

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего профессионального образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Методы решения задач электроэнергетики и электротехники
Методические указания по организации и проведению самостоятельной работы

Направление подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и
электротехника Направленность (профиль) «Электроснабжение»

Квалификация выпускника бакалавр
Изучается в 2 семестре

Ставрополь 2026

1. Общие положения

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в вузе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

К основным видам самостоятельной работы студентов относятся:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание докладов;
- подготовка к семинарам, практическим и лабораторным работам, их оформление;
- выполнение учебно-исследовательских работ, проектная деятельность;
- подготовка практических разработок и рекомендаций по решению проблемной ситуации;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов и др.

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Самостоятельная работа по дисциплине «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» направлена на формирование следующих компетенций:

Код	Формулировка
ОПК-3	Способен применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач
ОПК-4	Способен использовать методы анализа и моделирования электрических цепей и электрических машин

2. Цель и задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС совпадает с целью обучения студента – формирование набора компетенций будущего бакалавра.

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельной работы и лабораторных занятий.

3. Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов)	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
2 семестр					
ИД-1ОПК-3, ИД-1ОПК-4	Подготовка к лекциям	Собеседование, тестирование	7,5	0,5	8
ИД-1ОПК-3, ИД-1ОПК-4	Подготовка к практическим занятиям	Собеседование, тестирование	7,5	0,5	8
ИД-1ОПК-3, ИД-1ОПК-4	Выполнение контрольной работы	Контрольная работа, собеседование	14,5	0,5	15
ИД-1ОПК-3, ИД-1ОПК-4	Самостоятельное изучение литературы	Собеседование, тестирование	80	1	81
Итого за 2 семестр			109,5	2,5	112
Итого			109,5	2,5	112

4. Порядок выполнения самостоятельной работы студентом

4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанно читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют **четыре основные установки в чтении научного текста:**

информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)

усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения, излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;

Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;

Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;

Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет

всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта.
2. Выделите главное, составьте план.
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора.
4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.
5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

4.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на лабораторных занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала – умение отвечать на вопросы для собеседования.

4.5. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы

Контрольная работа является важным элементом самостоятельной работы студентов. Основной целью работы является получение будущим специалистом практических навыков по решению задач, возникающих в практической деятельности, а также умения работать с литературой, делать на основе ее изучения выводы и обобщения.

Контрольная работа включает себя практические вопросы по разделам: «Комплексные числа», «Ряд Фурье».

Контрольная работа с учетом ее содержания оценивается по пятибалльной системе. Контрольная работа должна быть написана в сроки, устанавливаемые кафедрой. Работу, которую преподаватель признал неудовлетворительной, возвращается для переработки с учетом высказанных в отзыве замечаний.

4.6. Методические рекомендации по подготовке к экзамену

Готовиться к экзамену необходимо в течение всего учебного времени, т.е. с первого дня очередного семестра: вся работа студента на лекциях, семинарских занятиях, консультациях, а также написание рефератов и выполнение курсовых работ и т.п. – это и есть этапы подготовки студента к зачетам и экзаменам. Подготовка к сессии должна быть нацелена не столько на приобретение новых знаний, сколько на закрепление ранее изученного материала и повторение ею. Сумму полученных знаний студенту перед сессией надо разумно обобщить, привести в систему, закрепить в памяти, для чего ему надо использовать учебники, лекции, консультации, курсовые работы, рефераты и т.п., а также методические пособия и различного рода руководства. Повторение необходимо производить по разделам, темам.

Методика подготовки к сдаче зачета и экзамена одинакова и состоит из двух взаимосвязанных этапов.

1. Регулярное посещение всех учебных занятий в течение всего семестра: лекций, семинарских занятий, консультаций и т.п., а также активное изучение рекомендованной литературы, отработка (в случае необходимости) в установленные сроки всех пропущенных учебных занятий.

2. Непосредственная подготовка к зачету и экзамену, когда студенту нужно в короткий срок (2-4 дня) охватить весь изученный материал по предмету и успешно сдать экзамен. А для того, чтобы это успешно сделать, студент, в первую очередь, должен мысленно в спокойной обстановке вспомнить весь материал, изученный за семестр с тем, чтобы выявить разделы курса (предмета), слабо изученные или плохо понятые при первоначальном изучении с целью устранения пробелов в своих знаниях. Для успешной подготовки к экзаменам студенту необходимо составить себе своеобразный рабочий график, в котором отразился бы последовательный переход от темы к теме, от раздела к разделу. Во время подготовки к экзаменам могут появиться вопросы. Их нужно записать и получить ответ на предэкзаменационных консультациях. На консультациях преподаватель интересуется, как студентами изучены темы, пройденные в учебном процессе, при необходимости он разъясняет отдельные вопросы этих тем. Иногда преподаватель делает сжатый обзор важнейших тем курса, отмечает те вопросы, на которые студенты, ранее сдававшие экзамен, отвечали плохо. Во время подготовки к экзамену студенту необходимо просмотреть и собственные конспекты прослушанных лекций и самостоятельно проработанных тем семинарских занятий. Это позволит ему восстановить в памяти ранее изученные положения, выявить пробелы в своих знаниях и восполнить их из других источников. Значение предэкзаменационных консультаций очень велико. Они

призваны: 1) помочь устранить пробелы в знаниях; 2) помочь систематизировать весь ранее изученный материал; 3) информировать студентов о новейших сведениях по тому предмету, который изучен последним.

Экзамен проводится в форме устного опроса.

Вопросы к экзамену:

1. Комплексные числа: формы представления, перевод из различных форм.
2. Геометрический смысл модуля разности.
3. Операции с комплексными числами: сложение, вычитание, умножение и деление.
4. Формулы Эйлера и Муавра.
5. Представление синусоидальной величины с помощью комплексных чисел (комплексная амплитуда, комплекс действующего значения).
6. Напряжение и ток на резистивном, индуктивном и емкостном элементах.
7. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость.
8. Применение символического метода к расчету неразветвленной цепи синусоидального тока. Построение векторной диаграммы.
9. Ряды Фурье. Вычисление коэффициентов ряда Фурье.
10. Ряды Фурье. Интегрирование и дифференцирование.
11. Разложение в ряд Фурье в окрестностях точек разрыва. Явление Гиббса.
12. Графическое представление ряда Фурье. Спектр.
13. Интеграл Фурье.
14. Графо-аналитический метод разложения в ряд Фурье.
15. Дискретное преобразование Фурье.
16. Определение преобразования Лапласа.
17. Изображения константы, синуса, косинуса, экспоненты.
18. Изображения первой и второй производной, изображение интеграла.
19. Свойства преобразования Лапласа. Теорема линейности.
20. Свойства преобразования Лапласа. Теорема подобия.
21. Свойства преобразования Лапласа. Теорема затухания.
22. Свойства преобразования Лапласа. Теорема запаздывания.
23. Свойства преобразования Лапласа. Теорема дифференцирования оригинала.
24. Свойства преобразования Лапласа. Теорема интегрирования оригинала.
25. Свойства преобразования Лапласа. Теорема дифференцирования изображения.
26. Свойства преобразования Лапласа. Теорема интегрирования изображения.
27. Преобразования Лапласа. Решение дифференциальных уравнений.
28. Операторные схемы замещения элементов электрической цепи. Применение.
29. Формула разложения. Применение.
30. Формула разложения при наличии кратных корней.
31. Теорема вычетов.

Контроль самостоятельной работы студентов

Контроль самостоятельной работы проводится преподавателем.

Предусмотрены следующие виды контроля: собеседование, тестирование.

Подробные критерии оценивания компетенций приведены в Фонде оценочных средств для проведения текущей и промежуточной аттестации.

Вопросы для собеседования

1. Дать определение комплексного числа.
2. Сформулировать определение мнимой единицы.
3. Как найти степень мнимой единицы?

4. Какие комплексные числа называют равными, сопряженными?
5. Дать определение суммы двух комплексных чисел.
6. Дать определение произведения двух комплексных чисел.
7. Дать определение частного двух комплексных чисел.
8. Как изображаются комплексные числа на координатной плоскости?
9. Дать определение модуля и аргумента комплексного числа.
10. Записать формулу для нахождения модуля комплексного числа.
11. Как найти аргумент комплексного числа?
12. Записать общий вид комплексного числа в тригонометрической форме.
13. Как перемножить два комплексных числа в тригонометрической форме?
14. Как разделить два комплексных числа в тригонометрической форме?
15. Как возвести в степень комплексное число в тригонометрической форме?
16. Какое равенство называется формулой Эйлера?
17. Записать общий вид комплексного числа в показательной форме.
18. Как осуществить переход от алгебраической формы комплексного числа к показательной форме?
19. Как перемножить два комплексных числа в показательной форме?
20. Как разделить два комплексных числа в показательной форме?
21. Как возвести в степень комплексное число в показательной форме?
22. Как найти все значения корня n -й степени из комплексного числа в показательной форме?
23. Тригонометрический ряд Фурье. Вычисление коэффициентов ряда.
24. Сформулировать условия Дирихле.
25. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Вычисление коэффициентов ряда.
26. Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода. Вычисление коэффициентов ряда.
27. Представление непериодической функции рядом Фурье.
28. Интеграл Фурье. Формула Фурье. Отличие интеграла Фурье от ряда Фурье.
29. Что такое оригинал и изображение функции? Как они связаны между собой?
30. Какая связь существует между преобразованиями Лапласа и преобразованиями Фурье?
31. Свойства преобразования Лапласа.
32. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.
33. Свертка оригиналов.
34. Умножение изображений.

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он:

- Применяет знания о методологии научных исследований на высоком уровне, демонстрируя способность к глубокому критическому анализу проблемных ситуаций, используя системный подход и разрабатывая стратегию действий.
- Свободно формулирует цели и задачи исследования, выделяет приоритетные направления и обоснованно выбирает критерии оценки полученных результатов.
- Уверенно использует современные методы научного исследования, демонстрируя умение оценивать их эффективность, корректно анализировать и представлять результаты своей работы.
- Полностью освоил теоретическое содержание курса, логично и последовательно излагает материал, свободно отвечает на вопросы, аргументирует свою точку зрения с опорой на дополнительные источники.
- Выполнил все предусмотренные программой задания на высоком уровне, проявил самостоятельность и аналитический подход при их выполнении.

- Компетенции ОПК-3, ОПК-4 освоены на высоком уровне.
Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он:
- Применяет знания о методологии научных исследований на среднем уровне, демонстрируя способность к анализу проблемных ситуаций, но испытывая некоторые затруднения при выработке стратегии действий.
- Формулирует цели и задачи исследования, но не всегда четко определяет приоритетные направления и критерии оценки.
- Использует современные методы исследования, но допускает незначительные неточности при интерпретации результатов.
- Освоил теоретическое содержание курса на достаточном уровне, допускает небольшие пробелы в знаниях, последовательно излагает материал, но может испытывать незначительные трудности при ответах.
- Выполнил все предусмотренные программой задания, однако их качество оценивается на среднем уровне, анализ результатов проводится с некоторыми упущениями.
- Компетенции ОПК-3, ОПК-4 освоены на среднем уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он:

- Применяет знания о методологии научных исследований на минимальном уровне, выявляя проблемы, но не умея их критически анализировать и разрабатывать стратегию решений.
- Формулирует цели и задачи исследования, но делает это неполно, без четкого понимания критериев оценки.
- Использует современные методы исследования, но допускает значительные ошибки при интерпретации результатов.
- Освоил теоретическое содержание курса на низком уровне, излагает материал непоследовательно, испытывает значительные трудности при ответах, не способен уверенно аргументировать свою позицию.
- Выполнил задания программы, но качество их выполнения оценивается на низком уровне, анализ результатов проводится с серьезными пробелами.
- Компетенции ОПК-3, ОПК-4 освоены на минимальном уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он:

- Не применяет знания о методологии научных исследований, не умеет анализировать проблемные ситуации и разрабатывать стратегию действий.
- Не способен корректно формулировать цели и задачи исследования, не понимает критериев их оценки.
- Не владеет современными методами научного исследования, допускает серьезные ошибки при обработке и интерпретации результатов.
- Не знает значительной части программного материала, допускает грубые ошибки при изложении, не способен ответить на вопросы, его аргументация отсутствует или крайне слабая.
- Не выполнил большую часть предусмотренных программой заданий, их качество оценено на минимальном уровне.
- Компетенции ОПК-3, ОПК-4 не сформированы.

2. Описание шкалы оценивания

Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя устный ответ на практическом занятии по предложенным вопросам.

Для подготовки к данному оценочному мероприятию необходимо изучить рекомендованную основную и дополнительную литературу, материалы интернет-ресурсов, ознакомиться с медиа-текстами.

При проверке задания, оцениваются степень владения теоретическим материалом, умение применять теоретические знания на практике. Умение грамотно, аргументировано и непротиворечиво излагать теоретический материал и собственные суждения, оценки, примеры.

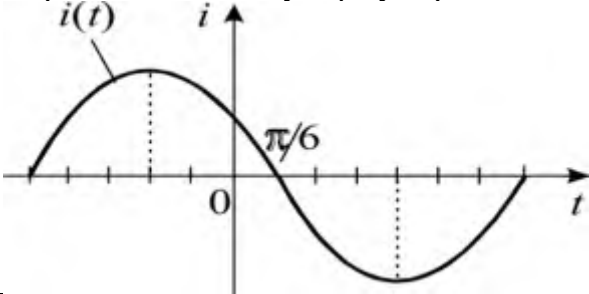
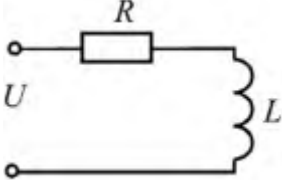
Оценочный лист

Тема занятия:								
		Базовый уровень				Повышенный уровень		
№	ФИО студента	Степень владения теоретическим материалом (0-5 баллов)	Примеры (0-5 баллов)	Уровень аргументации (0-5 баллов)	Собственная точка зрения (0-5 баллов)	Апелляция к самостоятельно найденным научным источникам (0-5 баллов)	Сумма баллов	Итоговая оценка

Тесты

Номер задания	Содержание вопроса
1.	Чему равен квадрат мнимой единицы? а) -1 б) 0 в) 1 г) i
2.	На какие комплексные множители можно разложить выражение $16a^2 + 36b^2$ при помощи формулы $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$? а) $8a + 18bi$ и $8a - 6bi$ б) $4a + 6b$ и $4a - 6bi$

	c) $8a + 2b$ и $2a - 16b$ d) $4a + 6bi$ и $4a - 6bi$.
3.	По какой формуле выполняется умножение комплексных чисел? a) $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$ b) $(a_2 + b_1i)(a_1 + b_2i) = (a_1b_2 - b_1a_2) + (b_1b_2 + a_2b_1)i$ c) $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_1i) = (a_1a_2 - b_1i) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$ d) $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$.
4.	Чему равно i^4 ? a) 0 b) 1 c) i d) -1
5.	На какие комплексные множители можно разложить число 20? a) $2 + 4i$ и $2 - 4i$ b) $6 + 14i$ и $6 - 14i$ c) $7 + 3i$ и $7 - 3i$ d) $16 + 4i$ и $16 - 4i$
6.	Каковы условия равенства двух комплексных чисел? a) $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ b) $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ c) $x_1 > x_2, y_1 > y_2$ d) $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$
7.	Ряд Фурье функции $f(x) = x $ ($-\pi < x < \pi$), $T = 2\pi$, в точке $x_0 = \pi$ сходится к значению a) π b) 0 c) $-\pi$ d) 1
8.	Ряд Фурье функции $f(x) = x^2$ ($-1 < x < 1$), $T = 2$ в точке $x_0 = 0$ сходится к значению. a) π b) 0 c) $-\pi$ d) 1
9.	Свободный член a_0 ряда Фурье функции $f(x) = -5x$ ($-1 < x < 1$), $T = 2$ равен: a) π b) 0 c) $-\pi$ d) 2
10.	Чему равно изображение функции e^{3t} ? a) $\frac{1}{p-3}$ b) $\frac{1}{p+3}$ c) $\frac{1}{3-p}$ d) $\frac{3}{p}$

11.	Найти оригинал функции $F(p) = \frac{2p}{p^2 + 1}$. a) $\frac{1}{2} \sin t$. b) $\frac{1}{2} \cos t$. c) $\sin 2t$. d) $\cos 2t$. e) $2 \cos t$.
12.	Представление синусоидальной величины с помощью комплексных чисел (комплексная амплитуда, комплекс действующего значения).
13.	Напряжение, ток и мощность на резистивном элементе
14.	Напряжение, ток и мощность на индуктивном элементе
15.	Напряжение, ток и мощность на емкостном элементе
16.	Комплексное сопротивление и комплексная проводимость.
17.	Алгоритм применения символического метода к расчету неразветвленной цепи синусоидального тока.
18.	Построение векторной диаграммы.
19.	Чему равен угол сдвига по фазе между напряжением и током на емкостном элементе?
20.	Чему равен угол сдвига по фазе между напряжением и током на индуктивном элементе?
21.	Чему равен угол сдвига по фазе между напряжением и током на резистивном элементе?
22.	Как изменяется реактивное сопротивление емкостного элемента с ростом частоты?
23.	Как изменяется реактивное сопротивление индуктивного элемента с ростом частоты?
24.	Определите начальную фазу переменного тока, представленного на графике. 
25.	Построить треугольник сопротивлений для заданной схемы относительно зажимов источника питания 
26.	Определите ток в неразветвленной части цепи.

27.	Алгоритм расчета линейной электрической цепи несинусоидального тока.
28.	Запишите выражение для мгновенного значения синусоидального тока в общем виде?
29.	Сформулируйте первый закон Кирхгофа для электрической цепи синусоидального тока для мгновенных значений.
30.	Сформулируйте второй закон Кирхгофа для электрической цепи синусоидального тока для мгновенных значений.
31.	Сформулируйте первый закон Кирхгофа для электрической цепи синусоидального тока в комплексной форме.
32.	Сформулируйте второй закон Кирхгофа для электрической цепи синусоидального тока в комплексной форме.
33.	Сформулируйте закон Ома для цепи синусоидального тока.
34.	Какова связь между действующим и мгновенными значениями синусоидального тока?
35.	Угловая частота ω связана с линейной f выражением a) $\omega = 2\pi f$ b) $\omega = \pi f$ c) $\omega = \pi f / 2$ d) $\omega = f / 2\pi$
36.	Реактивное сопротивление индуктивности определяется по формуле a) $X_L = \omega L$ b) $X_L = \frac{1}{\omega L}$ c) $X_L = \frac{\omega}{L}$ d) $X_L = \frac{L}{\omega}$
37.	Реактивное сопротивление емкости определяется по формуле a) $X_C = \omega C$ b) $X_C = \frac{1}{\omega C}$ c) $X_C = \frac{\omega}{C}$ d) $X_C = \frac{C}{\omega}$
38.	Амплитуда ЭДС, уравнение мгновенных значений которой имеет вид $e(t) = 222 \sin(314t + 2)$, равна a) 222 b) 157 c) 314 d) 2

39.	Амплитуда ЭДС, уравнение мгновенных значений которой имеет вид $e(t) = 222 \sin(314t + \pi / 6)$, равна a) 222 b) 157 c) 314 d) 2
40.	Полное сопротивление ветви, состоящей из сопротивлений - активного 4 Ом и емкостного 3 Ом, равно a) 12 b) 7 c) 5 d) 1
41.	Комплекс полного сопротивления ветви из сопротивлений - активного 4 Ом, емкостного - 12 Ом и индуктивного - 8 Ом, в алгебраической форме имеет вид a) $\underline{Z} = 4 - j4$ b) $\underline{Z} = 4 + j4$ c) $\underline{Z} = 16 + j8$ d) $\underline{Z} = 12 - j12$

Критерии оценивания компетенций

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он правильно выполнил 88-100 % тестовых заданий

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он правильно выполнил 72-87 % тестовых заданий

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он правильно выполнил 53-71 % тестовых заданий

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он правильно выполнил менее 53 % тестовых заданий

Список источников для выполнения СРС

Перечень основной литературы

1. Эйдерман, В. Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления : учебник : [16+] / В. Я. Эйдерман. – Москва : Физматлит, 2002. – 255 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=76734>. – Библиогр: с. 251. – ISBN 978-5-9221-0283-4. – Текст : электронный.
2. Ильин, М. Е. Ряды Фурье : учебное пособие / М. Е. Ильин. — Саратов : Вузовское образование, 2019. — 157 с. — ISBN 978-5-4487-0508-3. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/83820.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/83820>
3. Теоретические основы электротехники : учебник / И. Я. Лизан, К. Н. Маренич, И. В. Ковалева [и др.]. — Москва, Вологда : Инфра-Инженерия, 2021. — 628 с. — ISBN 978-5-9729-0663-5. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/114971.html> . — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

Перечень дополнительной литературы

1. Соколенко, Е. В. Теория функций комплексных переменных. Операционное исчисление : учебное пособие / Е. В. Соколенко ; Северо-Кавказский федеральный университет. – Ставрополь : Северо-Кавказский Федеральный университет (СКФУ), 2017. – 199 с. : табл. – Режим доступа: по подписке. – URL:

<https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=494812>. – Библиогр. в кн. – Текст : электронный.

2. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления В 3-х тт. : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 13-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022 — Том 3 — 2022. — 656 с. — ISBN 978-5-507-44238-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: /book/221270. — Режим доступа: для авториз. пользователей.

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники». Ставрополь: СКФУ, 2025.
2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов по дисциплине «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники». Ставрополь: СКФУ, 2025.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. <http://catalog.ncfu.ru> – электронные каталоги Ассоциации электронных библиотек учебных заведений и организаций СКФО.
2. <http://www.biblioclub.ru> – электронно-библиотечная система «Университетская библиотека онлайн».
3. <http://www.iprbookshop.ru/> – ЭБС «IPRbooks».

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего профессионального образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Демин М.С.

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине

Методы решения задач электроэнергетики и электротехники

Направление подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и
электротехника Направленность (профиль) «Электроснабжение»

Квалификация выпускника бакалавр
Изучается в 2 семестре

Ставрополь
2025

Практическое занятие №1

Определение, изображение комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

1. Комплексным числом Z называется выражение вида

$Z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – так называемая мнимая единица, $i^2 = -1$. Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым; если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом x . Число x называется действительной частью комплексного числа Z и обозначается $x = \operatorname{Re} Z$, а y – мнимой частью Z и обозначается $y = \operatorname{Im} Z$. Запись числа Z в виде $Z = x + iy$ называют алгебраической формой комплексного числа.

2. Два комплексных числа $Z_1 = x_1 + iy_1$ и $Z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными ($Z_1 = Z_2$) тогда и только тогда, когда равны их действительные части и их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $Z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$.

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Пример 1. При каких действительных значениях x и y выполняются равенства:

а) $x(2 - i) + y(2i - 1) = 4 - 5i$;

б) $ix^2 + (3 - i)x - (1 - 2i)y = 2 + 2i$?

Решение: а) преобразуем левую часть выражения, а именно, выделим действительную и мнимую части комплексного числа:

$$2x - y - xi + 2yi = 4 - 5i$$

$$(2x - y) + (-x + 2y)i = 4 + (-5)i$$

Используя условие равенства двух комплексных чисел, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} + \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} \begin{cases} 3x = 3 \\ y = \frac{x - 5}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = -2 \end{cases}$$

б) аналогично преобразуем левую часть:

$$3x - y + ix^2 - xi + 2yi = 2 + 2i,$$

$$(3x - y) + (x^2 - x + 2y)i = 2 + 2i, \quad \text{откуда}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 2, \\ x^2 - x + 2y = 2 \end{cases} \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 - x + 2(3x - 2) = 2 \end{cases} \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 + 5x - 6 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x_1 = -6; x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -20, y_2 = 1, \\ x_1 = -6, x_2 = 1. \end{cases}$$

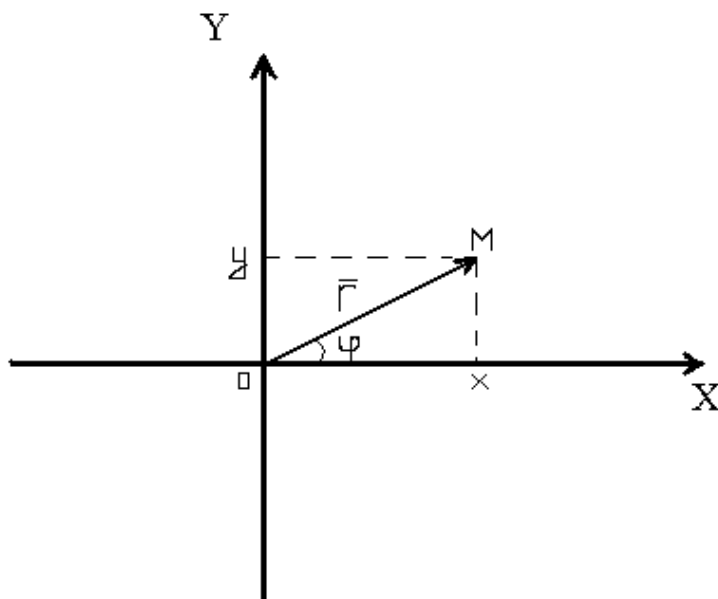
3. Два комплексных числа $Z = x + iy$ и $\bar{Z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными**.

Например: $1 + i$ и $1 - i$; $2i$ и $-2i$.

Комплексные числа, отличающиеся знаком действительной и мнимой частей, называются **противоположными**.

3. Всякое комплексное число $Z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} Z$, $y = \operatorname{Im} Z$. Ось Ox называется действительной, ось Oy - мнимой. И, наоборот, каждую точку $M(x; y)$ координатной плоскости можно рассматривать как об-

раз комплексного числа $Z = x + iy$. Комплексное число Z можно задавать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \{x; y\}$.



Пример 2. Изобразите геометрически следующие комплексные числа и им сопряженные: а) 3; б) $2i$; в) $-2-3i$; г) $1 + 2i$.

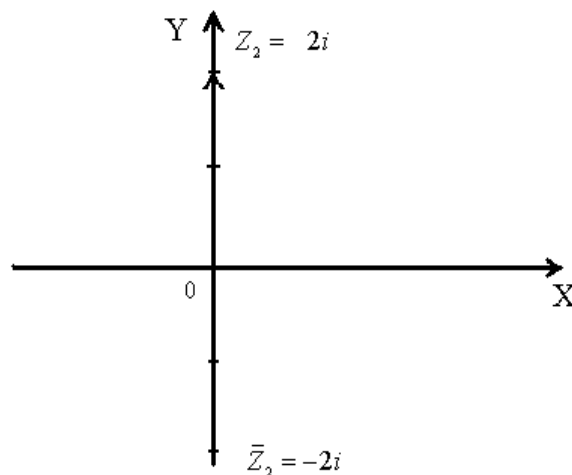
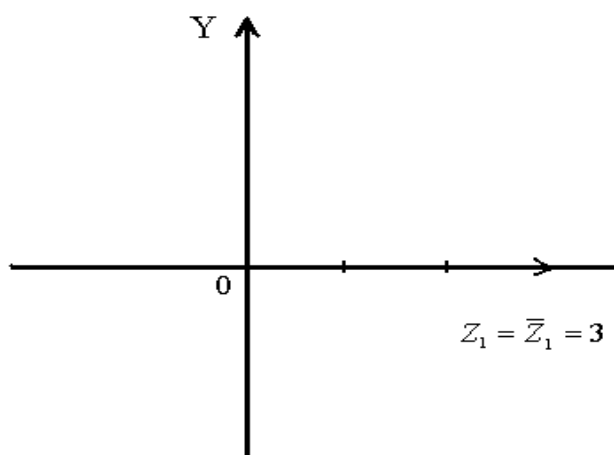
Решение:

а) $Z_1 = 3 = 3 + 0i$

$$\overline{Z}_1 = 3 - 0i = 3, \text{ т.е. } Z_1 = \overline{Z}_1.$$

б) $Z_2 = 2i = 0 + 2i$

$$\overline{Z}_2 = 0 - 2i = -2i.$$

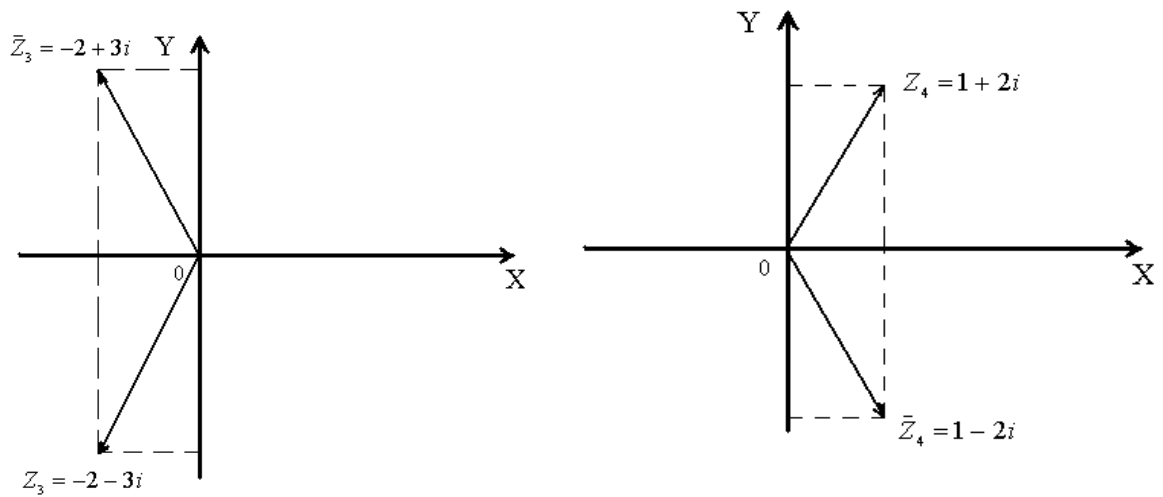


в) $Z_3 = -2 - 3i$

$$\overline{Z}_3 = -2 + 3i$$

г) $Z_4 = 1 + 2i$

$$\overline{Z}_4 = 1 - 2i$$



5. Длина вектора $\vec{r}$ называется модулем комплексного числа и обозначается $|Z|$ или r : $r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число, называется аргументом этого комплексного числа, обозначается $\text{Arg } Z$ или φ . $\text{Arg } Z = \arg Z + 2\pi k$, k – любое целое число; $\arg Z$ – главное значение аргумента, $-\pi < \arg Z \leq \pi$. Аргумент φ определяется из формулы: $\text{tg } \varphi = \frac{y}{x}$.

Так как $-\pi < \arg Z \leq \pi$, то из формулы: $\text{tg } \varphi = \frac{y}{x}$ получаем, что

$$\arg Z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & \text{Для внутренних точек} \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi & \text{I, IV четвертей} \\ \arctg \frac{y}{x} - \pi & \text{Для внутренних точек} \\ & \text{II четверти} \\ & \text{Для внутренних точек} \\ & \text{III четверти} \end{cases}$$

Если точка Z лежит на действительной или мнимой оси, то $\arg Z$ можно найти непосредственно.

Пример 3. Найдите модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел: а) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$; б) $-3i$.

Решение:

$$\text{а) } Z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad |Z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg Z_1 = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4} \text{ - главное значение}$$

аргумента, т.к. $-\pi < -\frac{\pi}{4} < \pi$.

$$\text{б) } Z_2 = -3i = 0 - 3i$$

$$|Z_2| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Из изображения числа Z_2 следует, что $\arg Z_2 = -\frac{\pi}{2}$ - главное зна-

чение, т.к. $-\pi < -\frac{\pi}{2} < \pi$.

6. Суммой двух комплексных чисел $Z_1 = x_1 + iy_1$ и

$Z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$Z = Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Свойства сложения комплексных чисел:

$$\text{а) } Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$$

$$\text{б) } (Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3).$$

7. Вычитание определяется как действие, обратное сложению. Если $Z_1 = x_1 + iy_1, Z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$Z = Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

8. Произведением комплексных чисел $Z_1 = x_1 + iy_1$ и $Z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равен-

ством: $Z = Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$. Заметим, что $Z \cdot \bar{Z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$ - действительное число.

Свойства умножения комплексных чисел:

- a) $Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$.
- b) $(Z_1 \cdot Z_2) \cdot Z_3 = Z_1 (Z_2 \cdot Z_3)$
- c) $Z_1 (Z_2 + Z_3) = Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3$.

Например:

$$(2 - 3i)(-5 + 4i) = -10 + 8i + 15i - 12i^2 = -10 + 23i + 12 = 2 + 23i.$$

9. Деление определяется как действие, обратное умножению. Если

$$Z_1 = x_1 + iy_1, Z_2 = x_2 + iy_2, \text{ то } Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

Пример 4. Выполните деление $\frac{1+3i}{2+i}$.

$$\text{Решение: } \frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+6i+3}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i.$$

Пример 5. Выполните указанные действия:

a) $(2 - 3i) - (i - 2);$

б) $(2 - i)(i + 1) - (1,5i + 1)4i;$

в) $\frac{1}{1+2i} + \frac{i}{2-i};$

г) $\frac{2}{1+i} - \frac{1-i}{1+2i}(2-i);$

д) $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2.$

Решение:

$$a) (2 - 3i) - (i - 2) = 2 - 3i - i + 2 = 4 - 4i;$$

$$б) (2 - i) \cdot (i + 1) - (1,5i + 1) \cdot 4i = 2i - i^2 + 2 - i - 6i^2 - 4i = \\ = 2i + 1 + 2 - i + 6 - 4i = 9 - 3i;$$

$$в) \frac{1}{1+2i} + \frac{i}{2-i} = \frac{2-i+i(1+2i)}{(1+2i)(2-i)} = \frac{2-i+i+2i^2}{(1+2i)(2-i)} = \frac{2-i+i-2}{(1+2i)(2-i)} = \\ = \frac{0}{(1+2i)(2-i)} = 0;$$

$$г) \frac{2}{1+i} - \frac{1-i}{1+2i} \cdot (2-i) = \frac{2}{1+i} - \frac{2-2i-i+i^2}{1+2i} = \frac{2}{1+i} - \frac{2-2i-i-1}{1+2i} = \\ = \frac{2}{1+i} - \frac{1-3i}{1+2i} = \frac{2(1+2i) - (1-3i)(1+i)}{(1+i)(1+2i)} = \frac{2+4i - (1-3i+i-3i^2)}{1+i+2i+2i^2} = \\ = \frac{2+4i-1+3i-i-3}{1+i+2i-2} = \frac{-2+6i}{-1+3i} = \frac{2(-1+3i)}{(-1+3i)} = 2;$$

$$д) (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \cdot i\sqrt{2} + (i\sqrt{2})^2 = 2 + 2 \cdot 2i + i^2 \cdot 2 = 2 + 4i - 2 = 4i$$

Пример 6. Определите полное сопротивление цепи $Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$,

если известно $Z_1 = (6 + 8i) \text{ Ом}; \quad Z_2 = 8i \text{ Ом}.$

Решение:

$$Z = \frac{(6 + 8i) \cdot 8i}{6 + 8i + 8i} = \frac{48i + 64i^2}{6 + 16i} = \frac{-64 + 48i}{6 + 16i} = \frac{-32 + 24i}{3 + 8i} = \\ = \frac{(-32 + 24i)(3 - 8i)}{(3 + 8i)(3 - 8i)} = \frac{-96 + 72i + 256i - 192i^2}{9 + 64} = \\ = \frac{-96 + 328i + 192}{73} = \frac{96 + 328i}{73} \approx (1,32 + 4,5i) \text{ Ом}.$$

Пример 7. Постройте на плоскости комплексного переменного линии, заданные уравнениями:

$$a) |Z - 2i| = 3;$$

$$б) \operatorname{Re}(Z^2) = 1;$$

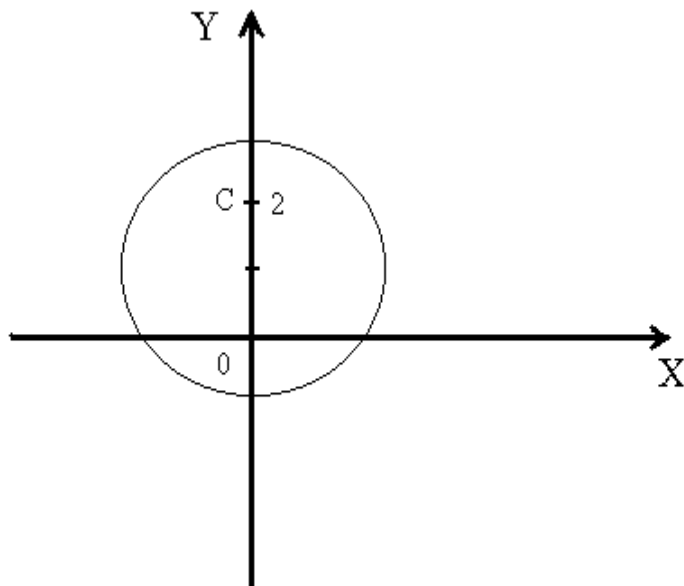
в) $\arg Z = \frac{\pi}{4}$;

г) $2 \operatorname{Re} Z - (\operatorname{Im} Z)^2 = 1$.

Решение: а) $|Z - 2i| = 3$.

Т.к. $Z = x + iy$, то $Z - 2i = x + iy - 2i = x + i(y - 2)$.

Найдем $|Z - 2i| = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$. По условию $|Z - 2i| = 3$, т.е. $\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = 3$, $x^2 + (y - 2)^2 = 3^2$. Это уравнение задает окружность с центром в т. С (0;2), радиуса 3.



б) $\operatorname{Re}(Z^2) = 1$.

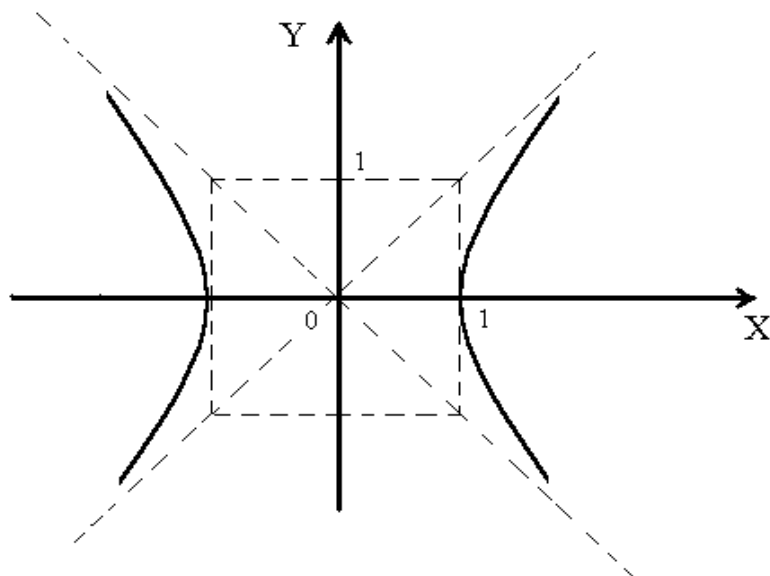
Т.к. $Z = x + iy$, то

$$Z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi + i^2 y^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

$$\operatorname{Re}(Z^2) = x^2 - y^2.$$

По условию $x^2 - y^2 = 1$. Это уравнение равнобочной гиперболы.

Вершина находится в начале координат, полуоси: $a = b = 1$.

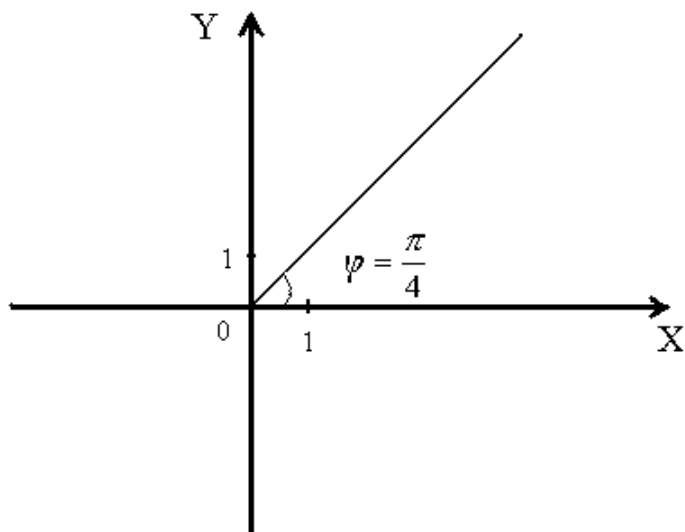


в) $\arg Z = \frac{\pi}{4}$.

Т.к. $\arg Z = \arctg \frac{y}{x}$, то $\arctg \frac{y}{x} = \frac{\pi}{4}$; $\frac{y}{x} = 1, y = x$. Это уравнение прямой (биссектриса I и III координатных четвертей).

Рассматриваем точки прямой $y = x$ лежащие только в I четверти.

г)



Рассматриваем

$y = x$,

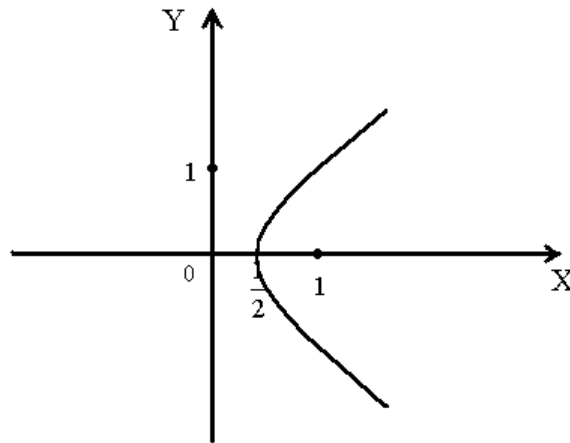
в I чет-

$$2\operatorname{Re}Z - (\operatorname{Im}Z)^2 = 1.$$

Т.к. $Z = x + iy$, то $\operatorname{Re}Z = x$, $\operatorname{Im}Z = y$, тогда

$$2x - y^2 = 1, \quad 2x = y^2 + 1, \quad x = \frac{y^2 + 1}{2}.$$

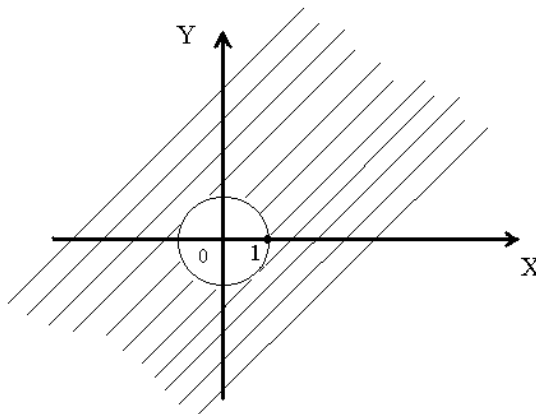
Это уравнение параболы, вершина в точке с координатами $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, ось OX – ось симметрии.



Пример 8. Изобразите области, заданные условиями: а) $|Z| \geq 1$; б)

$|Z + 2 - i| < 3$; в) $\operatorname{Re} Z \leq 2$; г) $1 \leq |z - 1 + i|^2 \leq 4$; д) $\begin{cases} \operatorname{Im} Z \leq 2, \\ 0 \leq \arg Z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ Решение:

а) $|Z| \geq 1$. Т.к. $Z = x + iy$, $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то



$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq 1, x^2 + y^2 \geq 1.$$

б) $|Z + 2 - i| < 3$;

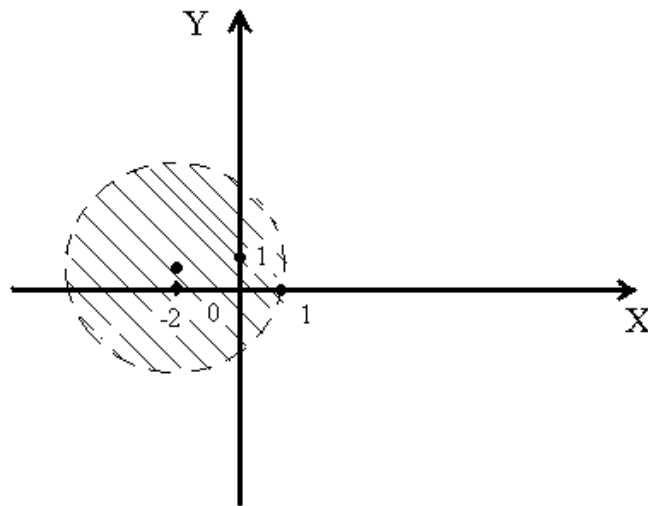
Т.к. $Z = x + iy$, то $Z + 2 - i = x + iy + 2 - i = (x + 2) + (y - 1)i$

Найдем $|Z + 2 - i| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}$.

По условию $|Z + 2 - i| < 3$, т.е.

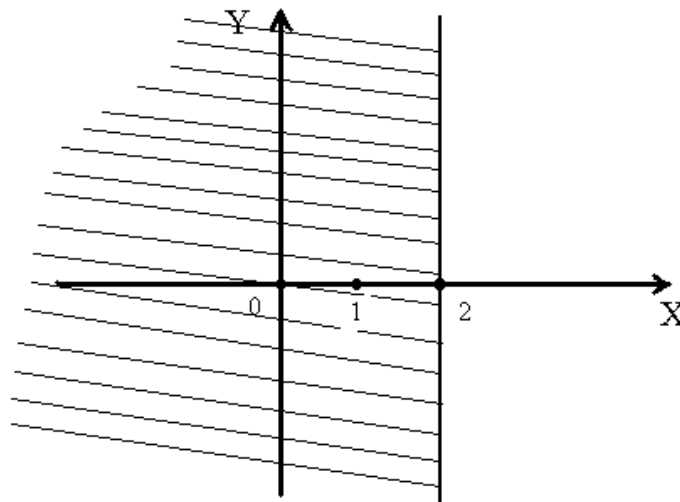
$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} < 3$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 < 9.$$



в) $\operatorname{Re} Z \leq 2$.

Т.к. $Z = x + iy$, $\operatorname{Re} Z = x$, то $x \leq 2$.

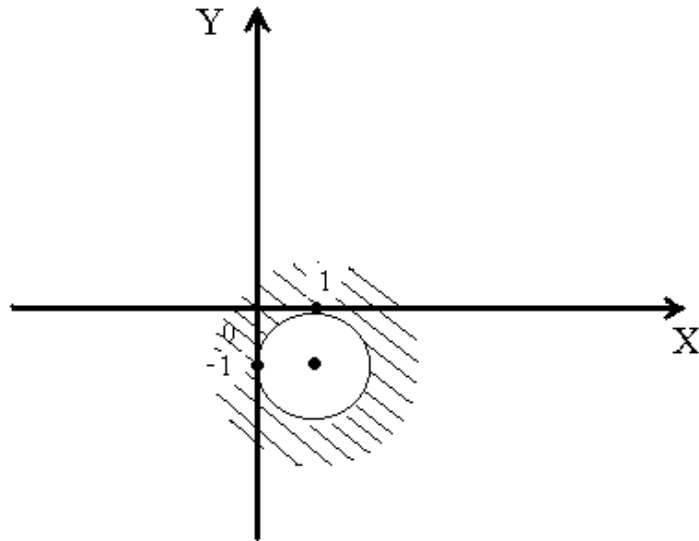


г) $1 \leq |Z - 1 + i|^2 \leq 4$.

Т.к. $Z = x + iy$, $Z - 1 + i = x + iy - 1 + i = (x - 1) + (y + 1)i$,

$$|Z - 1 + i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}, |Z - 1 + i|^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2, \quad \text{то}$$

$$1 \leq (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4.$$



$$\text{д) } \begin{cases} \operatorname{Im} Z \leq 2 \\ 0 \leq \arg Z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

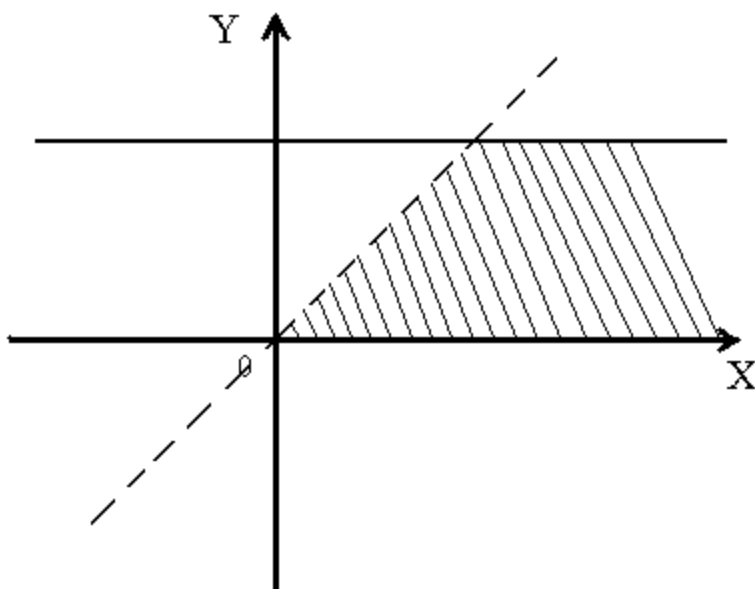
$$\operatorname{Im} Z \leq 2.$$

$$\text{Т.к. } Z = x + iy, \operatorname{Im} Z = y, \text{ то } y \leq 2, 0 \leq \arg Z < \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Т.к. } \arg Z = \arctg \frac{y}{x}, \text{ то } 0 \leq \arctg \frac{y}{x} < \frac{\pi}{4}; \quad \operatorname{tg} 0 \leq \frac{y}{x} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$$

$$0 \leq \frac{y}{x} < 1; \quad 0 \leq y < x.$$

$$\text{Т.о., } \begin{cases} y \leq 2 \\ 0 \leq y < x \end{cases}$$



Решите задачи

1.1. Изобразите геометрически комплексные числа и им сопряженные:

$2; -i; -2; 3 - 2i; 1 + 2i; -1 - i.$

1.2. а) Найдите сумму и произведение комплексных чисел Z_1 и Z_2 , если:

1) $Z_1 = 4 + 5i; Z_2 = 3 - 2i.$

2) $Z_1 = 0,5 - 3,2i; Z_2 = 1,5 - 0,8i.$

3) $Z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i; Z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i.$

б) Найдите разность и частное комплексных чисел Z_1 и Z_2 , если:

1) $Z_1 = 3 + 4i; Z_2 = 0,4 - 0,2i.$

2) $Z_1 = 1 - 2i; Z_2 = 0,6.$

3) $Z_1 = \sqrt{5} - i; Z_2 = \sqrt{5} - 2i.$

1.3. Найдите мнимую часть Z , если:

$$1) \quad Z = (2 - i)^3 \cdot (2 + 11i).$$

$$2) \quad Z = \frac{2 - 3i}{1 + 4i} + i^6.$$

$$3) \quad Z = \frac{5 + 2i}{2 - 5i} - \frac{3 - 4i}{4 + 3i} - \frac{1}{i}.$$

1.4. Выполните действия:

$$1) \quad i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20}.$$

$$2) \quad 2i \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

$$3) \quad \frac{1 + i}{1 - i} + \frac{1 - i}{1 + i}.$$

$$4) \quad \frac{13 + 12i}{6i - 8} + \frac{(1 + 2i)^2}{2 + i}.$$

$$5) \quad \frac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}.$$

$$6) \quad (7 + i) \cdot (2 - i) - (3 + 5i) \cdot (-i).$$

$$7) \quad i(3 - i) - (2 + 3i) \cdot (1 - i).$$

$$8) \quad \frac{3}{i} + \frac{5 - i}{2} - \frac{10 + i}{1 + i}.$$

1.6. Определите, при каких действительных значениях x и y комплексные числа:

$$а) \quad Z_1 = 2i(x + 2yi) + 3x \quad \text{и} \quad Z_2 = 1 - 2i;$$

$$б) \quad Z_1 = y^2 - 7y + 9xi \quad \text{и} \quad Z_2 = -12 + 20i + x^2i$$

равны.

1.7. Найдите модуль комплексного числа Z :

$$1) \quad Z = -4;$$

$$2) \quad Z = -i;$$

$$3) Z = -5 - 2\sqrt{6}i;$$

$$4) Z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i;$$

$$5) Z = \frac{2-i}{1+i}.$$

1.8. В плоскости комплексного переменного начертите линии, заданные уравнениями:

$$1) |Z + 1| = 1;$$

$$5) |2i - Z|^2 = 1;$$

$$2) |Z - 2| + |Z + 2| = 26;$$

$$6) \operatorname{Im} Z^2 = 4;$$

$$3) |Z - 2|^2 + |Z + 2|^2 = 26;$$

$$7) \arg Z = \frac{3\pi}{4};$$

$$4) |Z|^2 + 3Z + 3\bar{Z} = 0;$$

$$8) (\operatorname{Im} Z)^2 = 4 - \operatorname{Re} Z.$$

1.9. Изобразите области, заданные условиями:

$$1) |Z + 2i - 1| \leq 2;$$

$$5) |Z + i| \leq 1;$$

$$2) |Z - i| < |Z + i|;$$

$$6) \frac{\pi}{6} < \arg Z < \frac{\pi}{4};$$

$$3) \lg |Z - 10i| < 2;$$

$$7) -\frac{\pi}{4} \leq \arg Z \leq \frac{\pi}{2};$$

$$4) 1 \leq \operatorname{Re} Z \leq 4;$$

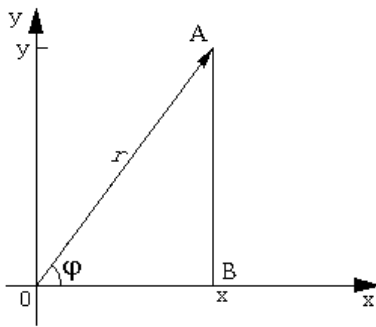
$$8) \begin{cases} 1 < \operatorname{Re} Z < 2 \\ -\frac{\pi}{4} < \arg Z < \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Практическое занятие № 2.

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

Показательная функция комплексного переменного

1. Рассмотрим комплексное число Z в алгебраической форме:



$z = x + iy$. Изобразим это число на комплексной плоскости в виде вектора $\overrightarrow{OA} = \{x, y\}$. Рассмотрим $\triangle AOB$, где $B(x, 0)$.

Пусть r - модуль комплексного числа z ; φ -один из его аргументов (любой). Тогда из $\triangle AOB$ следует, что $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$. Откуда число z запишется в виде: $z = r \cdot \cos \varphi + i \cdot r \cdot \sin \varphi$. Представление числа z в виде: $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ называется **тригонометрической формой** комплексного числа z .

Пример 1. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -2$, $z_3 = i$, $z_4 = -3 + 4i$.

Решение. Так как $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, а

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi = \operatorname{arctg} \frac{-1}{-1} - \pi = \operatorname{arctg} 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}, \quad \text{то}$$

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right).$$

Так как $|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$, а $\varphi_2 = \pi$ (по изображению числа на плоскости), то $z_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$. Учитывая, что $|z_2| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, а $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$ - один из аргументов z_3 , получаем $|z_3| = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$.

В связи с тем что $|z_4| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$, а

$$\varphi_4 = \arctg \frac{y}{x} + \pi = \arctg \frac{4}{-3} + \pi \approx 2,21424 \text{ рад} \approx 126^\circ 52',$$

$$\text{получаем } z_4 = 5(\cos(\pi - \arctg \frac{4}{3}) + i \sin(\pi - \arctg \frac{4}{3}))$$

$$\text{или } z_4 = 5(\cos 126^\circ 52' + i \sin 126^\circ 52').$$

Пример 2. Записать числа в тригонометрической форме

$$z_1 = 2 \cos \frac{7\pi}{4} - 2i \sin \frac{\pi}{4}, z_2 = -\cos \frac{\pi}{17} - i \sin \frac{\pi}{17}$$

Решение. Воспользуемся тем, что $\cos \frac{7\pi}{4} = \cos(-\frac{\pi}{4})$, а

$-\sin \frac{\pi}{4} = \sin(-\frac{\pi}{4})$, тогда получим тригонометрическую форму для

$$z_1: z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}). \quad \text{Аналогично учитывая, что}$$

$$-\cos \frac{\pi}{17} = \cos(\pi - \frac{\pi}{17}) = \cos \frac{16\pi}{17}, \sin \frac{\pi}{17} = \sin(\pi - \frac{\pi}{17}) = \sin \frac{16\pi}{17},$$

$$\text{получаем } z_2 = \cos \frac{16\pi}{17} - i \sin \frac{16\pi}{17}.$$

2. Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$,

то-

$$\text{гда } z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Пример 3. Найти произведение чисел

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{11\pi}{4} + i \sin \frac{11\pi}{4}) \text{ и } z_2 = \sqrt{8}(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8}).$$

Решение. Так как $|z_1| = \sqrt{2}, |z_2| = \sqrt{8}$, то $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{16} = 4$.

Аргументом произведения $z_1 \cdot z_2$ будет сумма

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{11\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} = \frac{25\pi}{8}.$$

Следовательно, $z_1 \cdot z_2 = 4 \cos(\frac{25\pi}{8} + i \sin \frac{25\pi}{8})$ или

$$z_1 \cdot z_2 = 4 \cos(\frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8}).$$

Пример 4. Записать в тригонометрической форме комплексное

$$\text{число } z = \frac{(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}) \cdot (\sqrt{3} + i)}{i - 1}.$$

Решение. Число $z = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$ имеет модуль, равный 1, и аргумент

$\varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$; число $z_2 = \sqrt{3} + i$ имеет модуль $\sqrt{2}$ и аргумент

$$\varphi_3 = \arctg \frac{1}{-1} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{Поэтому } |z| = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_3|} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\text{а аргумент } \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{11\pi}{12}.$$

$$\text{Следовательно, } z = \sqrt{2}(\cos(-\frac{11\pi}{12}) + i \sin(-\frac{11\pi}{12})).$$

3. Пусть $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, тогда $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$ (**формула Муавра**), где $n \in \mathbb{N}$.

Пример 5. Вычислить. $(\sqrt{3} - i)^9$.

Решение. Пусть $z = \sqrt{3} - i$, тогда $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, откуда по формуле Муавра имеем

$$(\sqrt{3} - i)^9 = 2^9 (\cos 9(-\frac{\pi}{6}) + i \sin 9(-\frac{\pi}{6})) = 512 (\cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2}) = 512i.$$

4. Корнем n-ой степени из комплексного числа Z называется такое комплексное число W (обозначается $\sqrt[n]{Z}$), если $W^n = Z$.

Все значения корня n-ой степени из $Z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ содержатся в формуле $\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$ (1), где

$k=0,1,2,\dots,n-1$.

Пример 6. Найти все значения:

а) $\sqrt[4]{-16}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt{\sqrt{3} - i}$.

Решение: а) запишем число $Z=-16$ в тригонометрической форме $Z = -16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Согласно формуле (1) получаем

$$W_k = 2 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} k \right) \right), \text{ где } k=0,1,2,3.$$

Следовательно,

$$W_0 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$W_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$W_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$W_3 = 2 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

б) Модуль числа i равен единице, а аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$W_k = \sqrt[3]{1} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right), \text{ где } k=0,1,2.$$

Получаем

$$W_0 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

$$W_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

$$W_2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -i.$$

в) Пусть $Z = \sqrt{3} - i$, тогда $|Z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2,$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

По формуле (1) имеем

$$W_k = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2} \right) \right), \text{ где } k=0,1.$$

$$W_0 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right) = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} - \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} i,$$

$$\begin{aligned}
W_1 &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi}{2} \right) \right) = \\
&= \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} + \pi \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} + \pi \right) \right) = \\
&= \sqrt{2} \left(-\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} + \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} i.
\end{aligned}$$

Пример 7. Записать число $\frac{\sqrt{5+12i} - \sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}}$ в алгебраической

форме при условии, что действительные части корней $\sqrt{5+12i}$ и $\sqrt{5-12i}$ отрицательны.

Решение. Для извлечения квадратного корня из числа $5+12i$ положили $\sqrt{5+12i} = x + iy$, тогда $5+12i = x^2 + 2xyi - y^2$ и, следовательно, x и y удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$.

Решив эту систему, получим два решения $(3; 2)$ и $(-3; -2)$. По условию действительная часть отрицательна, поэтому $\sqrt{5+12i} = -3 - 2i$. Аналогично найдем $\sqrt{5-12i} = -3 + 2i$. Таким образом, $Z = \frac{-3-2i - (-3+2i)}{-3-2i + (-3+2i)} = \frac{2}{3}i$.

5. Пусть $z = x + iy$. Если x и y действительные переменные, то z называется **комплексной переменной**.

Если каждому значению комплексной переменной z из некоторой области комплексных значений соответствует определенное значение другой комплексной величины w , то w есть функция комплексной

переменной z . Функции комплексного аргумента обозначают $w=f(z)$ или $w=w(z)$

В качестве примера рассмотрим одну функцию комплексной переменной - показательную функцию $w = e^z$, или $w = e^{x+iy}$.

Комплексные значения функции w определяются так:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \quad (2)$$

Свойства показательной функции:

$$1. e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$2. e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$$

$$3. (e^z)^m = e^{mz} \text{ где } m - \text{целое число}$$

$$4. e^{z+2\pi i} = e^z$$

Если в формуле (2) положим $x=0$, то получим $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Это есть **формула Эйлера**. С ее помощью можно от тригонометрической записи комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ перейти к показательной форме $z = re^{i\varphi}$ где r - модуль числа z , а φ - его аргумент.

$$a) \text{ Если } z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \text{ и } z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2},$$

$$\text{то } z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (4)$$

$$б) \text{ Если } z = re^{i\varphi}, \text{ то } z^n = r^n e^{in\varphi} \quad (5)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n})i}, \text{ где } k=0,1,2,3,4,5,\dots,n-1.$$

Пример 8. Представить в показательной форме комплексное число $z = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$.

Решение. Находим модуль числа $|z| = \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$ и один из его

аргументов $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{8}} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{\pi}{6}$., откуда, $z = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

Пример 9. Записать в показательной форме комплексное число

$$z = \frac{(-\sqrt{3} + i)(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12})}{1 - i}.$$

Решение: каждое из чисел $-\sqrt{3} + i$, $\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}$, $i - 1$ представим в показательной форме

$$-\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{5\pi}{6}i},$$

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i},$$

$$\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} = \cos(-\frac{\pi}{12}) + i \sin(-\frac{\pi}{12}) = e^{-\frac{\pi}{12}i}.$$

Используя формулы (3), (4) получаем

$$z = \frac{2e^{\frac{5\pi}{6}i} e^{-\frac{\pi}{12}i}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\pi}.$$

Пример 10. Записать все значения корня $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$ в показательной форме.

Решение: $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i} = \sqrt[4]{2e^{\frac{\pi}{6}i}} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi(12K+1)i}{24}} \quad (K=0,1,2,3).$

Решите задачи

2.1. Представьте в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

1) $Z = -\sqrt{3} + i$,

2) $Z = -1$,

3) $Z = -\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}$,

4) $Z = 1 + \cos \frac{10\pi}{9} + i \frac{10\pi}{9}$,

5) $Z = \operatorname{tg} 1 - i$.

2.2. Записать комплексное число

в алгебраической и в тригонометрической формах:

1) $Z = \frac{i \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)}{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}$,

2) $Z = \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{3} - i \sin \frac{4\pi}{3}}$,

3) $Z = \frac{1}{(1+i)^2}$,

4) $Z = \frac{-\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}}{\cos \frac{13\pi}{12} - i \sin \frac{13\pi}{12}}$,

5) $Z = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{i}$.

2.3. Представить в тригонометрической форме комплексное число Z :

$$1) \quad Z = \frac{5(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)i}{3(\cos 40^\circ - i \sin 40^\circ)},$$

$$2) \quad Z = \frac{\sin \frac{2\pi}{5} + i \left(1 - \cos \frac{2\pi}{5}\right)}{i - 1}.$$

2.4 . Записать комплексное число Z в алгебраической форме:

$$1) \quad Z = \left(\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12},$$

$$2) \quad Z = (\cos 31^\circ + i \sin 31^\circ)^{-10},$$

$$3) \quad Z = -\frac{(2i)^7}{(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^6},$$

$$4) \quad Z = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

2.5. Записать комплексное число Z в тригонометрической форме:

$$1) \quad Z = (\sqrt{3} - i)^{100},$$

$$2) \quad Z = \left(\frac{\sqrt{3}i + 1}{i - 1}\right)^6,$$

$$3) \quad Z = \frac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}, n \in N,$$

$$4) \quad Z = (\operatorname{tg} 2 - i)^4,$$

$$5) \quad Z \left(\sin \frac{6\pi}{5} + i \left(1 + \cos \frac{6\pi}{5}\right) \right)^5.$$

2.6. Найти значения $\sqrt[n]{Z}$ если:

$$1) \quad Z = -1, n = 3,$$

$$2) Z = 8i, n = 3,$$

$$3) Z = 1, n = 5,$$

$$4) Z = 1 + i, n = 8.$$

2.7 . Решить уравнения:

$$1) Z^3 = 1 + i,$$

$$2) Z^4 + 1 = 0,$$

$$3) Z^5 = 1 + \sqrt{3}i,$$

$$4) Z^6 + 64 = 0,$$

$$5) Z^2 = \bar{Z}^3.$$

2.8 . Представить Z в алгебраической форме:

$$1) Z = e^{2-i},$$

$$2) Z = e^{-\frac{3}{2}\pi i + 12\pi i},$$

$$3) Z = e^{3i + 7 + 3\pi i - \frac{\pi i}{2}}.$$

2.9. Представить в показательной форме комплексное числа:

$$1) Z = -\sqrt{12} - 2i,$$

$$2) Z = -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}.$$

2.10. Записать в показательной и алгебраической формах комплексное число:

$$1) Z = 5e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot 0.2e^{\frac{\pi i}{6}} \left(\cos \frac{5\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12} \right),$$

$$2) Z = \left(\frac{1}{2} e^{\frac{\pi i}{12}} \right)^{-3},$$

$$3) Z = (\sqrt{3} - i)^6,$$

$$4) Z = \frac{1}{(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)^5},$$

$$5) Z = \frac{e^{-\frac{\pi i}{3}} (1 + \sqrt{3}i)^7}{i}.$$

2.11. Записать в показательной форме все значения $\sqrt[n]{Z}$:

$$1) Z = 1, n = 3,$$

$$2) Z = -1, n = 5,$$

$$3) Z = -4 + \sqrt{48}i, n = 3,$$

$$4) Z = -1 - \sqrt{3}i, n = 4.$$

Практическое занятие №3

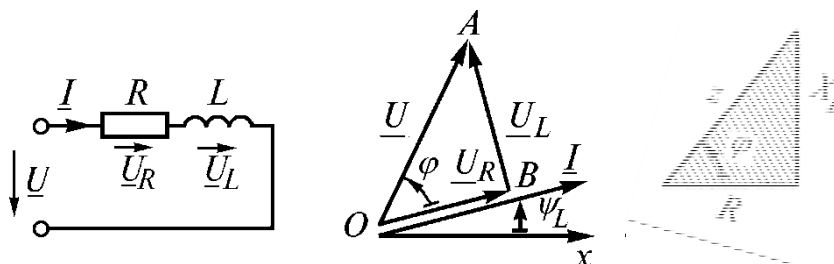
«Символический метод расчета цепей электрических цепей синусоидального тока».

Цель занятия: объяснение символического метода расчета электрических цепей синусоидального тока; рассмотрение электрических цепей с сосредоточенными элементами (R, L, C) и представление расчета таких цепей.

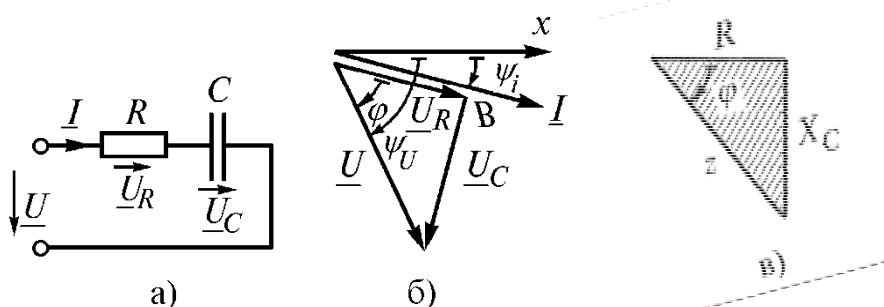
Методика проведения занятия:

Необходимы теоретические сведения

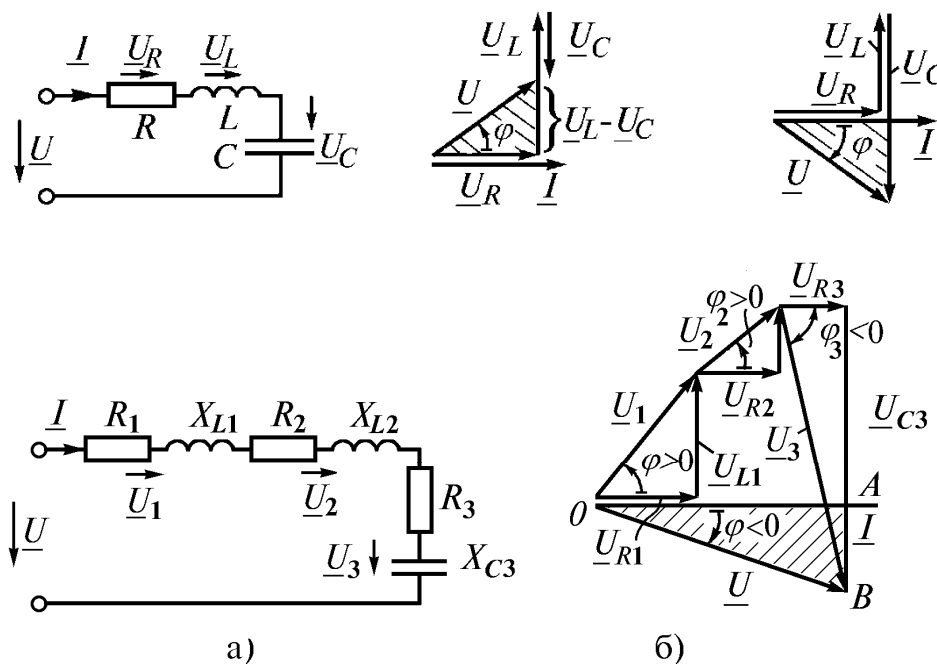
1. Цепь, содержащая резистор и индуктивную катушку:



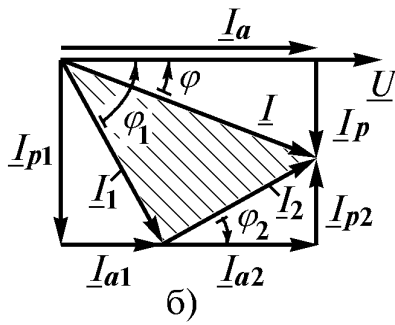
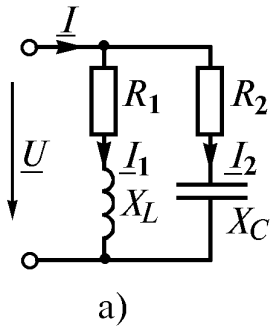
2. Цепь, содержащая резистор и конденсатор:



3. Цепь, содержащая последовательное соединение резистора, катушки и конденсатора:

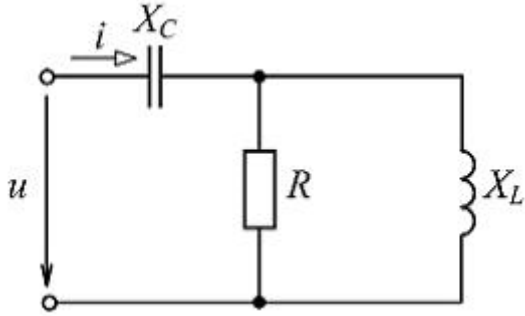


4. Цепь, содержащая параллельное соединение резистора, катушки и конденсатора:



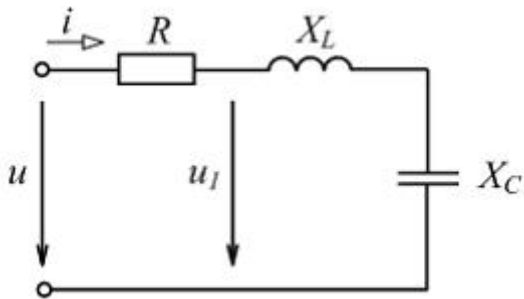
Примеры решения задач:

1. Тема: Сопротивления и фазовые соотношения между токами и напряжениями



При $R = X_L = X_C = 20 \text{ Ом}$ комплексное входное сопротивление цепи (см. рис.) $\underline{Z_{\text{вх}}}$ равно ____ Ом, напряжение u _____ по фазе от тока i на угол ...

2. Тема: Сопротивления и фазовые соотношения между токами и напряжениями



При $u = 282,8 \sin \omega t \text{ В}$, $R = 6 \text{ Ом}$, $X_L = 10 \text{ Ом}$, $X_C = 2 \text{ Ом}$ действующее значение напряжения U_1 в цепи, показанной на рисунке, равно ____ В. Построить векторную диаграмму.

Практическое занятие №4

Аудиторная контрольная 1

Аудиторная контрольная работа по теме «Комплексные числа».

Практическое занятие №5
Разложение аналитической функции в ряд Фурье

Рядом Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом 2π , определенной на сегменте $[-\pi, \pi]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Если ряд (1) сходится, то его сумма $S(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π , т.е. $S(x + 2\pi) = S(x)$.

Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет конечное число экстремумов и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода (т.е. удовлетворяет так называемым условиям Дирихле). Тогда ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке сегмента $[-\pi, \pi]$ и сумма этого ряда $S(x)$ вычисляется:

1) $S(x) = f(x)$ во всех точках неразрывности $f(x)$, лежащих внутри сегмента $[-\pi, \pi]$;

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$, где x_0 - точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$;

3) $S(x) = \frac{1}{2}[f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)]$ на концах промежутка, т.е. при $x = \pm\pi$.

В случае, когда $f(x)$ - четная функция, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (4)$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

В случае, когда $f(x)$ - нечетная функция, ее ряд содержит только синусы, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \, dx, \quad (6)$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (7)$$

Часто приходится разлагать в тригонометрический ряд функции периода, отличного от 2π . В этом случае, если $f(x)$ - периодическая функция с периодом 2ℓ , для которой выполняются на сегменте $[-\ell, \ell]$ условия Дирихле, то указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad (8)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad (9)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx. \quad (10)$$

В случае, когда $f(x)$ - четная функция, как (4) – (5), ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad (11)$$

где

$$a_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx. \quad (12)$$

В случае, когда $f(x)$ - нечетная функция, ее ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad (13)$$

где

$$b_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx. \quad (14)$$

При разложении в ряд Фурье целесообразно придерживаться следующей схемы. Вначале проверяем, что данная функция удовлетворяет условиям Дирихле; затем вычисляем коэффициенты a_n и b_n по соответствующим формулам; подставляя их в ряд, получаем искомое разложение; наконец, основываясь на теореме Дирихле,

определяем, при каких x полученный ряд сходится к данной функции. Рассмотрим примеры разложения в ряд Фурье периодических функций.

1. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π , заданную на интервале $-\pi < x \leq \pi$ формулой: $f(x) = x$ (рис. 1).

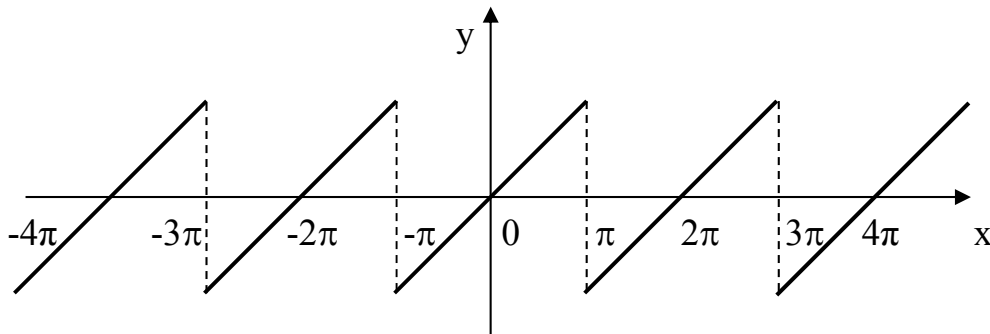


Рис. 1

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Применяя формулу (7), найдем коэффициенты

Фурье $\left(\begin{array}{l} \text{интегрируем по частям} \left\{ \begin{array}{l} x = u, \quad \sin nx \, dx = dv \\ dx = du, \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right. \end{array} \right):$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^\pi \cos nx \, dx \right] = -\frac{2}{\pi} \cos n\pi = -\frac{2(-1)^n}{n},$$

$\stackrel{=0}{}$

т.к. $-\int_{-\pi}^\pi \cos nx \, dx = -\frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^\pi = 0.$

Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ будет иметь вид

$$2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx + \dots \right].$$

Так как функция $f(x) = x$ удовлетворяет условиям Дирихле, то в любой точке непрерывности $f(x)$ сумма ряда равна значению функции. В точках $-\pi$ и π сумма ряда равна нулю. На рис. 2 показаны графики: функции $f(x)$ и частичных сумм ряда, содержащие 1, 2 и 3 члена. Из рисунка видно, как график частичных сумм ряда приближается к графику функции $f(x)$ при увеличении членов суммы.

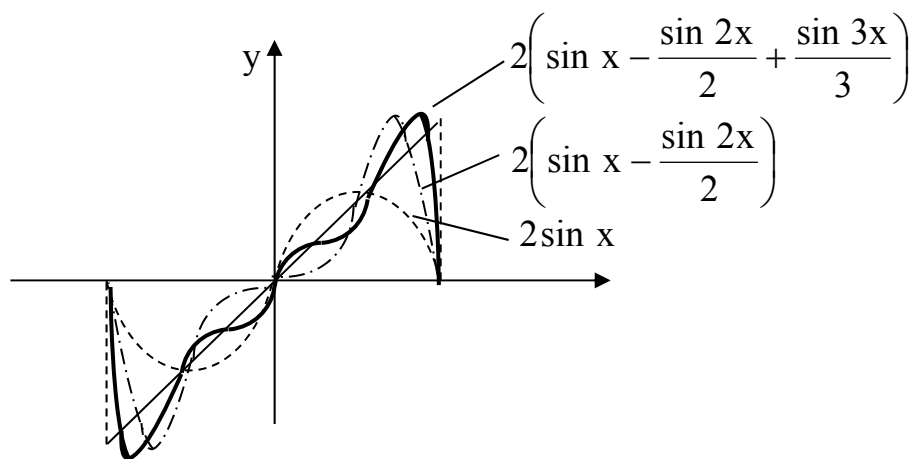


Рис. 2

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π , заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0; \\ 1, & 0 < x < a \\ \frac{1}{2}, & x = 0, x = a \end{cases}.$$

Построим график функции (рис. 3).

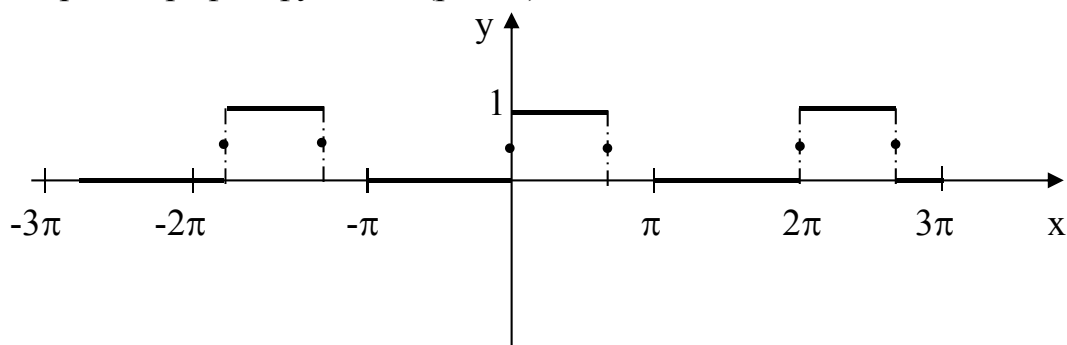


Рис. 3

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Применяя формулы (2) и (3), находим коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^a dx = \frac{x}{\pi} \Big|_0^a = \frac{a}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^a 1 \cdot \cos nx dx = \frac{1}{\pi n} \sin nx \Big|_0^a = \frac{\sin na}{n\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^a f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^a 1 \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} (-\cos nx) \Big|_0^a = \frac{\cos nx}{\pi n} \Big|_0^a = \frac{1 - \cos na}{n\pi}.$$

Разложение в ряд Фурье $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{a}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n\pi} \cdot \cos nx + \frac{1 - \cos na}{n\pi} \cdot \sin na.$$

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T = 4$, заданную на интервале

$$(0; 4) \text{ формулой } f(x) = \begin{cases} 6, & 0 < x < 2, \\ 3x, & 2 < x < 4. \end{cases}$$

Построим график функции (рис. 4).

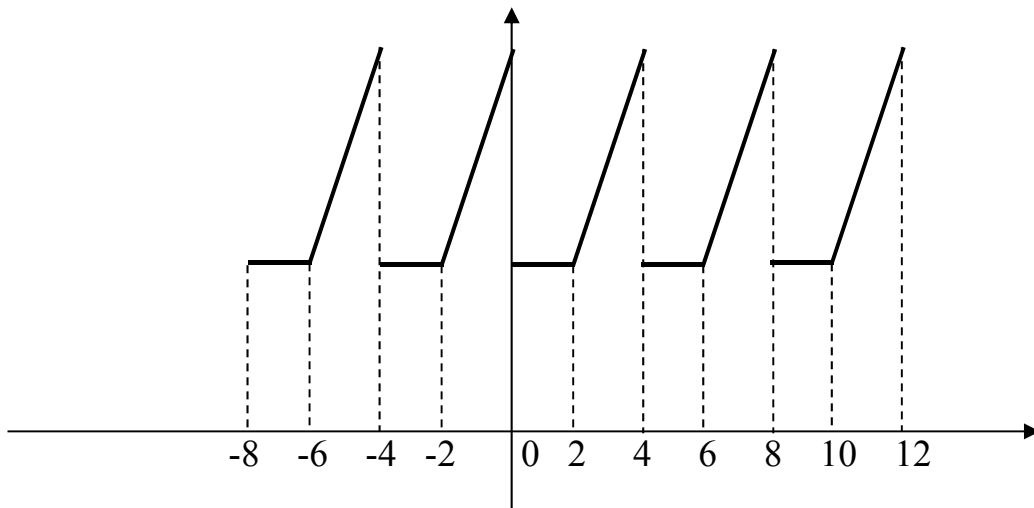


Рис. 4

Решение. Пользуясь формулами (9) и (10), полагая $\ell = 2$ и разбивая интервал интегрирования точкой $x = 2$ на две части, поскольку в каждой из них функция задана различными формулами, получим

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 6 \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_2^4 3x \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{12}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + 3 \left(\frac{2\pi}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \Big|_2^4 \right] = \frac{6}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi), \quad n \neq 0. \end{aligned}$$

При n – четном $\cos n\pi = 1$ и $a_n = 0$, при n – нечетном $\cos n\pi = -1$ и $a_n = \frac{12}{n^2 \pi^2}$.

При $n=0$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 6 dx + \int_2^4 3x dx \right) = \frac{1}{2} \left(6x \Big|_0^2 + \frac{3x^2}{2} \Big|_2^4 \right) = 15,$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 6 \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_2^4 3x \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{12}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + 3 \left(\frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} - \frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \Big|_2^4 \right] =$$

$$= \frac{1}{2n\pi} \cdot 12 \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_2^0 + \frac{3}{2} \left[\frac{2x}{\pi n} \left(-\cos \frac{\pi n x}{2} \right) \Big|_2^4 + \int_2^4 \frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} dx \right] \underset{=0}{=} =$$

$$= \frac{1}{2n\pi} [12(1 - \cos n\pi) - 3(2 \cdot 4 \cos 2\pi n - 4 \cos \pi n)] =$$

$$= \frac{1}{2n\pi} [12 - \cancel{12 \cos n\pi} + 24 + \cancel{12 \cos n\pi}] = \frac{-12}{2n\pi} = -\frac{6}{n\pi}.$$

Искомое разложение данной функции имеет вид

$$f(x) = \frac{15}{2} + \frac{12}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots \right) -$$

$$- \frac{6}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \dots \right).$$

Оно справедливо во всей области определения данной функции: в интервале $(0, 2)$ сумма ряда $S(x) = 6$, в интервале $(2, 4)$ - $S(x) = 3x$. В точке разрыва $x = 2$,

$$S(x) = \frac{1}{2} [f(2-0) + f(2+0)] = 6.$$

4. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T = 2$, заданную на интервале $(-1, 1)$ формулой $f(x) = |x|$ (рис. 5).

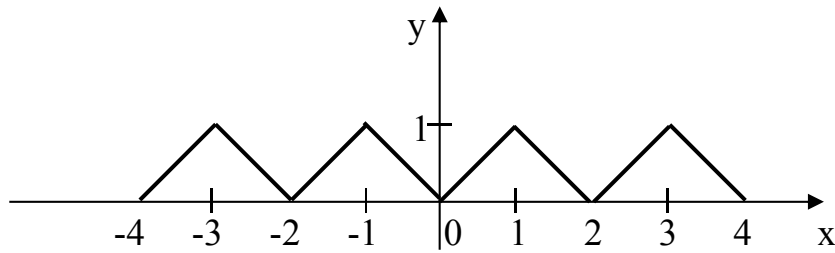


Рис. 5

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Применяя формулу (12), (функция $f(x)$ - четная), полагая $\ell = 1$, получим $a_0 = 2 \int_0^1 x \, dx = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1$,

$$a_n = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx = 2 \left(\frac{x}{n\pi} \sin n\pi x + \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n - \text{четные}, \\ -\frac{4}{n^2 \pi^2}, & n - \text{нечетное}. \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π , заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ уравнением $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 3x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

Ответ: $f(x) = \frac{5\pi}{4} - \frac{10}{\pi} \left(\frac{\cos x}{12} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) +$
 $+ \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π , заданную на интервале $[0, 2\pi]$ формулой $f(x) = \frac{x}{2}$.

Ответ: $f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π , заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ формулой $y = |\sin x|$.

Ответ:
$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{\cos 2kx}{(2k-1) \cdot (2k+1)} + \dots \right].$$

4. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ уравнением $f(x) = \pi + x$.

Ответ:
$$f(x) = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

5. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 2 - x & \text{при } 1 \leq x \leq 2, \end{cases} \quad f(x+2) = f(x).$$

Ответ:
$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -3 < x \leq 0, \\ x & \text{при } 0 < x < 3, \end{cases} \quad f(x+6) = f(x).$$

Ответ:
$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{3} - \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{3}.$$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = 10 - x \quad \text{при } 5 < x < 15, \quad f(x+10) = f(x).$$

Ответ:
$$f(x) = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{n\pi x}{5}}{n}.$$

Практическое занятие №6

Аудиторная контрольная 2

Аудиторная контрольная работа по теме «Ряды Фурье. Интеграл Фурье».

Задача

Для линейной электрической цепи (рисунок 1), подключенной к периодическому несинусоидальному напряжению, необходимо:

1. Разложить входное напряжение $u(t)$ в ряд Фурье.
2. Рассчитать мгновенные значения токов ветвей цепи.
3. Построить кривую выходного напряжения и определить его действующее значение.

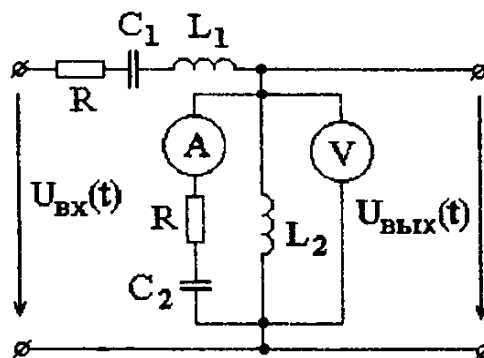


Рисунок 1 - Линейная электрическая цепь, подключенная к периодическому несинусоидальному напряжению

Дано:

$$f = 300 \text{ Гц}; \omega = 1884 \text{ с}^{-1}; L_1 = 0,02 \text{ Гн}; L_2 = 0,002 \text{ Гн}; R = 90 \text{ Ом}; C_1 = 10 \text{ мкФ} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; C_2 = 50 \text{ мкФ} = 50 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; U_m = 110 \text{ В},$$

$$u(t) = \begin{cases} |U_m \sin \omega t|, & 0 < \omega t < \pi; \\ 0, & \pi < \omega t < 2\pi. \end{cases}$$

Решение

Разложим входное напряжение в ряд Фурье и запишем его первые четыре составляющие.

Для нахождения членов ряда Фурье воспользуемся формулами

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos (n \omega t - \varphi_n),$$

где среднее значение функции за период или постоянная составляющая, называемая нулевой гармоникой,

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt;$$

амплитуды косинусоидальных и синусоидальных составляющих соответственно

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n \omega t dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n \omega t dt;$$

амплитуда n -й гармоники спектра

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2};$$

начальная фаза n -й гармоники

$$\varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n};$$

угловая частота первой гармоники

$$\omega = 2 \pi f = \frac{2\pi}{T};$$

здесь

f – циклическая частота первой гармоники спектра или основная частота,

T – период повторения функции $f(t)$,

t_0 – любой произвольно выбранный момент времени (обычно $t_0 = 0$),

$n = 1, 2, 3, \dots$ – номер гармоники.

Постоянная составляющая (нулевая гармоника)

$$U_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) d\omega t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} U_m \sin \omega t d\omega t = \left. \frac{-U_m \cos \omega t}{2\pi} \right|_0^{\pi} = \frac{U_m}{\pi}.$$

Амплитуды синусоидальных составляющих напряжения

$$U_m^{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) \sin k \omega t d\omega t = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_m \sin \omega t \cdot \sin k \omega t d\omega t = \begin{cases} \frac{U_m}{2}, & k = 1; \\ 0, & k \neq 1. \end{cases}$$

Амплитуды косинусоидальных составляющих напряжения

$$U_m^{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) \cos k \omega t d\omega t = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_m \sin \omega t \cdot \cos k \omega t d\omega t = \begin{cases} \frac{2U_m}{(1-k^2)\pi}, & k - \text{четное}; \\ 0, & k - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Получили разложение по первым пяти гармоникам входного напряжения

$$\begin{aligned} u_{\text{вх}}(t) &\approx U_0 + u^{(1)}(t) + u^{(2)}(t) + u^{(4)}(t) + u^{(6)}(t) = \\ &= \frac{U_m}{\pi} + \frac{U_m}{2} \sin \omega t + \left(-\frac{2U_m}{3\pi} \right) \cos 2\omega t + \left(-\frac{2U_m}{15\pi} \right) \cos 4\omega t + \left(-\frac{2U_m}{35\pi} \right) \cos 6\omega t = \\ &= \frac{U_m}{\pi} + \frac{U_m}{2} \sin \omega t + \frac{2U_m}{3\pi} \sin \left(2\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2U_m}{15\pi} \sin \left(4\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2U_m}{35\pi} \sin \left(6\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Комплексное входное сопротивление гармоникам тока

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{\text{BX}}^{(0)} &= \infty; \quad I_1^{(0)} = I_2^{(0)} = I_3^{(0)} = 0; \\ \underline{Z}_{\text{BX}}^{(k)} &= R + j \left(k\omega L_1 - \frac{1}{k\omega C_1} \right) + \frac{j k\omega L_2 \cdot \left(R - j \frac{1}{k\omega C_2} \right)}{j k\omega L_2 + \left(R - j \frac{1}{k\omega C_2} \right)}; \\ \underline{Z}_{\text{BX}}^{(1)} &= 90,157 - j11,568 \text{ Ом} = 90,896 \cdot e^{-j7,31^\circ} \text{ Ом}; \\ \underline{Z}_{\text{BX}}^{(2)} &= 90,631 + j56,399 \text{ Ом} = 106,747 \cdot e^{j31,89^\circ} \text{ Ом}; \\ \underline{Z}_{\text{BX}}^{(4)} &= 92,479 + j152,275 \text{ Ом} = 178,158 \cdot e^{j58,73^\circ} \text{ Ом}; \\ \underline{Z}_{\text{BX}}^{(6)} &= 95,396 + j238,728 \text{ Ом} = 257,083 \cdot e^{j68,22^\circ} \text{ Ом}.\end{aligned}$$

Комплексные амплитуды гармоник входного тока

$$\begin{aligned}\dot{I}_{1m}^{(1)} &= \frac{\dot{U}_m^{(1)}}{\underline{Z}^{(1)}} = \frac{\frac{U_m}{2}}{\underline{Z}^{(1)}} = \frac{55}{90,896 \cdot e^{-j7,31^\circ}} = 0,6051 \cdot e^{j7,31^\circ} \text{ А}; \\ \dot{I}_{1m}^{(2)} &= \frac{\dot{U}_m^{(2)}}{\underline{Z}^{(2)}} = \frac{\frac{2U_m}{3\pi} \cdot e^{-j90^\circ}}{\underline{Z}^{(2)}} = \frac{23,343 \cdot e^{-j90^\circ}}{106,747 \cdot e^{j31,89^\circ}} = 0,2187 \cdot e^{-j121,89^\circ} \text{ А}; \\ \dot{I}_{1m}^{(4)} &= \frac{\dot{U}_m^{(4)}}{\underline{Z}^{(4)}} = \frac{\frac{2U_m}{15\pi} \cdot e^{-j90^\circ}}{\underline{Z}^{(4)}} = \frac{4,669 \cdot e^{-j90^\circ}}{178,158 \cdot e^{j58,73^\circ}} = 0,0262 \cdot e^{-j148,73^\circ} \text{ А}; \\ \dot{I}_{1m}^{(6)} &= \frac{\dot{U}_m^{(6)}}{\underline{Z}^{(6)}} = \frac{\frac{2U_m}{35\pi} \cdot e^{-j90^\circ}}{\underline{Z}^{(6)}} = \frac{2,001 \cdot e^{-j90^\circ}}{257,083 \cdot e^{j68,22^\circ}} = 0,0078 \cdot e^{-j158,22^\circ} \text{ А}.\end{aligned}$$

Гармоники тока через катушку индуктивности по формуле разброса токов (делителя токов)

$$\begin{aligned}\dot{I}_{2m}^{(1)} &= \dot{I}_{1m}^{(1)} \cdot \frac{R - jX_{C2}^{(1)}}{R + j(X_{L2}^{(1)} - X_{C2}^{(1)})} = 0,6075 \cdot e^{j4,93^\circ} \text{ А}; \\ \dot{I}_{2m}^{(2)} &= \dot{I}_{1m}^{(2)} \cdot \frac{R - jX_{C2}^{(2)}}{R + j(X_{L2}^{(2)} - X_{C2}^{(2)})} = 0,2190 \cdot e^{-j126,69^\circ} \text{ А}; \\ \dot{I}_{2m}^{(4)} &= \dot{I}_{1m}^{(4)} \cdot \frac{R - jX_{C2}^{(4)}}{R + j(X_{L2}^{(4)} - X_{C2}^{(4)})} = 0,0260 \cdot e^{-j158,28^\circ} \text{ А}; \\ \dot{I}_{2m}^{(6)} &= \dot{I}_{1m}^{(6)} \cdot \frac{R - jX_{C2}^{(6)}}{R + j(X_{L2}^{(6)} - X_{C2}^{(6)})} = 0,0076 \cdot e^{-j172,39^\circ} \text{ А}.\end{aligned}$$

Гармоники тока через емкость по формуле разброса токов (делителя токов)

$$\begin{aligned}\dot{I}_{3m}^{(1)} &= \dot{I}_{1m}^{(1)} \cdot \frac{jX_{L2}^{(1)}}{R + j(X_{L2}^{(1)} - X_{C2}^{(1)})} = 0,0253 \cdot e^{j101,66^\circ} \text{ А}; \\ \dot{I}_{3m}^{(2)} &= \dot{I}_{1m}^{(2)} \cdot \frac{jX_{L2}^{(2)}}{R + j(X_{L2}^{(2)} - X_{C2}^{(2)})} = 0,0183 \cdot e^{j33,32^\circ} \text{ А}; \\ \dot{I}_{3m}^{(4)} &= \dot{I}_{1m}^{(4)} \cdot \frac{jX_{L2}^{(4)}}{R + j(X_{L2}^{(4)} - X_{C2}^{(4)})} = 0,0043 \cdot e^{-j66,59^\circ} \text{ А}; \\ \dot{I}_{3m}^{(6)} &= \dot{I}_{1m}^{(6)} \cdot \frac{jX_{L2}^{(6)}}{R + j(X_{L2}^{(6)} - X_{C2}^{(6)})} = 0,0019 \cdot e^{-j81,26^\circ} \text{ А}.\end{aligned}$$

Мгновенные значения токов ветвей цепи

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= 0,605 \sin(\omega t + 7,3^\circ) + 0,219 \sin(2\omega t - 121,9^\circ) + \\
&\quad + 0,026 \sin(4\omega t - 148,7^\circ) + 0,0078 \sin(6\omega t - 158,2^\circ) \text{ A}; \\
i_2(t) &= 0,608 \sin(\omega t + 4,9^\circ) + 0,219 \sin(2\omega t - 126,7^\circ) + \\
&\quad + 0,026 \sin(4\omega t - 158,3^\circ) + 0,0076 \sin(6\omega t - 172,4^\circ) \text{ A}; \\
i_3(t) &= 0,0253 \sin(\omega t + 101,7^\circ) + 0,0183 \sin(2\omega t - 33,3^\circ) + \\
&\quad + 0,0043 \sin(4\omega t - 66,6^\circ) + 0,0019 \sin(6\omega t - 81,3^\circ) \text{ A}.
\end{aligned}$$

Комплексные амплитуды гармоник напряжений

$$\begin{aligned}
\dot{U}_{\text{ВЫХ } m}^{(0)} &= \dot{U}_{L_2 m}^{(0)} = 0; \\
\dot{U}_{\text{ВЫХ } m}^{(1)} &= \dot{U}_{L_2 m}^{(1)} = jX_{L_2 m}^{(1)} \cdot I_{2m}^{(1)} = j1885 \cdot 0,002 \cdot 0,6075 \cdot e^{j4,93^\circ} = 2,290 \cdot e^{j94,93^\circ} \text{ В}; \\
\dot{U}_{\text{ВЫХ } m}^{(2)} &= \dot{U}_{L_2 m}^{(2)} = jX_{L_2 m}^{(2)} \cdot I_{2m}^{(2)} = j2 \cdot 1885 \cdot 0,002 \cdot 0,2190 \cdot e^{-j126,69^\circ} = 1,651 \cdot e^{-j36,69^\circ} \text{ В}; \\
\dot{U}_{\text{ВЫХ } m}^{(4)} &= \dot{U}_{L_2 m}^{(4)} = jX_{L_2 m}^{(4)} \cdot I_{2m}^{(4)} = j4 \cdot 1885 \cdot 0,002 \cdot 0,0260 \cdot e^{-j158,28^\circ} = 0,392 \cdot e^{-j68,28^\circ} \text{ В}; \\
\dot{U}_{\text{ВЫХ } m}^{(6)} &= \dot{U}_{L_2 m}^{(6)} = jX_{L_2 m}^{(6)} \cdot I_{2m}^{(6)} = j6 \cdot 1885 \cdot 0,002 \cdot 0,0076 \cdot e^{-j172,39^\circ} = 0,172 \cdot e^{-j82,39^\circ} \text{ В}.
\end{aligned}$$

Определим показания электродинамических амперметра и вольтметра

$$\begin{aligned}
I_A &= \sqrt{\frac{[I_{3m}^{(1)}]^2 + [I_{3m}^{(2)}]^2 + [I_{3m}^{(4)}]^2 + [I_{3m}^{(6)}]^2}{2}} = 0,022 \text{ A}; \\
U_V &= \sqrt{\frac{[U_{L_2 m}^{(1)}]^2 + [U_{L_2 m}^{(2)}]^2 + [U_{L_2 m}^{(4)}]^2 + [U_{L_2 m}^{(6)}]^2}{2}} = 2,02 \text{ В}.
\end{aligned}$$

Найдем активную мощность, отдаваемую источником,

$$\begin{aligned}
P_{\text{ист}} &= P_{\text{ист}}^{(0)} + P_{\text{ист}}^{(1)} + P_{\text{ист}}^{(2)} + P_{\text{ист}}^{(4)} + P_{\text{ист}}^{(6)} = \\
&= U_0 I_1^{(0)} + U^{(1)} I_1^{(1)} \cos \varphi^{(1)} + U^{(2)} I_1^{(2)} \cos \varphi^{(2)} + U^{(4)} I_1^{(4)} \cos \varphi^{(4)} + U^{(6)} I_1^{(6)} \cos \varphi^{(6)} = \\
&= 0 + 16,5 + 2,17 + 0,03 + 0,003 = 18,7 \text{ Вт},
\end{aligned}$$

где сдвиг фаз между током и напряжением гармоник

$$\varphi^{(k)} = \varphi_{U_{\text{ВХ}}}^{(k)} - \varphi_{I_1}^{(k)}.$$

Активная мощность нагрузки

$$\begin{aligned}
P_{\text{нагр}} &= I_1^2 \cdot R + I_3^2 \cdot R = \\
&= 0,455^2 \cdot 90 + 0,022^2 \cdot 90 = 18,7 \text{ Вт}.
\end{aligned}$$

где действующие значения токов

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sqrt{I_1^{(0)^2} + I_1^{(1)^2} + I_1^{(2)^2} + I_1^{(4)^2} + I_1^{(6)^2}} = 0,455 \text{ A}; \\
I_3 &= I_A = 0,022 \text{ A}.
\end{aligned}$$

И, наконец, по полученному в ходе решения аналитическому выражению для выходного напряжения, построим график его изменения (рис. 2)

$$\begin{aligned}
u_{\text{ВЫХ}}(t) &= 2,290 \sin(\omega t + 94,9^\circ) + 1,651 \sin(2\omega t - 36,7^\circ) + \\
&\quad + 0,392 \sin(4\omega t - 68,3^\circ) + 0,172 \sin(6\omega t - 82,4^\circ) \text{ В}.
\end{aligned}$$

$u_{\text{вых}}, \text{В}$

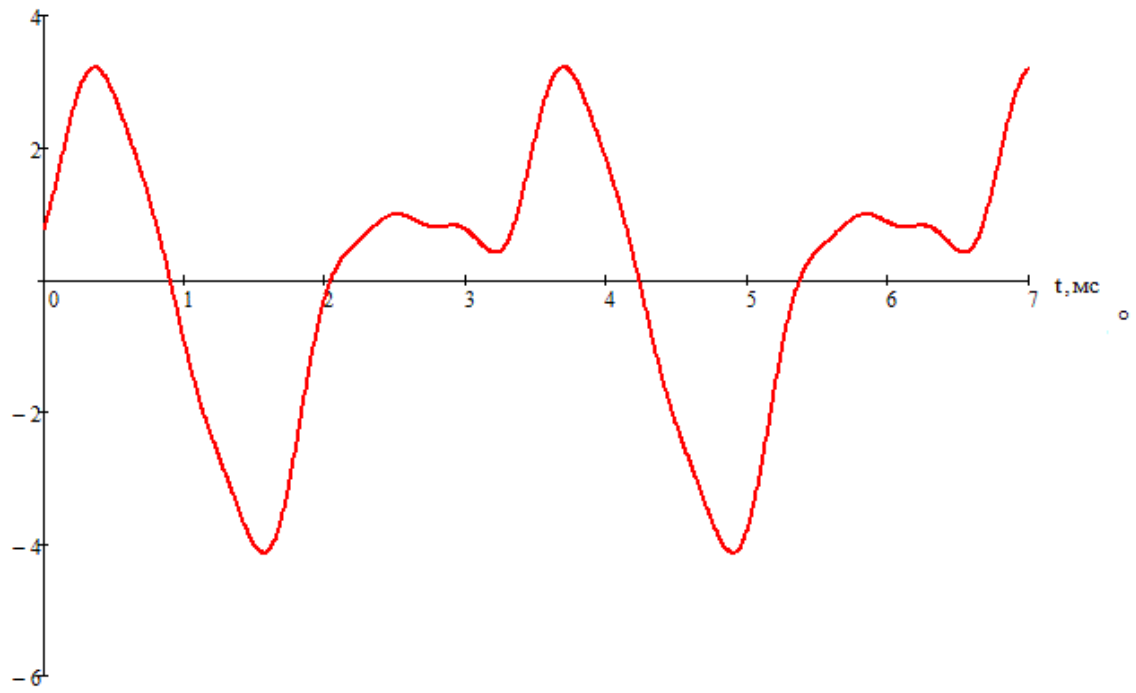


Рисунок 2 - График несинусоидального периодического выходного напряжения

Практическое занятие №8

Решение линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с постоянными коэффициентами

Для того чтобы найти решение $x(t)$ линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t), \quad (11)$$

(где $f(t)$ – оригинал), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \quad (12)$$

следует применить к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа, т. е. от уравнения (11) с условиями (12) перейти к операторному уравнению

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) X(p) + Q(p) = F(p),$$

где $X(p)$ – изображение искомого решения, $F(p)$ – изображение функции $f(t)$, а $Q(p)$ – некоторый многочлен, коэффициенты которого зависят от начальных данных $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ и который тождественно равен нулю, если $x_0 = x'_0 = \dots = x_0^{(n-1)} = 0$. Решив операторное уравнение относительно

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{L(p)}$$

($L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ – характеристический многочлен данного уравнения) и найдя оригинал для $X(p)$, получим искомое решение $x(t)$. Если считать $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ произвольными постоянными, то найденное решение будет общим решением уравнения (11). Совершенно аналогично решаются и системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Отличие будет лишь в том, что вместо операторного уравнения получим систему таких уравнений, которые будут линейными относительно изображений.

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения $x'' + 4x = -e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$, тогда

$$x'(t) \doteq p X(p) - 1$$

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - p - 2.$$

Кроме того, $-e^t \doteq -\frac{1}{p-1}$.

Тогда операторное уравнение имеет вид $p^2 X(p) - p - 2 + 4X(p) = -\frac{1}{p-1}$.

Отсюда находим $X(p) = \frac{p^2 + p - 3}{(p-1)(p^2 + 4)}$.

Разлагая эту дробь на простейшие, получим

$$X(p) = \frac{-1}{5(p-1)} + \frac{1}{5} \cdot \frac{6p+11}{p^2+4}.$$

Используя свойство линейности преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и изображений, находим искомое частное решение дифференциального уравнения:

$$x(t) = -\frac{1}{5} e^t + \frac{6}{5} \cos 2t + \frac{11}{10} \sin 2t.$$

Пример 2. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = z - y, \\ y' = z + 2e^{-t}, & x(0) = 0, \quad y(0) = 0,5; \quad z(0) = 0. \\ z' = z - x; \end{cases}$$

Решение. Пусть $x = x(t) \doteq X(p) = X$; $y = y(t) \doteq Y(p) = Y$; $z = z(t) \doteq Z(p) = Z$.

Находим, что $x' \doteq pX$; $y' \doteq pY - 0,5$; $z' \doteq pZ$.

Система операторных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} pX + Y - Z = 0, \\ pY - Z = 0,5 + \frac{2}{p+1}, \\ X + (p-1)Z = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим

$$X(p) = -\frac{p+5}{2(p+1)(p^2+1)},$$

$$Y(p) = \frac{(p+5)(p^2-p+1)}{2(p^4-1)},$$

$$Z(p) = \frac{p+5}{2(p^4-1)}.$$

Переходя от изображений к оригиналам, получаем искомые решения:

$$\begin{aligned} X(p) &= -\frac{p+5}{2(p+1)(p^2+1)} = -\frac{1}{p+1} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{2(p^2+1)} \doteq \\ &\doteq -e^{-t} + \cos t - \frac{3}{2} \sin t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{(p+5)(p^2-p+1)}{2(p^4-1)} \doteq \frac{5}{4} \cdot \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p^2+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p-1} \doteq \\ &\doteq \frac{5}{4} \cos t - \frac{1}{4} \sin t - \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{3}{4} e^t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(p) &= \frac{p+5}{2(p^4-1)} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{p}{p^2+1} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p-1} \doteq \\ &\doteq -\frac{1}{4} \cos t - \frac{5}{4} \sin t - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{3}{4} e^t. \end{aligned}$$

Ответ: $x(t) \doteq -e^{-t} + \cos t - \frac{3}{2} \sin t,$

$$y(t) \doteq \frac{5}{4} \cos t - \frac{1}{4} \sin t - \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{3}{4} e^t,$$

$$z(t) \doteq -\frac{1}{4} \cos t - \frac{5}{4} \sin t - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{3}{4} e^t.$$

Приведем еще несколько примеров.

Пример 3. Найти изображение данного оригинала

$$f(t) = e^{2t} \cos^2 6t + \sin 2t \sin 4t + 3.$$

Решение. В силу свойства линейности преобразования Лапласа найдем изображение каждого слагаемого:

$$\cos^2 6t = \frac{1 + \cos 12t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 12t \doteq \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 12^2}.$$

Применяя теорему сдвига изображения к первому слагаемому, получим

$$e^{2t} \cos^2 6t \doteq \frac{1}{2(p-2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p-2}{(p-2)^2 + 144}.$$

Изображение первого слагаемого можно было найти также по таблице оригиналов и изображений, используя формулу 9.

Второе слагаемое

$$\sin 2t \sin 4t = \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{2} \cos 6t \doteq \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 36}.$$

Третье слагаемое $3 \doteq \frac{3}{p}$. Окончательно получаем

$$f(t) \doteq \frac{1}{2(p-2)} + \frac{p-2}{2(p-2)^2 + 144} + \frac{p}{2(p^2 + 4)} - \frac{p}{2(p^2 + 36)} + \frac{3}{p}.$$

Пример 4. Найти изображение данного оригинала

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} + \frac{1}{2}, & t \in (1, 3) \\ 0, & t \notin (1, 3) \end{cases}$$

Решение. Из рисунка 8 видно, что $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$; $f_1(t) = f_3(t - 1)$; $f_2 = f_4(t - 3)$.

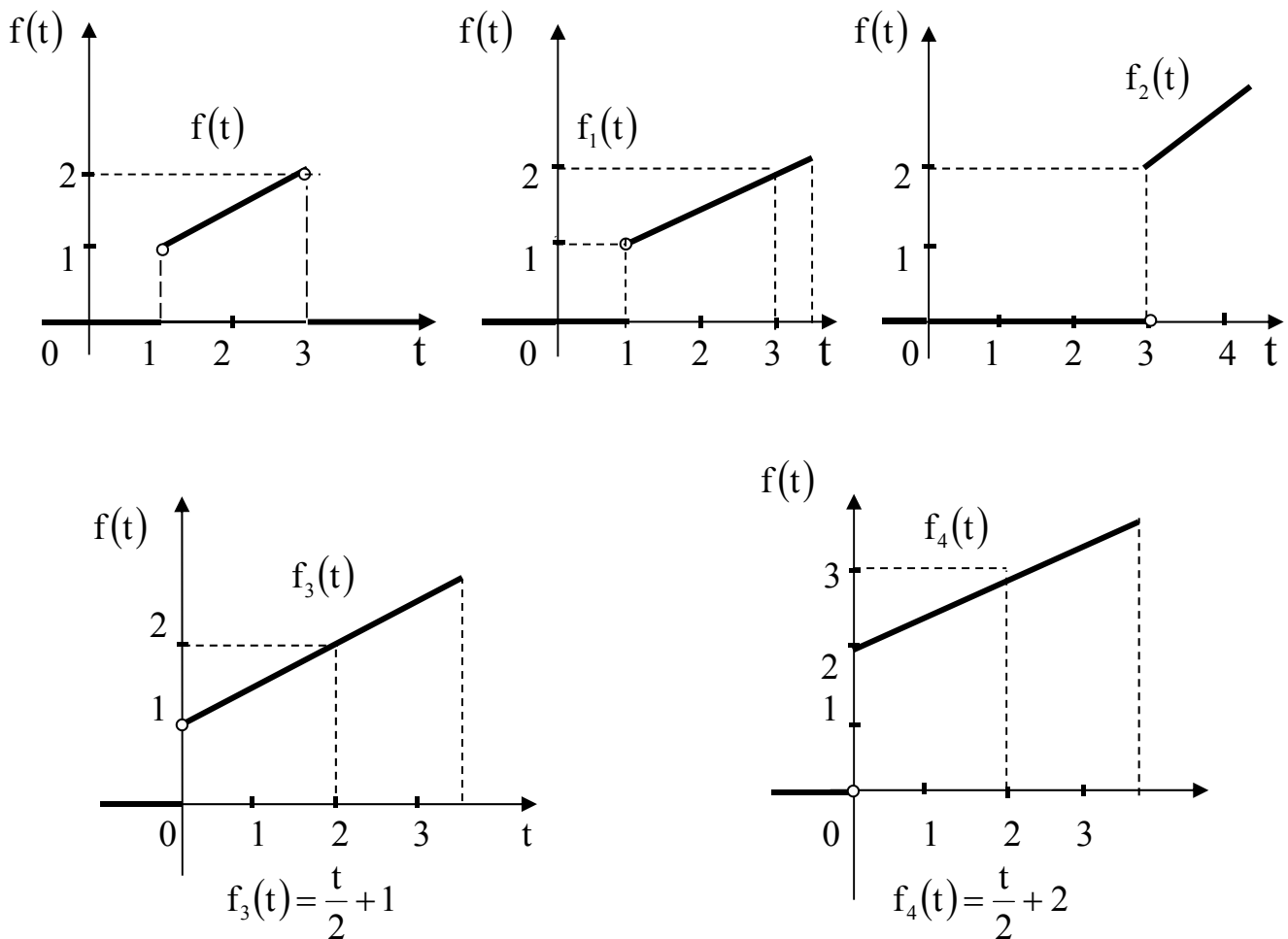


Рисунок 8

Так как $f_3(t) \doteq \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{p}$; $f_4(t) \doteq \frac{1}{2p^2} + \frac{2}{p}$, по свойству запаздывания оригинала получаем

$$f(t) \doteq \left(\frac{1}{2p^2} + \frac{1}{p} \right) e^{-p} - \left(\frac{1}{2p^2} + \frac{2}{p} \right) e^{-3p}.$$

Образцы решения типовых заданий представлены примерами №№ 10 – 14.

Задания для самостоятельного решения

1 Решить данные дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

$$x'' + 2x' - 3x = e^{-t},$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Данные системы дифференциальных уравнений решить операционным методом при указанных начальных условиях. В некоторых вариантах в скобках указан один из корней характеристического уравнения. $\dot{x}$ означает $\frac{dx}{dt}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$$

$$x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$$

Практическое занятие №9

Аудиторная контрольная 3

Аудиторная контрольная работа по теме «Основы операционного исчисления».