

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

для обучающихся по организации и проведению практических работ
по дисциплине «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА»

для студентов специальности 30.05.01 «Медицинская биохимия»

Содержание

Практическое занятие 1. Основные понятия теории вероятностей

Практическое занятие 2. Элементы комбинаторики.

Практическое занятие 3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Практическое занятие 4. Вероятность появления хотя бы одного события.

Практическое занятие 5. Полная вероятность.

Практическое занятие 6. Повторные независимые испытания.

Практическое занятие 7. Дискретные случайные величины. Законы распределения дискретной случайной величины.

Практическое занятие 8. Числовые характеристики случайных величин.

Практическое занятие 9. Законы распределения непрерывных случайных величин

Практическое занятие 10. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Практическое занятие 11. Закон больших чисел

Практическое занятие 12. Основные понятия математической статистики.

Практическое занятие 13. Точечная и интервальная оценки, точность и надежность оценки, доверительный интервал.

Практическое занятие 14. Системы случайных величин.

Практическое занятие 15. Числовые характеристики системы случайных величин

Практическое занятие 16. Элементы теории корреляции.

Практическое занятие 17. Выборочное уравнение регрессии.

Практическое занятие 18. Проверка статистических гипотез..

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» является формирование соответствующих компетенций будущего специалиста по специальности

30.05.01 – Медицинская биохимия.

Задачи освоения дисциплины:

- получение базовых знаний по теории вероятностей и математической статистике;
- приобретение навыков исследования и решения базовых задач теории вероятностей и математической статистики;
- овладение современным теоретико-вероятностным и статистическим аппаратом для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач в области математики и информатики;
- развитие способностей применять полученные знания и умения в смежных дисциплинах и будущей профессиональной деятельности.

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» входит в блок обязательной части дисциплин. Ее освоение происходит в 4 семестре.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

Цель: закрепить знания по теме «Основные понятия теории вероятностей», уметь находить вероятности событий с использованием классического определения вероятности.

Ответить на контрольные вопросы:

1. Что изучает теория вероятностей?
2. Какие методы использует теория вероятностей?
3. Как классифицируются все события в теории вероятностей?
4. Как обозначаются случайные события?
5. Что называется исходом испытания?
6. В каком случае опыт укладывается в классическую схему?
7. Какие исходы называются равновероятными, несовместными?
8. Когда исходы образуют полную группу?
9. Что такое вероятность события? (Число, характеризующее степень наступления интересующего нас события)

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Классификация событий

Задача 1. Какие из перечисленных событий являются случайными, достоверными и невозможными:

- 1) выигрыш по одному билету спортлото;
- 2) получение студентом 25 баллов при сдаче четырех экзаменов;
- 3) выпадение не более 6 очков при бросании игрального кубика;

Задача 2. Являются ли несовместными следующие события:

- 1) опыт – подбрасывание правильной монеты;
событие А – появление герба;
событие В – появление цифры;
- 2) опыт – два выстрела по мишени;
событие А – хотя бы один промах;
событие В – хотя бы одно попадание;

Задача 3. Образуют ли полную группу следующие события:

- 1) опыт – подбрасывание правильной монеты;
событие А – появление герба;
событие В – появление цифры;
- 2) опыт – подбрасывание двух правильных монет;
событие А – выпало два герба;
событие В – выпало две цифры;

Задача 4. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитываются суммы выпавших очков (суммы очков на верхних гранях обоих кубиков). Записать полную группу событий в этом опыте.

Задача 5. Являются ли равновероятными следующие события:

- 1) опыт – подбрасывание правильной монеты;
событие А – появление герба;
событие В – появление цифры;
- 2) опыт – подбрасывание погнутой монеты;
событие А – появление герба;
событие В – появление цифры;
- 3) опыт –выстрел по мишени;
событие А –промах;
событие В –попадание;

2. Классическое определение вероятности

Задача 1. Сколько элементарных исходов благоприятствует событию «на обоих кубиках выпало одинаковое число очков» при подбрасывании двух игральных кубиков.

Задача 2. Подбрасывается два игральных кубика. Какому событию благоприятствует больше элементарных исходов: «сумма выпавших очков равна 7» или «сумма выпавших очков равна 8».

Задача 3. Опыт – подбрасывание трех игральных кубиков. Сколько всего элементарных исходов в этом опыте. Сколько элементарных исходов благоприятствуют появлению события – на трех кубиках выпало очков: 2,3,4,5,6.

Задача 4. Подбрасывается два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Найти вероятность того, что сумма очков на верхних гранях кубиков равна 10.

Задача 5. Подбрасываются два игральных кубика, и отмечается число очков на верхней грани каждого кубика. Найти вероятность того, что на обоих кубиках выпало одинаковое число очков.

Задача 6. Подбрасывают три игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 9 или 10 очков.

ЗАДАНИЕ НА САМОСТОЯТЕЛЬНУЮ РАБОТУ

Задача 1. Все натуральные числа от 1 до 50 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекают одну карточку. Какова вероятность, что число на взятой карточке окажется кратным шести.

Задача 2. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым.

Задача 3. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры одинаковы.

Задача 4. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется:

- 1) случайно названное двузначное число;
- 2) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.

Задача 5. В книге 200 страниц. Найти вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь порядковый номер кратный 10.

Задача 6. В магазин привезли 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект.

Случайным образом покупается один холодильник. Найти вероятность того, что он будет без дефекта.

Задача 7. Из букв слова «биология», составленного с помощью разрезной азбуки, наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: 1) гласной; 2) согласной; 3) буквой и; 4) буквой ж.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Цель: уметь находить вероятности событий с использованием классического определения вероятности и формул комбинаторики.

Ответить на контрольные вопросы:

1. Элементы комбинаторики.
2. События и их классификация.
3. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Перестановки $P_n = n!$

Задача 1. Сколькими способами можно составить 6-ти цветный флаг из 6-ти полос материала различного цвета.

Задача 2. Сколькими различными способами могут разместиться 15 пассажиров в 15 местном маршрутном такси.

Задача 3. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы И, К, М, Н, С. Какова вероятность того, что получится слово МИНСК.

Задача 4. Десять одинаковых пронумерованных шаров помещены в урну. При розыгрыше призов шары последовательно извлекаются и раскладываются в ряд. Сколько существует вариантов извлечь шары. Найти вероятность того, что шары будут извлечены в порядке возрастания.

Задача 5. Числа от единицы до девяти записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточки последовательно извлекаются и раскладываются в ряд. Найти вероятность того, что:

- 1) числа 1 и 2 будут стоять рядом и в порядке возрастания;
- 2) числа 3, 6 и 9 будут стоять рядом и в порядке возрастания;
- 3) на четных местах будут стоять четные числа.

Задача 6. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места за круглым столом в случайном порядке. Какова вероятность того, что при этом два определенных лица окажутся сидящими рядом.

2. Размещения $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Задача 1. Студенту необходимо в течение 6 дней сдать 3 различных предмета. В один день деканат разрешает сдавать не более одного предмета. Сколько существует способов сдать студенту экзамены.

Задача 2. Сколько словарей необходимо иметь, чтобы осуществить переводы с любого из 6 языков (русского, английского, французского, итальянского, испанского, китайского) на любой другой из 6 языков.

Задача 3. Сколькими способами можно выбрать три различных лица на три различные должности из десяти кандидатов.

Задача 4. Множество состоит из 10 десяти первых букв русского алфавита. Из этого множества последовательно выбирают 4 буквы (без возвращения) и выкладывают их в ряд. Сколько 4-х буквенных слов может быть получено в данном опыте (за слово считается любая комбинация из 4-х букв). Найти вероятность того, что составленное слово будет оканчиваться буквой а.

3. Сочетания $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Задача 1. Сколькими способами можно выбрать три лица на три одинаковые должности из 10 кандидатов.

Задача 2. В предвыборной борьбе за две одинаковые должности выступают 6 кандидатов. Каждый избиратель может занести в свой лист для голосования либо одного кандидата, либо двух. Сколькими способами каждый избиратель может заполнить свой лист для голосования.

Задача 3. Командир отделения должен отправить на работу отряд в составе 3 человек. Сколькими способами можно составить отряд, если в отделении 10 курсантов.

Задача 4. Сколькими способами можно составить дозор из 3 солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера.

Задача 5. Для награждения победителей школьной олимпиады куплено 10 различных книг. Сколькими способами эти книги можно распределить между победителями, если награждаются 3 участника, занявших 1,2,3 места. Причем участник, занявший 1-е место, получит 5 книг, 2-е – 3 книги, 3-е – 2 книги.

Задача 6. Десять различных книг нужно расставить на двух книжных полках, так чтобы на каждой полке стояло не менее 4-х книг. Сколькими способами это можно сделать (порядок книг не учитывается).

Задача 7. Студент выучил 50 из 60 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает два вопроса, содержащиеся в его экзаменационном билете.

ЗАДАНИЕ НА САМОСТОЯТЕЛЬНУЮ РАБОТУ

- Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник произведений Д. Лондона, располагая их:
 - в произвольном порядке;
 - так, чтобы I, V и IX тома стояли рядом (в любом порядке)?*Ответ: 1) 3628800; 2) 241920.*
- Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, если:
 - цифры в номере не повторяются;
 - цифры в номере могут повторяться?*Ответ: 1) 604800; 2) 10000000.*
- В вазе стоят 9 красных и 7 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из нее:
 - 3 гвоздики;
 - 6 гвоздик одного цвета;
 - 4 красных и 3 розовых гвоздики?*Ответ: 1) 560; 2) 91; 3) 4410.*
- Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым?
Ответ: 0,4.
- Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что:
 - сумма выпавших очков не превосходит 7;
 - на обеих костях выпадет одинаковое число очков.*Ответ: 1) 7/12; 2) 1/6.*
- Буквы Т, Е, И, Р, О, Я написаны на отдельных карточках. Наудачу последовательно извлекаются и складываются в ряд:
 - 3 карточки;
 - все 6 карточек.Какова вероятность того, что получится слово:
 - ТОР;
 - ТЕОРИЯ?*Ответ: 1) 1/120; 2) 1/720.*
- Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются 4 билета, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся:

- 1) 4 девушки;
- 2) 4 юноши;
- 3) 3 юноши и 1 девушка?

Ответ: 1) 0,11; 2) 0,0166; 3) 0,142.

8. В группе 30 студентов, из которых 6 отличников. Группу наудачу разделили на две равные части. Какова вероятность того, что в каждой части по 3 отличника?

Ответ: 0,35.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Цель: научить пользоваться теоремами о сложении вероятностей совместных и несовместных событий, теоремами об умножении зависимых и независимых событий.

Ответить на контрольные вопросы:

1. Алгебра событий.
2. Теоремы сложения вероятностей совместных и несовместных событий. Следствия.
3. Теорема умножения вероятностей независимых событий.
4. Теорема сложения вероятностей несовместных событий.
5. Теорема сложения вероятностей совместных событий, следствие.
6. Теорема умножения зависимых событий, следствие.
7. Какие события называются зависимыми?
8. Какие события называются независимыми?
9. Какие события называются совместными?
10. Какие события называются несовместными?
11. Сформулировать теорему умножения зависимых событий, следствие.

Методические рекомендации:

Пример 1.

Испытание: из орудия произведены два выстрела

Событие $A = \{\text{попадание при первом выстреле}\}$

Событие $B = \{\text{попадание при втором выстреле}\}$

1) $A + B = \{\text{попадание или при первом выстреле, или при втором выстреле, или при обоих выстрелах}\}$

Другими словами, $A + B = \{\text{попадание хотя бы при одном выстреле}\}$

2) $AB = \{\text{попадание при первом выстреле и при втором выстреле}\}$

3) $A - B = \{\text{попадание при первом выстреле и промах при втором выстреле}\}$

Пример 2.

В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение

Событие $C = \{\text{шар цветной}\} \Rightarrow \text{или красный, или синий}$

Событие $A = \{\text{шар красный}\}$

Событие $B = \{\text{шар синий}\}$

$C = A + B$, где A и B – несовместные события.

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{10}{30} + \frac{5}{30} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Пример 3.

Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны 0,7 и 0,8. Найти вероятность поражения цели.

Решение

Событие $A = \{\text{цель поражена}\} \Rightarrow \text{означает попадание хотя бы одного из орудий.}$

Событие $A_1 = \{\text{попадание первого орудия}\}$

Событие $A_2 = \{\text{попадание второго орудия}\}$

$A = A_1 + A_2$, где A_1 и A_2 – совместные события

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = 0,7 + 0,8 - 0,7 * 0,8 = 0,94.$$

Пример 4.

Испытание: из урны, содержащей белые и черные шары, последовательно извлекаются два шара.

Событие $A = \{\text{первый шар белый}\}$

Событие $B = \{\text{второй шар белый}\}$

Если выборка осуществляется с возвращением, то события A и B – независимые, а если без возвращения, то события A и B – зависимые.

Пример 5.

В урне 5 белых и 4 черных шара. Последовательно извлекаются 3 шара (без возвращения). Найти вероятность того, что первый шар белый (событие A_1), второй шар черный (событие A_2) и третий шар белый (событие A_3).

Решение

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63}.$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Алгебра событий

Задача 1. Подбрасывается игральный кубик. Событие A – выпадение 6 очков; B – выпадение 3 очков; C – выпадение четного числа очков; M – выпадение числа очков, кратных трем. Что означают события: $\overline{ABC}$, $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$, $\overline{ABC}$.

Задача 2. В городе объявлен розыск трех преступников. Событие P – обнаружен преступник Рыков; U – обнаружен преступник Угрюмов; событие Φ – обнаружен преступник Фомин.

1) Расшифруйте следующие события: $U + \Phi$; UT ; $\overline{\Phi T}$; $U\overline{\Phi}$; $UT\overline{\Phi P}$; $UT\Phi$; $UT(\Phi + P)$.

Задача 2. В сессию студент должен был сдать два экзамена и один зачет. Событие A состоит в том, что студент сдал экзамен по философии; событие B – студент сдал экзамен по английскому языку; событие C – студент получил зачет по физкультуре.

Запишите с помощью обозначений следующие события:

- 1) студент не получил зачета;
- 2) сдал два экзамена;
- 3) сдал по крайней мере один экзамен;
- 4) сдал только один экзамен и не получил зачета;
- 5) не сдал ничего;
- 6) сдал все.

2. Теоремы сложение и умножение вероятностей

1) Условная вероятность. Зависимые события

Задача 1. Слово папаха составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами тщательно перемешаны. Четыре карточки извлекаются по очереди и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получили слово папа.

Задача 2. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что два наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

Задача 3. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

2) Независимые события

Задача 1. В мастерской работают два мотора, независимо друг от друга. Вероятность того, что в

течение часа первый мотор не потребует внимания мастера, равна 0,85, а для второго мотора эта вероятность равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение часа внимания мастера потребуют оба мотора.

Задача 2. Экспедиция издательства отправила газеты в два почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки в первое отделение равна 0,9, во второе – 0,8. Найти вероятности того, что ни одно отделение не получило газеты вовремя.

Задача 3. Два спортсмена должны выполнить норму мастера спорта. Вероятность того, что первый спортсмен выполнит, норму равна 0,9, второй – 0,8. Найти вероятность того, что норма будет выполнена обоими спортсменами.

3) Несовместные события

Задача 1. На полке находится 10 книг, расставленных в произвольном порядке. Из них три книги по теории вероятностей, три – по истории и четыре – по биологии. Студент случайным образом достает одну книгу. Какова вероятность того, что это окажется книга или по теории вероятностей или по биологии.

Задача 2. На 30 одинаковых жетонах написаны числа от 1 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 2 или 3.

Задача 3. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с первого, пять со второго, семь с третьего и четыре с четвертого. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или с третьего склада.

ЗАДАНИЕ НА САМОСТОЯТЕЛЬНУЮ РАБОТУ

1. Из 500 взятых наудачу деталей оказалось 8 бракованных. Найти частоту бракованных деталей.
Ответ: 0,016.
2. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.
Ответ: 102 попадания.
3. В круг радиуса R вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадет в квадрат?
Ответ: $2/\pi \approx 0,637$.
4. На отрезок OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, меньшую, чем $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.
Ответ: $2/3$.
5. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с первого, пять со второго, семь с третьего и четыре с четвертого. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада?
Ответ: $11/20$.
6. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,7; а второго – 0,8. Найти вероятность того, что:
1) мишень будет поражена;
2) в мишень попадет только один из стрелков.
Ответ: 1) 0,94; 2) 0,38.
7. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что:
1) из трех проверенных изделий только одно окажется нестандартным;
2) нестандартным окажется только четвертое по порядку проверенное изделие.
Ответ: 1) 0,243; 2) 0,0729.
8. Вероятность того, что курсант сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9 и третий – 0,8. Найти вероятность того, что курсантом будут сданы:

- 1) только второй экзамен;
- 2) только один экзамен;
- 3) три экзамена;
- 4) по крайней мере 2 экзамена;
- 5) хотя бы один экзамен.

Ответ: 1) 0,018; 2) 0,044; 3) 0,648; 4) 0,954; 5) 0,998.

9. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит нормальное, равна 0,6. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет.

Ответ: 0,936.

10. Из колоды в 36 карт наудачу вынимаются 3 карты. Какова вероятность того, что среди них не будет ни одной шестерки? Рассмотреть выборки: 1) без возвращения; 2) с возвращением.

Ответ: 1) 0,695; 2) 0,702.

11. Только один из 9 ключей подходит к данному замку. Какова вероятность того, что придется опробовать 5 ключей для открытия замка?

Ответ: 0,11.

12. В районе 100 поселков. В пяти из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобраны два поселка. Какова вероятность того, что в них окажутся пункты проката сельхозтехники? Решить задачу двумя способами: с помощью классического определения вероятности и с помощью теоремы умножения вероятностей.

Ответ: $1/495 \approx 0,002$.

13. В магазине имеются 10 женских и 6 мужских шуб. Для анализа качества случайным образом отобрали 3 шубы. Определить вероятность того, что среди отобранных шуб окажутся только мужские или только женские шубы.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОЯВЛЕНИЯ ХОТЯ БЫ ОДНОГО СОБЫТИЯ.

Цель: рассмотреть различные виды уравнений прямой на плоскости, взаимное расположение двух прямых на плоскости.

Ответить на контрольные вопросы:

1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий.
2. Теорема сложения вероятностей совместных событий, следствие.
3. Теорема умножения зависимых событий, следствие.
4. Какие события называются зависимыми?
5. Какие события называются независимыми?
6. Какие события называются совместными?
7. Какие события называются несовместными?
8. Сформулировать теорему умножения зависимых событий, следствие.

Методические рекомендации:

Пример 1.

В студии телевидения 3 камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна $p = 0,6$. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера (событие A).

Решение

$$n = 3, \quad q = 1 - p = 1 - 0,6 = 0,4 \quad P(A) = 1 - q^n = 1 - 0,4^3 = 0,936$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Задача 1. Монета подбрасывается три раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет орел.

Задача 2. Два охотника стреляют уток. Для первого охотника вероятность попадания в цель равна 0,7, для второго – 0,6. Какова вероятность попадания в утку хотя бы одним охотником.

Задача 3. Радист трижды в течение дня вызывает корреспондента для получения последних новостей с соревнований. Вероятность того, что корреспондент примет первый вызов, равна 0,8, второй – 0,7 и третий – 0,6. Найти вероятность того, что корреспондент вообще услышит радиста.

Задача 4. В один день в порт могут прийти корабли только из трех пунктов отправления. Вероятность появления корабля из первого пункта равна 0,2, из второго пункта – 0,6, третьего – 0,5. Какова вероятность того, что в некоторый день появится хотя бы один корабль.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. На стеллаже в библиотеке в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет на удачу 3 учебника.

Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

Ответ: $P = \frac{67}{91}$.

2. В ящике содержится 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из деталей окрашена.

Ответ: $P = \frac{5}{6}$.

3. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора.

Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор; хотя бы один сработает.

Задача 4.

Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно равно 0,8.

Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартно; хотя бы одно стандартно.

ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Цель: уметь использовать формулы полной вероятности, Байеса.

Ответить на контрольные вопросы:

1. Полная вероятность.
2. Формулы Байеса.

Примеры решения задач

Задача 1.

В первой коробке содержится 20 радио ламп, из них 18 стандартные; во второй – 10 радиоламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки на удачу взята лампа и переложена в первую коробку. Найти вероятность того, что радио лампа наудачу извлеченная из первой коробки стандартная.

Решение.

A - извлеченная из первой коробки лампа стандартная.

B_1 - из второй коробки в первую переложена стандартная лампа.

B_2 - из второй коробки в первую переложена не стандартная лампа.

B_1, B_2 - несовместные события, образуют полную группу.

Воспользуемся формулой полной вероятности.

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P(A / B_k)$$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A / B_1) + P(B_2) \cdot P(A / B_2)$$

$$P(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0,9$$

Задача 2.

Подводная лодка при атаке корабля выпускает только одну торпеду. Вероятность попадания торпеды в носовую часть корабля равна 0,3, а среднюю – 0,5, в кормовую – 0,2. вероятность потопления корабля при попадании в носовую часть корабля равна 0,5; в среднюю – 0,9; в кормовую – 0,6. Определить вероятность потопления корабля.

Решение.

$$P(A) = 0,3 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,72$$

Задача 3.

Полоса перед фронтом на которой расположена цель, разбита на 3 участка. Вероятность, что цель находится на первом участке – 0,2; на втором – 0,2; на третьем – 0,6. Вероятность поражения цели на первом участке – 0,5; на втором – 0,3; на третьем – 0,4. Найти вероятность поражения цели.

Решение.

$$P(A) = 0,2 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,4$$

Задача 4.

На наблюдательной станции установлены 3 радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения цели с помощью первого локатора – 0,86; с помощью второго – 0,91; с помощью третьего – 0,93. Наблюдатель наугад включает один из локаторов. Какова вероятность обнаружения цели?

Решение.

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot (0,86 + 0,91 + 0,93) = 0,9$$

Задача 5.

Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка – 0,6; для второго – 0,3. После стрельбы в мишень, в мишени оказалась одна пробоина. Какова вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку?

Решение

A - событие того, что в мишени одна пробоина.

B_1 - событие того, что попал первый стрелок.

B_2 - событие того, что попал второй стрелок.

$P_{B_1}(A)$ - вероятность события получение одной из пробоины, после попадания первым, второй – промахнется.

Воспользуемся формулой Байеса.

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_B(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(a)},$$

$$P_{B_1}(A) = 1 - 0,3 = 0,7 \quad P_{B_2}(A) = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$P_A(B_1) = \frac{0,6 \cdot 0,7}{0,6 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,4} = \frac{0,42}{0,54} = 0,78$$

Задача 6.

Имеются 12 урн, из них в 6 урнах (состав A_1) по 3 белых и 4 черных шара. В трех урнах (состав A_2) по 2 белых и 8 черных шаров, в 2 урнах (состав A_3) по 6 белых и 1 черному шару, в 1 урне (состав A_4) 4 белых и 3 черных шара. Из наугад выбранной урны взят шар.

Чему равна вероятность того, что шар взят из урны состава A_3 , если он оказался белым?

Решение.

B - событие, взятый шар оказался белым.

По условию:

$$P(A_1) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad P(A_2) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \quad P(A_3) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \quad P(A_4) = \frac{1}{12},$$

$$P(B/A_1) = \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7}, \quad P(B/A_2) = \frac{2}{2+8} = \frac{1}{5},$$

$$P(B/A_3) = \frac{6}{6+1} = \frac{6}{7}, \quad P(B/A_4) = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}$$

По формуле Байеса находим:

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3) \cdot P(B/A_3)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3) + P(A_4) \cdot P(B/A_4)}$$

$$P(A_3/B) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{7}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{14} + \frac{1}{20} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21}} = 0,314$$

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго – 6 и от третьего – 4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8 и 0,7. Какова вероятность того, что:
 - 1) установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока;
 - 2) проработавший без дефектов двигатель изготовлен на втором заводе?*Ответ: 1) 0,83; 2) 0,29.*
2. Исследованиями психологов установлено, что мужчины и женщины по-разному реагируют на некоторые жизненные обстоятельства. Результаты исследований показали, что 70% женщин позитивно реагируют на изучаемый круг ситуаций, в то время как 40% мужчин реагируют на них негативно. 15 женщин и 5 мужчин заполнили анкету, в которой отразили свое отношение к предлагаемым ситуациям. Случайно извлеченная анкета оказалась негативной. Чему равна вероятность того, что ее заполнял мужчина?
Ответ: 0,31.
3. В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель – 0,85. Проведена проверка качества одной пары обуви. Оказалось, что эта пара обуви отремонтирована качественно. Какова вероятность того, что это: 1) туфли; 2) сапоги?
Ответ: 1) 0,59; 2) 0,41.
4. Рабочий обслуживает три станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго – 0,03, а для третьего – 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в 3 раза больше, чем второго, а третьего – в 2 раза меньше, чем второго. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной?
Ответ: 0,024.
5. Контрольный тест состоит из четырех вопросов. На каждый вопрос предлагается четыре варианта ответа, среди которых только один правильный. Найти вероятность правильного ответа на 2 и 3 вопроса неподготовленного человека (выбор ответа наудачу).
Ответ: 0,21; 0,047.

ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ

Цель: решение задач на повторные независимые испытания.

Ответить на контрольные вопросы:

1. Схема независимых испытаний.
2. Формула Бернулли.
3. Формула Пуассона.
4. Наивероятнейшее число появления события.

Методические рекомендации:

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых возможны только два исхода: либо событие A появится, либо не появится. Будем считать, что в каждом испытании вероятность события A постоянна и равна p , т.е. $P(A) = p$. Тогда вероятность не наступления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q = 1 - p$. Описанная последовательность независимых испытаний называется **схемой Бернулли**.

Требуется найти вероятность того, что при n испытаниях событие A появится ровно k раз (при этом не важно, в какой последовательности событие A будет повторяться k раз).

Т. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A наступит k раз в n независимых испытаниях, определяется по **формуле Бернулли**:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Т. (теорема Пуассона)

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю ($p \rightarrow 0$) при неограниченном увеличении числа испытаний n ($n \rightarrow \infty$), причем произведение np стремится к постоянному числу a ($np \rightarrow a$), то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится k раз в n независимых испытаниях, удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$$

Замечание

Строго говоря, условие т.7.1: $p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так что $np \rightarrow a$, противоречит исходной предпосылке схемы испытаний Бернулли, согласно которой вероятность наступления события в каждом испытании $p = \text{const}$. Однако, если вероятность p – постоянна и мала, число испытаний n – велико и число $np = a$ – незначительно (будем полагать, что $np = a \leq 10$), то из предельного

равенства (9) вытекает приближенная **формула Пуассона**: $P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}$.

Т. (локальная теорема Муавра-Лапласа)

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна ($p \neq 0$ и $p \neq 1$), то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A произойдет k раз в n независимых испытаниях при достаточно большом n определяется по асимптотической формуле

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Формула называется **локальной формулой Муавра-Лапласа**. Вычисление по формуле (10) дает незначительную погрешность при выполнении условия $npq \geq 20$.

Для упрощения расчетов, связанных с применением формулы (10), составлена таблица значений функции $\varphi(x)$.

Замечание

1. Функция $\varphi(x)$ – четна, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$
2. Функция $\varphi(x)$ монотонно убывает при $x > 0$, причем $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Практически можно считать, что при $x > 4$ $\varphi(x) = 0$.

Т. (интегральная теорема Муавра-Лапласа)

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна ($p \neq 0$ и $p \neq 1$), то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A в n независимых испытаниях появится от k_1 до k_2 раз при достаточно большом n определяется по асимптотической формуле

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ - **функция или интеграл вероятностей Лапласа**;

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Формула (11) называется **интегральной формулой Муавра-Лапласа**. Вычисление по формуле (11) дает незначительную погрешность при выполнении условия: $npq \geq 20$.

1. Функция $\Phi(x)$ – нечетна, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
2. Функция $\Phi(x)$ монотонно возрастает при $x > 0$, причем $\Phi(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ при $x \rightarrow \infty$.

Практически можно считать, что при $x > 4$: $\Phi(x) = \frac{1}{2}$.

О. 2. Наивероятнейшим числом k_0 наступления события A в n независимых испытаниях называется число, вероятность которого, $P_n(k_0)$ по крайней мере не меньше вероятностей $P_n(k)$ вычисленных для всех остальных k .

Наивероятнейшее число k_0 - наступления события A в n независимых испытаниях находится из неравенства

$$np - q \leq k_0 \leq np + p. \quad (1)$$

Т. к. $np + p - (np - q) = np + p - np + q = 1$, то обязательно найдется хотя бы одно целое число k_0 , удовлетворяющее неравенству (1).

Если обе части неравенства (1) – дробные числа, то k_0 - единственное целое число, расположенное между данными дробями.

Если число $np - q$ - целое, то наивероятнейших чисел будет два:

$$k_0 \text{ и } k_0 + 1.$$

Если число np - целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Пусть выполнены условия схемы независимых испытаний Бернулли, причем n достаточно большое.

Используя интегральную теорему Лапласа можно найти вероятность того, что отклонение

относительной частоты $\frac{m}{n}$ от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает

заданного числа $\varepsilon > 0$. А именно $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi(x)$, где $x = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$.

Примеры решения задач

Пример 1. В четырех попытках разыгрываются некоторые предметы. Вероятность выигрыша в каждой попытке равна 0,5. Найти вероятность возможного числа выигрышей.

Решение

Событие $A = \{\text{выигрыш}\}$, $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

$$n = 4, p = 0,5 \Rightarrow q = 1 - p = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$P_4(k) = C_4^k 0,5^k 0,5^{4-k}$$

Возможное число выигрышей: $k = 0, 1, 2, 3, 4$

$$P_4(0) = C_4^0 0,5^0 0,5^4 = 0,0625; \quad P_4(1) = C_4^1 0,5^1 0,5^3 = 0,25; \quad P_4(2) = C_4^2 0,5^2 0,5^2 = 0,375$$

$$P_4(3) = C_4^3 0,5^3 0,5^1 = 0,25; \quad P_4(4) = C_4^4 0,5^4 0,5^0 = 0,0625$$

Пример 2. На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов?

Решение

Событие $A = \{\text{студент родился 1 сентября}\}$

$$p = 1/365, n = 1825, k = 4$$

$$a = np = 1825 \cdot \frac{1}{365} = 5 \leq 10$$

$$P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a} \Rightarrow P_{1825}(4) \approx \frac{5^4}{4!} e^{-5} \approx 0,1755.$$

Пример 3. Завод отправил в торговую сеть 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0.002. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено три изделия.

Решение: В данном случае формула Бернулли не применима, т. к. придется возводить 0.002 в 500-ю степень.

$$np = 0.002 \cdot 500 = 1; P_{500}(3) = \frac{1^3}{3!} e^{-1} \approx 0.06.$$

Пример 4. Вероятность того, что деталь не пройдет проверку качества, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 400 проверенных деталей бракованными окажутся не более 70, но не менее 100 деталей.

$$\text{Решение: Т. к. } x' = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25, \quad x'' = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5, \text{ то}$$

$$P_{400}(70 < k < 100) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

Пример 5. В результате обследования были выделены семьи, имеющие по четыре ребенка. Считая вероятность появления мальчика в семье равной 0.515 найти наивероятнейшее число появления мальчиков в семье с четырьмя детьми.

Решение: Т. к. $n = 4, p = 0.515, q = 0.485$, то $1.575 \leq k_0 \leq 2.575$. Т. е. вероятнее всего, что мальчиков будет два. Проверим это. Найдем вероятности того, что мальчиков будет 0,1,3,4.

$$P_4(0) = C_4^0 (0.515)^0 (0.485)^4 \approx 0.06$$

$$P_4(1) = C_4^1 (0.515)^1 (0.485)^3 \approx 0.24$$

$$P_4(2) = C_4^2 (0.515)^2 (0.485)^2 \approx 0.37$$

$$P_4(3) = C_4^3 (0.515)^3 (0.485)^1 \approx 0.27$$

$$P_4(4) = C_4^4 (0.515)^4 (0.485)^0 \approx 0.07$$

Следовательно, вероятнее всего появление двух мальчиков.

Пример 6. Вероятность p того, что деталь не стандартная, равна 0,1. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей

отклонится от вероятности p по абсолютной величине не более чем на 0,03.

Решение: Т. к. $p = 0,1$, $n = 400$, $\varepsilon = 0,03$, $q = 0,9$, то

$$P\left(\left|\frac{m}{400} - 0,01\right| \leq 0,03\right) = 2\Phi\left(0,03 \cdot \sqrt{\frac{400}{0,1 \cdot 0,9}}\right) \approx 2\Phi(2) = 0,9544.$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Формула Бернулли

Задача 1. Работают четыре магазина по продаже стиральных машин. Вероятность отказа покупателю в магазинах равна 0,1. Считая, что ассортимент товара в каждом магазине формируется независимо от других, определить вероятность того, что покупатель получит отказ в двух магазинах.

Задача 2. Что вероятнее выиграть у равносильного противника в шахматы: три партии из четырех или пять из восьми?

Задача 3. Каждый вариант контрольной работы по теории вероятностей содержит 5 задач. Студент Петров очень плохо подготовился, поэтому вероятность правильного решения для каждой задачи, равна 0,3. Петров получит положительную оценку если решит не меньше трех задач. Найти вероятность того, что он получит положительную оценку.

Формула Пуассона

Задача 1. Обувной магазин продал 200 пар обуви. Вероятность того, что в магазин будет возвращена бракованная пара, равна 0,01. Найти вероятность того, что из проданных пар обуви будет возвращено 2 пары.

Задача 2. При одном бросании монетки в игровой автомат вероятность выигрыша составляет 0,001. Азартный игрок потратил 1000 монеток. Найти вероятность того, что он выиграл хотя бы один раз.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей:

- 1) 2 мальчика;
- 2) не более двух мальчиков;
- 3) более двух мальчиков;
- 4) не более трех и не менее двух мальчиков.

Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

Ответ: 1) 0,31; 2) 0,48; 3) 0,52; 4) 0,62.

2. Из-за перегруженности сети вечером сотовая связь не всегда обеспечивает соединение.

Вероятность сбоя при каждом звонке, равна 0,2. За вечер молодой человек делает 5 звонков. Найти вероятность того, что не менее чем при трех вызовах произошел сбой.

3. Во время испытаний на полигоне было выпущено 15 ракет. Вероятность достижения цели для каждой ракеты составляет 0,7. Найти вероятность того, что цели достигнут не менее 3-х ракет.
4. При игре в гольф вероятность попадания в лунку для неопытного игрока составляет 0,3. Было сделано 5 попыток. Найти вероятность того, что хотя бы 1 из них была удачной.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

Цель: знать основные законы распределения дискретной случайной величины: биномиальный, геометрическое распределение и их числовые характеристики.

Ответить на контрольные вопросы:

1. Биномиальное распределение.
2. Пуассоновское распределение.
3. Геометрическое распределение.
4. Гипергеометрическое распределение.

Методические рекомендации:

1. Биномиальное распределение

Пусть выполнены все условия схемы независимых испытаний Бернулли.

Рассмотрим в качестве ДСВ X число появлений события A в этих испытаниях. Т. е. величина X может принимать значения: $x_1 = 0, x_2 = 1, \dots, x_{n+1} = n$.

Вероятности этих значений определяются по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}.$$

О. Закон распределения вероятностей ДСВ X называется биномиальным, если вероятности ее возможных значений определяются по формуле Бернулли.

2. Пуассоновское распределение

Пусть в схеме независимых испытаний Бернулли число испытаний достаточно велико ($n \rightarrow \infty$), а вероятность появления события A очень мала ($p \rightarrow 0$).

Рассмотрим в качестве ДСВ X число появлений события A в этих испытаниях. Т. е. величина X может принимать значения: $x_1 = 0, x_2 = 1, \dots, x_{n+1} = n$.

Вероятности этих значений определяются по формуле Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a}, \quad a = np.$$

О. Закон распределения вероятностей ДСВ X называется пуассоновским, если вероятности ее возможных значений определяются по формуле Пуассона.

3. Геометрическое распределение

Пусть выполнены все условия схемы независимых испытаний. Испытания проводятся до 1-го появления события A . Т. е. если событие A появилось в k -м (катом) испытании, то в предыдущих $(k-1)$ испытаниях оно не появлялось.

Рассмотрим в качестве ДСВ X число испытаний, которые необходимо провести до 1-го появления события A . Т. о. возможные значения величины X : $x_1 = 0, x_2 = 1, \dots$

Вероятности этих значений определяются по формуле:

$$P_k = q^{k-1} p, \quad \text{где } k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Если в эту формулу подставить последовательно вместо k : $1, 2, \dots$, то получим геометрическую прогрессию с 1-м членом p и знаменателем q ($0 < q < 1$): $p, pq, pq^2, \dots, pq^{k-1}, \dots$

О. Закон распределения вероятностей ДСВ X называется геометрическим, если вероятности ее возможных значений определяются по формуле (1) и образуют геометрическую прогрессию.

4. Гипергеометрическое распределение

Пусть имеется N элементов, среди которых M обладают свойством A . Случайным образом

выбирается n элементов (выбор каждого элемента равновозможен), причем выборка осуществляется без возвращения.

Рассмотрим в качестве ДСВ X количество элементов k , обладающих свойством A среди отобранных n элементов. Т. е. величина X может принимать значения: $x_1 = 0, x_2 = 1, \dots, x_{n+1} = n$.

Вероятности этих значений определяются по формуле:

$$P_k = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \text{ где } k = 0, 1, \dots, n. \quad (2)$$

О. Закон распределения вероятностей ДСВ X называется гипергеометрическим, если вероятности ее возможных значений определяются по формуле (2).

Решение типовых задач

Пример 1. Баскетболист делает три штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,7. Составить закон распределения числа попаданий мяча в корзину.

Решение:

X	0	1	2	3
P	0.189	0.441	0.343	0.027

$$p_2 = P_3(1) = C_3^1(0.7)^1(0.3)^2 = 0.189$$

$$p_3 = P_3(2) = C_3^2(0.7)^2(0.3)^1 = 0.441$$

$$p_4 = P_3(3) = C_3^3(0.7)^3(0.3)^0 = 0.343$$

$$p_1 = P_3(0) = C_3^0(0.7)^0(0.3)^3 = 0.027$$

$$\text{Контроль: } \sum_{i=1}^n p_i = 0.027 + 0.189 + 0.441 + 0.343 = 1$$

Пример 2. Игральная кость подбрасывается до первого выпадения цифры шесть. Составить закон распределения числа подбрасываний игральной кости до первого выпадения цифры шесть.

Решение: $p = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{5}{6}$.

$$p_1 = \left(\frac{5}{6}\right)^{1-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}, \quad p_2 = \left(\frac{5}{6}\right)^{2-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}, \quad p_3 = \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}, \dots$$

X	1	2	3	
P	1/6	5/36	25/216	

Пример 3. Гражданин приобрел случайным образом 5 акций двадцати АО. Через год 6 из 20-ти АО разорились. Составить закон распределения и построить многоугольник распределения возможного числа акций банкротов среди купленных гражданином акций.

Решение:

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1001}{7752}$	$\frac{3003}{7752}$	$\frac{2730}{7752}$	$\frac{910}{7752}$	$\frac{105}{7752}$	$\frac{3}{7752}$

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{C_6^0 C_{14}^5}{C_{20}^5} = \frac{1001}{7752}$$

$$p_2 = P(X = 1) = \frac{C_6^1 C_{14}^4}{C_{20}^5} = \frac{3003}{7752}$$

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{C_6^2 C_{14}^3}{C_{20}^5} = \frac{2730}{7752}$$

$$p_4 = P(X = 3) = \frac{C_6^3 C_{14}^2}{C_{20}^5} = \frac{910}{7752}$$

$$p_5 = P(X = 4) = \frac{C_6^4 C_{14}^1}{C_{20}^5} = \frac{105}{7752}$$

$$p_6 = P(X = 5) = \frac{C_6^5 C_{14}^0}{C_{20}^5} = \frac{3}{7752}$$

Контроль: $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Баскетболист делает три штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,7. Построить ряд распределения дискретной случайной величины X – числа попаданий мяча в корзину. Найти числовые характеристики дискретной случайной величины X .

Ответ: 1)

X	0	1	2	3
p	0,027	0,189	0,441	0,343

; 2) $M(X) = 2,1$; $D(X) = 0,63$; $\sigma(X) = 0,79$.

2. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобрали 4 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных. Найти числовые характеристики и построить многоугольник распределения случайной величины X .

Ответ: 1)

X	0	1	2	3	4
p	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

; 2) $M(X) = 0,4$; $D(X) = 0,36$; $\sigma(X) = 0,6$.

3. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Составить закон распределения и найти числовые характеристики дискретной случайной величины X – числа отказавших элементов в течение года.

Ответ: $P_{1000}(k) \approx \frac{1}{k!} e^{-1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$); $M(X) = D(X) = \sigma(X) = 1$.

4. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,01. Найти вероятности следующих событий: 1) в течение часа 5 абонентов позвонят на станцию;
2) в течение часа не более 4 абонентов позвонят на станцию;
3) в течение часа не менее 3 абонентов позвонят на станцию.

Ответ: 1) 0,1563; 2) 0,6289; 3) 0,7619.

5. Вероятность поражения цели равна 0,05. Производится стрельба до первого попадания. Составить закон распределения и найти числовые характеристики дискретной случайной величины X – числа сделанных выстрелов. Определить вероятность того, что для поражения цели потребуется не менее 5 выстрелов.

Ответ: $p_k = 0,05 \cdot 0,95^{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$); $M(X) = 20$; $D(X) = 380$; $\sigma(X) = 19,49$; $P(X \geq 5) = 0,8145$.

6. Проводится бросание игральной кости до первого выпадения шести очков. Составить закон распределения и найти числовые характеристики дискретной случайной величины X – числа бросаний игральной кости.

Ответ: $p_k = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$); $M(X) = 6$; $D(X) = 30$; $\sigma(X) = 5,48$.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Игральная кость брошена 3 раза. Составить закон распределения и найти числовые характеристики дискретной случайной величины X – числа появлений шестерки.

Ответ 1)

X	0	1	2	3
p	125/216	75/216	15/216	1/216

; $M(X)=1/2$; $D(X)=5/12$; $\sigma(X)=0,65$.

2. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит 5 бракованных книг. Составить закон распределения и найти числовые характеристики дискретной случайной величины X – числа бракованных книг в тираже.

Ответ: $P_{100000}(5) \approx 0,0375$; $M(X)=D(X)=10$; $\sigma(X)=3,2$.

3. После ответа курсанта на вопрос экзаменационного билета экзаменатор задает курсанту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только курсант обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что курсант ответит на любой заданный вопрос, равна 0,9. Требуется составить закон распределения и найти числовые характеристики дискретной случайной величины X – числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель курсанту.

Ответ: $p_k = 0,1 \cdot 0,9^{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$); $M(X)=10$; $D(X)=90$; $\sigma(X)=9,49$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №8

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Цель: изучить числовые характеристики случайных величин, функцию распределения.

Ответить на контрольные вопросы:

1. Что называется случайной величиной?
2. Что представляет собой ряд распределения?
3. Какие значения может принимать случайная величина?

Примеры решения задач

Пример 1. Пусть заданы два ряда распределения ДСВ X и Y :

X	2	3	10	5
P	0,1	0,4	0,2	0,3

Y	4	5	7
P	0,2	0,6	0,2

Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 3X + 2Y$.

Решение:

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,3 = 4,9;$$

$$M(X^2) = 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,4 + 10^2 \cdot 0,2 + 5^2 \cdot 0,3 = 49,5;$$

$$D(X) = 49,5 - (4,9)^2 = 25,49;$$

$$M(Y) = 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,6 + 7 \cdot 0,2 = 5,2;$$

$$M(Y^2) = 4^2 \cdot 0,2 + 5^2 \cdot 0,6 + 7^2 \cdot 0,2 = 76;$$

;

$$D(3X + 2Y) = 9D(X) + 4D(Y) = 9 \cdot 25,49 + 4 \cdot 48,96 = 425,25;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{425,25} \approx 20,62.$$

Пример 2. ДСВ X задана таблицей распределения:

X	1	4	8
-----	---	---	---

P	0,3	0,1	0,6
-----	-----	-----	-----

Найти функцию распределения и изобразить ее на графике.

Решение:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1; \\ 0,3, & \text{если } 1 < x \leq 4; \\ 0,3 + 0,1, & \text{если } 4 < x \leq 8; \\ 1, & \text{если } x > 8 \end{cases}$$

Пример 3. Вероятность проработать первому блоку не менее T часов – 0,7; второму блоку – 0,6. Найти ряд распределения и построить многоугольник распределения числа работающих блоков на момент времени T часов.

Решение:

В процессе беседы оформляется решение задачи, x число работающих блоков на момент $t = T$.

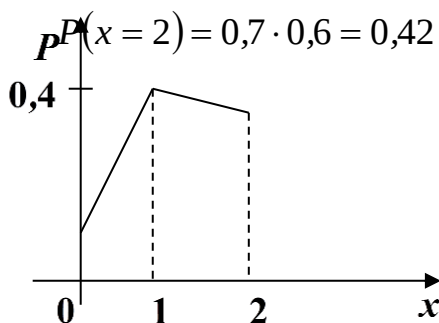
x	0	1	2
P	0,12	0,46	0,42

$$P(x=0) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$$

$$P(x=1) = 0,7 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,6 = 0,46$$

$$P(x=2) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42$$

Проверка $\sum_{i=0}^2 P_i = 1$

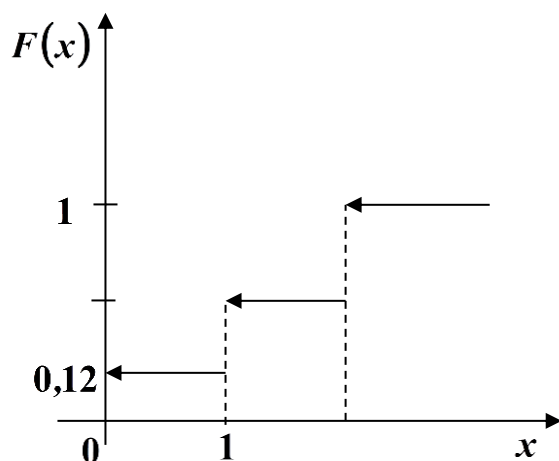


$$x \leq 0, \quad F(x) = P(x \leq 0) = 0$$

$$0 < x \leq 1, \quad F(x) = P(x \leq 1) = P(x=0) = 0,12$$

$$1 < x \leq 2, \quad F(x) = P(x \leq 2) = P(x=0 \cup x=1) = P(x=0) + P(x=1) = 0,58$$

$$2 < x < \infty, \quad F(x) = P(x < \infty) = P(x=0 \cup x=1 \cup x=2) = 0,12 + 0,46 + 0,42 = 1$$



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0,12 & 0 < x \leq 1 \\ 0,58 & 1 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Пример 4. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить

закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Задача решается полу самостоятельно, на доске записываются результаты для проверки правильности решения.

x	1	2	3
P	0,2	0,6	0,2

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 0,2 & 1 < x \leq 2 \\ 0,8 & 2 < x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Пример 5. Каждая из четырех ракет направлена в свою цель. Вероятность поражения каждой цели ракетой 0,6.

Найти закон распределения числа пораженных целей.

x	0	2	3	4
P	0,0256	0,1536	0,3456	0,1296

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0,0256, & 0 < x \leq 1 \\ 0,1792, & 1 < x \leq 2 \\ 0,5242, & 2 < x \leq 3 \\ 0,8704, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Дополнительные вопросы к задаче:

1) что вероятнее всего в данной задаче?

чему равна $P(x < 2)$, $P(x \geq 2)$?

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Одновременно запускают 100 ракет. Боеголовки атакуются противоракетами в количестве 200 единиц. Вероятность поражения боеголовки одной противоракетой равна 0,4. Считая, что атакующие противоракеты, между ракетами распределяются равномерно, найти среднее число сбитых ракет.
Ответ: 64 ракеты.

2. Прибор состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения прибора равна 0,2. Найти закон распределения числа отказавших элементов в момент включения прибора и среднее число отказавших элементов.

3. Производится пуск трех ракет по цели до первого попадания или до израсходования всех ракет. Вероятность поражения цели одной ракетой равна 0,08. Найти закон распределения числа запускаемых ракет. Найти средний расход боезапаса и $D(x)$.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Перевозится партия из 5000 радиоламп. Вероятность того, что в дороге лампа разобьется равна 0,002. Определить вероятность того, что при перевозке разобьется:

- 1) ровно три лампы,
- 2) более трех ламп.

2. Станок автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных, среднее число бракованных деталей.
Ответ: $P_{200}(4) = 0,09$

3. Число x вызовов, поступающих на АТС за время t , распределено по закону Пуассона. Среднее число вызовов, поступающих за минуту равно 1,5. Найти вероятность того, что за минуту поступит не менее двух вызовов.
Ответ: 0,44.

4. Найти среднее число лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыш, если приобретено 200 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равно 0,3.

5. По каналу связи передаются 1000 знаков. Вероятность искажения знака помехами равно 0,02. Помехи действуют на каждый передаваемый знак независимо.
Определить: 1) среднее число искаженных знаков,
2) что число искаженных знаков не превзойдет двух.

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Цель: функцию и плотность распределения непрерывных случайных величин, имеющих равномерное, показательное и нормальное распределения.

Ответить на контрольные вопросы:

1. Равномерное распределение.
2. Показательное распределение.
3. Нормальное распределение.

Примеры решения задач

Пример 1. НСВ X задана своей функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -1; \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3}, & \text{если } -1 < x \leq 2; \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Построить график функции $F(x)$ и найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(1,3)$.

Решение:

$$P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

Пример 2. НСВ X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 < x < \frac{\pi}{2}. \\ 0, & \text{если } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей и построить графики $F(x)$ и $f(x)$. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение из интервала $\left(-1, \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение:

$$\text{при } x \leq 0: F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = 0;$$

$$\text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}: F(x) = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^x f(x) dx = 0 + (-\cos x) \Big|_0^x = -\cos x - (-\cos 0) = -\cos x + 1;$$

$$\text{при } x > \frac{\pi}{2}: F(x) = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi/2} f(x) dx + \int_{\pi/2}^x f(x) dx = 0 + (-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0) + 0 = 1;$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ -\cos x + 1, & \text{если } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{если } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$P\left(-1 < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int_{-1}^{\pi/4} f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi/4} f(x) dx = 0 + (-\cos x) \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \approx 0,3.$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Автобусы подходят к остановке с интервалом в 5 минут. Считая, что случайная величина X – время ожидания автобуса – распределена равномерно, найти:

- 6) плотность распределения;
- 7) функцию распределения;
- 8) среднее время ожидания.

$$\text{Ответ: 1) } f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/5, & 0 \leq x \leq 5; \\ 0, & x > 5 \end{cases} \quad 2) F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/5, & 0 \leq x \leq 5; \\ 1, & x > 5 \end{cases} \quad 3) 2,5 \text{ мин.}$$

2. Плотность распределения непрерывной случайной величины, имеющей показательное распределение, задается в виде $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Ce^{-0,1x}, & x \geq 0 \end{cases}$. Найти:

- 1) параметр C ;
- 2) числовые характеристики случайной величины X ;
- 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(4; 10)$.

$$\text{Ответ: 1) } C = 0,1; \quad 2) M(X) = 10; D(X) = 100; \sigma(X) = 10; \quad 3) 0,3.$$

3. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=10$, $D(X)=4$.

- 1) Записать плотность распределения и функцию распределения случайной величины X .
- 2) Найти вероятности $P(12 < X < 14)$ и $P(8 < X < 12)$.

$$\text{Ответ: 1) } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}; \quad F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-10}{2}\right); \quad 2) 0,135905; 0,68269.$$

4. Установлено, что время ремонта телевизора есть случайная величина X , распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней. Найти плотность распределения, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

$$\text{Ответ: } 0,264; \quad f(x) = \frac{1}{15} e^{-\frac{1}{15}x} (x \geq 0); \quad F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{15}x} (x \geq 0); \quad \sigma = 15 \text{ дней}.$$

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого числа. Полагая, что при отсчете ошибка округления распределена по равномерному закону, найти:

- 1) числовые характеристики этой случайной величины;
- 2) вероятность того, что ошибка округления меньше 0,04;
- 3) вероятность того, что ошибка округления больше 0,05.

Ответ: 1) $M(X)=0,1$; $D(X)=0,0033$; $\sigma(X)=0,0577$; 2) 0,4; 3) 0,5.

2. Среднее время безотказной работы прибора равно 80 часов. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти:

- 1) выражение его плотности вероятности и функции распределения;
- 2) вероятность того, что в течение 100 часов прибор не выйдет из строя.

Ответ: 1) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,0125 e^{-0,0125x}, & x \geq 0 \end{cases}$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-0,0125x}, & x \geq 0 \end{cases}$; 2) 0,286.

3. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=10$. Найти $P(0 < X < 10)$, если известно, что $P(10 < X < 20) = 0,3$.

Ответ: 0,3.

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Цель: уметь находить числовые характеристики, функцию и плотность распределения непрерывных случайных величин, имеющих показательное и равномерное распределения.

Ответить на контрольные вопросы:

1. Числовые характеристики равномерного распределения.
2. Числовые характеристики показательного распределения.
3. Числовые характеристики нормального распределения.

Примеры решения задач

Пример 1. НСВ X задана плотностью распределения вероятностей $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6$ в интервале $(2,4)$. Вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти все числовые характеристики НСВ X .

Решение:

$$M(X) = \int_{-\infty}^2 x \cdot 0 dx + \int_2^4 x \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6\right) dx + \int_4^{+\infty} x \cdot 0 dx = \int_2^4 \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{3}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 3x^2\right) \Big|_2^4 = \left(-\frac{768}{16} + \frac{192}{2} - 48\right) - (-3 + 12 - 12) = 0 + 3 = 3;$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^2 x^2 \cdot 0 dx + \int_2^4 x^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6\right) dx + \int_4^{+\infty} x^2 \cdot 0 dx - 3^2 = \int_2^4 \left(-\frac{3}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^3 - 6x^2\right) dx - 3^2 =$$

$$= \left(-\frac{3}{20}x^5 + \frac{9}{8}x^4 - 2x^3\right) \Big|_2^4 - 3^2 = 6.4 + 2.8 - 9 = 0.2;$$

$$\sigma_x = \sqrt{0.2} \approx 0.45 \quad f'(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}; \quad -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} = 0; \quad x = 3; \quad M_o(X) = 3;$$

Т. к. кривая распределения – парабола симметричная относительно прямой $x = 3$, то $M_e(X) = 3$.

Пример 2. Время X безотказной работы элемента распределено по показательному закону с параметром $\lambda = 0,2$ (интенсивность отказов). Найти среднее время безотказной работы элемента, среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно не менее 4 лет, но не более 10.

Решение:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 0,2e^{-0,2x}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

$$M_x = \frac{1}{0,2} = 5, \quad D_x = \frac{1}{0,2^2} = 25, \quad \sigma_x = \frac{1}{0,2} = 5;$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1 - e^{-0,2x}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

$$P(4 < X < 10) = F(10) - F(4) = e^{-0,24} - e^{-0,210} = e^{-0,8} - e^{-2} = \frac{1}{\sqrt[5]{e^4}} - \frac{1}{e^2} \approx 0,45 - 0,16 = 0,29.$$

Пример 3. Средний вес пойманной рыбы составляет 375 г., а среднее квадратическое отклонение 25 г. Считая вес пойманной рыбы НСВ X - распределенной по нормальному закону, найти вероятность того, что вес очередной пойманной рыбы будет не менее 300, но и не более 420 граммов. Найти вероятность того, что вес очередной пойманной рыбы будет отличаться от среднего веса не более чем на 0,3.

Решение:

$$P(300 < X < 420) = \Phi\left(\frac{420-375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300-375}{25}\right) = \Phi(1,8) + \Phi(3) = 0,4641 + 0,49865 = 0,96275$$

$$P(|X - 375| < 0,3) = 2\Phi\left(\frac{0,3}{25}\right) = 0,008.$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $m = 375$ г и $\sigma = 25$ г. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет:

- 4) от 300 до 425 г;
- 5) не более 450 г;
- 6) больше 300 г.

Ответ: 1) 0,9759; 2) 0,9987; 3) 0,9987.

2. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону распределения с параметром $\sigma = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей 15 мм.

Ответ: 0,866386.

3. Станок-автомат изготавливает валики, контролируя их диаметры X . Считая, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m = 10$ мм и $\sigma = 0,1$ мм, найти интервал, в котором с вероятностью 0,95 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

Ответ: (9,804; 10,196).

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. В результате проверки точности работы прибора установлено, что 80% ошибок не вышло за пределы ± 20 мм, а остальные ошибки вышли за эти пределы. Определите среднее квадратическое отклонение ошибок прибора, если известно, что систематических ошибок прибор не дает, а случайные ошибки распределены по нормальному закону.

Ответ: 15,6.

2. Случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ мм. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет X в результате испытания.

Ответ: 30 мм.

3. На станке изготавливаются втулки. Длина l втулки представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, которая имеет среднее значение $l_{cp} = 20$ см и дисперсию $D(l) = 0,04$ см². Найти вероятность того, что длина втулки заключена между 19,7 и 20,3 см, т.е. отклонение в ту или иную сторону не превзойдет 0,3 см. Какую длину можно гарантировать с вероятностью $p = 0,95$?

Ответ: 1) 0,87; 2) 20 ± 4 см.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 11

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Цель: изучить закон больших чисел.

Теоретическая часть

Терма 1. (неравенство Маркова)

Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения, то для любого числа $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство:

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

Для события $\{X \leq \varepsilon\}$, противоположного событию $\{X > \varepsilon\}$, неравенство Маркова может быть записано в виде: $P(X \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}$

Теорема 2. (неравенство Чебышева)

Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше любого числа $\varepsilon > 0$, не меньше чем $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, т.е.

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Для события $\{|X - M(X)| \geq \varepsilon\}$, противоположного событию $\{|X - M(X)| < \varepsilon\}$, неравенство Чебышева может быть записано в виде:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема 3. (теорема Чебышева) Если $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ - попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства:

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Замечание 1. Теорема Чебышева утверждает, что если рассматривается достаточно большое число случайных величин, имеющих равномерно ограниченные дисперсии и являющиеся независимыми, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.

Теорема 4. (частный случай теоремы Чебышева)

Если $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ - попарно независимые случайные величины, имеющие одинаковые математические ожидания a , и их дисперсии равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства:

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Ответить на контрольные вопросы:

1. Какие случайные величины описывает нормальный закон распределения? (непрерывные)
2. Какая случайная величина называется непрерывной?
3. Записать дифференциальную функцию нормального распределения.
4. Записать интегральную функцию нормального распределения.
5. Неравенство Маркова.
6. Неравенство Чебышёва.

Примеры решения задач

Задача. Среднее количество вызовов, поступающих на коммутатор завода в течение часа, равно 300. Оценить вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов на коммутатор: а) превысит 400; б) будет не более 500.

Решение:

По условию $M(X) = 300$.

а) Воспользуемся формулой (неравенством Маркова) $P(x > A) \leq \frac{M(X)}{A}$.

Тогда $P(x > 400) \leq \frac{300}{400} = 0,75$, т.е. вероятность того, что число вызовов превысит 400, будет не более 0,75.

б) воспользуемся неравенством Маркова в альтернативном виде: $P(x \leq A) \geq 1 - \frac{M(X)}{A}$.

Тогда $P(x \leq 500) \geq 1 - \frac{300}{500} = 0,4$, т.е. вероятность того, что число вызовов не более 500, будет не менее 0,4.

Задача. Количество потребляемой за сутки электроэнергии предприятием является случайной величиной с математическим ожиданием 6 мегаватт при среднем квадратическом отклонении 1,5 мегаватта. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки потребление электроэнергии окажется более 12 мегаватт.

Решение. Используем неравенство Маркова: $P(X > A) \leq \frac{M(X)}{A}$.

Подставляем для X - количества потребляемой за сутки электроэнергии предприятием значения $M(X) = 6$, $A = 12$. Получаем:

$$P(X > 12) \leq \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ответ: вероятность не более 0,5.

Неравенство Чебышева. Пример решения задачи

Задача. В 1600 испытаниях Бернулли вероятность успеха в каждом испытании равна 0,3. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что разница между числом успехов в этих испытаниях и средним числом успехов будет меньше 50.

Решение. Число успехов ξ в этих испытаниях распределено по закону Бернулли, поэтому среднее число успехов равно $M\xi = np = 1600 \cdot 0,3 = 480$, а дисперсия $D\xi = np(1-p) = 1600 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 336$. Тогда в силу неравенства Чебышева

$P(|\xi - M\xi| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$, подставляя наши данные, имеем:

$$P(|\xi - 480| < 50) \geq 1 - \frac{336}{50^2} = 1 - \frac{336}{2500} = 0,8656.$$

Ответ: вероятность не меньше 0,8656.

Закон больших чисел и теорема Чебышева

Пример решения задачи

Задача. Дана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$

Случайная величина X_k может принимать значения: $-n\alpha, 0, n\alpha$ ($\alpha > 0, \alpha = \text{const}$) с

вероятностями, соответственно равными: $\frac{1}{2n^2}; 1 - \frac{1}{n^2}; \frac{1}{2n^2}$.

Применим ли к этой последовательности закон больших чисел?

Решение. Для того чтобы к последовательности случайных величин была применима теорема Чебышева, достаточно, чтобы эти величины были попарно независимы, имели конечные математические ожидания и равномерно ограниченные дисперсии.

Поскольку случайные величины независимы, они попарно независимы, то есть первое требование выполняется.

Проверим, выполняется ли требование конечности математического ожидания:

$$M(X_n) = -n\alpha \frac{1}{2n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n\alpha \frac{1}{2n^2} = 0.$$

Да, математические ожидания ограничены.

Исследуем дисперсии.

$$D(X_n) = (-n\alpha)^2 \frac{1}{2n^2} + 0^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + (n\alpha)^2 \frac{1}{2n^2} = \frac{\alpha^2 n^2}{2n^2} + \frac{\alpha^2 n^2}{2n^2} = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2} = \alpha^2.$$

Дисперсии ограничены сверху $D(X_n) \leq \alpha^2$.

Так как все требования выполнены, закон больших чисел применим.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1. Средняя температура воздуха в июле в данной местности 20°C . Оценить вероятность того, что в июле следующего года средняя температура воздуха будет:

- а) не более 15°C ;
- б) более 20°C .

Задача 2. В 1600 испытаниях Бернулли вероятность успеха в каждом испытании равна 0,3. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что разница между числом успехов в этих испытаниях и средним числом успехов будет меньше 50.

Задача 3. Генератор обеспечивает выходное напряжение, которое может отклоняться от номинального на значение, не превышающее 1 В, с вероятностью 0,95. Какие значения дисперсии выходного напряжения можно ожидать?

Задача 4. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа

каждого элемента за время T равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется меньше двух.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 12

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Цель: изучить основы математической статистики.

Знать: понятие вариационного ряда, статистической функции распределения, полигона и гистограммы.

Уметь: решать задачи на нахождение генеральной и выборочной средней, генеральной и выборочной дисперсии, доверительных интервалов.

Владеть: методами решения задач на применение основных правил и законов математической статистики.

Решение типовых задач

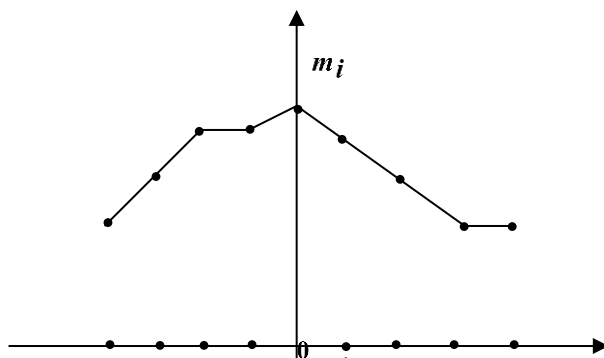
Задача 1. Произведено 20 наблюдений случайной величины (отклонение длины детали от проектной) и получен ряд значений, записанных в порядке наблюдения: 0, 1, -1, 2, 1, 0, -1, -2, 0, -3, -2, -1, 3, -4, 2, -2, -3, 4.

Составить вариационный ряд распределения частот, относительных частот, построить полигон признака.

Решение:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
1	2	3	3	4	3	2	1	1
$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

Полигон:



Задача 2. Для определения измерительного прибора была проведена серия независимых измерений эталонной величины. Получен первоначальный ряд признака.

16,7	21,2	17,5	12,0	16,1
20,8	16,9	14,8	12,5	17,4
20,9	18,2	16,8	13,0	16,8
14,5	20,0	17,9	14,1	15,8

Сопоставить ряд распределения частот, относительных частот. Построить гистограмму частот.

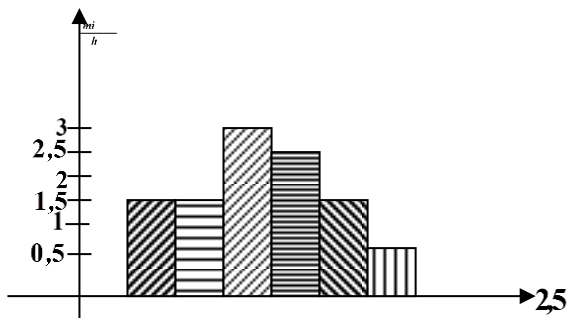
Решение:

$x_{i-1} \div x_i$	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 22
--------------------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

mi	3	3	6	4	3	1
$\frac{mi}{n} = P_i^x$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

Плотность частоты:

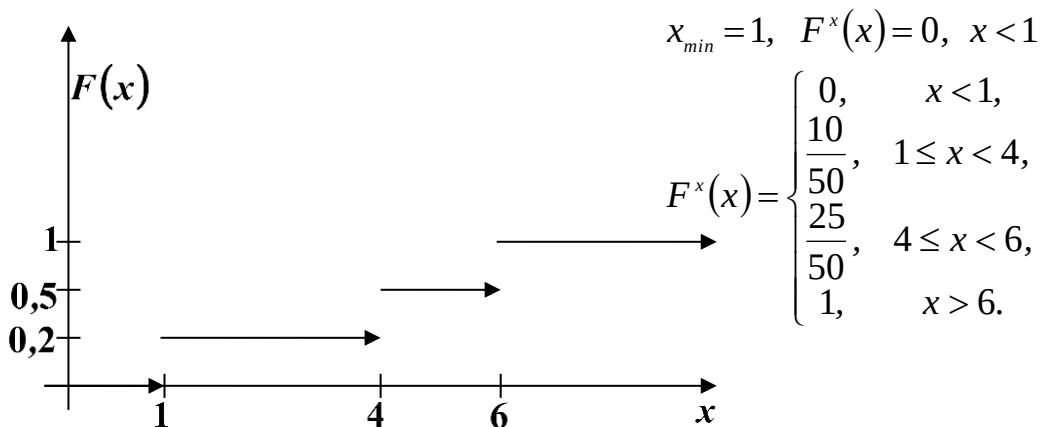
$x_{i-1} \div x_i$	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 22
mi/h	3/2	3/2	6/2	4/2		1/2



Задача 3. Найти функцию распределения по данному распределению выборки.

x_i	1	4	6
m_i	10	15	25

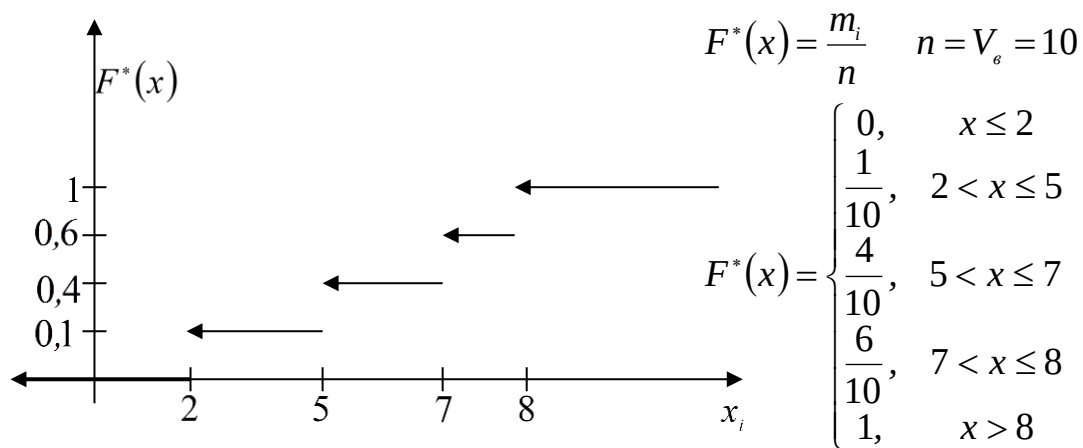
Решение: найдем $n = 10 + 15 + 25 = 50$,



Задача 4. Найти эмпирическую функцию распределения выборки. Построить график. Найти среднее значение и дисперсию статистического распределения.

x_i	2	5	7	8
m_i	1	3	2	4

Решение:



$$M_{\epsilon} = \bar{x}_{\epsilon} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{n} = \frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4}{10} = 6,3$$

$$D_{\epsilon} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_{\epsilon})^2 m_i}{n} = M_{\epsilon}(x^2) - [M_{\epsilon}(x)]^2 = 43,3 - 39,69 \approx 3,6$$

Задача 5. Пусть генеральная совокупность задана таблицей. Найти генеральную среднюю и генеральную дисперсию.

x_i	1	3	5
n_i	10	20	10

Решение:

$$n = 10 + 20 + 10 = 40. \quad \bar{x}_{\epsilon} = \frac{10 + 60 + 50}{40} = 3; \quad D_{\epsilon} = \frac{(1-3)^2 \cdot 10 + (3-3)^2 \cdot 20 + (5-3)^2 \cdot 10}{40} = 2$$

Задача 6. Найти методом произведений выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объема $n=100$

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4

Решение:

Для нахождения S_1 и S_2 надо составить следующую расчетную таблицу. Выберем $a = x_3 = 16$, т. к. частота у этого числа наибольшая.

$\Delta x = h = 2$ (т. е. 14-12, 16-14, и т. д.)

x_i	n_i	a_i	$a_i n_i$	$a_i^2 n_i$
12	5	-2	-10	20
14	15	-1	-15	15
16	50	0	0	0
18	16	1	16	16
20	10	2	20	40
22	4	3	12	36

$$n=100 \quad S_1=23; \quad S_2=127$$

$$\bar{x} = \frac{h}{n} \cdot S_1 + a = \frac{2}{100} \cdot 23 + 16 \approx 16.46$$

$$\sigma = \frac{h}{n} \sqrt{S_2 - \frac{S_1^2}{n}} = \frac{2}{100} \sqrt{127 - \frac{529}{100}} = \frac{2}{100} \sqrt{127 - \frac{529}{100}} = \frac{2}{100} \cdot 11,05 \approx 0,221$$

В ряде задач требуется не только находить $\bar{x}_e, D_e, D_z, \sigma_e, \sigma_z$, но определять точность и надежность полученной оценки. Точность определяется доверительным интервалом, а надежность доверительной вероятностью.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

- По данным выборки построить эмпирическую функцию распределения и полигон относительных частот

x_i	23	25	26	28
n_i	8	7	6	9

- По данным выборки построить эмпирическую функцию распределения и гистограмму относительных частот

$x_i < X \leq x_{i+1}$	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)
n_i	5	8	16	12	9

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №13

ТОЧЕЧНАЯ И ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКИ, ТОЧНОСТЬ И НАДЕЖНОСТЬ ОЦЕНКИ, ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ.

Цель: изучить основы математической статистики: понятия точечная и интервальная оценки, точность и надежность оценки, доверительный интервал.

Решение типовых задач

Задача 1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0,95$ неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если даны генеральное среднее $\sigma = 25$, выборочная средняя $\bar{x}_g = 14$ и ее объем выборки $n = 25$.

Решение:

Воспользуемся формулой: $\bar{x}_g - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_g + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sigma$ - точность оценки, n -

объем выборки, t - значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$

Найдем t . $2\Phi(t) = \gamma$; $\Phi(t) = 0,475$; по таблице $t = 1,96$

$$14 - 1,96 \cdot \frac{5}{5} < a < 14 + 1,96 \cdot \frac{5}{5}$$

$$12,04 < a < 15,96;$$

Задача 2. Дана таблица, состоящая из 100 значений. Составить ряд распределения, определить доверительные интервалы ряда. $\gamma = 0,95$

89	79	94	95	86	81	83	88	84	94
91	74	96	86	67	89	73	92	85	82
90	92	85	82	83	93	89	82	85	81
64	88	82	90	76	70	91	92	87	90
80	75	96	94	63	95	87	74	95	91
90	80	80	79	84	86	93	87	83	92
92	76	81	85	87	83	71	86	94	86
74	81	78	91	77	75	92	80	78	83
90	78	79	90	79	85	86	94	86	91
73	80	86	93	77	82	77	103	96	97

Решение:

Найдем $x_{\min} = 63$; $x_{\max} = 103$, размах выборки $R = x_{\max} - x_{\min} = 103 - 63 = 40$

$$K \leq 5 \lg n \leq 5 \lg 100 \leq 7; K = 7$$

$$h = \frac{40}{7} \approx 5,71 \approx 6 - \text{шаг выборки}$$

$$a_n = 63 - \frac{h}{2} = 63 - 3 = 60 - \text{начало}$$

$$b_k = 103 + \frac{h}{2} = 103 + 3 = 106 - \text{конец}$$

$x_{i-1} \div x$	60÷66	66÷72	72÷78	78÷84	84÷90	90÷96	96÷102
n_i	2	3	15	24	28	26	2

Найдем $\bar{x}_g$ - среднее значение интервала

$$\bar{x}_g = \frac{\sum \bar{x}_i n_i}{n} = \frac{63 \cdot 2 + 69 \cdot 3 + 75 \cdot 15 + 81 \cdot 24 + 87 \cdot 28 + 93 \cdot 26 + 99 \cdot 2}{100} = \frac{8454}{100} = 84,54 \approx 85$$

$$D_g = \frac{\sum n_i (\bar{x}_i - \bar{x}_g)^2}{n} = \frac{2 \cdot (63 - 85)^2 + 3 \cdot (69 - 85)^2 + 15 \cdot (75 - 85)^2 + 24 \cdot (81 - 85)^2 + 28 \cdot (87 - 85)^2 + 26 \cdot (93 - 85)^2 + 2 \cdot (99 - 85)^2}{100} = \frac{5788}{100} = 57,88$$

$$\sigma_g = \sqrt{D_g} \approx 7,6 \approx 8$$

Определим доверительные интервалы

$$\bar{x}_g - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_g + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};$$

Найдем t . $2\Phi(t) = \gamma$; $\Phi(t) = 0,475$; по таблице $t = 1,96$

$$85 - 1,96 \cdot \frac{8}{10} < a < 85 + 1,96 \cdot \frac{8}{10}$$

$$85 - 1,568 < a < 85 + 1,568$$

$$83,432 < a < 86,568$$

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найти несмещенную оценку математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности по данным выборки

x_i	-6	-2	3	6
n_i	12	14	16	8

2. По данным выборки определить доверительный интервал (с надежностью $\gamma = 0,95$) математического ожидания. Считать распределение параметра нормальным, а σ - неизвестным

0,67;0,33;0,40;0,30;0,40;0,60;0,11;0,40;0,50;0,30;0,01;
0,30;0,22;0,60;0,40;0,77;0,70;0,70;0,60;0,43;0,40;0,33;
0,40;0,14;0,63;0,20;0,60;0,40;0,60;0,44.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №14

СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Цель: уметь строить законы распределения для системы 2-х дискретных случайных величин .

Ответить на контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение двумерной случайной величины и дайте её геометрическую интерпретацию.
2. Приведите примеры двумерных величин.
3. Как определяется закон распределения системы 2-х случайных
4. величин?
5. Как, зная закон распределения двумерной случайной величины найти законы распределения каждой из составляющих?
6. Каков геометрический смысл функции распределения двумерной случайной величины?
7. Сформулируйте определение плотности распределения системы 2-х случайных величин.
8. Как по функции $F(x; y)$ отыскать плотность распределения $f(x; y)$?
9. Запишите условия согласованности для любой двумерной случайной величины через функции распределения?

1. Решение задач по теме занятия

Задача 1. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины

	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,1	0,3	0,05

Найти законы распределения составляющих X и Y .

Решение

Возможными значениями X являются $x_1 = 4$ и $x_2 = 5$. Событие $X = 1$ равно сумме попарно несовместных событий $(X = 4) (Y = 3)$, $(X = 4) (Y = 10)$, $(X = 4) (Y = 12)$.

Используем формулы согласованности. Получим:

$$P_1 = P(X = 4) = P_{11} + P_{12} + P_{13} = 0,17 + 0,13 + 0,25 = 0,55,$$

$$P_2 = P(X = 5) = P_{21} + P_{22} + P_{23} = 0,1 + 0,3 + 0,05 = 0,45.$$

И ряд распределения X имеет вид

X	4	5
P	0,55	0,45

Аналогично:

$$g_1 = P(Y = 3) = P_{11} + P_{21} = 0,17 + 0,1 = 0,27 ,$$

$$g_2 = P(Y = 10) = P_{12} + P_{22} = 0,13 + 0,3 = 0,43 ,$$

$$g_3 = P(Y = 12) = P_{13} + P_{23} = 0,25 + 0,05 = 0,3 .$$

Ряд распределения Y имеет вид

Y	3	10	12
P	0,27	0,43	0,3

Задача 2. По двум телеизмерительным каналам независимо передано два сообщения с одним и тем же числом знаков $???? = 1$. Вероятность искажения знака в

первом канале $p_1 = 0,1$, а во втором - $p_2 = 0,05$.

Пусть X - число искажений знаков в первом канале, Y - во втором.
Составить таблицу распределения двумерной случайной величины (X, Y) .

Решение

$$X = \begin{cases} 1, & \text{знак искажен в первом канале} \\ 0, & \text{знак не искажен} \end{cases},$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{знак искажен во втором канале} \\ 0, & \text{знак не искажен} \end{cases}.$$

Совместное распределение определяется вероятностями:

$$P_{11} = P(X = 0, Y = 0) = 0,9 \cdot 0,95 = 0,855,$$

$$P_{12} = P(X = 1, Y = 0) = 0,95 \cdot 0,1 = 0,095,$$

$$P_{21} = P(X = 0, Y = 1) = 0,9 \cdot 0,05 = 0,045,$$

$$P_{22} = P(X = 1, Y = 1) = 0,1 \cdot 0,05 = 0,005.$$

По этим результатам строим таблицу распределения (X, Y)

	0	1
0	0,855	0,095
1	0,045	0,005

Проверка $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

Задача 3. Дана: $F(x, y) = 1 - x - ye^{\frac{x}{y}}$.

Найти: $P\left(x < 0, y < \frac{1}{3}\right)$.

Решение

По определению

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) \Rightarrow P\left(x < 0, y < \frac{1}{3}\right) = F\left(0; \frac{1}{3}\right) = 1 - 0 - \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{0}{1/3}} = \frac{2}{3}. \quad \text{Задача}$$

3. Дана: $F(x, y) = 1 - x - ye^{\frac{x}{y}}$.

Найти: $P\left(x < 0, y < \frac{1}{3}\right)$.

Решение

По определению

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) \Rightarrow P\left(x < 0, y < \frac{1}{3}\right) = F\left(0; \frac{1}{3}\right) = 1 - 0 - \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{0}{1/3}} = \frac{2}{3}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №15

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Цель: уметь находить интегральную и дифференциальную функции распределения системы 2-х случайных величин, ознакомиться с условной вероятностью и с понятиями зависимости и независимости случайных величин.

Ответить на контрольные вопросы:

1. Интегральная функция распределения двум. Случайных величин. Свойства.
2. Плотность распределения системы 2-х случайных величин.
3. Независимые и зависимые системы случайных величин.

Решение задач по теме занятия:

Задача № 1. Найти законы распределения составляющих дискретной случайной двумерной величины, заданной законом распределения

$y \backslash X$	$x_1 = 0,1$	$x_2 = 0,2$	$x_3 = 0,3$
$y_1 = 1$	0,12	0,3	0,2
$y_2 = 2$	0,2	0,16	0,02

Решение.

1) Сложить вероятности по столбикам

$$P(x = 0,1) = 0,12 + 0,2 = 0,32$$

$$P(x = 0,2) = 0,3 + 0,16 = 0,46$$

$$P(x = 3) = 0,2 + 0,02 = 0,22$$

x	0,1	0,2	0,3
P	0,32	0,46	0,22

$$\sum p_i = 1.$$

2) Сложить вероятности по строкам

$$P(y = 1) = 0,12 + 0,3 + 0,2 = 0,62$$

$$P(y = 2) = 0,2 + 0,16 + 0,02 = 0,38$$

x	1	2
P	0,62	0,38

$$\sum p_i = 1.$$

Задача № 2. Дефекты партии радиодеталей классифицируются по двум признакам A и B .

Выбирается наудачу одна деталь. Пусть случайная величина X - число деталей с дефектом A ; Y - с дефектом B . Статистическое обследование дает следующую таблицу распределения двумерной случайной величины (x, y)

$X \backslash Y$	0	1
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Найти r_{xy} .

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (x_i - M(x))(y_j - M(y))P_{ij}}{\sqrt{D(x)}\sqrt{D(y)}}$$

Найдем $\mu(x), \mu(y), D(x), D(y)$.

$$\mu(x) = 2 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\mu(y) = \frac{3}{8} = \mu(y^2)$$

$$D(x) = \mu(x^2) - [\mu(x)]^2$$

$$\mu(x^2) = 4 \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = \frac{21}{4}$$

$$[\mu(x)]^2 = \frac{81}{16}$$

$$D(x) = \frac{21}{4} - \frac{81}{16} = \frac{3}{16}$$

$$D(y) = M(y^2) - M^2(y) = \frac{3^8}{8} - \frac{9}{64} = \frac{24-9}{64} = \frac{15}{64}.$$

$$\sigma(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}; \sigma(y) = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

<i>x</i>	2	3
<i>P</i>	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

<i>x</i>	0	1
<i>P</i>	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$

$$\mu_{xy} = \mu(xy) - M(x)M(y)$$

$$M(xy) = 0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{4} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\mu_{xy} = \frac{7^4}{8} - \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{28-27}{32} = \frac{1}{32}$$

$$r_{xy} = \frac{1}{32} : \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} \right) = \frac{32}{32\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 5} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \approx 0,149.$$

Задача № 3. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины

<i>y</i> \ <i>X</i>	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти $r_{xy}; F(x); F(y)$.

$$\mu_{xy} = \mu(xy) - M(x)M(y)$$

$$M(xy) = 3 \cdot 4 \cdot 0,17 + 10 \cdot 4 \cdot 0,13 + 12 \cdot 4 \cdot 0,25 + 3 \cdot 5 \cdot 0,1 + 10 \cdot 5 \cdot 0,3 + 12 \cdot 5 \cdot 0,05 = 12 \cdot 0,17 + 40 \cdot 0,13 + 12 + 1,5 + 15 + 12 \cdot 0,25 = 2,04 + 5,2 + 28,5 + 3 = 38,74$$

$$\mu_{xy} = 38,74 - 38,76 = -0,02$$

$$r_{xy} = \frac{-0,02}{3,57 \cdot 0,5} = 0,112.$$

Найдем законы распределения составляющих

x	3	10	12
P	0,27	0,43	0,45

y	4	5
P	0,55	0,45

$$\mu(x) = 3 \cdot 0,27 + 10 \cdot 0,43 + 12 \cdot 0,3 = 0,81 + 4,3 + 3,6 = 8,71$$

$$\mu(y) = 4 \cdot 0,55 + 5 \cdot 0,45 = 2,2 + 2,25 = 4,45$$

$$D(x) = \mu(x^2) - \mu^2(x)$$

$$\mu(x^2) = 9 \cdot 0,27 + 100 \cdot 0,43 + 144 \cdot 0,3 = 2,43 + 43,2 = 88,63$$

$$D(x) = 88,63 - 75,86 = 12,77$$

$$\mu(y^2) = 16 \cdot 0,55 + 25 \cdot 0,45 = 8,8 + 11,25 = 20,05$$

$$D(y) = 20,05 - 19,86 = 0,19$$

$$\sigma_x = 3,57; \sigma_y = 0,5$$

$$F(x) - ?$$

$$x \leq 3 \quad F(x) = 0.$$

$$3 < x \leq 10 \quad F(x) = P(x < 10) = P(x = 3) = 0,27$$

$$10 < x \leq 12 \quad F(x) = P(x < 12) = P(x = 3) + P(x = 10) = 0,27 + 0,43 = 0,7$$

$$12 < x \leq \infty \quad F(x) = P(x < \infty) = P(x = 3) + P(x = 10) + P(x = 12) = 1.$$

$$F(y) - ?$$

$$y \leq 4 \quad F(y) = 0.$$

$$4 < y \leq 5 \quad F(y) = P(y < 5) = P(y = 4) = 0,55$$

$$5 < y < \infty \quad F(y) = P(y < \infty) = P(y = 4) + P(y = 5) = 1.$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ

Цель: изучить основы теории линейной корреляции: понятие выборочный коэффициент корреляции, выборочное уравнение регрессии.

Решение типовых задач

Задача 1.

Товaroоборот малого предприятия дается рядом распределения.

Составить уравнение линии регрессии товарoоборота предприятия. Определить каким ожидается товарoоборот на 7, 10 год работы предприятия.

X (год)	1	2	3	4	5
y (тыс. руб. товарoоборот)	1	2	2	3	3

Решение:

Для решения задачи необходимы формулы:

$$\bar{y}_x = kx + b$$

$\bar{y}_x - \bar{y} = k(x - \bar{x})$ - уравнения линии регрессии.

$$k = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{x^2 - (\bar{x})^2}; \quad b = \bar{y} - k\bar{x} \quad (1)$$

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \text{ - коэффициент корреляции.}$$

Заполним расчетную таблицу:

X (год)	y (тыс. руб. товарoоборот)	xy	x²	y²
1	1	1	1	1
2	2	4	4	4
3	2	6	9	4
4	3	12	16	9
5	3	15	25	9
15	11	38	55	27
Среднее значение				
$\bar{x} = 3$	$\bar{y} = 2,2$	$\overline{xy} = 7,6$	$\bar{x}^2 = 11$	$\bar{y}^2 = 5,4$

2. Вычислим: k ; b ; r .

$$k = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}, \quad b = \bar{y} - k\bar{x}, \text{ где}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$

$$\bar{x} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{1+2+2+3+3}{5} = 2,2$$

$$\bar{x}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}{5} = 11$$

$$\bar{x}^2 = 11$$

$$\overline{xy} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{n} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3}{5} = \frac{38}{5} = 7,6$$

$$\overline{xy} = 7,6$$

Вычислим параметры уравнения линии регрессии **k** и **b** :

$$k = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2} = \frac{7,6 - 3 \cdot 2,2}{11 - 3^2} = 0,5 \quad k = 0,5$$

$$b = \bar{y} - k\bar{x}; \quad b = 2,2 - 0,5 \cdot 3 = 0,7$$

$$\bar{y}_x = 0,5x + 0,7$$

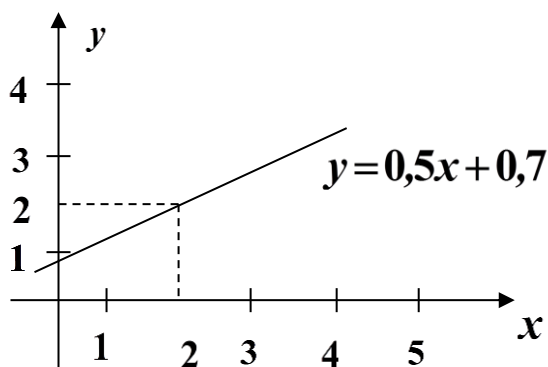
3. Уравнение линейной регрессии

$$\bar{y}_x - \bar{y} = k(x - \bar{x})$$

$$\bar{y}_x - 2,2 = 0,5(x - 3)$$

$$\bar{y}_x = 0,5x + 0,7$$

Строим график



По условию * - эмпирические точки

• - теоретические точки.

4. Определить каким ожидается товарооборот

а) на 7 год, т.е. **x = 7**

$$y_7 = 0,5 \cdot 7 + 0,7 = 4,2 \text{ (тыс. руб.)}$$

б) на 10 год,

$$y_{10} = 0,5 \cdot 10 + 0,7 = 5,7 \text{ (тыс. руб.)}$$

5. Определим коэффициент корреляции

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \text{ где } \sigma_x = \sqrt{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{11 - 3^2} = \sqrt{2} \approx 1,41$$

$$\sigma_y = \sqrt{\bar{y}^2 - (\bar{y})^2} \approx \sqrt{5,4 - 2,2^2} = \sqrt{0,56} \approx \sqrt{0,75}$$

$$r = \frac{7,6 - 3,22}{1,41 \cdot 0,75} \approx 0,98; \quad r \rightarrow 1$$

Пример № 2 (способ 1 не сгруппированная выборка)

Распределение случайных величин X и Y характеризуется следующей корреляционной таблицей:

$X \backslash Y$	10	15	20	25	30	35	m_x
50	2	2					4
60	2	4	5	6	4		21
70		2	7	12	10	4	35
80				10	10	6	26
90				8		6	14
m_y	4	8	12	36	24	16	$n = 100$

По данным таблицы определить коэффициент корреляции и составить уравнение регрессии.

Решение:

Сначала определим коэффициент корреляции по формуле

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1)$$

где $\bar{x}, \bar{y}$ - средняя арифметическая значений величин X и Y соответственно:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i m_{xi}}{\sum_i m_{xi}} \quad \bar{y} = \frac{\sum_j y_j m_{yj}}{\sum_j m_{yj}}$$

σ_x, σ_y - среднее квадратическое отклонение величин X и Y соответственно

$$\sigma_x = \sqrt{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}; \quad \sigma_y = \sqrt{\bar{y}^2 - (\bar{y})^2}$$

$\bar{x}^2 \cdot \bar{y}^2$ - среднее арифметическое квадратов значений в X и Y

$$\bar{x}^2 = \frac{\sum_i x_i^2 m_{xi}}{\sum_i m_{xi}}; \quad \bar{y}^2 = \frac{\sum_j y_j^2 m_{yj}}{\sum_j m_{yj}}$$

$\overline{xy}$ - среднее арифметическое произведений значений величины X на соответствующие значения величины Y .

$$\overline{xy} = \frac{\sum_i x_i \bar{y}_{xi} m_{xi}}{\sum_i m_{xi}} = \frac{\sum_j y_j \bar{x}_{yj} m_{yj}}{\sum_j m_{yj}}$$

здесь $\bar{y}_{xi}$ - условная средняя значений величины Y соответствующая значению X величины X

$$\bar{y}_{xi} = \frac{y_1 m_{i1} + y_2 m_{i2} + \dots + y_e m_{ie}}{m_{i1} + m_{i2} + \dots + m_{ie}} = \frac{\sum_j y_j m_{ij}}{m_{xi}}$$

Отсюда следует, что

$$\bar{y}_{xi} m_{xi} = y_1 m_{i1} + y_2 m_{i2} + \dots + y_e m_{ie} = \sum_j y_j m_{ij}$$

$$x_i \bar{y}_{xi} m_{xi} - \text{произведение } x_i \text{ на } \bar{y}_{xi} m_{xi} \quad (2)$$

Аналогично

$$\bar{x}_{yj} = \frac{x_1 m_{1j} + x_2 m_{2j} + \dots + x_k m_{kj}}{m_{yj}} = \frac{\sum_i x_i m_{ij}}{m_{yj}}$$

Отсюда

$$\bar{x}_{yj} m_{yj} = x_1 m_{1j} + x_2 m_{2j} + \dots + x_k m_{kj} = \sum_i x_i m_{ji} \quad (3)$$

Расчеты коэффициента r начнем с вычисления произведений $\bar{y}_{xi} m_{xi}$ по формуле (2), для каждого x_i и вычисления произведений $\bar{x}_{yj} m_{yj}$ по формуле (3) для каждого y_j .

а) Вычисления $\bar{y}_{xi} m_{xi}$:

Для

$$\begin{aligned} x_1 = 50 & \quad \bar{y}_{x_1} m_{x_1} = 10 \cdot 2 + 15 \cdot 2 = 50 \\ x_2 = 60 & \quad \bar{y}_{x_2} m_{x_2} = 10 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 25 \cdot 6 + 30 \cdot 4 = 450 \\ x_3 = 70 & \quad \bar{y}_{x_3} m_{x_3} = 15 \cdot 2 + 20 \cdot 7 + 25 \cdot 12 + 30 \cdot 10 + 35 \cdot 4 = 910 \\ x_4 = 80 & \quad \bar{y}_{x_4} m_{x_4} = 25 \cdot 10 + 30 \cdot 10 + 35 \cdot 6 = 760 \\ x_5 = 90 & \quad \bar{y}_{x_5} m_{x_5} = 25 \cdot 8 + 35 \cdot 6 = 410 \end{aligned}$$

б) Вычисление $\bar{x}_{yj} m_{yj}$:

$$\begin{aligned} y_1 = 10 & \quad \bar{x}_{y_1} m_{y_1} = 50 \cdot 2 + 60 \cdot 2 = 220 \\ y_2 = 15 & \quad \bar{x}_{y_2} m_{y_2} = 50 \cdot 2 + 60 \cdot 4 + 70 \cdot 2 = 480 \\ y_3 = 20 & \quad \bar{x}_{y_3} m_{y_3} = 60 \cdot 5 + 70 \cdot 7 = 790 \\ y_4 = 25 & \quad \bar{x}_{y_4} m_{y_4} = 60 \cdot 6 + 70 \cdot 12 + 80 \cdot 10 + 90 \cdot 8 = 2720 \\ y_5 = 30 & \quad \bar{x}_{y_5} m_{y_5} = 60 \cdot 4 + 70 \cdot 10 + 80 \cdot 10 = 1740 \\ y_6 = 35 & \quad \bar{x}_{y_6} m_{y_6} = 70 \cdot 4 + 80 \cdot 6 + 90 \cdot 6 = 1300 \end{aligned}$$

Дальнейшие расчеты полезно оформить в виде следующих таблиц.

x_i	m_{xi}	$x_i m_{xi}$	$x_i^2 m_{xi}$	$\bar{y}_{xi} m_{xi}$	$x_i \bar{y}_{xi} m_{xi}$
50	4	200	10000	50	2500
60	21	1260	75600	450	2700
70	35	2450	171500	910	69700
80	26	2080	166400	760	60800
90	14	1260	113400	410	36900
Итого:					
	$N = 100$	$\sum x_i m_{xi} = 7250$	$\sum = 536900$	$\sum = 2580$	$\sum = 190900$

y_j	m_{yj}	$y_j m_{yj}$	$y_j^2 m_{yj}$	$\bar{x}_{yj} m_{yj}$	$y_j \bar{x}_{yj} m_{yj}$
10	4	40	400	220	2200
15	8	120	1800	480	7200
20	12	240	4800	790	15800
25	36	900	22500	2720	68000
30	24	720	21600	1740	52200
35	16	560	19600	1300	45500
	$N = 100$	$\Sigma = 2580$	$\Sigma = 7070$	$\Sigma = 7250$	$\Sigma = 190900$

Используя значения соответствующих сумм из последней строки обеих таблиц, будем иметь

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i m_{xi}}{\sum_i m_{xi}} = \frac{7250}{100} = 72,5$$

$$\bar{x}^2 = \frac{536900}{100} = 5369,0$$

$$\bar{y} = \frac{2580}{100} = 25,8$$

$$\bar{y}^2 = \frac{70700}{100} = 707$$

$$\overline{xy} = \frac{190900}{100} = 1909$$

$$\bar{x} \bar{y} = 72,5 \cdot 25,8 = 1870,5$$

$$(\bar{x})^2 = (72,5)^2 = 5256,25$$

$$(\bar{y})^2 = (25,8)^2 = 665,64$$

$$\sigma_x = \sqrt{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2} = \sqrt{5369 - 5256,25} = \sqrt{112,75} \approx 10,62$$

$$\sigma_y = \sqrt{\bar{y}^2 - (\bar{y})^2} = \sqrt{707 - 665,64} = \sqrt{41,36} \approx 6,43$$

Найдем коэффициент корреляции

$$r = \frac{1909 - 1870,5}{10,62 \cdot 6,43} = \frac{38,5}{68,29} \approx 0,56$$

Проверим гипотезу существования связи между X и Y

$|r| \sqrt{N-1} = 0,56 \cdot \sqrt{99} = 5,57 > 3$ - связь достаточно обоснована.

Составим уравнения регрессии по формулам

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{y/x} (x - \bar{x})$$

$$\bar{x}_y - \bar{x} = \rho_{x/y} (y - \bar{y})$$

Величины $\bar{x}$ и $\bar{y}$ известны, а коэффициенты регрессии $\rho_{y/x}$ и $\rho_{x/y}$ найдем по следующим

$$\text{формулам } \rho_{y/x} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}; \quad \rho_{x/y} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

Подставляя в эти формулы найденные выше значения величин r , σ_x , σ_y получим:

$$\rho_{y/x} = 0,56 \cdot \frac{6,43}{10,62} \approx 0,34$$

$$\rho_{x/y} = 0,56 \frac{10,62}{6,} \approx 0,92$$

Напишем искомое уравнение регрессии

$$\bar{y}x - 25,8 = 0,34(x - 72,5)$$

$$\bar{x}y - 72,5 = 0,92(y - 25,8)$$

После преобразований получим следующие уравнения регрессии

$$\bar{y}x = 0,34x + 1,15$$

$$\bar{x}y = 0,92y + 48,76$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №17

ВЫБОРОЧНОЕ УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ

Цель: изучить основы теории линейной корреляции: понятие выборочный коэффициент корреляции, выборочное уравнение регрессии.

Решение типовых задач

Задача 1. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии $\bar{Y}$ на $\bar{X}$ по данным пяти наблюдений

x_i	1	1,5	3	4,5	5
y_i	1,25	1,4	1,5	1,75	2,25

Решение:

1) Составим расчетную таблицу

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	1,25	1	1,25	1,5625
1,5	1,4	2,25	2,1	1,96
3	1,5	9	4,5	2,25
4,5	1,75	20,25	7,875	3,0625
5	2,25	25	11,25	5,0625
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 8,15$	$\sum x_i^2 = 57,50$	$\sum x_i y_i = 26,975$	$\sum y_i^2 = 13,8975$

2) Найдем выборочный коэффициент корреляции

Так как пары значений $(x_i; y_i)$ встречаются по одному разу, то формулу для коэффициента корреляции можно упростить

$$r_B = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_{Bx}\sigma_{By}}; \quad \bar{x} = \frac{15}{5} = 3; \quad \bar{y} = \frac{8,15}{5} = 1,63;$$

$$\overline{x^2} = \frac{57,50}{5} = 11,5; \quad \overline{y^2} = \frac{13,8975}{5} = 2,7795;$$

$$\sigma_{Bx} = \sqrt{11,5 - (3)^2} = 1,58; \quad \sigma_{By} = \sqrt{2,7795 - (1,63)^2} = 0,35; \quad r_B = \frac{26,975 - 5 \cdot 3 \cdot 1,63}{5 \cdot 1,58 \cdot 0,35} = 0,9132.$$

3) Найдем уравнение прямой линии регрессии

$$\bar{y}_x - 1,63 = 0,9132 \frac{0,35}{1,58} (x - 3),$$

$$\bar{y}_x = 0,202x + 1,023$$

Задача 2. Выборка представлена в виде корреляционной таблицы. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии $\bar{Y}$ на $\bar{X}$ по данным корреляционной

	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	-	7	-	-	10
120	4	-	2	-	-	3	9
140	-	5	-	10	5	2	22
160	-	-	3	1	2	3	9
n_x	6	6	5	18	7	8	50

Замечание 1. Если данные наблюдений над признаками X и Y заданы в виде корреляционной таблицы с равноотстоящими вариантами, то удобнее перейти к условным вариантам:

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1};$$

$$v_j = \frac{y_j - C_2}{h_2},$$

где C_1 и C_2 - ложные нули вариант X и Y соответственно;

h_1 и h_2 - шаги, т.е. разности между двумя соседними вариантами

X и Y соответственно.

Замечание 2. В случае если был осуществлен переход к условным вариантам, выборочный коэффициент корреляции примет вид

$$r_B = \frac{\sum n_{uv} uv - \bar{u} \bar{v}}{n \sigma_{Bu} \sigma_{Bv}},$$

где величины $\bar{u}, \bar{v}, \sigma_{Bu}, \sigma_{Bv}$ могут быть найдены либо методом произведений (при большом числе данных), либо непосредственно по формулам выборочного среднего и выборочного среднего квадратического отклонения.

Замечание 3. Зная величины $\bar{u}, \bar{v}, \sigma_{Bu}, \sigma_{Bv}$ можно определить входящие в уравнения регрессии величины по формулам

$$\bar{x} = \bar{u} h_1 + C_1,$$

$$\bar{y} = \bar{v} h_2 + C_2,$$

$$\sigma_x = \sigma_u h_1,$$

$$\sigma_y = \sigma_v h_2.$$

Решение:

1) Составим корреляционную таблицу в условных вариантах, с учетом того, что $C_1 = 30$, $C_2 = 120$, $h_1 = 5$, $h_2 = 20$

	-3	-2	-1	0	1	2	n_{v_j}
-1	2	1	-	7	-	-	10
0	4	-	2	-	-	3	9
1	-	5	-	10	5	2	22
2	-	-	3	1	2	3	9
n_{u_i}	6	6	5	18	7	8	$n = 50$

2) Составим расчетную таблицу для нахождения суммы $\sum n_{uv} uv$ следующим образом:

- В каждой клетке, в которой частота $n_{uv} \neq 0$, запишем в правом верхнем углу произведение частоты n_{uv} на варианту u .

- Сложим все числа, записанные в правых верхних углах клеток одной строки и их сумму запишем в клетку этой же строки столбца U .
- Умножим варианту v на U и полученное произведение запишем в последнюю клетку той же строки, в клетку столбца vU .
- Сложим все числа столбца vU и получим сумму $\sum vU$, которая равна искомой сумме.
- Для контроля аналогичные вычисления проведем по столбцам.

	-3	-2	-1	0	1	2	V_j	$\sum = v_j V_j$
-1	2	1	-	7	-	-	-8	8
0	4	-	2	-	-	3	-8	0
1	-	5	-	10	5	2	-1	-1
2	-	-	3	1	2	3	5	10
U_i	-2	4	6	5	9	8	-	$\sum = 17$
$u_i U_i$	6	-8	-6	0	9	16	$\sum = 17$	

Контроль: $\sum u_i U_i = \sum v_j V_j = 17$

3) Найдем $\bar{u}, \bar{v}$

$$\bar{u} = \frac{-3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8}{50} = -0,24$$

$$\bar{v} = \frac{-1 \cdot 10 + 1 \cdot 22 + 2 \cdot 9}{50} = 0,6$$

4) Найдем $\overline{u^2}, \overline{v^2}$

$$\overline{u^2} = \frac{9 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 4 \cdot 8}{50} = 2,44$$

$$\overline{v^2} = \frac{1 \cdot 10 + 1 \cdot 22 + 4 \cdot 9}{50} = 1,36$$

5) Найдем σ_u, σ_v

$$\sigma_u = \sqrt{2,44 - (-0,24)^2} = 1,54$$

$$\sigma_v = \sqrt{1,36 - (0,6)^2} = 1$$

6) Вычислим r_B

$$r_B = \frac{17 - 50 \cdot (-0,24) \cdot 0,6}{50 \cdot 1,54 \cdot 1} = 0,314$$

7) Выполним переход к исходным вариантам

$$\bar{x} = 5 \cdot (-0,24) + 30 = 28,8$$

$$\bar{y} = 20 \cdot 0,6 + 120 = 132$$

$$\sigma_{Bx} = 5 \cdot 1,54 = 7,7$$

$$\sigma_{By} = 20 \cdot 1 = 20$$

8) Найдем уравнение регрессии Y на X

$$\overline{y_x} - 132 = 0,314 \frac{20}{7,7} (x - 28,8)$$

$$\overline{y_x} = 0,8x + 108$$

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найти и построить выборочное уравнение линейной регрессии Y на X и выборочный коэффициент корреляции по данным выборки

X	10	15	20	25	30	30
Y	5	15	25	28	30	31

2. Найти выборочное уравнение линейной регрессии Y на X на основании корреляционной таблицы

	10	15	20	25	30	35
15	6	4	-	-	-	-
25	-	6	8	-	-	-
35	-	-	-	21	2	5
45	-	-	-	4	12	6
55	-	-	-	-	1	5

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ.

Цель: изучить методику проверки статистических гипотез: понятие дисперсий нормальных генеральных совокупностей, исправленной выборочной дисперсии, гипотетической генеральной дисперсии нормальной совокупности.

Решение типовых задач

1. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

На практике необходимость сравнения дисперсий возникает, если требуется сравнить точность приборов, инструментов, методов измерений.

Пусть по независимым выборкам, объемы которых n_1 и n_2 , извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии S_X^2 и S_Y^2 .

Требуется по исправленным выборочным дисперсиям при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$H_0 : D(X) = D(Y).$$

В этом случае в качестве статистического критерия выбирается величина

$$F_{набл} = \frac{S_B^2}{S_M^2}.$$

Значения этого критерия находятся по таблице распределения Фишера – Снедекора.

Рассуждения строятся в зависимости от того, какой вид имеет конкурирующая гипотеза.

Правило 1. Пусть конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) > D(Y)$, если $S_X^2 > S_Y^2$ или $H_1 : D(X) < D(Y)$, если $S_Y^2 > S_X^2$.

1) Вычисляется $F_{набл}$.

2) По таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора, по заданному уровню значимости α и числам степеней свободы $k_1 = n_1 - 1, k_2 = n_2 - 1$ (n_1 - объем выборки с большей исправленной выборочной дисперсией, а n_2 - с меньшей) находится критическая точка $F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$.

3) Если $K_{набл} < K_{кр}$ - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

4) Если $K_{набл} > K_{кр}$ - нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. Пусть конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

Тогда все вычисления и выводы аналогичны правилу 1, с той лишь разницей, критическую точку

$F_{кр}\left(\frac{\alpha}{2}; k_1; k_2\right)$ ищут по уровню значимости вдвое меньшему заданного, т.е. $\frac{\alpha}{2}$.

Задача 1. Срок хранения продукции, изготовленной по технологии А, составил

Срок хранения	x_i	5	6	7
Число единиц продукции	n_i	2	4	4

а изготовленной по технологии В

Срок хранения	y_i	5	6	7	8
Число единиц продукции	m_i	1	8	7	1

Предположительно случайные величины распределены по нормальному закону. Проверить нулевую гипотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ при уровне значимости 0,1.

Решение:

I. Пусть конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

1) Найдем $F_{набл}$

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 4}{10} = 6,2$$

$$\overline{x^2} = \frac{25 \cdot 2 + 36 \cdot 4 + 49 \cdot 4}{10} = 39$$

$$\bar{y} = \frac{5 \cdot 1 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 1}{17} = 6,5$$

$$\overline{y^2} = \frac{25 \cdot 1 + 36 \cdot 8 + 49 \cdot 7 + 64 \cdot 1}{17} = 42,35$$

$$\overline{S_x^2} = \frac{10}{9} (39 - (6,2)^2) = 0,62$$

$$\overline{S_y^2} = \frac{17}{16} (42,35 - (6,5)^2) = 0,11$$

$$F_{набл} = \frac{0,62}{0,11} = 5,64$$

2) Найдем $F_{кр} \left(\frac{\alpha}{2}; k_1; k_2 \right)$

$$\alpha = 0,1$$

$$k_1 = 10 - 1 = 9$$

$$k_2 = 17 - 1 = 16$$

$$F_{кр}(0,05; 9; 16) = 2,54$$

3) Так как $F_{набл} > F_{кр}$, то нулевую гипотезу отвергаем, принимаем конкурирующую.

II. Так как $\overline{S_x^2} > \overline{S_y^2}$, то в качестве конкурирующей гипотезы может быть принята

$$H_1 : D(X) > D(Y)$$

1) Найдем $F_{набл} = 5,64$

2) Найдем $F_{кр}(0,1; 9; 16) = 2,06$

3) Так как $F_{набл} > F_{кр}$, то нулевую гипотезу отвергаем, принимаем конкурирующую.

2. Сравнение исправленной выборочной дисперсии и гипотетической генеральной дисперсии нормальной совокупности.

По выборке объема n найдена исправленная выборочная дисперсия S^2 .

Требуется по исправленной выборочной дисперсии при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что неизвестная генеральная $D(X)$ дисперсия равна гипотетическому (предполагаемому) значению D_0 :

$$H_0 : D(X) = D_0.$$

В этом случае в качестве статистического критерия выбирается величина

$$\chi_{набл}^2 = \frac{(n-1)S^2}{D_0}.$$

Значения этого критерия находятся по таблице распределения χ^2 .

Рассуждения строятся в зависимости от того, какой вид имеет конкурирующая гипотеза.

Правило 1. Пусть конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) > D_0$.

1) Вычисляется $\chi_{набл}^2$.

- 2) По таблице критических точек распределения χ^2 , по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n - 1$ находится критическая точка $\chi_{кр}^2(\alpha; k)$.
- 3) Если $\chi_{набл}^2 < \chi_{кр}^2$ - нет оснований отвергать нулевую гипотезу.
- 4) Если $\chi_{набл}^2 > \chi_{кр}^2$ - нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. Пусть конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) \neq D_0$.

- 1) Находится левая критическая точка $\chi_{лев.кр}^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}; k\right)$.
- 2) Находится правая критическая точка $\chi_{прав.кр}^2\left(\frac{\alpha}{2}; k\right)$.
- 3) Если $\chi_{лев.кр}^2 < \chi_{набл}^2 < \chi_{прав.кр}^2$ - нет оснований отвергать нулевую гипотезу.
- 4) Если $\chi_{набл}^2 < \chi_{лев.кр}^2$ или $\chi_{набл}^2 > \chi_{прав.кр}^2$ - нулевую гипотезу отвергают.

Правило 3. Пусть конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) < D_0$.

- 1) Вычисляется $\chi_{набл}^2$.
- 2) Находится критическая точка $\chi_{кр}^2(1 - \alpha; k)$.
- 3) Если $\chi_{набл}^2 < \chi_{кр}^2$ - нет оснований отвергать нулевую гипотезу.
- 4) Если $\chi_{набл}^2 > \chi_{кр}^2$ - нулевую гипотезу отвергают.

Задача 2.. Точность работы станка-автомата проверяется по дисперсии контролируемого размера изделий, которая не должна превышать 0,1. Взята проба 25 случайных отобранных изделий, причем получены следующие результаты измерений

Размер изделий пробы	x_i	3	3,5	3,8	4,4	4,5
частота	n_i	2	6	9	7	1

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить, обеспечивает ли станок требуемую точность. Решение: Нулевая гипотеза имеет вид $H_0 : D(X) = D_0 = 0,1$.

Пусть конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) > D_0 = 0,1$.

1) Найдем $\chi_{набл}^2$

$$\chi = \frac{3 \cdot 2 + 3,5 \cdot 6 + 3,8 \cdot 9 + 4,4 \cdot 7 + 4,5 \cdot 1}{25} = 3,9$$

$$u_i = 10x_i - 39$$

u_i	-9	-4	-1	5	6
n_i	2	6	9	7	1

$$\sum n_i u_i^2 = 478$$

$$\sum n_i u_i = -10$$

$$S_u^2 = \frac{478 - \frac{(-10)^2}{25}}{24} = 19,75$$

$$S_x^2 = \frac{19,75}{10^2} = 0,1975 \approx 0,2$$

$$\chi^2_{набл} = \frac{(25-1)0,2}{0,1} = 48$$

2) Найдем $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$

$$\chi^2_{кр}(0,05; 24) = 36,4$$

3) Так как $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ - нулевую гипотезу отвергаем и принимаем конкурирующую гипотезу.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. При уровне значимости $\alpha = 0,1$ проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух нормально распределенных случайных величин X и Y на основе данных выборки при альтернативной гипотезе $H_1 : D(X) \neq D(Y)$

x_i	37	38	40	41	42
n_i	2	1	4	3	6

y_i	38	39	40	41	43
m_i	4	3	2	2	3

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1. Гарелик, П. В. Общая хирургия : учебник / П. В. Гарелик, О. И. Дубровщик, Г. Г. Мармыш. — Минск : Вышэйшая школа, 2021. — 375 с. — ISBN 978-985-06-3372-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/276224> (дата обращения: 06.02.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Попов, В. Л. Судебная медицина : учебник / В. Л. Попов, С. И. Индияминов. — Санкт-Петербург : Юридический центр, 2022. — 451 с. — ISBN 978-5-94201-819-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/354869> (дата обращения: 06.02.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
- 3.. Фармацевтическое информирование : учебник / под редакцией А. А. Свистунова, В. В. Тарасова ; художник В. А. Прокудин. — Москва : Лаборатория знаний, 2020. — 320 с. — ISBN 978-5-00101-878-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/126097> (дата обращения: 06.02.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

Перечень дополнительной литературы

1. Сурмач, М. Ю. История медицины : учебное пособие / М. Ю. Сурмач. — Минск : Новое знание, 2024. — 557 с. — ISBN 978-985-24-0374-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/414707> (дата обращения: 06.02.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. История медицины : учебное пособие / составители О. В. Медведева, С. П. Гуселетов. — Рязань : РязГМУ, 2024. — 150 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/443393> (дата обращения: 06.02.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Симонян, Р. З. История медицины России: со времен Древней Руси до российской медицины XX столетия : учебное пособие / Р. З. Симонян. — Чебоксары : , 2023. — 168 с. — ISBN 978-5-907688-09-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/329603> (дата обращения: 06.02.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. История медицины: наука, практика, образование : учебное пособие : в 4 частях / А. Б. Латыпов, Н. Х. Шарафутдинова, А. У. Киньябулатов [и др.]. — Уфа : БГМУ, 2023 — Часть 2 — 2023. — 93 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/399896> (дата обращения: 06.02.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
5. Ольшванг, О. Ю. История медицины: врачевание в аграрных, традиционных обществах. На английском и русском языках. History of Medicine: Healing in Agrarian, Traditional Societies. In English and Russian / О. Ю. Ольшванг, Г. Н. Шапошников. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 416 с. — ISBN 978-5-8114-9739-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/230339> (дата обращения: 06.02.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА»

для студентов специальности 30.05.01 «Медицинская биохимия»

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа как важнейшая форма учебного процесса.

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования - "подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности".

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:

- изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;
- подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ;
- участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.

Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.

Цели и основные задачи СРС

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой специалиста и бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3. Виды самостоятельной работы

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации, содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.):

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателей являются:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание рефератов;
- подготовка к семинарам и лабораторным работам, их оформление;
- составление аннотированного списка статей из соответствующих журналов по отраслям знаний (педагогических, психологических, методических и др.);
- подготовка рецензий на статью, пособие;
- выполнение микроисследований;
- подготовка практических разработок;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов.

(В зависимости от особенностей факультета перечисленные виды работ могут быть расширены, заменены на специфические).

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

- текущие консультации;
- коллоквиум как форма контроля освоения теоретического содержания дисциплин: (в часы консультаций, предусмотренных учебным планом);
- прием и разбор домашних заданий (в часы практических занятий);
- прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р);
- выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин (руководство, консультирование и защита курсовых работ (в часы, предусмотренные учебным планом);
- выполнение учебно-исследовательской работы (руководство, консультирование и защита УИРС);
- прохождение и оформление результатов практик (руководство и оценка уровня сформированности профессиональных умений и навыков);
- выполнение выпускной квалификационной работы (руководство, консультирование и защита выпускных квалификационных работ) и др.

Организация СРС

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);

- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Организацию самостоятельной работы студентов обеспечивают: факультет, кафедра, учебный и методический отделы, преподаватель, библиотека, ТСО, ИВТ, издательство и др.

Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя студент должен:

– освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем в соответствии с Государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования (ГОС ВПО/ГОС СПО) по данной дисциплине.

– планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем.

– самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя.

– выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

студент может:

сверх предложенного преподавателем (при обосновании и согласовании с ним) и минимума обязательного содержания, определяемого ФГОС ВО по данной дисциплине:

– самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;

– предлагать дополнительные темы и вопросы для самостоятельной проработки;

– в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;

– предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;

– использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;

– использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего специалиста, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от

его подготовки, времени и других условий.

Общие рекомендации по организации самостоятельной работы

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;

б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 -

5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы – это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления исследователя и специалиста

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не только к моральным, нравственным свойствам человека, но и в

особенности, постоянно возрастающие требования в области образования – обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной мыслью и языком науки является необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для реализации этой задачи. Ибо во время учебы в вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этого пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения (лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контролирования за их деятельностью. Отметим, что нельзя ограничиваться только приобретением знаний предусмотренных программой изучаемой дисциплины, надо постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т.е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность методов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать его, чтобы изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебы с будущей профессиональной деятельности

Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы.

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность

студентов в планировании и организации своей деятельности. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно – выучу!»), а когда приходит пора экзаменов, материала, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться в оставшийся промежуток времени.

Работа с книгой.

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги. Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой – это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода). При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;
2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;
3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;
4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;
5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;
2. Выделите главное, составьте план;
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;
4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.
5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

Практические занятия.

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка.

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Основные понятия теории вероятностей. Классификация событий. Элементы комбинаторики. Определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Повторение испытаний: формула Бернулли, локальная и интегральная теоремы Лапласа. Виды случайных величин и законы их распределения. Биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое распределение. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Непрерывная случайная величина. Функция и плотность распределения. Числовые характеристики. Равномерное распределение. Нормальное распределение. Показательное распределение. Задачи математической статистики, ее связь с теорией вероятностей. Генеральная и выборочная совокупность. Виды выборок. Вариационный ряд. Статистическая функция распределения. Полигон и гистограмма. Генеральная и выборочная средняя, генеральная и выборочная дисперсии. Оценка параметров генеральной совокупности по случайной выборке. Точечная и интервальная оценки, точность и надежность оценки, доверительный интервал. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Линейная регрессия. Коэффициент корреляции. Среднеквадратическая регрессия. Выборочные уравнения регрессии. Корреляционная таблица. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по несгруппированным и сгруппированным данным. Выборочный коэффициент корреляции. Проверка статистических гипотез. Статистический критерий, уровень его значимости. Статистическая гипотеза, общая схема ее проверки. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности, критерий Пирсона.

В рамках темы 9 предусмотрено проведение трех самостоятельных работ, выполнение двух индивидуальных домашних заданий, проведение контрольной работы и сдача коллоквиума.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

1. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной оценки?
2. Группу из 20 студентов нужно разбить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую- 5 и в третью- 12. Сколькими способами это можно сделать?

Типовой вариант самостоятельной работы №2

1. В двух корзинах находятся яблоки. В первой 20 шт., из них 5 поврежденных; во второй – 30 шт., из них 6 поврежденных. Из наудачу выбранной корзины взяли одно яблоко. Яблоко оказалось не поврежденным. Какова вероятность того, что яблоко взято из первой корзины?
2. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная из ящика деталь (после перевозки) оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

Типовой вариант самостоятельной работы №3

Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	2	4	5
p	0,1	0,3	0,6

 и

Y	7	9
p	0,8	0,2

.

Найти $D(X+Y)$ и $M(XY)$.

Индивидуальное домашнее задание №1 (примерный вариант)

Задание №1. Сколькими способами можно переставить буквы в словах: а) «математика», б) «абракадабра», чтобы получились всевозможные различные наборы букв?

Задание №2. Группа туристов из 12 юношей и 7 девушек выбирает по жребию 5 человек для приготовления ужина. Сколько существует способов выбора, при которых в эту «пятерку» попадут: а) одни девушки; б) 3 юноши и 2 девушки; в) 1 юноша и 4 девушки; г) 5 юношей?

Задание №3. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная из ящика деталь (после перевозки) оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

Задание №4. Из 40 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 30. Найти вероятность того, что среди трех наугад выбранных вопросов студент знает: а) 3 вопроса; б) 2 вопроса; в) 1 вопрос.

Задание №5. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

Задание №6. Один студент выучил 20 из 25 вопросов программы, а второй – только 15. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что правильно ответят: а) оба студента; б) только первый студент; в) только один из них; г) хотя бы один из студентов.

Задание №7. Вероятность своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равна 0.5, 0.6 и 0.7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним предприятием. (Ответ: 0,94)

Задание №8. В торговую фирму поставляются телевизоры тремя фирмами в соотношении 5:2:3. Телевизоры, поступающие от этих фирм, не требуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 96%, 92% и 94% случаев.

а) Найти вероятность того, что наудачу купленный телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

б) Купленный телевизор не потребовал ремонта в течение гарантийного срока. Какая фирма вероятнее всего поставила данный телевизор?

Задание №9. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее восьми машин, а всего имеется их десять. Вероятность невыхода каждой автомашины на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы автобазы на ближайший день.

Индивидуальное домашнее задание №2 (примерный вариант)

Задание №1. Наблюдается число выигрышей в мгновенной лотерее. В результате наблюдения получены следующие значения выигрышей (тыс. руб.): 0, 1, 0, 0, 5, 0, 10, 0, 1, 0, 0, 1, 5, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 5, 0, 0, 1, 1, 1, 5, 10, 0, 1, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0.

- Составить статистическое распределение частот случайной величины X – выигрыша в мгновенной лотерее.
- Составить статистическое распределение относительных частот случайной величины X .
- Построить полигон частот.
- Построить полигон относительных частот.
- Найти эмпирическую функцию распределения.

Задание №2. Найти выборочную и исправленную дисперсии по данному распределению

выборки	x_i	1	5	6	8
	n_i	5	15	20	10

Задание №3. Выручка в магазине от продажи обуви составила соответственно по месяцам следующие значения (млн. руб.):

месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
выручка	0,2	0,5	0,4	0,2	0,4	0,5	0,2	0,2	0,4	0,5	0,4	0,2

Найти выборочную среднюю, выборочную и исправленную дисперсии.

Задание №4. Найти доверительный интервал с надежностью 0,95 для оценки математического ожидания нормально распределенной случайной величины X , если известны ее среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$, выборочная средняя $\overline{x_B} = 16$ и объем выборки $n = 16$.

Задание №5. В нескольких мелких магазинах проведена проверка качества 100 изделий, после чего осуществлена обработка полученных данных. В результате получено несмещенное значение выборочного среднего квадратического отклонения $s = 4$. Считая распределение качественных изделий нормальным, найти с надежностью $\gamma = 0,95$ доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения.

Типовой вариант контрольной работы №1

Задание №1. В коробке лежат 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Найти вероятность того, что из пяти взятых наугад шаров будет 4 белых.

Задание №2. В городе 3 коммерческих банка, оценка надежности которых – 0,95, 0,9 и 0,85 соответственно. В связи с определением хозяйственных перспектив развития города администрацию интересуют ответы на следующие вопросы: а) какова вероятность того, что в течение года обанкротятся все три банка; б) что обанкротится хотя бы один банк.

Задание №3. Монету бросают пять раз. Найти вероятность выпадения одной из сторон менее двух раз.

Задание №4. Среди 10 лотерейных билетов имеется 4 билета с выигрышем. Наудачу покупают 2 билета. Составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа выигрышных билетов среди купленных.

Задание №5. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

$$\begin{array}{c|c|c|c} X & -4 & 0 & 4 \\ \hline p & 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{array} \text{ и } \begin{array}{c|c|c} Y & 2 & 4 \\ \hline p & 0,5 & 0,5 \end{array}.$$

Найти $M(Z)$ и $D(Z)$, если $Z = (X+Y)/2$.

Задание №6. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x^2 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$ и числовые характеристики случайной величины X .

Вопросы для подготовки к коллоквиуму

1. Основные понятия комбинаторики. Виды соединений.
2. Основные понятия теории вероятностей. События и их классификация.
3. Классическое и статистическое определения вероятности. Свойства вероятности.
4. Алгебра событий. Теоремы сложения вероятностей.
5. Алгебра событий. Теоремы умножения вероятностей.
6. Полная вероятность. Формулы Байеса.
7. Повторение испытаний. Формула Бернулли.
8. Понятие случайной величины. Дискретные случайные величины и их числовые характеристики.
9. Законы распределения дискретной случайной величины.
10. Интегральная и дифференциальная функции распределения непрерывной случайной величины.
11. Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики.
12. Равномерное и показательное распределение непрерывной случайной величины.
13. Нормальное распределение непрерывной случайной величины. Центральная предельная теорема.
14. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева.
15. Математическая статистика и ее основные задачи. Выборочная и генеральная совокупности. Типы выборок.
16. Статистическое распределение выборки и его геометрическое изображение.
17. Статистические оценки параметров распределения.
18. Генеральная и выборочная средние. Генеральная и выборочная дисперсии.
19. Интервальные оценки. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.
20. Статистические гипотезы. Статистический критерий, уровень его значимости. Статистическая гипотеза, общая схема ее проверки.
21. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности, критерий Пирсона.
22. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
23. Линейная регрессия. Коэффициент корреляции. Среднеквадратическая регрессия. Выборочные уравнения регрессии. Корреляционная таблица. Отыскание

параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии. Выборочный коэффициент корреляции.

Задачи для самостоятельного решения

1. Менеджер рассматривает кандидатуры 8 человек, подавших заявления о приеме на работу. Сколько существует способов приглашения кандидатов на собеседование в случайном порядке?
2. Сколькими способами можно переставить буквы в словах: а) «математика», 2) «абракадабра», чтобы получились всевозможные различные наборы букв?
3. Участниками акционерного общества закрытого типа являются 15 человек. Из их среды нужно выбрать председателя правления, двух его заместителей и председателя ревизионной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?
4. Для доступа в компьютерную сеть оператору необходимо набрать пароль из 4 цифр. Оператор забыл или не знает необходимого кода. Сколько всевозможных комбинаций он может составить для набора пароля: а) если цифры в пароле не повторяются; б) если повторяются?
5. По сведениям геологоразведки 1 из 15 участков земли по всей вероятности содержит нефть. Однако компания имеет средства для бурения только 8 скважин. Сколько способов отбора 8 различных скважин у компании?
6. Сколькими способами можно выбрать 6 конфет из 11 различных сортов конфет?
7. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько можно составить различных букетов?
8. При перевозке ящика, в котором содержалось 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная из ящика деталь (после перевозки) оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.
9. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.
10. В магазин поступило 30 холодильников, 5 из них имеют заводской дефект. Случайным образом выбираются 3 холодильника. Какова вероятность того, что два из отобранных холодильников будут без дефекта?
11. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число кратно 5?
12. Отдел технического контроля обнаружил пять бракованных книг в партии из случайно отобранных 100 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг.
13. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

14.Контролер проверяет изделия на соответствие стандарту. Известно, что вероятность соответствия изделия стандарту равна 0.9.

а) Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий оба будут стандартными, если события появления стандартных изделий независимы?

б) Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное?

15.В районе 100 поселков. В 5 из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобраны два поселка. Какова вероятность того, что в них окажутся пункты проката?

16.Вероятность своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равна 0.5, 0.6 и 0.7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним предприятием.

17.На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25, второй 35, а третий 40% всех замков. Брак составляет соответственно 5, 4 и 2%.

а) Найти вероятность того, что случайно выбранный замок является дефектным.

б) Случайно выбранный замок является дефектным. Какова вероятность того, что он был изготовлен в первом, втором, третьем цехе?

18.Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил 40 изделий, второй – 35, третий – 25. Вероятность брака у первого рабочего 0.03, у второго – 0.02, у третьего – 0.01. Взятое наугад изделие оказалось бракованным. Определить вероятность того, что это изделие сделал второй рабочий.

19.В среднем из каждых 100 клиентов отделения банка 60 обслуживаются первым операционистом и 40 – вторым операционистом. Вероятность того, что клиент будет обслужен без помощи заведующего отделением, только самим операционистом, составляет 0.9 и 0.75 соответственно для первого и второго служащих банка. Найти вероятность полного обслуживания клиента первым операционистом.

20.Монету подбрасывают 8 раз. Какова вероятность того, что 6 раз она упадет гербом вверх?

21.Вероятность появления события А равна 0.4. Найти вероятность того, что при 4 испытаниях событие А появится: а) не более 3 раз; б) не менее 3 раз; в) менее 3 раз; г) более 3 раз.

22.Среди 10 лотерейных билетов имеется 4 билета с выигрышем. Наудачу покупают 2 билета. Составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа выигрышных билетов среди купленных.

23.Вероятность того, что при составлении бухгалтерского баланса допущена ошибка, равна 0.3. Аудитору на заключение представлено 3 баланса предприятия. Составить закон распределения и найти числовые характеристики числа положительных заключений на проверяемые балансы.

24.На базу отправлено 10000 изделий. Вероятность того, что изделие в пути получит повреждение, равна 0.0003. Найти вероятность того, что на базу придут 4 поврежденных изделия. Составить закон распределения и найти числовые характеристики случайной величины X – числа поврежденных изделий.

25.Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ -a \cos x & , \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 1 & , \quad x > \pi \end{cases}$$

Требуется: а) найти плотность вероятности $f(x)$; б) коэффициент a ; в) числовые характеристики X ; г) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\pi/4; \pi/3)$.

26. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} \sin x & , \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & , \quad x > \pi \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей и построить ее график.

27. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[0;4]$. Найти функцию распределения, плотность вероятности и числовые характеристики случайной величины X .

28. Найти числовые характеристики и вероятность попадания случайной величины T , имеющей показательное распределение

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq 0 \\ 0.2e^{-0.2t} & , \quad t > 0 \end{cases}$$

в интервал $(5;10)$.

29. Один из методов, позволяющих добиться успешных экономических прогнозов, состоит в применении согласованных подходов к решению конкретной проблемы. Обычно прогнозом занимается большое число аналитиков. Средний результат таких индивидуальных прогнозов представляет собой общий согласованный прогноз. Пусть этот прогноз относительно величины банковской процентной ставки в текущем году подчиняется нормальному закону со средним значением $a=9\%$ и стандартным отклонением $\sigma=2.6\%$. Из группы аналитиков случайным образом отбирается один человек. Найдите вероятность того, что согласно прогнозу этого аналитика уровень процентной ставки: а) превысит 11% ; б) окажется менее 14% ; в) будет в пределах от 12 до 15% .

30. Вес товаров, помещаемых в контейнер определенного размера, - нормально распределенная случайная величина. Известно, что 65% контейнеров имеют чистый вес больше, чем 4.9 т. и 25% - имеют вес, меньший, чем 4.2 т. Найдите ожидаемый средний вес и среднее квадратическое отклонение чистого веса контейнера.

31. Дано: $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0.9$; $D(X) = 0.004$. Используя неравенство Чебышева, найти ε .

32. Наблюдается число выигрышей в мгновенной лотерее. В результате наблюдения получены следующие значения выигрышей (тыс. руб.): 0, 1, 0, 0, 5, 0, 10, 0, 1, 0, 0, 1, 5, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 5, 0, 0, 1, 1, 1, 5, 10, 0, 1, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0.

- 1) Составить статистическое распределение частот случайной величины X – выигрыша в мгновенной лотерее.
- 2) Составить статистическое распределение относительных частот случайной величины X .
- 3) Построить полигон частот.

- 4) Построить полигон относительных частот.
- 5) Найти эмпирическую функцию распределения.

33. В таблице приведена выборка результатов измерений роста 105 студентов (юношей). Измерения проводились с точностью до 1 см.

- 1) Составить интервальный вариационный ряд с числом интервалов, равным 10.
- 2) Построить гистограмму частот.
- 3) Построить гистограмму относительных частот.

155	170	185	180	188	152	173	178	178	168	185
173	170	183	175	173	170	183	175	180	175	193
178	183	180	197	178	181	187	168	174	179	184
183	178	180	178	163	166	178	175	182	190	167
170	178	183	170	178	181	173	168	185	175	170
155	169	186	179	189	155	174	179	176	169	186
174	171	184	175	193	178	184	180	196	175	181
188	168	179	178	183	184	178	181	177	163	166
178	175	183	190	167	170	178	183	170	178	182
173	168	186	176	171	188					

34. Найти выборочную и исправленную дисперсии по данному распределению выборки

x_i	1	5	6	8
n_i	5	15	20	10

35. Ниже приведены результаты измерения роста (в см) случайно отобранных 100 студентов:

рост	154–158	158–162	162–166	166–170	170–174	174–178	178–182
число студентов	10	14	26	28	12	8	2

Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию роста обследованных студентов.

Указание: найти середины интервалов и принять их в качестве вариантов.

36. Выручка в магазине от продажи обуви составила соответственно по месяцам следующие значения (млн. руб.):

месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
выручка	0,2	0,5	0,4	0,2	0,4	0,5	0,2	0,2	0,4	0,5	0,4	0,2

Найти выборочную среднюю, выборочную и исправленную дисперсии.

37. Найти несмещенную и смещенную оценки дисперсии генеральной совокупности по данному распределению выборки:

x_i	0,002	0,005	0,006
n_i	9	6	5

38. Найти доверительный интервал с надежностью 0,95 для оценки математического ожидания нормально распределенной случайной величины $\bar{X}$, если известны ее среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$, выборочная средняя $\bar{x}_B = 16$ и объем выборки $n = 16$.

39. Станок – автомат штампует валики. По выборке объема $n = 100$ вычислена выборочная средняя диаметров изготовленных валиков. Найти с надежностью 0,95 точность δ , с

которой выборочная средняя оценивает математическое ожидание диаметров изготавливаемых валиков, зная, что их среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$ мм. Предполагается, что диаметры валиков распределены нормально.

40. В нескольких мелких магазинах проведена проверка качества 100 изделий, после чего осуществлена обработка полученных данных. В результате получено несмещенное значение выборочного среднего квадратического отклонения $s = 4$. Считая распределение качественных изделий нормальным, найти с надежностью $\gamma = 0,95$ доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Контрольные работы, коллоквиумы, самостоятельные работы, индивидуальные задания оцениваются по пятибалльной системе. На практических занятиях контроль осуществляется при ответе у доски и при проверке выполнения домашних заданий.

Содержание и объем материала, подлежащего проверке на экзамене, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты, прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

Экзаменационный билет состоит из теоретических вопросов и задачи.

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он в полной мере демонстрирует понимание и восприятие основных понятий теории вероятности и математической статистики; способен применять законы и методы теории вероятности и математической статистики для решения профессиональных задач; владеет методами теории вероятности и математической статистики для постановки и решения стандартных и инновационных задач профессиональной деятельности; демонстрирует владение экспериментальными и теоретическими методами научно-исследовательской деятельности; знает технологии прогнозирования и методы математической статистики; способен формулировать выводы на основании результатов исследования с оценкой возможности внедрения полученных результатов в практическое здравоохранение; владеет современными технологиями организации сбора, обработки данных.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он демонстрирует понимание и восприятие основных понятий теории вероятности и математической статистики; способен применять законы и методы теории вероятности и математической статистики для решения профессиональных задач; владеет методами теории вероятности и математической статистики для постановки и решения стандартных и инновационных задач профессиональной деятельности; демонстрирует владение экспериментальными и теоретическими методами научно-исследовательской деятельности; знает технологии прогнозирования и методы математической статистики; способен формулировать выводы на основании результатов исследования с оценкой возможности внедрения полученных результатов в практическое здравоохранение; владеет современными технологиями организации сбора, обработки данных.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он не в полной мере демонстрирует понимание и восприятие основных понятий теории вероятности и математической статистики; способен применять законы и методы теории вероятности и математической статистики для решения профессиональных задач; владеет методами теории вероятности и математической статистики для постановки и решения стандартных и инновационных задач профессиональной деятельности; демонстрирует

владение экспериментальными и теоретическими методами научно-исследовательской деятельности; знает технологии прогнозирования и методы математической статистики; способен формулировать выводы на основании результатов исследования с оценкой возможности внедрения полученных результатов в практическое здравоохранение; владеет современными технологиями организации сбора, обработки данных.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он не понимает основных математических понятий и закономерностей в области теории вероятностей и математической статистики; не способен применять законы и методы теории вероятности и математической статистики для решения профессиональных задач; не владеет методами теории вероятности и математической статистики для постановки и решения стандартных и инновационных задач профессиональной деятельности; не демонстрирует владение экспериментальными и теоретическими методами научно-исследовательской деятельности; не знает технологии прогнозирования и методы математической статистики; не способен формулировать выводы на основании результатов исследования с оценкой возможности внедрения полученных результатов в практическое здравоохранение; не владеет современными технологиями организации сбора, обработки данных.

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1. Гарелик, П. В. Общая хирургия : учебник / П. В. Гарелик, О. И. Дубровщик, Г. Г. Мармыш. — Минск : Вышэйшая школа, 2021. — 375 с. — ISBN 978-985-06-3372-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/276224> (дата обращения: 06.02.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Попов, В. Л. Судебная медицина : учебник / В. Л. Попов, С. И. Индияминов. — Санкт-Петербург : Юридический центр, 2022. — 451 с. — ISBN 978-5-94201-819-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/354869> (дата обращения: 06.02.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Фармацевтическое информирование : учебник / под редакцией А. А. Свистунова, В. В. Тарасова ; художник В. А. Прокудин. — Москва : Лаборатория знаний, 2020. — 320 с. — ISBN 978-5-00101-878-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/126097> (дата обращения: 06.02.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

Перечень дополнительной литературы

1. Сурмач, М. Ю. История медицины : учебное пособие / М. Ю. Сурмач. — Минск : Новое знание, 2024. — 557 с. — ISBN 978-985-24-0374-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/414707> (дата обращения: 06.02.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. История медицины : учебное пособие / составители О. В. Медведева, С. П. Гуселетов. — Рязань : РязГМУ, 2024. — 150 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/443393> (дата обращения: 06.02.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Симонян, Р. З. История медицины России: со времен Древней Руси до российской медицины XX столетия : учебное пособие / Р. З. Симонян. — Чебоксары : , 2023. — 168 с. — ISBN 978-5-907688-09-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-

- библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/329603> (дата обращения: 06.02.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. История медицины: наука, практика, образование : учебное пособие : в 4 частях / А. Б. Латыпов, Н. Х. Шарафутдинова, А. У. Киньябулатов [и др.]. — Уфа : БГМУ, 2023 — Часть 2 — 2023. — 93 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/399896> (дата обращения: 06.02.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
 5. Ольшванг, О. Ю. История медицины: врачевание в аграрных, традиционных обществах. На английском и русском языках. History of Medicine: Healing in Agrarian, Traditional Societies. In English and Russian / О. Ю. Ольшванг, Г. Н. Шапошников. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 416 с. — ISBN 978-5-8114-9739-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/230339> (дата обращения: 06.02.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.