система линейных уравнений имеет единственное решение. Составим и вычислим вспомогательные определители: определитель Δ_1 получается заменой первого столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ -7 & -2 & 6 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 8(-1)^3 \begin{vmatrix} -7 & 6 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2 - 6) - 8(7 + 30) + (-7 - 10) = -321.$$

Определитель Δ_2 получается из главного определителя Δ заменой второго столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & 6 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 5(-1)^2 \begin{vmatrix} -7 & 6 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(7 + 30) - 2(-3 - 12) + (-15 + 14) = 214.$$

Определитель Δ_3 получается из главного определителя Δ заменой третьего столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 3 & -2 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 5(-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 8(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(10 + 7) - 8(-15 + 14) + 2(3 + 4) = 107.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-321}{107} = -3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{214}{107} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{107}{107} = 1.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Матричный метод

Систему (1.3) n линейных уравнений с n неизвестными можно записать в матричном виде:

$$AX = B. \quad (1.5)$$

Если $\det A \neq 0$, то система (1.3) имеет единственное решение

$$X = A^{-1} \cdot B, \quad (1.6)$$

где A^{-1} – матрица, обратная к матрице A .

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$$

матричным методом.

Решение. Вычислим главный определитель системы:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 4(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 1(-6 - 4) + 4(4 - 1) \neq 0 = -10 + 12 = 2 \neq 0, \end{aligned}$$

следовательно, главная матрица системы A невырожденная и имеет обратную матрицу A^{-1} .

Значит, система имеет единственное решение, которое средствами матричного исчисления ищется в виде $X = A^{-1} \cdot B$. Составим обратную матрицу A^{-1} . Найдем алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы A :

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 8, & A_{21} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -4, & A_{31} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10, \\
A_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, & A_{22} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, & A_{32} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \\
A_{13} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8, & A_{23} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 5, & A_{33} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix}, \\
X = A^{-1} \cdot B &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -8 \cdot 7 + 4 \cdot 1 + 10 \cdot 5 \\ -7 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \\ 8 \cdot 7 - 1 \cdot 5 - 11 \cdot 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \\
X &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ответ:

Метод Гаусса

Основным из точных методов решения систем линейных уравнений является метод Гаусса. Рассмотрим алгоритм решения системы линейных уравнений методом Гаусса на примере системы 4-го порядка.

Пусть задана система линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + a_{13}^{(0)} x_3 + a_{14}^{(0)} x_4 = a_{15}^{(0)}, \\ a_{21}^{(0)} x_1 + a_{22}^{(0)} x_2 + a_{23}^{(0)} x_3 + a_{24}^{(0)} x_4 = a_{25}^{(0)}, \\ a_{31}^{(0)} x_1 + a_{32}^{(0)} x_2 + a_{33}^{(0)} x_3 + a_{34}^{(0)} x_4 = a_{35}^{(0)}, \\ a_{41}^{(0)} x_1 + a_{42}^{(0)} x_2 + a_{43}^{(0)} x_3 + a_{44}^{(0)} x_4 = a_{45}^{(0)}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Предположим, что элемент $a_{11}^{(0)} \neq 0$. Этот элемент будем называть *ведущим элементом* первой строки. Поэтому, выполнив деление на него первого из уравнений системы (1.7), получим новое уравнение:

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = a_{15}^{(1)}, \quad a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}, \quad j = \overline{2,5}. \quad (1.8)$$

Затем последовательно исключим переменную x_1 из второго, третьего и четвертого уравнений системы (1.7). Для этого первое преобразованное уравнение, описываемое равенством (1.8), умножается на коэффициент, стоящий при x_1 в соответствующем уравнении, а затем выполняется операция вычитания каждого из уравнений, начиная со второго. Результатом выполнения этих действий является система линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = a_{15}^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)}, \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}. \end{array} \right. , \quad (1.9)$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - a_{1j}^{(1)}a_{i1}^{(0)}, \quad j = \overline{2,5}, \quad i = \overline{2,4}.$$

В качестве ведущего элемента второго уравнения системы (1.9) выберем элемент $a_{22}^{(1)}$ при условии, что он отличен от нуля: $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Тогда, выполнив те же самые преобразования, что и для первого уравнения системы (1.7), перепишем второе уравнение системы (1.9) в виде:

$$x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + a_{24}^{(2)}x_4 = a_{25}^{(2)}, \quad a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad j = \overline{3,5}. \quad (1.10)$$

Используя уравнение (1.10), исключим из уравнений 3 и 4 системы уравнений (1.9) переменную x_2 . Метод исключения переменной x_2 полностью совпадает с последовательностью действий при исключении переменной x_1 . После выполненных преобразований получим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = a_{15}^{(1)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + a_{24}^{(2)}x_4 = a_{25}^{(2)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)}, \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{(2)}. \end{array} \right. , \quad (1.11)$$

где $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{2j}^{(2)} a_{i2}^{(1)}$, $j = \overline{3,5}$, $i = \overline{3,4}$.

$a_{33}^{(2)} \neq 0$ – ведущий элемент третьей строки, тогда, разделив на него третье уравнение системы (1.11), получим

$$x_3 + a_{34}^{(3)} x_4 = a_{35}^{(3)}, \quad a_{3j}^{(3)} = \frac{a_{3j}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}, \quad j = \overline{4,5}. \quad (1.12)$$

Используя уравнение (1.12), исключим переменную x_3 из четвертого уравнения системы (1.13). В результате получим

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + a_{14}^{(1)} x_4 = a_{15}^{(1)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + a_{24}^{(2)} x_4 = a_{25}^{(2)}, \\ x_3 + a_{34}^{(3)} x_4 = a_{35}^{(3)}, \\ a_{44}^{(3)} x_4 = a_{45}^{(3)}. \end{array} \right. , \quad (1.14)$$

$$a_{4j}^{(3)} = a_{4j}^{(2)} - a_{3j}^{(3)} a_{43}^{(2)}, \quad j = \overline{4,5}.$$

Считая $a_{44}^{(3)} \neq 0$ и учитывая неравенство нулю ведущих элементов первой, второй и третьей строк, то есть $a_{11}^{(0)} \neq 0$, $a_{22}^{(1)} \neq 0$ и $a_{33}^{(2)} \neq 0$, получим систему линейных алгебраических уравнений, эквивалентную системе (1.7), но имеющую треугольную матрицу:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + a_{14}^{(1)} x_4 = a_{15}^{(1)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + a_{24}^{(2)} x_4 = a_{25}^{(2)}, \\ x_3 + a_{34}^{(3)} x_4 = a_{35}^{(3)}, \\ x_4 = a_{45}^{(4)}. \end{array} \right. , \quad (1.15)$$

$$\text{где } a_{45}^{(4)} = \frac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}.$$

Из системы уравнений (1.15) легко найти последовательно значения неизвестных x_4 , x_3 , x_2 и x_1 :

$$\begin{aligned} x_4 &= a_{45}^{(4)}, \quad x_3 = a_{35}^{(3)} - a_{34}^{(3)} \cdot x_4, \\ x_2 &= a_{25}^{(2)} - a_{24}^{(2)} \cdot x_4 - a_{23}^{(2)} \cdot x_3, \quad x_1 = a_{15}^{(1)} - a_{14}^{(1)} \cdot x_4 - a_{13}^{(1)} \cdot x_3 - a_{12}^{(1)} \cdot x_2. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Процесс преобразования исходной системы уравнений (1.11) к системе уравнений (1.15) с треугольной матрицей называют «прямым ходом», а процесс вычисления решения системы с помощью равенств (1.16) – «обратным ходом».

Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса «вручную» можно представить в виде таблицы (таблица 1.1).

Последний столбец в таблице 1.1 введен для контроля вычислений. В него заносится значение $a_{i6}^{(j)}$, равное сумме остальных элементов i -й строки, взятой с противоположным знаком: $a_{i6}^{(j)} = -\left(a_{i1}^{(j)} + a_{i2}^{(j)} + a_{i3}^{(j)} + a_{i4}^{(j)} + a_{i5}^{(j)}\right)$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{0,3}$. В этом случае сумма всех элементов каждой из четырех строк будет равна нулю. Поэтому можно сказать, что они образуют расширенную матрицу. В процессе исключения переменных из соответствующих уравнений с элементами этого столбца выполняются те же самые действия, что над элементами, описывающими исходную систему уравнений. Для выполнения вычислений используют формулы:

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik-1}^{(k-1)} \cdot a_{k-1j}^{(k)}, \quad (1.17)$$

где $k+1 \leq j \leq 6$, $k+1 \leq i \leq 4$, $k = \overline{1,4}$. При этом сумма элементов получаемых расширенных строк должна оставаться равной нулю, так как значения всех элементов последующей строки вычисляются при помощи линейных операций над элементами предыдущей строки. Например,

$$1 + a_{23}^{(2)} + a_{24}^{(2)} + a_{25}^{(2)} + a_{26}^{(2)} = 0. \quad (1.18)$$

В том случае, если решением системы линейных уравнений (1.7) являются приближенные числа, то отклонение левой части равенства (1.18) от нуля находится в пределах ошибки округления.

Значения неизвестных X_4 , X_3 , X_2 и X_1 вычисляются по формулам (3.17), а значения величин $\bar{X}_4$, $\bar{X}_3$, $\bar{X}_2$ и $\bar{X}_1$ – используя те же формулы, но в них производится замена $a_{k5}^{(k)}$ на $a_{k6}^{(k)}$ ($k = \overline{1,4}$), x_i – на $\bar{X}_i$.

При отсутствии ошибок округления сумма элементов в последних четырех строках таблицы 1.1 должна быть равна нулю, то есть $1 + x_i + \bar{x}_i = 0$, $(i = \overline{1,4})$.

В таблице 1.1 отсутствуют элементы $a_{45}^{(4)}$ и $a_{46}^{(4)}$, так как они совпадают со значениями x_4 и $\bar{x}_4$.

Таблица 1.1

$a_{11}^{(0)}$	$a_{12}^{(0)}$	$a_{13}^{(0)}$	$a_{14}^{(0)}$	$a_{15}^{(0)}$	$a_{16}^{(0)}$
$a_{21}^{(0)}$	$a_{22}^{(0)}$	$a_{23}^{(0)}$	$a_{24}^{(0)}$	$a_{25}^{(0)}$	$a_{26}^{(0)}$
$a_{31}^{(0)}$	$a_{32}^{(0)}$	$a_{33}^{(0)}$	$a_{34}^{(0)}$	$a_{35}^{(0)}$	$a_{36}^{(0)}$
$a_{41}^{(0)}$	$a_{42}^{(0)}$	$a_{43}^{(0)}$	$a_{44}^{(0)}$	$a_{45}^{(0)}$	$a_{46}^{(0)}$
1	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$a_{14}^{(1)}$	$a_{15}^{(1)}$	$a_{16}^{(1)}$
	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$
	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	$a_{36}^{(1)}$
	$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}$	$a_{46}^{(1)}$
	1	$a_{23}^{(2)}$	$a_{24}^{(2)}$	$a_{25}^{(2)}$	$a_{26}^{(2)}$
		$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$
		$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}$	$a_{46}^{(2)}$
		1	$a_{34}^{(3)}$	$a_{35}^{(3)}$	$a_{36}^{(3)}$
			$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}$
			1	x_4	$\bar{x}_4$
		1		x_3	$\bar{x}_3$
	1			x_2	$\bar{x}_2$
1				x_1	$\bar{x}_1$

Значения ведущих элементов $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$ и коэффициентов системы уравнений (1.7) можно вычислить при помощи формул (1.9) (в этом случае изменятся только соотношения для параметра k – $k+1 \leq j \leq n+1$, $k+1 \leq i \leq n+1$, $k = \overline{1, n}$).

Для вычисления решений системы линейных алгебраических уравнений используются формулы:

$$x_n = a_{n,n+1}^{(n)}, \quad x_i = a_{i,n+1}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j, \quad i = \overline{n-1, 1}.$$

Пример 3.1. Используя метод Гаусса, найти решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}.$$

Найдем решение данной системы уравнений двумя способами:

- 1) с помощью расчетной таблицы;
- 2) используя механизм матричных вычислений.

Решение системы уравнений с помощью механизма матричных вычислений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & -15 \\ 0 & 7 & 1 & -23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & 1 & -23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Из последней матрицы следует, что $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ и $x_3 = -2$.

Решение системы уравнений с помощью расчетной таблицы:

1	2	1	-7	3
2	1	-1	1	-3
3	-1	2	2	-6
1	2	1	-7	3
	3	3	-15	9
	7	1	-23	15
	1	1	-5	3
		6	-12	6
		1	-2	1
	1		-3	2
1			1	-2

Таким образом, из таблицы видно, что $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ и $x_3 = -2$.

Задание 1. Найдите решение системы линейных алгебраических уравнений. Основными методами решения считать:

- 1) правило Крамера,
- 2) при условии, что эта система задана в виде матриц,
- 3) методом Гаусса.

Варианты заданий

Вариант для выполнения заданий, приведенных в практической работе, определяется номером студента в подгруппе.

Таблица 1.3

Вариант 1 а) $\begin{cases} 0.005x_1 + 0.004x_2 + 0.15x_3 = 0.057 \\ -0.09x_1 - 0.033x_2 + 0.0067x_3 - 0.098x_4 = -0.098 \\ 0.15x_1 + 0.033x_2 + 0.05x_3 = 0.183 \\ 2.857x_1 + 0.1x_2 - 0.3x_3 + 0.025x_4 = -0.041 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 100x_1 - 14x_2 + 13x_3 = -1232 \\ 0.5x_1 + 200x_2 + 9.5x_3 = 326 \\ -9x_1 + 9x_2 + 300x_3 = 4335 \end{cases}$
Вариант 2 а) $\begin{cases} 0.01x_1 + 0.008x_2 + 0.2x_3 + 0.05x_4 = 0.186 \\ -0.08x_1 + 0.013x_2 + 0.05x_4 = -0.126 \\ 0.25x_1 + 0.067x_2 + 0.067x_3 + 0.069x_4 = 0.646 \\ 0.0057x_1 + 0.15x_2 - 0.267x_3 + 0.05x_4 = 0.0086 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 200x_1 - 13x_2 + 12x_3 = -2470 \\ x_1 + 400x_2 + 9x_3 = 904 \\ -8x_1 + 8x_2 + 600x_3 = 7920 \end{cases}$
Вариант 3 а) $\begin{cases} 0.015x_1 + 0.012x_2 + 0.25x_3 + 0.1x_4 = 0.388 \\ -0.07x_1 + 0.033x_2 + 0.02x_3 + 0.05x_4 = -0.084 \\ 0.35x_1 + 0.1x_2 + 0.075x_3 + 0.11x_4 = 1.357 \\ 0.0086x_1 + 0.2x_2 - 0.233x_3 + 0.075x_4 = 0.149 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 300x_1 - 12x_2 + 11x_3 = -3504 \\ 1.5x_1 + 600x_2 + 8.5x_3 = 1884 \\ -7x_1 + 7x_2 + 900x_3 = 1091 \end{cases}$
Вариант 4 а) $\begin{cases} 0.02x_1 + 0.016x_2 + 0.3x_3 + 0.15x_4 = 0.662 \\ -0.06x_1 + 0.067x_2 + 0.027x_3 + 0.1x_4 = 0.029 \\ 0.45x_1 + 0.133x_2 + 0.08x_3 + 0.139x_4 = 2.312 \\ 0.011x_1 + 0.25x_2 - 0.2x_3 + 0.1x_4 = 0.379 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 400x_1 - 11x_2 + 10x_3 = -4334 \\ 2x_1 + 800x_2 + 8x_3 = 3226 \\ -6x_1 + 6x_2 + 1200x_3 = 13290 \end{cases}$
Вариант 5 а)	б)

$\begin{cases} 0.025x_1 + 0.02x_2 + 0.35x_3 + 0.2x_4 = 1.008 \\ -0.05x_1 + 0.1x_2 + 0.033x_3 + 0.125x_4 = 0.212 \\ 0.55x_1 + 0.167x_2 + 0.083x_3 + 0.161x_4 = 3.507 \\ 0.014x_1 + 0.3x_2 - 0.167x_3 + 0.125x_4 = 0.7 \end{cases}$	$\begin{cases} 500x_1 - 10x_2 + 9x_3 = -4960 \\ 2.5x_1 + 1000x_2 + 7.5x_3 = 5050 \\ -5x_1 + 5x_2 + 1500x_3 = 15080 \end{cases}$
Вариант 6 а) $\begin{cases} 0.03x_1 + 0.024x_2 + 0.4x_3 + 0.25x_4 = 1.427 \\ -0.04x_1 + 0.133x_2 + 0.04x_3 + 0.15x_4 = 0.465 \\ 0.65x_1 + 0.2x_2 + 0.086x_3 + 0.179x_4 = 4.94 \\ 0.017x_1 + 0.35x_2 - 0.133x_3 + 0.15x_4 = 1.111 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 600x_1 - 9x_2 + 8x_3 = -5382 \\ 3x_1 + 1200x_2 + 7x_3 = 72360 \\ -4x_1 + 4x_2 + 1800x_3 = 16260 \end{cases}$
Вариант 7 а) $\begin{cases} 0.035x_1 + 0.028x_2 + 0.45x_3 + 0.3x_4 = 1.918 \\ -0.03x_1 + 0.167x_2 + 0.047x_3 + 0.175x_4 = 0.788 \\ 0.75x_1 + 0.233x_2 + 0.088x_3 + 0.195x_4 = 6.611 \\ 0.02x_1 + 0.4x_2 - 0.1x_3 + 0.175x_4 = 1.613 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 700x_1 - 8x_2 + 7x_3 = -5600 \\ 3.5x_1 + 1400x_2 + 6.5x_3 = 9824 \\ -3x_1 + 3x_2 + 2100x_3 = 16850 \end{cases}$
Вариант 8 а) $\begin{cases} 0.04x_1 + 0.032x_2 + 0.5x_3 + 0.35x_4 = 2.451 \\ -0.02x_1 + 0.2x_2 + 0.053x_3 + 0.2x_4 = 1.182 \\ 0.55x_1 + 0.267x_2 + 0.089x_3 + 0.208x_4 = 8.52 \\ 0.023x_1 + 0.45x_2 - 0.067x_3 + 0.2x_4 = 2.205 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 800x_1 - 7x_2 + 6x_3 = -5614 \\ 4x_1 + 1600x_2 + 6x_3 = 1280 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2400x_3 = 16830 \end{cases}$
Вариант 9 а) $\begin{cases} 0.045x_1 + 0.036x_2 + 0.55x_3 + 0.4x_4 = 3.117 \\ -0.01x_1 + 0.233x_2 + 0.06x_3 + 0.225x_4 = 1.646 \\ 0.95x_1 + 0.3x_2 + 0.09x_3 + 0.22x_4 = 10.664 \\ 0.026x_1 + 0.5x_2 - 0.033x_3 + 0.225x_4 = 2.888 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 900x_1 - 6x_2 + 5x_3 = -5424 \\ 4.5x_1 + 1800x_2 + 5.5x_3 = 16210 \\ -x_1 + x_2 + 2700x_3 = 16220 \end{cases}$
Вариант 10 а) $\begin{cases} 0.05x_1 + 0.04x_2 + 0.6x_3 + 0.45x_4 = 3.825 \\ 0.267x_2 + 0.067x_3 + 0.25x_4 = 2.181 \\ 1.050x_1 + 0.333x_2 + 0.091x_3 + 0.023x_4 = 13.045 \\ 0.029x_1 + 0.55x_2 + 0.25x_4 = 3.661 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 1000x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -5030 \\ 5x_1 + 2000x_2 + 2x_3 = 20000 \\ 3000x_3 = 15000 \end{cases}$
Вариант 11 а) $\begin{cases} 0.055x_1 + 0.044x_2 + 0.065x_3 + 0.5x_4 = 4.605 \\ 0.01x_1 + 0.3x_2 + 0.075x_3 + 0.275x_4 = 2.785 \\ 1.15x_1 + 0.367x_2 + 0.092x_3 + 0.24x_4 = 15.662 \\ 0.031x_1 + 0.6x_2 + 0.033x_3 + 0.75x_4 = 4.524 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 1100x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -4432 \\ 5.5x_1 + 2200x_2 + 4.5x_3 = 24200 \\ x_1 - x_2 + 3300x_3 = 13190 \end{cases}$
Вариант 12	б) $\begin{cases} 1200x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3630 \\ 6x_1 + 2400x_2 + 4x_3 = 2879 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3600x_3 = 1077 \end{cases}$

$\text{a)} \begin{cases} 0.06x_1 + 0.048x_2 + 0.7x_3 + 0.55x_4 = 5.458 \\ 0.02x_1 + 0.333x_2 + 0.08x_3 + 0.3x_4 = 3.46 \\ 1.25x_1 + 0.4x_2 + 0.092x_3 + 0.248x_4 = 18.515 \\ 0.034x_1 + 0.65x_2 + 0.067x_3 + 0.3x_4 = 5.478 \end{cases}$	
Вариант 13 $\text{a)} \begin{cases} 0.065x_1 + 0.052x_2 + 0.75x_3 + 0.6x_4 = 6.383 \\ 0.03x_1 + 0.367x_2 + 0.087x_3 + 0.325x_4 = 4.205 \\ 1.35x_1 + 0.433x_2 + 0.093x_3 + 0.256x_4 = 21.603 \\ 0.037x_1 + 0.7x_2 + 0.1x_3 + 0.325x_4 = 6.522 \end{cases}$	$\text{б)} \begin{cases} 1300x_1 - 2x_2 + x_3 = -2624 \\ 6.5x_1 + 2600x_2 + 3.5x_3 = 3379 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3900x_3 = 7755 \end{cases}$
Вариант 14 $\text{a)} \begin{cases} 0.07x_1 + 0.056x_2 + 0.8x_3 + 0.65x_4 = 7.38 \\ 0.04x_1 + 0.4x_2 + 0.093x_3 + 0.35x_4 = 5.021 \\ 1.45x_1 + 0.467x_2 + 0.093x_3 + 0.264x_4 = 24.926 \\ 0.04x_1 + 0.075x_2 + 0.133x_3 + 0.35x_4 = 7.657 \end{cases}$	$\text{б)} \begin{cases} 1400x_1 - x_2 = -1414 \\ 7x_1 + 2800x_2 + 3x_3 = 39200 \\ 4x_1 - 4x_2 + 4200x_3 = 4140 \end{cases}$
Вариант 15 $\text{a)} \begin{cases} 0.075x_1 + 0.06x_2 + 0.85x_3 + 0.7x_4 = 8.45 \\ 0.05x_1 + 0.433x_2 + 0.1x_3 + 0.375x_4 = 5.906 \\ 1.55x_1 + 0.5x_2 + 0.094x_3 + 0.248x_4 = 28.484 \\ 0.043x_1 + 0.8x_2 + 0.167x_3 + 0.375x_4 = 8.882 \end{cases}$	$\text{б)} \begin{cases} 1500x_1 - x_3 = 0 \\ 7.5x_1 + 3000x_2 + 2.5x_3 = 45000 \\ 5x_1 - 5x_2 + 4500x_3 = -75 \end{cases}$
Вариант 16 $\text{a)} \begin{cases} 0.08x_1 + 0.064x_2 + 0.9x_3 + 0.75x_4 = 9.592 \\ 0.06x_1 + 0.467x_2 + 0.107x_3 + 0.4x_4 = 6.862 \\ 1.65x_1 + 0.533x_2 + 0.094x_3 + 0.277x_4 = 32.278 \\ 0.046x_1 + 0.85x_2 + 0.2x_3 + 0.4x_4 = 10.198 \end{cases}$	$\text{б)} \begin{cases} 1600x_1 + x_2 - 2x_3 = 1618 \\ 8x_1 + 3200x_2 + 2x_3 = 5121 \\ 6x_1 - 6x_2 + 4800x_3 = -4890 \end{cases}$
Вариант 18 $\text{a)} \begin{cases} 0.09x_1 + 0.072x_2 + x_3 + 0.85x_4 = 12.093 \\ 0.08x_1 + 0.533x_2 + 0.12x_3 + 0.45x_4 = 8.985 \\ 1.85x_1 + 0.6x_2 + 0.095x_3 + 0.289x_4 = 40.569 \\ 0.051x_1 + 0.95x_2 + 0.267x_3 + 0.45x_4 = 13.101 \end{cases}$	$\text{б)} \begin{cases} 1800x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5466 \\ 9x_1 + 3600x_2 + x_3 = 6482 \\ 8x_1 - 8x_2 + 5400x_3 = -16320 \end{cases}$
Вариант 19 $\text{a)} \begin{cases} 0.095x_1 + 0.076x_2 + 1.05x_3 + 0.9x_4 = 13.452 \\ 0.09x_1 + 0.567x_2 + 0.127x_3 + 0.475x_4 = 10.152 \\ 1.95x_1 + 0.633x_2 + 0.095x_3 + 0.294x_4 = 45.067 \\ 0.054x_1 + x_2 + 0.3x_3 + 0.475x_4 = 14.688 \end{cases}$	$\text{б)} \begin{cases} 1900x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 76960 \\ 9.5x_1 + 3800x_2 + 0.5x_3 = 72240 \\ 9x_1 - 9x_2 + 5700x_3 = -22490 \end{cases}$
Вариант 20	б)

а)	$\begin{cases} 0.1x_1 + 0.08x_2 + 1.1x_3 + 0.95x_4 = 14.883 \\ 0.1x_1 + 0.6x_2 + 0.133x_3 + 0.5x_4 = 11.389 \\ 2.05x_1 + 0.667x_2 + 0.095x_3 + 0.3x_4 = 49.799 \\ 0.057x_1 + 1.05x_2 + 0.333x_3 + 0.5x_4 = 16.365 \end{cases}$	$\begin{cases} 2100x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 12770 \\ 10.5x_1 + 4200x_2 - 0.5x_3 = 88270 \\ 11x_1 - 11x_2 + 6300x_3 = -37970 \end{cases}$
----	--	---

Контрольные вопросы

1. Классифицируйте методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
2. Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений, заданных в матричной форме.
3. Метод Гаусса как один из методов решения систем линейных алгебраических уравнений.

Практическая работа 2.

Приближенные методы решения систем линейных уравнений

Цель и содержание: изучить основные приближенные методы решения систем линейных уравнений.

Организационная форма занятий: решение проблемных задач, разбор конкретных ситуаций

Вопросы для обсуждения на практическом занятии: изучение методов решения линейных уравнений: метод простой итерации, метод Зейделя.

Формируемые компетенции: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПКД-1.1 ОПКД-1.2

Теоретическая часть

Метод простой итерации

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений

$$x = Bx + b, \quad (2.1)$$

где B – квадратная матрица порядка n , составленная из коэффициентов при неизвестных, $b \in R^n$ – вектор, определяющий матрицу-столбец свободных членов.

Метод простых итераций при решении систем линейных уравнений заключается в следующем. Вначале выбирается произвольный вектор $x^0 \in R^n$, который считают *начальным* или *нулевым приближением*. На практике в качестве нулевого приближения чаще всего выступает вектор-столбец свободных членов. На втором этапе решения при помощи рекуррентных формул строится итерационная последовательность векторов:

$$x^k = Bx^{k-1} + b, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Решение системы линейных уравнений методом простой итерации хорошо иллюстрирует следующая теорема.

Теорема 3.1. Если $\|B\| < 1$, то система уравнений (2.1) имеет единственное решение x^* и итерации (последовательные приближения) сходятся к этому решению со скоростью геометрической прогрессии.

Доказательство. Пусть x^* – решение системы уравнений (2.2), то есть имеет место равенство:

$$x^* = Bx^* + b. \quad (2.3)$$

Тогда, используя неравенство треугольника для нормы вектора и неравенство $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, получим

$$\|x^*\| \leq \|Bx^*\| + \|b\| \leq \|B\| \cdot \|x^*\| + \|b\|. \quad (2.4)$$

Неравенство (2.4) равносильно

$$(1 - \|B\|) \cdot \|x^*\| \leq \|b\|, \quad (2.5)$$

так как $1 - \|B\| > 0$, то неравенство (2.5) можно переписать в виде:

$$\|x^*\| \leq \frac{\|b\|}{(1 - \|B\|)}. \quad (2.6)$$

Из последнего неравенства следует, что однородная система уравнений $x = Bx$ имеет единственное решение, то есть норма матрицы-столбца свободных членов равна нулю $\|b\| = 0$. Таким образом, доказано существование и единственность решения системы уравнений (2.1) при любых значениях столбца свободных членов b .

Пусть r^k – погрешность k -го последовательного приближения:

$$r^k = x^* - x^k, \quad (2.7)$$

где x^* – решение системы уравнений (2.1).

Вычитая из равенства (2.5) равенство (2.6), получим

$$x^* - x^k = B(x^* - x^{k-1}), \quad (2.8)$$

то есть $r^k = Br^{k-1}$.

Следовательно,

$$r^k = B^k r^0, \quad (2.9)$$

здесь B^k – k -ая степень матрицы B , r^0 – начальная погрешность (погрешность нулевого приближения).

Тогда, используя формулы $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ и $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, равенство (2.9), можно переписать в виде:

$$\|r^k\| \leq \|B^k\| \cdot \|r^0\| \leq \|B\|^k \cdot \|r^0\|, \quad (2.10)$$

то есть норма погрешности r^k стремится к нулю – $r^k = x^* - x^k \rightarrow 0$ – при стремлении k к бесконечности – $k \rightarrow \infty$ – не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \|B\| < 1$.

Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. Пусть система (2.2) имеет единственное решение. Последовательные приближения, описываемые равенством (2.3), сходятся к решению системы (2.2) при любом начальном приближении x^0 тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы B по модулю меньше 1.

Оценка погрешности решения системы линейных уравнений методом простой итерации

Пусть норма матрицы B , составленной из коэффициентов при неизвестных, меньше 1, то есть $\|B\| < 1$. Тогда по теореме 2.1 система линейных алгебраических уравнений, задаваемая с помощью равенства (2.1), будет иметь единственное решение, удовлетворяющее условию (2.3). Из равенств (2.9) и (2.10) следует

$$x^* - x^{k-1} = x^k - x^{k-1} + B(x^* - x^{k-1}). \quad (2.11)$$

Применяя к последнему равенству теорию норм, получим

$$\|x^* - x^{k-1}\| \leq \|x^k - x^{k-1}\| + \|B(x^* - x^{k-1})\| \leq \|x^k - x^{k-1}\| + \|B\| \cdot \|x^* - x^{k-1}\|$$

или

$$(1 - \|B\|) \cdot \|x^* - x^{k-1}\| \leq \|x^k - x^{k-1}\|. \quad (2.12)$$

Так как $1 - \|B\| > 0$, то неравенство (2.12) можно заменить равносильным ему неравенством:

$$\|x^* - x^{k-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \cdot \|x^k - x^{k-1}\|. \quad (2.13)$$

Учитывая равенство (2.13), получим

$$\|x^* - x^k\| \leq \|B\| \cdot \|x^* - x^{k-1}\|. \quad (2.14)$$

Из неравенств (2.13) и (2.14) вытекает неравенство, с помощью которого можно оценить погрешность решения системы линейных уравнений методом простой итерации:

$$\|x^* - x^k\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \|x^k - x^{k-1}\|. \quad (2.15)$$

Метод Зейделя

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений в матричном виде, то есть может быть описана равенством

$$Ax = b, \quad (2.16)$$

причем матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ такова, что все ее диагональные элементы отличны от нуля – $a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, n}$.

Выполнив деление i -го уравнения системы уравнений (2.16) на коэффициент при неизвестном $x_i - a_{ii}$, а затем перенос всех неизвестных, кроме x_i , в правую часть, получим систему линейных алгебраических уравнений, эквивалентную данной:

$$x = Cx + d, \quad (2.17)$$

$$\text{где } d = (d_1, d_2, \dots, d_n), \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad C = (c_{ij})_{i,j=1}^n, \quad c_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j \neq i \\ 0, & i = j \end{cases}.$$

Сущность метода Зейделя при решении систем линейных алгебраических уравнений заключается в следующем: вначале выбирается начальное (нулевое) приближение x^0 , затем каждая последующая итерация может быть найдена с помощью рекуррентного соотношения:

$$x^k = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^k + \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_j^{k-1} + d_i, \quad (2.18)$$

где x_i^0 – произвольны, $i = \overline{1, n}$, k – число итераций, $k = 1, 2, \dots$, причем число итераций выбирается таким образом, чтобы было получено приближенное решение с наименьшей погрешностью.

При решении систем алгебраических уравнений построение итераций по методу Зейделя (2.18) отличается от простых итераций (2.2) тем, что при нахождении i -й компоненты k -го приближения сразу используются найденные компоненты k -го приближения с меньшими номерами.

Условия сходимости решений при использовании метода Зейделя и метода простых итераций не совпадают. Метод Зейделя дает более быструю сходимость, что доказывает следующая теорема.

Теорема 3.3. Для существования единственного решения системы (2.16) и сходимости метода Зейделя достаточно выполнения хотя бы одного из двух условий:

а) $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = \overline{1, n},$

б) матрица A – симметричная положительно определенная, то есть все ее собственные значения положительны.

Задания к лабораторной работе

Задание 1. Найдите решение системы линейных алгебраических уравнений. Основными методами решения считать:

- 1) методом простой итерации,
- 2) методом Зейделя.

Варианты заданий

Вариант для выполнения заданий к практической работе 2 использовать соответствующие задания, приведенные в практической работе 1.

Контрольные вопросы

1. Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений методом простой итерации

2. Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений методом Зейделя.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3

Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель и содержание: изучить основные приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Организационная форма занятий: решение проблемных задач, разбор конкретных ситуаций

Вопросы для обсуждения на практическом занятии: изучение методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений линейных уравнений: метод Пикара, метод Эйлера, методы Рунге-Кутты, метод Адамса.

Формируемые компетенции: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПКД-1.1 ОПКД-1.2

Теоретическая часть

Соотношение вида

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (3.1)$$

называют *дифференциальным уравнением первого порядка*.

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (3.2)$$

где $f(x, y)$ – заранее определенная функция двух переменных, называется обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка разрешенным относительно производной.

Решением дифференциального уравнения на интервале (a, b) называется непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$, которая на этом интервале превращает уравнение в верное тождество.

С учетом определения для решения дифференциального уравнения равенства (3.1) и (3.2) можно переписать в виде:

$$F\left(x, \varphi(x), \frac{d\varphi(x)}{dx}\right) = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x)). \quad (3.4)$$

Равенство (3.3) называется решением уравнения (3.4) в неявной форме (или интегралом уравнения (3.2)), если это равенство определяет y как функцию от x – $y = \varphi(x)$, являющуюся решением уравнения (3.2).

График решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (3.2) называют интегральной кривой этого уравнения.

Фазовой кривой или траекторией дифференциального уравнения будем называть проекцию графика решения на ось ординат.

Задачу о нахождении решения обыкновенного дифференциального уравнения (3.2) при заданном начальном условии называют задачей Коши.

Задача Коши: найти решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (3.2), удовлетворяющее начальному условию:

$$\varphi(x_0) = y_0. \quad (3.5)$$

Существование и единственность решения задачи Коши для дифференциальных уравнений (3.1) и (3.2) обеспечивается теоремой Пикара.

Теорема Пикара. Если функция f определена и непрерывна в некоторой области G , определяемой неравенствами

$$|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \quad (3.6)$$

и удовлетворяет в этой области условию Липшица по переменной y :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|, \quad (3.7)$$

то на некотором отрезке $|x - x_0| \leq h$, где h – положительное число ($h > 0$), существует, и притом только одно, решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (3.2), удовлетворяющее начальному условию $y_0 = \varphi(x_0)$.

В условии теоремы Пикара M – постоянная Липшица, в общем случае зависящая от переменных a и b . Если $f(x, y)$ имеет в области G ограниченную производную $f'_y(x, y)$, то при условии, что пара чисел (x, y) не принадлежит области G , можно принять

$$M = \max |f'_y(x, y)|. \quad (3.8)$$

Теорема 3.1. Если функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема m раз по переменным x, y в двумерной замкнутой области $\overline{G}$, $f \in C_m(\overline{G})$, то всякое решение $y(x)$ уравнения (3.2), расположенное в $\overline{G}$, $m + 1$ раз дифференцируемо по x .

Для определенности будем считать, что $\overline{G}$ является замкнутым прямоугольником:

$$\overline{G} = \{(x, u) : x_0 \leq x \leq x_0 + \ell, a \leq u \leq b\}.$$

Предположим, что $f \in C_1(\overline{G})$ и существует функция $y = y(x)$, являющаяся решением задачи Коши (3.2), (3.5), определенная на отрезке $[x_0, x_0 + \ell]$, причем

$$a < y(x) < b, \quad x \in [x_0, x_0 + \ell]. \quad (3.9)$$

Единственность решения задачи Коши в этом случае вытекает из условия $f \in C_1(\overline{G})$ и из теоремы 3.1 следует справедливость равенства $u \in C_2[x_0, x_0 + \ell]$, причем

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

$$y''(x) = f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x)) \cdot f(x, y(x)). \quad (3.10)$$

Приближенное решение задачи Коши (3.2), (3.5) можно найти на конечном множестве точек $[x_0, x_0 + \ell]$, называемом *сеткой*. При этом сетка выбирается таким образом, что выполняются равенства: $\omega_h = \{x_j\}_{j=0}^N$, $x_j = x_0 + j \cdot h$, $h = \ell/N$, N – натуральное число, то есть $N \in \mathbb{N}$.

Функция ψ , заданная на сетке ω_h , называется *сеточной функцией*. Для ее обозначения используют равенство – $\psi_j = \psi(x_j)$. Для пространства сеточных функций справедливо следующее выражение для нормы

$$\|\psi\|_h = \max_{0 \leq j \leq N} |\psi_j|. \quad (3.11)$$

При условии, что решение задачи Коши (3.2), (3.5) определено на отрезке $[x_0, x_0 + \ell]$. Тогда будет существовать решение этой задачи и на сетке ω_h . В этом случае $\|y\|_h$ – норма сеточной функции, которая будет совпадать на сетке ω_h с функцией $y(x)$.

Дифференциальным уравнением n -го порядка называют соотношение вида:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (3.12)$$

В равенстве (3.12) x – независимая переменная, $y = y(x)$ – неизвестная функция переменной x , $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}, \dots, y^{(n)})$ – заданная функция переменных $x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}$.

Задача о нахождении решений дифференциального уравнения (3.12), удовлетворяющих начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (3.13)$$

где $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа, называется *задачей Коши для системы дифференциальных уравнений*.

Все методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений можно разделить на три группы: аналитические, графические и численные методы.

Метод Пикара

С помощью метода Пикара приближенное решение дифференциального уравнения (3.2) можно представить в виде функции, заданной аналитически.

Предположим, что согласно условию теоремы Пикара (теоремы о единственности решения) необходимо найти решение дифференциального уравнения (3.2) с начальным условием $y_0 = \varphi(x_0)$.

Вначале заменим дифференциальное уравнение (3.2) равносильным ему уравнением:

$$dy = f(x, y)dx. \quad (3.14)$$

Выполнив интегрирование обеих частей равенства (3.14) по переменной x – от X_0 до x , получим

$$\int_{y_0}^y dy = \int_{x_0}^x f(x, y)dx. \quad (3.15)$$

После вычисления интеграла, стоящего в правой части, равенство (3.15) примет вид:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y)dx. \quad (3.16)$$

Решение интегрального уравнения (3.16) будет удовлетворять не только дифференциальному уравнению (3.2), но и начальному условию $y_0 = \varphi(x_0)$.

Полагая $x = x_0$, можем представить начальное условие $y_0 = \varphi(x_0)$ в виде

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(x, y)dx = y_0.$$

Решение интегрального уравнения (3.16) может быть найдено методом последовательных приближений.

Положив $y=y_0$, найдем из равенства (3.16) первое последовательное приближение

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx. \quad (3.17)$$

Так как интеграл, стоящий в правой части равенства (3.17), зависит от переменной x , то после его вычисления получим аналитическое выражение для приближения y_1 как для функции от x .

Далее заменим в уравнении (3.16) y найденным значением y_1 , в результате чего получим второе приближение:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx. \quad (3.18)$$

В зависимости от порядка решаемого дифференциального уравнения изменяется количество последовательных приближений. По аналогии с равенствами (3.17) и (3.18) для вычисления n -го последовательного приближения можно воспользоваться итерационной формулой:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

Применение формулы (3.19) для вычисления последовательных приближений позволяет получить последовательность функций

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x). \quad (3.20)$$

Поскольку по условию теоремы Пикара функция f непрерывна в области G , то она ограничена и в замкнутой области $\bar{G}$, принадлежащей области G , то есть $\bar{G} \subset G$, содержащей точку (x_0, y_0) :

$$|f(x, y)| \leq N. \quad (3.21)$$

Применяя к уравнению (3.19) принцип сжимающих отображений, получим, что последовательность (3.20) сходится по метрике $\rho(\varphi_1, \varphi_2)$, определяемой равенством $\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \max |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$, в пространстве непрерывных функций φ , определенных на сегменте $|x - x_0| \leq d$, таких что $|\varphi(x) - y_0| \leq Nd$.

Предел последовательности $\{y_i(x)\}$, $i = \overline{1, n}$, является решением интегрального уравнения (3.16), а, следовательно, и дифференциального уравнения (3.2) с начальным условием $y_0 = \varphi(x_0)$.

Из вышесказанного следует, что k -й член последовательности $\{y_i(x)\}$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющей равенству (3.20), является последовательным приближением к точному решению дифференциального уравнения (3.2) с определенной степенью точности.

Оценка погрешности k -го приближения задается равенством:

$$|y(x) - y_k(x)| \leq M^k \cdot N \cdot \frac{d^{k+1}}{(k+1)!}, \quad (3.22)$$

где M – константа, удовлетворяющая условию Липшица (3.8), N – точная верхняя граница абсолютной величины функции f из неравенства (3.21), то есть $N = \sup |f(x, y)|$, величина d в этом случае используется для определения окрестности $|x - x_0| \leq d$, при этом ее значение может быть вычислено по формуле:

$$d = \min \left(a, \frac{b}{N} \right). \quad (3.23)$$

Метод Эйлера

В основе метода Эйлера лежит представление обыкновенного дифференциального уравнения в виде графика (рисунок 3.1).

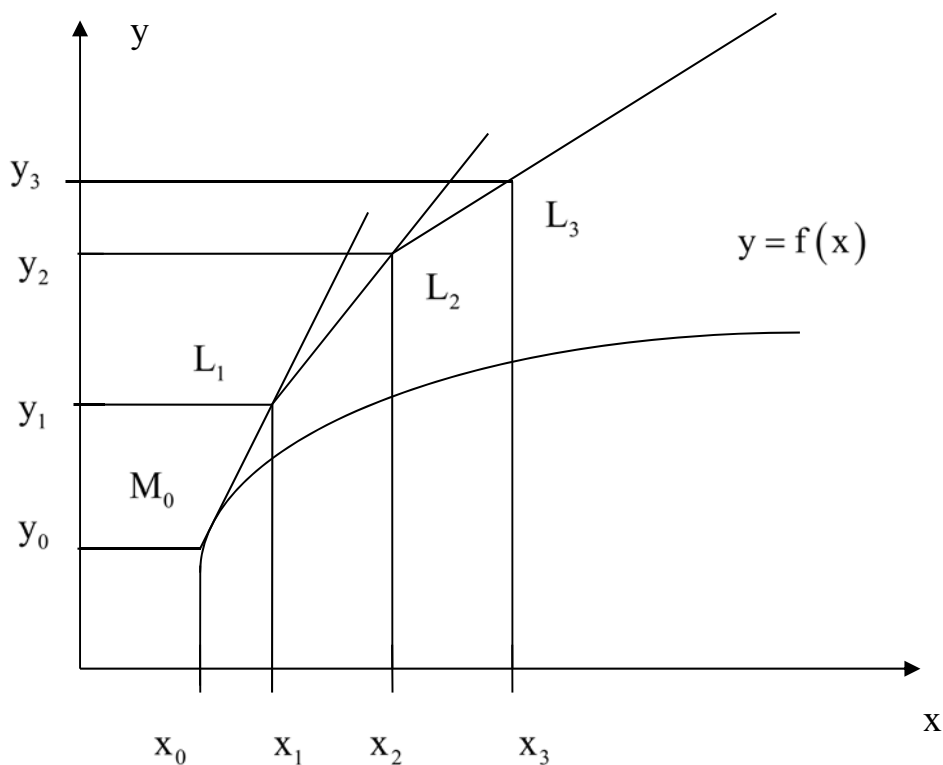


Рисунок 3.1 – Графическая иллюстрация метода Эйлера

Пусть задано дифференциальное уравнение (3.2) с начальным условием $y_0 = y(x_0)$.

Выбрав в качестве величины изменения переменной x достаточно малое значение h , построим в декартовой системе координат, начиная с точки x_0 , систему равноотстоящих точек, таких что $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, \dots$.

При построении решения дифференциального уравнения в этом случае вместо интегральной кривой на отрезке $[x_0, x_1]$ рассмотрим отрезок касательной к ней, проходящей через точку M_0 с координатами (x_0, y_0) . Эта касательная описывается уравнением:

$$y = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0). \quad (3.24)$$

Полагая $x = x_1$ в уравнении касательной, получим выражение для первого последовательного приближения:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0). \quad (3.25)$$

То есть в первом случае приращение функции будет равно $\Delta y_0 = h \cdot f(x_0, y_0)$.

Если провести касательную к интегральной кривой в точке (x_1, y_1) , то она уже будет описываться равенством:

$$y = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot (x - x_1). \quad (3.26)$$

При $x = x_2$ найдем значение y_2 :

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1), \quad (9.27)$$

то есть значение y_2 получается из y_1 после добавления приращения $\Delta y_1 = h \cdot f(x_1, y_1)$.

Таким образом, построение таблицы значений функции, которая является решением уравнения (3.2), состоит в последовательном применении формул:

$$\Delta y_k = h \cdot f(x_k, y_k), \quad (3.28)$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k. \quad (3.29)$$

Так как метод Эйлера является приближенным, то он имеет свою вычислительную погрешность.

Вначале определим локальную погрешность, присутствующую на каждом шаге. Эту погрешность можно определить как разность между точным значением функции и значением касательной в этой точке. Так, например, для первого шага вычислительного эксперимента имеем

$$\begin{aligned} \Delta &= y(x_1) - (y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)) = y(x_0 + h) - (y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)) = \\ &= y_0 + y'(x_0) \cdot h + y''(x_0) \cdot \frac{h^2}{2} + \dots - (y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)) \approx y''(x_0) \cdot \frac{h^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Из равенства (3.30) следует, что локальная погрешность пропорциональна величине h^2 . Суммарная погрешность после осуществления N шагов пропорциональна величине $N \cdot O(h^2)$, то есть $\Delta_s \approx N \cdot O(h^2)$, так как $N = 1/h$.

Тогда для Δ_s имеет место равенство

$$\Delta_s = O(h), \quad (3.31)$$

то есть метод Эйлера – метод первого порядка точности.

В теории численных методов известны различные уточнения метода Эйлера. Все его модификации (метода Эйлера) направлены на уточнение направления переходов от точки (x_i, y_i) в точку (x_{i+1}, y_{i+1}) . В частности, в методе Эйлера-Коши используют следующие формулы:

$$y_{i+1}^* = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad (3.32)$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)}{2}. \quad (3.33)$$

Геометрический смысл равенств (3.32) и (3.33) заключается в определении направления интегральной кривой в исходной точке (x_i, y_i) и во вспомогательной точке (x_{i+1}, y_{i+1}^*) , а затем в качестве среднего выбирается среднее значение этих направлений.

Методы Рунге–Кутты

Методы Рунге-Кутты относятся к численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, их используют для решения задачи Коши. Основными из методов Рунге-Кутты являются следующие три метода.

1. Метод второго порядка точности. Этот метод называют еще «предикат-корректор». Для вычисления численных значений решения задачи Коши (3.2), (3.5) в этом случае используются формулы:

$$y_{j+1}^* = y_j + h \cdot f(x_j, y_j), \quad (y_0 = u_0) \quad (3.34)$$

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot \frac{f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1}^*)}{2}. \quad (3.35)$$

Использование формулы (3.34) позволяет найти «грубое» значение y_{j+1}^* по методу Эйлера, а применение формулы (3.35) уточняет (или проводит корректировку) приближенного решения в точке x_{j+1} .

Докажем далее справедливость равенств (3.34) и (3.35). Пусть $f \in C_2(\bar{G})$. Подставив в равенство (3.35) выражение для $x_{j+1} - x_j = h$, а вместо y_{j+1}^* – его выражение (3.34), получим следующее равенство для y_{j+1} :

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot \frac{f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_j + h \cdot f(x_j, y_j))}{2}. \quad (3.36)$$

Считая $f(x_{j+1}, y_j + h \cdot f(x_j, y_j))$ функцией переменной h , используя формулу Тейлора, получим

$$f(x_{j+1}, y_j + h \cdot f(x_j, y_j)) = f(x_j, y_j) + h \cdot (f'_x(x_j, y_j) + f'_y(x_j, y_j) \cdot f(x_j, y_j)) + O(h^2), \quad (3.37)$$

и, следовательно,

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot f(x_j, y_j) + \frac{h^2}{2} (f'_x(x_j, y_j) + f'_y(x_j, y_j) \cdot f(x_j, y_j)) + O(h^3). \quad (3.38)$$

При условии, что $f \in C_2(\bar{G})$, будет существовать еще одно решение $v(x)$ дифференциального уравнения (3.2), проходящее через точку (x_j, y_j) . Согласно теореме Пикара, это решение будет трижды дифференцируемо по переменной x . Учитывая равенство (3.4) для первой и второй производных функции $v(x) - v'(x)$, $v''(x)$, используя формулу Тейлора, получим

$$v_{j+1} = v(x_j) + hv'(x_j) + \frac{h^2}{2} v''(x_j) + O(h^3) = y_j + h \cdot f(x_j, y_j) + \frac{h^2}{2} (f'_x(x_j, y_j) + f'_y(x_j, y_j) \cdot f(x_j, y_j)) + O(h^3), \quad (3.39)$$

где $v_{j+1} = v(x_{j+1})$. При этом величины $O(h^3)$ в равенствах (3.38) и (3.39) не являются тождественными.

Используя равенства (3.38) и (3.39), можно сделать вывод о том, что ошибка ухода y_{j+1} с интегральной кривой, проходящей через точку (x_j, y_j) , то есть разность между решениями v_{j+1} и $y_{j+1} - v_{j+1} - y_{j+1}$, равна $O(h^3)$.

Таким образом, локальная погрешность данного метода имеет третий порядок относительно h , и, следовательно, глобальная погрешность $\|u - u\|_h$ равна $O(h^2)$.

2. Метод второго порядка точности. Данный метод второго порядка точности называют еще усовершенствованным методом Эйлера. Для вычисления значений y_j , являющихся решением задачи Коши (3.2), (3.5), в этом методе используют равенства:

$$y_{j+1/2} = y_j + \frac{h}{2} \cdot f(x_j, y_j), \quad (y_0 = u_0) \quad (3.40)$$

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot f\left(x_j + \frac{2}{2}, y_{j+1/2}\right). \quad (3.41)$$

Применяя к равенствам (3.40) и (3.41) те же самые рассуждения, что и в предыдущем случае, получим, что этот метод также имеет локальную погрешность третьего порядка точности относительно h , то есть $O(h^3)$, а его глобальная погрешность имеет второй порядок точности относительно h – $O(h^2)$.

3. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Этот метод является одним из самых распространенных на практике. В нем основной расчетной формулой является

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (y_0 = u_0), \quad (3.42)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_j, y_j), \quad k_2 = h \cdot f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= h \cdot f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = h \cdot f(x_j + h, y_j + k_3). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Если $f \in C_4(\bar{G})$, то локальная погрешность этого метода равна $O(h^5)$, а глобальная погрешность, то есть величина $\|u - u\|_h$, равна $O(h^4)$.

Геометрический смысл метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности заключается в следующем. Из точки с координатами (x_j, y_j) происходит смещение решений задачи Коши с интегральной кривой в направлении, определяемом углом α_1 , тангенс которого совпадает со значением функции в точке (x_j, y_j) , то есть $\operatorname{tg}\alpha_1 = f(x_j, y_j)$, и на этом направлении выбирается точка $\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_1}{2}\right)$. Затем возвращаемся в точку (x_j, y_j) и начинаем смещение в направлении, определяемом углом α_2 , для которого также выполняется равенство $\operatorname{tg}\alpha_2 = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_1}{2}\right)$. На этом направлении также выбирается точка с координатами $\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_2}{2}\right)$. После выбора точки на втором направлении необходимо вернуться в исходную точку (x_j, y_j) . Затем вновь начать смещение решения задачи Коши в направлении, которое определяется углом α_3 . Тангенс этого угла совпадает со значением функции в точке $\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_2}{2}\right)$, то есть $\operatorname{tg}\alpha_3 = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_2}{2}\right)$. На этом направлении также выбирается точка $(x_j + h, y_j + k_3)$. Этой точкой задается еще одно направление, определяемое углом α_4 , тангенс которого совпадает со значением функции в ней, то есть $\operatorname{tg}\alpha_4 = f(x_j + h, y_j + k_3)$.

После выбора всех четырех направлений выполняется их усреднение в соответствии с равенствами (3.42) и (3.43).

Для проверки точности найденного решения на заключительном этапе выбирается точка с координатами $(x_{j+1}, y_{j+1}) = (x_j + h, y_j + \Delta y)$.

Метод Адамса

Для решения задачи Коши, соответствующей обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y_0 = y(x_0)$$

наиболее приемлемыми являются q-шаговые методы вида:

$$\sum_{k=0}^q \frac{a_k}{h} \cdot y_{i+1-k} = \sum_{k=0}^q b_k \cdot f(x_{i+1-k}, y_{i+1-k}), \quad a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0. \quad (3.44)$$

Рассмотренные выше одношаговые методы, такие как метод Пикара, метод Эйлера и методы Рунге-Кутты, являются частными случаями формулы (3.4). Например, при следующих значениях параметров $q, b_0, b_1, a_0, a_1 - q = 1, b_0 = 0, b_1 = a_0 = 1, a_1 = -1$ – получаем явную схему Эйлера.

Схема (3.44) будет явной, если $b_0 = 0$. В этом случае ее называют экстраполяционной. При использовании схемы (3.44) для решения задачи Коши значения y_{i+1} будут вычисляться с помощью ранее найденных предыдущих значений по явной формуле:

$$y_{i+1} = \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^q (b_k \cdot h \cdot f(x_{i+1-k}, y_{i+1-k}) - a_k \cdot f(x_{i+1-k}, y_{i+1-k})). \quad (3.45)$$

Вычисления в этом случае начинаются с параметра i , равного $q - 1$, то есть $i = q - 1$. Для того чтобы найти значения y_q , надо знать значения сеточной функции $y_0, y_1, \dots, y_{q-1}$. При этом значения $y_1, \dots, y_{q-1}$ приходится вычислять с помощью какого-нибудь другого метода (например, Рунге-Кутты), используя начальное условие y_0 .

Если же $b_0 \neq 0$, то схему (3.44) называют неявной или интерполяционной. При ее использовании для нахождения значений y_{i+1} необходимо найти решение нелинейного уравнения:

$$a_0 \cdot y_{i+1} - b_0 \cdot h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}) = \sum_{k=1}^q (b_k \cdot h \cdot f(x_{i+1-k}, y_{i+1-k}) - a_k \cdot f(x_{i+1-k}, y_{i+1-k})). \quad (3.46)$$

Это уравнение можно решить, используя один из итерационных методов решения нелинейных уравнений, например, метод Ньютона.

Погрешность аппроксимации схемы (3.44) определяется формулой

$$\psi_j = \sum_{k=0}^q b_k f(x_{i+1-k}, y_{i+1-k}) - \frac{1}{h} \sum_{k=0}^q a_k y_{i+1-k}, \quad (3.47)$$

где $y_i = y(x_i)$ – точное решение задачи Коши.

Если для нормы функции ψ выполняется равенство $\|\psi\| = \max_i |\psi_i| = O(h^2)$, то схема (3.44) имеет порядок аппроксимации, равный **а**. Коэффициенты в схеме (3.44) выбираются из условий аппроксимации и устойчивости. Кроме того, поскольку коэффициенты схемы (3.44) определены с точностью до постоянного множителя, можно считать, что $\sum_{k=0}^q b_k = 1$.

Второе условие вытекает из условия: функция $y(x) = y_0$ – есть решение дифференциального уравнения при $f(x, y) = 0$. Из (3.44) следует $\sum_{k=0}^q a_k = 0$.

Разлагая (3.47) по степеням h и требуя, чтобы погрешность имела заданный порядок, получим остальной набор условий для нахождения a_k, b_k .

Если проинтегрировать дифференциальное уравнение (3.2) на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, то получим формулу

$$|a_{j+1} \cdot \beta_{j+1}| \leq h^2 \cdot |\psi_j| + |a_i \cdot \beta_i|. \quad (3.48)$$

Заменяя теперь в этом соотношении интеграл некоторой квадратурной формулой, выведенной с помощью замены подынтегральной функции интерполяционным многочленом, построенным по узлам $x_{i+1-q}, x_{i+2-q}, \dots, x_i$, получим разностную схему Адамса. Ее можно записать в виде

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \sum_{k=0}^q b_k \cdot f(x_{i+1-k}, y_{i+1-k}), \quad (3.49)$$

где

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \approx h \cdot \sum_{k=0}^q b_k \cdot f(x_{i+1-k}, y_{i+1-k}) \quad (3.50)$$

– квадратурная формула для вычисления значения интеграла.

Очевидно, что формула (3.49) является частным случаем разностной схемы (3.44).

Учитывая соотношения $x_i - x_{i-q} = q \cdot h$ и $x - x_{i-q} = (t + q) \cdot h$, можно записать соотношения для разделенных разностей $v(x_i, x_{i-1}) = \frac{\Delta v_{i-1}}{h}$,

$v(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}) = \frac{\Delta^2 v_{i-2}}{2h^2}$, ... и интерполяционный многочлен в виде:

$$v(x_i + t \cdot h) = v_i + t \cdot \Delta v_{i-1} + \frac{t(t+1)}{2} \Delta^2 v_{i-2} + \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+q-2)}{q!} \Delta^{q-1} v_{i+1-q} + \Theta_q, \quad (3.54)$$

где Θ_q – остаточный член, определяемый равенством:

$$\Theta_q = \frac{t(t-1) \dots (t+q-1)}{q!} v^{(q)}(\xi). \quad (3.55)$$

Таким образом, общий вид явной q-шаговой схемы Адамса:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f_i + \frac{1}{2}(f_i - f_{i-1}) + \frac{5}{12}(f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}) + \dots + P_{q-1} \Delta^{q-1} f_{i+1-q}. \quad (3.56)$$

В частности, двухшаговая схема Адамса принимает вид

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{3}{2} f_i - \frac{1}{2} f_{i-1}, \quad (3.57)$$

а трехшаговая схема –

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{23}{12} f_i - \frac{4}{3} f_{i-1} + \frac{5}{12} f_{i-2}, \quad (3.58)$$

где $f_i = f(x_i, y_i)$.

Погрешность аппроксимации. Определим порядок аппроксимации двухточечной явной схемы Адамса (9.58):

$$\psi_i = \frac{3}{2} f(x_i, y_i) - \frac{1}{2} f(x_{i-1}, y_{i-1}) - \frac{y_{i+1} - y_i}{h}. \quad (3.59)$$

Используя формулу Тейлора, разложим в равенстве (3.59) слагаемые $f(x_{i-1}, y_{i-1}) = f_{i-1}$ и y_{i+1} по степеням h :

$$f_{i-1} = f_i - h \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f \right)_i + O(h^2), \quad (3.60)$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot y'_i + \frac{h^2}{2} \cdot y''_i + O(h^3). \quad (3.61)$$

С учетом равенств (3.60) и (3.61), получим следующее выражение для погрешности аппроксимации:

$$\psi_i = \frac{3}{2}f_i - \frac{1}{2}f_{i+1} + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f \right)_i - y'_i - \frac{h}{2} y''_i + O(h^2). \quad (3.62)$$

Тогда с учетом равенств $y'_i = f_i$ и $y''_i = f'_i$, имеем

$$\psi_i = O(h^2), \quad (3.63)$$

т.е. двухшаговая явная схема Адамса имеет второй порядок аппроксимации.

Неявные схемы Адамса. Построение неявных схем

Для построения q-шаговой неявной (интерполяционной) схемы будем использовать интерполяционный многочлен Ньютона, построенный по значениям функции $v(x) = f(x, y(x))$ в узлах $x_{i+1-q}, \dots, x_i, x_{i+1}$. Причем для построения интерполяционного многочлена Ньютона в этом случае воспользуемся равенством (3.42):

$$v(x_{i+1} + t \cdot h) = v_{i+1} + t \cdot \Delta v_i + \frac{t(t+1)}{2} \Delta^2 v_i + \dots + \frac{t(t+1) \cdot \dots \cdot (t+q-1)}{q!} \Delta^q v_{i+1-q} + \Theta_{q+1}, \quad (3.64)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta v_i &= v_{i+1} - v_i = v(x_{i+1}) - v(x_i), \\ \Delta^2 v_{i-1} &= \Delta v_i - \Delta v_{i-1} = v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}, \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta^q v_{i+1-q} &= \Delta^{q-1} v_{i+2-q} - \Delta^{q-1} v_{i+1-q} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Далее для построения неявной схемы Адамса воспользуемся формулой:

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx = h \int_{-1}^0 v(x_{i+1} + th) dt. \quad (3.66)$$

Подставляя в равенство (3.66) интерполяционный многочлен, получим общий вид неявной схемы Адамса:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f_{i+1} - \frac{1}{2}(f_{i+1} - f_i) - \frac{1}{12}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) + \dots + P_q \Delta^q f_{i+1-q}, \quad (3.67)$$

где коэффициенты P_q могут быть рассчитаны по формуле:

$$P_q = \int_{-1}^0 \frac{t(t+1) \cdot \dots \cdot (t+q-1)}{q!} dt, \quad (3.68)$$

то есть $P_1 = -\frac{1}{2}$, $P_2 = -\frac{1}{12}$ и т.д.

В частности, полагая $q = 2$, получим двухшаговую неявную схему Адамса:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{5}{12} f_{i+1} + \frac{8}{12} f_i - \frac{1}{12} f_{i-1}. \quad (3.69)$$

Определим далее погрешность аппроксимации двухшаговой неявной схемы Адамса, задаваемой равенством (3.67). Погрешность аппроксимации запишется следующим образом:

$$\psi_i = \frac{5}{12} f_{i+1} + \frac{8}{12} f_i - \frac{1}{12} f_{i-1} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad (3.70)$$

где $f_i = f(x_i, y(x_i))$, $y(x)$ – точное решение задачи Коши.

Тогда для f_{i+1} , f_{i-1} и $\frac{y_{i+1} - y_i}{h}$ справедливы следующие разложения по h :

$$f_{i+1} = f_i + h \cdot \left(\frac{df}{dx} \right)_i + \frac{h^2}{2} \cdot \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_i + O(h^3), \quad (3.71)$$

$$f_{i-1} = f_i - h \cdot \left(\frac{df}{dx} \right)_i + \frac{h^2}{2} \cdot \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_i + O(h^3), \quad (3.72)$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = y'_i + \frac{h}{2} y''_i + \frac{h^2}{6} y'''_i + O(h^3). \quad (3.73)$$

С учетом разложений (3.71) – (3.73) формула для погрешности аппроксимации примет вид:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{5}{12} \left(f_i + h \left(\frac{df}{dx} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_i \right) + \frac{8}{12} f_i - \frac{1}{12} \left(f_i - h \left(\frac{df}{dx} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_i \right) - y'_i - \\ &- \frac{h}{2} y''_i - \frac{h^2}{6} y'''_i + O(h^3) = (f_i - y'_i) + h \left(\frac{1}{2} \left(\frac{df}{dx} \right)_i - \frac{1}{2} y''_i \right) + h^2 \left(\frac{1}{6} \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_i - \frac{1}{6} y'''_i \right) + O(h^3). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Однако очевидно, что y_{i+1} , поэтому для погрешности аппроксимации получаем соотношение $\psi_i = O(h^3)$, а, следовательно, двухточечная неявная схема Адамса имеет порядок аппроксимации, равный трем.

9.4.2.3 Нахождение решения неявной разностной схемы

Двухточечная неявная схема Адамса (3.70) имеет вид нелинейного уравнения относительно неизвестного значения y_{i+1} :

$$y_{i+1} = \varphi(y_{i+1}) + F(y_i, y_{i-1}), \quad (3.75)$$

где $\varphi(y_{i+1}) = \frac{5}{12}h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1})$.

Для решения нелинейного уравнения (3.75) можно воспользоваться методом простых итераций. После применения метода простых итераций решение уравнения (3.75) на k -м шаге может быть вычислено по формуле:

$$y_{i+1}^k = \varphi(y_{i+1}^{k-1}) + F(y_i, y_{i-1}). \quad (3.76)$$

В этом случае решение уравнения (3.75) получается как предел последовательности, состоящей из приближений y_{i+1}^k , $k \rightarrow \infty$. Достаточное условие сходимости метода простых итераций выглядит следующим образом:

$$|\varphi_y| = \frac{5}{12}h \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < 1.$$

Это условие выполняется для достаточно малого шага h (чем меньше h , тем быстрее сходится метод). Кроме того, для работы метода (3.76) необходимо получить из каких-либо соображений начальное приближение y_{i+1}^0 .

Задания к лабораторной работе

Задание 1. Постройте решение обыкновенного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными: $y' = X(x) \cdot Y(y)$, $y(x_0) = y_0$.

Задание 2. Постройте приближенное решение дифференциального уравнения n -го порядка на заданном отрезке и представьте его графически. В качестве метода решения использовать метод Рунге-Кутты с постоянным шагом на сетке с фиксированным количеством узлов.

Задание 3. Найдите приближенное решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ при условии $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[x_0, x_1]$ методом Рунге – Кутты с постоянным шагом. Постройте графики решений при $h, 2h, \frac{h}{2}$.

Задание 4. Найдите решение обыкновенного дифференциального уравнения методом Пикара.

Задание 5. Используя метод Эйлера, найдите приближенное решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Варианты заданий

Вариант для выполнения заданий, приведенных в практической работе, определяется преподавателем.

Таблица 3.1

№	$F(x, y, y') = 0$	$y(x_0)$
1	$(e^x + 1)dy + e^x dx = 0$	$y(0) = 0.5$
2	$y \cdot \ln y + x \cdot y' = 0$	$y(1) = e$
3	$\sqrt{4 - x^2} \cdot y' + x \cdot y^2 + x = 0$	$y(0) = -\operatorname{tg}(2)$
4	$3e^x \operatorname{tg} y dx + \frac{2 - e^x}{\cos^2(x)} dy = 0$	$y(1) = \operatorname{arctg}(2 - e)$
5	$(e^x + 1) \cdot y \cdot y'' = e^x$	$y(0) = 1$
6	$y' \cdot \sin(x) = y \cdot \ln y$	$y(\frac{\pi}{2}) = e$
7	$\frac{x \cdot dx}{1 + y} - \frac{y \cdot dy}{1 + x} = 0$	$y(1) = 1$
8	$(1 + y^2) dx = x dy$	$y(\frac{\pi}{4}) = 1$
9	$2 \cdot \sqrt{y} = y'$	$y(0) = 1$
10	$(e^x + 2) \cdot dy + 2 \cdot e^x \cdot dx = 0$	$y(0) = \frac{1}{9}$
11	$2 \cdot y \cdot \ln y + x \cdot y' = 0$	$y(1) = e$
12	$\sqrt{\frac{\pi}{4} - x^2} \cdot y' + x \cdot y^2 + x = 0$	$y(0) = -1$

13	$\frac{x \cdot dx}{1+y} - \frac{y \cdot dy}{1+x} = 0$	$y(0)=1$
14	$y \cdot \ln y \cdot dx + x \cdot dy = 0$	$y(1)=1$
15	$6 \cdot x \cdot dx - 6 \cdot y \cdot dy = 2 \cdot x^2 \cdot y \cdot dy - 3 \cdot x \cdot y^2 \cdot dx$	$y(1)=2$
16	$x \cdot dx - y \cdot dy = y \cdot x^2 \cdot dy - x \cdot y^2 \cdot dx$	$y(1)=1$
17	$3(x^2 \cdot y + y) \cdot dy + \sqrt{2+y^2} \cdot dx = 0$	$y(0)=1$
18	$y' \cdot \sin(x) = y \cdot \ln y$	$y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$
19	$\sqrt{1-x^2} \cdot y' + x \cdot y^2 + x = 0$	$y(0)=0$
20	$(e^{2x} + 3) \cdot dy + 2 \cdot e^{2x} \cdot dx = 0$	$y(0)=0.25$

Таблица 3.2

№	a	a ₁	a ₂	y(a)	y'(a)	№	a	a ₁	a ₂	y(a)	y'(a)
1	0	2	0	1	1	2	0	- 4	4	0	1
3	$\frac{\pi}{2}$	2	0	0	0	4	$-\frac{\pi}{2}$	0	1	3	0
5	1	2	5	0	0	6	0.3	- 4	4	1	1
7	0.25	6	13	- 1	1	8	$\frac{\pi}{2}$	0	1	4	1
9	$-\frac{\pi}{2}$	2	5	6	2	10	1	- 4	8	0	2
11	0	2	0	0	2	12	2	- 4	4	- 1	0.5
13	$\frac{\pi}{2}$	0	1	1	1	14	$-\frac{\pi}{2}$	2	5	4	- 0.5
15	0.8	6	13	5	2	16	0.75	- 4	8	0	0.5
17	- 1	2	0	1	1	18	$\frac{\pi}{2}$	- 4	4	- 1	0
19	1	6	13	- 2	2	20	0.3	0	1	8	0.5

Таблица 3.3

№	f(x)	№	f(x)
1	$4 \cdot e^x (\sin(x) + \cos(x))$	2	$-\sin(2 \cdot x)$
3	$e^{-3 \cdot x} \cdot \cos(x)$	4	$e^x (\sin(x) + \cos(x))$
5	$10 \cdot \cos(x)$	6	$e^{2 \cdot x} \cdot \sin(5 \cdot x)$
7	$10 \cdot e^x (\sin(x) + \cos(x))$	8	$2 \cdot \cos(5 \cdot x) + 3 \cdot \sin(5 \cdot x)$
9	$-2 \cdot \sin(x)$	10	$2 \cdot \cos(4 \cdot x) + 3 \cdot \sin(4 \cdot x)$
11	$6 \cdot e^x (\sin(x) + \cos(x))$	12	$e^{2 \cdot x} \cdot \sin(4 \cdot x)$

13	$-17 \cdot \sin(2 \cdot x)$	14	$3 \cdot e^x (\sin(x) + \cos(x))$
15	$4 \cdot e^x (-\sin(x) + 2 \cdot \cos(x))$	16	$-2 \cdot e^x (\sin(x) + \cos(x))$
17	$e^{2x} \cdot \sin(3 \cdot x)$	18	$e^{-3x} \cdot \cos(4 \cdot x)$
19	$e^x (5 \cdot \sin(x) - 3 \cdot \cos(x))$	20	$-\cos(x)$

Примечания. 1. В качестве вариантов задания 1 использовать данные из таблицы 3.1.

2. При выполнении задания 2 следует рассматривать дифференциальное уравнение вида $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = a$, $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_1$. Значения a , a_1 , a_2 , $y(a)$ и $y'(a)$ приведены в таблице 3.2

4. При выполнении задания 3 следует рассматривать дифференциальное уравнение вида $a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(a) = y_0$. Значения a_1 , a_2 , $y(a)$ выбрать из таблицы 3.2, а $f(x)$ - из таблицы 3.3 (согласно варианту).

5. Варианту задания 5 для каждого из студентов в группе соответствует дифференциальное уравнение вида $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = f(x)$, которое удовлетворяет следующим начальным условиям: $x_0 = a$, $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_1$. Величины a , a_1 , a_2 , $y(a)$ и $y'(a)$ заданы в таблице 3.2, а правая часть уравнения $f(x)$ – в таблице 3.3.

Вопросы для самопроверки

1. Каким соотношением описывается дифференциальное уравнение первого порядка?

2. Дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ называют ...?

3. Какую функцию называют решением дифференциального уравнения?

4. В каком случае решение обыкновенного дифференциального уравнения представляется в неявной форме?
5. Сформулируйте определение понятий: «интегральная кривая», «фазовая кривая» («траектория дифференциального уравнения»).
6. Сформулируйте задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.
7. С помощью какой теоремы обеспечивается существование и единственность задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка?. Сформулируйте ее.
8. Какое конечное множество называют сеткой?
9. Какую функцию, являющуюся решением обыкновенного дифференциального уравнения, называют сеточной?
10. С помощью какого соотношения описывается дифференциальное уравнение n -го порядка?
11. Сформулируйте задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
12. На какие группы можно разделить методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений?
13. Охарактеризуйте метод Пикара для решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.
14. Каким образом можно представить дифференциальное уравнение перед применением метода Эйлера?
15. Перечислите методы Рунге-Кутты для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Дайте их характеристику.
16. Какой из методов Рунге-Кутты называют усовершенствованным методом Эйлера?
17. Дайте общую характеристику методу Адамса как одному из методов решений обыкновенных дифференциальных уравнений.
18. Сформулируйте алгоритм построения двухшаговых и трехшаговых явных схем Адамса.

19. Каким образом можно построить неявную схему Адамса?
20. Алгоритм поиска решений с помощью неявной схемы Адамса.
21. Проведите сравнение методов Адамса и Рунге-Кутты.

Практическая работа 4.

Приближенные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель работы: изучить основные приближенные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Организационная форма занятий: решение проблемных задач, разбор конкретных ситуаций

Вопросы для обсуждения на практическом занятии: изучение методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Формируемые компетенции: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПКД-1.1 ОПКД-1.2

Теоретическая часть

Обыкновенным дифференциальным уравнением n – го порядка будем называть уравнение, удовлетворяющее равенству:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (4.1)$$

где F – заданная в области $D \in \mathbb{R}^{n+2}$ функция $(n + 2)$ -переменных, x – независимая переменная, причем $x \in (a, b)$, y – искомая функция, n – порядок уравнения.

Решить дифференциальное уравнение (4.1) означает найти такую функцию $y(x)$, которая удовлетворяла бы уравнению:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0. \quad (4.2)$$

График функции $y = y(x)$ называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения (4.1).

Говорят, что обыкновенное дифференциальное уравнение n – го порядка разрешимо относительно старшей производной, если его можно представить в виде:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (4.3)$$

Дифференциальное уравнение n -порядка, определяемое равенством

(4.3), можно представить в виде системы из n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \\ \frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка (4.3) имеет вид:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{0,1}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}. \quad (4.5)$$

Эта же задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений может быть представлена следующим образом:

$$Y' = F(x, Y), \quad Y(x_0) = Y_0, \quad (4.6)$$

где Y' – вектор, содержащий значения первых производных функций $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$: $Y' = (y_1'(x), y_2'(x), y_3'(x), \dots, y_n'(x))$, $F(x, Y)$ – матрица, состоящая из значений $y_2, y_3, \dots, y_n, f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$: $F(x, Y) = (y_2, y_3, \dots, y_n, f(x, y_1, y_2, \dots, y_n))$.

Численное решение задачи Коши, определяемой при помощи системы (4.6), заключается в следующем: необходимо построить таблицу приближенных значений $y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,N}$ координаты $y_i(x)$ матрицы-строки $y(x)$, являющейся решением, в точках $x_1, x_2, \dots, x_N$.

Приближенные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений совпадают с основными методами численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для получения расчетных формул метода Рунге – Кутта, позволяющих

найти приближенное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, следует в формулах для решения обыкновенного дифференциального уравнения произвести замену $y, f(x, y), k_1, k_2, k_3, k_4$ на $Y, F(x, Y), k_1, k_2, k_3, k_4$ соответственно.

Задания к практической работе

Задание. Найдите приближенное решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений $y_1' = f(x, y_1, y_2), y_2' = f(x, y_1, y_2)$ с начальными условиями $y_1(a) = y_{1,0}, y_2(a) = y_{2,0}$ на отрезке $[a, b]$ с постоянным шагом $h = 0.1$. Постройте графики решений этой системы, вычисленных соответственно при $h, 2h, \frac{h}{2}$.

Варианты заданий

Вариант для выполнения заданий определяется преподавателем

Таблица 4.1

N	$y_1' = f(x, y_1, y_2)$	$y_2' = f(x, y_1, y_2)$	$y_1(a)$	$y_2(a)$	a	b
1	$\arctg\left(\frac{1}{1 + y_1^2 + y_2^2}\right)$	$\sin(y_1 \cdot y_2)$	1	0	-1	1
2	$\arctg(x^2 + y_2^2)$	$\sin(x + y_1)$	0.5	1.5	0	2
3	$x^2 \cdot y_1 + y_2$	$\cos(y_1 + x \cdot y_2)$	-1	1	0	4
4	$x^2 + y_2^2$	$x \cdot y_1 \cdot y_2$	1	0	0	5
5	$\frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y_2^2}}$	$\frac{y_2}{\sqrt{1 + x^2 + y_1^2}}$	0.2	0	-1	1
6	$\sin(x^2 + y_2^2)$	$\cos(x \cdot y_1)$	0	0	0	4
7	$\sin(y_2)$	$\cos(y_1)$	0.5	-0.5	-1	3
8	$x \cdot \cos(y_1 + y_2)$	$\sin(y_1 - y_2)$	-0.6	2	2	5
9	$\sin(y_1) \cdot \cos^2(y_2)$	$\cos(y_1) \cdot \cos(y_2)$	0	0	-1	3
10	$2 \cdot \sqrt{3 \cdot x^2 + y_1^2 + y_2}$	$\sqrt{x^2 + y_1^2 + y_2}$	0.5	1.2	0	2

11	$\frac{y_1^2}{y_2}$	$y_1^2 - y_2$	1	1	1	3
12	$y_2 + \sqrt{x^2 + y_1^2}$	$y_2 \cdot \cos(x) - \sin(2 \cdot x)$	0.8	3.5	2	4
13	$\frac{y_1 + x}{e^{y_1 + y_2}}$	$\frac{y_2 - x}{e^{y_1 + y_2}}$	1	- 1	2	4
14	$\frac{1}{3 + e^{-y_1}}$	$\frac{1}{2 + e^{-y_1}}$	0	- 3	2	5
15	$\cos(y_1 \cdot y_2)$	$\sin(y_1 + y_2)$	0	0	0	2
16	$y_2 \cdot \ln(x)$	$y_1 + y_2^2$	- 2	-1	1	4
17	$x + y_1^2$	$(y_1 - y_2)^2$	0	1	- 1	1
18	$\arctg(x + y_2)$	$\sin(y_1)$	0	0	- 2	1
19	$y_1 + y_2$	$\frac{1}{1 + y_1^2 + y_2^2}$	0	0	0	4
20	$y_1^2 + y_2^2$	$y_1 \cdot y_2$	- 1	1	0	4

Контрольные вопросы

1. Дайте определение обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка.
2. В чем заключается решение обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка?
3. Каким образом можно задать дифференциальное уравнение n-го порядка разрешенного относительно производной высшего порядка?
4. В чем заключается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений?
5. Какими методами можно найти приближенные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений?
6. Как можно получить формулы Рунге-Кутты для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений?

Практическая работа 5

Уравнения гиперболического типа

Цель работы: познакомить с основными определениями и понятиями уравнений в частных производных.

Организационная форма занятий: решение проблемных задач, разбор конкретных ситуаций

Вопросы для обсуждения на практическом занятии: изучение методов решения уравнений в частных производных гиперболического типа

Формируемые компетенции: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПКД-1.1 ОПКД-1.2

Задача о свободных колебаниях струны

Струной называется гибкая упругая натянутая нить, не оказывающая сопротивления изгибу.

Пример. Найти закон колебания струны длиной l , если в начальный момент струне придана форма кривой

$$u = \frac{x(l-x)}{8l},$$

а затем струна отпущена без начальной скорости. Струна закреплена на концах. Внешние силы отсутствуют.

Решение.

Задача сводится к решению однородного волнового уравнения при однородных граничных условиях:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (5.1)$$

И начальных условиях:

$$u(x, 0) = U_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = V_0(x), \quad (5.2)$$

где $U_0(x), V_0(x)$ – заданные функции, описывающие соответственно отклонения и скорости точек струны в начальный момент времени.

$$u(x, 0) = \frac{x(l-x)}{8l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (5.3)$$

Для рассматриваемого случая, очевидно, $B_n = 0$, так как согласно (5.2) $V_0(x) = 0$. Подставляя в

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l U_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (5.4)$$

$$U_0(x) = \frac{x(l-x)}{(n\pi)^3},$$

после двукратного интегрирования по частям находим:

$$A_n = \frac{1}{2} \frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^3}. \quad (5.5)$$

Подстановка (5.5) в

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (5.6)$$

с учетом $B_n = 0$ приводит к решению задачи в виде:

$$u(x, t) = \frac{l}{2\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \cos \frac{n\pi t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Задание. Найти решение дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа:

1. $u_{tt} = 4u_{xx}, u(0, t) = 0, u(x, 0) = x, u_t(x, 0) = 1, t > 0, x \geq 0$
2. $u_{tt} = 4u_{xx}, u(0, t) = 0, u(x, 0) = x^2, u_t(x, 0) = x - 1, t > 0, x \geq 0$
3. $u_{tt} = 4u_{xx}, u(0, t) = 2t, u(x, 0) = x, u_t(x, 0) = 1, t > 0, x \geq 0$
4. $u_{tt} = 4u_{xx}, u(0, t) = t - 1, u(x, 0) = \sin(x), u_t(x, 0) = x, t > 0, x \geq 0$
5. $u_{tt} = 9u_{xx}, u(0, t) = 1 - t, u(x, 0) = x^2, u_t(x, 0) = x + 1, t > 0, x \geq 0$

Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных?
2. Назовите классы дифференциальных уравнений в частных производных.

3. Перечислите основные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа.

Практическое занятие 6.

Уравнения параболического типа. Решение однородного уравнения теплопроводности методом разделения переменных (Фурье)

Цель работы: изучить основные понятия дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа

Организационная форма занятий: решение проблемных задач, разбор конкретных ситуаций

Вопросы для обсуждения на практическом занятии: изучение методов решения уравнений в частных производных параболического типа.

Формируемые компетенции: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПКД-1.1 ОПКД-1.2

Теоретическая часть

Решение начально-краевой задачи строится методом разделения переменных так же, как и решение волнового уравнения. Искомая функция $u(x,t)$ представляется в виде:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0 \quad (6.1)$$

Подстановка этого выражения в уравнение приводит к равенству:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} \quad (6.2)$$

из которого после обычных рассуждений, характерных для метода разделения переменных, следует, что обе части равенства не зависят ни от x , ни от t , следовательно, являются постоянными

Обозначая, как и выше, эту постоянную через $-\lambda^2 (\lambda > 0)$, то есть принимая:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda^2, \quad (6.3)$$

получим два независимых обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнения:

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0 \quad (6.4)$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad (6.5)$$

В отличие от волнового уравнения здесь для функции $T(t)$ получается уравнение первого порядка (6.2).

Итак, для определения функции $X(x)$ приходим к задаче на собственные значения что и при решении волнового уравнения. Собственные значения λ_n и собственные функции этой задачи $X_n(x)$ определяются соответственно по формулам:

$$A_n = \frac{np}{l} \quad (6.6)$$

$$X(x) = \sin \frac{np x}{l} \quad (6.7)$$

Подставляя (6.4) в (6.2), приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$T_n'(t) + \left(\frac{np a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0 \quad (6.8)$$

Разделяя переменные в уравнении (6.8) и интегрируя, находим его общее решение в виде

$$T_n(t) = A_n \exp \left[- \left(\frac{np a}{l} \right)^2 t \right] \quad (6.9)$$

где A_n — произвольная постоянная

Находим общее решение однородного уравнения теплопроводности:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp \left[- \left(\frac{np a}{l} \right)^2 t \right] \quad (6.10)$$

Произвольную постоянную A_n находим далее из условия $U(x, 0) = U_0(x)$

$$U_0(x) = \sum_0^{\infty} A_n \sin \frac{np x}{l} dx \quad (6.11)$$

Тогда,

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{np x}{l} dx \quad (6.12)$$

Как видно из (6.12), решение уравнения теплопроводности носит по времени аperiодически затухающий характер, что соответствует выравниванию температуры в стержне с течением времени.

Пример.

Пусть требуется найти закон распределения температуры в однородном стержне длиной l (боковая поверхность которого теплоизолирована), если в начальный момент времени распределение температуры по длине стержня подчиняется заданному закону

$$(x, 0) = \begin{cases} u_0 x/l & \text{при } 0 \leq x < l/2, \\ U_0(1 - x)/l & \text{при } l/2 \leq x \leq l \end{cases} \quad (6.13)$$

На концах стержня поддерживается постоянная нулевая температура.

Решение

Задача сводится к решению однородного уравнения теплопроводности при однородных граничных условиях и начальном условии (6.13).

Из выражения (6.10) с учётом (11) находим:

$$A_n = \frac{2}{l} \left(\int_0^{l/2} \frac{x}{l} U_0 \sin \frac{np x}{l} dx + \int_{l/2}^l \frac{l-x}{l} u_0 \sin \frac{np x}{l} dx \right) = \frac{4U_0}{(np)^2} \sin \frac{np}{2} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (8), получим

$$U(x, t) = \frac{4U_0}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{np}{2} \exp \left[- \left(\frac{np a}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{np x}{l}.$$

Задания

1. $u_{tt} = 4u_{xx}, u(x, 0) = 2, u(0, t_1) = \ell_1, u(0, t_2) = \ell_2$
2. $u_{tt} = u_{xx}, u(x, 0) = 0, u(0, t_1) = \ell_1, u(0, t_2) = \ell_2$
3. $u_{tt} = u_{xx}, u(x, 0) = 2 + x, u(0, t_1) = \ell_1, u(0, t_2) = \ell_2$
4. $u_{tt} = u_{xx}, u(x, 0) = x - 3, u(0, t_1) = \ell_1, u(0, t_2) = \ell_2$

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа.

2. Охарактеризуйте метод разделения переменных для дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа.

Практическое задание 7

Уравнения эллиптического типа. Решение уравнения Пуассона

Цель работы: изучить основные понятия дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа.

Организационная форма занятий: решение проблемных задач, разбор конкретных ситуаций.

Вопросы для обсуждения на практическом занятии: изучение методов решения уравнений в частных производных эллиптического типа.

Формируемые компетенции: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПКД-1.1 ОПКД-1.2

Теоретическая часть

Уравнением Пуассона называется неоднородное уравнение Лапласа. Рассмотрим его решение на следующем примере.

Пример.

Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \gamma xy, (\gamma = \text{const}) \quad (7.1)$$

и однородным граничным условиям на прямоугольном контуре:

$$U|_{\Gamma} = 0 \quad (7.2)$$

Решение. Будем искать решение задачи (7.1), (7.2) в виде разложения в ряд по собственным функциям однородной задачи

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{pnx}{a}. \quad (7.3)$$

При этом удовлетворяются граничные условия на вертикальных сторонах области $x = 0$ и $x = a$.

Функцию $Y_n(y)$ следует определить так, чтобы функция $u(x,y)$ удовлетворяла уравнению (7.1) и граничным условиям на горизонтальных сторонах:

$$u(x,0) = u(x,b) = 0.$$

Для этого подставляем (7.3) в уравнение (7.1). Тогда получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d^2 Y_n}{dy^2} - \left(\frac{np}{a} \right)^2 Y_n \right] \sin \frac{np x}{a} = \gamma x y. \quad (7.4)$$

В левой части уравнения имеем ряд Фурье по синусам на отрезке $[0,a]$. Разложим функцию в правой части (7.4) также в ряд Фурье по синусам на том же отрезке:

$$\gamma x y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{np x}{a} \quad (7.5)$$

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a \gamma x y \sin \frac{np x}{a} dx = \frac{2(-1)^{n+1} \gamma a}{np} y. \quad (7.6)$$

Подставляем выражение (7.5) с учётом (7.6) в правую часть уравнения (7.4):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d^2 Y_n}{dy^2} - \left(\frac{np}{a} \right)^2 Y_n \right] \sin \frac{np x}{a} = \frac{2\gamma a}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} y \sin \frac{np x}{a}$$

В результате для определения функции $Y_n(y)$ приходим к обыкновенному линейному неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} - \left(\frac{np}{a} \right)^2 Y_n = \frac{2(-1)^{n+1} \gamma a}{np} y \quad (7.7)$$

Общее решение уравнения (7.7) имеет вид:

$$Y_n(y) = A_n \operatorname{ch} \frac{np y}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{np y}{a} + \frac{2(-1)^n}{p^3} \left(\frac{a}{n} \right)^3 \gamma y. \quad (7.8)$$

После подстановки (7.8) в равенство (7.3) получаем:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{ch} \frac{np y}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{np y}{a} + \frac{0(-1)^n}{p^3} \left(\frac{a}{n} \right)^3 \gamma y \right] \sin \frac{np x}{a}. \quad (7.9)$$

Константы A_n и B_n найдём из условия удовлетворения граничным условиям на горизонтальных сторонах области $y = 0$ и $y = b$. При $y = 0$ из условия $u(x, 0) = 0$ имеем:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} = 0,$$

откуда в силу произвольности функции $\sin(n\pi x/a)$ следует

$$A_n = 0. \quad (7.10)$$

При $y = b$ из условия $u(x, b) = 0$ с учётом (7.10) находим

$$u(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} + \frac{2(-1)^n}{\pi^3} \left(\frac{a}{n} \right)^3 \pi b \right] \sin \frac{n\pi x}{a} = 0,$$

И следовательно

$$B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} + \frac{2(-1)^n}{\pi^3} \left(\frac{a}{n} \right)^3 \pi b = 0.$$

Из последнего равенства определяем:

$$B_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^3} \left(\frac{a}{n} \right)^3 \pi b \left(\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} \right)^{-1}. \quad (7.11)$$

Подставляя (7.10) и (7.11) в (7.9), приходим к решению поставленной задачи в виде:

$$u(x, y) = \frac{2a^3 \pi}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left[y - b \left(\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} \right)^{-1} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right] \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Задание

В круге $x^2 + y^2 < R^2$ решить задачу Дирихле:

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad 0 \leq r < R,$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad r = R$$

если имеем следующее:

$$1. \ g(x, y) = x + xy \quad 2. \ g(x, y) = 4y^3 \quad 3. \ g(x, y) = 4xy^2$$

$$4. \ g(x, y) = 2(x^2 + y) \quad 5. \ g(x, y) = x^2 - 2y^2.$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad r = R$$

1. Перечислите основные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа.
2. Охарактеризуйте метод разделения переменных для дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа.
3. Дайте определение задачи Лапласа.
4. Сформулируйте задачу Дирихле.

Практическая работа 8.

Теория приближенных вычислений

Цель работы: выработать навыки работы с приближенными числами, применения формул погрешностей элементарных функций и арифметических действий, решения задач нахождения значений выражений по способу границ и методом строго учета абсолютных погрешностей после каждой операции.

Организационная форма занятий: решение проблемных задач, разбор конкретных ситуаций

Вопросы для обсуждения на практическом занятии: изучение основных понятий теории приближенных вычислений

Формируемые компетенции: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПКД-1.1 ОПКД-1.2

Теоретическая часть

Пусть a – точное значение, a^* – приближенное значение некоторой величины, тогда **абсолютной погрешностью** приближенного значения a^* называется величина

$$D(a^*) = |a - a^*|. \quad (8.1)$$

Относительной погрешностью значения a^* (при $a \neq 0$) называется величина

$$\delta(a^*) = \frac{D(a^*)}{|a|}. \quad (8.2)$$

Так как, значение a как правило неизвестно, чаще получают оценки погрешностей вида: $|a - a^*| \leq \bar{D}(a^*)$, $\frac{\Delta(a^*)}{|a|} = \frac{\Delta|a - a^*|}{|a|} \leq \bar{\delta}(a^*)$.

Величины $\bar{D}(a^*)$ и $\bar{\delta}(a^*)$ называют **верхними границами** (или просто границами) абсолютной и относительной погрешностей или **предельной абсолютной (предельной относительной) погрешностями**.

Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Значащую цифру называют **верной**, если модуль погрешности числа не превосходит единицы разряда соответствующей этой цифре.

Число записано со всеми верными цифрами, если в его записи представлены только верные значащие цифры.

Пусть $D(a^*)$ – абсолютная погрешность, а $\delta(a^*)$ – относительная погрешность.

1. Погрешность суммирования чисел $a \pm \Delta a$, $b \pm \Delta b$.

Абсолютная погрешность:

$$\Delta z = (a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b) = (a + b) \pm (\Delta a + \Delta b). \quad (8.3)$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a + b|} = \frac{\Delta a}{|a + b|} \cdot \frac{|a|}{|a|} + \frac{\Delta b}{|a + b|} \cdot \frac{|b|}{|b|} = \frac{\Delta a}{|a + b|} \cdot \delta_a + \frac{\Delta b}{|a + b|} \cdot \delta_b. \quad (8.4)$$

2. Погрешность вычитания чисел $a \pm \Delta a$, $b \pm \Delta b$.

Абсолютная погрешность:

$$\Delta z = (a \pm \Delta a) - (b \pm \Delta b) = (a - b) \pm (\Delta a - \Delta b). \quad (8.5)$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a - b|} = \frac{\Delta a}{|a - b|} \cdot \frac{|a|}{|a|} + \frac{\Delta b}{|a - b|} \cdot \frac{|b|}{|b|} = \frac{\Delta a}{|a - b|} \cdot \delta_a + \frac{\Delta b}{|a - b|} \cdot \delta_b. \quad (8.6)$$

3. Погрешность умножения чисел $a \pm \Delta a$, $b \pm \Delta b$.

Абсолютная погрешность:

$$\Delta z = (a \pm \Delta a) \cdot (b \pm \Delta b) = a \cdot b \pm b \cdot \Delta a \pm a \cdot \Delta b \pm \Delta a \cdot \Delta b \approx a \cdot b \pm b \cdot \Delta a \pm a \cdot \Delta b \quad (8.7)$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{\Delta a |b| + \Delta b |a|}{|a \cdot b|} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|} = \delta_a + \delta_b. \quad (8.8)$$

4. Погрешность деления чисел $a \pm \Delta a$, $b \pm \Delta b$.

Абсолютная погрешность:

$$\Delta z = \frac{(a \pm \Delta a)}{(b \pm \Delta b)} = \frac{(a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b)}{(b \pm \Delta b)(b \pm \Delta b)} \approx \frac{a}{b} \pm \frac{b \Delta a + a \Delta b}{b^2}. \quad (8.9)$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{\Delta a |b| + \Delta b |a|}{\left| \frac{a}{b} \right|} = \frac{\Delta a |b| + \Delta b |a|}{\left| \frac{a}{b} \right| \cdot b^2} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|} = \delta_a + \delta_b. \quad (8.10)$$

5. Погрешность функции, зависящей от одной переменной.

Абсолютная погрешность:

$$f(a \pm \Delta a) \approx f(a) \pm f'(a) \Delta a, \quad \Delta f = f(a \pm \Delta a) - f(a) = |f'(a)| \Delta a \quad (8.11)$$

Относительная погрешность:

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right| = \left| \frac{f'(a)}{f(a)} \right| \Delta(a). \quad (8.12)$$

Пример 1. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры: а) в широком смысле; б) в узком (строгом) смысле: а) 0,856; б) 0,07

Решение. Поскольку число а) верно в широком смысле, то погрешность его не превосходит единицы разряда, соответствующего последней цифре, т.е. 0,001. Следовательно, имеем $\Delta = 0,001$, $\delta = \frac{0,001}{0,856} \approx 0,00116$.

Поскольку число б) верно в узком (строгом) смысле, то погрешность его не превосходит половину единицы разряда, соответствующего последней

цифре, т.е. 0,005. Следовательно, имеем $\Delta = 0,005$, $\mathbb{P} = \frac{0,005}{0,07} \gg 0,0714$

Пример 2. Число, все цифры которого верны в широком смысле, округлить до трех значащих цифр. Для полученного результата $X_1 \gg X$ вычислить границы абсолютной и относительной погрешностей. В записи числа X_1 указать количество верных цифр по абсолютной погрешности: $x = 1,1426$, $X_1 \gg 1,143$, $\Delta x = 0,0001$ (поскольку цифры верны в широком смысле),

$$\Delta = \Delta x + \Delta_{\text{округл}} = 0,0001 + (1,143 - 1,1426) = 0,0005, \mathbb{P}_{X_1} \gg \frac{0,005}{1,143} \gg 0,000437 \text{ Ч}$$

. **Строгий смысл:** 1: $0,5 > 0,0005$ – в; 1: $0,05 > 0,0005$ – в; 4: $0,005 > 0,0005$ – в; 3: $0,0005 = 0,0005$ (в этом случае цифру можно либо считать верной в строгом смысле, либо нет)

Широкий смысл: 1: $1 > 0,0005$ – в; 1: $0,5 > 0,0005$ – в; 4: $0,05 > 0,0005$ – в; 3: $0,005 > 0,0005$ – в

Пример 3. Вычислить значение величины z при заданных значениях чисел a , b , и c , используя систематический учет абсолютных погрешностей после каждой операции. Найти абсолютную и относительную погрешности z и определить по ним количество верных цифр в z , если цифры a , b и c верны в строгом смысле:

$$z = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{b + \ln a}, \quad a = 12,34, \quad b = 14,3$$

Решение. Результаты расчетов удобно оформлять в виде таблицы, куда после выполнения каждого шага заносится информация: 1) погрешность операции; 2) результат её выполнения, который содержит число с верными цифрами и одной сомнительной.

	a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\ln a$	$b + \ln a$	z
Значение	12,34	14,3	3,513	3,78	7,29	2,5129	16,8	0,434
Δ для каждой	0,005	0,05	0,00071	0,0066	0,0073	0,00041	0,05041	0,002

опера- ции								
---------------	--	--	--	--	--	--	--	--

Для каждой операции из таблицы для того, чтобы записать число с верными цифрами в строгом смысле и одной сомнительной, производится проверка, аналогичная выполненной в задании №2. Погрешность для корня, логарифма считаются по формуле расчета погрешности функции.

$$\text{Например, } \Delta(\sqrt{a}) = \frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}, \delta(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\delta_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{|a - a^*|}{|a|}.$$

Конечный результат записывается в виде $z = (0,434 \pm 0,002)$, где цифры 4 и 3 верны в строгом смысле, а последняя цифра 4 – сомнительна.

Задания к практической работе 1

Задание 1. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры: а) в широком смысле; б) в узком смысле. Исходные данные для выполнения задания выбрать из таблицы 1.

Задание 2. Число, все цифры которого верны в строгом смысле, округлить до трех значащих цифр. Для полученного результата $X_1 \approx X$ вычислить границы абсолютной и относительной погрешностей. В записи числа X_1 указать количество верных цифр по абсолютной и относительной погрешностям. Исходные данные для выполнения задания выбрать из таблицы 2.

Задание 3. Вычислить значение величины z при заданных значениях чисел a , b , и c , используя систематический учет абсолютных погрешностей после каждой операции. Найти абсолютную и относительную погрешности z и определить по ним количество верных цифр в z , если цифры a , b и c верны в строгом смысле. Исходные данные для выполнения задания выбрать из таблицы 3.

Варианты к заданиям

Таблица 1 – Индивидуальные данные к заданию 1

Вариант	Числа		Вариант	Числа	
	а	б		а	б
1	11,445	2,043	11	12,45	3,4453

2	8,345	0,288	12	2,3445	0,745
3	0,374	4,348	13	0,5746	42,884
4	41,72	0,678	14	3,4	0,078
5	18,357	2,16	15	2,4342	0,57004
6	14,862	8,73	16	112,5	0,04453
7	0,3648	21,7	17	0,576	2,5008
8	0,5746	236,56	18	25,613	0,0748
9	5,634	0,0748	19	0,4223	0,57
10	20,43	0,576	20	112,45	3,4

Таблица 2 – Индивидуальные данные к заданию 2

Вариант	Числа		Вариант	Числа	
	а	б		а	б
1	3459	23,394	11	10,21118	0,0002568
2	32,147	0,003775	12	4,394	37,8455
3	35,085	718,21	13	0,8437	0,09872
4	7,455	9,73491	14	129,66	3,00971
5	198,745	11,456	15	48,847	1,15874
6	37,47	0,1495	16	9,2038	0,003711
7	0,183814	6,2358	17	2,3143	0,029056
8	0,009145	4,4005	18	0,012147	4,5761
9	11,3721	2,3078	19	0,86129	0,003822
10	0,2538	3,2175	20	0,1385	0,095641

Таблица 3 – Индивидуальные данные к заданию 3

Вариант	Задание	Исходные данные	Вариант	Задание	Исходные данные
1	$z = \frac{4\sqrt{a+b}}{ab-c}$	a = 0,317 b = 3,27 c = 4,7561	11	$z = \frac{\ln(b) - a}{a^2 - 12c}$	a = 0,713 b = 3,72 c = 4,761
2	$z = \frac{\ln(b+c)}{b-ac}$	a = 0,0399 b = 4,83 c = 0,0721	12	$z = \frac{\ln(\tilde{n}) - 10a}{\sqrt{bc}}$	a = 82,3574 b = 3,12 c = 7,00493
3	$z = \frac{\sqrt{a+b}}{3a-c}$	a = 1,0574 b = 1,4 c = 1,1236	13	$z = \frac{10c + \sqrt{b}}{a^2 - b}$	a = 0,0976 b = 7,231 c = 1,15887
4	$z = \frac{ab - 4c}{\ln(a) + 3b}$	a = 12,72 b = 0,34 c = 0,0290	14	$z = \frac{(a - \tilde{n})^2}{\sqrt{a} + 3b}$	a = 1,0574 b = 1,46 c = 1,1236
5	$z = \frac{a - \operatorname{tg}(b)}{13c + b}$	a = 3,49 b = 0,845 c = 0,0037	15	$z = \frac{\sqrt{b-c}}{\ln(a) + b}$	a = 10,11587 b = 4,256 c = 3,0971

6	$z = \frac{ac + 3b}{\sqrt{b - c}}$	a = 0,0976 b = 2,371 c = 1,15887	16	$z = \frac{\sqrt[3]{a - c}}{2 \ln(a) + b}$	a = 3,75214 b = 3,3 c = 0,65667
7	$z = \frac{\ln(a - b)}{\sqrt{b + c}}$	a = 82,3574 b = 34,12 c = 7,00493	17	$z = \frac{(a + 4\pi)^3}{b - 5a^2}$	a = 4,5 b = 6,327 c = 0,3254
8	$z = \frac{a^2 - b}{\sqrt{ab - c}}$	a = 3,71452 b = 3,03 c = 0,756	18	$z = \left(\frac{a + 6b}{\ln(c) - a} \right)^3$	a = 12,27 b = 0,44 c = 0,2908
9	$z = \frac{b + \cos(c)}{3b + 2a}$	a = 0,11587 b = 4,256 c = 3,00971	19	$z = \left(\frac{2a + \cos(b)}{c - 3b} \right)$	a = 0,3947 b = 4,83 c = 10,721
10	$z = \frac{b - \pi}{2a + b}$	a = 4,05 b = 6,723 c = 0,03254	20	$z = \frac{4\sqrt{a + b}}{ab + c}$	a = 3,7452 b = 3,342 c = 0,756

Контрольные вопросы

1. Какую погрешность называют абсолютной, а какую относительной?
2. Что понимается под предельной абсолютной и предельной относительной погрешностью?
3. Какие цифры числа называются значащими?
4. Какую значащую цифру называют верной?
5. Запишите формулы для оценки погрешностей арифметических операций.

Практическая работа № 9

Построение распределений дискретных случайных величин

Цель работы: научиться строить биномиальные и геометрические распределения дискретных случайных величин.

Организационная форма занятий: решение проблемных задач, разбор конкретных ситуаций

Вопросы для обсуждения на практическом занятии: изучение методов построения распределений дискретных случайных величин

Формируемые компетенции: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПКД-1.1 ОПКД-1.2

Теоретическая часть

1. Биномиальное распределение имеет место, когда производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие может либо появиться, либо не появиться.

Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна и равна p , следовательно вероятность ненаступления равна $q = 1 - p$.

Биномиальным распределение определяется формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Пример 1. Построить закон распределения случайной величины X – количества домов, данных в эксплуатацию в срок, из 3 строящихся. Вероятность сдачи в эксплуатацию в срок для каждого дома одинакова и равна 0,9.

Решение

1. Возможные значения случайной величины X : $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$ или $x_3=3$.
2. Число испытаний (общее число строящихся домов): $n=3$.
Вероятность наступления события A в одном опыте (построить каждый дом в срок)
 $p = 0,9$.

3. Вероятности возможных значений p_i : определяем с помощью формулы Бернулли:

$$p_0 = P(x=0) = p_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = 1 * 0,9^0 * 0,1^3 = 0,001$$

$$p_1 = P(x=1) = p_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3 * 0,9^1 * 0,1^2 = 0,027;$$

$$p_2 = P(x=2) = p_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 * 0,9^2 * 0,1^1 = 0,243;$$

$$p_3 = P(x=3) = p_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 1 * 0,9^3 * 0,1^0 = 0,729.$$

Полученные значения помогают сформировать ряд распределения.

X	0	1	2	3
p	0,001	0,027	0,243	0,729

2. Распределение Пуассона – имеет место, когда производится большое количество испытаний, но вероятность появления события мала.

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ где } \lambda = np.$$

Пример 2. Завод отправил на базу 4000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие проверится, равно 0,0002. Найти закон распределения числа проверенных изделий (при подсчете используйте таблицу распределения Пуассона). Вариантов случайной величины X – числа проверенных изделий должно быть столько, чтобы сумма их вероятностей была близка к 1.

Решение

1) $\lambda = np = 4000 * 0,0002 = 0,8$

2) Возможные значения случайной величины X :

$$x_0=0, x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4 \text{ и т.д. до } x_{4000} = 4000.$$

3) По таблице распределения Пуассона получим:

$$P(x=0) = 0,449329$$

$$P(x=1) = 0,359463$$

$$P(x=2) = 0,143785$$

$$P(x=3) = 0,038343$$

$$P(x=4) = 0,007669$$

$$P(x=5) = 0,001227$$

4) Закон распределения:

X	0	1	2	3	4	5	...	4000
P	0,449329	0,359463	0,143785	0,038343	0,007669	0,001227	...	$\cong 0$

$$\sum_{i=0}^5 p_i \cong 0,999816 \cong 1$$

3. Геометрическое распределение – имеет место, когда производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события равна p . Испытания заканчиваются, как только появляется событие A .

Пример 3. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не попадет. Требуется составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку.

Решение

1. Возможные значения случайной величины X : $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \dots$
 $x_k = k$ и т.д.

2. Вероятности возможных значений:

$$p_1 = p = 0,8$$

$$p_2 = qp = 0,8 * 0,2 = 0,16$$

$$p_3 = q^2p = 0,8 * 0,2^2 = 0,032 \text{ и т.д.}$$

$$p_k = q^k p = 0,8 * 0,2^{k-1}$$

X	1	2	3	...	k	...
p	0,8	0,16	0,032	...	$0,8 * 0,2^{k-1}$	...

4. Гипергеометрическое распределение

Рассмотрим задачу. Пусть в партии из N изделий имеется M стандартных. Из партии случайно отбирают n изделий с одинаковой вероятностью,

причем отобранное изделие не возвращают обратно (поэтому формула Бернулли не работает). Найти вероятность, что среди отобранных изделий ровно m стандартных.

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Пример 4. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение

$N = 10$ – число деталей в партии;

$M = 8$ – число стандартных деталей;

$n = 2$ – число отобранных деталей;

m – число стандартных деталей среди отобранных.

1. Возможные значения случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных деталей: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.
2. Вероятности возможных значений:

$$P_0(x=0) = \frac{C_8^0 C_{10-8}^{2-0}}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

$$P_1(x=1) = \frac{C_8^1 C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{8 \cdot 2}{45} = \frac{16}{45}$$

$$P_2(x=2) = \frac{C_8^2 C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{8 \cdot 7 / (1 \cdot 2)}{45} = \frac{28}{45}$$

3. Закон распределения:

X	0	1	2
P	1/45	16/45	28/45

Задания

	I вариант	II вариант
--	-----------	------------

1.	Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. а) Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте. б) Чему равна вероятность, что откажет менее двух приборов в опыте? в) Построить многоугольник распределения.	По мишени проводится три выстрела с вероятностью попадания 0,8. а) Найти закон распределения случайной величины X – число попаданий в мишень. б) Чему равна вероятность, что произведено более одного попадания? в) Построить многоугольник распределения.
2.	Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти закон распределения числа бракованных книг (при подсчете используйте таблицу распределения Пуассона) Вариантов случайной величины X – количества бракованных книг должно быть столько, чтобы сумма их вероятностей была близка к 1.	Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение определенного времени равна 0,002. Найти закон распределения числа отказавших элементов (при подсчете используйте таблицу распределения Пуассона) Вариантов случайной величины X – числа отказавших элементов должно быть столько, чтобы сумма их вероятностей была близка к 1.
3.	Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0,6$. Требуется: а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку; б) найти наиболее вероятное число выданных стрелку патронов.	Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0,9$. Требуется: а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку; б) найти наиболее вероятное число выданных стрелку патронов.

4.	В партии из семи деталей имеется три стандартных. Наудачу отобраны три детали. а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных. б) найти наиболее вероятное число стандартных деталей среди отобранных.	В партии из восьми деталей имеется пять стандартных. Наудачу отобраны три детали. а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных. б) найти наиболее вероятное число стандартных деталей среди отобранных.
----	---	--

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В каких случаях для независимых испытаний удобно составлять биномиальное распределение, а в каких – распределение Пуассона?
2. В каких случаях можно составить геометрическое распределение?

[illegible]

Практическое занятие 10

Построение доверительных интервалов основных числовых характеристик выборки, параметров распределения и вероятности

Цель: изучить методы построения доверительных интервалов для основных числовых характеристик выборки, параметров распределения, вероятности.

Организационная форма занятий: решение проблемных задач, разбор конкретных ситуаций

Вопросы для обсуждения на практическом занятии: изучение методов построения доверительных интервалов для основных числовых характеристик выборки, параметров распределения, вероятности.

Формируемые компетенции: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПКД-1.1 ОПКД-1.2

Теоретическая часть

При использовании точечных оценок в процессе обработки статистической информации получается лишь приближенное значение неизвестного параметра.

Предположим, что некоторое событие A появилось с вероятностью α , то есть $P(A) = \alpha$, и эта величина достаточно мала. Введем в рассмотрение выборку $X_1, X_2, \dots, X_n$, элементы которой включаются в генеральную совокупность случайной величины ξ с функцией распределения $F_\xi(x, \theta)$, где θ – оцениваемый параметр.

Пусть найдено две функции $\underline{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющие условиям: 1) $\underline{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n) < \bar{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для всех элементов выборки, 2) $P(\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}) = 1 - \alpha$.

Тогда интервал $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ будем называть доверительным интервалом для параметра θ , соответствующим доверительной вероятности $P(A) = 1 - \alpha$

Рассмотрим методы построения доверительных интервалов для основных числовых характеристик выборки, параметров распределения и вероятностей.

Доверительные интервалы для математического ожидания

Пусть ξ – случайная величина, представляющая собой последовательность случайных чисел, подчиняющихся нормальному закону распределения. Будем считать, что математическое ожидание этой случайной величины a ($M_{\xi} = a$) не известно, а ее дисперсия D_{ξ} найдена. Тогда задача построения доверительного интервала для M_{ξ} сводится к отысканию величины a .

В качестве точечной оценки неизвестного параметра a будем рассматривать величину $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$. Так как выборочная средняя $\bar{x}$ является случайной величиной, то величина ζ , определяемая равенством $\zeta = \bar{x} - a$, также является случайной. Эти величины должны обладать следующими свойствами: 1) случайная величина $\bar{x}$ распределена нормально и ее математическое ожидание равно a , то есть $M_{\bar{x}} = a$; 2) случайная величина ζ также подчиняется нормальному закону распределения и ее математическое ожидание равно 0, то есть $M_{\bar{x}-a} = 0$; 3) $D_{\bar{x}-a} = D_{\xi}/n$, то есть дисперсия случайной величины ζ равна средней дисперсии генеральной совокупности ξ ; 4) случайная величина $\frac{\bar{x} - a}{\sqrt{D_{\xi}/n}}$ подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием, равным 0, и стандартным отклонением – 1.

Введем в рассмотрение функцию $\Phi(x)$, определяемую равенством:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} \cdot dz. \quad (10.1)$$

С помощью равенства (10.1) задается функция распределения случайной величины, удовлетворяющей нормальному закону распределения.

Пусть доверительная вероятность появления некоторого события равна α , то есть $p = \alpha$. Значение параметра x_α , соответствующего этой вероятности, можно найти, решив уравнение $\Phi(x_\alpha) = 1 - 0.5\alpha$.

Если последовательность случайных чисел ξ подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$, то вероятность попадания ее значений в интервал $(-x_\alpha, x_\alpha)$ будет равна $1 - \alpha$; это же условие выполняется и для случайной величины $\frac{\bar{x} - a}{\sqrt{D_\xi/n}}$. Таким образом, для вероятности $1 - \alpha$

имеет место неравенство

$$\bar{x} - x_\alpha \cdot \sqrt{\frac{D_\xi}{n}} \leq a \leq \bar{x} + x_\alpha \cdot \sqrt{\frac{D_\xi}{n}}. \quad (10.2)$$

Из неравенства (10.2) следует, что при $p = 1 - \alpha$ все значения неизвестного параметра a принадлежат интервалу $\left(\bar{x} - x_\alpha \cdot \sqrt{\frac{D_\xi}{n}}, \bar{x} + x_\alpha \cdot \sqrt{\frac{D_\xi}{n}} \right)$, тогда

$$\underline{\theta} = \bar{x} - x_\alpha \cdot \sqrt{\frac{D_\xi}{n}}, \text{ а } \bar{\theta} = \bar{x} + x_\alpha \cdot \sqrt{\frac{D_\xi}{n}}.$$

Предположим теперь, что неизвестным параметром является дисперсия случайной величины. Следовательно, задача построения доверительного интервала сводится к отысканию концов интервала, в который будут попадать все значения величины D_ξ .

Пусть случайная величина $\frac{\bar{x} - a}{\sqrt{D_\xi/n}}$ подчиняется закону распределения

Стьюдента с $(n-1)$ -й степенью свободы и $p = \alpha$ – доверительная вероятность.

Для построения доверительного интервала вначале следует найти значение параметра $t_{\alpha, n-1}$, который является решением уравнения $F_{n-1}(t_{\alpha, n-1}) = 1 - 0.5\alpha$, где $F_{n-1}(t_{\alpha, n-1})$ – функция распределения Стьюдента с $(n-1)$ -й степенью свободы.

Повторив цикл рассуждений, получим доверительный интервал $\left(\bar{x} - t_{\alpha, n-1} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}}, \bar{x} + t_{\alpha, n-1} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}} \right)$. Таким образом, полученный интервал целиком покрывает все значения неизвестного параметра с доверительной вероятностью $1 - \alpha$, то есть имеет место двойное неравенство

$$\bar{x} - t_{\alpha, n-1} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq a \leq \bar{x} + t_{\alpha, n-1} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}}. \quad (10.3)$$

Следовательно, $\underline{\theta} = \bar{x} - t_{\alpha, n-1} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}}$, а $\bar{\theta} = \bar{x} + t_{\alpha, n-1} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}}$

Доверительный интервал для дисперсии

Пусть задана случайная величина ξ , которая подчиняется нормальному закону распределения. Предположим, что известно математическое ожидание этой случайной величины и оно равно a , то есть $M_{\xi} = a$. Необходимо построить доверительный интервал для неизвестного параметра $D_{\xi} = \sigma^2$.

Будем считать, что оценка неизвестной дисперсии σ^2 может быть рассчитана по формуле: $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$. Пусть задано отношение

$$\frac{n \cdot \bar{\sigma}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - a}{\sigma} \right)^2.$$

Так как величины x_i ($i = \overline{1, n}$) являются элементами выборки, извлеченными из генеральной совокупности случайной величины ξ , то и величина $\frac{x_i - a}{\sigma}$ также является случайной и подчиняется нормальному закону распределения. Тогда случайная величина $\frac{n \cdot \bar{\sigma}^2}{\sigma^2}$ будет удовлетворять χ^2 -распределению с n степенями свободы.

Учитывая, что доверительная вероятность равна α , определим величины $\chi_{\ell, \alpha}^2$ и $\chi_{r, \alpha}^2$ таким образом, чтобы они удовлетворяли условиям:

Учитывая, что доверительная вероятность равна α , определим величины $\chi_{\ell, \alpha}^2$ и $\chi_{r, \alpha}^2$ таким образом, чтобы они удовлетворяли условиям:

$$P\left(\frac{n \cdot \bar{\sigma}^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\ell, \alpha}^2\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad P\left(\frac{n \cdot \bar{\sigma}^2}{\sigma^2} \geq \chi_{r, \alpha}^2\right) = \frac{\alpha}{2}. \quad (10.4)$$

Из равенств (10.4) следует, что

$$P\left(\chi_{\ell, \alpha}^2 \leq \frac{n \cdot \bar{\sigma}^2}{\sigma^2} \leq \chi_{r, \alpha}^2\right) = 1 - \alpha. \quad (10.5)$$

Тогда на основании равенства (10.5) для вероятности $p=1-\alpha$ имеет место неравенство для оценки неизвестного параметра σ^2 :

$$P\left(\chi_{\ell, \alpha}^2 \leq \frac{n \cdot \bar{\sigma}^2}{\sigma^2} \leq \chi_{r, \alpha}^2\right) = 1 - \alpha. \quad (10.6)$$

Следовательно, $\left(\frac{n \cdot \bar{\sigma}^2}{\chi_{r, \alpha}^2}, \frac{n \cdot \bar{\sigma}^2}{\chi_{\ell, \alpha}^2}\right)$ – доверительный интервал для неизвестной дисперсии σ^2 .

Предположим теперь, что для случайной величины ξ , представляющей собой последовательность случайных чисел, распределенных в соответствии с нормальным законом, известна ее дисперсия D_ξ , а неизвестным является ее математическое ожидание M_ξ . Задача поиска доверительного интервала для D_ξ заключается в поиске интервала, которому бы принадлежали все значения σ^2 , если не известно M_ξ .

Пусть $\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}\right)^2$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$. По аналогии с предыдущим случаем введем в рассмотрение случайную величину $\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2}$, которая подчиняется χ^2 - распределению с $(n-1)$ -й степенью свободы. Используя это распределение, вычислим значения величин $\chi_{\ell, \alpha}^2$ и $\chi_{r, \alpha}^2$, удовлетворяющих условиям:

$$P\left(\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\ell, \alpha}^2\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad P\left(\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} \geq \chi_{r, \alpha}^2\right) = \frac{\alpha}{2}. \quad (10.7)$$

Тогда для доверительной вероятности $p = 1 - \alpha$ имеет место равенство:

$$P\left(\chi_{\ell, \alpha}^2 \leq \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} \leq \chi_{r, \alpha}^2\right) = 1 - \alpha. \quad (10.8)$$

Из равенства (10.8) следует оценка неизвестного параметра σ^2 :

$$\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi_{r, \alpha}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi_{\ell, \alpha}^2}. \quad (10.9)$$

Следовательно, интервал $\left(\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi_{r, \alpha}^2}, \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi_{\ell, \alpha}^2}\right)$ – доверительный интервал неизвестной дисперсии σ^2 .

Доверительный интервал для оценки параметров пуассоновского распределения

Пусть задана случайная величина ξ , подчиняющаяся распределению Пуассона с заданным параметром λ и $X_1, X_2, \dots, X_n$ – произвольная выборка из этой последовательности. Задача построения доверительного интервала для заданного параметра λ заключается в отыскании такого интервала, в который попадают все его значения.

Если α – доверительная вероятность, а x_α – решение уравнения $\Phi(x_\alpha) = 1 - 0.5\alpha$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, определяемая равенством (10.1), то для любого значения параметра λ имеет место равенство:

$$P\left(\left|\frac{2 \cdot \sqrt{\hat{\lambda}} - 2 \cdot \sqrt{\lambda}}{\sqrt{1/n}}\right| < x_\alpha\right) \approx 1 - \alpha. \quad (10.10)$$

Тогда доверительный интервал параметра λ можно задать в виде $\left(\left(\sqrt{\hat{\lambda}} - \frac{x_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2, \left(\sqrt{\hat{\lambda}} + \frac{x_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2\right)$. В этот интервал попадают все значения оцениваемого параметра λ с вероятностью $p = 1 - \alpha$.

Доверительный интервал вероятности

Как и при построении доверительных интервалов для основных характеристик выборки (математического ожидания, дисперсии) введем доверительную вероятность $p = 1 - \alpha$. Если параметр X_α есть решение уравнения $\Phi(X_\alpha) = 1 - 0.5\alpha$, где $\Phi(x)$ – функция, определяемая равенством (9.1), то с вероятностью, равной $1 - \alpha$, все значения оцениваемого параметра p будут принадлежать интервалу:

$$\left(\sin^2 \left(\arcsin(\sqrt{\hat{p}}) - \frac{X_\alpha}{\sqrt{2/n}} \right), \sin^2 \left(\arcsin(\sqrt{\hat{p}}) + \frac{X_\alpha}{\sqrt{2/n}} \right) \right). \quad (10.11)$$

Если $n \rightarrow \infty$, то концы доверительного интервала определяются с большей точностью.

Доверительный интервал для коэффициента корреляции

Пусть задана непрерывная или дискретная двумерная случайная величина (ξ, η) и элементы $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ образуют выборку из этой случайной величины. Точечной оценкой для коэффициента корреляции k , указывающего взаимосвязь между значениями случайных величин ξ и η , является выборочный коэффициент корреляции $\hat{k}$.

Алгоритм расчета выборочного коэффициента корреляции заключается в следующем:

1) вычислите значения выборочных средних для переменных x и y :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i;$$

2) рассчитайте значения среднеквадратичных отклонений для переменных x и y и среднего значения произведения этих величин:

$$\bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad \bar{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \quad \bar{m} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) \cdot (x_i - \bar{x});$$

3) используя формулу $\bar{k} = \frac{\bar{m}}{\sqrt{\bar{\sigma}_x^2 \cdot \bar{\sigma}_y^2}}$, найдите значение выборочного ко-

эффициента корреляции.

Для оценки коэффициента корреляции можно также использовать формулу:

$$\bar{k} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right)}} \quad (10.12)$$

По аналогии с предыдущими случаями, пусть доверительная вероятность равна α , x_α – решение уравнения $\Phi(x_\alpha) = 1 - 0.5\alpha$.

Следовательно, доверительный интервал, в который попадают все значения $k_{\xi, \eta}$ с вероятностью $p = 1 - \alpha$, можно задать в виде:

$$\left(\theta \left(\operatorname{arth}(\bar{k}) - \frac{x_\alpha}{\sqrt{n-3}} \right), \theta \left(\operatorname{arth}(\bar{k}) + \frac{x_\alpha}{\sqrt{n-3}} \right) \right), \quad (10.13)$$

где $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ – гиперболический тангенс, $\operatorname{arth}(x)$ – функция, обратная гиперболическому тангенсу.

Задание 1. Сгенерируйте последовательность случайных чисел $N = 200$, подчиняющуюся нормальному закону распределения с параметрами: $\mu = 100$, $\sigma = 10$. Из полученной последовательности сформируйте выборку объемом: $n = 20$. Постройте доверительные интервалы для M_ξ и D_ξ .

Задание 2. Сгенерируйте последовательность случайных чисел, состоящую из 350 элементов и подчиняющуюся распределению Пуассона с параметром $\lambda = 0.1 \cdot N$, где N – номер варианта. Сформируйте из этой последовательности выборки различного объема. Для полученных выборок постройте доверительный интервал параметра λ .

Задание 3. Смоделируйте последовательность случайных чисел, состоящую из трехсот элементов и подчиняющихся биномиальному закону распределения с неизвестным параметром p . Постройте доверительный интервал для

вероятности события по заданным значениям числа испытаний n и числа m появления событий в серии из N_1 испытаний.

Задание № 4. Постройте доверительный интервал для коэффициента корреляции по заданной выборке $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

Варианты заданий

Вариант для выполнения заданий, приведенных в практической работе, и текст заданий получить у преподавателя.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение доверительного интервала.
2. Построение доверительного интервала математического случайной величины, если известно значение дисперсии.
3. Алгоритм построения доверительного интервала математического ожидания, если ее дисперсия неизвестна.
4. Доверительный интервал дисперсии случайной величины. Методика построения этого интервала, если известно математическое ожидание.
5. Последовательность действий при построении доверительного интервала дисперсии случайной величины при неизвестном математическом ожидании.
6. Алгоритм построения доверительного интервала для оценки параметров пуассоновского распределения.
7. Доверительный интервал вероятности. Алгоритм построения.
8. Алгоритм вычисления выборочного коэффициента корреляции.
9. Построение доверительного интервала коэффициента корреляции.

Практическая работа 11.

Проверка статистических гипотез

Цель: изучить классификацию статистических гипотез, сформулировать основные задачи проверки гипотез числовых характеристик выборки, .

Организационная форма занятий: решение проблемных задач, разбор конкретных ситуаций

Вопросы для обсуждения на практическом занятии: изучение методов проверки гипотез числовых характеристик выборки

Формируемые компетенции: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПКД-1.1 ОПКД-1.2

Теоретическая часть

Пусть задана случайная величина ξ , подчиняющаяся нормальному закону распределения. Если θ – один из параметров этого распределения и $\theta_0 = \theta$ – его точное значение, то величину $\hat{\theta}$ можно считать его точечной оценкой.

При обработке и анализе статистической информации актуальными являются вопросы: 1) какова величина отклонения точечной оценки $\hat{\theta}$ от точного значения параметра θ_0 ; 2) какова степень уверенности, что точное значение θ не будет совпадать с θ_0 , то есть определить степень уверенности при выполнении условия $\theta_0 \neq \theta$.

Пусть $P(\hat{\theta} - \theta) = \alpha$ – вероятность события, что отклонение $\hat{\theta} - \theta$ больше некоторого заданного числа, причем значение этой вероятности ищется из условия $\theta = \theta_0$. Если $\alpha \rightarrow 0$, то событие $\hat{\theta} - \theta$ является маловероятным. В этом случае говорят, что отличие точечной оценки от точного значения параметра является значимым и гипотеза о равенстве параметров θ и θ_0 отвергается. Если же $\alpha \rightarrow 1$, тогда отклонение $\hat{\theta}$ от θ обусловлено естественными факторами (погрешностью измерений и т. д.), а, следовательно, гипотеза о равенстве $\theta = \theta_0$ принимается.

Пусть $\hat{\theta}$ – выборочное значение некоторого неизвестного или заданного оцениваемого параметра, а $p_{\hat{\theta}}$ – функция распределения вероятности $\hat{\theta}$, при условии, что вероятность была найдена при $\theta = \theta_0$.

Нулевой гипотезой называется первоначально выдвинутая гипотеза H_0 . Конкурирующей (альтернативной) H_1 называется гипотеза, которая противоречит нулевой.

Критической областью будем называть все значения критерия, при которых отвергается нулевая гипотеза, тогда *область принятия гипотезы* – совокупность значений критерия, при которых H_0 принимается.

Критерий – случайная величина, служащая для проверки гипотезы H_0 .

Критическими точками θ_{left} и θ_{right} будем называть точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы. Критические точки θ_{left} и θ_{right} должны удовлетворять условиям: $P(\hat{\theta} < \theta_{\text{left}}) = \frac{\alpha}{2}$ и $P(\hat{\theta} > \theta_{\text{right}}) = \frac{\alpha}{2}$.

Уровнем значимости при проверке гипотез называют вероятность α , которая использовалась для вычисления концов интервала $(\theta_{\text{left}}, \theta_{\text{right}})$. При проверке статистических гипотез выделяют *одностороннюю* или *двустороннюю* критические области.

Односторонней критической областью называют правостороннюю или левостороннюю критические области. *Левосторонняя критическая область* определяется неравенством $\hat{\theta} < \theta_0$, а правосторонняя соответственно неравенством $\hat{\theta} > \theta_0$. Двусторонней будем называть критическую область, удовлетворяющую условиям: $\hat{\theta} < \theta_0$ и $\hat{\theta} > \theta_0$.

Принцип проверки статистических гипотез заключается в следующем: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то гипотезу отвергают; если же наблюдаемое значение принадлежит области принятия, то гипотезу принимают.

Ошибка первого рода при проверке статистических гипотез возникает, если отклоняется верная гипотеза. *Ошибка второго рода* связана с принятием ложной гипотезы.

Проверка гипотезы о числовом значении математического ожидания при известной дисперсии

Пусть ξ – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения, M_ξ – неизвестное математическое ожидание этой случайной величины, $M_\xi = a$, D_ξ – известная дисперсия, $D_\xi = \sigma^2$. Введем нулевую гипотезу H_0 – неизвестный параметр a равен заданному числу a_0 , то есть $H_0: a = a_0$. В этом случае альтернативная (конкурирующая) гипотеза может быть сформулирована одним из способов: 1) $H_1: a \neq a_0$, 2) $H_1: a > a_0$, 3) $H_1: a < a_0$.

Проверим первую из альтернативных гипотез. Пусть $H_0: a = a_0$ и $H_1: a \neq a_0$, α – уровень значимости.

Если $x_1, x_2, \dots, x_n$ является выборкой из случайной величины ξ , то значение критерия можно найти по формуле:

$$\varphi = \frac{\bar{x} - a}{\sqrt{\sigma^2/n}}, \quad (11.1)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$.

Построим для критерия φ критическую область. Построение критической области заключается в определении ее граничных точек $x_{l,\alpha}$ и $x_{r,\alpha}$, которые должны удовлетворять условиям:

$$P(\varphi < x_{l,\alpha}) = \frac{\alpha}{2}, \quad P(\varphi > x_{r,\alpha}) = \frac{\alpha}{2}. \quad (11.2)$$

Значения $x_{l,\alpha}$ и $x_{r,\alpha}$, являются симметричными относительно нуля, причем правая граница $x_{r,\alpha}$ является решением уравнения $\Phi(x_{r,\alpha}) = 1 - 0.5 \cdot \alpha$, а левая – $x_{l,\alpha} = -x_{r,\alpha}$.

После того как найдены границы критической области, необходимо вычислить по этой выборке значение критерия φ и проверить, попадает ли его значение в критическую область.

Если $\varphi < x_{l,\alpha}$ или $\varphi > x_{r,\alpha}$, то нулевая гипотеза H_0 отвергается, а верной признается альтернативная гипотеза H_1 . Если же $\varphi \in (x_{l,\alpha}, x_{r,\alpha})$, то верной считается гипотеза H_0 .

Пусть нулевая гипотеза $H_0: a = a_0$ остается той же самой, а в качестве альтернативной рассмотрим гипотезу $H_1: a > a_0$.

Как и для гипотезы $H_1: a \neq a_0$, зададим уровень значимости $-\alpha$. В данном случае критерий для проверки альтернативной гипотезы можно вычислить по формуле (3.1). В этом случае критическая область, в которую попадают все значения критерия φ , при которых гипотеза H_0 отвергается, является правосторонней. Следовательно, критическая область удовлетворяет условию $P(\varphi > x_{r,\alpha}) = \alpha$, где $x_{r,\alpha}$ является корнем уравнения $\Phi(x_{r,\alpha}) = 1 - \alpha$.

Как только найдена граница критической области, следует проверить, принадлежит ли найденное значение критерия φ этой области. При $\varphi > x_{r,\alpha}$ гипотеза H_0 отвергается, при $\varphi < x_{r,\alpha}$ — H_0 принимается.

Для сравнения нулевой гипотезы $H_0: a = a_0$ с конкурирующей гипотезой $H_1: a < a_0$ введем заранее известное значение уровня значимости и вычислим значение критерия по формуле (11.1).

В этом случае критическая область является односторонней, в частности, левосторонней, при этом критическая точка будет удовлетворять условию $P(\varphi < x_{l,\alpha}) = \alpha$, и значение $x_{l,\alpha}$ можно вычислить, используя формулу $x_{l,\alpha} = -x_{r,\alpha}$, где $x_{r,\alpha}$ — корень уравнения $\Phi(x_{r,\alpha}) = 1 - \alpha$.

После отыскания границы критической области необходимо сравнить вычисленное значение критерия φ с найденными значениями границ и проверить выполнение условия попадания его в критическую область. Если значение критерия φ меньше $x_{l,\alpha}$, то есть $\varphi < x_{l,\alpha}$, то сформулированная нулевая ги-

гипотеза H_0 отвергается, а верной признается (принимается) альтернативная гипотеза H_1 , в противном случае $\varphi > x_{1,\alpha}$ гипотеза H_0 принимается (не отвергается).

Проверка гипотезы о числовом значении математического ожидания при неизвестной дисперсии

Пусть $M_\xi = a$ – неизвестное математическое ожидание некоторой случайной величины, $D_\xi = \sigma^2$ – неизвестная дисперсия. $x_1, x_2, \dots, x_n$ – выборка значений случайной величины ξ .

Вновь первоначально выдвинем нулевую гипотезу H_0 – неизвестный параметр a равен заданному числу a_0 , то есть $H_0: a = a_0$, и три альтернативные (конкурирующие) гипотезы: 1) $H_1: a \neq a_0$, 2) $H_1: a > a_0$, 3) $H_1: a < a_0$.

В этом случае для проверки альтернативных гипотез используется критерий, значение которого можно определить по формуле:

$$\varphi = \frac{\bar{x} - a}{\sqrt{s^2/n}}. \quad (11.3)$$

Если нулевая гипотеза H_0 является верной, то этот критерий является случайной величиной, подчиняющейся распределению Стьюдента с $(n - 1)$ – й степенью свободы.

Проверим каждую из альтернативных гипотез при заданном уровне значимости α .

1. Пусть $H_0: a = a_0$ и $H_1: a \neq a_0$. В этом случае критическая область является двусторонней, и численные значения ее границ могут быть найдены, учитывая условия (2). Так как распределение Стьюдента является симметричным, то вначале вычисляется значение $x_{r,\alpha}$, а затем $x_{l,\alpha}$. Значение $x_{r,\alpha}$ является корнем уравнения $F_{n-1}(x_{r,\alpha}) = 1 - 0.5 \cdot \alpha$, где $F_{n-1}(x)$ – функция распределения Стьюдента с $(n - 1)$ – й степенью свободы.

После того как найдены границы критической области, а, следовательно, определена и область, которой не принадлежит найденное значение критерия, необходимо проверить условие его принадлежности этой области.

Если критерий φ удовлетворяет одному из условий $\varphi < x_{l,\alpha}$ или $\varphi > x_{r,\alpha}$, то отвергается начальная гипотеза H_0 , а принимается альтернативная гипотеза $H_1: a \neq a_0$. Если же $\varphi \in (x_{l,\alpha}, x_{r,\alpha})$, то принимается гипотеза H_0 .

Если в качестве альтернативной рассматривать гипотезу $H_1: a > a_0$, то критическая область для значений критерия φ , при которых отвергается нулевая гипотеза H_0 , является правосторонней, то есть представляет собой полузакрытый интервал $(x_{r,\alpha}, \infty)$. Значение границы критической области, то есть величины $x_{r,\alpha}$, в этом случае можно определить из условия $P(\varphi > x_{r,\alpha}) = \alpha$, где $x_{r,\alpha}$ – корень уравнения $F_{n-1}(x_{r,\alpha}) = 1 - \alpha$ при заданном уровне значимости α .

Далее для проверки альтернативной гипотезы следует сравнить найденное по формуле (3.3) значение критерия с полученной границей. Если значение критерия φ удовлетворяет условию $\varphi > x_{r,\alpha}$, то нулевая гипотеза отвергается, а принимается альтернативная. При выполнении неравенства $\varphi < x_{r,\alpha}$ принимается гипотеза H_0 .

При проверке альтернативной гипотезы $H_1: a < a_0$ критическая область для критерия φ является левосторонней, то есть описывается интервалом $(-\infty, x_{l,\alpha})$. Ее граница в этом случае удовлетворяет условию $P(\varphi < x_{l,\alpha}) = \alpha$, а численное значение можно вычислить, используя формулу $x_{l,\alpha} = -x_{r,\alpha}$, где $x_{r,\alpha}$ – решение уравнения $F(x_{r,\alpha}) = 1 - \alpha$, параметр α – уровень значимости.

Если полученное значение критерия φ попадает в критическую область, то есть удовлетворяет неравенству $\varphi < x_{l,\alpha}$, то нулевая гипотеза отвергается, а

признается верной альтернативная гипотеза. При выполнении условия $\varphi > x_{1,\alpha}$ гипотеза H_0 не отвергается.

Проверка гипотезы о числовом значении дисперсии

Пусть задана величина ξ , представляющая собой последовательность случайных чисел, подчиняющихся нормальному закону распределения и $x_1, x_2, \dots, x_n$ – произвольная выборка значений из этой случайной величины.

Сформулируем нулевую гипотезу H_0 – значение дисперсии D для нормального распределения равно заданному числу D_0 , то есть $H_0: D = D_0$. Альтернативная (конкурирующая) гипотеза о числовом значении дисперсии может быть сформулирована одним из способов: 1) $H_1: D \neq D_0$, 2) $H_1: D > D_0$, 3) $H_1: D < D_0$.

Для проверки гипотезы о числовом значении дисперсии введем параметр α – уровень значимости.

В качестве критерия для сравнения нулевой и альтернативной гипотез будем рассматривать величину φ , значение которой можно вычислить по формуле:

$$\varphi = (n - 1) \cdot \frac{s^2}{D_0}, \quad (11.4)$$

где величина s^2 – точечная оценка дисперсии.

При сравнении гипотез о числовом значении дисперсии критерий φ будет удовлетворять χ^2 - распределению с $(n - 1)$ - й степенью свободы.

1. Проверим гипотезу о числовом значении дисперсии, если $H_1: D \neq D_0$. В этом случае критическая область является двусторонней и ее границы будут удовлетворять условиям (2). Пусть α – заданный уровень значимости. Построение критической области заключается в отыскании $x_{l,\alpha}$ и $x_{r,\alpha}$: $x_{l,\alpha}$ – решение уравнения $F_{n-1}(x_{l,\alpha}) = 0.5 \cdot \alpha$, а $x_{r,\alpha}$ – корень уравнения $F_{n-1}(x_{r,\alpha}) = 1 - 0.5 \cdot \alpha$,

где $F_{n-1}(x)$ – функция, подчиняющаяся χ^2 - распределению с $(n - 1)$ – й степенью свободы.

После того как найдены границы критической области и вычислено значение критерия φ , следует проверить, попадает ли оно в критическую область.

Если $\varphi < x_{l,\alpha}$ или $\varphi > x_{r,\alpha}$, то нулевая гипотеза H_0 отвергается, а верной признается альтернативная гипотеза H_1 . Если же $\varphi \in (x_{l,\alpha}, x_{r,\alpha})$, то верной считается гипотеза H_0 .

2. Если альтернативной гипотезе H_0 является гипотеза $H_1: D > D_0$, то критическая область для критерия φ , при которых гипотеза H_0 отвергается, является правосторонней, то есть $\varphi \in (x_{r,\alpha}, +\infty)$. Следовательно, критическая точка удовлетворяет условию $P(\varphi > x_{r,\alpha}) = \alpha$, причем $x_{r,\alpha}$ является решением уравнения $F_{n-1}(x_{r,\alpha}) = 1 - \alpha$, если α – заданный уровень значимости.

Используя формулу (4), следует вычислить значение критерия φ и проверить условие его принадлежности к критической области. При выполнении условия $\varphi > x_{r,\alpha}$ гипотеза H_0 отвергается, а H_1 принимается, при выполнении же обратного неравенства верной считается гипотеза H_0 , а отвергается H_1 .

В том случае, если в качестве альтернативной гипотезы рассматривается $H_1: D < D_0$, то критическая область для параметра φ представляет собой интервал $(0, x_{l,\alpha})$, то есть она является левосторонней критической областью. Граница этой области $x_{l,\alpha}$ может быть найдена из уравнения $F_{n-1}(x_{l,\alpha}) = \alpha$, $x_{l,\alpha} = -x_{r,\alpha}$ и должна удовлетворять условию $P(\varphi < x_{l,\alpha}) = \alpha$, где α – заданный уровень значимости.

Если же после расчета значения критерия φ выясняется, что оно принадлежит критической области, то есть $\varphi < x_{l,\alpha}$, то гипотеза $H_0: D = D_0$ отвергается, а принимается гипотеза $H_1: D < D_0$ при выполнении условия $\varphi > x_{l,\alpha}$

Задание 1. Сгенерируйте последовательность случайных чисел, подчиняющихся нормальному закону распределения: количество чисел – 200, математическое ожидание (μ) – 100, стандартное отклонение (σ) – 10. Из элементов этой последовательности выберите выборку объемом 150. Задайте нулевую гипотезу о величине математического ожидания. Сформулируйте альтернативную гипотезу H_1 : 1) $a \neq a_0$, 2) $a > a_0$, 3) $a < a_0$. Проверьте эту гипотезу при заданном уровне значимости α при условии, что дисперсия известна.

Задание 2. Используя сформированную в задании 1 последовательность случайных чисел и выборку, сформулируйте нулевую гипотезу о величине математического ожидания. Задайте альтернативную гипотезу H_1 : 1) $a \neq a_0$, 2) $a > a_0$, 3) $a < a_0$. Проверьте эту гипотезу при заданном уровне значимости α , при условии что дисперсия не известна.

Задание 3. Для выборки, сформированной в задании № 1, сформируйте нулевую гипотезу $H_0: D=D_0$. Задайте три альтернативные гипотезы. Проверьте эти гипотезы для заданного уровня значимости α .

Варианты заданий

Уровень значимости для вариантов 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 и 20 считать равным 0,95, а для вариантов 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 – $\alpha = 0,9$

Параметры a (математическое ожидание) и σ (стандартное отклонение) для выполнения заданий 1 – 3 следует выбрать из таблицы

№	a	σ	№	a	σ	№	a	σ	№	a	σ
1	0.1	1.5	6	3.2	5	11	4.5	3.1	16	4.2	6
2	0.2	2	7	1.5	0.1	12	5	3.2	17	3	1.2
3	1.1	2.5	8	2	0.2	13	1.2	3	18	3.5	2.1
4	2.2	4	9	2.5	1.1	14	2.1	3.5	19	5.5	4.1
5	3.1	4.5	10	4	2.2	15	4.1	5.5	20	6	4.2

Контрольные вопросы

1. Основные определения теории статистических гипотез.

2. Проверка гипотез о числовом значении математического ожидания при известной дисперсии.
3. Методика проверки гипотезы о числовом значении математического ожидания, если не известно значение дисперсии.
4. Последовательность действий при проверке гипотез о числовом значении математического ожидания при неизвестной дисперсии.
5. Проверка гипотезы о числовом значении дисперсии.
6. Алгоритм проверки гипотезы о числовом значении дисперсии.

Практическая работа 12.

Проверка статистических гипотез о равенстве математических ожиданий

Цель: сформулировать основные задачи проверки гипотез о равенстве значений математических ожиданий выборок.

Организационная форма занятий: решение проблемных задач, разбор конкретных ситуаций

Вопросы для обсуждения на практическом занятии: изучение методов проверки гипотез о равенстве значений математических ожиданий выборок.

Формируемые компетенции: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПКД-1.1 ОПКД-1.2

Теоретическая часть

Нулевой гипотезой называется первоначально выдвинутая гипотеза H_0 . Конкурирующей (альтернативной) H_1 называется гипотеза, которая противоречит нулевой.

Принцип проверки статистических гипотез заключается в следующем: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то гипотезу отвергают; если же наблюдаемое значение принадлежит области принятия, то гипотезу принимают.

Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий при известных дисперсиях

Пусть ξ и η величины, представляющие собой последовательность случайных чисел, подчиняющихся нормальному закону распределения с параметрами a_ξ и σ_ξ^2 , a_η и σ_η^2 соответственно, последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ – выборки из случайных величин ξ и η , причем математическое ожидание для каждой из выборок обоих случайных величин $M_\xi = a_\xi$, $M_\eta = a_\eta$ не известно, а параметры $\sigma_\xi^2 = D_\xi$ и $\sigma_\eta^2 = D_\eta$ считаются известными.

Учитывая тот факт, что случайные величины ξ и η являются независимыми, проверим нулевую гипотезу $H_0 : a_\xi = a_\eta$. Альтернативной гипотезой в данном случае может быть одна из гипотез: 1) $H_1 : a_\xi \neq a_\eta$, 2) $H_1 : a_\xi > a_\eta$, 3) $H_1 : a_\xi < a_\eta$.

Для получения аналитического выражения, при помощи которого можно вычислить значения критерия φ , применяемого в процессе проверки гипотезы H_0 , введем в рассмотрение случайные величины $\bar{X}$, $\bar{Y}$ и $\bar{X} - \bar{Y}$.

При этом величины $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ будут подчиняться нормальному закону распределения с параметрами $M_{\bar{X}} = a_\xi$, $D_{\bar{X}} = \frac{\sigma_\xi^2}{N}$ и $M_{\bar{Y}} = a_\eta$, $D_{\bar{Y}} = \frac{\sigma_\eta^2}{M}$ соответственно, тогда $\bar{X} - \bar{Y}$ также подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $M_{\bar{X}-\bar{Y}} = a_\xi - a_\eta$, $D_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{\sigma_\xi^2}{N} + \frac{\sigma_\eta^2}{M}$, где N и M – число элементов в выборке.

Пусть нулевая гипотеза $H_0 : a_\xi = a_\eta$ принимается, то есть считается верной. Тогда величина φ , определяемая равенством

$$\varphi = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_\xi^2}{N} + \frac{\sigma_\eta^2}{M}}}, \quad (13.1)$$

также будет подчиняться нормальному закону распределения, причем со стандартными значениями параметров $\mu = 0$ и $\sigma = 1$.

Проверим нулевую гипотезу $H_0 : a_\xi = a_\eta$, если задана альтернативная гипотеза $H_1 : a_\xi \neq a_\eta$.

Пусть α – заданный уровень значимости. Для выдвинутой альтернативной гипотезы критическая область будет двусторонней, и ее границы будут удовлетворять условиям, задаваемым при помощи равенств (2) из лабораторной работы № 2, то есть ее левая граница – $x_{l,\alpha} = -x_{r,\alpha}$, а правая граница $x_{r,\alpha}$ – корень уравнения $\Phi(x_{r,\alpha}) = 1 - 0.5 \cdot \alpha$ и $\Phi(x)$ – функция распределения для нормального распределения с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$.

После отыскания границ критической области и вычисления значения критерия φ по выборкам выясняется, принадлежит ли полученное число критической области. Если значение φ удовлетворяет одному из условий $\varphi < x_{l,\alpha}$ или $\varphi > x_{r,\alpha}$, то гипотеза H_0 будет отвергнута, а гипотеза $H_1 : a_\xi \neq a_\eta$ принимается. В том случае, если $\varphi \in (x_{l,\alpha}, x_{r,\alpha})$, то принимается гипотеза H_0 .

Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий при равных неизвестных дисперсиях

Пусть ξ и η величины, представляющие собой последовательность случайных чисел, распределенных в соответствии с нормальным законом распределения с параметрами μ_ξ и σ_ξ , μ_η и σ_η , последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ – выборки из случайных величин ξ и η , причем математическое ожидание для каждой из выборок обеих случайных величин $\mu_\xi = M_\xi = a_\xi$, $\mu_\eta = M_\eta = a_\eta$ не известно, значения дисперсий для каждой из выборок $\sigma^2 = D_\xi$ и $\sigma^2 = D_\eta$ считается не известным и равными между собой $D_\xi = D_\eta$.

Для определения критерия проверки нулевой гипотезы H_0 – о равенстве значений математических ожиданий этих случайных величин ($H_0 : a_\xi = a_\eta$) –

вначале найдем значения величин $\bar{X}$, $\bar{y}$, s_{ξ}^2 и s_{η}^2 . Формулы для вычисления значений этих величин приведены в лабораторной работе № 10. Величины, являющиеся средними значениями по выборкам, $\bar{X}$ и $\bar{y}$ подчиняются нормальному закону распределения с параметрами: математическое ожидание – a_{ξ} и a_{η} , стандартное отклонение – $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ и $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$, тогда как величины s_{ξ}^2 и s_{η}^2 будут подчиняться χ^2 -распределению с $(N-1)$ -й и $(M-1)$ -й степенями свободы соответственно.

Так как рассматриваемые случайные величины ξ и η являются независимыми, то статистическая характеристика, определяемая равенством $\frac{(N-1) \cdot s_{\xi}^2}{\sigma^2} + \frac{(M-1) \cdot s_{\eta}^2}{\sigma^2}$, будет подчиняться χ^2 -распределению с $(N+M-2)$

степенями свободы. Величина $\bar{x} - \bar{y}$ распределена в соответствии с нормальным законом с параметрами $M_{\bar{x}-\bar{y}} = a_{\xi} - a_{\eta}$, $D_{\bar{x}-\bar{y}} = \frac{\sigma^2}{N} + \frac{\sigma^2}{M}$, где N и M –

число элементов в выборке. Тогда и величина $\frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (a_{\xi} - a_{\eta})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N} + \frac{\sigma^2}{M}}}$ представляет

собой последовательность случайных величин, распределенных нормально с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$, а отношение, задаваемое равенством

$\frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (a_{\xi} - a_{\eta})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N} + \frac{\sigma^2}{M}} \cdot \sqrt{\left(\frac{(N-1) \cdot s_{\xi}^2}{\sigma^2} + \frac{(M-1) \cdot s_{\eta}^2}{\sigma^2} \right) \cdot \frac{1}{N+M-2}}}$, подчиняется распределе-

нию Стьюдента с $(N+M-2)$ степенями свободы.

Если нулевая гипотеза $H_0 : a_{\xi} = a_{\eta}$ верна, то параметр φ , определяемый с помощью равенства

$$\varphi = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M} \right) \cdot \frac{(N-1) \cdot s_{\xi}^2 + (M-1) \cdot s_{\eta}^2}{N+M-2}}}, \quad (13.2)$$

подчиняется распределению Стьюдента с $(N + M - 2)$ степенями свободы.

Предположим, что параметр φ является критерием для проверки гипотезы H_0 . Конкурирующую гипотезу можно сформулировать одним из способов: 1) $H_1: a_\xi \neq a_\eta$, 2) $H_1: a_\xi > a_\eta$, 3) $H_1: a_\xi < a_\eta$.

Пусть альтернативной к гипотезе $H_0: a_\xi = a_\eta$ является гипотеза $H_1: a_\xi \neq a_\eta$ и величина α – известный по условию уровень значимости. Тогда вначале для проверки H_0 построим критическую область. В этом случае она является двусторонней. Границами этой области являются точки $X_{l,\alpha}$ и $X_{r,\alpha}$, значения которых можно найти, решив уравнения: $F_{N+M-2}(x_{l,\alpha}) = 0.5\alpha$ и $F_{N+M-2}(x_{r,\alpha}) = 1 - 0.5\alpha$, где $F_{N+M-2}(x)$ – теоретическая функция распределения Стьюдента с $(N + M - 2)$ степенями свободы.

После определения числовых значений границ критической области и критерия φ следует проверить условие его принадлежности этой области. Если значение критерия удовлетворяет одному из условий, определяемых с помощью неравенств $\varphi < X_{l,\alpha}$ или $\varphi > X_{r,\alpha}$, то нулевую гипотезу отвергают, а признают верной гипотезу H_1 . При $\varphi \in (X_{l,\alpha}, X_{r,\alpha})$ принимается нулевая гипотеза $H_0: a_\xi = a_\eta$.

Задание № 1. Из последовательности случайных чисел смоделируйте две выборки объемами 100 и 120 элементов соответственно. Эта выборка, как и вся последовательность, будет подчиняться нормальному закону распределения с заданными параметрами. Сформулируйте нулевую гипотезу H_0 о равенстве математических ожиданий и задайте альтернативную гипотезу H_1 : 1) $H_1: a_\xi \neq a_\eta$, 2) $H_1: a_\xi > a_\eta$, 3) $H_1: a_\xi < a_\eta$. Проверьте для заданного уровня значимости α сформулированную альтернативную гипотезу.

Задание № 2 Используя выборки, сформированные в задании № 1, сформулируйте нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий. Задайте альтернативную гипотезу одним из способов: 1) $H_1: a_\xi \neq a_\eta$, 2) $H_1: a_\xi > a_\eta$, 3) $H_1: a_\xi < a_\eta$. Проверьте для заданного уровня α сформулированную альтернативную гипотезу, если не известны значения дисперсий этих выборок.

Варианты заданий

Вариант для выполнения заданий, приведенных в лабораторной работе, определяется номером персонального компьютера, за которым работает студент.

Уровнем значимости для проверки гипотез о равенстве математических ожиданий считать значения: $\alpha = 95 \%$ – для вариантов $N = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$; $\alpha = 90$ – для вариантов $N = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$.

Значения параметров a (математическое ожидание) и σ (стандартное отклонение) для формирования последовательностей случайных чисел выбрать из таблицы в практической работе.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение нулевой и альтернативной гипотезы.
2. Сформулируйте основной принцип проверки статических гипотез.
3. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий при известном значении дисперсий.
4. Реализация алгоритма проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий при известном значении дисперсий.
5. Проверка статистических гипотез о равенстве математических ожиданий при неизвестном равных дисперсий.
6. Последовательность действий при проверке статистической гипотезы о равенстве математических ожиданий при неизвестных значениях дисперсий

выборки, исходя из предположения, что дисперсии выборок могут принимать равные значения.

Практическая работа 13

Уравнения регрессии

Цель: рассмотреть основные принципы регрессионного анализа как одного из методов обработки статистической информации.

Организационная форма занятий: решение проблемных задач, разбор конкретных ситуаций

Вопросы для обсуждения на практическом занятии: изучение принципов регрессионного анализа как одного из методов обработки статистической информации.

Формируемые компетенции: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПКД-1.1 ОПКД-1.2

Теоретическая часть

Пусть в результате исследования некоторого экономического показателя была получена совокупность значений (x_i, y_i) . Требуется исследовать зависимость $y(x)$, в которой x – независимая переменная, а y – зависимая переменная.

При построении уравнения регрессии будем считать, что переменная x будет определяться точно, а при измерении y могут возникать погрешности. Следовательно, полученные результаты эксперимента, можно рассматривать в виде функции $\eta(x)$, которая является произвольной случайной величиной. В этом случае **регрессией** будем называть зависимость $y(x)$ условного математического ожидания случайной величины $\eta(x)$ от независимой переменной x , то есть $y(x) \equiv M(\eta/x)$.

Тогда задача построения уравнения регрессии сводится к восстановлению значений функции $y(x)$ по результатам экспериментов (x_i, y_i) , где $i = \overline{1, n}$.

Предположим, что зависимость $y(x)$ может быть аппроксимирована функцией $f(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$. С учетом того, что при измерении y могут возникать незначительные погрешности, то есть

$$y_i = f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_k) + \xi_i, \quad (13.1)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_k$ – коэффициенты регрессии, ξ_i – последовательность случайных величин, которые характеризуют погрешность измерения величины y .

Так как ξ_i представляет собой совокупность случайных величин, то считают, что она распределена нормально с параметрами $M_{\xi_i} = 0$ и $D_{\xi_i} = \sigma^2$, причем считается, что каждой из последовательностей ξ_i значения дисперсии совпадают.

При построении уравнения регрессии коэффициенты должны выбираться таким образом, чтобы отклонение значений функции f от результатов экспериментов было минимальным. Отклонение в этом случае можно описать равенством:

$$\Phi(a_0, a_1, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^k (f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_k) - y_i)^2. \quad (13.2)$$

Таким образом, задача отыскания коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_k$ может быть решена методом наименьших квадратов.

Рассмотрим процесс построения уравнения регрессии для случая $f(x, a_0, a_1) = a_0 + a_1 \cdot x$. Используя метод наименьших квадратов, вычислим значения коэффициентов a_0 и a_1 . Для этого составим функцию $\Phi(a_0, a_1)$: $\Phi(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^k (a_0 + a_1 \cdot x - y_i)^2$, а затем составим нормальную систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0 \end{cases}. \quad (13.3)$$

Решив систему уравнений (14.3), получим:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad a_1 = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (13.4)$$

Оценки коэффициентов a_0 и a_1 можно получить также с помощью метода максимального правдоподобия. Так как при исследовании экономических показателей дисперсия $D_{\xi_i} = \sigma^2$ чаще всего неизвестна, то используя, метод максимального правдоподобия, можно найти величину $\bar{\sigma}^2$:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{a}_0 - \bar{a}_1 \cdot x_i)^2. \quad (13.5)$$

Поскольку $\bar{\sigma}^2$, $\bar{a}_0$ и $\bar{a}_1$ являются случайными величинами, то в качестве точечных оценок величин $\bar{a}_0$ и $\bar{a}_1$ можно использовать равенства:

$$M_{\bar{a}_0} = a_0, \quad M_{\bar{a}_1} = a_1, \quad D_{\bar{a}_0} = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) \cdot \bar{\sigma}^2,$$

$$D_{\bar{a}_1} = \frac{\bar{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (13.6)$$

Так как оценка дисперсии $\bar{\sigma}^2$ является смещенной, то при построении уравнения регрессии удобнее рассматривать несмещенную оценку:

$$s^2 = \frac{n}{n-2} \cdot \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{a}_0 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \bar{a}_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right). \quad (13.7)$$

Поэтому можно сделать вывод о том, что величина $\frac{(n-2) \cdot s^2}{\sigma^2}$ будет подчиняться χ^2 - распределению с $(n-2)$ степенями свободы.

На основании свойств случайных величин и их точечных оценок $\bar{a}_0$, $\bar{a}_1$ и s^2 можно найти границы доверительных интервалов для параметров a_0 , a_1 и σ^2 .

Рассмотрим процесс построения доверительного интервала для a_0 . Предположим, что дисперсия σ^2 является известной, тогда случайная величина, определяемая равенством $\frac{\bar{a}_0 - a_0}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}$, подчиняется нормальному закону распределения.

Пусть α – доверительная вероятность, X_α – корень уравнения $\Phi(x_\alpha) = 1 - 0,5 \cdot \alpha$. Тогда доверительный интервал для параметра a_0 имеет вид

$$\bar{a}_0 - x_\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} < a < \bar{a}_0 + x_\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (13.8)$$

для вероятности $p = 1 - \alpha$.

В том же случае, если значение $D_{\xi_i} = \sigma^2$ неизвестно, тогда в качестве критерия можно рассматривать величину $\frac{\bar{a}_0 - a_0}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}$, где оценка S^2 , под-

чиняется распределению Стьюдента с $(n - 2)$ степенями свободы.

Тогда, если известно значение доверительной вероятности α , можно вычислить корень уравнения $t_\alpha - F_{n-2}(t_\alpha) = 1 - 0,5 \cdot \alpha$, F_{n-2} – функция распределения Стьюдента. Следовательно, доверительный интервал имеет вид

$$\bar{a}_0 - t_\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} < a < \bar{a}_0 + t_\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (13.9)$$

Доверительный интервал для параметра $\bar{a}_1$ строится аналогично. Если значение дисперсии выборки σ^2 известно, то доверительный интервал, в который попадает значение параметра a_1 с вероятностью $p = 1 - \alpha$, имеет вид:

$$\left(\bar{a}_1 - \frac{x_\alpha \cdot \sigma}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \bar{a}_1 + \frac{x_\alpha \cdot \sigma}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right). \quad (13.10)$$

Если же значение дисперсии неизвестно, то доверительный интервал, который покрывает все значения параметра a_1 с вероятностью $p=1-\alpha$, принимает вид:

$$\left(\bar{a}_1 - \frac{t_\alpha \cdot s}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \bar{a}_1 + \frac{t_\alpha \cdot s}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right). \quad (13.11)$$

Найдем границы доверительного интервала для неизвестной дисперсии σ^2 . Если α – доверительная вероятность, причем $\alpha \rightarrow 0$, то решив уравнения $F_{n-2}(\chi_{l,\alpha}) = 0,5 \cdot \alpha$, $F_{n-2}(\chi_{r,\alpha}) = 1 - 0,5 \cdot \alpha$, получим численные значения границ доверительного интервала $\chi_{l,\alpha}$ и $\chi_{r,\alpha}$. Следовательно, все значения случайной величины $\frac{(n-2) \cdot s^2}{\sigma^2}$ принадлежат интервалу $(\chi_{l,\alpha}, \chi_{r,\alpha})$ с доверительной вероятностью $p=1-\alpha$. Таким образом, доверительный интервал для неизвестного параметра σ^2 - $\left(\frac{(n-2) \cdot s^2}{\chi_{r,\alpha}}, \frac{(n-2) \cdot s^2}{\chi_{l,\alpha}} \right)$.

Предположим, что регрессия, описывающая зависимость между показателями x и y , задана функцией: $f(x, a_0, a_1) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot x$. Выберем из совокупности показателей x некоторое значение x_0 и, подставив его в выражение для функции $f(x, a_0, a_1)$, найдем $\bar{y}_0 = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot x$.

Так как величина $\bar{y}_0$ является случайной, то ее значение будет изменяться в зависимости от выбранных значений. Следовательно, ее математическое ожидание будет равно истинному значению функции $f(x)$ в точке x_0 , то

есть $y_0 = a_0 + a_1 \cdot x_0$. Построим доверительный интервал для y_0 . Введем в рассмотрение статистику $\frac{(\bar{a}_0 + a_1 \cdot x_0) - (a_0 + a_1 \cdot x_0)}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}$, которая будет подчиняться рас-

$$s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

пределению Стьюдента с $(n - 2)$ степенями свободы. Следовательно, доверительный интервал, в который попадает точное значение $y_0 = a_0 + a_1 \cdot x_0$ с вероятностью $p = 1 - \alpha$, имеет вид

$$\left(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot x - t_{\alpha} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}, \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot x + t_{\alpha} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \right). \quad (13.12)$$

Найденные границы доверительных интервалов для значения x_0 образуют доверительную полосу или доверительный коридор. Однако следует заметить, что данный коридор является доверительной областью не для всей линии регрессии, а определяют концы доверительных интервалов для значения функции регрессии y в каждой из точек совокупности x . Используя коридор регрессии, нельзя одновременно построить доверительные интервалы для x_0 и x_1 .

Доверительная область, которой принадлежит вся линия регрессии целиком, определяется при помощи равенств, соответствующих верхней и нижней границам:

$$y = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot x - 2 \cdot f_{\alpha} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}, \quad (13.13)$$

$$y = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot x + 2 \cdot f_{\alpha} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}, \quad (13.14)$$

где f_{α} – решение уравнения $F_{2,n-2}(f_{\alpha}) = 1 - \alpha$, α – доверительная вероятность, $F_{2,n-2}(x)$ – функция распределения Фишера с 2 и $(n - 2)$ степенями свободы.

Значение некоторых экономических показателей, имеющих случайный характер, можно рассматривать в виде временных рядов. Временным рядом будем называть эмпирически полученную последовательность данных, наблюдаемых в определенные моменты времени t_i , где t_i — порядковый номер значения эмпирического ряда на временной оси. Каждый такой ряд характеризуется некоторой тенденцией развития процессов во времени, называемой трендом.

Линии тренда широко используются для решения задач прогнозирования с помощью методов регрессионного анализа. Подбор функции тренда $f(t)$ осуществляется методом наименьших квадратов, при котором минимизируется сумма квадратов отклонений между эмпирическими значениями и соответствующими значениями функции. Для оценки точности модели используют коэффициент детерминации, построенный на основе оценок дисперсии эмпирических данных и значений трендовой модели. Трендовая модель адекватна эмпирическому процессу и отражает тенденции его развития при значениях коэффициента детерминации, близких к 1.

Задание № 1. По результатам исследования экономического показателя была получена некоторая выборка. Для этой выборки рассчитайте значения коэффициентов регрессии. По полученным значениям определите для заданной доверительной вероятности α границы доверительных интервалов: коэффициентов регрессии и неизвестной дисперсии. Постройте коридор и доверительную область для полученного уравнения регрессии. Представьте графически выборку эмпирических значений, уравнение регрессии, коридор и доверительную область регрессии, причем все зависимости должны быть приведены на одном графике.

Задание № 2. При помощи линий тренда выполните построение уравнений регрессии для заданных экспериментальных данных. Вид линии тренда для уравнения регрессии: 1) линейная, 2) полиномиальная.

Варианты заданий

Вариант для выполнения заданий, приведенных в практической работе, определяется номером персонального компьютера, за которым работает студент.

Исходные данные для выполнения заданий к лабораторной работе студент должен получить у преподавателя.

Уровень значимости при построении уравнения регрессии выбрать следующим образом: для вариантов с нечетными номерами выбрать величину $\alpha = 95\%$, а для четных вариантов – 90%

Контрольные вопросы

1. Дайте определение регрессии.
2. Алгоритм отыскания коэффициентов уравнения регрессии.
3. Оценка параметров коэффициентов регрессии и неизвестной дисперсии.
4. Построение доверительных интервалов для коэффициентов регрессии и неизвестной дисперсии.
5. Алгоритм отыскания границ доверительного интервала и «коридора» для регрессии.
6. Охарактеризуйте понятие тренд.
7. Алгоритм построения уравнения регрессии, используя линию тренда.

Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Семенов, А. Г. Математическое и компьютерное моделирование : практикум / А. Г. Семенов, И. А. Печерских ; Кемеровский государственный университет. – Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2019. – 237 с.
2. Веретенников, В. Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебное пособие / В. Н. Веретенников. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2020. – Часть 1. – 96 с.

3. Веретенников, В. Н. Практикум. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебное пособие : [16+] / В. Н. Веретенников, Ю. Б. Ржонсницкая. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2020. – 79 с.

4. Балдин, К. В. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. – 3-е изд., стер. – Москва : Дашков и К°, 2020. – 472 с.

Дополнительная литература

1. Сахарова, Л. В. Уравнения математической физики : учебное пособие : / Л. В. Сахарова, М. Б. Стрюков ; Ростовский государственный экономический университет (РИНХ). – Ростов-на-Дону : Издательско-полиграфический комплекс РГЭУ (РИНХ), 2018. – 104 с.

2. Шевченко, Л. Г. Технология работы в среде Mathcad : учебное пособие : / Л. Г. Шевченко, Т. В. Дружинина ; Новосибирский государственный технический университет. – Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2018. – 171 с.

3. Гильмутдинов, Р. Ф. Численные методы : учебное пособие / Р. Ф. Гильмутдинов, К. Р. Хабибуллина ; Министерство образования и науки России, Казанский национальный исследовательский технологический университет. – Казань : Казанский научно-исследовательский технологический университет (КНИТУ), 2018. – 92 с.

4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2007.

5. Сахарова, Л. В. Уравнения математической физики : учебное пособие / Л. В. Сахарова, М. Б. Стрюков ; Ростовский государственный экономический университет (РИНХ). – Ростов-на-Дону : Издательско-полиграфический комплекс РГЭУ (РИНХ), 2018. – 104 с. ЭБС

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Северо-Кавказский федеральный университет»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ
по дисциплине**

«Прикладная математика»

Направление подготовки 09.04.02 «Информационные системы и технологии»
Направленность (профиль) «Искусственный интеллект, математическое моделирование и
суперкомпьютерные технологии в разработке информационных систем»

Ставрополь, 2026

ВВЕДЕНИЕ

1. Цель и задачи освоения дисциплины (модуля)

Целями освоения дисциплины «Прикладная математика» являются изучение математических методов и получение навыков их применения при создании и анализе математических моделей процессов и систем, а также выработки у студентов умения выбирать и применять аналитические или численные методы, программные средства решения задач, возникающих при использовании искусственного интеллекта в прикладных областях, а также формирование на их основе компетенций будущего магистра по направлению подготовки 09.04.02 – Информационные системы и технологии и направленности (профилю) «Искусственный интеллект, математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии в разработке информационных систем».

Задачи изучения дисциплины: ознакомление обучающихся с основными понятиями и методами прикладной математики как инструментами решения задач, встречающихся в сфере науки и производства, развитие на этой основе математического и алгоритмического мышления обучающихся, раскрытие их творческого потенциала; формирование и развитие у обучающихся навыков естественного применения формальных методов прикладной математики, связанных с разработкой и эксплуатацией средств вычислительной техники; ознакомление обучающихся с идеями и алгоритмами решения наиболее распространенных задач, решаемых при помощи методов прикладной математики с указанием типичных проблем данной специальности, которые сводятся к соответствующим математическим задачам, формирование навыков самостоятельной работы, организации исследовательской работы.

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ОПК-1 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте	ОПК-1.1 Приобретает и адаптирует математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте	Владеет навыками самостоятельного приобретения математических, естественнонаучных, социально-экономических и профессиональных знаний для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте. Адаптирует математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте. Развивает математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте Применяет математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте
	ОПК-1.2 Применяет математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач компетенции	Имеются математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач компетенции Применяет математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач компетенции Владеет навыками применения математических, естественнонаучных, социально-экономических и профессиональных знаний для решения нестандартных задач компетенции

Содержание дисциплины

Тема 1. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Тема 2. Обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы.

Тема 3. Уравнения математической физики.

Тема 4. Математическая обработка результатов эксперимента

1. ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Самостоятельная работа студентов является важнейшим условием формирования научного способа познания. Она проводится накануне каждого практического занятия и изучение теоретического материала, приведенного в практической работе, а также выполнения индивидуального задания.

Подготовленный материал, практическое задание оформляются в конспекте.

Самостоятельные занятия (СЗ) являются одной из активных форм обучения.

Самостоятельные занятия по дисциплине "Прикладная математика" имеют целью:

- закрепить и углубить знания, полученные студентами на лекциях и в процессе лабораторных занятий;
- сформировать практические навыки при работе с инструментальными средствами для обработки экспериментальных данных.

Самостоятельные занятия проводятся в лабораториях, оборудованных современными средствами вычислительной техники и возможностью выхода в сеть Internet, в библиотеке.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Методические указания должны включать следующие разделы:

- цель работы;
- задание, которое должно быть выполнено студентом в результате проведения самостоятельной работы;
- варианты индивидуальных заданий;
- основные теоретические положения, необходимые для выполнения задания, они должны быть краткими и содержать ссылки на литературу, в которой эти положения изложены в объеме, достаточном для выполнения самостоятельной работы;

- этапы выполнения задания с указанием конкретных сроков выполнения каждого из этапов и всего задания в целом;
- требования к оформлению графической и текстовой части самостоятельной работы;
- пример выполнения одного из вариантов задания и оформления отчета;
- библиографический список использованных источников.

3. СОДЕРЖАНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.1 Самостоятельное изучение тем лекционного курса

Тема № 1

1. Линейное пространство.
2. Переход к новому базису. Ортогонализация базиса
3. Собственные векторы
4. Самосопряженные операторы в евклидовых пространствах
5. Гиперплоскости
6. Гиперповерхности второго порядка
7. Вычисление определителя матрицы метода Гаусса с выбором главного элемента.
8. Обращение матриц.
9. Вычисление собственных значений и собственных векторов.
10. Метод Данилевского для разворачивания характеристического определителя.

Тема № 2

1. Метод изоклин
2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям
3. Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.
4. Метод вариации произвольных постоянных.

5. Некоторые приближенные методы решения дифференциальных уравнений.

6. Явные схемы Адамса.

7. Построение двухшаговых и трехшаговых схем.

8. Неявные схемы Адамса. Построение неявных схем.

9. Нахождение решения неявной разностной схемы.

Тема № 3

1. Стационарное тепловое поле. Постановка краевых задач.

2. Уравнения продольных и крутильных колебаний стержня.

3. Уравнения движения жидкостей и газов.

4. Гармонические колебания.

Тема № 4

1. Метод множественной корреляции.

2. Метод линеаризации.

3. Планирование отсеивающих экспериментов. Организация, проведение и методы анализа результатов отсеивающих экспериментов.

4. Дисперсионный анализ. Однофакторная классификация.

5. Дисперсионный анализ при трехфакторной и четырехфакторной классификации.

6. Методы выделения существенных факторов.

7. Использование метода случайного баланса при составлении плана отсеивающего эксперимента.

В процессе самостоятельного изучения тем лекционного курса студент изучает предложенные им по рекомендуемому преподавателем списку литературы и предоставляет преподавателю краткий конспект, по которому в дальнейшем проводится индивидуальное собеседование.

3.2 Доклад (реферат)

Доклад (реферат) по дисциплине «Прикладная математика» является одной из форм самостоятельной работы студентов, определенной в рабочей программе.

Цель доклад (реферат) – изучение студентами комплексного подхода к проблемам создания и эксплуатации систем управления, закрепления материала теоретического курса.

Задачей доклада (реферата) по дисциплине «Прикладная математика» является формирование у студентов умений и навыков по работе с научнотехнической литературой, ресурсами глобальной сети Internet, изучение и систематизация широкого круга вопросов, связанных с использованием приближенных методов для решения научной задачи.

Тема доклада (реферата) выбирается студентом из предлагаемого преподавателем перечня.

По согласованию с руководителем тема доклада (реферата) может быть предложена студентом самостоятельно. При совпадении тем докладов (рефератов) на этапе выбора также необходимо провести консультацию с преподавателем, который является руководителем доклада (реферата). В процессе этой консультации может быть определена новая тема или же проведена ее корректировка.

При выполнении доклада (реферата) по дисциплине «Прикладная математика» студент должен раскрыть одну из тем, приведенных ниже.

Примерная тематика докладов (рефератов)

1. Погрешность машинных вычислений.
2. Погрешность элементарных функций.
3. Метод последовательных исключений как один из методов решения задач линейной алгебры.
4. Вычисление определителя квадратной матрицы методом Гаусса.
5. Решение систем линейных уравнений методом отражений.
6. Использование численных методов для вычисления собственных значений матрицы.

7. Отыскание собственных значений с помощью QR-алгоритмов.
8. Использование метода простой итерации для решения систем нелинейных уравнений.
9. Метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений.
10. Методы спуска как методы решения систем нелинейных уравнений.
11. Решение задачи Коши с помощью формулы Тейлора.
12. Метод прогонки как один из методов решения систем линейных уравнений.
13. Методы решения систем линейных уравнений. Метод наискорейшего градиентного спуска.
14. Методы решения систем линейных уравнений. Метод сопряженных градиентов.
15. Итерационные методы решения систем линейных уравнений с использованием спектрально-эквивалентных операторов.
16. Конечно-разностные методы решения дифференциальных уравнений.
17. Метод неопределенных коэффициентов как один из методов интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения.
18. Методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.
19. Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.
20. Алгоритмы решения краевых задач для систем дифференциальных уравнений первого порядка.
21. Приближенные методы решения нелинейных краевых задач.
22. Использование конечно-разностных методов для поиска собственных значений матрицы.
23. Использование вариационных методов для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Требования к оформлению доклада (реферата)

Доклад (реферат) по дисциплине «Прикладная математика» оформляется в соответствии с требованиями стандарта ГОСТ 2.105-95.

Общий объем доклада (реферата) не должен превышать 30 страниц, в том числе введение – не более 2 страниц.

Доклад (реферат) оформляется на листах формата А4. При его оформлении пояснительной записки следует оставлять поля следующих размеров: левое – 30 мм, правое – 10 мм, верхнее – 25 мм, нижнее – 20 мм. Текст реферата должен быть набран шрифтом Times New Roman 14 пт, интервал полуторный.

Титульный лист является первым листом доклада (реферата).

Нумерация страниц должна быть сквозной, порядковый номер листа ставится в правом верхнем углу. Абзацы в тексте начинают отступом, равным 5 знакам.

Содержание основной части доклада (реферата) следует делить на разделы, подразделы, пункты. Каждый из разделов пояснительной записки должен иметь свой порядковый номер в пределах всей пояснительной записки. Нумерация разделов осуществляется арабскими цифрами без точки, начиная с абзацного отступа. Нумерация подразделов осуществляется внутри соответствующего раздела. Номер подраздела состоит из номеров раздела и подраздела, разделенных точкой. В конце номера подраздела точка не ставится.

Текст каждого подраздела должен быть разбит по смысловому значению на абзацы. Если документ имеет подразделы, то нумерация пунктов должна быть в пределах подраздела и номер пункта должен состоять из номеров раздела, подраздела и пункта, разделенных точками.

Если раздел или подраздел состоит из одного пункта, он также нумеруется.

Пункты, при необходимости, могут быть разбиты на подпункты, которые должны иметь порядковую нумерацию в пределах каждого подпункта, например: 4.2.1.1, 4.2.1.2, 4.2.1.3, и т. д.

Разделы и подразделы должны иметь заголовки. Пункты, как правило, заголовков не имеют. Заголовки должны четко и кратко отражать содержание разделов, подразделов. Заголовки разделов следует писать прописными буквами без точки в конце, не подчеркивая. Заголовки подразделов и пунктов следует писать с прописной буквы без точки в конце, не подчеркивая. Переносы слов в заголовках не допускаются. Если заголовок состоит из двух предложений, их разделяют точкой

Расстояние между заголовком и текстом должно составлять два полуторных интервала, а расстояние между заголовками раздела и подраздела – три полуторных интервала.

Список литературы, используемой при подготовке реферата, должен быть оформлен в соответствии с требованиями ГОСТ 7.1-84 «Библиографическое описание документа. Общие требования и правила составления».

Рекомендации по организации работ над докладом (рефератом)

При подготовке доклада (реферата) по дисциплине «Прикладная математика» студент должен:

- 1) изучить список литературы, рекомендуемой преподавателем;
- 2) подобрать самостоятельно источники информации, в которых также раскрывается тема доклада (реферата), причем в качестве источников информации могут использоваться и ресурсы глобальной сети Internet;
- 3) составить развернутый план доклада (реферата) (в течение первых двух недель после выдачи темы доклада (реферата));
- 4) согласовать разработанный план с руководителем доклада (реферата).

Примерный календарный план выполнения реферата

Работу над докладом (рефератом) по дисциплине «Прикладная математика» следует выполнять в следующей последовательности (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Примерный календарный план выполнения реферата

№ этапа	Наименование этапа	№ недели
1	Выдача темы доклада (реферата)	2 неделя семестра

2	Проверка доклада (реферата) преподавателем	6 – 9 недели семестра
3	Исправление доклада (реферата) (доработка)	10 – 15 недели семестра
4	Защита доклада (реферата)	16 – 17 недели семестра

*Порядок защиты и ответственность студента за выполнение доклада
(реферата)*

Доклад (реферат) сдается на проверку руководителю в срок не позднее 10 недели семестра. После проверки руководитель либо допускает студента к защите, либо возвращает доклад (реферат) на доработку. Если в ходе проверки реферата преподавателем были сделаны замечания, то они должны быть устранены автором (студентом) не позднее 15 недели семестра.

Так как доклад (реферат) по дисциплине «Прикладная математика» является формой промежуточного контроля самостоятельной работы студента, то его защита осуществляется не позднее 17 недели учебного семестра. В ходе защиты студент делает доклад продолжительностью не более 5 минут, а затем отвечает на вопросы преподавателя по теме реферата.

Оценка «отлично» выставляется, если студент свободно ориентируется в проблеме, описанной в докладе (реферате), и дает четкие, развернутые ответы на вопросы преподавателя.

Оценка «хорошо» может быть выставлена, если студент хорошо ориентируется в исследуемой проблеме и может дать обобщенные ответы на вопросы преподавателя по теме доклада (реферата).

Оценка «удовлетворительно» выставляется в том случае, если студент плохо ориентируется в теме доклада (реферата) и не может ответить на сформулированные преподавателем вопросы.

Оценка «неудовлетворительно» может быть выставлена, если:

1) защищаемый доклад (реферат) является точной копией ресурсов сети Internet по данной проблеме;

2) студент вообще не ориентируется в теоретическом материале, представленном в докладе (реферате);

3) два доклада (реферата) абсолютно идентичны;

4) студент не внес изменения в текст доклада (реферата) в соответствии с замечаниями, сделанными преподавателем в ходе проверки.

Если студентом получена оценка «неудовлетворительно», то он должен доработать доклад (реферат) и пройти его повторную защиту не позднее 16 недели семестра.

3.3 Коллоквиум

Коллоквиум – это форма проверки и оценивания знаний учащихся в системе образования и представляет собой мини-экзамен, проводимый в середине семестра и имеющий целью уменьшить список тем, выносимых на дифференцированный зачет или экзамен.

Коллоквиум как одна из форм самостоятельной работы решает следующие задачи:

- проверка и контроль знаний, полученных студентами по изучаемой теме;
- расширение проблематики в рамках дополнительных вопросов по данной теме;
- углубление знаний при помощи дополнительных материалов при подготовке к занятию;
- студенты должны продемонстрировать умения работать с различными видами литературных источников;
- формирование навыков коллективного обсуждения (поддерживать диалог в микрогруппах, находить компромиссное решение и т.д.).

Коллоквиум может проводиться в двух формах – устной и письменной.

При проведении коллоквиума в устной форме ответы студентов оцениваются по традиционной шкале («неудовлетворительно» – «отлично») по билетам, которые могут содержать как теоретические вопросы, так и

практические задания. На коллоквиум рекомендуется выносить лишь часть теоретического материала. Полученная по итогам его сдачи оценка влияет на итоговую по дисциплине. Коллоквиум в письменной форме также проводится по билетам, в который могут быть включены теоретические вопросы, предполагающие короткий ответ, а также практические задания.

Критериями оценки знаний студентов на коллоквиуме являются.

Оценка «отлично» может быть выставлена, если студент демонстрирует глубокое и прочное усвоение программного материала, дает полные, последовательные грамотные и логически излагаемые ответы при видоизменении задания, свободно справляется с поставленными задачами и правильно применяет знания материала, четко обосновывает принятые решения, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических работ.

Оценка «хорошо» по итогам сдачи коллоквиума студент может получить, если показывает хорошее знание программного материала, грамотно излагает без существенных неточностей в ответ на поставленный вопрос, правильно применяет теоретические знания, владеет необходимыми навыками при выполнении практических задач.

Оценка «удовлетворительно» может быть выставлена, если студент показал удовлетворительный уровень усвоения основного материала, допускает неточности при ответе на поставленные вопросы и в ответе присутствуют недостаточно правильные формулировки, нарушает последовательность в изложении программного материала, испытывает затруднения в выполнении практических заданий.

Коллоквиум по дисциплине «Прикладная математика» проводится в форме собеседования в устной форме. При сдаче коллоквиума студент должен дать ответы на вопросы, предложенного билета по темам «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики».

Вопросы к коллоквиуму

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) 1-го порядка, методы их аналитического решения.
 2. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.
 3. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка, допускающих понижение порядка.
 4. Численные методы решения задачи Коши для дифференциальных уравнений 1-го порядка.
 5. Численные методы решения задачи Коши для нормальных систем дифференциальных уравнений.
 6. Численные методы решения задачи Коши для нормальных систем дифференциальных уравнений 2-го порядка.
 7. Явный и модифицированный методы Эйлера.
 8. Методы Рунге-Кутты.
 9. Решение дифференциального уравнения 1-го порядка.
 10. Задача Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка.
 11. Задача Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка, допускающие понижение
 12. Уравнения в частных производных.
 13. Уравнения математической физики и их классификация.
 14. Уравнений колебаний струны, начальные и граничные условия.
 15. Метод характеристик (Даламбера) и метод разделения переменных.
- Краевые задачи.
16. Уравнение теплопроводности, интеграл Пуассона.

3.4 Индивидуальное задание

Индивидуальное задание выполняется студентами по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения» и содержит три задания. Вариант индивидуального задания определяется преподавателем.

Задание 1. Найдите общее решение систем уравнений методом Эйлера

Вариант 1 $\begin{cases} x' = 2x + 19y + 30z \\ y' = -5y - 12z \\ z' = 2y + 5z \end{cases}$	Вариант 2 $\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = 16x + y \\ z' = 15x - 7y + 14z \end{cases}$	Вариант 3 $\begin{cases} x' = -x - 2y + 12z \\ y' = 4y + 3z \\ z' = 5y + 6z \end{cases}$	Вариант 4 $\begin{cases} x' = 5x - 7y \\ y' = -3x + y \\ z' = 12x + 6y - 3z \end{cases}$	Вариант 5 $\begin{cases} x' = x + 8y + 23z \\ y' = 5y + 7z \\ z' = 3y + z \end{cases}$
Вариант 6 $\begin{cases} x' = 4x + 5z \\ y' = 7x - 2y + 9z \\ z' = 3x + 6z \end{cases}$	Вариант 7 $\begin{cases} x' = x - y + 16z \\ y' = y + 15z \\ z' = y + 3z \end{cases}$	Вариант 8 $\begin{cases} x' = 3x + 11y + 7z \\ y' = 5y + 4z \\ z' = 8y + z \end{cases}$	Вариант 9 $\begin{cases} x' = 6x + 9y + 7z \\ y' = 3y + 2z \\ z' = -4y - z \end{cases}$	Вариант 10 $\begin{cases} x' = 5x + 21z \\ y' = 21x + 2y + 16z \\ z' = x + z \end{cases}$
Вариант 11 $\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = x \\ z' = 2x + y \end{cases}$	Вариант 12 $\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = x \\ z' = 2x + y \end{cases}$	Вариант 13 $\begin{cases} x' = y \\ y' = -3x + 4y \\ z' = -2x + y + 2z \end{cases}$	Вариант 14 $\begin{cases} x' = 4x - 5y + 7z \\ y' = x - 4y + 9z \\ z' = -4x + 5z \end{cases}$	Вариант 15 $\begin{cases} x' = 5x + 6y + 3z \\ y' = -x + z \\ z' = x + 2y - z \end{cases}$
Вариант 16 $\begin{cases} x' = 7x \\ y' = 10x - 19y + 10z \\ z' = 12x - 24y + 13z \end{cases}$	Вариант 17 $\begin{cases} x' = 7y + 4z \\ y' = y \\ z' = x + 13y \end{cases}$	Вариант 18 $\begin{cases} x' = 5x + 2y - 3z \\ y' = 4x + 5y - 4z \\ z' = 6x + 4y - 4z \end{cases}$	Вариант 19 $\begin{cases} x' = 2x + y - 2z \\ y' = 4y - 3z \\ z' = y \end{cases}$	Вариант 20 $\begin{cases} x' = z \\ y' = -2x + 2y + z \\ z' = -3x + 4z \end{cases}$
Вариант 21 $\begin{cases} x' = 5x - 4z \\ y' = 9x - 4y + z \\ z' = 7x - 5y + 4z \end{cases}$	Вариант 22 $\begin{cases} x' = 4x + 7y - 5z \\ y' = -4x + 5y \\ z' = x + 9y - 4z \end{cases}$	Вариант 23 $\begin{cases} x' = 13x - 24y + 12z \\ y' = 10x - 19y + 10z \\ z' = 7z \end{cases}$	Вариант 24 $\begin{cases} x' = 7x \\ y' = 12x + 13y - 24z \\ z' = 10x + 10y - 19z \end{cases}$	Вариант 25 $\begin{cases} x' = 2x + y + 3z \\ y' = 2y \\ z' = x + 4z \end{cases}$

Задание 2. Следующие системы дифференциальных уравнений решить методом исключения

Вариант 1 $\begin{cases} x' = 2x - y + 2t \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$	Вариант 2 $\begin{cases} x' = 2x - \frac{2}{3}y \\ y' = 2x + 5y + t^2 \end{cases}$	Вариант 3 $\begin{cases} x' = x - y + 2\sin(t) \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$	Вариант 4 $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -17x + 9y + \cos(t) \end{cases}$	Вариант 5 $\begin{cases} x' = 5x + 4y + 9 \\ y' = -2x + 11y + 9 + 3e^t \end{cases}$
Вариант 6 $\begin{cases} x' = -3x + 2y - 2 \\ y' = -2x + y + 3t \end{cases}$	Вариант 7 $\begin{cases} 12x'' - y' + 2x = 0 \\ x' + y'' = 2t \end{cases}$	Вариант 8 $\begin{cases} 36x'' - y' + 2x = e^2 \\ x' - y'' = 0 \end{cases}$	Вариант 9 $\begin{cases} x'' = x - y \\ y' = -x + y + 2\sin(t) \end{cases}$	Вариант 10 $\begin{cases} x'' = x + 3y + 3\cos(t) \\ y'' = 2x + 6y \end{cases}$
Вариант 11 $\begin{cases} x'' = 5x - 2y + 2e^t \\ y'' = 10x - 4y \end{cases}$	Вариант 12 $\begin{cases} x'' = 4x - 10y + 3 + e^t \\ y'' = 2x - 5y \end{cases}$	Вариант 13 $\begin{cases} x'' = x + y \\ y' = -3x + 3 + 2e^{4t} \end{cases}$	Вариант 14 $\begin{cases} x'' = 4x + 2y \\ y' = -x + 2y + \sin(t) \end{cases}$	Вариант 15 $\begin{cases} x'' = 5x + 3y + \cos(t) \\ y' = -\frac{2}{3}x + 3y \end{cases}$
Вариант 16 $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = -x + y + t^2 \end{cases}$	Вариант 17 $\begin{cases} x' = 9x - 17y \\ y' = x + y + 2t \end{cases}$	Вариант 18 $\begin{cases} x' = 17x - 2y + 1 + t \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$	Вариант 19 $\begin{cases} x' = x - 2y + 1 \\ y' = 2x - 3y + 4t \end{cases}$	Вариант 20 $\begin{cases} y' + x'' = 3t \\ 12y'' - x' + 2y = 0 \end{cases}$
Вариант 21 $\begin{cases} y' - x'' = 0 \\ 36y'' - x + 2y = 2\sin(t) \end{cases}$	Вариант 22 $\begin{cases} x' = -y + x + 3e^t \\ y'' = y - x \end{cases}$	Вариант 23 $\begin{cases} x' = 6x + 2y \\ y' = 3x + y + 2e^{4t} \end{cases}$	Вариант 24 $\begin{cases} x' = -4x + 10y \\ y' = -2x + 5y + \sin(t) \end{cases}$	Вариант 25 $\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = -10x + 4y + 2 + \cos(3t) \end{cases}$

Задание 3. Построить два первых члена разложения для решений, следующих
д. у.

($\varepsilon \ll 1$; если уравнение не содержит ε , то $y \ll 1$)

Вариант 1 $y'' + y = \varepsilon y^3 + 2$	Вариант 2 $y'' + 9y = \varepsilon y^2$	Вариант 3 $y'' = \varepsilon y^{-y}$	Вариант 4 $y'' + 4y = \varepsilon y^2 + 1$	Вариант 5 $y'' = \varepsilon (2y^2 + y^4)$
Вариант 6 $y'' = \varepsilon \sin(y)$	Вариант 7 $y'' = \varepsilon \cos(y)$	Вариант 8 $y'' = \varepsilon e^{2y+3}$	Вариант 9 $y'' = \varepsilon e^{3y}$	Вариант 10 $y'' + y \cos(\varepsilon x) = 0$
Вариант 11 $y'' + y(1 + \sin(\varepsilon x)) = 0$	Вариант 12 $y'' + \varepsilon y y' = 1$	Вариант 13 $y'' = \sin(x + \varepsilon y)$	Вариант 14 $y'' + y = e^y - 1$	Вариант 15 $y'' + y = y^2$
Вариант 16 $y'' + 9y = e^{-y} + 1$	Вариант 17 $y'' + 4y = y^3$	Вариант 18 $y'' = y^2 + y^4$	Вариант 19 $y'' = 2(e^{y^2} - 1)$	Вариант 20 $y'' = 2 \cos(y)$
Вариант 21 $y'' + y = e^{2y} - 1$	Вариант 22 $y'' + y' = y^3$	Вариант 23 $y'' + y \cos^2(\varepsilon x) = 0$	Вариант 24 $y'' = y \sin(y)$	Вариант 25 $y'' = y \cos(y)$

Индивидуальное задание сдается на проверку преподавателю в срок не позднее двух недель по окончании изучения темы «Обыкновенные дифференциальные уравнения». После проверки руководитель либо допускает студента к защите, либо возвращает на доработку. Если в ходе проверки преподавателем были сделаны замечания, то они должны быть устранены автором (студентом) также не позднее двух недель после проверки преподавателем.

Оценивание индивидуального задания осуществляется по пятибальной системе.

Оценка **«отлично»** выставляется студенту, если он в полной мере приобретает и адаптирует математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте; на высоком профессиональном уровне применяет математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач; решает основные, нестандартные задачи создания и применения искусственного интеллекта, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте, с применением математических, естественнонаучных, социально-экономических, общеинженерных знаний и

знаний в области когнитивных наук; проводит теоретическое и экспериментальное исследование объектов профессиональной деятельности, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте.

Оценка **«хорошо»** выставляется студенту, если он приобретает, однако допускает незначительные ошибки при адаптации математических, естественнонаучных, социально-экономических и профессиональных знаний для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте; допускает незначительные ошибки при использовании математических, естественнонаучных, социально-экономических и профессиональных знаний для решения нестандартных задач компетенции; при решении основных задач создания и применения искусственного интеллекта, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте, с применением математических, естественнонаучных, социально-экономических, общетехнических знаний и знаний в области когнитивных наук; при проведении теоретического исследования объектов профессиональной деятельности, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется студенту, если допускает ошибки при приобретении математических, естественнонаучных, социально-экономических и профессиональных знаний для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте; при использовании математических, естественнонаучных, социально-экономических и профессиональных знаний для решения нестандартных задач компетенции; основных задач создания и применения искусственного интеллекта, в том числе в новой или незнакомой среде междисциплинарном контексте, с применением математических, естественнонаучных, социально-экономических, общетехнических знаний и знаний в области когнитивных наук; при проведении теоретического исследования объектов профессиональной деятельности, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется студенту, если он на низком уровне приобретает и адаптирует математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте; допускает грубые ошибки при использовании математических, естественнонаучных, социально-экономических и профессиональных знаний для решения нестандартных задач компетенции; при решении основных задач создания и применения искусственного интеллекта, в том числе в новой или незнакомой среде междисциплинарном контексте, с применением математических, естественнонаучных, социально-экономических, общетеоретических знаний и знаний в области когнитивных наук; при проведении теоретического исследования объектов профессиональной деятельности, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте.

4. ПЛАН-ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ СРС

№	Форма самостоятельной работы	Срок ее сдачи
1	Индивидуальное собеседование по результатам самостоятельного изучения тем лекций	по итогам изучения соответствующего раздела лекционного курса
2	Доклад (реферат)	по итогам изучения курса
3	Коллоквиум	по итогам изучения тем «Обыкновенные дифференциальные уравнения» и «Уравнения математической физики»
4	Выполнение индивидуального задания по теме 2	по итогам изучения тем «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

5. ОРГАНИЗАЦИЯ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

5.1. Формы контроля знаний студентов

Контроль и оценка знаний, умений и навыков студентов осуществляется на практических занятиях и при подготовке к сдаче зачета. В ходе контроля знаний преподаватель оценивает понимание студентом содержания дисциплины «Прикладная математика», его способность использовать приближенные методы для решения научных и практических задач.

Контроль знаний студентов может осуществляться в следующих формах:

- текущий контроль знаний;
- промежуточный контроль знаний.

Текущий контроль знаний студентов имеет целью:

- дать оценку работы каждого студента по усвоению им учебного материала, выявить недостатки в его подготовке и оказать практическую помощь в их устранении.

Текущая аттестация студентов проводится преподавателями, ведущими практические занятия по дисциплине, в следующих формах:

- собеседование;
- тестирование;
- защита докладов;
- выполнение индивидуального задания;
- коллоквиум.

К практическому занятию студент должен подготовить ответы на вопросы, выполнить дополнительные задания по теме занятия, проработать дополнительные научные источники, сделать конспект статьи (если это предусмотрено).

Максимальное количество баллов студент получает, если он активно участвует в работе, владеет материалом, умеет логично и четко излагать мысли, творчески подходит к решению основных вопросов темы, показывает самостоятельность мышления.

Основанием для снижения оценки являются:

- слабое знание темы и основной терминологии;
- пассивность участия в групповой работе;
- отсутствие умения применить теоретические знания для решения практических задач.

5.2. Рекомендации по подготовке к зачету

Подготовка к зачету начинается с начала изучения дисциплины. Для допуска к зачету необходимо посещать все лекции и лабораторные занятия, а также предоставить отчеты о выполнении лабораторных работ, индивидуальных домашних заданий и пройти защиту реферата.

6. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАБОТЕ С ЛИТЕРАТУРОЙ И ИСТОЧНИКАМИ

6.1. Рекомендации студентам по организации работы с литературой и источниками

Изучение литературы и источников необходимо начинать с прочтения соответствующих глав учебных изданий, учебных пособий или литературы, рекомендованной в качестве основной или дополнительной по дисциплине «Прикладная математика», которые прямо или косвенно относятся к изучаемой теме.

Изучая литературу и источники, студенту рекомендуется вести краткий конспект. Однако не следует переписывать все содержание изучаемой темы, нужно выписывать лишь основные идеи и главные на ваш взгляд мысли. В отдельных случаях, когда встречаются важные определения, понятия, необходимый фактический материал и примеры, статистическая информация, имеющие отношение к изучаемой теме, студенту следует выписать их в виде цитат с полным указанием библиографических источников.

Конспектирование рекомендуемой литературы и источников необходимо вести с распределением собранных материалов по отдельным главам и

параграфам согласно учебно-тематическому плану. Необходимо выписывать все выходные данные по используемой литературе и источникам.

Основой технологии интенсификации обучения на платформе цифровых образовательных технологий являются учебно-иллюстрационные материалы (опорный конспект) по дисциплине "Прикладная математика".

Работа с учебно-иллюстрационными материалами имеет следующие этапы.

1. Изучение теоретических основ учебного материала в аудитории: изложение преподавателем изучаемого материала студентам с объяснением по опорному конспекту;

2. Самостоятельная работа: индивидуальная работа студентов по опорному конспекту; фронтальное закрепление по блокам опорного конспекта.

3. Первое повторение - воспроизведение содержания заданной темы опорного конспекта по памяти.

4. Устное проговаривание материала опорного конспекта - необходимый этап внешнеречевой деятельности при усвоении учебного материала.

5. Второе повторение - взаимопрос и взаимопомощь студентов друг другу.

Применение учебно-иллюстрационных материалов позволяет обобщить сложный по содержанию материал, активизировать мыслительную деятельность студентов.

Необходимо помнить, что главное для студента в самостоятельной работе с рекомендуемой литературой и источниками - это формирование своего индивидуального стиля, который может стать основой в будущей профессиональной деятельности.

6.2 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Семенов, А. Г. Математическое и компьютерное моделирование : практикум / А. Г. Семенов, И. А. Печерских ; Кемеровский государственный университет. – Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2019. – 237 с.

2. Веретенников, В. Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебное пособие / В. Н. Веретенников. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2020. – Часть 1. – 96 с.

3. Веретенников, В. Н. Практикум. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебное пособие : [16+] / В. Н. Веретенников, Ю. Б. Ржонсницкая. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2020. – 79 с.

Перечень дополнительной литературы

1. Сахарова, Л. В. Уравнения математической физики : учебное пособие : / Л. В. Сахарова, М. Б. Стрюков ; Ростовский государственный экономический университет (РИНХ). – Ростов-на-Дону : Издательско-полиграфический комплекс РГЭУ (РИНХ), 2018. – 104 с.

2. Шевченко, Л. Г. Технология работы в среде Mathcad : учебное пособие : / Л. Г. Шевченко, Т. В. Дружинина ; Новосибирский государственный технический университет. – Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2018. – 171 с.

3. Гильмутдинов, Р. Ф. Численные методы : учебное пособие / Р. Ф. Гильмутдинов, К. Р. Хабибуллина ; Министерство образования и науки России, Казанский национальный исследовательский технологический университет. – Казань : Казанский научно-исследовательский технологический университет (КНИТУ), 2018. – 92 с.

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

1. Сахарова, Л. В. Уравнения математической физики : учебное пособие / Л. В. Сахарова, М. Б. Стрюков ; Ростовский государственный экономический университет (РИНХ). – Ростов-на-Дону : Издательско-полиграфический комплекс РГЭУ (РИНХ), 2018. – 104 с. ЭБС

6.3 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://biblioclub.ru> – ЭБС «Университетская библиотека on-line»
2. <http://old.exponenta.ru/> – Образовательный математический сайт по математике
3. <https://www.intuit.ru/> – Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»
4. <http://window.edu.ru/> – Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"
5. <http://artspb.com/> – Образовательный портал: математика, кибернетика и программирование дополнительного образования

6.4 Материально-техническое обеспечение дисциплины

К материально-техническому уровню освоения содержания дисциплины «Прикладная математика» можно отнести:

- индивидуальное взаимодействие со студентами в процессе проведения лекционных и практических занятий;
- использование на лекциях и практических занятиях мультимедийного оборудования;
- включение в лабораторные работы индивидуального поиска, систематизации и анализа информации через Internet;
- авторские презентации к лекциям;
- аудитория для проведения лекционных и практических занятий должна быть оборудована проектором для проведения занятий в интерактивной форме:

Лекционные занятия	1.	Веб-камера Logitech HD Pro WebcamC920 1920[1080Mic USB
	2.	Короткофокусный мультимедиа-проектор Epson
	3.	Магнитно-маркерные доски белые с эмалевой поверхностью CC Magnetoplan
	4.	Монитор 17" TFT Филипс
	5.	Наушники с микрофономCreativeHS-33051EF0290AA001 накладные,черный/серый
	6.	Перс.супер компьютер.+монитор+клав.+мышь+каб.ПкCi7-5930K/8D8192D4-2133/K2200/2K40M
	1.	Веб-камера Logitech HD Pro WebcamC920 1920[1080Mic USB

Практические занятия	2.	Наушники с микрофономCreativeHS-33051EF0290AA001 накладные,черный/серый
	3.	Перс.супер компьютер.+монитор+клав.+мышь+каб.ПкСi7-5930K/8D8192D4-2133/K2200/2K40M
Самостоятельная работа	1.	Веб-камераLogitech HD Pro WebcamC920 1920[1080Mic USB
	2.	Монитор 17 TFT" Филипс
	3.	Наушники с микрофономCreativeHS-33051EF0290AA001 накладные,черный/серый
	4.	Перс.супер компьютер.+монитор+клав.+мышь+каб.ПкСi7-5930K/8D8192D4-2133/K2200/2K40M