

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических занятий
по дисциплине «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»
для студентов специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность
специализация «Информационно-аналитическая и техническая
экспертиза компьютерных систем»

Ставрополь
2026

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Раздел I. Введение в анализ

Занятие № 1. Функция действительной переменной

Занятие № 2. Предел числовой последовательности

Занятие № 3. Предел функции. Непрерывность функции

Раздел II. Дифференциальное исчисление для функций одной переменной

Занятие № 4. Производная функции

Занятие № 5. Дифференциал функции

Занятие № 6. Основные теоремы дифференциального исчисления. Применение производной для исследования функции

Раздел III. Интегральное исчисление для функций одной переменной

Занятие № 7. Неопределенный интеграл и его свойства. Метод замены переменной. Метод интегрирования по частям

Занятие № 8. Интегрирование рациональных выражений и некоторых видов иррациональностей, тригонометрических функций

Занятие № 9. Определенный интеграл и его свойства. Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы

Раздел IV. Дифференциальное исчисление для функций нескольких переменных

Занятие № 10. Функции нескольких переменных. Основные понятия

Занятие № 11. Дифференцирование функции нескольких переменных. Частные производные

Занятие № 12. Частные производные высших порядков. Дифференцирование сложных функций

Занятие № 13. Экстремум функции нескольких переменных

Занятие № 14. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных

Занятие № 15. Производная по направлению. Градиент функции

Раздел V. Интегральное исчисление для функций нескольких переменных

Занятие № 16. Вычисление двойных интегралов двукратным интегрированием

Занятие № 17. Переход к полярным координатам в двойных интегралах

Занятие № 18. Приложения двойных интегралов

Занятие № 19. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Занятие № 20. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах

Занятие № 21. Приложения тройных интегралов

Раздел VI. Числовые и функциональные ряды

Занятие № 22. Ряды с положительными членами

Занятие № 23. Достаточные признаки сходимости числового ряда

Занятие № 24. Знакопередающие ряды. Признак Лейбница

Занятие № 25. Функциональные ряды

Занятие № 26. Степенные ряды

Занятие № 27. Ряды Фурье

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Математический анализ» является формирование соответствующего набора общепрофессиональных компетенций студента специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность путем освоения возможностей использования средств и методов математического анализа для решения прикладных задач в области информатики и компьютерных технологий.

Основными задачами освоения дисциплины являются:

- дать студентам абстрактные понятия математического анализа, такие как функция, предел функции, бесконечно малая и бесконечно большая величина, производная и дифференциал функции, определенный интеграл, используемые для описания и моделирования, различных по своей природе математических задач;
- привить студентам навыки использования аналитических методов в практической деятельности;
- показать студентам универсальный характер основных понятий математического анализа для получения комплексного представления о подходах к созданию математических моделей физических систем и объектов;
- воспитывать математическую и профессиональную культуру;
- способствовать формированию мировоззрения;
- способствовать развитию таких качеств как социальная и профессиональная мобильность, ответственность за свое профессиональное определение, конкурентоспособность;
- способствовать решению проблемы подготовки студентов к жизни в современном обществе, адаптации к будущей профессии в условиях региона;
- обучение студентов решению учебных и жизненных проблем путем анализа информации;
- формирование исследовательской позиции и исследовательского поведения;
- развитие мыслительных операций
- расширение математического кругозора студентов;
- получение углубленных знаний, навыков для успешной профессиональной деятельности и для продолжения профессионального образования в магистратуре.

РАЗДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Занятие № 1. Функция действительной переменной

Цель занятия: определить содержание понятия «множество», научиться выполнять различные действия над множествами, отработать классификацию числовых множеств. Познакомиться с методом математической индукции, используемым при доказательстве математических высказываний, использовать неравенство Бернулли при доказательстве неравенств; определить содержание понятия «действительная функция действительного аргумента», основные свойства функций, их простейшую классификацию.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Определение множества, операции над множествами, их изображение с помощью диаграмм Эйлера - Венна.
2. Числовые множества.
3. Метод математической индукции, неравенство Бернулли.
4. Простейшая классификация функций действительной переменной: монотонные, четные и нечетные, периодические, ограниченные и неограниченные функции.
5. Способы задания функций.
6. Арифметические действия над функциями.
7. Основные элементарные функции, их свойства, графики.

Актуальность темы: тема занятия является актуальной в части знакомства студентов с начальными знаниями по теории математического анализа, формировании основных понятий математического анализа и показывает универсальный характер основных понятий математического анализа для получения комплексного представления о подходах к созданию математических моделей.

Теоретическая часть:

Определение 1. Множество – это совокупность объектов любой природы.

Основатель теории множеств – Георг Кантор (немецкий математик 1845 г.р.). Основные предпосылки канторовой теории множеств:

1. Множество может состоять из любых различных объектов;
2. Множество однозначно определяется набором составляющих его объектов;
3. Любое свойство определяет множество объектов, которые этим свойством обладают.

Если x – объект, P – свойство, $P(x)$ – обозначение того, что x обладает свойством P , то через $\{x | P(x)\}$ обозначают весь класс объектов, обладающих свойством P .

Операции над множествами:

1. Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$, состоящее из тех и только тех элементов, которые содержатся хотя бы в одном из множеств A, B .

Геометрическое изображение множеств в виде области на плоскости называется **диаграммой Эйлера – Венна**.

2. Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$, образованное теми и только теми элементами, которые принадлежат одновременно множествам A и B .

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечение пусто $A \cap B = \emptyset$, такие множества A и B называются **непересекающимися**.

3. Разностью между множеством A и множеством B называется множество

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\},$$

состоящее из тех элементов множества A , которые не содержатся в множестве B .

Часто все множества, с которыми имеют дело в том или ином рассуждении, являются подмножествами некоторого определенного фиксированного множества, которое называют **универсальным** и обозначается U .

4. **Дополнением** множества A по отношению к универсальному множеству U есть множество $\bar{A}$, составленное из всех тех элементов U , которые не находятся в A :

$$\bar{A} = U \setminus A = \{x | x \in U \wedge x \notin A\}.$$

Определение 2: Модулем (абсолютной величиной) действительного числа x называется само число x , если число x неотрицательно, и противоположное число $-x$, если x отрицательно:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Определение 3: Модулем действительного числа x или абсолютной величиной x называется арифметическое значение корня квадратного из квадрата этого числа: $|x| = \sqrt{x^2}$, $|x|$ - это расстояние от начала координат до точки x , т.е. ρ (расстояние) $\rho(0, x) = |x|$, $\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$.

Метод математической индукции состоит в следующем: для справедливости любого утверждения $P(n)$ высказанного для всех натуральных чисел $n \in N$ достаточно:

1. доказать справедливость этого утверждения для $n=1$;
2. предположить, что это утверждение справедливо для $n=k$ ($\forall k \in N$);
3. доказать, что оно справедливо для $n=k+1$.

Неравенство Бернулли: $\forall \alpha > -1$, $\forall n \in N$ справедливо неравенство: $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$.

Определение 4. Пусть даны два непустых множества X и Y . Закон, который каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие один и только один элемент $y \in Y$, называется **функцией** и обозначается $y = f(x)$. Множество X называется **областью определения** функции обозначается $D(y)$, а множество Y **множеством значений** функции $E(y)$.

Если элементами множеств X и Y являются числа, то функция $y = f(x)$ называется числовой функцией. Величина x называется **аргументом** или **независимой переменной**, а y - **функцией** или **зависимой переменной**.

Основные свойства функции

(четность – нечетность, монотонность, ограниченность, периодичность)

Определение 5. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D называется **четной**, если $\forall x \in D$ выполняются условия: 1) $-x \in D$; 2) $f(x) = f(-x)$; и **нечетной**, если $\forall x \in D$ выполняются условия: 1) $-x \in D$; 2) $f(x) = -f(-x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy , а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Определение 6. Пусть функция $f(x)$ задана на множестве D и $D_1 \subset D$. Если для любых значений $x_1, x_2 \in D_1$ аргументов из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется **возрастающей** (большему значению аргумента соответствует большее значение функции) на множестве D_1 . Если из условия $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется **неубывающей** на множестве D_1 , если из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется **убывающей** (большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции) на множестве D_1 , а если выполняется неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется **невозрастающей** на множестве D_1 . Если функция возрастает (убывает, не возрастает, не убывает) на D_1 , то говорят, что она **монотонна** на D_1 .

Определение 7. Функция $y = f(x)$ определенная на X называется **ограниченной сверху**, если существует такое M , что для всех $x \in X$ выполняется неравенство:

$$f(x) \leq M. \text{ т.е. } \exists M : \forall x \in X, f(x) \leq M.$$

Определение 8. Функция $f(x)$ определенная на X называется **ограниченной снизу**, если $\exists m : \forall x \in X, f(x) \geq m$.

Определение 6. Функция $f(x)$ называется **ограниченной** на X , если существует такое $C > 0$, что $|f(x)| \leq C, \text{ т.е. } \exists C > 0 : \forall x \in X, |f(x)| \leq C$.

Определение 9. Функция $f(x)$ определенная на множестве X , называется **периодической**, если на этом множестве существует такое число $T \in D$, что $\forall x \in D$ выполняется равенство $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$, число T называется **периодом** функции. Если T – период функции, то периодом функции будут также являться числа kT , где $k \in \mathbb{N}$. Например, $\sin x, \cos x$ имеют период 2π , для $\operatorname{tg} x$, и $\operatorname{ctg} x$ – период π .

Вопросы и задания:

1. Найти $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$, если $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 + x - 20 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 7x + 12 < 0\}$.

2. Даны множества $A = \{x \in \mathbb{Z} | |x - 2| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | (-1; 3]\}$. Найти $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

3. Определить множества $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$, если $A = \{x \in \mathbb{Z} | |2x + 3| < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | -1 \leq x \leq 4\}$.

4. Найти область определения функции $y = \frac{2x-1}{(2x-5)(x^2-4)} + \arcsin(3x+1)$.

5. Найти область определения функции $y = 2^{\sqrt{64-2x-36}} + \sqrt[3]{4x-5}$.

6. Найти область определения функции $y = \sqrt{\frac{49-x^2}{x^2-2x-15}} + \lg(3-x)$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2012. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2013. – 736 с.
4. Будаев В. Д., Якубсон М.Я. Математический анализ. Функции одной переменной. Учебник. Издательство: Лань, 2012. – 544 с.

Дополнительная литература:

5. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
6. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 2. Предел числовой последовательности

Цель занятия: рассмотреть основные понятия теории числовых последовательностей и их пределов, научиться вычислять пределы числовых последовательностей.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Предел числовой последовательности и его геометрический смысл.
2. Свойства сходящихся последовательностей.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, связь между ними.
4. Вычисление пределов числовой последовательности: неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right), (\infty - \infty)$.
5. Число e и натуральные логарифмы.

Актуальность темы: показывает универсальный характер основных понятий математического анализа для получения комплексного представления о подходах к созданию математических моделей и формирует исследовательскую позицию и исследовательское поведение, развитие мыслительных операций.

Теоретическая часть:

Определение 1. Если каждому натуральному числу n по некоторому закону поставлено в соответствие вполне определенное число a_n , то говорят, что задана числовая последовательность $\{a_n\}$: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ называют членами последовательности. Таким образом, числовую последовательность можно определить как функцию натурального аргумента.

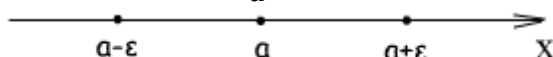
Определение 2. Число a называется **пределом** числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$, как бы мало оно не было, существует номер N , зависящий от ε , что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство: $|x_n - a| < \varepsilon$, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Определение 3. Последовательность называется **сходящейся**, если она имеет конечный предел. Последовательность называется **расходящейся**, если она предела не имеет.

Геометрический смысл предела числовой последовательности

Рассмотрим $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, то есть имеем интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ - который является ε - окрестностью точки a .



Если a является пределом последовательности $\{x_n\}$, то, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$ все члены последовательности, начиная с некоторого номера, будут попадать в ε - окрестность точки a , а вне этой окрестности может быть, лишь конечное число членов этой последовательности.

Теорема 1. Если последовательность сходится, то она имеет единственный предел.

Теорема 2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

Определение 4. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется **бесконечно малой** числовой последовательностью, если ее предел равен 0.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Определение 5. Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой** числовой последовательностью, если $\forall M > 0$, как бы велико оно ни было, существует номер N зависящий от M , что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > M$, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0, \exists N = N(M) : \forall n > N \Rightarrow |x_n| > M, \\ x_n \in (-\infty; -M) \cup (M; +\infty), \quad \forall n > N.$$

Теорема 3. Если $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая числовая последовательность $\alpha_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, то последовательность $x_n = \frac{1}{\alpha_n}$ - есть бесконечно большая числовая последовательность.

Теорема 4. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая числовая последовательность $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, то последовательность $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$ - есть бесконечно малая числовая последовательность.

При вычислении пределов числовых последовательностей мы часто получаем отношение или разность двух бесконечно больших величин, то есть $\left(\frac{\infty}{\infty}\right), (\infty - \infty)$. Этот предел может быть равен как числу, так и вообще не существовать, то есть равен ∞ . В этом случае мы говорим, что получили неопределенность.

Правило 1. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ надо многочлены, стоящие в числителе и знаменателе разделить почленно на n в наивысшей степени, а

затем применить основные определения, леммы и теоремы о бесконечно малых числовых последовательностях.

Правило 2. Чтобы раскрыть неопределенность вида $(\infty - \infty)$ надо простейшими преобразованиями привести к неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, а затем действовать по правилу 1.

Вопросы и задания:

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

1. $a_n = \frac{4n-1}{2n+1}$, $a = 2$.

2. $a_n = \frac{n+1}{1-2n}$, $a = -\frac{1}{2}$.

3. $a_n = \frac{3n^2}{2-n^2}$, $a = -3$.

4. $a_n = \frac{3-n^2}{1+2n^2}$, $a = -\frac{1}{2}$.

Вычислить пределы числовых последовательностей.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 2n}{(n+1)^4 - (n-1)^4}$.

Вычислить пределы числовых последовательностей.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2 - 2n + 3}]$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1})$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2 - 3})$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n)$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{(n^2 + 2)(n+1)} - \sqrt{(n^2 - 1)(n+3)}]$.

Вычислить пределы числовых последовательностей.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n}$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$.

Вычислить пределы числовых последовательностей.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^4}$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^2}$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \right)^{-n^2}$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2012. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2013. – 736 с.
4. Будаев В. Д., Якубсон М.Я. Математический анализ. Функции одной переменной. Учебник. Издательство: Лань, 2012. – 544 с.
5. Туганбаев А.А. Математический анализ: пределы. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2013. – 65 с.

Дополнительная литература:

6. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.

7. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 3. Предел функции. Непрерывность функции

Цель занятия: познакомиться с основными понятиями теории пределов функций, научиться вычислять пределы функций, использовать правило раскрытия неопределенности; научиться вычислять пределы функций, используя первый и второй замечательные пределы, их следствия, а также замечательные пределы, связанные с показательной и логарифмической функциями; научиться исследовать функции на непрерывность, определять классификацию точек разрыва функции.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Предел функции в точке и его свойства.
2. Правило раскрытия неопределенности при вычислении предела функции.
3. Первый замечательный предел, следствия.
4. Второй замечательный предел, следствия.
5. Замечательные пределы, связанные с показательной и логарифмической функциями.
6. Понятие непрерывности функции.
7. Точки разрыва функции и их классификация.
8. Свойства функций, непрерывных в точке.
9. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Актуальность темы: расширение и углубление знаний, умений и навыков, определяемых содержанием базовых понятий и определений математического анализа, умение проводить обработку и анализ полученных результатов при проведении экспериментов по заданной методике.

Теоретическая часть:

Определение 6 (по Коши на языке " $\varepsilon - \delta$ "). Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0 , кроме быть может самой точки x_0 . Число A называется пределом функции при x стремящемся к x_0 (или в точке x_0), если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число δ , зависящее от ε (то есть $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x отличных от x_0 из того что $|x - x_0| < \delta$ следует, что $|f(x) - A| < \varepsilon$. Предел функции обозначается $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow x_0$:

$$K: \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in D(f) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Смысл определения предела функции в точке состоит в том, что для всех значений аргумента x достаточно близких к x_0 , значения функции в этих точках достаточно близки к A (по абсолютной величине).

На практике при вычислении предела функции при $x \rightarrow x_0$ приходится сталкиваться с отношением двух бесконечно малых функций, что является неопределенностью.

Правило. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ нужно из многочленов, стоящих в числителе и знаменателе выделить множитель $(x - x_0)$ и на него сократить, а затем применить основные теоремы о пределе.

Пример: Вычислить предел функции

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \{x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)\} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}.$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = -2.$$

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Здесь следует отметить, что первый

замечательный предел раскрывает неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Из первого замечательного предела следует, что:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1;$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1;$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} x}{x}} = 1;$$

Рассмотрим предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$. Положим $t = \arcsin x$, тогда $\sin t = \sin \arcsin x = x$.

Если $x \rightarrow 0$, то и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$. Таким образом получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\arcsin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\arcsin t}{t}} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t}} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\arcsin x}{x}} = 1;$$

Аналогично 4) можно получить, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} = 1$.

Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828 \dots$. Число e называется

числом Эйлера, является иррациональным. График функции $y = e^x$ получил название экспоненты. Логарифмы по основанию e называются натуральными и обозначаются

$$\log_e x = \ln x.$$

Следствие из второго замечательного предела: обозначим $t = \frac{1}{x}$. Если $x \rightarrow \infty$, то

$$t \rightarrow 0, \text{ следовательно } \lim_{x \rightarrow t} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Определение 7. Число A называется пределом функций $f(x)$ справа (слева), если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in D(f) \wedge x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$)

выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$, и обозначается

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A - \text{правосторонний предел};$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A - \text{левосторонний предел};$$

$$\text{или соответственно } f(x_0 + 0) = A, \quad f(x_0 - 0) = A.$$

Определение 8. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если она удовлетворяет следующим условиям: 1) она определена в точке x_0 ; 2) имеет конечный предел при $x \rightarrow x_0$; 3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение непрерывности функции в точке может быть записано и следующим образом: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, то есть для непрерывной функции знаки предела и функции можно поменять местами.

Придадим аргументу x приращение Δx , тогда и сама функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение 9. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, то есть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. Если не выполнено хотя бы

одно из условий непрерывности 1) – 3) определения 2, то функция терпит в точке x_0 разрыв, причем, если:

1) существуют односторонние пределы, которые равны между собой, но не равны значению функции в точке x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq f(x_0)$, то функция в точке

x_0 имеет **устранимый разрыв**. Его можно устранить, если функцию доопределить, т.е. положить, что $f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

2) существуют односторонние пределы, но они не равны друг другу, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$, тогда точка x_0 - **называется точкой разрыва 1-го рода**. В этом

случае величину $d = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ - называется **скачком** функции $f(x)$ в точке x_0 . Причем, если $d > 0$, то скачок вверх на d масштабных единиц, если $d < 0$ - вниз.

3) хотя бы один из односторонних пределов равен ∞ , то точка x_0 - **называется точкой разрыва 2-го рода**.

Вопросы и задания:

Вычислить пределы функций:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6+x-x^2}{x^3-27}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-7x+4}{x^2-5x+6}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{12-x-x^2}{x^3-27}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}.$$

Исследовать данные функции на непрерывность:

$$1. f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}} + 1;$$

$$2. f(x) = \frac{x+7}{x-2};$$

$$3. f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & x \leq 2, \\ x, & x > 2. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 4-2x, & 1 < x < 2.5, \\ 2x-7, & 2.5 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2012. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2013. – 736 с.
4. Будаев В. Д., Якубсон М.Я. Математический анализ. Функции одной переменной. Учебник. Издательство: Лань, 2012. – 544 с.
5. Туганбаев А.А. Математический анализ: пределы. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2013. – 65 с.

Дополнительная литература:

6. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
7. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

РАЗДЕЛ II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Занятие № 4. Производная функции

Цель занятия: дать определение производной функции как предел разностного отношения, освоить технику нахождения таких пределов для элементарных функций; дать определение производной функции, освоить технику нахождения производных элементарных и сложных функций, используя правила дифференцирования и таблицу

производных; освоить технику нахождения производных сложных функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Определение производной, ее геометрический и механический смысл.
2. Непрерывность дифференцируемой функции.
3. Правила дифференцирования. Таблица производных.
4. Производная сложной функции.
5. Производная сложной и обратной функции.
6. Дифференцирование неявных функций. Логарифмическое дифференцирование.

Актуальность темы: научное обоснование фундаментальных понятий теории производных, воспитание математической и профессиональной культуры, расширение математического кругозора студентов.

Теоретическая часть:

Определение 1. Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимого аргумента (разностного отношения) при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Обозначается y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, y'_x .

Нахождение производной функции называется **дифференцированием** этой функции.

Если функция имеет конечную производную в точке x , то она дифференцируема в этой точке. Функция, дифференцируемая в каждой точке промежутка X , называется дифференцируемой на этом промежутке.

Основные правила дифференцирования

1. Производная постоянной равна нулю, то есть $c' = 0$. (2)

Действительно, если $c = f(x)$, то $c' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$.

2. Производная аргумента равна единице, то есть $x' = 1$. (3)

Пусть $f(x) = x$, тогда $x' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$.

3. Производная алгебраической суммы дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть

$$(u \pm v)' = u' \pm v'. \quad (4)$$

4. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, то есть

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'. \quad (5)$$

5. Производную частного двух дифференцируемых функций можно найти по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad (6)$$

Теорема 1. Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу и умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x , то есть

$$y' = f'(u) \cdot u'. \quad (7)$$

Пусть $y = f(x)$ – дифференцируемая и строго монотонная функция на некотором промежутке x с областью значений y , тогда существует обратная функция к данной $x(y)$, определенная на множестве y .

Теорема 2. Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции, то есть

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \quad (8)$$

Таблица производных

- | | |
|---|---|
| 1. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, | 9. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, |
| 2. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, | 10. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$, ($a > 0$), |
| 3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, | 11. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, |
| 4. $(e^u)' = e^u \cdot u'$, | 12. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, |
| 5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, | 13. $(\arctg u)' = \frac{u'}{1+u^2}$, |
| 6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$, | 14. $(\text{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$, |
| 7. $(tg u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$, | |
| 8. $(ctg u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$, | |

Вопросы и задания:

Найти производные следующих функций:

- $y = (2 + 3x)^5$.
- $y = \sin(2x - 1)$.
- $y = \text{ctg} \sqrt{x}$.
- $z = \sqrt{x} + \sqrt{x}$.
- $u = \sin at \cos \frac{t}{a}$.
- $r = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$.
- $v = \frac{1}{(1 + \sin 4y)^3}$.
- $s = \frac{1}{3} \text{tg}^3 z - \text{tg} z + z$.
- $y = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x}$.
- $y = \sin^2 x + \sin x^2$; вычислить $y'(0)$.
- $y = \cos \frac{x}{a} + \cos \frac{a}{x}$; вычислить $y'(a)$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2012. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2013. – 736 с.
4. Будаев В. Д., Якубсон М.Я. Математический анализ. Функции одной переменной. Учебник. Издательство: Лань, 2012. – 544 с.
5. Туганбаев А.А. Математический анализ: производные и графики функций. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2013. – 93 с.

Дополнительная литература:

6. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
7. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 5. Дифференциал функции

Цель занятия: дать определение дифференциала функции, освоить технику нахождения дифференциалов элементарных функций; освоить технику нахождения дифференциалов высших порядков.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Свойства дифференциала.
2. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.

Актуальность темы: поскольку данное определение ложится в основу метода замены переменной при интегрировании функций, показать связь основных понятий математического анализа, формируя тем самым исследовательское мышление и развитие мыслительных операций.

Теоретическая часть:

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке X и дифференцируема в некоторой точке $x \in X$. Тогда существует конечная производная

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x), \quad (1)$$

где $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Из равенства (1) следует

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \quad (2)$$

Таким образом, приращение функции Δy состоит из двух слагаемых: $f'(x)\Delta x$ – линейное относительно Δx слагаемое; $\alpha(\Delta x)\Delta x$ – нелинейное относительно Δx слагаемое.

Определение. Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной

$$dy = f'(x)\Delta x. \quad (3)$$

Свойства дифференциала

Свойства дифференциала аналогичны свойствам производной:

- 1) $dc = 0, c = \text{const};$
- 2) $d(cu) = cdu, c = \text{const};$
- 3) $d(u \pm v) = du \pm dv;$
- 4) $d(uv) = u dv + v du;$
- 5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}.$

Инвариантность формы дифференциала

Рассмотрим функцию $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то есть рассмотрим сложную функцию $y = f[\varphi(x)]$. Если функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции равна $y' = f'(u) \cdot u'$, тогда дифференциал функции равен

$$dy = f'(u) \cdot u' \cdot dx.$$

Так как $du = u' dx$, то последнее равенство можно записать

$$dy = f'(u) du. \quad (4)$$

Сравнив равенства (4) и (5) можно заключить, что форма дифференциала не изменится, если вместо функции от независимой переменной x рассматривать функцию переменной u . Это свойство дифференциала получило название инвариантности (то есть неизменности) формы (или формулы) дифференциала.

Но в содержании формул (4) и (5) имеется существенная разница. В формуле (4) дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной, то есть $dx = \Delta x$, а в формуле (5) дифференциал функции du есть линейная часть приращения этой функции Δu : $du = u'(x)\Delta x$.

Вопросы и задания:

Найти дифференциал функции

1. $y = (a + bx)^m.$
2. $z = e^{-t}(2 - 2t - t^2).$
3. $y = 0,25\sqrt{x}.$
4. $u = \frac{x^n}{n^2}(1 - n \ln x).$
5. $v = (1 - \ln \sin \varphi) \sin \varphi.$
6. $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{0,2}.$
7. $y = \frac{1}{0,5x^2}$
8. $y = \frac{1}{4x^4}$
9. $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$
10. $y = \frac{1}{n\sqrt[3]{x}}.$
11. $y = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}.$
12. $y = \frac{\cos x}{1 - x^2}.$

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2012. – 608 с.

3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2013. – 736 с.
4. Будаев В. Д., Якубсон М.Я. Математический анализ. Функции одной переменной. Учебник. Издательство: Лань, 2012. – 544 с.
5. Туганбаев А.А. Математический анализ: производные и графики функций. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2013. – 93 с.

Дополнительная литература:

6. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
7. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 6. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Применение производной для исследования функции

Цель занятия: освоить основные теоремы дифференциального исчисления, их геометрический смысл, научиться применять правило Лопиталя при вычислении пределов функций; научиться применять аппарат дифференциального исчисления при исследовании функций; проводить полное исследование функции по отработанной ранее схеме и выполнять построение ее графика.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Теорема Ферма, ее геометрический смысл.
2. Теорема Ролля, ее геометрический смысл.
3. Теорема Лагранжа, ее геометрический смысл.
4. Теорема Коши о конечных приращениях, ее геометрический смысл.
5. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.
6. Признаки возрастания и убывания функций.
7. Экстремум функции.
8. Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке.
9. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба графика функции.
10. Асимптоты графика функции.
11. Схема полного исследования функции и построение ее графика.

Актуальность темы: позволяет раскрыть практическую значимость и применение понятийного аппарата математического анализа.

Теоретическая часть:

Теорема Ферма. Если дифференцируемая на промежутке x функция $y = f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, то есть $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что в точке наименьшего или наибольшего значения, достигаемого внутри промежутка x , касательная к графику

функции параллельна оси абсцисс.

Теорема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) непрерывна на отрезке $[a; b]$; 2) дифференцируема на интервале $(a; b)$; 3) на концах отрезка принимает равные значения, то есть $f(a) = f(b)$, тогда внутри отрезка $[a; b]$ существует по крайней мере одна точка $\xi \in (a; b)$, в которой производная равна нулю: $f'(\xi) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при выполнении условий теоремы на интервале (a, b) существует точка ξ такая, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна оси Ox . Таких точек на интервале может быть и несколько, но теорема утверждает существование по крайней мере одной такой точки.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) непрерывна на отрезке $[a; b]$; 2) дифференцируема на интервале $(a; b)$; тогда внутри отрезка $[a; b]$ существует по крайней мере одна точка $\xi \in (a; b)$, в которой производная равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке, то есть $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ или $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Теорема Коши: Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b) , то существует по крайней мере одна точка $\varepsilon, a < \varepsilon < b$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)},$$

то есть отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению производных в точке ε .

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right); (\infty - \infty); (1^\infty); \left(\frac{0}{0}\right); (\infty \cdot 0); (\infty^0); (0^0).$$

Теорема Лопиталья. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле.

Вопросы и задания:

1 Найти абсциссы всех общих точек графика функции $y = x - \frac{4}{|x|}$ и касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

2 Напишите уравнение касательной к графику функции $y = 5x^{\frac{2}{5}} + 27$ в точке графика с ординатой 32.

3 Докажите, что касательные, проведенные к графику функции $y = \frac{x-4}{x-2}$ в точках пересечения его с осями координат, параллельны между собой.

4 Является ли прямая $y = x + 2$ касательной к графику функции $y = 2x - \ln x$? Ответ обоснуйте.

5 Известно, что прямая, заданная уравнением $y = -9x + 2$, является касательной к графику функции $y = x^3 - 7x^2 + 2x - 3$. Найдите координаты точки касания.

6 Дана прямая $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + 4$. После поворота на некоторый острый угол вокруг точки M , лежащей на этой же прямой, прямая становится касательной к графику

функции $y = 4x^3 - 3x^2 - 18x - 7$ в точке с абсциссой $x = -1$. Найдите угол поворота и координаты точки M .

7 Вычислить, используя правило Лопиталя:

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x} & 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2 \ln x} - x}{(\ln x)^x + x} & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln x. \\ 4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) & 5. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{\sin \pi x}} & 6. \lim_{x \rightarrow 0} (2\sqrt{x})^{\frac{1}{\ln x}}. \end{array}$$

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2012. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2013. – 736 с.
4. Будаев В. Д., Якубсон М.Я. Математический анализ. Функции одной переменной. Учебник. Издательство: Лань, 2012. – 544 с.
5. Туганбаев А.А. Математический анализ: производные и графики функций. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2013. – 93 с.

Дополнительная литература:

6. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
7. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

2 семестр

РАЗДЕЛ III. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Занятие № 7. Неопределенный интеграл и его свойства. Метод замены переменной. Метод интегрирования по частям

Цель занятия: освоить понятия первообразной и неопределенного интеграла, основных свойств неопределенного интеграла; освоить метод интегрирования - метод замены переменной (метод подстановки); освоить метод интегрирования по частям.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Первообразная и неопределенный интеграл.
2. Геометрический смысл неопределенного интеграла, его свойства.

3. Метод непосредственного интегрирования (используя свойства неопределенного интеграла и таблицу).
4. Метод замены переменной (метод подстановки).
5. Метод интегрирования по частям.

Актуальность темы: знакомство студентов с начальными понятиями и определениями раздела интегрального исчисления функций одной переменной математического анализа, воспитание математической и профессиональной культуры, расширение математического кругозора студентов.

Теоретическая часть:

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если для любого $x \in (a; b)$ выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$.

Например, $F(x) = x^4$ является первообразной для $f(x) = 4x^3$, так как $(x^4)' = 4x^3$. Любая функция вида $F(x) = x^4 + C$, где $C = \text{const}$ также является первообразной для $f(x) = 4x^3$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется **интегрируемой** на промежутке E , если на этом промежутке она имеет первообразную. Множество всех её первообразных на промежутке E называется **неопределённым интегралом** и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$, где знак $\int$ называется интегралом; $f(x)$ - подынтегральной функцией; $f(x)dx$ - подынтегральным выражением; $F(x)$ - первообразная функция; C - произвольная постоянная.

Таблица интегралов

- | | |
|---|---|
| 1. $\int 0 \cdot du = C$ | 2. $\int du = u + C$ |
| 3. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ | 4. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ |
| 5. $\int \frac{du}{u+a} = \ln u+a + C$ | 6. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ |
| 7. $\int e^u du = e^u + C$ | 8. $\int \sin u du = -\cos u + C$ |
| 9. $\int \cos u du = \sin u + C$ | 10. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$ |
| 11. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$ | 12. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$ |
| 13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$ | 14. $\int \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg} u + C$ |
| 15. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$ | 16. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$ |
| 17. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u+a}{u-a} \right + C$ | 18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln \left u + \sqrt{u^2+a} \right + C$ |
| 19. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a}} = \ln \left u + \sqrt{u^2-a} \right + C$ | 20. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C$ |
| 21. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$ | 22. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right + C$ |

$$23. \quad \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$24. \quad \int \sqrt{u^2 + k} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + k} + \frac{k}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 + k} \right| + C$$

$$25. \quad \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C, \quad (a > 0)$$

I. Непосредственное интегрирование. Метод непосредственного интегрирования заключается в том, что данный интеграл путем тождественных преобразований с использованием свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

II. Метод интегрирования подстановкой. Одним из наиболее мощных методов интегрирования является метод замены переменной, который заключается в том, что вводится новая переменная (подстановка), при этом заданный интеграл приводится к новому интегралу в новой переменной, который является табличным или сводящимся к нему.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x) dx$. Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении: положим

$$x = \varphi(t), \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ – непрерывная функция, с непрерывной производной, имеющая обратную функцию $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$, тогда справедлива формула

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (2)$$

Замечание 1. После интегрирования в новой переменной необходимо от переменной t вернуться к переменной x на основании равенства (1).

Замечание 2. При интегрировании иногда целесообразно использовать замену $t = \varphi(x)$. Например, требуется вычислить интеграл $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx$. Положим $t = \varphi(x)$, тогда $dt = d[\varphi(x)] = \varphi'(x) dx$ и рассматриваемый интеграл преобразуется к виду:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\varphi(x)| + C,$$

то есть

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln|\varphi(x)| + C. \quad (3)$$

III. Интегрирование методом по частям. Пусть u и v – дифференцируемые функции по x . Известна формула

$$d(uv) = vdu + u dv.$$

Интегрируем последнее равенство

$$\begin{aligned} \int d(uv) &= \int (vdu + u dv), \quad uv = \int vdu + \int u dv \Rightarrow \\ \int u dv &= uv - \int vdu. \end{aligned} \quad (4)$$

Формула (4) называется **формулой интегрирования по частям**. Эта формула применяется при интегрировании выражений, которые могут быть представлены в виде $u \cdot dv$ так, чтобы отыскание функции v по ее дифференциалу и вычисление интеграла $\int vdu$ представляли в совокупности более простую задачу, чем вычисление интеграла $\int u dv$. К числу интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям, относятся интегралы вида $\int P(x) \cdot f(x) dx$, где $P(x)$ – многочлен, $f(x)$ – одна из следующих функций: $e^{\alpha x}$, $\sin \alpha x$, $\cos \alpha x$, $\ln^m \alpha x$, $\operatorname{arctg} \alpha x$, $\arcsin \alpha x$. Дадим два практических совета:

1. Если подынтегральная функция представляет собой произведение либо

тригонометрической функции на алгебраическую, либо показательной на алгебраическую, то за u следует принимать алгебраическую функцию.

2. Если в подынтегральное выражение входит множителем обратная тригонометрическая, либо логарифмическая функция, то за u следует принимать одну из указанных функций. Таким образом, за u берется та функция, которая упрощается дифференцированием.

Замечание 3. Постоянная C , возникающая при нахождении функции v не входит в запись окончательного ответа, поэтому она исключается в процессе решения.

Замечание 4. Иногда формулу интегрирования по частям необходимо применять несколько раз.

Вопросы и задания:

Вычислить интегралы

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$2. \int (\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{5}{x^7}) dx.$$

$$3. \int (\sqrt{x} - 1)(x^3 - \sqrt[3]{x} + 3) dx.$$

$$4. \int x(x^2 + 1)(x^3 - 4) dx$$

$$5. \int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$6. \int \frac{3x^2 - 5x + 9}{x} dx.$$

$$7. \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 3}} dx.$$

$$8. \int \frac{(\ln x)^2 + 1}{x} dx.$$

$$9. \int \operatorname{tg} x dx.$$

$$10. \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

$$11. \int \frac{3x^2}{x^2 + 1} \ln(x^3 + 1) dx.$$

$$12. \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx.$$

$$13. \int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$14. \int \frac{\ln x - 3}{x \sqrt{\ln x}} dx.$$

$$15. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 - 2}}.$$

$$16. \int x e^{-2x} dx.$$

$$17. \int x \cos 4x dx.$$

$$18. \int x^2 \sin 2x dx.$$

$$19. \int \arccos x dx.$$

$$20. \int x^3 \ln x dx.$$

$$21. \int \ln x dx.$$

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2012. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2013. – 736 с.
4. Будаев В. Д., Якубсон М.Я. Математический анализ. Функции одной переменной. Учебник. Издательство: Лань, 2012. – 544 с.
5. Туганбаев А.А. Математический анализ: интегралы. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2013. – 88 с.

Дополнительная литература:

6. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
7. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Методическая литература:

8. Кириллова Л.Н. Математический анализ: Интегральное исчисление функций одной переменной. Часть 1. Неопределенный интеграл. Учебно-методическое пособие. – Ставрополь: изд-во СГУ, 2011. – 70 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 8. Интегрирование рациональных выражений и некоторых видов иррациональностей, тригонометрических функций

Цель занятия: освоить интегрирование различных рациональных функций; освоить интегрирование различных иррациональных функций; освоить интегрирование различных тригонометрических функций.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Интегрирование элементарных дробей.
2. Интегрирование рациональностей с помощью разложения на сумму простых дробей (метод неопределенных коэффициентов).
3. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, где n - натуральное число.
4. Интегрирование биномиальных дифференциалов.
5. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$.
6. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$.
7. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, если функция R является нечетной относительно $\cos x$.
8. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, если функция R является нечетной относительно $\sin x$.
9. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, функция R четная относительно $\sin x$ и $\cos x$.
10. Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов.

Актуальность темы: расширение и углубление знаний, умений и навыков, определяемых содержанием раздела математического анализа – интегральное исчисление функций одной переменной, умение проводить анализ полученных результатов.

Теоретическая часть:

Определение 1. Рациональной дробью называют дробь в числителе и знаменателе, стоит многочлен. Рациональная дробь называется **правильной**, если степень многочлена, стоящего в числителе меньше степени многочлена стоящего в знаменателе. Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы целой части многочлена и правильной рациональной дроби.

Определение 2. Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \frac{1}{x+b}; & \text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}; \\ \text{II. } \frac{1}{(x+b)^m}; & \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n} \end{array}$$

m, n – натуральные числа ($m \geq 2, n \geq 2$) и $b^2 - 4c < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой $t = x + b$.

$$\text{I. } \int \frac{dx}{x+b} = \int \frac{d(x+b)}{x+b} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+b| + C.$$

II.

$$\int \frac{dx}{(x+b)^m} = \int \frac{d(x+b)}{(x+b)^m} = \int \frac{dt}{t^m} = \int t^{-m} dt = \frac{t^{-m+1}}{-m+1} = -\frac{1}{(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{(m-1)(x+b)^{m-1}} + C.$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III, сначала заметим, что:

$$1. \int \frac{dt}{t^2 + \lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{t}{\lambda} + C; \quad 2. \int \frac{tdt}{t^2 + \lambda^2} = \frac{1}{2} \ln(t^2 + \lambda^2) + C,$$

тогда выделением полного квадрата преобразуем квадратный трехчлен знаменателя к виду $x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$. Так как по условию квадратный трехчлен не имеет

действительных корней ($b^2 - 4c < 0$), мы можем положить $c - \frac{b^2}{4} = \lambda^2$. Замена переменной

$x + \frac{b}{2} = t$, $dx = dt$ преобразует исходный интеграл вида III к линейной комбинации указанных двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} dx = \int \frac{A\left(t - \frac{b}{2}\right) + B}{t^2 + \lambda^2} dt = A \int \frac{tdt}{t^2 + \lambda^2} + \left(B - \frac{Ab}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + \lambda^2} = \frac{A}{2} \ln(t^2 + \lambda^2) + \frac{1}{\lambda} \left(B - \frac{Ab}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{t}{\lambda} + C$$

В окончательном ответе нужно лишь заменить t на $x + \frac{b}{2}$, а λ на $\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}$. Так как

$$t^2 + \lambda^2 = x^2 + bx + c, \text{ то } \int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} dx = \frac{A}{2} \ln(x^2 + bx + c) + \frac{\left(B - \frac{Ab}{2}\right)}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} + C.$$

Рассмотрим применение приведенной выше формулы на примерах.

Самый важный класс функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции, представляют рациональные функции, то есть функции $R(x)$, представимые в виде

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (1)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели простейшие рациональные функции четырех типов и дали определение правильной дроби. Итак, если (1) – неправильная дробь, то из нее можно выделить целую часть путем деления многочлена в числителе на многочлен в знаменателе:

$$R(x) = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}, \quad (2)$$

где $M(x)$ – многочлен, $P_1(x)$ – остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$. В случае (2) правильной дробью является $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$.

Чтобы проинтегрировать рациональную дробь, необходимо выполнить следующие действия:

1. Находим корни уравнения $Q(x) = 0$.

2. Разлагаем знаменатель $Q(x)$ (если только он не представлен в требуемом разложении) на множители с действительными коэффициентами:

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_n)^{\alpha_n} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + b_mx + c_m)^{\beta_m}, \quad (3)$$

где основания первой степени соответствуют действительным корням, а основания второй степени – парам комплексно сопряженных корней, показатели степеней указывают кратность соответствующего корня. Коэффициент при наибольшей степени x в знаменателе $Q(x)$ можно считать равным единице, ибо этого можно добиться, деля на него $P(x)$ и $Q(x)$.

3. Разлагаем правильную дробь на простейшие по формуле

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{B_1}{x - a_n} + \frac{B_2}{(x - a_n)^2} + \dots + \frac{B_{\alpha_n}}{(x - a_n)^{\alpha_n}} + \dots +$$

$$+ \frac{M_1x + N_1}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + b_1x + c_1)^2} + \dots + \frac{M_{\beta_1}x + N_{\beta_1}}{(x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{K_1x + L_1}{x^2 + b_mx + c_m} + \dots + \frac{K_{\beta_m}x + L_{\beta_m}}{(x^2 + b_mx + c_m)^{\beta_m}}, \quad (4)$$

где $A_1, \dots, A_{\alpha_1}, B_1, \dots, B_{\alpha_n}, M_1, N_1, \dots, M_{\beta_1}, N_{\beta_1}, \dots, K_1, L_1, \dots, K_{\beta_m}, L_{\beta_m}$ – неопределенные коэффициенты (некоторые из них могут равняться нулю).

4. Для нахождения неопределенных коэффициентов все простейшие дроби приводим к общему знаменателю $Q(x)$ и приравниваем числители обеих частей равенства (4). Затем сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x . Это приводит к системе уравнений, из которых и находим значения интересующих нас коэффициентов.

5. Находим интегралы выделенной целой части и всех простейших дробей, которые затем складываем.

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями. Для нахождения интеграла от иррациональной функции следует применить подстановку, которая позволит преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой может быть найден, как известно, всегда.

Рассмотрим некоторые приемы для интегрирования различных типов иррациональных функций.

I. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, где n – натуральное число

С помощью подстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ функция рационализуется:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \quad x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}; \quad dx = \left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n} \right)' dt;$$

$$\text{тогда } \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n} \right)' dt = \int r(t) dt.$$

II. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Определение. Биноминальным дифференциалом называется выражение

$$x^m(a + bx^n)^p dx,$$

где m, n , и p – рациональные числа.

Как было доказано академиком Чебышевым П.Л. (1821-1894), интеграл от биномиального дифференциала может быть выражен через элементарные функции только в следующих трех случаях:

1) Если p – целое число, то интеграл рационализуется с помощью подстановки $t = \sqrt[p]{x}$, где λ – общий знаменатель m и n .

2) Если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то интеграл рационализуется подстановкой $t = \sqrt[s]{a + bx^n}$, где s – знаменатель числа p .

3) Если $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число, то используется подстановка $t = \sqrt[s]{\frac{a + bx^n}{x^n}}$, где s – знаменатель числа p .

III. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

Существует несколько способов интегрирования такого рода функций. В зависимости от вида выражения, стоящего под знаком радикала, предпочтительно применять тот или иной способ. Как известно, квадратный трехчлен путем выделения полного квадрата может быть приведен к виду: $\pm u^2 \pm m^2$. Таким образом, интеграл приводится к одному из трех типов:

$$1) \int R(u, \sqrt{m^2 - u^2}) du;$$

$$2) \int R(u, \sqrt{m^2 + u^2}) du;$$

$$3) \int R(u, \sqrt{u^2 - m^2}) du;$$

Теорема 1. Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2}) du$ подстановкой $u = m \sin t$ или $u = m \cos t$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ или $\cos t$.

Теорема 2. Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2}) du$ подстановкой $u = m \operatorname{tg} t$ или $u = m \operatorname{ctg} t$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Теорема 3. Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2}) du$ подстановкой $u = \frac{1}{\sin t}$ или $u = \frac{1}{\cos t}$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ или $\cos t$.

Интегралов от тригонометрических функций может быть бесконечно много. Большинство из этих интегралов вообще нельзя вычислить аналитически, поэтому рассмотрим некоторые главнейшие типы функций, которые могут быть проинтегрированы всегда.

I. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных $\sin x$ и $\cos x$. Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Тогда $x = 2 \arctg t$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Таким образом:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt = \int r(t) dt.$$

Описанное выше преобразование называется **универсальной тригонометрической подстановкой**.

II. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, если функция R является нечетной относительно $\cos x$

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку $t = \sin x$.

$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x} \cos x dx$. Функция $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ может содержать $\cos x$ только в четных степенях, а, следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно $\sin x$. $\int R(\sin x, \cos x) dx = \int r(\sin x) \cos x dx = \int r(t) dt$.

III. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, если функция R является нечетной относительно $\sin x$

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка $t = \cos x$. Тогда $\int R(\sin x, \cos x) dx = \int r(\cos x) \sin x dx = -\int r(t) dt$.

IV. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, функция R четная относительно $\sin x$ и $\cos x$

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка $t = \tan x$. Тогда $\int R(\sin x, \cos x) dx = \int r(t) dt$.

I. Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов

В зависимости от типа произведения применяются одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right]$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2} [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]$$

Вопросы и задания:

Вычислить интегралы:

- | | | | |
|--|--|---|--|
| 1 $\int \frac{3x^4 + 4}{x^2(x^2 + 1)^3} dx$ | 2 $\int \frac{x^9}{(x^4 - 1)^2} dx$ | 3 $\int \frac{2x dx}{(1+x)(x^2 + 1)^2}$ | 4 $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(x^2 + 1)}$ |
| 5 $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$ | 6 $\int \frac{x^2}{1-x^4} dx$ | 7 $\int \frac{3x^2 + 1}{(x^2 - 1)^3} dx$ | 8 $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$ |
| 9 $\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^5}} dx$ | 10 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}}$ | 11 $\int \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx$ | 12 $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$ |
| 13 $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})}$ | 14 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$ | 15 $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}$ | 16 $\int \frac{\sqrt{x} dx}{3x + \sqrt[3]{x^2}}$ |
| 17 $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \tan^2 x}$ | 18 $\int \cos^6 x dx$ | 19 $\int \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^2}$ | 20 $\int \frac{dx}{\tan x \cos 2x}$ |

$$21 \int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} \quad 22 \int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}} \quad 23 \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} \quad 24$$

$$\int \frac{dx}{4+5\sin^2 x-3\cos^2 x}.$$

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2012. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2013. – 736 с.
4. Будаев В. Д., Якубсон М.Я. Математический анализ. Функции одной переменной. Учебник. Издательство: Лань, 2012. – 544 с.
5. Туганбаев А.А. Математический анализ: интегралы. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2013. – 88 с.

Дополнительная литература:

6. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
7. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Методическая литература:

8. Кириллова Л.Н. Математический анализ: Интегральное исчисление функций одной переменной. Часть 1. Неопределенный интеграл. Учебно-методическое пособие. – Ставрополь: изд-во СГУ, 2011. – 70 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 9. Определенный интеграл и его свойства. Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы

Цель занятия: освоить понятие определенного интеграла, изучить его основные свойства, научиться вычислять определенный интеграл с использованием формулы Ньютона-Лейбница; отработать метод замены переменной и метод интегрирования по частям в определенном интеграле; познакомиться с приложениями определённого интеграла; научиться вычислять несобственные интегралы первого и второго типа в случае их сходимости или устанавливать их расходимость.

Вопросы для обсуждения:

1. Понятие определённого интеграла, его геометрический и физический смысл.
2. Основные свойства определенного интеграла.
3. Связь определенного интеграла с неопределенным, формула Ньютона-Лейбница.

4. Связь определенного интеграла с неопределенным, формула Ньютона-Лейбница.
5. Метод замены переменной в определенном интеграле.
6. Метод интегрирования по частям в определенном интеграле.
7. Вычисление площади плоской фигуры.
8. Вычисление длины дуги плоской кривой.
9. Вычисление объема тела вращения.
10. Вычисление площади поверхности вращения.
11. Несобственные интегралы первого типа.
12. Несобственные интегралы второго типа.

Актуальность темы: позволяет раскрыть практическую значимость и применение понятийного аппарата математического анализа.

Теоретическая часть:

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (или в пределах от a до b) называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков ($\max \Delta x_k$) стремится к нулю:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (1)$$

Теорема существования определенного интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на элементарные отрезки и от выбора ξ_k .

Числа a и b называются соответственно **нижним и верхним пределами интегрирования**, $f(x)$ - **подынтегральной функцией**, $f(x) dx$ - **подынтегральным выражением**, x - **переменной интегрирования**, отрезок $[a, b]$ - **областью (отрезком) интегрирования**.

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a, b]$ существует определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, называется **интегрируемой** на этом отрезке.

Отметим, что непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости. Однако определенный интеграл может существовать и для некоторых разрывных функций, в частности для всякой ограниченной на отрезке функции, имеющей на нем конечное число точек разрыва.

Правила вычисления определенных интегралов

1. **Теорема Ньютона-Лейбница.** Определенный интеграл от непрерывной функции в данном промежутке равен разности значений любой первообразной функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x). \quad (8)$$

2. **Замена переменной** в определенном интеграле осуществляется по формуле:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)] \phi'(t) dt, \quad (9)$$

где $x = \phi(t)$, $a = \phi(\alpha)$, $b = \phi(\beta)$, t - новая переменная, α, β - новые пределы интегрирования.

Формула (7) называется **формулой замены переменной** в определенном интеграле. Важным является соблюдение следующих требований:

1). При вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется;

2). Часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют подстановку $t = \psi(x)$;

3). Не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных.

3. **Интегрирование по частям** в определенном интеграле осуществляется по формуле:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x). \quad (10)$$

4. **Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах:**

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a; a]$, симметричном относительно точки $x = 0$. Докажем, что

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(x) \text{ - четная функция} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ - нечетная функция} \end{cases} \quad (11)$$

Используя данную формулу можно, по виду подынтегральной функции, не производя вычислений, записать, например, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx = 0, \quad \int_{-3}^3 e^{-x^2} \cdot \sin x dx = 0.$$

Приложения определенного интеграла

I. Вычисление площади плоской фигуры

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, отрезком $[a, b]$ на оси Ox и прямыми $x = a$, $x = b$, $a < b$, выражается формулой:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

II. **Вычисление длины дуги кривой** $y = f(x)$, где $a \leq x \leq b$ вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \text{ или } l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (2)$$

III. **Вычисление объема тела, полученного вращением** вокруг оси Ox криволинейной трапеции $AabB$, где AB - дуга кривой $y = f(x)$, вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \text{ или } V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (3)$$

Объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $CcdD$, где CD - дуга кривой $x = \varphi(y)$, определяется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy \text{ или } V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy. \quad (4)$$

Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл I рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; +\infty)$. Если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$, то его называют **несобственным интегралом первого рода** и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx. \text{ В этом случае говорят, что несобственный интеграл } \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

сходится. Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **расходится**.

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty; b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \text{ где } c - \text{произвольное число.}$$

Интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл II рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x = b$. Если существует конечный предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$, то его называют **несобственным интегралом второго рода** и обозначают $\int_a^b f(x) dx$. Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ **сходится**. Если же указанный предел не существует или бесконачен, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x) dx$ **расходится**. Аналогично, если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Если функция $f(x)$ терпит разрыв во внутренней точке c отрезка $[a; b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

В этом случае интеграл слева называют сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

Вопросы и задания:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1 $y = e^x, y = e^{-x},$
 $x = 1$

3 $y = x^2, y = \sqrt{x}$

2 $y = x^2, y = \frac{x^3}{3}$

4 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

5 Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy = 4$ прямыми $x = 1, x = 4$ и осью OX .

6 Вычислить объем тела, полученного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси OY .

7 Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $2y^2 = x^3, x = 4$.

8 Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси OY криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y^3 = 4x^2, y = 2$.

9 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5};$

10 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}};$

11 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}.$

12 $\int_0^{+\infty} x \sin x dx;$

13 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2};$

14 $\int_1^{+\infty} \frac{x+5}{x^3\sqrt{x}} dx.$

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2012. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2013. – 736 с.
4. Будаев В. Д., Якубсон М.Я. Математический анализ. Функции одной переменной. Учебник. Издательство: Лань, 2012. – 544 с.
5. Туганбаев А.А. Математический анализ: интегралы. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2013. – 88 с.

Дополнительная литература:

6. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
7. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Методическая литература:

8. Ярцева Е.П. Математический анализ. Определенный интеграл и его приложения: учебно-методическое пособие. – Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2014. – 110 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

РАЗДЕЛ IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Занятие № 10. Функции нескольких переменных. Основные понятия

Цель занятия: освоить определение функции нескольких переменных, научиться выполнять их общее исследование, находить область определения.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Определение функции нескольких переменных.
2. Основные понятия, область определения функции нескольких переменных.

Актуальность темы: формирование основных понятий математического анализа, формирование исследовательской позиции и исследовательского поведения, развитие мыслительных операций.

Теоретическая часть:

Определение 1. Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z , то переменная z называется **функцией двух переменных** $z = f(x, y)$.

Определение 2. Областью определения функции $z = f(x, y)$ называется совокупность пар (x, y) , при которых функция z существует.

Определение 3. Число A называется **пределом** функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для любой точки $M(x, y)$, для которых верно условие $MM_0 < r$ также верно и условие $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Записывают: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$

Определение 4. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x, y)$, тогда функция $z = f(x, y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \quad (1)$$

причем точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Если в какой-либо точке условие (1) не выполняется, то эта точка называется **точкой разрыва** функции $f(x, y)$. Это может быть в следующих случаях:

- 1) Функция $z = f(x, y)$ не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
- 2) Не существует предел $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$.
- 3) Этот предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$.

Свойство 1. Если функция $f(x, y, \dots)$ определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области D , то в этой области найдется по крайней мере одна точка $N(x_0, y_0, \dots)$, такая, что для остальных точек верно неравенство $f(x_0, y_0, \dots) \geq f(x, y, \dots)$ а также точка $N_1(x_{01}, y_{01}, \dots)$, такая, что для всех остальных точек верно неравенство $f(x_{01}, y_{01}, \dots) \leq f(x, y, \dots)$, тогда $f(x_0, y_0, \dots) = M$ – **наибольшее значение** функции, а $f(x_{01}, y_{01}, \dots) = m$ – **наименьшее значение** функции $f(x, y, \dots)$ в области D . Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значения и один раз наименьшего.

Свойство 2. Если функция $f(x, y, \dots)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D , а M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, то для любой точки $\mu \in [m, M]$ существует точка $N_0(x_0, y_0, \dots)$ такая, что $f(x_0, y_0, \dots) = \mu$. Проще говоря, непрерывная функция принимает в области D все промежуточные значения между M и m . Следствием этого свойства может служить заключение, что если числа M и m разных знаков, то в области D функция по крайней мере один раз обращается в ноль.

Свойство 3. Функция $f(x, y, \dots)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области D , **ограничена** в этой области, если существует такое число K , что для всех точек области верно неравенство $|f(x, y, \dots)| < K$.

Свойство 4. Если функция $f(x, y, \dots)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D , то она **равномерно непрерывна** в этой области, то есть для любого положительного числа ε существует такое число $\Delta > 0$, что для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) области, находящихся на расстоянии, меньшем Δ , выполнено неравенство

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

Вопросы и задания:

Найти область определения функций:

$$1 \quad z = \sqrt{x+y} \ln(y-x+3);$$

$$2 \quad z = \arccos \frac{x-3y}{2};$$

$$3 \quad z = \frac{3}{x^2 + y^2 - 16};$$

$$4 \quad z = \ln(y^2 - 4x + 8).$$

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.

Дополнительная литература:

4. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
5. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Методическая литература:

6. Плотникова Е.Г., Левко С.В. Математический анализ: функция нескольких переменных. Учебно - методическое пособие. Издательство: Флинта, 2014. – 150 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 11. Дифференцирование функции нескольких переменных. Частные производные

Цель занятия: научиться вычислять частные производные и частные дифференциалы функции нескольких переменных; выработать навыки нахождения полного дифференциала функции нескольких переменных.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Частные производные функций нескольких переменных.
2. Частные дифференциалы функций нескольких переменных.
3. Полный дифференциал и его связь с частными производными функции нескольких переменных.
4. Инвариантность формы полного дифференциала. Геометрический смысл частной производной и полного дифференциала.

Актуальность темы: показывает универсальный характер основных понятий математического анализа для получения комплексного представления о подходах к созданию математических моделей, поскольку при проведении занятия акцент необходимо делать на связь двух разделов дисциплины.

Теоретическая часть:

Определение 1. Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x, y)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и зададим приращение Δx к переменной x , тогда величина

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

называется **частным приращением функции по x** .

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

В этом случае $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции $z = f(x, y)$ по x .

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x ; $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$; $f'_x(x, y)$. Аналогично определяется частная производная функции по y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Определение 2. Частным дифференциалом функции нескольких переменных по какой-либо переменной называется произведение частной производной этой функции по данной переменной на дифференциал этой переменной, то есть, если $z = f(x, y)$, то частные дифференциалы имеют вид: $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx$; $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$. В общем виде:

$$d_{x_i} u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot dx_i.$$

Определение 3. Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y)

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Для функции произвольного числа переменных

$$df(x, y, z, \dots, t) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) **касательной плоскости** (рассмотрим ниже) к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

Вопросы и задания:

Найти частные производные первого порядка:

1 $z = e^{3x^2 - 4y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$, $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$

2 $z = x^2 + \sin(xy)$, $z'_x - ?$

3 $z = x^3 + \cos x + x^4 y^2 + y^4 + 8$, $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$, $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$

4 $u = y \cos x + x \sin y$, $\frac{\partial u}{\partial x} - ?$

5 $z = x^{y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$, $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$

6 $u = x^y$, $\frac{\partial u}{\partial x} - ?$, $\frac{\partial u}{\partial y} - ?$

7 Найти полный дифференциал функции $z = x + \cos(x - y)$, $dz - ?$

8 Найти $z'_x(0, 2)$, если $z = (x + y)e^{xy}$.

9 Найти $f'_x(2, 1)$ и $f'_y(2, 1)$, если $f = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.

2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.

Дополнительная литература:

4. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
5. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Методическая литература:

6. Плотникова Е.Г., Левко С.В. Математический анализ: функция нескольких переменных. Учебно - методическое пособие. Издательство: Флинта, 2014. – 150 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 12. Частные производные высших порядков. Дифференцирование сложных функций

Цель занятия: научиться вычислять частные производные и полные дифференциалы высших порядков; освоить дифференцирование сложных функций нескольких переменных в зависимости от вида функции (рассмотреть три случая).

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.
2. Дифференцирование сложных функций нескольких переменных, случай 1.
3. Дифференцирование сложных функций нескольких переменных, случай 2.
4. Дифференцирование сложных функций нескольких переменных, случай 3.

Актуальность темы: раскрывает практическую значимость и применение понятийного аппарата математического анализа.

Теоретическая часть:

Определение 1. Переменная z называется **сложной функцией** от независимых переменных $x, y, \dots, t$, если она задана через посредство промежуточных аргументов $u, v, \dots, w$: $z = F(u, v, \dots, w)$, где $u = f(x, y, \dots, t)$, $v = f(x, y, \dots, t)$, $\dots$, $w = f(x, y, \dots, t)$.

Рассмотрим следующие **случаи дифференцирования сложной функции** нескольких переменных:

1. Пусть функция $z = f(x, y)$ задана в некоторой области $D \subset R_{xoy}^2$, причём x, y сами являются функциями от переменной t , изменяющейся в таком промежутке $[\alpha, \beta]$, что значения функций $x(t)$ и $y(t)$, при $\alpha \leq t \leq \beta$ не выходят за пределы области D .

В таком случае функция z через посредство переменных x, y , является сложной функцией от одной переменной:

$$z = f(x(t), y(t)) = F(t). \quad (1)$$

Если существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции z и существуют производные $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$, то существует производная по t сложной функции (1), она вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}, \quad (2)$$

то есть производная сложной функции равна сумме, каждое слагаемое, которой представляет собой производную этой функции по промежуточному аргументу, умноженную на производную промежуточного аргумента по независимой переменной.

2. Если $z = f(x, y)$, где $y = \varphi(x)$, то есть $z = f(x, \varphi(x))$, то **полная производная** от z по x находится по формуле:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (3)$$

3. Пусть функция $z = f(x, y)$ задана в некоторой области D и x, y являются функциями от переменных s и t : $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, причем область изменения s, t такая, что значения функций x и y не выходят за пределы области D . Тогда z через посредство x, y является сложной функцией от s и t :

$$z = f(x(s, t), y(s, t)), \quad (4)$$

и по правилу дифференцирования сложной функции частные производные сложной функции (4) вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (5)$$

Вопросы и задания:

Найти производные сложных функций:

- $u = e^{x-2y}$, где $x = \sin t$, $y = t^3$, $\frac{du}{dt} = ?$
- $u = z^2 + y^2 + zy$, где $z = \sin t$, $y = e^t$, $\frac{du}{dt} = ?$
- $z = \arcsin(x - y)$, где $x = 3t$, $y = 4t^3$, $\frac{dz}{dt} = ?$
- $z = \operatorname{tg}(3t + 2x^2 - y)$, $x = \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$, $\frac{dz}{dt} = ?$
- $z = \ln(e^x + e^y)$, найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, если $y = x^3$.
- $z = \operatorname{arctg}(xy)$, найти $\frac{dz}{dx}$, если $y = e^x$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

- Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
- Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.

3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.

Дополнительная литература:

4. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.

5. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Методическая литература:

6. Плотникова Е.Г., Левко С.В. Математический анализ: функция нескольких переменных. Учебно - методическое пособие. Издательство: Флинта, 2014. – 150 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 13. Экстремум функции нескольких переменных

Цель занятия: освоить определение экстремума функции нескольких переменных, необходимое и достаточное условия существования точек экстремума.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Экстремум функции нескольких переменных.
2. Необходимое и достаточное условия существования точек экстремума функции нескольких переменных.

Актуальность темы: раскрывает практическую значимость и применение понятийного аппарата математического анализа.

Теоретическая часть:

Определение. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называют **точкой экстремума** (максимума или минимума) функции $z = f(x, y)$, если $f(x_0, y_0)$ есть соответственно наибольшее или наименьшее значение функции $f(x, y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Теорема 1 (Необходимые условия экстремума). Если функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует. Эту точку (x_0, y_0) будем называть **критической точкой**.

Геометрически это выражается в том, что касательная плоскость к поверхности – графику функции в соответствующей точке, параллельна плоскости независимых переменных.

Для отыскания стационарных точек функции $z = f(x, y)$ нужно приравнять к нулю обе частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

и решить полученную систему.

Теорема 2 (Достаточные условия экстремума). Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение:

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 = AC - B^2.$$

1) Если $\Delta(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет экстремум, если $A = f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ($C < 0$) - максимум, если $A = f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ($C > 0$) - минимум.

2) Если $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ не имеет экстремума.

В случае, если $\Delta = 0$, вывод о наличии экстремума сделать нельзя и требуется дополнительное исследование.

Вопросы и задания:

Исследовать на экстремум следующие функции:

1 $f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy$,

2 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$,

3 $z = x^3 - 7x^2 + xy - y^2 + 9x + 3y + 12$,

4 $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.

2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.

3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.

Дополнительная литература:

4. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.

5. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Методическая литература:

6. Плотникова Е.Г., Левко С.В. Математический анализ: функция нескольких переменных. Учебно - методическое пособие. Издательство: Флинта, 2014. – 150 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 14. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных

Цель занятия: освоить технику решения задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции нескольких переменных.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных.

Актуальность темы: показывает универсальный характер основных понятий математического анализа для получения комплексного представления о методах и подходах к решению практико – ориентированных задач.

Теоретическая часть:

Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области D , ограниченной замкнутым контуром L . Если наибольшее или наименьшее значение достигается в точке $M_0(x_0, y_0)$, лежащей внутри области D , то в этой точке функция $z = f(x, y)$ имеет максимум или минимум. Наибольшее или наименьшее значение функция также может достигать и в точке, лежащей на контуре L . Тогда если контур задан уравнением $y = \varphi(x)$, то на контуре функция $z = f(x, y)$ оказывается функцией одного аргумента $z = f(x, \varphi(x))$ и вопрос сводится к задаче нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x, y)$ в ограниченной замкнутой области D , где она непрерывна, можно руководствоваться следующим правилом:

1. Найти критические точки, лежащие внутри области D , и вычислить значение функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум функции и какого вида).
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ на границе области D – контуре L .
3. Сравнить полученные значения функции: самое большее (меньшее) из них будет наибольшим (наименьшим) значением функции $z = f(x, y)$ во всей области D .

Вопросы и задания:

1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = 27 - 9xy + x^3 + y^3$ в квадрате $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$.
2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = 6xy + x^3 + y^3$ в прямоугольнике с вершинами $A(-3, -3), B(-3, 2), C(1, 2), D(1, -3)$.
3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = xy + x + y$ в квадрате, ограниченном прямыми $x = 1, x = 2, y = 2, y = 3$.
4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = -3xy + x^3 + y^3$ в треугольнике $0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$.
5. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2y(4 - x - y)$ в треугольнике $x + y \leq 6, y \geq 0, x \geq 0$.
6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.

Дополнительная литература:

4. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.

5. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Методическая литература:

6. Плотникова Е.Г., Левко С.В. Математический анализ: функция нескольких переменных. Учебно - методическое пособие. Издательство: Флинта, 2014. – 150 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 15. Производная по направлению. Градиент функции

Цель занятия: освоить технику определения производной функции по заданному направлению, вычислять градиент функции нескольких переменных.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Производная по направлению. Градиент функции.

Актуальность темы: расширение и углубление знаний, умений и навыков, определяемых содержанием базовых дисциплин, умение проводить обработку и анализ полученных результатов.

Теоретическая часть:

Определение 1. Скалярным полем называется плоская или пространственная область, с каждой точкой M которой связано определенное значение некоторой скалярной физической величины $u=u(M)$. Задание поля скалярной величины и равносильно заданию скалярной (числовой) функции $u(M)$.

Рассмотрим функцию $u(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ и точке $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Проведем через точки M и M_1 вектор $\vec{S}$. Углы наклона этого вектора к направлению координатных осей x, y, z обозначим соответственно α, β, γ . Косинусы этих углов называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{S}$. Расстояние между точками M и M_1 на векторе $\vec{S}$ обозначим ΔS : $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Далее предположим, что функция $u(x, y, z)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по переменным x, y и z . Тогда правомерно записать следующее выражение

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

где величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – бесконечно малые при $\Delta S \rightarrow 0$. Из геометрических соображений очевидно

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos \alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos \beta, \quad \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos \gamma.$$

Таким образом, приведенные выше равенства могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma + \varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta + \varepsilon_3 \cos \gamma ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma .$$

Заметим, что величина s является скалярной. Она лишь определяет направление вектора $\vec{s}$. Из этого уравнения следует следующее определение.

Определение 2. Предел $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta S}$ называется **производной функции $u(x, y, z)$ по направлению вектора $\vec{s}$** в точке с координатами (x, y, z) .

Определение 3. Если в некоторой области D задана функция $u = u(x, y, z)$ и некоторый вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям функции u в соответствующей точке

$$\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial z},$$

то этот вектор называется **градиентом функции u**

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} .$$

При этом говорят, что в области D задано поле градиентов. Градиент функции и производная в направлении вектора s связаны формулой $\frac{\partial u}{\partial s} = \text{pr}_s \text{gradu}$. Градиент указывает **направление наибо́льшего роста функции** в данной точке. Производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ в направлении градиента имеет наибольшее значение, равное

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_{\text{наиб}} = |\text{gradu}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2} .$$

Вопросы и задания:

1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению вектора l .

$$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$l = i - j + k,$$

$$M(1, 1, 1).$$

2. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению вектора l .

$$u = x + \ln(z^2 + y^2),$$

$$l = -2i + j - k,$$

$$M(2, 1, 1).$$

3. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению вектора l .

$$u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2},$$

$$l = 2j - 2k,$$

$$M(1, 5, -2).$$

4. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению вектора l .

$$u = y \ln(1 + x^2) - \text{arctg } z,$$

$$l = 2i - 3j - 2k,$$

$$M(0, 1, 1).$$

5. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ в точке $M: v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$, $u = \frac{yz^2}{x^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

6. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ в точке $M: v = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$, $u = \frac{z^3}{xy^2}$, $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

7. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ в точке $M: v = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}$, $u = x^2yz^3$, $M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ в точке $M: v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$, $u = \frac{z}{x^3y^2}$, $M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.

Дополнительная литература:

4. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
5. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Методическая литература:

6. Плотникова Е.Г., Левко С.В. Математический анализ: функция нескольких переменных. Учебно - методическое пособие. Издательство: Флинта, 2014. – 150 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

РАЗДЕЛ V. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Занятие № 16. Вычисление двойных интегралов двукратным интегрированием

Цель занятия: освоить определение двойного интеграла, необходимое условие его существования, технику вычисления двойного интеграла в декартовых координатах приведением к повторному интегралу.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Определение двойного интеграла, необходимое условие его существования. Критерий существования двойного интеграла.
2. Классы интегрируемых функций.
3. Свойства двойного интеграла.
4. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах приведением к повторному интегралу.

Актуальность темы: воспитание математической и профессиональной культуры, расширение математического кругозора студентов.

Теоретическая часть:

Интегральной суммой для функции $f(x, y)$ по области D называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k = f(\xi_1, \eta_1) \Delta \sigma_1 + f(\xi_2, \eta_2) \Delta \sigma_2 + \dots + f(\xi_n, \eta_n) \Delta \sigma_n. \quad (1)$$

Если при $d_k \rightarrow 0$ интегральная сумма имеет определенный конечный предел $I = \lim_{\max d_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k$, не зависящий от способа разбиения D на элементарные области и от выбора точек P_k в пределах каждой из них, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции $f(x, y)$ в области D и обозначается следующим образом:

$$I = \iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\max d_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k. \quad (2)$$

Если $f(x, y) > 0$ в области D , то двойной интеграл $\iint_D f(x, y) d\sigma$ равен **объему цилиндрического тела**, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, сбоку цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz , и снизу областью D плоскости xOy .

Основные свойства двойного интеграла

1. $\iint_D [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)] d\sigma = \iint_D f_1(x, y) d\sigma \pm \iint_D f_2(x, y) d\sigma$
2. $\iint_D c f(x, y) d\sigma = c \iint_D f(x, y) d\sigma$, где c - постоянная.
3. Если область интегрирования D разбита на две области D_1 и D_2 , то
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$
4. **Оценка двойного интеграла.** Если $m \leq f(x, y) \leq M$, то $mS \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MS$, где S - площадь области D , а m и M - соответственно наименьшие и наибольшие значения функции $f(x, y)$ в области D .

Вопросы и задания:

1. Вычислить $\iint_D e^{x+\sin y} \cos y dx dy$, если область D – прямоугольник $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi/2$.
2. Вычислить $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, если область D ограничена линиями $y = x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$.
3. Вычислить $\iint_D (3x^2 - 2xy + y) dx dy$, если область D ограничена линиями $x = 0$, $x = y^2$, $y = 2$.
4. Вычислить $\iint_D y \ln x dx dy$, если область D ограничена линиями $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.

Дополнительная литература:

4. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
5. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Методическая литература:

6. Плотникова Е.Г., Левко С.В. Математический анализ: функция нескольких переменных. Учебно - методическое пособие. Издательство: Флинта, 2014. – 150 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 17. Переход к полярным координатам в двойных интегралах

Цель занятия: освоить замену переменных под знаком двойного интеграла, вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Замена переменных под знаком двойного интеграла.
2. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

Актуальность темы: расширение и углубление знаний, умений и навыков, определяемых содержанием данного раздела, умение проводить обработку и анализ полученных результатов.

Теоретическая часть:

Преобразование двойного интеграла от прямоугольных координат x, y к полярным координатам ρ, θ , связанным с прямоугольными координатами соотношениями $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, осуществляется по формуле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (1)$$

Если область интегрирования D ограничена двумя лучами $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ ($\alpha < \beta$), выходящими из полюса, и двумя кривыми $\rho = \rho_1(\theta)$ и $\rho = \rho_2(\theta)$, где $\rho_1(\theta)$ и $\rho_2(\theta)$ - однозначные функции при $\alpha \leq \theta \leq \beta$ и $\rho_1(\theta) \leq \rho_2(\theta)$, то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_D F(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta) \rho d\rho, \quad (2)$$

где $F(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, причем сначала вычисляется интеграл $\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta) \rho d\rho$, в котором θ считается постоянным.

Вопросы и задания:

Переходя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы:

1. $\iint_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx dy$, если область D - круг $x^2 + y^2 \leq \pi^2$

2. $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1}$, если область D - ограничена полуокружностью $y = \sqrt{1 - x^2}$ и

осью Oy .

3. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, если область D - ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2ax$.

4. $\iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, если область D - ограничена линиями $x^2 + y^2 = \pi^2/9$,

$x^2 + y^2 = \pi^2$.

Рекомендуемая литература:**Основная литература:**

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. - 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. - 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. - 736 с.

Дополнительная литература:

4. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. - 136 с.

5. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Методическая литература:

6. Плотникова Е.Г., Левко С.В. Математический анализ: функция нескольких переменных. Учебно - методическое пособие. Издательство: Флинта, 2014. – 150 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 18. Приложения двойных интегралов

Цель занятия: научиться решать задачи на вычисление площадей криволинейных областей, объемов тел произвольной формы с помощью двойного интеграла.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Геометрические приложения двойного интеграла.

Актуальность темы: позволяет раскрыть практическую значимость и применение понятийного аппарата математического анализа.

Теоретическая часть:

Площадь плоской фигуры, ограниченной областью D , находится по формуле

$$S = \iint_D dx dy. \quad (1)$$

Если область D определена, например, неравенствами $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, то

$$S = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy. \quad (2)$$

Если область D в полярных координатах определена неравенствами $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $\varphi(\theta) \leq \rho \leq f(\theta)$, то

$$S = \iint_D \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi(\theta)}^{f(\theta)} \rho d\rho. \quad (3)$$

Вычисление объема тела

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и сбоку цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости xOy область D , вычисляется по формуле

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (4)$$

Вычисление площади поверхности

Если гладкая поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то площадь поверхности выражается формулой

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, \quad (5)$$

где D – проекция данной поверхности на плоскость xOy . Аналогично, если поверхность задана уравнением $x = f(y, z)$, то

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz, \quad (6)$$

где D – проекция поверхности на плоскость yOz ; если же уравнение поверхности имеет вид $y = f(x, z)$, то

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz, \quad (7)$$

где D – проекция поверхности на поверхность xOz .

Вопросы и задания:

Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

1. $x = y^2 - 2y$, $x + y = 0$.
2. $y = 2 - x$, $y^2 = 4x + 4$.
3. $y^2 = 4x - x^2$, $y^2 = 2x$
(вне параболы).
4. $\rho = 2 - \cos \theta$, $\rho = 2$
(вне кардиоиды).

Вычислить объемы тел, ограниченных заданными поверхностями:

1. $x^2 + y^2 = 8$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 4$.
2. $x = 2y^2$, $x + 2y + z = 4$, $y = 0$, $z = 0$.
3. $x^2 + 4y^2 + z = 1$, $z = 0$.
4. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.

Дополнительная литература:

4. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
5. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Методическая литература:

6. Плотникова Е.Г., Левко С.В. Математический анализ: функция нескольких переменных. Учебно - методическое пособие. Издательство: Флинта, 2014. – 150 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 19. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Цель занятия: познакомиться с понятием «тройной интеграл», освоить технику его вычисления в декартовых координатах сведением к трехкратному интегралу.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.

Актуальность темы: показывает универсальный характер основных понятий математического анализа для получения комплексного представления о методах и подходах к решению практико – ориентированных задач.

Теоретическая часть:

Интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по области T называется сумма вида
$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k.$$

Предел интегральной суммы при стремлении к нулю наибольшего из диаметров всех элементарных областей ΔV_k называется **тройным интегралом** от функции $f(x, y, z)$ по области T и обозначается следующим образом:

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \lim_{\max d_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k. \quad (1)$$

Конечный предел такого вида может существовать только для ограниченной функции.

Если $f(x, y, z) > 0$ в области T , то тройной интеграл $\iiint_T f(x, y, z) dV$ представляет собой массу тела, занимающего область и имеющего переменную плотность $\rho = f(x, y, z)$ (физическое истолкование тройного интеграла).

Основные свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

В декартовых координатах тройной интеграл обычно записывают в виде
$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz.$$

Пусть область интегрирования T определяется неравенствами $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ – непрерывные функции. Тогда тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$, распространенный на область T , вычисляется по формуле

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2)$$

Вопросы и задания:**Задание 1.** Вычислить тройной интеграл

Интеграл	Область V
$\iiint_U \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
$\iiint_U xy^2 z^3 dx dy dz$	$z = xy, y = x, x = 1, z = 0$
$\iiint_U xyz dx dy dz$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0, y = 0,$ $z = 0$
$\iiint_U \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^2}$	$x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$

Рекомендуемая литература:**Основная литература:**

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.

Дополнительная литература:

4. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
5. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Методическая литература:

6. Плотникова Е.Г., Левко С.В. Математический анализ: функция нескольких переменных. Учебно - методическое пособие. Издательство: Флинта, 2014. – 150 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 20. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах

Цель занятия: отработать вычисление тройных интегралов в цилиндрических координатах; отработать вычисление тройных интегралов в сферических координатах.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
2. Тройной интеграл в сферических координатах.

Актуальность темы: формирование исследовательской позиции и исследовательского поведения, развитие мыслительных операций.

Теоретическая часть:

Если при вычислении тройного интеграла требуется перейти от переменных x, y, z к новым переменным u, v, w , связанным x, y, z с соотношениями $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, где функции $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка, устанавливают взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие между точками области T пространства $Oxyz$ и точками некоторой области T' пространства $Ouvw$ и якобиан J в области T' не обращается в нуль:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (1)$$

то пользуются формулой

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{T'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \cdot |J| du dv dw. \quad (2)$$

В частности, при переходе от декартовых координат x, y, z к **цилиндрическим координатам** ρ, φ, z (рис. 9), связанным с x, y, z соотношениями

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty \leq z < +\infty), \quad (3)$$

якобиан преобразования $J = \rho$ и **формула преобразования тройного интеграла к цилиндрическим координатам** имеет вид

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_T f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho \int_{z_1}^{z_2} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz \quad (4)$$

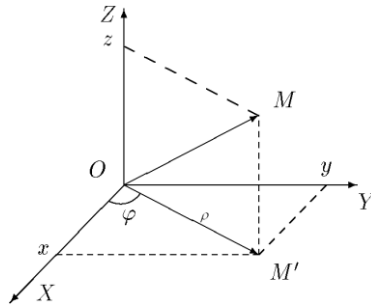


Рис. 9

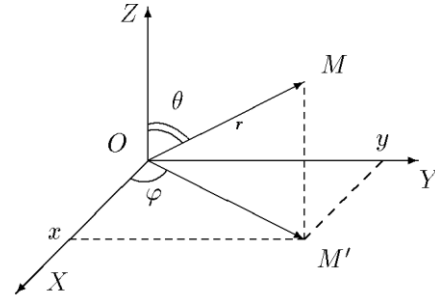


Рис. 10

При переходе от декартовых координат x, y, z к **сферическим координатам** ρ, φ, θ (рис. 10), связанным с x, y, z соотношениями

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta \quad (0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi), \quad (5)$$

якобиан преобразования $J = \rho^2 \sin \theta$ и **формула преобразования тройного интеграла к сферическим координатам** имеет вид

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_T f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) d\rho. \end{aligned} \quad (6)$$

Вопросы и задания:

Переходя к сферическим или цилиндрическим координатам, вычислить объемы, ограниченные поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z, \quad x^2 + y^2 \leq z^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8z, \quad ,$$

$$x^2 + y^2 \leq z^2$$

$$z = \sqrt[4]{x^4 + y^4}, \quad z = x^4 + y^4$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 9(x^2 + y^2 - z^2)$$

$$z = x^2 + y, \quad x = 0, \quad y = 0,$$

$$z = 10$$

$$z = 9 - x^2 - y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(x^2 + y^2 - z^2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

$$z = x^2 + y, \quad z = x + y^2, \quad ,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4^2, \quad (z \geq 0)$$

$$x = 0,$$

$$y = 0, \quad z = 10$$

Рекомендуемая литература:**Основная литература:**

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.

Дополнительная литература:

4. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
5. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Методическая литература:

6. Плотникова Е.Г., Левко С.В. Математический анализ: функция нескольких переменных. Учебно - методическое пособие. Издательство: Флинта, 2014. – 150 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 21. Приложения тройных интегралов

Цель занятия: решать геометрические задачи на приложение тройных интегралов.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Геометрические приложения тройного интеграла.

Актуальность темы: позволяет раскрыть практическую значимость и применение понятийного аппарата математического анализа.

Теоретическая часть:

Объем тела, занимающего область U , определяется по формуле

$$V = \iiint_U dx dy dz. \quad (1)$$

Если плотность тела переменна, то есть $\gamma = \gamma(x, y, z)$, то **масса** тела, занимающего область U , вычисляется по формуле

$$M = \iiint_U \gamma(x, y, z) dx dy dz. \quad (2)$$

Вопросы и задания:

1. Найти объем тетраэдра, ограниченного плоскостями, проходящими через точки $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$, и координатными плоскостями Oxy , Oxz , Oyz .

2. Найти объем области, ограниченной двумя параболоидами $z_1 = x^2 + y^2$ и $z_2 = 1 - x^2 - y^2$.

3. Вычислить объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

4. Найти объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ и параболоидом $x^2 + y^2 = z$

5. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $z = 2 - x^2 - y^2$ и конической поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.
3. Берман А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.

Дополнительная литература:

4. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
5. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Методическая литература:

6. Плотникова Е.Г., Левко С.В. Математический анализ: функция нескольких переменных. Учебно - методическое пособие. Издательство: Флинта, 2014. – 150 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

РАЗДЕЛ VI. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Занятие № 22. Ряды с положительными членами

Цель занятия: освоить основные понятия и определения теории числовых рядов с положительными членами.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Числовой ряд и его частичные суммы, сходящиеся и расходящиеся числовые ряды.
2. Простейшие свойства сходящихся рядов. Остаток ряда.
3. Необходимые условия сходимости числовых рядов.
4. Гармонический ряд.
5. Критерий Коши сходимости числовых рядов.

Актуальность темы: знакомство студентов с начальными знаниями по теории рядов в рамках дисциплины математического анализа.

Теоретическая часть:

Пусть дана бесконечная последовательность чисел

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

Выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (2)$$

называется **числовым рядом**, а числа $a_1, a_2, a_3, \dots$ - **членами ряда**.

Суммы

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

называются **частичными суммами ряда** (2).

Если последовательность частичных сумм имеет конечный предел

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad (3)$$

то этот предел называется **суммой ряда**. В этом случае ряд называется **сходящимся**.

Если же предел (3) не существует или равен бесконечности, то ряд **расходится** и суммы не имеет.

Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд сходится, то его общий член a_n стремится к нулю при неограниченном возрастании номера n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (4)$$

Если условие (4) не выполняется, то ряд **расходится**.

Из сходимости ряда (2) следует сходимость его остатка $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ и, наоборот, из сходимости остатка ряда следует сходимость исходного ряда. То есть, если отбросить конечное число n начальных членов ряда, то это не отразится на сходимости (расходимости) ряда.

Вопросы и задания:

1. Написать пять первых членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

2. Исследовать сходимость ряда, пользуясь необходимым признаком и признаком сравнения:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^3}$.

2. $1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \dots$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.
4. Туганбаев А.А. Математический анализ: ряды. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2012. – 49 с.

Дополнительная литература:

5. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
6. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 23. Достаточные признаки сходимости числового ряда

Цель занятия: отработать применение признаков сравнения, признака Даламбера исследования сходимости числовых рядов с положительными членами; отработать применение радикального и интегрального признаков Коши исследования сходимости числовых рядов с положительными членами.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.
2. Предельный признак сравнения рядов с неотрицательными членами.
3. Признак Даламбера сходимости рядов с неотрицательными членами.
4. Радикальный признак Коши сходимости рядов с неотрицательными членами.
5. Интегральный признак Коши сходимости рядов с неотрицательными членами.

Актуальность темы: воспитание математической и профессиональной культуры, расширение математического кругозора студентов.

Теоретическая часть:

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

1. Признак сравнения рядов.

Пусть имеем два ряда с положительными членами

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad (5)$$

и

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n \quad (6)$$

Если, начиная с некоторого номера $n \geq N$, выполняется неравенство

$$a_n \leq b_n,$$

то из сходимости ряда (6) следует сходимость ряда (5) и из расходимости ряда (5) следует расходимость ряда (6).

2. Признак Даламбера.

Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

то при $l < 1$ ряд (5) сходится, а при $l > 1$ расходится. При $l = 1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

3. Признак Коши.

Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l \quad (a_n > 0),$$

то при $l < 1$ ряд (5) сходится, а при $l > 1$ - расходится. При $l = 1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Вопросы и задания:

1. Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда:

$$1. \frac{1 \cdot 2}{7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{7^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{7^3} + \dots$$

$$2. \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \dots$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n} 2^n}$$

2. Исследовать по признаку Коши сходимость ряда:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(1+n)}.$$

$$2. \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \dots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} + \dots$$

3. Исследовать сходимость ряда:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}.$$

$$2. 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

$$3. 1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{4^2}{4!} + \dots$$

$$4. \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{8} + \dots$$

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.
4. Туганбаев А.А. Математический анализ: ряды. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2012. – 49 с.

Дополнительная литература:

5. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.

6. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 24. Знакопередающие ряды. Признак Лейбница

Цель занятия: освоить понятие знакопередающего ряда и научиться исследовать его сходимость с помощью признака Лейбница.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Знакопередающие ряды, признак Лейбница.
2. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.
3. Перестановка членов в абсолютно сходящихся рядах.

Актуальность темы: расширение и углубление знаний, умений и навыков, определяемых содержанием базовой дисциплины математического анализа, умение проводить обработку и анализ полученных результатов.

Теоретическая часть:

1. Если члены числового ряда с разными знаками (ряд содержит положительные и отрицательные члены), то такой ряд называется **знакопеременным**. Знакопеременный ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad (1)$$

называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| \quad (2)$$

Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Если же ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (1) называется **условно сходящимся**.

Признаки абсолютной сходимости знакопеременного ряда те же, что и сходимости ряда с положительными членами.

2. Ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n \dots \quad (3)$$

где $a_n > 0$ ($n=1,2,3,4,\dots$) называется **знакопередающим**. Этот ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Признак Лейбница

Если члены знакопередающего ряда (3) убывают по абсолютной величине

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

то такой ряд сходится и сумма его $0 < S < a_1$.

Пользуясь этим неравенством, можно оценить остаток ряда (3), который тоже является знакочередующимся рядом. Напишем остаток в таком виде:

$$r_n = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \dots).$$

Тогда сумма ряда в скобках будет положительная и меньше a_{n+1} . Следовательно, в любом случае остаток знакочередующегося сходящегося ряда имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине, то есть $|r_n| < a_{n+1}$, где a_{n+1} абсолютная величина первого члена остатка r_n . Этой оценкой будем пользоваться в приближенных вычислениях с помощью рядов.

Вопросы и задания:

1. Исследовать сходимость следующих знакопеременных рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}$.

3. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^{n^2}}{n^n}$.

5. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots$

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\infty}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{n}}{n+2}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^{10}}{e^n}$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.
4. Туганбаев А.А. Математический анализ: ряды. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2012. – 49 с.

Дополнительная литература:

5. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
6. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

Занятие № 25. Функциональные ряды

Цель занятия: освоить понятие функционального ряда и изучить вопросы исследования его сходимости.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей.
2. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.
3. Функциональные ряды, область их сходимости.
4. Равномерная сходимость функциональных рядов, признак Вейерштрасса.
5. Предельный переход под знаком интеграла. Почленное интегрирование функциональных рядов.
6. Предельный переход под знаком производной. Почленное дифференцирование функциональных рядов.

Актуальность темы: научное обоснование фундаментальных понятий теории функциональных рядов, расширение и углубление знаний, умений и навыков, определяемых содержанием базовой дисциплины математического анализа.

Теоретическая часть:

Определение 1. Пусть задана последовательность функций $(u_n(x))$, определенных на одном и том же множестве $X \subset R$. Соединив члены этой последовательности знаком плюс, получим символ

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad (1)$$

или сокращенно $\sum_{h=1}^{\infty} u_n(x)$, который называется **функциональным рядом**.

Определение 2. Функциональный ряд называется сходящимся в точке x_0 , если сходится числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots. \quad (2)$$

В этом случае точка x_0 называется точкой сходимости функционального ряда (1). Множество всех точек сходимости функционального ряда называется областью сходимости этого ряда.

Пусть $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ - n -ая частичная сумма функционального ряда (1),

тогда если E - область сходимости этого ряда, то для $\forall x \in E$ существует предел

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), \quad (3)$$

который называется **суммой** ряда (1).

Определение 3. Функциональный ряд (1) называется абсолютно сходящимся в точке x_0 , если сходится числовой ряд, составленный из модулей членов ряда (2):

$$|u_1(x_0)| + |u_2(x_0)| + \dots + |u_n(x_0)| + \dots. \quad (4)$$

Отсюда следует, что если функциональный ряд (1) в точке x_0 сходится абсолютно, то в этой точке он сходится.

Для $\forall x \in X$ функциональный ряд превращается в числовой ряд, поэтому для определения области абсолютной сходимости функциональных рядов можно применить известные признаки абсолютной сходимости числовых рядов.

Вопросы и задания:

1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n^2}$.
2. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.
3. Исследовать на сходимость функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n+1}}$.
4. Найти область сходимости и область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$
5. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n x$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.
4. Туганбаев А.А. Математический анализ: ряды. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2012. – 49 с.

Дополнительная литература:

5. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
6. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 26. Степенные ряды

Цель занятия: освоить определение степенного ряда и изучить вопросы исследования его сходимости.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Понятие степенного ряда, теорема Абеля.
2. Интервал и радиус сходимости степенного ряда, формула Коши-Адамара.
3. Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда.
4. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
5. Задачи разложения функции в степенной ряд, существование разложения функции в ряд Тейлора.
6. Разложение в степенные ряды элементарных функций.

Актуальность темы: позволяет раскрыть практическую значимость и применение понятийного аппарата математического анализа, показывает универсальный характер основных понятий математического анализа для получения комплексного представления о методах и подходах к решению практико – ориентированных задач.

Теоретическая часть:

Определение. Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Для исследования на сходимость степенных рядов удобно использовать признак Даламбера.

Теорема. Если степенной ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ сходится при $x = x_1$, то он сходится и притом абсолютно для всех $|x| < |x_1|$.

Следствие. Если при $x = x_1$ ряд расходится, то он расходится для всех $|x| > |x_1|$.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое положительное число R , что при всех x таких, что $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x| > R$ ряд расходится. При этом число R называется **радиусом сходимости**. Интервал $(-R, R)$ называется **интервалом сходимости**. Отметим, что этот интервал может быть как замкнутым с одной или двух сторон, так и не замкнутым. Радиус сходимости может быть найден по формуле:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|$$

Разложение элементарных функций в степенные ряды

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}e^{\xi_n}}{(n+1)!}, \quad 0 \leq \xi_n \leq x.$ Сходится при любом x .
2. $a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \dots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + \dots.$ Сходится при любом x .
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots.$ Сходится при любом x .
4. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots.$ Сходится при любом x .
5. $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots.$ Сходится при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$
6. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{45}x^3 + \frac{2}{945}x^5 + \frac{2}{4725}x^7 + \dots \right).$ Сходится при $x \in (-\pi, \pi).$
7. $\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \dots.$ Сходится при $x \in (-1, 1).$
8. $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right).$ Сходится при $x \in (-1, 1).$
9. $\ln x = 2 \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right).$ Сходится при всех положительных x .

10. $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$. Сходится при $x \in [-1, 1]$.
11. $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$. Сходится при $x \in [-1, 1]$.

Вопросы и задания:

Найти область сходимости следующих рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} x^n$,
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$,
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n (n+1)^2}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1) \cdot 2^n}$,
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$,
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.
4. Туганбаев А.А. Математический анализ: ряды. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2012. – 49 с.

Дополнительная литература:

5. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
6. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

Занятие № 27. Ряды Фурье

Цель занятия: освоить понятие тригонометрического ряда Фурье и технику разложения четных и нечетных функций в ряд Фурье; решать задачу разложения в ряд Фурье функций с произвольным периодом.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции:

1. Тригонометрический ряд Фурье. Коэффициенты Фурье.
2. Достаточные признаки разложимости в ряд Фурье.
3. Разложение в ряд Фурье непериодической функции.
4. Ряд Фурье для четных и нечетных функций.
5. Ряды Фурье для функций любого периода.

Актуальность темы: воспитание математической и профессиональной культуры, расширение математического кругозора студентов, формирование исследовательской позиции и исследовательского поведения, развитие мыслительных операций.

Теоретическая часть:

Определение 1. Тригонометрическим рядом называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots$$

или, короче:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Действительные числа a_i , b_i называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Если ряд представленного выше типа сходится, то его сумма представляет собой периодическую функцию с периодом 2π , так как функции $\sin nx$ и $\cos nx$ также периодические функции с периодом 2π .

Таким образом, если функция $f(x)$ – любая периодическая функция периода 2π , непрерывная на отрезке $[-\pi; \pi]$ или имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода, то коэффициенты

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

существуют и называются **коэффициентами Фурье** для функции $f(x)$.

Определение 2. Рядом Фурье для функции $f(x)$ называется тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье. Если ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье.

Теорема 1 (Теорема Дирихле). Если функция $f(x)$ имеет период 2π и на отрезке $[-\pi; \pi]$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода, и отрезок $[-\pi; \pi]$ можно разбить на конечное число отрезков так, что внутри каждого из них функция $f(x)$ монотонна, то ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится при всех значениях x , причем в точках непрерывности функции $f(x)$ его сумма равна $f(x)$, а в точках разрыва его сумма равна $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, то есть среднему арифметическому предельных значений

слева и справа. При этом ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции $f(x)$.

Функция $f(x)$, для которой выполняются условия теоремы Дирихле называется **кусочно – монотонной** на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ имеет период 2π , кроме того, $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ – непрерывные функции на отрезке $[-\pi; \pi]$ или имеют конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится при всех значениях x , причем в точках непрерывности его сумма равна $f(x)$, а в точках разрыва она равна $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$. При этом ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции $f(x)$.

Функция, удовлетворяющая условиям этой теоремы, называется **кусочно – гладкой** на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Если $f(x)$ – четная периодическая функция с периодом 2π , удовлетворяющая условиям разложимости в ряд Фурье, то можно записать:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0; \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Таким образом, для четной функции ряд Фурье записывается:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Аналогично получаем разложение в ряд Фурье для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx; \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx; \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Вопросы и задания:

1. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$: $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -\pi \leq x < 0 \\ x + 2, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

2. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$: $f(x) = \begin{cases} -x + \frac{1}{2}, & -\pi \leq x < 0 \\ x^2 - 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

3. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$: $f(x) = \begin{cases} x^2, & -\pi \leq x < 0 \\ 3 - x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

4. Разложить функцию $f(x) = \cos 2x$ в ряд Фурье по синусам, заданную на отрезке $[0; \pi]$.

5. Разложить функцию $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$ в ряд Фурье по косинусам, заданную на отрезке $[0; 1]$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2014. – 464 с.
2. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2011. – 608 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2010. – 736 с.
4. Туганбаев А.А. Математический анализ: ряды. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2012. – 49 с.

Дополнительная литература:

5. Иванов О., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. Учебно - методическое пособие. Издательство: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2013. – 136 с.
6. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практикум по математическому анализу. Учебное пособие. Издательство: Прометей (Московский Государственный Педагогический Университет), 2014. – 276 с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной
работы по дисциплине «**Математический анализ**»

для студентов специальности

10.05.01 «Компьютерная безопасность» специализации
«Информационно-аналитическая и техническая экспертиза
компьютерных систем»

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	72
1 Требования к уровню освоения содержания дисциплины	73
2 Организационно-методические рекомендации по освоению дисциплины .	73
3 Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов	74
4 Организация контроля знаний студентов. Формы контроля знаний студентов.....	75
5 Рекомендации по работе с литературой и источниками.....	77
6 Перечень рекомендуемой литературы	78

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Математический анализ» включена в программу подготовки студентов по специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность и относится к базовой части блока дисциплин.

В рамках данной дисциплины предполагается изучение теории множеств, счетные и несчетные множества, числовые последовательности, вычисление предела последовательностей. Непрерывность функции на множестве, рассматриваются классификации точек разрыва функции, дифференцирование сложной функции, производная обратной функции, неопределенный интеграл и его основные свойства, рассматриваются несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. приводится геометрический смысл условия дифференцируемости функции многих переменных, достаточные условия дифференцируемости, дифференциал функции нескольких переменных, степенные ряды и области их сходимости. Для закрепления изученного материала предполагается выполнение практических заданий с использованием современных информационных технологий.

Целью данной дисциплины является обеспечение выполнения требований Государственного образовательного стандарта «Математика и компьютерные науки» в соответствии с которыми бакалавр должен использовать фундаментальные знания в области математического анализа в будущей профессиональной деятельности.

Для закрепления изученного материала предполагается выполнение практических заданий с различными уровнями сложности.

Данная дисциплина призвана содействовать фундаментализации образования, укреплению правосознания и развитию системного мышления студентов, изучению теоретических, методологических и практических проблем формирования, функционирования и развития информационных систем.

1 Требования к уровню освоения содержания дисциплины

В результате освоения дисциплины обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Индекс	Формулировка:
ОПК-1	готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности

2 Организационно-методические рекомендации по освоению дисциплины

Самостоятельная работа студентов является важнейшим условием формирования научного способа познания. Она проводится накануне каждого практического и лабораторного занятия и включает выполнение конкретного задания.

Подготовленный материал, практическое задание оформляются в конспекте.

Самостоятельные занятия (СЗ) являются одной из активных форм обучения.

Самостоятельные занятия по дисциплине «Математический анализ» имеют целью:

- закрепить и углубить знания, полученные студентами на лекциях, на лабораторных занятиях;
- привить практические навыки по работе с современными информационными технологиями.

Самостоятельные занятия проводятся в специализированных аудиториях, оборудованных средствами вычислительной техники и возможностью пользования Интернет-ресурсами и библиотечными ресурсами.

Предлагаемые методические рекомендации содержат информацию для студентов, необходимую при подготовке и проведении лабораторных занятий по дисциплине «Математический анализ», а также могут быть полезны должностным лицам, в обязанности которых входит работа с организационно - распорядительными документами (ОРД).

ГОСТ Р 51141-08 определяет ОРД, как вид письменного документа, в котором фиксируют решение административных и организационных вопросов, а также вопросов управления, взаимодействия, обеспечения и

регулирования деятельности органов власти, учреждений, предприятий, организаций, их подразделений и должностных лиц.

Согласно общероссийскому классификатору управленческой документации (ОКУД) ОРД классифицированы на четыре группы:

- организационно-правовая документация (уставы, положения, правила, штатное расписание, инструкции);
- распорядительная документация (приказы, распоряжения, постановления, решения, указания);
- информационно-справочная документация (письма, телеграммы, факсы, акты, протоколы, докладные и служебные записки и др.);
- документы по личному составу (заявления, личные карточки, приказы по личному составу и др.).

Оформление ОРД осуществляется в соответствии с требованиями ГОСТ Р 6.30-2003 «Унифицированные системы документации. Унифицированная система организационно-распорядительной документации. Требования к оформлению документов».

Настоящий стандарт устанавливает: состав реквизитов документов; требования к оформлению реквизитов документов; требования к бланкам документов.

3 Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Методические указания включают следующие разделы:

- цель работы;
- задание, которое должно быть выполнено студентом в результате проведения самостоятельной работы;
- варианты заданий;
- основные теоретические положения, необходимые для выполнения задания, они должны быть краткими и содержать ссылки на литературу, в которой эти положения изложены в объеме, достаточном для выполнения самостоятельной работы;
- этапы выполнения задания с указанием конкретных сроков выполнения каждого из этапов и всего задания в целом;
- требования к оформлению графической и текстовой части самостоятельной работы;
- пример выполнения одного из вариантов задания и оформления отчета;
- библиографический список использованных источников.

Для помощи студентам и контроля самостоятельной работы применяются консультации преподавателя.

Консультации являются одной из форм работы кафедры по оказанию педагогически целесообразной помощи студентам в их самостоятельной работе.

Консультации должны носить индивидуальный характер. В случае необходимости разъяснения общих вопросов нескольким студентам проводятся групповые консультации.

Консультации проводятся с целью:

- разъяснения вопросов, возникающих у студентов при самостоятельном изучении учебного материала и выполнении домашних заданий;
- углубления и закрепления знаний по отдельным вопросам и темам дисциплины;
- оказания методической помощи в выборе методов самостоятельной работы.

Посещение консультаций студентов добровольное. Однако преподаватель может организовывать вызовы на собеседование тех студентов, которые в процессе обучения не показывают твердых знаний и не пользуются консультациями по своей инициативе.

На консультации преподаватель объясняет непонятные студентам наиболее сложные вопросы, и указывают литературу, в которой они освещаются.

Консультируя студентов, преподаватель обязан знакомиться с тем, как они изучают рекомендованную литературу, давать указания и советы о методах работы над учебным материалом, способствующие более глубокому и прочному его усвоению

Консультации не должны являться дополнительными занятиями или подменять их. На них запрещается выполнять за студентов или совместно с ними домашние задания. Консультации не должны превращаться в форму натаскивания студентов перед зачетами и экзаменами.

Если в процессе консультации выясняется, что непонимание студентом вопроса связано с недостаточным изучением каких-либо разделов программы, то консультирующий обязан порекомендовать студенту изучить их и проконтролировать степень усвоения этих вопросов.

Консультации не являются проверкой знаний. Знания учебной дисциплины, показанные слушателем на консультации, не должны влиять на оценку знаний на экзаменах и зачетах.

4 Организация контроля знаний студентов. Формы контроля знаний студентов

Контроль и оценка знаний, умений и навыков студентов осуществляется на лабораторных занятиях, консультациях, при приеме экзамена. В ходе контроля знаний преподаватель оценивает понимание студентом содержания дисциплины «Математический анализ», его способность применять методы управления при решении конкретных задач.

Контроль знаний студентов может осуществляться в следующих формах:

- текущий контроль знаний;

- промежуточный контроль знаний.

Текущий контроль знаний студентов имеет целью:

- дать оценку работы каждого студента по усвоению им учебного материала, выявить недостатки в его подготовке и оказать практическую помощь в их устранении;

Основными формами текущего контроля знаний студентов являются:

- устный контрольный опрос;
- письменный контрольный блиц-опрос;
- защита практической работы;
- написание контрольной работы;
- проверка конспектов лекций.

Устный контрольный опрос студентов проводится на лекциях (и лабораторных занятиях). По его результатам преподаватель оценивает качество подготовки студента к занятию.

Письменный контрольный блиц-опрос студентов проводится в течение запланированного преподавателем времени на лекциях и лабораторных занятиях путем письменного ответа их на поставленные вопросы, заданные преподавателем. Результаты его проведения отмечаются в журнале. На лабораторных занятиях знания и практические навыки студентов оцениваются по 4-балльной системе. Полученные оценки выставляются в журнале.

При проверке конспектов лекций дается анализ качества их ведения. Отмечаются допущенные ошибки, в рецензии преподавателя оценивается качество конспектирования учебного материала, даются рекомендации по улучшению качества конспектирования лекционного материала.

Промежуточный контроль по дисциплине осуществляется в двух формах:

- 1, 3 и 4 семестр в форме экзамена
- 2 семестр в форме зачета с оценкой.

Процедура зачета с оценкой как отдельное контрольное мероприятие не проводится, оценивание знаний обучающегося происходит по результатам текущего контроля.

Зачет с оценкой выставляется по результатам работы в семестре, при сдаче всех контрольных точек, предусмотренных текущим контролем успеваемости. Если по итогам семестра обучающийся имеет от 33 до 60 баллов, ему автоматически доставляются баллы приведенные в следующей таблице:

Количество баллов за зачет ($S_{зач}$) при различных рейтинговых баллах по дисциплине по результатам работы в семестре

Рейтинговый балл по дисциплине по результатам работы в семестре ($R_{сем}$)	Количество баллов за зачет ($S_{зач}$)
$50 \leq R_{сем} \leq 60$	40
$39 \leq R_{сем} < 50$	35
$33 \leq R_{сем} < 39$	27
$R_{сем} < 33$	0

Далее используется шкала пересчета рейтингового балла по дисциплине в оценку по 5-балльной системе

Шкала пересчета рейтингового балла по дисциплине в оценку по 5-балльной системе

<i>Рейтинговый балл по дисциплине</i>	<i>Оценка по 5-балльной системе</i>
88 – 100	<i>Отлично</i>
72 – 87	<i>Хорошо</i>
53 – 71	<i>Удовлетворительно</i>
< 53	<i>Неудовлетворительно</i>

Процедура проведения экзамена осуществляется в соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования в СКФУ – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры – в СКФУ, Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам аспирантуры, программам ординатуры – в СКФУ.

В экзаменационный билет включаются два вопроса и практическое задание.

Для подготовки по билету отводится 30 минут

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования Программой дисциплины, средой программирования с языком Python

При проверке практического задания, оцениваются: верность решения, использованные методы решения, логика рассуждений.

5 Рекомендации по работе с литературой и источниками

Изучение литературы и источников необходимо начинать с прочтения соответствующих глав учебных изданий, учебных пособий или литературы, рекомендованной в качестве основной или дополнительной по дисциплине «Математический анализ», которые прямо или косвенно относятся к отрабатываемой теме.

Изучая литературу и источники, студенту рекомендуется вести краткий конспект. Однако не следует переписывать все содержание изучаемой темы, нужно выписывать лишь основные идеи и главные на ваш взгляд мысли. В отдельных случаях, когда встречаются важные определения, понятия, необходимый фактический материал и примеры, статистическая информация, имеющие отношение к изучаемой теме, студенту следует выписать их в виде цитат с полным указанием библиографических источников.

Конспектирование рекомендуемой литературы и источников необходимо вести с распределением собранных материалов по отдельным главам и параграфам согласно учебно-тематическому плану. Необходимо

выписывать все выходные данные по используемой литературе и источникам.

Важным этапом при работе с рекомендуемой литературой и источниками является изучение законодательных и нормативных актов федерального, регионального, местного и ведомственного уровней. При изучении Указов Президента РФ, Законов и Кодексов РФ, постановлений, положений, рекомендаций и т.д., студент должен выявить все изменения и дополнения, которые могли быть внесены после их выхода в свет.

Основой технологии интенсификации обучения на платформе цифровых образовательных технологий являются учебно-иллюстрационные материалы (опорный конспект) по дисциплине «Математический анализ».

Работа с учебно-иллюстрационными материалами имеет следующие этапы.

1. Изучение теоретических основ учебного материала в аудитории: изложение преподавателем изучаемого материала студентам с объяснением по опорному конспекту;
2. Самостоятельная работа: индивидуальная работа студентов по опорному конспекту; фронтальное закрепление по блокам опорного конспекта.
3. Первое повторение - воспроизведение содержания заданной темы опорного конспекта по памяти.
4. Устное проговаривание материала опорного конспекта - необходимый этап внешнеречевой деятельности при усвоении учебного материала.
5. Второе повторение - взаимопрос и взаимопомощь студентов друг другу.

Применение учебно-иллюстрационных материалов позволяет обобщить сложный по содержанию материал, активизировать мыслительную деятельность студентов.

Необходимо помнить, что главное для студента в самостоятельной работе с рекомендуемой литературой и источниками - это формирование своего индивидуального стиля, который может стать основой в будущей профессиональной деятельности.

6 Перечень рекомендуемой литературы

а) основная литература:

1. Гурьянова, К.Н. Математический анализ
Электронный ресурс : учебное пособие / В.В. Бояршинов / У.А. Алексеева / К.Н. Гурьянова. - Математический анализ, 2022-08-31. - Екатеринбург : Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2014. - 332 с. - Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks. - ISBN 978-5-7996-1340-2

2. Просветов, Г. И. Математический анализ: задачи и решения : учебно-практическое пособие / Г.И. Просветов. - 4-е изд., перераб. - Москва : Альфа-Пресс, 2017. - 272 с. : ил. - ISBN 978-5-94280-689-7

б) дополнительная литература

1. Андрухив, Л. В. (СКФУ). Математический анализ. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы : учебно-методическое пособие : Направление подготовки 010100.62 - Математика. Профиль подготовки - Вычислительная математика и информатика; Направление подготовки 010100.62 - Математика и компьютерные науки. Профиль подготовки - Вычислительная математика, информатика и компьютерные технологии. Бакалавриат / Л. В. Андрухив, А. Н. Белаш ; Сев.-Кав. федер. ун-т. - Ставрополь : СКФУ, 2013. - 93 с.

2. Архипов, Г. И. Лекции по математическому анализу : учебник для вузов / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. - Изд. 2-е, перераб. - М. : Высшая школа, 2000. - 695с. : ил. - Библиогр.: с.684-685. - ISBN 5-06-003955-2

3. Ганиев, В. С. Математический анализ / В.С. Ганиев, 1. - Самара : Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 2013. - 172 с. - ISBN 978-5-9585-0487-9

в) методическая литература

1. Методические рекомендации по выполнению практических работ по дисциплине «Математический анализ» : Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль Математическое моделирование, квалификация выпускника академический бакалавр, форма обучения очная. Учебный план 2013 года. Изучается в 1, 2 семестрах. - Ставрополь : СКФУ, 2013. - 74 с.

2. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы по дисциплине «Математический анализ» (электронный вариант)

г) программное обеспечение и Интернет ресурсы

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

3. <http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.

4. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.

5. <http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России. Основные разделы: журналы, персоналии, организации, конференции, семинары, видеотека, библиотека.

6. <http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).

7. <http://www.mcsme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.

д) Материально-техническое обеспечение дисциплины

8. Мультимедийный проектор.