

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ
по дисциплине «Дифференциальные уравнения»
для студентов направления подготовки
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
направленность (профиль)
«Анализ данных и искусственный интеллект»

Введение

Актуальность дисциплины «Дифференциальные уравнения» обусловлена необходимостью формирования у будущих специалистов общепрофессиональных компетенций, практических умений и навыков на которых базируется профессиональная деятельность специалиста, как математика. Выполнение практических работ способствует осознанию роли и места дифференциальных уравнений в системе естественных наук, влияния фундаментальных дисциплин на глубину логического мышления, понимания возможностей описания природы и общества с помощью математического моделирования. Моделирование непрерывных природных процессов и систем физики, химии, молекулярной биологии, живых организмов, атмосферы и т.д. ведут к приобретению навыков аналитического мышления. Самостоятельный анализ явлений и процессов дает возможность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики в профессиональной деятельности.

Основные задачи дисциплины: обучить студентов:

- Методам решения основных типов дифференциальных уравнений первого порядка;
- Методам решения линейных уравнений n -го порядка;
- Методам решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами;
- Методам исследования решений дифференциальных уравнений и систем на устойчивость;
- Методам построения приближенных решений дифференциальных уравнений;
- Методам сведения линейных уравнений с частными производными первого порядка к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

В результате изучения дисциплины у обучающихся формируются следующие **компетенции** (в соответствии с образовательным стандартом):

ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины студент должен:

Знать: понятие дифференциального уравнения и его решения, основные типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их интегрирования, основные проблемы общей теории дифференциальных уравнений (существование решения, единственность, продолжимость, зависимость от параметров) и подходы к их решению, структуру множества решений линейных уравнений и систем, понятие фундаментальной системы решений и свойства определителя Вронского, концепцию устойчивости (по Ляпунову), критерии устойчивости линейных систем, систем с постоянными коэффициентами.

Уметь: находить решения краевых и начальных задач, строить функцию Грина краевой задачи, исследовать на устойчивость линейные уравнения и системы как “по определению”, так и с помощью критериев устойчивости, исследовать на устойчивость нелинейные уравнения и системы с помощью первого приближения и с помощью

функции Ляпунова, строить фазовый портрет систем второго порядка, исследовать тип и строить эскизы особых точек, находить полную систему первых интегралов для систем 2-го порядка, пользоваться для решения линейных неоднородных уравнений и систем методом вариации произвольных постоянных и методов неопределенных коэффициентов, решать линейные уравнения Эйлера, обосновывать структурные свойства множества решений линейных уравнений и систем

Владеть: методами интегрирования основных типов дифференциальных уравнений первого порядка, методами решения однородных и неоднородных линейных уравнений и систем с постоянными коэффициентами, методами решения линейных однородных и неоднородных уравнений в частных производных первого порядка, методами исследования устойчивости нелинейных систем (первое приближение, функция Ляпунова), методами решения краевых задач и построение функции Грина.

Цель данного практикума – описание последовательности, основного содержания, методики выполнения практических (семинарских) занятий по учебному курсу и (или) самостоятельной подготовки к ним. Занятия проводятся в формах семинара, выполнения и защиты индивидуального задания.

Семинар – обсуждение проблемы, темы по заранее заданной структуре (вопросам) с предварительным углубленной самостоятельной проработкой материала. Семинары помогают овладеть теоретическим аппаратом, свободно оперировать им, понимать практическое приложение теории, прививают навыки самостоятельного мышления.

Индивидуальное задание – частично регламентированное задание, имеющее нестандартное решение и позволяющее диагностировать умения, интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения.

Для того, чтобы студенты самостоятельно выполнили решение того или иного задания, при этом выявили недочеты и исправили свои ошибки, необходима постоянная помощь преподавателя. Однако эта задача может быть решена самостоятельно студентами, если они в своей работе воспользуются методическими указаниями, составленными преподавателем в помощь студентам по данной теме. В данных методических указаниях подробно изложена методика решения различных дифференциальных уравнений, сформулированы алгоритмы решений со ссылками на теоретический материал.

5 СЕМЕСТР

Тема 1: УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Практическое занятие. Основные определения и понятия

1. **Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими компетенциями: ОПК-1

2. Актуальность темы

Необходимость рассмотреть основные понятия и определения курса; ознакомить с основными принципами и методами дифференциальных уравнений, изучить этапы развития дисциплины, как предмет естествознания, описывающий различные процессы в пространстве и времени. В результате усвоения данной темы студенты должны изучить основные понятия курса, уметь определить предмет, уметь его классифицировать.

Знать: понятие дифференциального уравнения и его решения,

Уметь: находить решения задачи Коши

Владеть: методами интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка.

Знать: виды решений уравнений

Уметь: отличать частное решение от общего

Владеть: методами решения задачи Коши

4. Теоретическая часть

1. Дать определение дифференциального уравнения.
2. Какое дифференциальное уравнение называется обыкновенным.
3. Как определяется порядок уравнения
4. Дать определение решения уравнения.
5. Какое уравнение называется уравнением первого порядка.
6. В чем состоит основная задача теории дифференциальных уравнений.
7. Какое решение называется общим интегралом дифференциального уравнения.
8. Как задаются начальные условия для дифференциального уравнения первого порядка.
9. Как называется задача отыскания решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям
10. Дать определение задачи Коши.
11. Как называется изображение решений уравнения на координатной плоскости.
12. Дать определение поля направлений.
лежащий на касательной, получим *поле направлений* на B .)
12. Дать определение изоклины.
13. Как определяется изоклина для уравнения $y' = f(x, y)$.
14. Сформулировать теорему существования и единственности решения при заданном начальном условии.
15. К каким последствиям может привести невыполнение условий теоремы.
16. Какое решение называется особым.

5. Практические задания

Базовый уровень

Задачи для репродуктивной работы

Работа по образцу предполагает решение задач на воспроизведение знаний, умений. Все данные для нахождения искомого, а также сам способ выполнения задания представлены в явном виде в самом задании или в соответствующем алгоритме решения (демонстрация решенных заданий)

1. Построить поле направлений для дифференциального уравнения $y' = 2 \frac{y}{x}$.
2. Найти уравнение движения точки, падающей с высоты h без начальной скорости.

3. Найти уравнение движения точки, брошенной вверх со скоростью v . Через сколько времени точка достигнет наивысшего положения?

Задания для реконструктивной работы

Характерным признаком этих заданий является то, что в самом задании сообщается общая идея решения, а студенту необходимо развить ее в конкретный способ или способы применительно к условиям задачи. Студент соотносит задание с другими, уже известными ему. При этом главное – актуализация имеющихся знаний, умение отбирать и привлекать необходимые знания для решения задачи

4. Построить поле направлений для дифференциальных уравнений:

а) $y' = x^2 - y^2$ (построить изоклины $y' = 0$, $y' = \pm 1$, ± 2). Провести интегральные кривые через точки $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.

б) $y' = x^2 + y^2$; в) $y' = x^3$; г) $(y')^2 + \frac{y^2 - a^2}{y^2} = 0$.

5. Найти дифференциальное уравнение софокусных эллипсов с заданным фокусным расстоянием $2c$.

Задания повышенной сложности

Такая работа предполагает создание нестандартных ситуаций, решение нетиповых задач. В ее основе – поиск, догадка, формулирование и реализация идеи решения. Однако поиск имеет частичный характер, необходимый лишь для выполнения какого-либо фрагмента общего задания

6. Найти уравнение всех кругов на плоскости.

Указание. Дифференцируя трижды уравнение окружности $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ и исключая параметры a , b , r , получим искомое уравнение.

7. Найти дифференциальное уравнение всех конических сечений.

Указание. Уравнение конических сечений имеет вид:

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad a_{ij} - \text{const}.$$

8. Вывести дифференциальное уравнение конических сечений, у которых $a_{22} = 0$. Каково геометрическое семейство этих кривых? (Рассмотреть два случая $a_{12} = 0$, $a_{12} \neq 0$).

9. Доказать невыполнимость теоремы существования и единственности для уравнения $y' = y^2$.

6. Список литературы 1,6,7,9,10.

Практическое занятие.

Уравнения с разделяющимися переменными

1. **Цель** - развитие у обучающихся умения понять поставленную задачу, способности к анализу дифференциальных уравнений первого порядка.

2. Актуальность темы

Получение знаний об основном методе интегрирования дифференциальных уравнений. Получение умений применять полученные теоретические знания при изучении прикладных дисциплин, описывающих природные явления.

3. Формируемые компетенции или их части

Выполнение практической части способствует формированию у студентов компетенций ОПК-1

Знать: основные типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их интегрирования

Уметь: находить решения уравнений с разделяющимися переменными

Владеть: методом разделения переменных

4. Теоретическая часть

1. Какой вид имеет уравнение с разделяющимися переменными.
2. Как производится замена производной на дифференциалы.
3. Разделите переменные в уравнении $y' = g(x)h(y)$.
4. Если в уравнении $g(x)$ разрывна в некоторой точке $x = \xi$ и обращается в бесконечность именно в этой точке, а во всех других точках заданной области непрерывна, то, какое решение будет в точке (ξ, y) .
5. В каком случае присоединенное решение оказывается особым.
6. Сформулируйте теорему из курса математического анализа о равенстве дифференциалов.
7. Если уравнение записано в виде $P_1(x)H_1(y)dx + P_2(x)H_2(y)dy = 0$, то какая из переменных является функцией.
8. Какие ограничения необходимо наложить на функции $P_1(x), H_1(y), P_2(x), H_2(y)$.
9. Проведите разделение переменных в этом уравнении.

5. Практические задания

Задачи для репродуктивной работы

1. Решить уравнения

а) $yy' = \frac{1-2x}{y}$;	б) $y' = 2\sqrt{y} \ln x$;
в) $y' \operatorname{tg} x - y = 1$;	г) $y' = e^{-y} x$;
2. Используя подходящую подстановку, привести уравнения к виду, допускающему разделение переменных, и решить его.

а) $y' = (x+y)^2$;	б) $(x+y)^2 y' = a^2$;
---------------------	-------------------------
3. Найти решение уравнения $(1+y^2)dx - xydy = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $x_0 = 2, y_0 = 1$.
4. Найти решения уравнения $2\sqrt{y}dx = dy$, удовлетворяющее начальным условиям: $x_0 = 0, y_0 = 1$.

Задания для реконструктивной работы

5. Решить уравнения

а) $\sec^2 x \operatorname{tg} y dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0$;	б) $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy + ydx = 0$;
--	---
6. Используя подходящую подстановку, привести уравнения к виду, допускающему разделение переменных, и решить его.

а) $y' = \sin(x-y)$;	б) $y' = ax + by + c, \quad a, b, c - \text{const}$;
-----------------------	---
7. Найти решение уравнения $(2x+1)dy + y^2 dx = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $x_0 = 4, y_0 = 1$.
8. Найти кривую, проходящую через точку $(2,0)$ и такую, что отрезок касательной между точкой касания и осью OY имеет постоянную длину, равную 2.

Задания для эвристической работы

9. Используя подходящую подстановку, привести уравнения к виду, допускающему разделение переменных, и решить его.

а) $y(xy+1)dx + x(1-xy)dy = 0$;	б) $(xy' - y)f(x) = y^2 - x^2$;
----------------------------------	----------------------------------

6. Список литературы 1,3,6,7,9,10.

Практическое занятие. Однородные уравнения

1. **Цель** - развитие у обучающихся умения понять поставленную задачу, способности определения типа дифференциальных уравнений первого порядка.

2. Актуальность темы

Развитие у обучающихся способности применять знания на практике; способности к анализу и синтезу; способностью осуществлять целенаправленный поиск решений поставленных задач.

3. Формируемые компетенции или их части

Выполнение практической части способствует формированию у студентов компетенции ОПК-1, ПК-1

Знать: основные типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их интегрирования

Уметь: находить решения однородных уравнений

Владеть: методами сведения уравнений к однородным уравнениям первого порядка.

4. Теоретическая часть

1. Какая функция $f(x,y)$ называется *однородной степени n* .
2. Какое дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется *однородным*.
3. Как однородное уравнение можно преобразовать в уравнение с разделяющимися переменными.
4. В какое уравнение преобразуется исходное после предложенной замены.
5. Какое преобразование переменных сохраняет вид однородного уравнения.
6. Какой вид функции $f(x,y)$ в дифференциальных уравнениях $y' = f(x,y)$ допускает сведение к однородному.
7. Какую подстановку необходимо выполнить, чтобы привести уравнение к однородному виду.
8. Как определяются постоянные α, β .
9. Всегда ли можно найти α и β .
10. Если α и β найдены, то к какому виду преобразуется исходное уравнение.
11. Что делать, если условие $ab_1 - ba_1 \neq 0$ не выполняется.
12. Какое уравнение получается после введения предложенной подстановки.
13. Существуют ли еще какие – либо подходы приведения неоднородных уравнений к однородному виду.
14. Как определяется число m .
15. В каком случае определение m возможно.
16. Какой вывод можно сделать, если определение m невозможно.

5. Практические задания

1. Решить дифференциальные уравнения

а) $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$;

б) $x(2x^2 + y^2) + yy'(x^2 + 2y^2) = 0$;

в) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$;

г) $(x^2 + y^2)dx = 2xydy$;

2. Найти решение уравнения $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $x_0 = 0, y_0 = 1$.

3. Найти кривые, у которых поднормаль равна сумме абсциссы и ординаты точки касания.

4. Решить дифференциальные уравнения

а) $(x^2 + xy + y^2)dx = x^2 dy$;

б) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$;

5. Найти кривую, все касательные к которой проходят через начало координат.

6. Найти кривую, у которой поднормаль равна разности радиус-вектора и абсциссы точки касания.

7. Найти кривые, у которых нормаль совпадает с радиус-вектором точки касания.

8. Определить кривые, у которых отрезок касательной от точки касания M до пересечения с осью OX равен отрезку оси OX , отсекаемому касательной от начала координат.

Задачи повышенной сложности

1. Решить дифференциальные уравнения

а) $\frac{dy}{dx} = 2 \left(\frac{y+2}{x+y-1} \right)^2$;

б) $\frac{2}{3}xyu' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$.

2. Составить уравнение кривых, касательная к которым образует постоянный угол α с радиус-вектором из начала координат; проинтегрировать это уравнение, в интеграл ввести полярные координаты.
3. Найти кривую, для которой треугольник, образованный нормалью с осями координат, был бы равновелик треугольнику, образованному осью OX , касательной и нормалью.

6. Список литературы 2,5,6,7,9,10.

Практическое занятие.

Линейные уравнения и уравнение Бернулли

1. **Цель** - развитие у обучающихся умения понять поставленную задачу и выбрать метод решения, способности к анализу дифференциальных уравнений первого порядка.

2. Актуальность темы

Получение знаний об методе интегрирования линейных дифференциальных уравнений и уравнений Бернулли. Получение умений применять полученные теоретические знания при изучении прикладных моделей.

3. Формируемые компетенции или их части

Выполнение практической части способствует формированию у студентов компетенций ОПК-1

Знать: классификацию дифференциальных уравнений первого порядка и методы их интегрирования

Уметь: находить решения линейных уравнений

Владеть: методом преобразования уравнения Бернулли к линейному виду

4. Теоретическая часть

1. Какое уравнение называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*.
2. В каком виде необходимо искать решение уравнения.
3. К какому виду преобразуется уравнение после замены $y = u(x)v(x)$.
4. Какое преимущество имеет полученное равенство по сравнению с исходным.
5. Какое дополнительное условие наложим.
6. Чему равна функция v .
7. Какое уравнение получится на функцию u .
8. Каково решение этого уравнения в квадратурах.
9. Записать общий вид решения для функции y .
10. Каким свойством обладает семейство интегральных кривых линейного дифференциального уравнения.
11. Каков геометрический смысл этого соотношения.
12. Записать общий вид *уравнения Бернулли*.
13. Как можно свести уравнение Бернулли к линейному дифференциальному уравнению.

5. Практические задания

Базовый уровень

1. Решить следующие дифференциальные уравнения:

$$a) (1 + x^2)y' + xy = 1;$$

$$б) y' + y = xy^3;$$

$$в) y' + x^2 y = x^2;$$

$$г) y' + y = x\sqrt{y};$$

2. Найти кривую, у которой площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, x]$ равна $1/m$ -той части площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной крайней ординате.

3. Найти $y = y(x)$, удовлетворяющую уравнению $\int_0^x xy dx = x^2 + y$.

4. Найти кривые, у которых подкасательная равна удвоенной абсциссе точки касания.

5. Решить следующие дифференциальные уравнения:

$$a) y' = x + y;$$

$$б) dy + by dx = ax dy;$$

6. Найти кривую, все касательные которой проходят через точку (a, b) .

7. Найти кривую, каждая касательная которой пересекает прямую $y = 1$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания.

8. На тело действует сила, пропорциональная времени. Кроме того, среда сопротивляется движению тела с силой, пропорциональной скорости. Найти закон движения тела.

9. Найти закон изменения силы тока в цепи с сопротивлением R и самоиндукцией L , если начальная сила тока I_0 , а электродвижущая сила меняется по закону $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$.

Задачи повышенной сложности

1. Решить следующие дифференциальные уравнения:

$$a) y' = a \sin x + by;$$

$$б) y' = e^{2x} - e^x y;$$

$$в) xy' + 2y = x^5 y^2;$$

$$г) y' + y \cos x = \sin x \cos x;$$

2. Найти кривую, в каждой точке которой поднормаль есть среднее арифметическое квадратов координат этой точки.

3. Определить кривые, у которых отрезок, отсекаемый нормалью на оси

a) OX , равен y^2/x ; б) OY , равен x^2/y .

4. Найти периодическое решение уравнения $y' = y \sin x + \sin 2x$.

5. В резервуаре объемом 100 л находится рассол, содержащий 10 кг соли. Вода втекает в резервуар со скоростью 3 л в минуту, смесь с той же скоростью перекачивается во второй резервуар той же емкости, первоначально наполненный чистой водой. Избыток жидкости из него выливается. Каково максимальное количество соли во втором резервуаре и когда оно достигается?

6. Список литературы 2,5,6,7,9,10.

Практическое занятие. Уравнения в полных дифференциалах и интегрирующий множитель

1. **Цель** - развитие у обучающихся умения понять поставленную задачу, способности к анализу дифференциальных уравнений первого порядка.

2. Актуальность темы

Получение знаний об методе интегрирования дифференциальных уравнений в полных дифференциалах. Получение умений применять полученные теоретические знания к прикладным задачам.

3. Формируемые компетенции или их части

Выполнение практической части способствует формированию у студентов компетенций ОПК-1

Знать: основные типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их интегрирования

Уметь: находить решения уравнений в полных дифференциалах

Владеть: методом интегрирующего множителя

4. Теоретическая часть

1. Дать определение полного дифференциала функции двух переменных.
2. Каким свойством обладает вторая смешанная производная.
3. Какой вид имеет уравнение, которое может быть уравнением в полных дифференциалах.
4. Сформулировать теорему о необходимом и достаточном условии существования функции $u(x, y)$ удовлетворяющей равенству $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.
5. Какое условие необходимо проверить, чтобы уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ было уравнением в полных дифференциалах.
6. На какой вопрос позволяет ответить теорема.
7. Если необходимое условие для уравнения выполняется, то, как связаны функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ с искомой функцией $u(x, y)$.
8. Как можно определить искомую функцию $u(x, y)$.
9. Почему прибавляется не произвольная постоянная, а функция $\phi(y)$.
10. Как доопределить функцию $\phi(y)$.
11. Если уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не есть полный дифференциал, то как следует поступить.
12. Как называется такая функция.
13. Если μ - интегрирующий множитель, то для уравнения $\mu P(x, y)dx + \mu Q(x, y)dy = 0$, какое свойство должно выполняться.
14. Из какого уравнения можно найти функцию μ .

5. Практические задания

Базовый уровень

1. Проверить, будут ли приведенные ниже уравнения в полных дифференциалах, и решить их:
а) $(x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0$; б) $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$;
2. Найти условия, при которых дифференциальное уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий от переменной y .
3. Пользуясь результатом предыдущей задачи и формулой (2), проинтегрировать следующие уравнения:
а) $xy' + (\sin y - 3x^2 \cos y) \cos y = 0$; б) $(\ln y + 2x - 1)y' = 2y$;
4. Проверить, будут ли приведенные ниже уравнения в полных дифференциалах, и решить их:

а) $\frac{y + \sin x \cos^2 xy}{\cos^2 xy} dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y \right) dy = 0$;

б) $(y \cos x + 2xy^2)dx + (\sin x - a \sin y + 2x^2y)dy = 0$;

5. Найти условия, при которых дифференциальное уравнение имеет интегрирующий множитель, независящий от переменной x .
6. Пользуясь результатом предыдущей задачи и формулой (2), проинтегрировать следующие уравнения:
а) $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$; б) $(7xy^3 + y - 5x)y' + y^4 - 5y = 0$;

Задачи повышенной сложности

1. Найти интегрирующий множитель вида $\mu(x^2 + y^2)$.
2. Найти интегрирующий множитель уравнения Бернулли.
3. Найти интегрирующий множитель уравнения вида $M(x + y)dx + N(x + y)dy = 0$.

4. Используя интегрирующий множитель вида $\mu(xy)$, решить уравнения:
 а) $x(xy-3)y' + xy^2 - y = 0$; б) $(2x^2y + x)y' - x^2y^3 + 2xy^2 + y = 0$;
 5. Применить результат задачи 4 к интегрированию следующих уравнений:
 а) $(y^2 + x^2 + x)y' - y = 0$; б) $2y^3y' + xy^2 - x^3 = 0$.
 6. Список литературы 1,3,6,7,9,10.

Практическое занятие.

Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро

1. **Цель** - развитие у обучающихся умения понять поставленную задачу и выбрать метод решения, способности к анализу дифференциальных уравнений неразрешенных относительно производной.

2. Актуальность темы

Получение знаний об уравнениях неразрешенных относительно производной и методе интегрирования этого типа.

3. Формируемые компетенции или их части

Выполнение практической части способствует формированию у студентов компетенций ОПК-1

Знать: типы дифференциальных уравнений первого порядка неразрешенные относительно производной.

Уметь: находить решения уравнений неразрешенных относительно производной.

Владеть: методом решения уравнений Лагранжа и Клеро

4. Теоретическая часть

1. Дать определение *изоклин* для уравнения, не разрешенные относительно производной $y' : \Phi(x, y, y') = 0$.
2. В каком случае изоклины являются решением дифференциального уравнения?
3. Приведите пример уравнения, у которого изоклины являются решением.
4. Существуют ли у уравнения Клеро другие решения.
5. Какой осуществляется подход, чтобы найти другие решения уравнения Клеро.
6. Опишите процедуру построения частного решения.
7. Дать определение *особого решения*.
8. Дать определение *оггибающей семейства линий*.
9. В каком случае оггибающая есть особая интегральная кривая уравнения.
10. Как найти оггибающую семейства решений $\Phi(x, y, C) = 0$.
11. Если для уравнения неизвестно семейство общего решения, можно ли тогда найти оггибающую.
12. Какое уравнение называется уравнением *Лагранжа*.
13. К какому классу уравнение относится уравнение *Лагранжа*.
14. Какой метод применяется для нахождения решения уравнения *Лагранжа*.
15. Сколько переменных будет в равенстве после введенной подстановки.
16. Как избавиться от одной из переменных.
17. К какому уравнению можно свести полученное уравнение.
18. Если линейное уравнение решено $x = f(p, C)$, то как запишется общее решение уравнения Лагранжа.

5. Практические задания

Базовый уровень

1. Решить следующие дифференциальные уравнения:
 а) $y\sqrt{1+(y')^2} = y'$; б) $x^3 + (y')^2 = x^2$;
 в) $y = (y')^2 + 2(y')^3$; г) $x = ay' + b(y')^2$;

Задания для реконструктивной работы

2. Найти кривые, обладающие тем свойством, что длина кривой, отсчитываемая от некоторой начальной точки, численно равна площади криволинейной трапеции ограниченной ею.
3. Найти кривую, касательные к которой отсекают на осях координат отрезки, в сумме постоянно составляющие a .
4. Найти кривую, такую, что отрезок, отсекаемый касательной к ней на оси OY , равен обратной величине отрезка, отсекаемого той же касательной на оси OX .
5. Найти кривые, у которых отрезок нормали между осями сохраняет постоянную длину.
6. Найти кривую, у которой длина отрезка касательной между осями координат постоянна и равна a .
7. Найти общие и особые решения следующих уравнений
а) $y^2(1+(y')^2)=a^2$; б) $y^2(y'-1)=(2-y)^2$.
8. Общее решение уравнения имеет вид $y-C^3x^2+2C^2x-C=0$. Найти особое решение.
9. Для семейства кривых $y=C(x-C)^2$ найти огибающую кривую и особое решение уравнения.

Повышенный уровень

10. Найти дифференциальное уравнение семейства парабол $y = x^2 - 2Cx$.
11. Найти дифференциальное уравнение семейства кривых $y = Ce^{-x} + \cos x + \sin x$.
12. Выяснить, каким решением для дифференциального уравнения будет $y \equiv 0$: частным или особым

$$a) \ y' = \begin{cases} y \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0; \end{cases} \quad \delta) \ y' = \begin{cases} 3\sqrt[3]{y \sin \frac{1}{y}}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0; \end{cases}$$

- ## 6. Список литературы 2,3,6,7,8,10.

Тема 2: УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Практическое занятие.

Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков

1. **Цель** - развитие у обучающихся умения понять поставленную задачу и выбрать метод решения, способности к анализу дифференциальных уравнений неразрешенных относительно производной.

2. Актуальность темы

Получение знаний об уравнениях высших порядков и методах понижения, сведение к уравнению первого порядка.

3. Формируемые компетенции или их части

Выполнение практической части способствует формированию у студентов компетенций ОПК-1

Знать: типы дифференциальных уравнений высшего порядка

Уметь: находить решения уравнений высшего порядка.

Владеть: методами понижения порядка уравнений

4. Теоретическая часть

1. Дать определение дифференциального уравнения n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной.
2. Как задаются начальные условия для уравнения n -го порядка.
3. Сформулировать теорему существования и единственности решения для уравнения n -го порядка

4. Сколько параметров имеет семейство решений уравнения n -го порядка
5. Как построить решение удовлетворяющее заданным начальным условиям.

I. Уравнения высших порядков, допускающие разделение переменных

6. Как решается уравнение вида: $y^{(n)} = f(x)$, правая часть которого не зависит от $y, y', \dots, y^{(n-1)}$.
7. Как решается уравнение $F(x, y^{(n)}) = 0$ в том случае, когда невозможно выразить в явном виде производную n – го порядка.

II. Уравнения не содержащие функции в явном виде.

8. Как понизить порядок уравнения, не содержащего функции y и ее нескольких первых последовательных производных $y', y'', \dots, y^{(k-1)}$, т.е. уравнение вида $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n-1)})$.

III. Уравнения не содержащие независимой переменной в явном виде.

9. Как понизить порядок уравнения, когда оно явно не зависит от x .
10. Запишите, применяя правило дифференцирования сложной функции, как выразятся производные y по x второго и третьего порядка.
11. Каков порядок уравнения будет после подстановки найденных производных.

5. Практические задания

1. Решить уравнения:

а) $y'' = x \sin x$;

б) $y''' \sin^4 x = \sin 2x$;

в) $y''' = (y'')^2$;

г) $y''' = (y')^{-3}$;

д) $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$;

е) $xy'' + y' = 0$;

2. Свести уравнения к уравнениям первого порядка и где возможно проинтегрировать:

а) $xyy'' + x(y')^2 = 3yy'$

б) $xy'' + y' = xy$

в) $x^2 y y'' + 1 = (1 - y)xy'$

г) $y'' + 2y(y')^2 = \left(2x + \frac{1}{x}\right)y'$

д) $y(2xy'' + y') = x(y')^2 + 1$

е) $yy' + 2x^2 y'' = x(y')^2$

3. Решить уравнения при данных начальных условиях:

а) $2y'' = 3y^2$, $x_0 = -2$, $y_0 = 1$, $y'_0 = -1$;

б) $y'' = 3x^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, $y'_0 = 1$;

6. Список литературы 2,5,6,7,9,10.

Практическое занятие.

Некоторые виды уравнений высших порядков, допускающие понижение порядка

1. **Цель** - развитие у обучающихся умения понять поставленную задачу и выбрать метод решения, способности к анализу дифференциальных уравнений неразрешенных относительно производной.

2. Актуальность темы

Получение знаний об уравнениях высших порядков и методах понижения, сведение к уравнению первого порядка.

3. Формируемые компетенции или их части

Выполнение практической части способствует формированию у студентов компетенций ОПК-1

Знать: типы дифференциальных уравнений высшего порядка

Уметь: находить решения уравнений высшего порядка.

Владеть: методами понижения порядка уравнений

4. Теоретическая часть

IV. Уравнения, содержащие только две последовательные производные.

1. С помощью какой подстановки уравнение $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ сводится к уравнению первого порядка.
2. Если старшая производная может быть явно выражена через младшую производную $y^{(n)} = F(y^{(n-1)})$, то, к какому типу уравнения эта замена приводит.
3. Выполните разделение переменных и интегрирование в равенстве $u' = F(u)$.
4. Как поступить с равенством $F(u, u') = 0$ в случае, когда старшая производная не может быть выражена через младшую.
5. Выполните разделение переменных и интегрирование в полученной системе.

V. Уравнения, содержащие только две последовательные четные или нечетные производные.

6. С помощью какой подстановки уравнение $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ сводится к уравнению второго порядка.
7. Что надо сделать в соотношении $u'' = F(u)$, чтобы получить равенство дифференциалов: в левой части от u' , в правой части от функции u .
8. Как поступить с равенством $F(u, u'') = 0$ в случае, когда старшая производная не может быть выражена через младшую.
9. Выполните преобразование полученной системы к равенству полных дифференциалов.

5. Практическая часть

1. Из общего интеграла уравнения $yy'' + (y')^2 = 0$ выделите интегральную кривую, проходящую через точку $A(0;1)$ и касающуюся в этой точке прямой $x + y = 1$.
2. Найдите семейство кривых, у в любой точке отношение радиуса кривизны к длине отрезка нормали, заключенного между этой точкой кривой и осью абсцисс равно 2.
3. Найдите семейство кривых, у которых радиус кривизны равен длине нормали (радиус кривизны $R = \frac{1}{y''} \sqrt{1 + (y')^2}$).
4. Найти кривую, кривизна которой есть заданная функция абсциссы.
5. Если тело не слишком быстро погружается в воду, то сопротивление воды можно считать пропорциональным скорости. Найдите закон движения тяжелой материальной точки, погружающейся в воду, если начальная скорость равна нулю.
6. Тяжелое тело скользит по наклонной плоскости. Найдите закон движения, если угол наклона плоскости к горизонтальной поверхности равен α , а коэффициент трения k , $v_0 = 0$.
7. Найти плоские кривые, радиус кривизны которых пропорционален кубу длины отрезка нормали.

6. Список литературы 2,5,6,7,9,10.

Практическое занятие.

Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1. **Цель** - развитие у обучающихся умения понять поставленную задачу и выбрать метод решения, способности к анализу дифференциальных уравнений неразрешенных относительно производной.

2. Актуальность темы

Получение знаний об уравнениях высших порядков и методах понижения, сведение к уравнению первого порядка.

3. Формируемые компетенции или их части

Выполнение практической части способствует формированию у студентов компетенций ОПК-1

Знать: типы дифференциальных уравнений высшего порядка

Уметь: находить решения уравнений высшего порядка.

Владеть: методами понижения порядка уравнений

4. Теоретическая часть

VI. Однородные уравнения высших порядков.

1. Перечислите возможные виды однородностей уравнений высших порядков.
2. Как проверяется однородность относительно функции $y, y', \dots, y^{(n)}$.
3. Какая замена понижает порядок уравнения с такой однородностью.
4. Запишите, применяя правило дифференцирования сложной функции, как выразятся производные y по x первого, второго и третьего порядка через новую функцию u .
5. Как используется однородность уравнения.
6. Как проверяется однородность относительно всех переменных и дифференциалов: $x, dx, y, dy, d^2y, \dots, d^ny$ в обобщенном смысле.
7. Как определяется m . Всегда ли это возможно.
8. Какая замена используется для преобразования уравнения.
9. Запишите, применяя правило дифференцирования, как выразятся дифференциалы dx, dy, d^2y через новую переменную ξ и функцию $u(\xi)$.
10. Как влияет однородность уравнения на вид равенства, полученного после сделанной подстановки.

5. Практические задания

1. Найти форму равновесия однородной нерастяжимой нити под действием ее веса
2. На оси OX в положительном направлении движется с постоянной скоростью a точка P . На плоскости XOY движется точка M с постоянной скоростью v так, что вектор скорости всегда направлен в точку P . Найти траекторию точки M .
3. Тело падает с высоты h под действием силы тяжести. Сопротивление воздуха пропорционально (коэффициент пропорциональности равен k) скорости падения. Найти закон движения тела.
4. Сила, натягивающая пружину, пропорциональна увеличению ее длины и равна 1 кг, когда длина увеличивается на 1 см. К пружине подвешен груз весом 2 кг. Найти период колебательного движения, которое получит груз, если его слегка оттянуть книзу и затем отпустить.
5. Моторная лодка весом 300 кг движется прямолинейно с начальной скоростью 16 м/сек. Сопротивление воды пропорционально скорости движения и равно 10 кг при скорости 1 м/сек. Какое расстояние пройдет лодка, прежде чем ее скорость станет 8 м/сек, и в какое время пройдет оно это расстояние?

6. Список литературы 2,5,6,7,9,10.

ТЕМА 3. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Практическое занятие.

Линейные уравнения. Базис пространства решений

1. **Цель** - развитие у обучающихся умения выделять линейные дифференциальные уравнения n -го порядка, способности к их анализу

2. Актуальность темы

Необходимость рассмотреть основные понятия, связанные с линейными дифференциальными уравнениями n -го порядка; ознакомить с основными принципами и методами их интегрирования.

3. Формируемые компетенции или их части

ОПК-1

Знать: свойства линейного дифференциального оператора

Уметь: находить решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка

Владеть: методами интегрирования линейного дифференциального уравнения n -го по

Знать: виды решений уравнений

Уметь: отличать частное решение от общего

Владеть: методами решения

4. Теоретическая часть

1. Дать определение, какое уравнение называется *линейным дифференциальным уравнением n -го порядка*
2. Если в линейном уравнении функция $f(x) \neq 0$, то, как в этом случае будет называться уравнение.
3. Если в линейном уравнении $f(x) = 0$, то, как называться уравнение в этом случае.
4. Какое уравнение называется *приведенным*.
5. Если уравнение не является приведенным

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = f(x),$$

то как его можно преобразовать к нужному виду.

В дальнейшем будем говорить только о приведенных уравнениях.

6. Дайте определение *линейного дифференциального оператора*.
7. Какими свойствами обладает линейный оператор.
8. Как, используя символику линейного оператора, записать линейное дифференциальное уравнение.
9. Какие и сколько условий необходимо задать, чтобы была поставлена *задача Коши* для линейного уравнения.
10. В чем заключается решение *задачи Коши*
11. Сформулируйте теорему существования и единственности для однородного линейного дифференциального уравнения.
12. Сформулируйте понятие базиса пространства векторов, даваемое в курсе геометрии.
13. Перефразируйте понятие базиса для векторов в понятие базиса для системы решений уравнения.
14. Как определяется размерность пространства.
15. В каком случае два пространства имеют одну и ту же размерность.
16. Сформулируйте теорему о размерности пространства решений для линейного однородного уравнения.
17. Какой принцип лежит в основе доказательства этой теоремы.
18. Если известна система n линейно независимых решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ уравнения $L[y(x)] = 0$, то, как можно записать все решения этого уравнения.
19. Какая система решений называется фундаментальной.

5. Практические задания

1. Дано линейное однородное уравнение $y''' - y''x \sin x + y' \sin x = 0$. Какие из функций являются решениями этого уравнения
а) e^x ; б) C – постоянная; в) x^2 .
2. Дано линейное однородное уравнение $y''' - y'' = 0$. Какие из функций $y_1 = e^x$, $y_2 = 3e^{2x}$, $y_3 = \sin 4x$, $y_4 = e^{-2x}$, $y_5 = 7x - 10$ принадлежат пространству решений этого уравнения.
3. Решить однородное дифференциальное уравнение, зная частные решения:
а) $y'' - y' \operatorname{ctg} 2x + 2y = 0$, если $y_1 = \cos 2x$; б) $y'' - \frac{2}{\sin^2 x} y = 0$, если $y_1 = \operatorname{ctg} x$.

6. Список литературы 2,5,6,7,8,9.

Практическое занятие. Метод вариации произвольных постоянных

1. Цель - развитие у обучающихся умения решать неоднородные линейные дифференциальные уравнения n -го порядка, способности к их анализу

2. Актуальность темы

Необходимость рассмотреть неоднородные линейные дифференциальные уравнения n -го порядка; ознакомить с основными принципами и методами их интегрирования.

3. Формируемые компетенции или их части

Знать: свойства неоднородного линейного дифференциального уравнения

Уметь: находить решения неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка

Владеть: методом вариации произвольных постоянных

4. Теоретическая часть

- [illegible]

5. Практические задания

1. Решить однородное дифференциальное уравнение, зная частные решения:

а) $y''' - \frac{y''}{x} + y' - \frac{y}{x} = 0$, если $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$;

б) $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0$, если $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$;

2. Решить неоднородное уравнение $(2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2$, если оно имеет частные решения $y_1 = 1$, $y_2 = x$. Найти общее решение.

3. Решить уравнение $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$, зная частное решение $y_1 = x$, соответствующего однородного уравнения.

4. Решить уравнение $xy'' - y' = x^2$.

5. Найти общее решение уравнения $y'' + \frac{xy'}{1-x} - \frac{y}{1-x} = x-1$, зная, что одно частное решение однородного уравнения есть $y = e^x$.

6. Найти общее решение

$$y'' + \frac{1}{x^2 \ln x} y = e^x \left(\frac{2}{x} + \ln x \right),$$

если частное решение однородного уравнения есть $y = \ln x$.

Задания повышенной сложности

1. Найти общее решение уравнений:

а) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x$, зная частные решения $y_1 = x$, $y_2 = x^2$;

б) $xy''' - y'' + xy' - y = 1$, частное решение $y_1 = x$;

2. Проинтегрировать уравнение, допускающее понижение порядка

$$x^2y''' + xy'' - y' = 3x^2.$$

3. Какая подстановка приводит сразу к уравнению $(n-2)$ -го порядка, если известны два частных решения y_1 и y_2 линейного уравнения n -го порядка.

6. Список литературы 2,5,6,7,9,10.

Практическое занятие. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

1. **Цель** - развитие у обучающихся умения понять поставленную задачу и выбрать метод решения для линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами, способности проводить анализ линейного оператора с постоянными коэффициентами.

2. Актуальность темы

Получение знаний об линейных однородных уравнениях с постоянными коэффициентами, построении их решений с помощью корней характеристического уравнения.

3. Формируемые компетенции или их части

Выполнение практической части способствует формированию у студентов компетенций ОПК-1

Знать: типы корней характеристического уравнения и собственные функции линейного оператора

Уметь: находить решения уравнений, используя корни характеристического уравнения.

Владеть: методами интегрирования однородных уравнений с постоянными коэффициентами

4. Теоретическая часть

1. Дать определение оператора.

2. Приведите примеры операторов.
3. Дать определение линейного дифференциального оператора.
4. Дать определение характеристического многочлена.
5. Сформулируйте теорему о разложении многочлена на множители.
6. Можно ли разложить дифференциальный оператор на множители.
7. Дать определение *квазимногочлена*.
8. Сформулируйте теорему о действии оператора $(D-r)^k$ на квазимногочлен.
9. Каким методом доказываются эти теоремы.
10. Запишите результат действия линейного оператора на показательную функцию e^{rx} .
11. В каком случае показательная функция e^{rx} является решением уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0.$$
12. Сформулируйте теорему о построении решения линейного дифференциального уравнения в случае, когда характеристический многочлен не имеет кратных корней.
13. Если характеристическое уравнение с действительными коэффициентами имеет комплексные корни, то какие они между собой.
14. Как запишутся функции соответствующие комплексно сопряженным корням $\mu + i\eta$, $\mu - i\eta$.
15. Как преобразовать решение к виду, не содержащему комплексных чисел.
16. Сформулируйте теорему о фундаментальной системе решений линейного дифференциального уравнения, когда его характеристическое уравнение имеет кратные корни.
17. На основании какого утверждения можно говорить о том, что квазимногочлен может быть решением однородного дифференциального уравнения.
18. Сформулируйте общую теорему о фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения.

5. Практические задания

1. Решить следующие однородные линейные дифференциальные уравнения:

а) $y''' - 13y'' + 12y' = 0$;	б) $y^{VII} + 3y^{VI} + 3y^V + y^{IV} = 0$;
в) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$;	г) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$;

Задания для реконструктивной работы

2. Показать, что уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x),$$
 где $a_1, a_2, \dots, a_n$ - постоянные, сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного $x = e^t$ при $x > 0$ и $x = -e^t$ при $x < 0$.
3. Используя результат задания (2), решить следующие уравнения Эйлера:

а) $x^2 y'' - 2y = 0$;	б) $x^2 y'' + xy' + y = 0$;
-------------------------	------------------------------
4. Делая замену переменной $x = \cos \varphi$, найти фундаментальную систему решений уравнения

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0.$$
5. Составить линейные однородные дифференциальные уравнения, зная их характеристическое уравнение:

а) $9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$;	б) $\lambda(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$;
--------------------------------------	--

Задания повышенной сложности

6. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$, при $n = \frac{1}{2}$ интегрируется в элементарных функциях.

Указание: сделать замену искомой функции $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$.

7. При каких значениях p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$

а) стремятся к нулю при всех $x \geq 0$;

б) ограничены при всех $x \geq 0$;

в) периодические функции от x .

6. Список литературы 2,5,6,7,9,10.

Практическое занятие.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. **Цель** - развитие у обучающихся умения понять поставленную задачу и выбрать метод решения для линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами, способности проводить анализ уравнения с правой частью в виде квазимногочлена.

2. Актуальность темы

Получение знаний об линейных неоднородных уравнениях с постоянными коэффициентами, построении их решений, если неоднородный член имеет вид квазимногочлена.

3. Формируемые компетенции или их части

Выполнение практической части способствует формированию у студентов компетенций ОПК-1

Знать: теоретические основы действия линейного оператора на квазимногочлен.

Уметь: находить решения неоднородного уравнения с правой частью в виде квазимногочлена.

Владеть: методом неопределенных коэффициентов

4. Теоретическая часть

1. Как запишется соответствующее линейное однородное уравнение для линейного неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$, где $f(x)$ - заданная функция.

2. Как связаны решения $L[y] = f(x)$ и $L[y] = 0$.

3. Какой универсальный метод построения частного решения на основании фундаментальной системы решений однородного уравнения вы знаете.

4. Дайте понятие квазимногочлена.

5. Запишите формулы Эйлера, связывающие показательную и тригонометрические функции.

6. Приведите примеры квазимногочленов.

7. Какой вид имеют общие решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

8. Верно ли обратное.

9. Если необходимо решить линейное уравнение, имеющее неоднородность в виде квазимногочлена, т.е. $L[y] = P_s(x)e^{\lambda x}$, s - степень многочлена, то какой вид частного решения следует ожидать.

10. Как называется метод поиска решений линейных неоднородных уравнений среди квазимногочленов.

11. Как определить вид частного решения методом неопределенных коэффициентов для уравнения $L[y] = P_s(x)e^{\lambda x}$, где s - степень многочлена.

12. Как определяются коэффициенты многочлена $g_s(x)$.

5. Практические задания

1. Решить следующие неоднородные дифференциальные уравнения:

а) $y'' - 5y' + 6y = x$;

б) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{3x}$;

в) $y'' + y = \cos x$;

г) $y'' + 4y = 8\sin 2x$;

2. Определить вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, если известны корни его характеристического уравнения и правая часть $f(x)$:

а) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, f(x) = ax^2 + bx + c$; б) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, f(x) = \sin x + \cos x$;

в) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, f(x) = e^{-x}(ax + b)$; г) $\lambda_1 = -ki, \lambda_2 = ki, f(x) = A\sin kx + B\cos kx$.

3. Методом вариации постоянных решить уравнения Эйлера:

а) $xy'' + 2y' = 10x$;

б) $x^2y'' - 6y = 12\ln x$;

Задания повышенной сложности

4. Уравнение свободных упругих колебаний при наличии сопротивления имеет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2n\frac{dy}{dx} + a^2y = f(x), \quad n > 0.$$

Определить когда колебания являются затухающими.

5. Уравнение упругих колебаний без сопротивления при наличии возмущающей периодической силы имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = p\sin \omega t, \quad (a, p, \omega - \text{const}).$$

6. Уравнение колебаний при наличии сопротивления и возмущающей силы записывается так

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + a^2x = p\sin \omega t, \quad (a, p, \omega - \text{const}).$$

Рассмотреть явление резонанса при наличии сопротивления.

6. Список литературы 2,5,6,7,9,10.

6 СЕМЕСТР

Тема 5: СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Практическое занятие.

Системы дифференциальных уравнений

1. **Цель** - развитие у обучающихся умения понять поставленную задачу и выбрать метод решения для системы уравнений, способности проводить анализ систем уравнений.

2. Актуальность темы

Получение знаний об системах дифференциальных уравнений, построении их решений.

3. Формируемые компетенции или их части

Выполнение практической части способствует формированию у студентов компетенций ОПК-1

Знать: теоретические основы систем дифференциальных уравнений

Уметь: находить решения систем дифференциальных уравнений приведением к уравнению высших порядков

Владеть: методом нахождения первых интегралов

4. Теоретическая часть

1. Дать определение системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Какой вид системы называется *нормальной формой Коши*.
3. дайте определение решения системы.
4. Как связаны между собой уравнения n - го порядка и системы.
5. Как связаны решения системы и уравнения n - го порядка.
6. Существует ли обратная связь между системами и уравнениями n - го порядка.
7. Всегда ли осуществим переход от системы к одному уравнению n - го порядка.
8. Как отыскать решения системы, если решение построенного уравнения n - го порядка найдено.
9. Дайте определение задачи Коши для системы уравнений.
10. Сформулируйте теорему, когда решение задачи Коши единственное.
11. В чем заключается условие Липшица.
12. Можно ли в теореме заменить условие Липшица.
13. Дать понятие *интегрируемых комбинаций*.
12. Дать определение *первого интеграла (закона сохранения)* системы.
13. Дать понятие *общего интеграла* системы
14. Когда система считается проинтегрированной.
15. Если $C = \phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ - первый интеграл, то какому уравнению в частных производных он удовлетворяет.
16. Какой вид записи системы называется симметричным.
17. Для системы, записанной в симметричной форме, какому условию будет удовлетворять первый интеграл $C = \chi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$.

5. Практические задания

Задачи для репродуктивной СРС

1. Привести к нормальной форме Коши следующие системы дифференциальных уравнений:

$$a) \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} - y = 0, \\ t^3 \frac{dy}{dt} - 2x = 0. \end{cases} \quad б) \frac{d^2 x}{dt^2} + p(t) \frac{dx}{dt} + q(t)x = 0.$$

2. Проверить, являются ли данные системы функций решениями заданных систем дифференциальных уравнений:

$$a) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2tx_1^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2 + t}{t}; \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{t^2}, \\ x_2 = t \ln t; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = e^{t-x_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2e^{x_1}; \end{cases} \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = 2e^t; \end{cases}$$

3. Привести следующие системы к одному уравнению высшего порядка и таким образом найти их общее решение:

$$a) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}y; \quad б) \frac{dy}{dx} = e^{x-y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{2x-z^2};$$

Задания повышенной сложности

1. Для следующих систем дифференциальных уравнений проверить, образуют ли данные пары функций системы независимых первых интегралов:

$$a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{t-y}{y-x}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x-t}{y-x}; \end{cases} \begin{cases} x+y+t = C_1, \\ x^2+y^2+t^2 = C_2. \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{t+y}{x+y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{t+x}{x+y}; \end{cases} \begin{cases} \frac{x-y}{t-x} = C_1, \\ \frac{t-x}{t-y} = C_2. \end{cases}$$

2. Проверить, являются ли независимыми первые интегралы $\frac{x+y}{z+x} = C_1, \frac{z-y}{y+x} = C_2$ системы $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$.

3. Доказать, что система $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ имеет первый интеграл $C = x^2 + y^2$.

4. Найти независимые первые интегралы системы уравнений:

$$a) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z}; \quad б) \frac{dx}{\cos y} = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dz}{\cos x \cos y};$$

6. Список литературы 2,5,6,7,9,10.

Практическое занятие.

Линейные системы дифференциальных уравнений первого порядка

1. **Цель** - развитие у обучающихся умения понять поставленную задачу и выбрать метод решения для линейных систем уравнений, способности проводить их анализ и строить решения.

2. Актуальность темы

Получение знаний об линейных системах дифференциальных уравнений первого порядка, построении их решений.

3. Формируемые компетенции или их части

Выполнение практической части способствует формированию у студентов компетенций ОПК-1

Знать: теоретические основы линейных систем дифференциальных уравнений

Уметь: находить решения линейных систем дифференциальных уравнений

Владеть: методом использования определителя Вронского

4. Теоретическая часть

1. Дать определение *линейной однородной системой дифференциальных уравнений первого порядка*

2. Сформулируйте теорему, когда решение задачи Коши для системы уравнений единственное.

3. Как изменится формулировка этой теоремы для линейной однородной системы.
4. Почему условие Липшица в теореме можно опустить.
5. Если свести линейную систему к одному уравнению n -го порядка, то какой тип дифференциальных уравнений мы получим.
6. Какую размерность имеет система решений линейного дифференциального уравнения n -го порядка.
7. Какую размерность имеет совокупность решений линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка.
8. Сформулируйте теорему о свойствах решений системы $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$, при условии, что существует $A > 0$, $A = \text{const}$: $\|A(x)\| \leq A$, где $\|A(x)\|$ означает норму матрицы $A(x)$:

$$\|A(x)\| = \sup_{|Y| \leq 1} |AY|.$$
9. Очевидно, что $Y(x) = 0$ есть решение однородной системы дифференциальных уравнений (1), то какое следствие можно сформулировать.
10. Сформулируйте условие, при котором система функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ – является линейно зависимой.
11. Какая система решений называется *фундаментальной*.
12. Как записывается общее решение, если известна фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений.
13. Сделайте вывод о пространстве решений системы линейных уравнений первого порядка.
14. Какая связь существует между определителем Вронского, составленным для фундаментальной системы решений и коэффициентами линейной однородной системы (1).
15. Может ли определитель Вронского обращаться в нуль.
16. Дать определение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений.
17. Как связаны решения неоднородной системы $\frac{dY}{dx} = A(x)Y + H(x)$ и соответствующей ей однородной системы $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$.
18. Какой метод применяется для отыскания частного решения.
19. В чем заключается метод вариации постоянных.
20. Сформулируйте теорему о существовании частного решения неоднородной линейной системы.

5. Практические задания

1. Показать, что система функций

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ x_2(t) = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} \end{cases}$$

является общим решением системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 - 4x_1. \end{cases}$$

Найти частное решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям $x_1(0)=0$, $x_2(0)=-4$.

2. Найти линейную однородную систему, имеющую следующую фундаментальную систему решений:

$$a) \begin{cases} Y_{11} = x, & Y_{12} = x^2, \\ Y_{21} = -e^x x^{-2}, & Y_{22} = e^x x^{-1}; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} y_{11} = e^x \cos x, & y_{12} = e^x \sin x, \\ y_{21} = -\sin x, & y_{22} = \cos x. \end{cases}$$

3. Зная фундаментальную систему решений системы уравнений найти общее решение:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2z}{x^2} = 1, \quad \frac{dz}{dx} + y = x,$$

$$y_1 = -2x, \quad y_2 = -\frac{1}{x^2}, \quad z_1 = x^2, \quad z_2 = -\frac{1}{x}.$$

Задания для реконструктивной работы

4. Найти общее решение системы:

а) $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x^2}z = 0, \quad \frac{dz}{dx} = -y;$ б) $t \frac{dx}{dt} - x - 3y = 0, \quad t \frac{dy}{dt} - x + y = 0;$

5. Найдите решение системы

$$\begin{cases} xy'_1 = y_1 - 2y_2, \\ xy'_2 = y_1 - 2y_2. \end{cases}$$

Доказать, что решение, определяемое начальными данными существует тогда и только тогда, когда $y_1^0 = 2y_2^0$ и оно единственно.

Задания повышенной сложности

6. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}y, \\ \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}z + y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} - 1\right)y + \left(\frac{2}{x} - 1\right)z \end{cases}$

7. Пусть столбцами матрицы $Y(x)$ служат какие либо n решений системы (1). Докажите, что такая матрица удовлетворяет матричному уравнению

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y.$$

При этом $\det Y(x) \equiv 0$ либо $\det Y(x) \neq 0$ (т.е. $Y(x)$ - фундаментальная матрица системы (1)). Если $\det Y(x) \neq 0$, то общее решение системы (1) имеет вид $Y(x)C$, где C - произвольный постоянный вектор; решение системы (1) при начальном условии $y_i(x_0) = y_i^0$ примет вид: $Y(x)[Y(x_0)]^{-1}y_i^0, \quad i = 1, \dots, n.$

6. Список литературы 2,5,6,7,9,10.

Тема 6: СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Практическое занятие.

Системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

1. **Цель** - развитие у обучающихся умения понять поставленную задачу и выбрать метод решения для линейных однородных систем с постоянными коэффициентами, способности проводить их анализ и строить решения.

2. Актуальность темы

Получение знаний об однородных линейных системах с постоянными коэффициентами первого порядка, построении их решений с помощью собственных значений характеристического уравнения.

3. Формируемые компетенции или их части

Выполнение практической части способствует формированию у студентов компетенций ОПК-1

Знать: теоретические основы однородных линейных систем с постоянными коэффициентами

Уметь: находить решения задачи Коши линейных однородных дифференциальных систем

Владеть: методами интегрирования линейных однородных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами

Знать: виды собственных значений уравнения на собственные значения

Уметь: отличать кратные и повторные корни характеристического уравнения

Владеть: матричным методом, методом весовых коэффициентов

4. Теоретическая часть

1. Дать определение системы линейных однородных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.
2. Если рассматривать уравнение $Y' = AY$, как обыкновенное уравнение первого порядка ($n = 1$), то какой вид имеет его решение с начальным условием $Y(x_0) = Y_0$.
3. Нельзя ли использовать известное решение уравнения первого порядка для построения интегральных функций однородных систем.
4. Для какой матрицы A члены ряда $e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$ вычисляются наиболее просто.
5. Какие сведения из курса алгебры позволяют привести матрицу A к диагональному виду или к почти диагональной форме.
6. Если имеется некоторое преобразование B , которое связывает две эквивалентные матрицы A, A^* , то с помощью каких равенств осуществляется переход от одной матрицы к другой.
7. Единственно ли такое преобразование, связывающее две эквивалентные матрицы.
8. Как называется базис в котором матрица A будет иметь жорданов канонический вид.
9. В каком случае матрица A в собственном базисе (A^*) имеет диагональный вид.
10. Как можно определить собственные значения матрицы A .
11. Если A^* имеет диагональный вид, тогда какой вид имеет экспонента такой матрицы e^{A^*x} .
12. Какой канонический вид имеет матрица A , если ее собственные значения кратны.
13. Дайте определение *нильпотентной* матрицы.
14. Как определяется степень Δ^m *нильпотентной* матрицы.
15. Как запишется ряд для e^A .
16. Если матрица A имеет собственное число λ кратности n , то как можно записать ее жорданову каноническую форму.
17. Как запишется ряд для e^{A^*x} .
18. Какой вид имеет матрица e^{A^*x} , если $A^* = \lambda E + \Delta$.

5. Практические задания

1. Решить следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} y_1' = 4y_1 + 6y_2, \\ y_2' = -3y_1 - 5y_2, \\ y_3' = -3y_1 + y_3; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} y_1' = 3y_1 + 8y_3, \\ y_2' = 3y_1 - y_2 + 6y_3, \\ y_3' = -2y_1 - 5y_3; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} y_1' = -4y_1 + 2y_2 + 10y_3, \\ y_2' = -4y_1 + 3y_2 + 7y_3, \\ y_3' = -3y_1 + y_2 + 7y_3; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} y_1' = 7y_1 - 12y_2 - 2y_3, \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2, \\ y_3' = -2y_1 - 2y_3; \end{cases} \end{array}$$

Задания повышенной сложности

1. С помощью замены независимой переменной привести систему к системам с постоянными коэффициентами и проинтегрировать их:

$$a) \begin{cases} 2\sqrt{xy}' = 2y - z, \\ 2\sqrt{xz}' = y + 2z, \end{cases} \quad б) \begin{cases} x^2 y' = -y - 2z, \\ x^2 z' = 3y + 4z. \end{cases}$$

2. . Найти четвертые приближения для системы

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = y, \end{cases}$$

при начальных данных: $y = 1, z = 0$, при $x = 0$.

6. Список литературы 2,5,6,7,9,10.

Практическое занятие.

Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

1. **Цель** - развитие у обучающихся умения понять поставленную задачу и выбрать метод решения для линейных неоднородных систем с постоянными коэффициентами, способности проводить их анализ и строить решения.

2. Актуальность темы

Получение знаний об неоднородных линейных системах с постоянными коэффициентами первого порядка, построении их решений, если неоднородная часть - квазимногочлен.

3. Формируемые компетенции или их части

Выполнение практической части способствует формированию у студентов компетенций ОПК-1

Знать: теоретические основы неоднородных линейных систем с постоянными коэффициентами

Уметь: находить решения неоднородных линейных дифференциальных систем с неоднородностью в виде квазимногочлена.

Владеть: методами интегрирования линейных неоднородных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами

Знать: способы построения частного решения

Уметь: отличать, какой метод необходимо применять

Владеть: матричным методом, методом неопределенных коэффициентов, методом вариации произвольных постоянных

4. Теоретическая часть

1. Дать определение *системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*.

2. Как можно записать такую систему в векторной форме.

3. Сформулируйте теорему об общем решении неоднородной линейной системы.

4. Какие способы нахождения частного решения вы знаете.

I. Матричный метод

5. Когда предпочтительней применять матричный метод.

6. Если имеется некоторое преобразование B , которое связывает две эквивалентные матрицы A, A^* , то с помощью каких равенств осуществляется переход от исходной системы к системе в собственном базисе.

7. После решения системы $\frac{dZ}{dx} = A^* Z + H(x)$, как можно найти решение исходной системы.

II. Метод вариации произвольных постоянных

8. Когда предпочтительней применять метод вариации произвольных постоянных.

9. На чем основан метод вариации произвольных постоянных.

III. Метод неопределенных коэффициентов

10. Когда предпочтительней применять метод неопределенных коэффициентов.

11. Опишите основную идею метода неопределенных коэффициентов.
12. Как определяются неизвестные коэффициенты в $Q_{ij}^{s,j}(x)e^{\mu_j x}$.

5. Практические задания

1. Решить неоднородные системы уравнений:

$$a) \begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + e^x, \\ y_2' = 3y_1 + y_2 + e^{2x}; \end{cases} \quad б) \begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + 1, \\ y_2' = 3y_1 + y_2 + t; \end{cases}$$

2. Найти частное решение указанного вида методом неопределенных коэффициентов и построить общее решение:

$$\begin{cases} y' = -y + z - 2e^{-x}, \\ z' = -6y + 4z - 4e^{-x}; \end{cases} \quad y_1 = ae^{-x}, \quad z_1 = be^{-x};$$

Задания повышенной сложности

3. Решить неоднородные системы уравнений:

$$a) \frac{dy}{dx} + \frac{2z}{x^2} = 1, \quad \frac{dz}{dx} + y = x; \quad б) t \frac{dx}{dt} - x - 3y = t, \quad t \frac{dy}{dt} - x + y = 0,$$

Указание. В примерах со звездочкой сделать замену независимого переменного, чтобы привести систему к системе с постоянными коэффициентами.

4. Решить системы методом вариации постоянных:

$$a) \begin{cases} x' = x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ y' = 2x - y; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x' = 2y - x, \\ y' = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}; \end{cases}$$

6. Список литературы 2,5,6,7,9,10.

Тема 7: ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ. ТЕОРИЯ ЛЯПУНОВА

Практическое занятие.

Понятие устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости

1. **Цель** - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1

2. Актуальность темы

Необходимость рассмотреть основные понятия теории устойчивости Ляпунова, ознакомить с основными принципами, изучить этапы развития теории. В результате усвоения данной темы студенты должны изучить возможности анализа устойчивых и неустойчивых точек покоя, уметь определить тип устойчивости, уметь их классифицировать.

3. Формируемые компетенции или их части ОПК-1

Знать: понятие устойчивости, асимптотической устойчивости решения

Уметь: доказывать устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивость стационарных точек

Владеть: методами анализа типа устойчивости

Знать: классификацию стационарных точек для уравнений и систем второго порядка

Уметь: отличать устойчивость и асимптотическую устойчивость

Владеть: методами Ляпунова

4. Теоретическая часть

1. Какие проблемы решает теория устойчивости.
2. Какие условия в задачах теории устойчивости являются основополагающими.

3. Какая теорема в теории дифференциальных уравнений дает выполнение этих требований.
4. В чем суть этой теоремы.
5. Какой смысл в математическом анализе имеет понятие непрерывности для функций.
6. К чему приводит отсутствие выполнения условия непрерывной зависимости.
7. Сформулируйте понятие непрерывной зависимости решения системы от начальных условий.
8. Дайте определение *устойчивости решения по Ляпунову*.
9. Дайте определение *асимптотической устойчивости решения*.
10. Какое решение называется тривиальным.
11. Какой физический смысл имеет тривиальное решение.
12. Какое условие для уравнения $\frac{dY}{dx} = F(x, Y)$ должно выполняться, чтобы оно имело тривиальное решение.
13. Можно ли свести исследование системы $Y' = F(x, Y)$ с ненулевыми заданными условиями $Y(x_0) = Y_0$, к задаче Коши с нулевыми начальными условиями.
14. Как выполняется преобразование системы, чтобы исследование системы на устойчивость с условиями $Y(x_0) = Y_0$, свести к рассмотрению задачи Коши с нулевыми условиями.
15. Какая система уравнений получится при этом преобразовании.
16. Сформулируйте теорему связи устойчивостей по Ляпунову (асимптотической устойчивости) для тривиального и нетривиального решений системы.
17. Сформулируйте теорему Ляпунова об устойчивости тривиального решения системы.
18. Как называется функция $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$.
19. Как можно найти функцию Ляпунова.
20. Сформулируйте теорему о неустойчивости тривиального решения системы.

5. Практические задания

1. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, исследовать на устойчивость решения уравнений:

а) $\frac{dx}{dt} = 2t(x+1), x(0) = 0;$

б) $\frac{dx}{dt} = -x + t^2, x(1) = 1.$

2. Показать, что для уравнения физического маятника $y'' = -\sin x$ положения равновесия $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ устойчивы по Ляпунову, а положения равновесия $x = \frac{2k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}$, неустойчивы.

3. С помощью функций Ляпунова исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

а) $\begin{cases} y_1' = -y_1^5 - y_2, \\ y_2' = -y_2^3 + y_1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y_1' = y_1 y_2^4, \\ y_2' = -y_1^2 y_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y_1' = -y_1^3 + y_2, \\ y_2' = -y_1 - 3y_2^3. \end{cases}$

Задания для реконструктивной работы

4. Для данных систем найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость:

а) $\begin{cases} x' = y - x^2 - x, \\ y' = 3x - x^2 - y, \end{cases}$

б) $\begin{cases} x' = (x-1)(y-1), \\ y' = xy - 2; \end{cases}$

5. Исследовать, устойчиво ли решение $x = t, y = -t^2$, системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \ln(1 + 2t - 2x) + 3y + 3t^2 + 1, \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - 2tx - 2x - y. \end{cases}$$

6. Исследовать решение системы $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \cos(x_1 + x_2), \end{cases} \quad X_k = (x_1, x_2) = \left(\frac{\pi}{2}(2k+1), 0 \right), k \in \mathbb{Z},$ на устойчивость.

Задания повышенной сложности

1. Выяснить, является ли нулевое решение некоторой системы уравнений устойчивым по Ляпунову, если известно, что общее решение этой системы имеет вид:

$$x = \frac{C_1 - C_2 t}{1 + t^2}, \quad y = (C_1 t^3 + C_2) e^{-t}.$$

2. Доказать, что для устойчивости по Ляпунову нулевого решения уравнения $\frac{dx}{dt} = a(t)x$ ($a(t)$ – непрерывна) необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t a(x) dx < +\infty$.

6. Список литературы 2,5,6,7,9,10.

Практическое занятие.

Устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

1. **Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими компетенциями: ОПК-1

2. Актуальность темы

Необходимость рассмотреть основные понятия теории устойчивости Ляпунова для линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, ознакомить с основными принципами теории. В результате усвоения данной темы студенты должны изучить возможности анализа устойчивых по корням характеристического уравнения.

3. Формируемые компетенции или их части

ОПК-1

Знать: понятие устойчивости, асимптотической устойчивости решения линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Уметь: доказывать устойчивость (асимптотическую устойчивость) или неустойчивость стационарных точек

Владеть: методами анализа типа устойчивости

Знать: классификацию стационарных точек для линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Уметь: отличать устойчивость и асимптотическую устойчивость

Владеть: методами Ляпунова

4. Теоретическая часть

1. Дайте классификацию видов точек покоя системы однородных линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. Изобразите поведение траекторий фазового пространства в окрестности устойчивого узла (неустойчивого узла).
3. Какой вид собственных значений матрицы коэффициентов дает устойчивый узел (неустойчивый узел).
4. Изобразите поведение траекторий фазового пространства в окрестности седловидной точки покоя.

5. Какой вид собственных значений матрицы коэффициентов дает седло.
6. Изобразите поведение траекторий фазового пространства в окрестности центра.
7. Какой вид собственных значений матрицы коэффициентов дает точку покоя в виде центра.
8. Изобразите поведение траекторий фазового пространства в окрестности устойчивого фокуса (неустойчивого фокуса).
9. Какой вид собственных значений матрицы коэффициентов дает точку покоя в виде устойчивого фокуса (неустойчивого фокуса).
10. Перечислите возможные виды вырожденных случаев для систем второго порядка.
11. В каком случае возникает устойчивый вырожденный узел, неустойчивый вырожденный узел, дикритический узел.
12. Какой вид имеют фазовые траектории при двукратном нулевом собственном значении матрицы коэффициентов

5. Практические задания

Задачи для репродуктивной работы

1. Исследовать на устойчивость решения следующих уравнений и систем:
 - а) $\frac{dx}{dt} = x + t, x(0) = 1;$
 - б) $\frac{dx}{dt} = -x + t^2, x(1) = 1;$
 - в) $\frac{dx}{dt} = 2 + t, x(0) = 1;$
2. При каких значениях α точка покоя $(0,0)$ системы устойчива

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + \alpha y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

является

- а) устойчивым узлом;
- б) неустойчивым узлом;
- в) седлом;
- г) центром;
- д) устойчивым фокусом;
- е) неустойчивым фокусом.

Задания для реконструктивной работы

1. Выяснить тип расположения фазовых траекторий системы в окрестности точки равновесия $x = y = 0$:
 - а) $\frac{dx}{dt} = x^l, \frac{dy}{dt} = ax^m + by$, где $l \geq 2, m \geq 1, l, m \in \mathbb{N}, a, b \neq 0 - \text{const}$;
 - б) $\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = ax^m + by^n$, где $n \geq 2, m \geq 1, l, m \in \mathbb{N}, a, b \neq 0 - \text{const}$;
2. Определить характер точек покоя для следующих систем дифференциальных уравнений. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y) , начальные условия задать самостоятельно.
 - а) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x, \\ \frac{dy}{dt} = 3y; \end{cases}$
 - б) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y; \end{cases}$
 - в) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y; \end{cases}$
3. Докажите, что если особая точка уравнения

$$(ax + by)dx + (mx + ny)dy = 0$$
 является центром, то это уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Обратное неверно.

6. Список литературы 2,5,6,7,9,10.

Практическое занятие.

Поведение траекторий линейной однородной системы второго порядка

1. **Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими компетенциями: ОПК-1

2. Актуальность темы

Необходимость рассмотреть основные понятия теории устойчивости Ляпунова для линейных систем второго порядка, ознакомить с основными принципами теории. В результате усвоения данной темы студенты должны изучить возможности анализа устойчивых по собственным значениям уравнения на собственные значения.

3. Формируемые компетенции или их части

ОПК-1

Знать: понятие устойчивости, асимптотической устойчивости решения линейных систем второго порядка

Уметь: классифицировать стационарные точки

Владеть: методами анализа типа устойчивости

Знать: классификацию стационарных точек для линейных систем второго порядка

Уметь: отличать устойчивость и асимптотическую устойчивость

Владеть: методами Ляпунова

4. Теоретическая часть

1. Запишите линейную однородную систему с постоянными коэффициентами из n дифференциальных уравнений в векторном виде.
2. Какой вид имеют функции входящие в фундаментальную систему решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.
3. Как определяются собственные значения матрицы A .
4. Сформулируйте теорему об ограниченности решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.
5. Имеет ли линейная однородная система с постоянными коэффициентами тривиальное решение.
6. Сформулируйте теорему об устойчивости положения равновесия для линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.
7. Сформулируйте теорему об устойчивости положения равновесия для линейной неоднородной системы вида $Y' = AY + F(x, Y)$.
8. Сформулируйте теорему об неустойчивости положения равновесия для линейной неоднородной системы вида $Y' = AY + F(x, Y)$.
9. Дать понятие кинематической интерпретации системы уравнений в фазовом пространстве.
10. Дайте классификацию собственных значений матрицы коэффициентов системы однородных линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.
11. Дайте классификацию видов точек покоя системы однородных линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

5. Практические задания

Базовый уровень

1. Выяснить тип расположения фазовых траекторий системы в окрестности точки равновесия $x = y = 0$:

$$a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3, \\ \frac{dy}{dt} = -(x^3 + 3ax^2y + 3bxy^2 + cy^3), \end{cases} \quad a, b, c, d \in R; \quad б) \frac{dx}{dt} = y + (x + y)^3, \quad \frac{dy}{dt} = -(x + y)^3$$

2. Определить характер точек покоя для следующих систем дифференциальных уравнений. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y) ,

начальные условия задать самостоятельно.

$$a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + \frac{5}{7}y, \\ \frac{dy}{dt} = 7x - 3y. \end{cases}$$

3. Исследовать на устойчивость нулевое решение, определяемое однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка $y'' + py' + qy = 0$, где p, q - действительные числа, по его характеристическим числам.
4. Доказать, что для того, чтобы нулевое решение задачи 3 было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы характеристический полином $\lambda^2 + p\lambda + q$ имел: $p > 0, q > 0$.

Задания повышенной сложности

1. Для следующих уравнений дать чертеж расположения интегральных кривых в окрестности начала координат:

$$a) y' = \frac{xy}{x+y};$$

$$б) y' = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y};$$

2. Доказать, что если уравнение $(ax + by)dx + (mx + ny)dy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах, но имеет интегрирующий множитель, непрерывный в окрестности начала координат, то особая точка - седло.
3. Доказать, что в области, содержащей особую точку типа узла или фокуса, для системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

не может существовать первого интеграла вида $\varphi(x, y) = C$ с непрерывной функцией φ .

6. Список литературы 2,5,6,7,9,10.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Перечень основной литературы:

1. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. - 6-е изд. - Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. - 396 с. - ISBN 978-5-4344-0786-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/92055.html>
2. Кюркчан А. Г. Конспект лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ч. 1: учебное пособие / А. Г. Кюркчан, Н. И. Смирнова. - 2-е изд. - Москва: Московский технический университет связи и информатики, 2015. - 50 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/92425.html>
3. Кюркчан А. Г. Конспект лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ч. 2: учебное пособие / А. Г. Кюркчан, Н. И. Смирнова. - 2-е изд. - Москва: Московский технический университет связи и информатики, 2015. - 53 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/92426.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В. К. Романко, Н. Х. Агаханов, В. В. Власов, Л. И. Коваленко; под редакцией В. К. Романко. - 6-е изд. - Москва: Лаборатория знаний, 2020. - 220 с. - ISBN 978-5-00101-799-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. -URL: <https://www.iprbookshop.ru/88985.html>
2. Щербакова Ю. В. Дифференциальные уравнения: учебное пособие / Ю. В. Щербакова. - 2-е изд. - Саратов: Научная книга, 2019. - 159 с. - ISBN 978-5-9758-1728-0. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/81007.html>
3. Литвин Д. Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы: учебное пособие / Д. Б. Литвин, С. В. Мелешко, И. И. Мамаев. - Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, Сервисшкола, 2017. -76 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/76118.html>

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

<http://biblioclub.ru/> - ЭБС «Университетская библиотека online»

<http://biblio-online.ru/> - ЭБС «Biblio-online.ru»

<http://cyberleninka.ru/> - Научная электронная библиотека «КиберЛенинка»

<http://elibrary.ru> – Научная электронная библиотека

<http://www.iprbookshop.ru/> - ЭБС «IPRbooks»

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «Дифференциальные уравнения»
для студентов направления подготовки
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
направленность (профиль)
«Анализ данных и искусственный интеллект»

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

План-график выполнения самостоятельной работы

Методические рекомендации по изучению теоретического материала, подготовке к практическим работам

Критерии оценивания компетенций

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Методические указания по подготовке контрольной работы

Методические указания по подготовке реферата

Методические указания по подготовке к экзамену

Список литературы

Введение

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студента).

Самостоятельная работа студента является важным видом учебной и научной деятельности студента. Федеральным государственным образовательным стандартом предусматривается значительный объем времени из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу. В связи с этим, обучение включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому самостоятельная работа должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования – подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности.

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

Самостоятельная работа студента предполагает, прежде всего, его научно-исследовательскую и практическую деятельность, поскольку именно эти виды учебной работы в первую очередь готовят к самостоятельному выполнению профессиональных задач. Конечной целью самостоятельной работы является организация самостоятельной познавательной деятельности, формирование умения самостоятельно анализировать информацию, выделять главное и второстепенное.

Основными формами самостоятельной работы студентов по дисциплине «Дифференциальные уравнения» являются:

- подготовка к практическому занятию
- подготовка к контрольной работе.

Практическое занятие – обсуждение проблемы, темы по заранее заданной структуре (вопросам) с предварительным углубленной самостоятельной проработкой материала. Такие занятия помогают понимать практическое приложение теории, прививают навыки практической работы и самостоятельного мышления.

Индивидуальное задание – частично регламентированное задание, имеющее нестандартное решение и позволяющее диагностировать умения, интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения.

Контрольная работа – одна из форм проверки и оценки усвоенных знаний, получения информации о характере познавательной деятельности, уровня самостоятельности и активности студентов в учебном процессе, эффективности методов, форм и способов учебной деятельности. Эта форма самостоятельной работы студента выявляет умение применять теоретические знания на практике, помогает проверить усвоение курса перед экзаменом

В результате изучения дисциплины у обучающихся формируются следующие компетенции (в соответствии с образовательным стандартом):

ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных

уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности

Знать: понятие дифференциального уравнения и его решения, основные типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их интегрирования, основные проблемы общей теории дифференциальных уравнений (существование решения, единственность, продолжимость, зависимость от параметров) и подходы к их решению, структуру множества решений линейных уравнений и систем, понятие фундаментальной системы решений и свойства определителя Вронского, концепцию устойчивости (по Ляпунову), критерии устойчивости линейных систем, систем с постоянными коэффициентами.

Уметь: находить решения краевых и начальных задач, строить функцию Грина краевой задачи, исследовать на устойчивость линейные уравнения и системы как “по определению”, так и с помощью критериев устойчивости, исследовать на устойчивость нелинейные уравнения и системы с помощью первого приближения и с помощью функции Ляпунова, строить фазовый портрет систем второго порядка, исследовать тип и строить эскизы особых точек, находить полную систему первых интегралов для систем 2-го порядка, пользоваться для решения линейных неоднородных уравнений и систем методом вариации произвольных постоянных и методов неопределенных коэффициентов, решать линейные уравнения Эйлера, обосновывать структурные свойства множества решений линейных уравнений и систем

Владеть: методами интегрирования основных типов дифференциальных уравнений первого порядка, методами решения однородных и неоднородных линейных уравнений и систем с постоянными коэффициентами. методами решения линейных однородных и неоднородных уравнений в частных производных первого порядка, методами исследования устойчивости нелинейных систем (первое приближение, функция Ляпунова), методами решения краевых задач и построение функции Грина.

ПЛАН-ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вид деятельности студентов	Итоговый продукт самостоятельной работы	Средства и технологии оценки	Примерные сроки выполнения
5 семестр			
Изучение литературы по теме 1, 2,3,4	Конспект	Собеседование	3,6,9,12 недели
Подготовка к практическому занятию	Конспект	Собеседование	еженедельно
Написание реферата	Конспект	Собеседование	2,7,10,11 неделя
Выполнение контрольной работы	Конспект	Собеседование	15 неделя
6 семестр			
Изучение литературы по теме 5,6,7,8	Конспект	Собеседование, тестирование	3,6,9,12 недели
Подготовка к практическому занятию	Конспект	Собеседование	еженедельно
Написание реферата	Конспект	Собеседование	2,7,10,11 неделя
Выполнение контрольной работы	Конспект	Собеседование	15 неделя

Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Проверка знаний материала лекционных и практических занятий проводится в виде собеседования (по всем темам) и тестирования (по некоторым темам при необходимости). Предполагается, что отдельные вопросы тем дисциплины изучаются студентами самостоятельно. Знания указанных вопросов проверяется наличием конспектов и собеседованием. Паспорт форда тестовых заданий представлен в ФОС. Ниже приведены вопросы для собеседования по всем темам курса «Дифференциальные уравнения». Вопросы структурированы по двум уровням: базовый и повышенный. Вопросы повышенного уровня требуют знаний дополнительных источников литературы, показывают умения и навыки студентов анализировать теоретический материал и готовность к применению теоретических знаний в практической деятельности.

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя собеседование и тестирование по вопросам тем дисциплины.

Тестирование – это эффективная форма для текущего и итогового контроля знаний учащихся. Тест – это инструмент оценивания обученности учащихся, состоящий из системы тестовых заданий, стандартизированной процедуры проведения, обработки и анализа результатов. Тестирование является самостоятельной формой контроля результатов самостоятельного изучения тем дисциплины.

Предлагаемые студенту задания позволяют проверить компетенции

ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности

Данное оценочное мероприятия проводится на каждом практическом занятии на основании материалов и знаний, полученных на лекциях, а также при изучении основной и дополнительной литературы. Для подготовки к данному оценочному мероприятию студенту необходимо подготовить ответы на вопросы собеседования и законспектировать их в тетрадь.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования материалами лекций, основной и дополнительной литературы, а также интернет-ресурсов.

При проверке задания, оцениваются:

- правильность ответов;
- чёткое знание терминологии;
- умение грамотно, четко и последовательно излагать материал;
- использование дополнительной литературы при подготовке;
- умение анализировать теоретический материал и сопоставлять его с практикой;
- умение приводить конкретные примеры.

В процессе самостоятельного изучения отдельных вопросов тем дисциплины рекомендуется работа с литературой, перечень которой приведен в конце методических указаний. При подготовке к собеседованию предлагается следующая литература.

Рекомендации по работе с литературой при организации СРС

п/п	Темы для самостоятельного изучения	Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
		Основная	Дополни- тельная	Методи- ческая	Интернет- ресурсы
1	Тема 1. Уравнения первого порядка	1	2	1,2	1,2
2	Тема 2. Уравнения высших порядков	1,2	2	1,2	1,2
3	Тема 3. Общая теория линейных дифференциальных уравнений	2	1	1,2	1,2
4	Тема 4. Некоторые свойства решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка.	2,3	1	1,2	1,2

5	Тема 5. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	2,3	2	1,2	1,2
6	Тема 6. Системы с постоянными коэффициентами.	2	2	1,2	1,2
7	Тема 7. Теория устойчивости. Теория Ляпунова.	1,2	1	1,2	1,2
8	Тема 8. Уравнения с частными производными первого порядка	1,2	1	1,2	1,2

Вопросы для собеседования

Базовый уровень

Тема 1.

1. Дать определения: дифференциального уравнения, порядка дифференциального уравнения, задачи интегрирования, общего интеграла, начальных условий, интегральной кривой.
2. Геометрическое толкование уравнения первого порядка. Поле направлений. Изоклины.
3. Уравнения с разделяющимися переменными.
4. Однородные уравнения. Уравнения, приводимые к однородным.
5. Линейные уравнения. Уравнение Бернулли.
6. Сведение обыкновенного дифференциального уравнения высшего порядка к системе уравнений первого порядка.
7. Общий метод введения параметра.
8. Уравнение Якоби.

Тема 2.

1. Сведение обыкновенного дифференциального уравнения высшего порядка к системе уравнений первого порядка.
2. Уравнение n -го порядка вида: $y^{(n)} = f(x)$ и неразрешенное относительно старшей производной $F(y^{(n)}, x) = 0$.
3. Замена n -кратной квадратуры по x одной квадратурой по параметру в решении уравнения вида: $y^{(n)} = f(x)$.
4. Уравнение n -го порядка вида: $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$ и неразрешенное относительно старшей производной $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$.
5. Уравнение n -го порядка вида: $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$ и неразрешенное относительно старшей производной $F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$.
6. Понижение порядка уравнения вида: $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n-1)})$,
 $y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$.

Тема 3.

1. Определение и общие свойства линейных дифференциальных уравнений n -го порядка.
2. Свойства линейного дифференциального оператора.
3. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского.
4. Теорема о существовании фундаментальной системы решений для однородного линейного дифференциального уравнения n -го порядка.
5. Связь определителя Вронского с коэффициентами данного линейного уравнения (формула Лиувилля).
6. Понижение порядка линейного однородного уравнения, если известно частное решение.
7. Общие свойства неоднородного линейного уравнения n -го порядка.
8. Метод вариации произвольных постоянных для неоднородного уравнения n -го порядка.

9. Линейные однородные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами.
10. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами (общий случай).
11. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью в виде квазимногочлена.

Тема 4.

1. Зависимость решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров и начальных данных.
2. Краевые задачи для уравнения второго порядка. Функция Грина.

Тема 5.

1. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений. Детерминант Вронского и его связь с коэффициентами системы.
2. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений. Метод вариации произвольных постоянных.

Тема 6.

1. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Тема 7.

1. Определение устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости.
2. Устойчивость линейных дифференциальных систем.
3. Нелинейная автономная система и выделение линейной части.
4. Поведение траекторий линейной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка.
5. Поведение траекторий системы второго порядка в случае действительных и различных собственных значений.
6. Поведение траекторий системы второго порядка в случае действительных кратных собственных значений.
7. Поведение траекторий системы второго порядка в случае комплексно - сопряженных собственных значений.
8. Поведение траекторий системы второго порядка в случае вырожденных собственных значений.

Тема 8.

1. Постановка задачи об интегрировании уравнения с частными производными первого порядка.
2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.
3. Линейные неоднородные уравнения с частными производными первого порядка.
4. Первые интегралы характеристической системы.

Повышенный уровень

Тема 1.

1. Теорема существования и единственности решения для уравнения первого порядка (анализ условий, метод последовательных приближений Пикара, доказательство существования решения, продолжение решения на всю область B).
2. Теорема существования и единственности решения для системы уравнений первого порядка.
3. Геометрические свойства семейства интегральных кривых однородного уравнения, линейного уравнения,

Тема 2.

1. Понижение порядка в уравнениях однородных относительно аргументов: $x, y, dx, dy, d^2 y, \dots, d^n y$.

2. Понижение порядка в уравнениях однородных относительно аргументов:
 $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}.$

Тема 3.

1. Сопряженные уравнения.
2. Уравнение Бесселя.
3. Уравнение Лежандра.
4. Уравнения Эйлера.
5. Приложение дифференциальных уравнений к изучению колебательных процессов. Свободные и вынужденные колебания (с сопротивлением и без сопротивления среды). Резонанс.

Тема 4.

1. Линейные уравнения второго порядка и некоторые свойства их решений. Теорема Штурма.

Тема 5.

1. Симметричная форма систем дифференциальных уравнений и сведение к ней.
2. Первые интегралы.

Тема 6.

1. Симметричная форма систем дифференциальных уравнений и сведение к ней.
2. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тема 7.

1. Теорема Ляпунова об устойчивости и неустойчивости тривиального решения системы, следствия, теорема об асимптотической устойчивости системы.
2. Устойчивость однородных линейных систем с постоянными коэффициентами.
3. Лемма об оценке решения. Теорема об асимптотической устойчивости системы, замечание о неустойчивости.
4. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Тема 8.

1. Связь характеристик с решениями задачи Коши.
2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (для функции двух переменных).
3. Система двух совместных уравнений первого порядка.
4. Уравнение Пфаффа.

Критерии оценивания компетенций

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно отвечает на вопросы базового и повышенного уровней, умеет тесно увязывать теорию с практикой, не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал дополнительной литературы, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал как базового, так и повышенного уровней, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками сопоставления теории и практики.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только материала базового уровня, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при сопоставлении теории и практики.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы.

Отметка «неудовлетворительно» выставляется также, если обучающийся отказался отвечать на вопросы.

Описание шкалы оценивания

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным **55**. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя письменный отчет по вопросам тем дисциплины.

Предлагаемые студенту индивидуальные задания позволяют проверить компетенции ОПК-1. Задания повышенного уровня предназначены не только для проверки знаний основного и дополнительного материала, но и оценки способности студента применять теоретические знания при решении практических задач.

Данное оценочное мероприятие проводится на каждом практическом занятии на основании материалов и знаний, полученных на лекциях, а также при изучении основной и дополнительной литературы. Для подготовки к данному оценочному мероприятию студенту необходимо подготовить письменные ответы на задачи практических занятий.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования материалами лекций, основной и дополнительной литературы, а также интернет-ресурсов.

При проверке задания оценивается:

- правильность ответов;
- чёткое знание терминологии;
- умение грамотно, четко и последовательно излагать материал;
- использование дополнительной литературы при подготовке;
- умение анализировать теоретический материал и сопоставлять его с практикой;
- знание статистических данных об изучаемых процессах и явлениях;
- умение приводить конкретные примеры.

Методические указания по подготовке контрольной работы

Письменная форма приучает к точности, лаконичности, связности изложения мысли. Письменная проверка используется во всех видах контроля и осуществляется как в аудиторной, так и во внеаудиторной работе.

Контрольная работа – одна из форм проверки и оценки усвоенных знаний, получения информации о характере познавательной деятельности, уровня самостоятельности и активности студентов в учебном процессе, эффективности методов, форм и способов учебной деятельности. Эта форма самостоятельной работы студента выявляет умение применять теоретические знания на практике, помогает проверить усвоение курса перед экзаменом.

Правила выполнения контрольной работы

При выполнении контрольной работы следует соблюдать указанные ниже правила.

1. Контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.
2. На обложке тетради должны быть чётко указаны: название дисциплины, по которой выполнена контрольная работа, шифр, фамилия, имя и отчество студента.
3. Решения задач следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач. Перед решением надо полностью выписать ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего варианта.
4. Решение задач нужно излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия. В конце решения следует записать ответ.
5. Контрольная работа, в которой выполнены не все задания, выполненная не по своему варианту зачетной не является.

Критерии оценки контрольной работы

- Соответствие методов решения теме.
- Глубина, полнота объяснения.
- Логика изложения материала.
- Терминологическая четкость.
- Уровень навыков самостоятельной работы.
- Соблюдение требований к оформлению контрольной работы.

Контрольная работа не может быть оценена положительно, если в ней выполнены задания

без объяснений, допущены принципиальные ошибки, а также при условии механически переписанного материала из учебников или другой литературы. В случае неудовлетворительной оценки контрольная работа возвращается студенту для повторного выполнения.

Рекомендации по организации выполнения контрольной работы, примерный календарный план ее выполнения

Перед выполнением контрольной работы студент должен ознакомиться с рекомендуемой литературой и изучить теоретический материал.

Перед решением контрольной работы следует разобрать решения типовых задач рекомендуемой литературе.

Выполнение контрольной работы осуществляется по календарному плану.

1. Выдача заданий контрольных работ проходит на занятии.
2. Контрольные работы поступают на проверку преподавателю в течении недели с указанной датой контрольной точки.
3. Защита контрольной работы проходит по графику составленному преподавателем.
4. В случае, если контрольная работа выполнена верно, студент не допускается к ее защите.

Порядок защиты и ответственности студента за выполнение контрольной работы

1. Контрольные работы должны быть представлены для рецензирования не позднее двух недель до экзаменационной сессии.
2. Работы, выполненные без соблюдения требований настоящего пособия, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.
3. Без предъявления прорецензированных контрольных работ студент не допускается к защите и к экзамену.
4. Защита происходит в форме опроса по темам контрольной работы (ответы на вопросы теории, применяемой при решении задач).
5. Если студент не может прокомментировать решения задач своего варианта, то контрольная работа считается незащищенной.

Варианты базового уровня (5 семестр)

Уравнения первого порядка.

I. Решить уравнения первого порядка:

1	а) $e^{-x}(1-x)dx + e^y \sin y dy = tgy dy$ б) $xy' = y \ln \frac{y}{x}$ в) $y' + y = \cos x$ г) $(xe^y + e^x)dy + (e^y + ye^x)dx = 0$ д) $y = 3xy' - 7(y')^3$
2	а) $ye^{2x}dx - (1 + e^{2x})dy = 0$ б) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ в) $y' - \frac{2}{x}y = \frac{e^x(x-2)}{x}$ г) $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$ д) $y = xy' - (2 + y')$
3	а) $y' \sin x = y \ln y$ б) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$ в) $(1 + y^2)dx = (\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy)dy$ г) $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx = \frac{2y}{x^3}dy$

	д) $xy'(y' + 2) = y$	
4	а) $(1 + y^2)dx - (1 + x^2)dy = 0$ б) $y'(x^2 y^3 + xy) = 1$ в) $(3x \sin y + 1)dx = -(1,5x^2 \cos y + 3)dy$	г) $xy' - y = \ln y'$ д) $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$
5	а) $\frac{dx}{\cos^2 x \cos y} = -ctgx \sin y dy$ б) $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$	в) $(x^2 + 2xy - 2y^2)dy = (x^2 - xy + y^2)dx$ г) $(y')^3 = 3(xy' - y)$ д) $xy' + y = \ln x + 1$
6.	а) $e^y(1 + x^2)dy = 2x(1 + e^y)dx$ б) $x^2 y^2 y' + y^3 x = 1$ в) $y = 2xy' - y^2 (y')^3$	г) $\frac{xdx + (2x + y)dy}{(x + y)^2} = 0$ д) $y^2 + x^2 y' = xyy'$
7.	а) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$ б) $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$ в) $\frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3} dy = 0$	г) $y' = \exp \frac{xy'}{y}$ д) $2y^3 + (x^2 + y^2)xy' = 0$
8.	а) $y' ctgx + y = 2$ б) $xy' = y(y \ln x - 2)$ в) $(y')^3 + y^2 = xyy'$	г) $x(2x^2 + y^2) + y(2y^2 + x^2)y' = 0$ д) $2x^2 y' + y^2 = y\sqrt{x^2 - y^2}$
9.	а) $2x^2 yy' + y^2 = 2$ б) $dy - e^{-x} dx + ydx - xdy = xydx$ в) $5y + (y')^2 = x(x + y')$	г) $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$ д) $2\sqrt{x - y}y' + \sqrt{x} = 4\sqrt{y}$
10.	а) $y' = 10^{x+y}$ б) $(\sin^2 y + xctgy)y' = 1$ в) $(y')^4 = 2yy' + y^2$	г) $x^3 y' - xy^2 = y^3$ д) $x dx = (xdy + ydx)\sqrt{1 + x^2}$

Уравнения высшего порядка.

I. Решить уравнение

1. $2y'(y'' + 2) = x(y'')^2$	2. $(y'')^2 - 2y'y''' + 1 = 0$	3. $x^2((y')^2 - 2yy'') = y^2$
4. $(y')^2 = (3y - 2y')y''$	5. $yy'' = y'(y' + 1)$	6. $yy'' - 2yy' \ln y = (y')^2$
7. $y'' = xy' + y + 1$	8. $xy'' - y' = x^2 yy'$	9. $y(xy'' + y') = x(y')^2(1 - x)$
10. $(y' + 2y)y'' = (y')^2$		

II. Исследовать, являются ли данные функции линейно зависимыми (функции рассматриваются в той области, в которой они все определены)

1. $x, 0, e^x$	2. $\arctg x, \operatorname{arccctg} x, 1$	$6x + 8, 2x + 3, 4 - x$
4. $1, \sin^2 x, \cos 2x$	5. $1, x, x^2$	6. $x^2 + 2x, 3x^2 - 1, x + 4$
7. e^x, e^{2x}, e^{3x}	8. $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, 2 + e^x$	9. $\sin x, \sin(x + 2), \cos(x - 5)$
10. $\operatorname{sh} x, 2e^x - 1, 3e^x + 5$		

III. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

1. $y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x$	2. $y''' - y' = 2e^x + \cos x$
3. $y''' - 5y'' + 6y' = (x - 1)^2$	4. $y'' - 2y' = 2 \operatorname{ch} 2x$
5. $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}$	6. $y'' - 4y' = 16 \operatorname{ch} 4x$
7. $y''' + 9y = -18e^{3x} - 18 \sin 3x$	8. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$
9. $y'' + y' = 2 \operatorname{sh} x$	10. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$

Теорема существования и единственности решения

I. а). Перейдя от дифференциального уравнения к интегральному, построить последовательные приближения к решению с данными начальными условиями. Оценить, на каком отрезке теорема Пикара обеспечивает существование решения и сходимость последовательных приближений

б). Перейдя от дифференциального уравнения к разностному и решить его численно.

1. $y' = y^2 - 3x^2 - 1, y(0) = 1$. Найти y_0, y_1, y_2 .	2. $y' = xy^2 + 2, y(0) = 0$. Найти y_0, y_1, y_2, y_3 .
--	---

3. $y' = y^2 x - 1$, $y(0) = -1$. Найти y_0, y_1, y_2 .	4. $y' = e^y + 2y$, $y(0) = -1$. Найти y_0, y_1, y_2 .
5. $y' = x^2 + xy$, $y(0) = 1$. Найти y_0, y_1, y_2 .	6. $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$. Найти y_0, y_1, y_2, y_3 .
7. $y' = e^y + y$, $y(0) = 1$. Найти y_0, y_1, y_2 .	8. $y' = y^2 + x^2 y - 1$, $y(0) = 0$. Найти y_0, y_1, y_2 .
9. $y' = 2y^2 - x^2 + 1$, $y(0) = 1$. Найти y_0, y_1, y_2 .	10. $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$. Найти y_0, y_1, y_2, y_3 .

Повышенный уровень

Обыкновенные дифференциальные уравнения.

I. Пользуясь каким-либо достаточным условием единственности выделить области, в которых сохраняется единственность решения для данных уравнений

1. $y' = 2xy + y^2$	2. $y' = 3\sqrt[3]{y^2} + 1$	3. $y' = \sqrt[3]{y} + x$	4. $y' = y \ln^2 y$
5. $y' = \frac{\sqrt{y-x}}{x-2}$	6. $y' = \frac{x+2y-4}{x-y-1}$	7. $y' = \frac{x+2}{x+y}$	8. $y' = \frac{\sqrt{y^2 - x^2} + y}{x}$
9. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$	10. $y' = y \ln y$		

Уравнения высшего порядка.

I. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, имеющее данные частные решения

1. x, e^x, xe^x	2. $3x, x-2, e^x + 1$	3. $e^x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$
4. $2^x, 3^x, 6^x$	5. $x^2 - 3x, 2x^2 + 9, 2x + 3$	6. x, x^2, e^x
7. $1, x, x^2$	8. e^x, e^{2x}, e^{3x}	9. $x^{-1}, 1, x$
10. $\sin x, \cos x, 1$		

II. Найти общее решение данного уравнения, зная его частное решение

1. $xy'' + 2y' - xy = 0$, $y_1 = \frac{e^x}{x}$	2. $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0$, $y_1 = e^{ax^2}$
3. $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0$, $y_1 = \operatorname{tg} x$	4. $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0$, $y_1 = e^{2x}$
5. $(x^2 + 1)y'' + 5xy' + 4y = 0$, $y_1 = \frac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}}$	6. $x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = \frac{1}{x}, y_2 = x$

7. $x^2 y'' \ln y - xy' + y = 0, y_1 = x$	8. $xy'' - (2x+1)y' + 2y = 0, y_1 = e^{2x}$
9. $x^2(x+1)y'' - 2y = 0, y_1 = 1 + \frac{1}{x}$	10. $xy''' - y'' - xy' + y = 0, y_1 = e^x, y_2 = x$

III. Используя метод вариации произвольных постоянных решить уравнение

1. $x^4 y'' + x^3 y' = 4$	2. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$	3. $xy''' + y'' = \sqrt{x}$
4. $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}$	5. $(x+1)y''' + y'' = x+1$	6. $x^2 y'' - xy' = 3x^3$
7. $xy''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}$	8. $y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' = 2x$	9. $xy''' - y'' = -\frac{1}{x}$
10. $x^3 y'' - 2xy = 6 \ln x$		

Теорема существования и единственности решения

I. а). Пользуясь каким-либо достаточным условием единственности выделить области, в которых сохраняется единственность решения для данных уравнений

б). Перейдя от дифференциального уравнения к разностному и решить его численно

1. $y' = 2xy + y^2$	2. $y' = 3\sqrt[3]{y^2} + 1$	3. $y' = \sqrt[3]{y} + x$	4. $y' = y \ln^2 y$
5. $y' = \frac{\sqrt{y-x}}{x-2}$	6. $y' = \frac{x+2y-4}{x-y-1}$	7. $y' = \frac{x+2}{x+y}$	8. $y' = \frac{\sqrt{y^2-x^2} + y}{x}$
9. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$	10. $y' = y \ln y$		

Варианты базового уровня (6 семестр)

Системы дифференциальных уравнений

I. Решить однородную систему уравнений с постоянными коэффициентами

1.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 2y + 4z, \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = -x + y + 2z \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y - z, \\ \dot{y} = -x + 3y - z, \\ \dot{z} = x - 2y + 2z \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = -x + 2y, \\ \dot{z} = x - y + z \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = 2y - z, \\ \dot{z} = -y + 2z \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - y - z, \\ \dot{y} = y - 5z, \\ \dot{z} = -2y + 4z \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} \dot{x} = 6x - 2y - z, \\ \dot{y} = -x + 5y - z, \\ \dot{z} = x - 2y + 4z \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y - z, \\ \dot{y} = 2x + 2y - z, \\ \dot{z} = -2x + y + 4z \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = 2x - z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = -x + 2z. \end{cases}$$

II. Решить неоднородную систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8, \\ \dot{y} = 3x + 6y. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2 \sin t. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 5t, \\ \dot{y} = 3x + 2y + 8e^t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2 \cos t. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = y + tg^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + tgt. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$$

Устойчивость по Ляпунову

III. Проверить устойчивость тривиального решения системы

$$1. \begin{cases} y_1' = 2y_1^2 + y_2^4, \\ y_2' = -y_1^4 + y_2^2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y_1' = y_1^2 - 2y_2^4, \\ y_2' = -3y_1^4 - y_2^2. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2^3, \\ y_2' = -y_1^3 + y_2. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2^3, \\ y_2' = -4y_1^3 - y_2. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} y_1' = -y_1^2 + 3y_2^4, \\ y_2' = y_1^4 - 2y_2^2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} y_1' = 2y_1^3 + y_2^5, \\ y_2' = -y_1^5 + y_2^3. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} y_1' = -2y_1 - y_2^5, \\ y_2' = y_1^3 - 4y_2. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} y_1' = y_2^4, \\ y_2' = y_1^4 - y_2^2. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} y_1' = y_1^2 + y_2^4, \\ y_2' = -y_1^4. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} y_1' = -3y_1 + y_2^3, \\ y_2' = y_1^4 y_2. \end{cases}$$

IV. Исследовать на устойчивость нулевое решение, изобразить траектории движений, определяемых этой системой, указав на рисунке стрелками направление движения при возрастании времени

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x, \\ \frac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x, \\ \frac{dy}{dt} = -2y. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x, \\ \frac{dy}{dt} = -2y. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x, \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 2y. \end{cases} \quad 10. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -5x - 3y. \end{cases}$$

Повышенный уровень

Системы дифференциальных уравнений

I. Решить нелинейную систему наиболее подходящим способом

$$1 \quad y' = \frac{z}{x}, \quad z' = \frac{z(y+2z-1)}{x(y-1)};$$

$$2 \quad y' = y^2 z, \quad z' = \frac{z}{x} - yz^2;$$

$$3 \quad 2zy' = y^2 - z^2 + 1, \quad z' = y + z;$$

$$4 \quad \frac{dx}{2y-z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$5 \quad \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{y+x}$$

$$6 \quad \frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{yx\sqrt{z^2+1}}$$

$$7 \quad \frac{dx}{x+y^2+z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$8 \quad \frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{(z-y)z} = \frac{dz}{y(y-z)}$$

$$9 \quad -\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy-2z^2} = \frac{dz}{zx}$$

$$10 \quad \frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2-xz}$$

II. Решить системы методом вариации постоянных:

$$1 \quad \begin{cases} x' = x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ y' = 2x - y; \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} x' = 2y - x, \\ y' = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}; \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x - y + 15e^t \sqrt{t}; \end{cases}$$

$$4 \quad \begin{cases} x' = y + tg^2 t - 1, \\ y' = -x + tgt; \end{cases}$$

$$5 \quad \begin{cases} x' = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ y' = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

$$6 \quad \begin{cases} x' = x - y + \frac{1}{\sin t}, \\ y' = 2x - y; \end{cases}$$

$$7 \quad \begin{cases} x' = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ y' = 6x + 3y - e^t. \end{cases}$$

$$8 \quad \begin{cases} y' = -y + z - 2e^{-x}, \\ z' = -6y + 4z - 4 \ln x; \end{cases}$$

$$9 \quad \begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 3x - 4y + 15\sqrt{t}; \end{cases}$$

$$10 \quad \begin{cases} x' = y + ctg^2 t - 1, \\ y' = -x + tgt; \end{cases}$$

Устойчивость по Ляпунову

III. Исследовать особые точки уравнения. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости

$$\begin{array}{llll}
1. y' = \frac{2x+y}{3x+4y} & 2. y' = \frac{x-4y}{-3x+2y} & 3. y' = \frac{x-4y}{-3x+2y} & 4. y' = \frac{x+4y}{2x+3y} \\
5. y' = \frac{2x-y}{x-y} & 6. y' = \frac{-2x+y}{-3x+2y} & 7. y' = \frac{-2x+4y}{x+y} & 8. y' = \frac{2y-2}{4y^2-x^2} \\
9. y' = \frac{-x+2y}{3x+6} & 10. y' = \frac{2x+y}{x-2y-5} & &
\end{array}$$

Критерии оценивания компетенций

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он показал глубокое освоение материала теоретических вопросов, соответствующих варианту, логически стройное его изложение, полное раскрытие вопросов, умение связать теорию с возможностями ее применения на практике, уверенные ответы на дополнительные вопросы в рамках исследуемого материала; уверенные пояснения ко всем решениям задач, соответствующих варианту, умение связать теорию с возможностями ее применения на практике, свободное решение задач и обоснование принятого решения, владение методологией и методиками исследований

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он показал твердые знания теоретического материала, допустимы несущественные неточности в изложении материала работы и ответах на дополнительные вопросы преподавателя в рамках тем исследования; допустимы несущественные неточности в пояснениях и решении задач, соответствующих варианту, правильное применение теоретических положений при их решении, умение выбирать конкретные методы решения сложных задач, используя методы анализа, классификации, интерпретации данных, самостоятельно применяя математический аппарат

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если имеются знания только основного материала, не совсем полное раскрытие вопросов, допустимы неточности в ответе на вопросы, нарушение логической последовательности в изложении программного материала, испытывать затруднения при ответах на дополнительные, наводящие вопросы; допустимы неточности в решениях задач, соответствующих варианту, нарушение логической последовательности в пояснениях к решениям задач, умение решать простые задачи на основе базовых знаний и заданных алгоритмов действий, испытывать затруднения при ответах на наводящие вопросы преподавателя

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если отсутствуют знания, незнание значительной части теоретического материала, неумение даже с помощью преподавателя сформулировать правильные ответы на задаваемые вопросы, невыполнение практических заданий.

Методические указания по подготовке реферата

Средствами учебно-методического обеспечения самостоятельной работы студентов являются написание рефератов по представленной тематике.

Подготовка реферата организована с целью закрепления теоретических знаний, умений применять их при реализации задач профессиональной деятельности. В целях более эффективной организации самостоятельной работы студентам следует ознакомиться с тематикой рефератов по дисциплине «Дифференциальные уравнения», специальной литературой, рекомендуемыми преподавателем.

При этом целесообразно начинать выполнение реферата по любой теме дисциплины с изучения теоретической части. Теоретический и практический материал студенту необходимо изучать в течение семестра в соответствии с темами, и составлять в отдельной тетради письменный конспект ответа объемом не более 5 страниц по каждой теме.

Контроль выполнения студентами самостоятельной работы осуществляется преподавателем в течение семестра в ходе заслушивания ответов студентов, выступлений с рефератами в ходе проведения семинаров, презентаций творческих работ групп по проблемным вопросам курса, проверки рефератов, выполняемых студентами в течение семестра.

При проверке задания оцениваются (*например, последовательность и рациональность выполнения, точность расчетов и др.*):

- правильность ответов;
- чёткое знание терминологии;
- умение грамотно, четко и последовательно излагать материал;
- использование дополнительной литературы при подготовке;
- умение анализировать теоретический материал и сопоставлять его с практикой;
- умение применять знания при решении конкретных заданий;
- умение приводить конкретные примеры.

Текущий контроль проводится преподавателем, ведущим практические занятия. Текущий контроль проводится в виде проверки рефератов, сообщений и докладов и путем индивидуального опроса студентов по результатам освоения тем, вынесенных на практические занятия, решения задач, тестирования.

Промежуточный контроль теоретических знаний осуществляется путем опроса; презентаций результатов, оценки практических умений путем выполнения аудиторной самостоятельной работы.

Реферат выполняется по одной из приведенных тем.

Базовый уровень

1. Уравнение Якоби
2. Уравнение Дарбу
3. Задача о траекториях
4. Теорема Коши о существовании и единственности голоморфного решения задачи Коши для уравнения первого порядка
5. Уравнение Эйлера
6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами
7. Частные виды линейных дифференциальных уравнений, второго порядка и их решение с помощью степенных рядов
8. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами
9. Операционный метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений и линейных систем дифференциальных уравнений
10. Классификация Пуанкаре особых точек дифференциального уравнения с однородной, дробно-линейной правой частью

Повышенный уровень

1. Устойчивость решений системы дифференциальных уравнений
2. Интегрирование однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка при помощи степенных рядов
3. Интегрирование однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка

- при помощи обобщенных степенных рядов
4. Матричный метод интегрирования линейных систем дифференциальных уравнений
 5. Система двух нелинейных уравнений с частными производными первого порядка
 6. Уравнение Пфаффа
 7. Система уравнений Гамильтона
 8. Уравнение Гамильтона - Якоби
 9. Уравнение Шредингера, гармонический осциллятор
 10. Обратные линейные операторы

Требования к реферату

Реферат выполняется машинописным текстом с соблюдением правил оформления текстового материала проектной документации.

Реферат должен иметь титульный лист, на котором указываются название предмета, специальность, вариант работы и фамилия, имя, отчество исполнителя. Также в работе должны быть содержание с указанием индивидуального задания и список использованной литературы.

При наборе работы на компьютере текст должен иметь сплошную нумерацию страниц и следующие параметры:

- формат бумаги А4 (210×297 мм), бумага белая;
- поля: верхнее, нижнее до нумерации стр. – 20 мм, левое – 30 мм, правое – 15 мм;
- межстрочное расстояние – полуторное;
- переплет 0 см;
- ориентация книжная;
- шрифт Times New Roman;
- размер шрифта 14 пунктов;
- красная строка – 1,25 см;
- формулы выравниваются по центру, их нумерация по правому краю в круглых скобках;
- рисунки нумеруются снизу (Рисунок 1 – Название), таблицы – сверху (Таблица 1 – Название);
- страницы нумеруются сверху, по центру;
- необходимо различать в тексте дефис (-) (например, черно-белый, бизнес-план) и тире (–) (Alt + 0150).

Краткая характеристика процедуры оценивания компетенций

Студенческий реферат – это творческая работа студента, в которой на основании краткого письменного изложения и оценки различных источников и литературы проводится самостоятельное исследование определенной темы, проблемы.

Рациональная организация реферирования предполагает те же этапы, что и работа над курсовой, а именно: выбор темы, отбор источников и литературы, составление плана, накопление фактического материала, письменное изложение результатов работы, оформление, устное выступление с рефератом.

В вузе устное выступление с рефератом чаще всего используется на семинарских занятиях с целью углубить и расширить знания по одному из рассматриваемых вопросов темы, обозначить в нем актуальную проблему, разные точки зрения на неё у исследователей. Исходя из этого, реферат заслушивается в контексте рассматриваемого в плане семинара вопроса в рамках регламента в 5-8 минут. Для этого необходимо не повторять азбучных истин, отбросить всё лишнее и логично, убедительно изложить цель проделанной работы, основные положения её содержания, сообщить мнения ученых и собственные выводы по исследуемой проблеме. Защищая ту или иную точку зрения, нужно тщательно подобрать систему фактов. Можно иллюстрировать свое сообщение графиками, примерами, схемами и т.п. Отвечать на вопросы нужно спокойно, обоснованно.

Основаниями для оценки могут служить:

- актуальность проблемы исследования и степень раскрытия заявленной темы;
- проявление студентом творческого подхода при решении поставленных задач;
- способность студента кратко и грамотно изложить суть работы, вести дискуссию по проблеме, аргументировать выводы и суждения;
- уровень подготовки, проявленный при ответе на вопросы;
- культура оформления реферата.

Несомненно, умение анализировать источники, работать с литературой, навыки поиска, обработки и оформления необходимой информации, способность обосновывать собственную позицию помогут студенту в дальнейшей самостоятельной учебной и научной работе.

Тематика рефератов выдается на первом занятии, выбор темы осуществляется студентом самостоятельно. Результаты озвучиваются на втором практическом занятии, регламент – 7 мин. на выступление. В оценивании результатов наравне с преподавателем принимают участие студенты группы.

Критерии оценки рефератов

Оценка «отлично» – выполнены все требования к написанию и защите реферата: обозначена проблема и обоснована ее зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объем оформления, даны правильные ответы на дополнительные вопросы. ☐ актуальности, ☐ м, собственная

Оценка «хорошо» – основные требования к реферату и его защите выполнены, но при этом допущены недочеты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объем реферата; имеются упущения в оформлении; на дополнительные вопросы при защите даны неполные ответы.

Оценка «удовлетворительно» – имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности, тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата или при ответе на дополнительные вопросы; во время защиты отсутствует вывод.

Оценка «неудовлетворительно» – тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы.

Методические указания по подготовке к экзамену

Изучение дисциплины завершается экзаменом.

Экзамен – форма промежуточной аттестации результатов освоения образовательной программы студентом по учебному предмету, курсу, дисциплине (модулю) с целью проверки знаний студентов по теории и выявлению навыков применения полученных знаний при решении практических задач, а также навыков самостоятельной работы с учебной и научной литературой, с выставлением оценки: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

Непосредственно перед сессией экзаменационные вопросы обновляются с учетом произошедших в законодательстве изменений. Экзаменационные билеты включают три вопроса по различным разделам. Обновленный перечень вопросов выдается студентам перед началом экзаменационной сессии. Билеты студентам не выдаются.

Экзамен принимает преподаватель, которому было поручено вести курс лекций.

Цель экзамена — проверка и оценка уровня полученных студентом специальных познаний по учебной дисциплине, а также умения логически мыслить, аргументировать избранную научную позицию, реагировать на дополнительные вопросы. Оценке подлежит также правильность выполнения практического задания и грамотность речи студента. Дополнительной целью экзамена является формирование у студентов таких качеств, как организованность, ответственность, трудолюбие, принципиальность, самостоятельность.

При подготовке к экзамену студент должен правильно и рационально распланировать свое время, чтобы успеть на качественно высоком уровне подготовиться к ответам по всем вопросам. Во время подготовки к экзамену студенты также систематизируют знания, которые они приобрели при изучении основных тем курса в течение семестра. Это позволяет уяснить логическую структуру, объединить отдельные темы в единую систему, увидеть перспективы развития науки дифференциальных уравнений.

Студент в целях получения качественных и системных знаний должен начинать подготовку к экзамену задолго до его проведения, лучше с самого начала лекционного курса воспользоваться программой курса. Усвоению проблемных тем курса помогают участие студентов в коллоквиумах, подготовка рефератов и выступление с докладами на практических занятиях и научных студенческих конференциях, а также написание контрольных работ.

Внимание! Помните, что некоторые вопросы вообще не освещаются на лекциях, и вы должны их подготовить самостоятельно по учебнику.

В самом начале учебного курса познакомьтесь со следующей учебно-методической документацией:

- программой дисциплины;
- перечнем знаний и умений, которыми студент должен владеть;
- содержанием дисциплины (тематическими планами лекций, практических занятий);
- контрольными мероприятиями;
- учебником, учебными пособиями по дисциплине, а также электронными ресурсами;
- перечнем экзаменационных вопросов.

Рекомендуемые для подготовки к экзаменам учебники и специальную литературу преподаватели называют студентам еще на первых лекциях. Как правило, это книги центральных издательств, рекомендованные Министерством образования РФ в качестве учебника для студентов высших учебных заведений.

Чтобы хорошо сдать экзамен, надо много выучить, запомнить. Поэтому запоминание – ключевой момент. А значит, надо научиться хорошо и много запоминать, для чего необходимо изученный материал неоднократно повторить.

Необходимо учитывать, что преподаватель на экзамене проверяет не столько уровень запоминания учебного материала, сколько то, как студент понимает те или иные категории и проблемы, как умеет мыслить, аргументировать, отстаивать определенную позицию. Таким образом, для экзаменов необходимо разумное сочетание и понимание простого воспроизводства учебной информации и работы мысли.

И последнее, при подготовке к экзаменам студент должен учитывать критерий, которым руководствуется преподаватель при выставлении оценки на экзамене:

- правильность ответов на вопросы (верное, четкое и достаточно глубокое изложение новых понятий, теорем и т.д.);
- полнота и одновременно лаконичность ответа;
- новизна учебной информации, степень использования научных и хрестоматийных источников;
- логика и аргументированность изложения;
- грамотное комментирование, приведение примеров, аналогий;
- культура речи.

Вопросы и примерный перечень задач для проверки уровня обученности

6 семестр

Базовый уровень

Знать:

1. Задачи, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям.
2. Основные понятия и определения: дифференциального уравнения, порядка дифференциального уравнения, задачи интегрирования, общего интеграла, задача Коши, интегральной кривой.
3. Линейные дифференциальные операторы и их свойства.
4. Определение и общие свойства линейных дифференциальных уравнений n -го порядка.
5. Линейная независимость функций, определитель Вронского.
6. Понижение порядка линейного однородного уравнения, если известно частное решение.
7. Теорема о существовании фундаментальной системы решений для однородного линейного дифференциального уравнения n -го порядка.
8. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка, пространство решений этого уравнения.
9. Формула Остроградского - Лиувилля для линейного уравнения.
10. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.
11. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка.
12. Метод вариации произвольных постоянных для неоднородного уравнения n -го порядка.
13. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка с правой частью в виде квазимногочлена.
14. Линейные уравнения второго порядка и некоторые свойства их решений.
15. Теорема Штурма для уравнений второго порядка.
16. Краевые задачи для уравнения второго порядка.
17. Функция Грина для уравнений второго порядка. Запись решения используя функцию Грина.
18. Системы линейных дифференциальных уравнений.
19. Теорема существования и единственности решения для системы уравнений первого порядка.
20. Фундаментальная система решений системы. Определитель Вронского.
21. Детерминант Вронского и его связь с коэффициентами системы.
22. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Однородные системы.

23. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Неоднородные системы.
24. Метод вариации произвольных постоянных для неоднородных систем.
25. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
26. Понятие устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости.
27. Функция Ляпунова и ее применение.
28. Устойчивость решений систем с постоянными коэффициентами.
29. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
30. Поведение траекторий линейной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными действительными коэффициентами (случай, когда собственные значения действительные и различные, собственные значения комплексно сопряженные, собственные значения действительные и совпадающие, собственные значения одно или оба равны нулю).
31. Уравнения с частными производными. Порядок уравнения. Интегральная поверхность уравнения.
32. Уравнения с частными производными первого порядка. Задача Коши.
33. Однородные уравнения с частными производными и их связь с системами обыкновенных дифференциальных уравнений.
34. Неоднородные уравнения с частными производными и их решение.
35. Геометрическая интерпретация линейных уравнений с частными производными.
36. Семейство характеристик. Интегрирование уравнений в частных производных с помощью характеристик.
37. Нелинейные уравнения в частных производных первого порядка.
38. Уравнение Пфаффа.

Уметь,
Владеть

1. Решать уравнения:

$$\operatorname{tg} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

$$\sin^2 x \frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{tg} z \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z$$

$$(x+z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y+z) \frac{\partial z}{\partial y} = x+y$$

$$(x+z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y+z) \frac{\partial z}{\partial y} = x+y$$

$$(x+z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y+z) \frac{\partial z}{\partial y} = x+y$$

2. Найти первые интегралы системы: $y' = \frac{z}{(z-y)^2}, \quad z' = \frac{y}{(z-y)^2}.$

3. Привести систему к одному дифференциальному уравнению высшего порядка и решить его $\frac{dy}{dx} = y+z, \quad \frac{dz}{dx} = y+z+x.$

4. Методом вариации произвольных постоянных решить уравнение $xy''' + y'' = \sqrt{x}.$

Повышенный уровень

Знать:

1. Доказательство теоремы о существовании фундаментальной системы решений для однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка.
2. Вывод формулы Остроградского - Лиувилля для линейного уравнения.
3. Вывод метода вариации произвольных постоянных для неоднородного уравнения n-го порядка.
4. Зависимость решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров и начальных данных.
5. Доказательство теоремы Штурма для уравнений второго порядка.
6. Вывод функции Грина для уравнений второго порядка.
7. Доказательство теоремы существования и единственности решения для

системы уравнений первого порядка.

8. Доказательство теоремы о связи детерминанта Вронского и его связь с коэффициентами системы.

9. Вывод метода вариации произвольных постоянных для неоднородных систем.

10. Доказательство теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

11. Доказательство теоремы об интегрировании уравнений в частных производных с помощью характеристик.

12. Вывод решения уравнения Пфаффа.

Уметь,
Владеть:

1. Найти общее решение системы:
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 5x + 2y. \end{cases}$$
2. Исследовать, являются ли данные функции линейно зависимыми (функции рассматриваются в той области, в которой они все определены):
 $x^2 - x + 3, \quad 2x^2 + x, \quad 2x - 4$
3. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, имеющее данные частные решения: $\frac{1}{x}, 1, x$
4. Решить уравнение Эйлера $x^3 y''' - 3xy' + 3y = 0$
5. Найти поверхность, проходящую через данную линию
 $tgx \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z, \quad y = x, \quad z = x^3.$
6. Методом построения функции Ляпунова, проверить устойчивость тривиального решения системы
$$\begin{cases} y_1' = y_1 y_2^4, \\ y_2' = -y_1 - 3y_2^3. \end{cases}$$
7. Исследованием особых точек системы. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости XOY

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -5x - 3y. \end{cases}$$

Критерии оценки

Оценка «отлично» выставляется студенту, если: он безукоризненно изложил теоретический материал билета без наводящих вопросов преподавателя и решил предложенную задачу и разработал алгоритм на языке высокого уровня. Возможны одна - две неточности при освещении второстепенных вопросов или выкладках, которые студент легко исправил после замечания преподавателя.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если: он показал систематический характер знаний по дисциплине и способность к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности; если допущены один - два недочёта при изложении основного содержания ответа и освещении второстепенных вопросов или выкладках, легко исправленные после замечания преподавателя.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если: он допустил погрешности в ответе на экзамене и при выполнении экзаменационных заданий, недостаточно правильно формулирующему основные положения программного материала, нарушающему последовательность в его изложении, показавшему недостаточную сформированность основных умений и навыков при выполнении практического задания, но обладающим необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя.

Оценка «*неудовлетворительно*» выставляется студенту, обнаружившему пробелы в знаниях основного учебно-программного материала, допустившему принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой практических знаний

Описание шкалы оценивания

Максимально возможный балл за промежуточную аттестацию устанавливается равным 45. Промежуточная аттестация считается сданной, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Перечень основной литературы:

4. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. - 6-е изд. - Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. - 396 с. - ISBN 978-5-4344-0786-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/92055.html>
5. Кюркчан А. Г. Конспект лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ч. 1: учебное пособие / А. Г. Кюркчан, Н. И. Смирнова. - 2-е изд. - Москва: Московский технический университет связи и информатики, 2015. - 50 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/92425.html>
6. Кюркчан А. Г. Конспект лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ч. 2: учебное пособие / А. Г. Кюркчан, Н. И. Смирнова. - 2-е изд. - Москва: Московский технический университет связи и информатики, 2015. - 53 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/92426.html>

Перечень дополнительной литературы:

4. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В. К. Романко, Н. Х. Агаханов, В. В. Власов, Л. И. Коваленко; под редакцией В. К. Романко. - 6-е изд. - Москва: Лаборатория знаний, 2020. - 220 с. - ISBN 978-5-00101-799-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. -URL: <https://www.iprbookshop.ru/88985.html>
5. Щербакова Ю. В. Дифференциальные уравнения: учебное пособие / Ю. В. Щербакова. - 2-е изд. - Саратов: Научная книга, 2019. - 159 с. - ISBN 978-5-9758-1728-0. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/81007.html>
6. Литвин Д. Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы: учебное пособие / Д. Б. Литвин, С. В. Мелешко, И. И. Мамаев. - Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, Сервисшкола, 2017. -76 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/76118.html>

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

<http://biblioclub.ru/> - ЭБС «Университетская библиотека online»

<http://biblio-online.ru/> - ЭБС «Biblio-online.ru»

<http://cyberleninka.ru/> - Научная электронная библиотека «КиберЛенинка»

<http://elibrary.ru> – Научная электронная библиотека

<http://www.iprbookshop.ru/> - ЭБС «IPRbooks»