

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ по дисциплине
«Прикладная теория графов»
для студентов направления подготовки
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
направленность (профиль)
«Анализ данных и искусственный интеллект»

Введение

Практические занятия — это целенаправленная форма организации педагогического процесса, направленная на углубление научно-теоретических знаний и овладение определенными методами работы, в процессе которых вырабатываются умения и навыки выполнения тех или иных учебных действий в данной сфере науки.

Практические занятия предназначены для углубленного изучения учебных дисциплин и играют важную роль в выработке у студентов умений и навыков применения полученных знаний для решения практических задач совместно с педагогом. Кроме того, они развивают научное мышление и речь, позволяют проверить знания студентов и выступают как средства оперативной обратной связи.

Цель практических занятий - углублять, расширять, детализировать знания, полученные на лекции, в обобщенной форме и содействовать выработке навыков профессиональной деятельности.

Данные методические указания к практическим занятиям разработаны в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Прикладная теория графов» для студентов направления подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки».

Практическое занятие 1. Достижимость и связность в графах

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Научиться исследовать структуру графа, определять сильные компоненты, базы и антибазы в графе.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Компоненты графа

Ориентированный граф (орграф) называется сильно связным, если для любых двух различных вершин x_i и x_j существует, по крайней мере, один путь, соединяющий x_i с x_j . В таком графе любые две вершины взаимно достижимы.

Орграф называется односторонне связным, если для любых двух различных вершин x_i и x_j существует, по крайней мере, один путь из x_i в x_j или из x_j в x_i или оба одновременно.

Орграф называют слабо связным, если для любых двух различных вершин графа существует, по крайней мере, один маршрут (неориентированный двойник пути), соединяющий их.

Если для некоторой пары вершин орграфа не существует маршрута соединяющего их, то такой орграф называется несвязным.

Максимальным сильным подграфом графа G является сильно связный подграф, который не содержится в любом другом сильно связном подграфе. Такой подграф называется сильной компонентой графа G . Аналогично, односторонняя компонента представляет собой односторонне связный максимальный подграф, а слабая компонента - максимальный слабо связный подграф.

Сильная компонента содержится, по крайней мере, в одной односторонней компоненте, а односторонняя компонента содержится в некоторой слабой компоненте G , так как односторонние компоненты графа могут иметь общие вершины.

Например, в односторонне связном графе G , приведенном на рис. 1.1, порожденные подграфы $\langle\{x_1, x_2, x_5, x_6\}\rangle$, $\langle\{x_1, x_2\}\rangle$ и $\langle\{x_1, x_2, x_6\}\rangle$ являются сильно связными подграфами, а подграф $\langle\{x_1, x_2, x_5, x_6\}\rangle$ является сильной компонентой графа G .

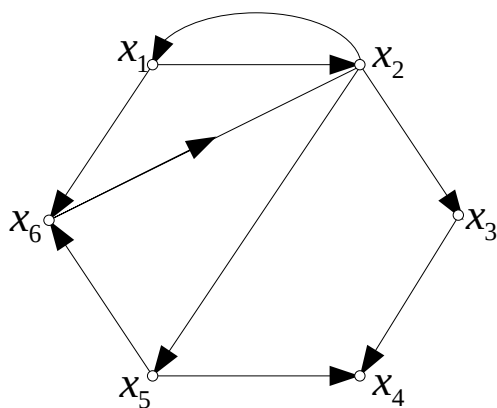


Рис. 1.1. Ориентированный граф G .

2.2. Матрицы достижимостей и контрадостижимостей

Матрица достижимостей $R = [r_{ij}]$ определяется следующим образом:

Множество вершин $R(x_i)$ графа G , достижимых из заданной вершины x_i , состоит из таких элементов x_j , для которых

$$\begin{array}{c|ccccccc} x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \parallel$$

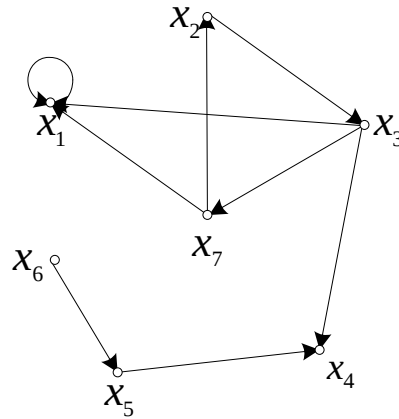


Рис. 1.2. Ориентированный граф G .

Множества достижимостей найдем с помощью (1.1):

$$R(x_1) = \{x_1\} \cup \{x_1\} = \{x_1\}$$

$$R(x_2) = \{x_2\} \cup \{x_3\} \cup \{x_1, x_4, x_7\} \cup \{x_2, x_4\} \cup \{x_1\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7\}$$

$$R(x_3) = \{x_3\} \cup \{x_1, x_4, x_7\} \cup \{x_1, x_2\} \cup \{x_1, x_3\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7\}$$

$$R(x_4) = \{x_4\} = \{x_4\}$$

$$R(x_5) = \{x_5\} \cup \{x_4\} = \{x_4, x_5\}$$

$$R(x_6) = \{x_6\} \cup \{x_5\} \cup \{x_4\} = \{x_4, x_5, x_6\}$$

$$R(x_7) = \{x_7\} \cup \{x_1, x_2\} \cup \{x_1, x_3\} \cup \{x_1, x_4, x_7\} \cup \{x_1, x_2\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7\}$$

Следовательно, матрицы достижимостей и обратных достижимостей имеют вид

$$R = \begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \parallel$$

$$Q = R^T = \begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \parallel$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_7 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \parallel$$

Нахождение матриц R и Q с вычислительной точки зрения является довольно простой задачей, поскольку объединение множеств в соответствии с выражениями (1.1) и (1.2) и сравнение текущих множеств после каждого объединения, проводимое для выяснения необходимости продолжения процесса построения соответствующих множеств - все это можно осуществить в математических пакетах и системах программирования.

Так как $R(x_i)$ является множеством вершин, достижимых из x_i , а $Q(x_j)$ - множеством вершин, из которых можно достигнуть x_j , то $R(x_i) \cap Q(x_j)$ - множество таких вершин, каждая из которых принадлежит, по крайней мере, одному пути, идущему от x_i к x_j . Эти вершины называются существенными относительно двух концевых вершин x_i и x_j . Все остальные вершины $x_k \notin R(x_i) \cap Q(x_j)$ называются несущественными, поскольку их удаление не влияет на пути от x_i к x_j .

Матрицы достижимостей и обратных достижимостей, определенные выше, являются полными в том смысле, что на длины путей от x_i к x_j не накладывались никакие ограничения. С другой стороны, можно определить матрицы ограниченных достижимостей и контрадостижимостей – надо потребовать, чтобы длины путей не превышали некоторого заданного числа. Эти ограниченные матрицы тоже могут быть построены с помощью соотношений (1.1) и (1.2) – надо действовать точно так, как раньше, при нахождении неограниченных матриц, но только теперь p будет верхней границей длины допустимых путей.

2.3. Нахождение сильных компонент и построение конденсации

Сильная компонента (СК) графа G является максимальным сильно связным подграфом графа G . Поскольку в сильно связном графе произвольная вершина x_j достижима из любой другой вершины x_i , то в ориентированном графе существует одна и только одна СК, содержащая данную вершину x_i . В самом деле, если бы вершина x_i принадлежала двум или большему числу сильных компонент, то существовал бы путь из любой вершины одной СК в произвольную вершину другой СК и, следовательно, объединение этих сильных компонент было бы сильно связным графом, что противоречит определению СК.

Если вершина x_i одновременно является начальной и конечной вершиной пути, то множество вершин, существенных относительно этих двух идентичных концов (т.е. множество вершин некоторого цикла, содержащего x_i), совпадает с пересечением $R(x_i) \cap Q(x_i)$. Поскольку все эти существенные вершины достижимы из x_i и, кроме того, из каждой такой вершины достижима вершина x_i , то все они взаимно достижимы. Более того, если нет другой вершины, существенной относительно концов x_i и x_i , то множество $R(x_i) \cap Q(x_i)$, которое может быть построено с использованием соотношений (1.1) и (2) однозначно определяет СК графа G , содержащую вершину x_i .

Если эти вершины удалить из графа $G=(X, \Gamma)$, то в оставшемся порожденном подграфе $G' = \langle X - R(x_i) \cap Q(x_i) \rangle$ можно таким же способом выделить новую СК, содержащую $x_j \in X - R(x_i) \cap Q(x_i)$. Эту процедуру можно повторять до тех пор, пока все вершины графа G не будут сгруппированы в соответствующие СК. После завершения этой процедуры граф G будет разбит на свои сильные компоненты.

Граф $G^*=(X^*, \Gamma^*)$ называют конденсацией графа G и определяют следующим образом: каждая его вершина представляет множество вершин некоторой сильной компоненты графа G , дуга (x_i^*, x_j^*) существует в G^* тогда и только тогда, когда в G существует дуга $(x_i,$

x_j), такая, что x_i принадлежит компоненте, соответствующей вершине x_i^* , а x_j – компоненте, соответствующей вершине x_j^* .

Конденсация G^* не содержит циклов, поскольку наличие цикла означает, что любые вершины этого цикла взаимно достижимы, а поэтому совокупность всех вершин цикла принадлежит некоторой СК в G^* и, следовательно, содержится в СК графа G , что противоречит определению конденсации, в силу которого вершины из G^* соответствуют СК в G .

Пример

Для графа G , приведенного на рис. 1.3 найти сильные компоненты и построить конденсацию G^* .

Из соотношений (1.1) и (1.2) получаем:

$R(x_1)=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $R(x_2)=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $R(x_3)=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $R(x_4)=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $R(x_5)=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $R(x_6)=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, $R(x_7)=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, $R(x_8)=\{x_8\}$, $R(x_9)=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, $R(x_{10})=\{x_8, x_{10}\}$ и $Q(x_1)=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Q(x_2)=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Q(x_3)=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Q(x_4)=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Q(x_5)=\{x_5\}$, $Q(x_6)=\{x_6, x_7, x_9\}$, $Q(x_7)=\{x_6, x_7, x_9\}$, $Q(x_8)=\{x_8\}$, $Q(x_9)=\{x_6, x_7, x_9\}$, $Q(x_{10})=\{x_{10}\}$.

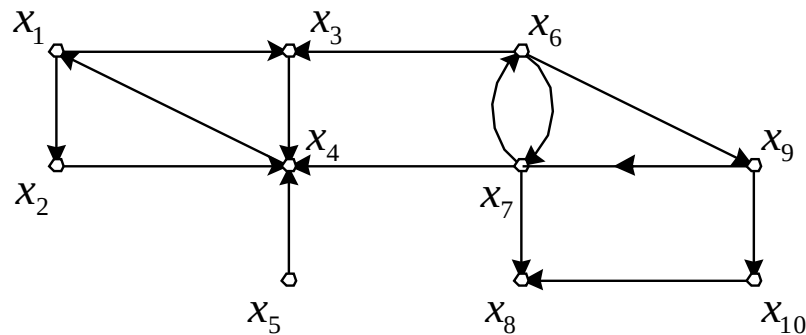


Рис. 1.3. Ориентированный граф G .

Найдем СК в G , содержащую вершину x_1 .

$$\langle R(x_1) \cap Q(x_1) \rangle = \langle \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \rangle.$$

Аналогично, СК, содержащая вершину x_6 , есть порожденный подграф $\langle \{x_6, x_7, x_9\} \rangle$, СК, содержащая x_5 - подграф $\langle \{x_5\} \rangle$, СК, содержащая x_8 - подграф $\langle \{x_8\} \rangle$ и СК, содержащая x_{10} - подграф $\langle \{x_{10}\} \rangle$. Следует отметить, что три последних СК состоят из единственной вершины графа G . Конденсация G^* приведена на рис. 1.4.

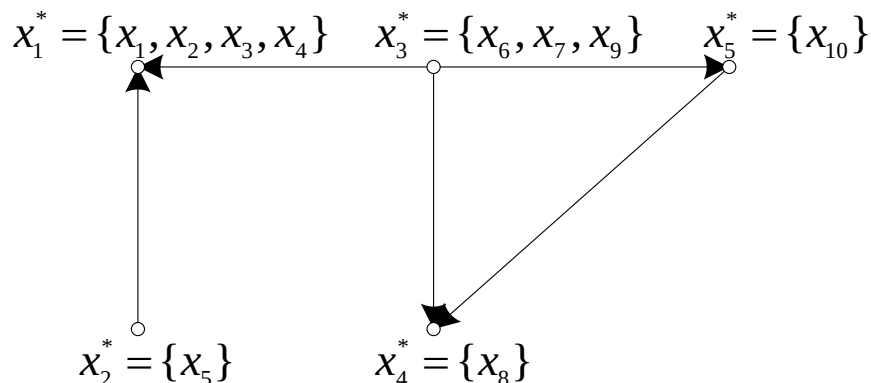


Рис. 1.4. Граф G^* - конденсация графа G .

Процедуру, описанную выше и связанную с нахождением СК графа, можно сделать более удобной, если непосредственно использовать матрицы достижимостей R и контакто-достижимостей Q . Выполним поэлементное умножение матриц R и Q ($R \otimes Q$). Строка x_i матрицы $R \otimes Q$ содержит единицы только в тех столбцах x_j , для которых выполняется условие: вершины x_i, x_j взаимно достижимы; в других местах строки x_i стоят нули. Таким образом, две вершины находятся в одной и той же СК тогда и только тогда, когда соответствующие им строки (или столбцы) в матрице $R \otimes Q$ идентичны. Вершины, которым соответствуют строки, содержащие единицу в столбце x_j образуют множество вершин СК, содержащей x_j :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
x_2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
x_3	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
x_4	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
$R \otimes Q = x_5$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
x_7	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
x_8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
x_9	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
x_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Отсюда следует, что матрицу $R \otimes Q$ можно преобразовать путем сортировки строк и столбцов в блочно-диагональную; каждая из диагональных подматриц этой матрицы соответствует СК графа G и содержит только единичные элементы; все остальные элементы блочно-диагональной матрицы равны нулю. Для приведенного ранее примера матрица $R \otimes Q$, преобразованная соответствующим образом, имеет вид

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_9	x_8	x_{10}
x_1	1	1	1	1	0	0			0	0
x_2	1	1	1	1						
x_3	1	1	1	1						
x_4	1	1	1	1						
x_5	0				1	0			0	0
x_6	0				0	1	1	1	0	0
x_7						1	1	1		

x_9			1	1	1		
x_8	0	0	0			1	0
x_{10}	0	0	0			0	1

2.4. Базы и антибазы

База B графа есть множество вершин, из которого достижима любая вершина графа и которое является минимальным в том смысле, что не существует собственного подмножества в B , обладающего таким свойством достижимости. Если мы обозначим через $R(B)$ множество вершин, достижимых из вершин множества B , т.е.

В примере с графом G , изображенным на рис. 1.3, конденсация G^* (рис. 1.4) содержит вершины x_1^* и x_4^* с полустепенью исхода, равной 0. Таким образом, антибазой графа G^* является множество $\{x_1^*, x_4^*\}$, а антибазами графа G являются множества $\{x_8, x_1\}$, $\{x_8, x_2\}$, $\{x_8, x_3\}$ и $\{x_8, x_4\}$.

2.5. Применение к исследованию структуры организаций

Если граф G представляет структуру руководства или влияний некоторой организации, то члены каждой сильной компоненты графа G имеют равную власть или равное влияние друг на друга, как это может быть, например, для случая комитета. Базу графа G можно интерпретировать как «коалицию», включающую наименьшее число лиц, обладающих властью над каждым членом организации.

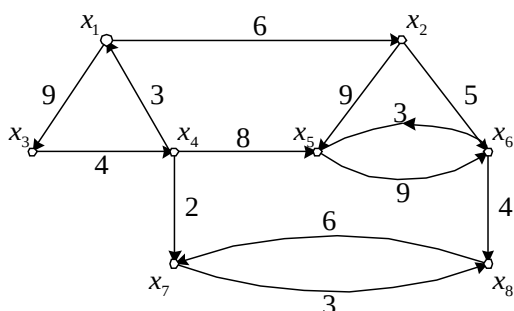
Пусть на множестве вершин, представляющих членов той же самой организации, построен новый граф G' , отображающий каналы связи, так что каждая дуга (x_i, x_j) означает, что x_i может связываться с x_j . Граф G' , конечно, каким-то образом связан с графом G , но совсем не очевидным образом. Наименьшее число лиц, которые знают или могут получить все сведения об организации, образует одну из антибаз графа G' . Можно утверждать, что эффективная для управления этой организацией коалиция будет множеством лиц H , определяемым следующим соотношением:

3.3. Для заданного графа найти сильные компоненты, построить конденсацию и найти все его базы и антибазы.

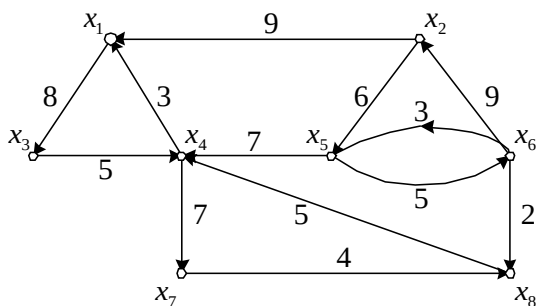
Варианты задания:

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
№ графа	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
Длина пути N	2	6	3	5	4	6	2	4	5	3	6	2
Вес пути P	20	18	35	16	27	21	19	22	23	17	24	26

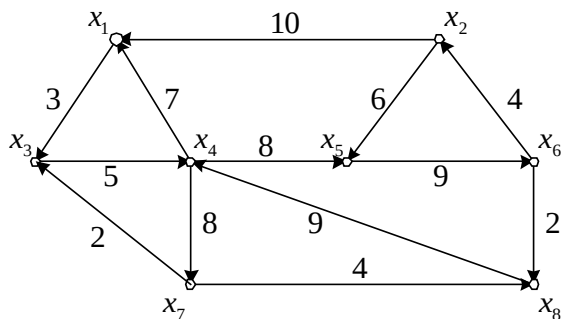
1.



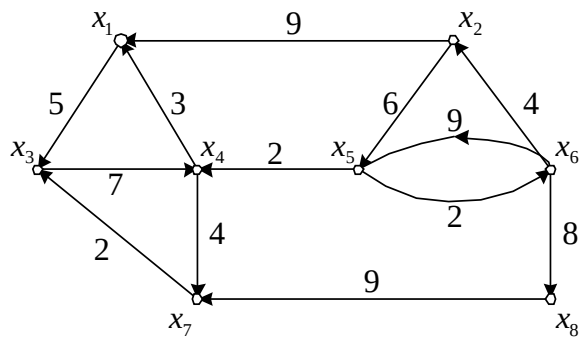
2.



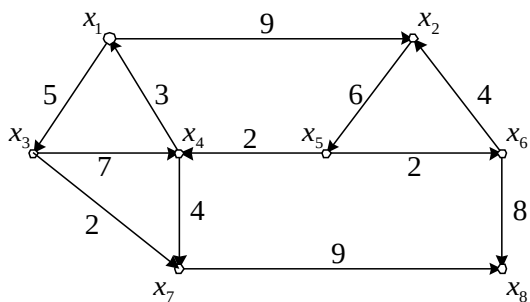
3.



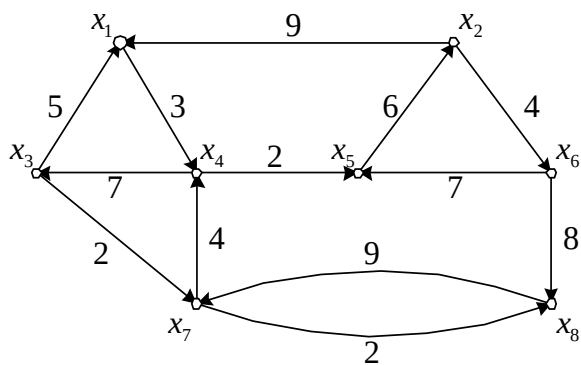
4.



5.



6.



4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

4.1. Что называется сильной компонентой графа?

- 4.2. Как формируются матрицы достижимостей и контрадостижимостей для графа?
- 4.3. Что называется конденсацией графа?
- 4.4. Перечислите свойства конденсации графа.
- 4.5. Что называется базой и антибазой графа.
- 4.6. Как можно использовать данную теорию при исследовании структуры организационных систем?

Практическое занятие 2. Знаковые графы и теория структурного баланса

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучить теорию структурного баланса, научиться исследовать структуру знаковых графов и определять их сбалансированность.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Знаковые графы

Граф является моделью для представления отношений между людьми, например, отношения "лицо u знает лицо v ". Такие отношения могут иметь и иной смысл, не обязательно только означая, что u знает или не знает v . Например, u может доверять или не доверять v . Рассмотрим некоторые способы, позволяющие в структуре, состоящей из вершин и ребер (неориентированный граф) или вершин и дуг (ориентированный граф), вводить дополнительную информацию. В качестве дополнительной информации ребрам или дугам можно приписать знаки плюс (+) или минус (-). Определенный таким образом граф называется знаковым графом. Знак пути, цепи, замкнутого пути, замкнутой цепи, контура, цикла и т.д. определяется как произведение знаков, входящих в них дуг или ребер, если знак плюс заменить на +1, а знак минус на -1.

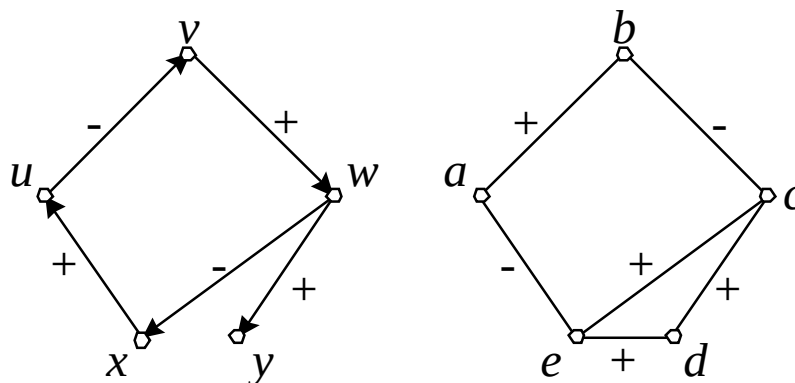


Рис. 2.1. Знаковый орграф D и знаковый граф G

В знаковом орграфе D на рис. 2.1 путь u, v, w, y имеет знак минус, и контур u, v, w, x , имеет знак плюс. В знаковом графе G на рис. 1 цепь a, b, c, d отрицательна. Очевидно, что путь и цепь имеют знак минус, если число отрицательных дуг или ребер, содержащихся в них, нечетно, в противном случае они имеют знак плюс.

2.2. Баланс в малых группах.

Рассмотрим задачу из области социологии малых групп и теории принятия решений. В качестве изучаемых малых групп могут рассматриваться коллективы лиц, принимающих решения, комиссии экспертов и т.д. Такие группы называются "сбалансированными", если в некотором смысле, они демонстрируют "отсутствие напряжения" и обладают способностью хорошо работать совместно, выполняя задания.

Формирование математической модели баланса начинается с образования первичной математической модели малой группы. Люди представляются вершинами графа, причем, если между лицами a и b имеется сильная симпатия или антипатия, то между верши-

нами a и b проводится ребро (a, b) . Аналогичная модель возникает, если отношения "симпатии - антипатии" заменить отношением "общаться - избегать", "соглашаться - не соглашаться" и т.д. Как упрощение, допустим, что отношение симпатии симметрично, а именно, если лицу a нравится лицо b , то и b симпатизирует a . Тогда каждому ребру (a, b) мы можем приписать знак плюс или минус, сообщая тем самым, симпатизируют ли a и b друг другу или нет. В результате группа представляется в этой модели знаковым графом. В полученном знаковом графе исключим петли, так как не будем рассматривать случай симпатии или антипатии самому себе.

В работе Хейдера было впервые введено понятие баланса. Рассматривались группы из трех лиц, в частности, группы, в которых каждый участник обладает чувством сильной симпатии или антипатии к каждому другому члену группы. Все возможные такие группы показаны на рис. 2.2. Было замечено, что группы типов I и III были сбалансированы, а группы типов II и IV нет. В группе I все охотно работали вместе. В группе III a и b симпатизируют друг другу, и оба взаимно не симпатизируют c , поэтому каждый член группы будет удовлетворен, если a и b будут работать вместе, а c в одиночку. В группе II, лица a симпатизирует и b , и c и для a желательно работать с ними обоими и им бы также хотелось работать с a , но сами они не симпатизируют друг другу, поэтому в группе существует напряженность и группа несбалансированна. В группе IV ее члены не симпатизируют друг другу, всякое сотрудничество невозможно и группа несбалансированна.

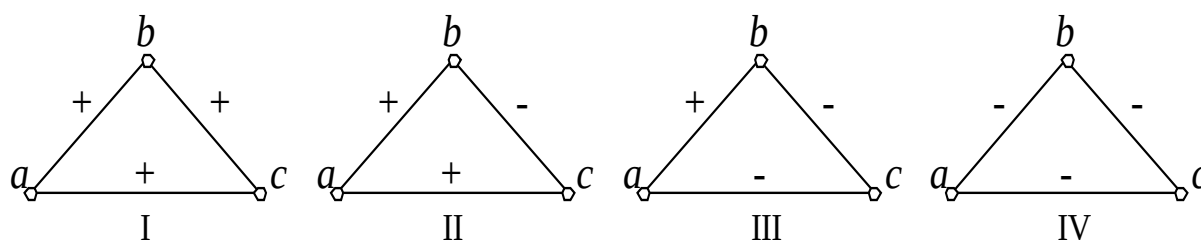


Рис. 2.2. Возможные типы группы из трех человек, в которых каждый участник обладает симпатией или антипатией по отношению к остальным

Можно заметить, что группам типов I и III соответствуют циклы с четным числом отрицательных знаков, а группам типов II и IV - циклы с нечетным числом отрицательных знаков. Анализ этого и других примеров привел их к следующей математической модели баланса. Малая группа представляется ее знаковым графом и группа считается сбалансированной, если каждый цикл в ее знаковом графе положителен. Знаковый граф, соответствующий сбалансированной группе, будем также называть сбалансированным.

Для иллюстрации этого определения заметим, что знаковый граф на рис. 2.3 сбалансирован. В самом деле, все его циклы, а именно, u, v, w, x ; u, v, x ; u, v, w, x, v положительны.

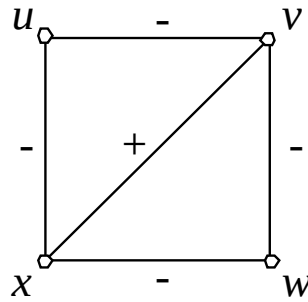


Рис. 2.3. Сбалансированный знаковый граф

Следующим шагом является прогноз сбалансированности, задача которого состоит в том, чтобы научиться выявлять какие конкретно группы являются сбалансированными. Для этого были разработаны методы проверки сбалансированности, поскольку непосредственное использование определения может оказаться очень сложным для групп достаточно больших размеров. Харари предложил следующий критерий баланса, с которым часто легче работать, чем с определением: знаковый граф сбалансирован тогда и только тогда, когда его вершины можно разбить на два класса, так что каждое ребро внутри класса имеет знак плюс и каждое ребро между двумя классами имеет знак минус.

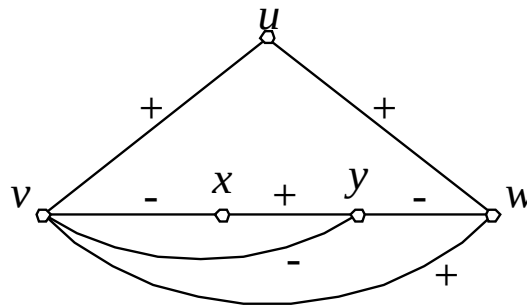


Рис. 2.4. Сбалансированный знаковый граф

Используя данный критерий баланса, легко видеть, что знаковый граф на рис. 2.4 сбалансирован, поскольку его вершины можно разбить на два класса $\{x, y\}$ и $\{u, v, w\}$. Малая группа, структура симпатий - антипатий которой может быть представлена знаковым графом на рис. 2.4, должна быть сбалансирована, т.е. в ней проявляется стремление к сотрудничеству и отсутствует напряженность.

Существует следующая интерпретация данного критерия из области политики. Законодательный орган имеет идеализированную "двухпартийную структуру", если его членов можно разделить на две группы (которые можно назвать "партиями") таким образом, что все отношения "симпатии - антипатии" внутри групп положительны и все такие отношения между группами отрицательны. Таким образом, законодательный орган сбалансирован тогда и только тогда, когда он имеет двухпартийную (а не многопартийную) структуру (одна из партий может, в частности, отсутствовать).

Понятие баланса может применяться и к анализу литературных произведений: если в некоторый момент отношения между персонажами романа, пьесы, рассказа и т.п. образуют несбалансированный знаковый граф, то предсказуемо изменение одного из знаков. В основе этого предположения лежит гипотеза о стремлении авторов в конце произведения

прийти к "сбалансированной" (менее напряженной) ситуации. Подразумевается также, что напряженность создается авторами путем построения несбалансированных ситуаций.

Проверка адекватности модели, заключается в изучении групп с заданной структурой для выявления того, будут ли они сбалансированными или нет. Часто отношения симпатии и антипатии можно индуцировать среди незнакомых людей в искусственно созданной группе в лабораторных условиях, если участникам сообщать сведения друг о друге заблаговременно.

Математическая модель баланса стимулировала исследования в области знаковых графов, ставших объектом самостоятельного изучения. В свою очередь математические методы, разрабатываемые для знаковых графов, стали использоваться и при анализе других проблем из различных предметных областей. В модели баланса, предлагаемой для столь широких приложений, имеется несколько слабых мест. Во-первых, предполагается, что отношения типа "симпатии" симметричны. Во-вторых, игнорируется, что некоторые отношения симпатии сильнее других. В-третьих, не различаются типы несбалансированности, описанные во второй и четвертой ситуациях на рис. 2. И в четвертых, баланс трактуется как "черно-белое" понятие, игнорируя возможности градации или степени сбалансированности. Можно исключить первое слабое место, используя знаковые орграфы вместо знаковых графов, и четвертое, - измеряя степень сбалансированности.

2.3. Теорема о структуре.

Теорема Харари. Знаковый граф $G=(X, A)$ сбалансирован тогда, когда: каждая замкнутая цепь в G положительна, любые две цепи между вершинами u и v имеют одинаковый знак, а также множество вершин X можно разбить на два множества X_1 и X_2 так, что каждое положительное ребро соединяет вершины одного множества и каждое отрицательное ребро соединяет вершины различных множеств.

Допуская, что G связан, выберем в X произвольную вершину u и определим X_1 как множество, содержащее u и все вершины, соединенные с u цепью из положительных ребер. Пусть X_2 состоит из всех оставшихся вершин. Если вершины $x \in X_1$ и $y \in X_2$ соединены ребром, то это ребро отрицательно. В самом деле, вершина x соединена с u цепью из положительных ребер $u, v_2, \dots, v_t, x$. Если ребро (x, y) положительно, тогда вершина y также соединена с u положительной цепью $u, v_2, \dots, v_t, x, y$. Таким образом, вершина y должна была бы оказаться в X_1 , а не в X_2 . Далее, предположим, что вершины x и y принадлежат X_1 и соединены ребром. Это ребро должно быть положительным, так как в противном случае легко получим отрицательную цепь из u в y , добавляя это ребро к положительной цепи из u в x . Это нарушает условие, что любые две цепи между вершинами u и v имеют одинаковый знак. В заключение допустим, что вершины x и y находятся в X_2 и соединены ребром. Из связности G , следует существование цепи, соединяющей u с x . Из определения множеств X_1 и X_2 и условия, что любые две цепи между вершинами u и v имеют одинаковый знак, эта цепь должна быть отрицательной. Наконец, ребро, соединяющее x и y , должно быть положительным, так как в противном случае мы получим цепь со знаком плюс из u в y , добавляя это ребро к отрицательной цепи из u в x .

Теорема Харари имеет аналог для знаковых ориентированных графов. Знаковый орграф $D=(X, A)$ сбалансирован, когда: каждый замкнутый путь положителен, множество вершин X можно разбить на два множества так, что каждая положительная дуга соединяет вершины одного множества и каждая отрицательная дуга соединяет вершины различных множеств.

Теорема Харари дает конструктивную процедуру для нахождения разбиения знакового графа G на два множества, если оно существует. Опишем такую процедуру для связанного знакового графа. Для нахождения разбиения вершин на два множества поместим лю-

бую вершину u графа $G(X, A)$ в первое множество X_1 . Начав с вершины u , рассмотрим простые цепи длины 1 в остальные вершины. Пусть вершина v достижима из u . Тогда поместим v в X_1 , если цепь, соединяющая v с u положительна, и поместим v во второе множество X_2 в противном случае. Повторим эту процедуру для простых цепей длины 2, длины 3 и т.д. вплоть до простых цепей длины $n-1$, где n - число вершин в G . Если G - сбалансированный граф, то полученные два множества X_1 и X_2 дадут желаемое разбиение. Если G не сбалансирован, то во время разбиения возникнет случай, когда окажется необходимым поместить вершину в два различных множества. В случае, когда такое противоречие встретилось, мы делаем заключение, что граф G не сбалансирован.

Продemonстрируем использование этой процедуры на знаковом графе, изображенном на рис. 4. Начнем ее, помещая вершину u в X_1 . Поскольку u соединена с v положительным ребром, поместим вершину v в X_1 . Аналогично, поместим w в X_1 . Далее, рассматривая простые цепи длины 2, мы видим, что вершина x соединена с u отрицательной цепью u, v, x , поэтому x поместим в X_2 . Аналогично и вершину y включим в X_2 . Таким образом, $X_1 = \{u, v, w\}$ и $X_2 = \{x, y\}$ оказываются разбиением вершин графа G на множества. Рассмотрение других простых цепей длины 2, 3 и 4 не приводит ни к каким противоречиям с этим разбиением. Отсюда заключаем, что G сбалансирован.

Продemonстрируем использование процедуры на знаковом графе, изображенном на рис. 2.5.

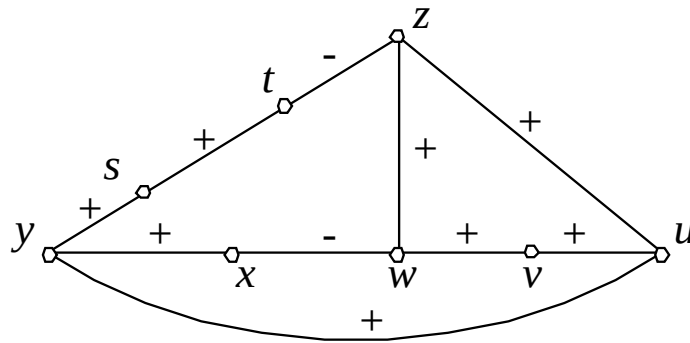


Рис. 2.5. Несбалансированный знаковый граф

Простые цепи из u длины 1 заставляют поместить z, v и y в X_1 , а простые цепи длины 2 заставляют поместить w, s и x в X_1 и t в X_2 . Но одна простая цепь длины 3 приводит к включению w в X_2 , что невозможно. Таким образом, приходим к выводу, что G не сбалансирован. Также, в данном графе легко найти отрицательный цикл.

2.4. Использование знаковых орграфов в качестве средства моделирования сложных систем.

Сложные системы содержат большое число переменных, взаимодействующих друг с другом и реагирующих на изменения каждой другой переменной. При математическом моделировании сложных систем исследователь сталкивается с необходимостью нахождения компромисса между точностью результатов моделирования и возможностью получения подробной информации, необходимой для построения модели. Знаковые орграфы можно использовать при разработке простых математических моделей сложных систем и при анализе результатов, получаемых на основе минимальной информации.

Использование знакового орграфа в качестве модели сложной системы основано на следующем представлении. Наиболее существенные для рассматриваемой проблемы переменные считаются вершинами орграфа. От переменной u к переменной v проводится дуга, если изменение u оказывает непосредственное существенное воздействие на v . Дуга имеет знак плюс, если воздействие является "усилением" (при прочих равных условиях увеличение u приводит к увеличению v и уменьшение u приводит к уменьшению v), и знак минус, если воздействие вызывает "торможение" (при прочих равных условиях увеличение u приводит к уменьшению v и уменьшение u приводит к увеличению v).

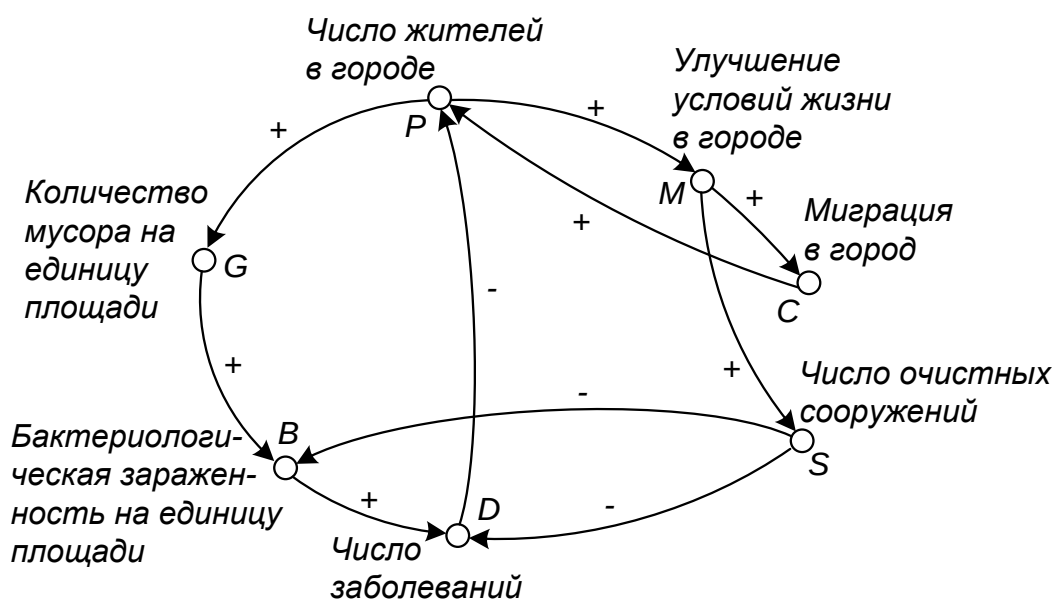


Рис. 2.6. Знаковый орграф для анализа проблемы удаления твердых отходов

Пользуясь этой интерпретацией, рассмотрим знаковый орграф, изображенный на рис. 2.6. Этот знаковый орграф, взятый из работы Маруямы, описывает существенные связи между рядом переменных, относящихся к проблеме удаления из городов твердых отходов. Дуга (P, G) положительна, поскольку рост городского населения ведет при прочих равных условиях к увеличению количества мусора. Дуга (D, P) отрицательна, поскольку рост заболеваемости ведет к уменьшению населения, тогда как уменьшение заболеваемости приводит к росту населения. Остальные знаки определяются путем аналогичных рассуждений. Дуга (B, M) не проведена, поскольку "усиливающее" или "тормозящее" воздействие бактериологической зараженности на мероприятия по улучшению условий жизни в городе не принимается в расчет. Четыре переменные P, G, B и D образуют контур, противодействующий отклонению. Увеличение любой переменной в этом контуре, в конечном счете, приводит через другие переменные контура к уменьшению данной переменной и наоборот. Чем больше в городе людей, тем больше отходов, чем больше отходов, тем больше бактерий, чем больше бактерий, тем больше заболеваемость, чем больше заболеваемость, тем меньше людей и т.п. С другой стороны, контур P, M, C, S служит контуром, усиливающим отклонение. Увеличение (уменьшение) любой переменной в этом контуре, в конечном счете, приводит к ее последующему увеличению (уменьшению). Чем больше городское население, тем сильнее требования к улучшению условий жизни, чем больше мероприятий по улучшению условий жизни проводится в городе, тем более привлекательным он становится для поселения, чем больше миграция в город, тем больше городское

население. Контурь в таком знаковом орграфе соответствуют контурам обратной связи, причем, контуры, усиливающие отклонение - контурам положительной обратной связи, а контуры, противодействующие отклонению, - контурам отрицательной обратной связи.

Контуры, усиливающие отклонение, легко описать. Контур усиливает отклонение тогда и только тогда, когда он содержит четное число отрицательных дуг (усиление отклонения может происходить и при отсутствии в контуре отрицательных дуг), в противном случае это контур, противодействующий отклонению. В самом деле, в случае четного числа отрицательных дуг противодействие отклонению в переменной само будет встречать противодействие. Если число отрицательных дуг нечетно, то последнее противодействие отклонению не встречает противодействия (контур усиливает отклонение тогда и только тогда, когда он сбалансирован). Если большинство контуров составляют контуры, усиливающие отклонение, то начальные изменения могут превышать изменения в результате их непосредственного воздействия. Таким образом, наличие многих контуров, усиливающих отклонение, предполагает неустойчивость. Наличие многих контуров, противодействующих отклонению, также может приводить к неустойчивости за счет увеличения колебаний.

3. ЗАДАНИЕ

3.1. Получить у преподавателя вариант задания.

3.2. Для знакового графа G определить знаки всех простых цепей длины k , начинающихся в a , и знаки всех циклов.

3.3. Для знакового орграфа D определить знаки всех простых путей длины k , начинающихся в a , и знаки всех контуров.

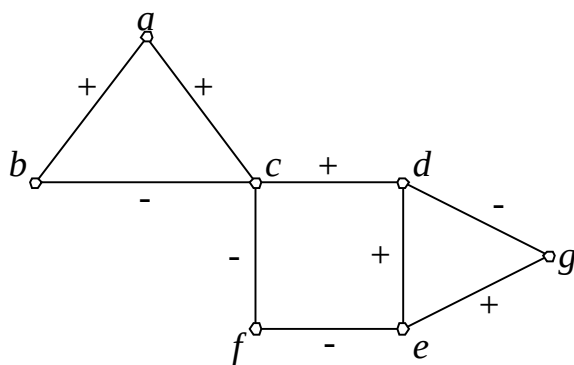
3.4. Сделать вывод о сбалансированности знакового графа G (задание 3.2).

3.5. Найти контура усиливающие и противодействующие отклонению в знаковом орграфе D (задание 3.3).

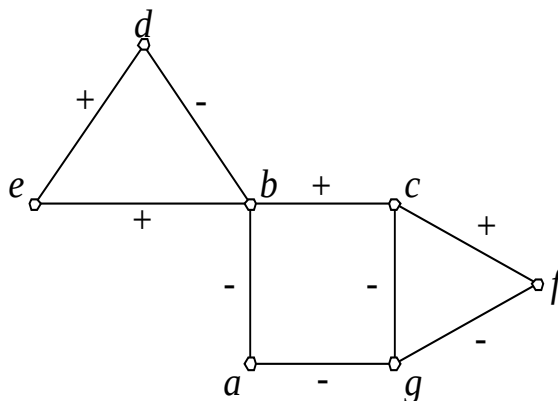
Варианты задания:

Для задания 3.2:

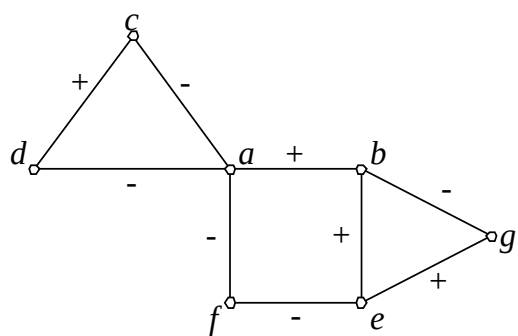
1.



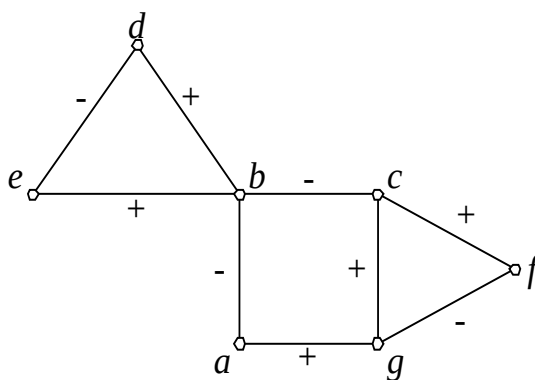
2.



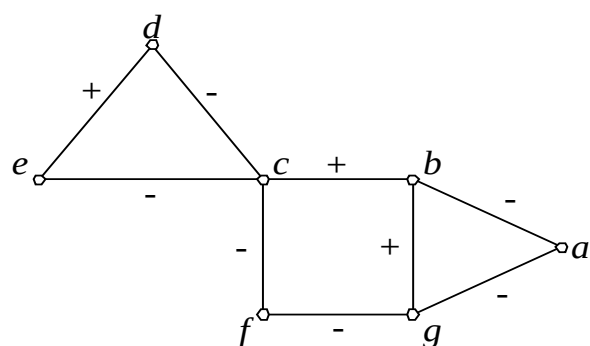
3.



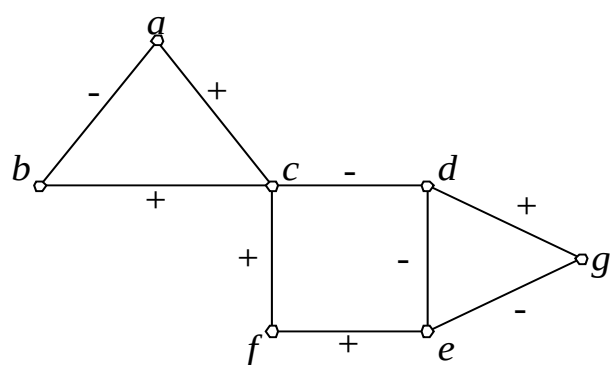
4.



5.

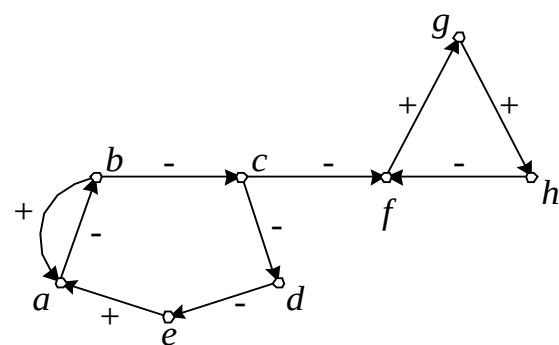


6.

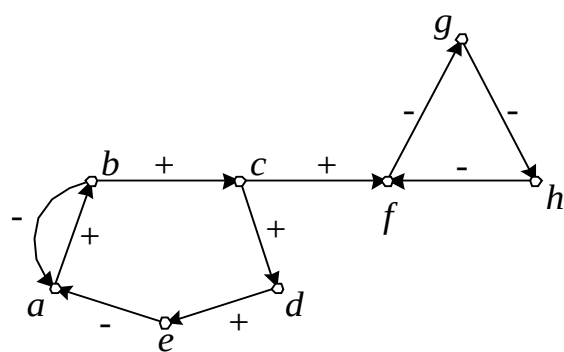


Для задания 3.3:

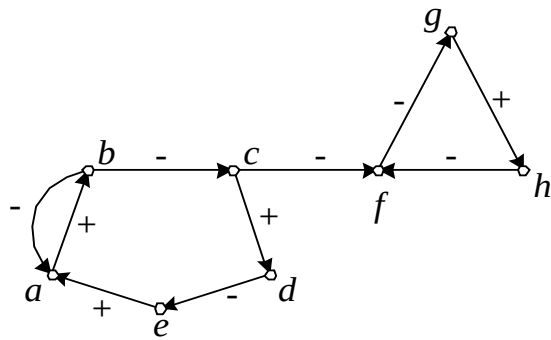
1.



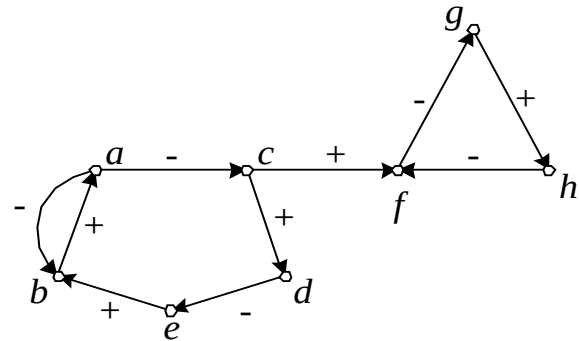
2.



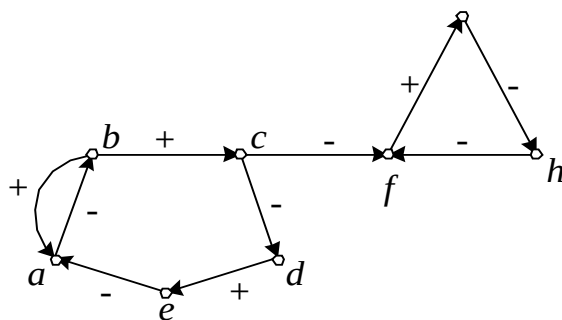
3.



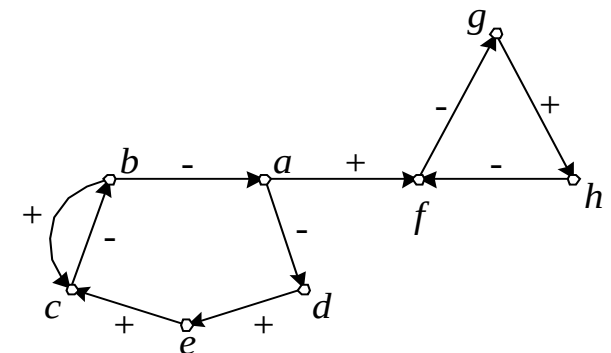
4.



5.



6.



4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 4.1. Что называется знаковым графом?
- 4.2. Как определяется знак пути, цепи, контура, цикла?
- 4.3. Что называется сбалансированным знаковым графом?
- 4.4. Как формулируется критерий баланса?
- 4.5. Перечислите слабые места теории структурного баланса.
- 4.6. В чем заключается теорема Харари.

Практическое занятие 3. Кратчайшие пути в графах

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучить и исследовать алгоритмы нахождения кратчайших путей между вершинами графа, получить представление об их использовании при решении практических задач.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Постановка задачи

Пусть дан граф

Шаг 5.

1. Если

x_1	0	12	0	0	0	0	5	2	10
x_2	12	0	14	0	0	0	4	0	15
x_3	0	14	0	20	0	25	0	0	9
x_4	0	0	20	0	2	15	5	0	0
x_5	0	0	0	2	0	8	0	0	0
x_6	0	0	25	0	8	0	12	11	10
x_7	0	4	0	5	0	12	0	0	22
x_8	2	0	0	0	24	11	0	0	7
x_9	10	15	0	0	0	10	22	7	0

Воспользуемся алгоритмом Дейкстры.
Шаг 1.

и аналогично

Единственной такой вершиной является

2.3. Алгоритм Форда (случай общей матрицы весов)

Алгоритм Дейкстры применим лишь в том случае, когда

из n преобразований (итераций) начальной матрицы весов C . При этом на k -й итерации матрица представляет длины кратчайших путей между каждой парой вершин с тем ограничением, что путь между

В задаче требуется найти минимальное время, необходимое для реализации проекта. Иными словами, нужно найти в графе самый длинный путь между вершиной s , изображающей начало, и вершиной t , изображающей завершение всех необходимых для реализации проекта работ. Самый длинный путь называется критическим путем, так как этапы, относящиеся к этому пути, определяют полное время реализации проекта, и всякая задержка с началом выполнения любого из этих этапов приведет к задержке выполнения проекта в целом.

Данную задачу можно решить как задачу нахождения кратчайшего пути, используя алгоритм Дейкстры, заменив операцию $\min$ на $\max$.

3. ЗАДАНИЕ

3.1. Получить у преподавателя вариант задания.

3.2. Пользуясь алгоритмом Дейкстры найти кратчайшие пути между всеми вершинами графа.

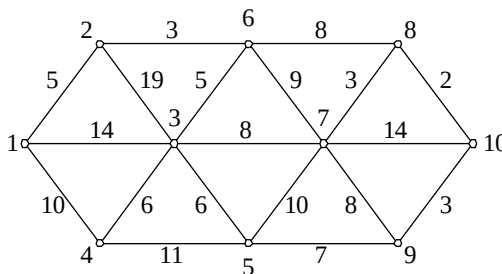
3.3. Пользуясь алгоритмом Форда найти кратчайшие пути между всеми вершинами графа.

3.4. Пользуясь алгоритмом Флойда найти кратчайшие пути между всеми вершинами графа.

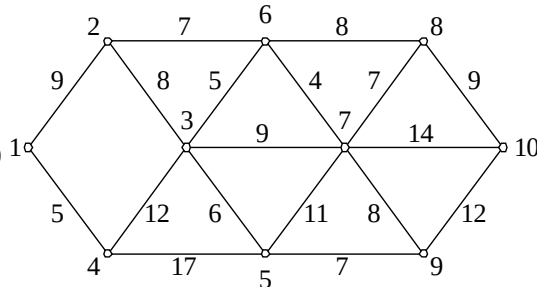
3.5. Сравнить алгоритмы Дейкстры и Флойда по времени вычислений кратчайших путей между всеми вершинами графа.

Варианты задания:

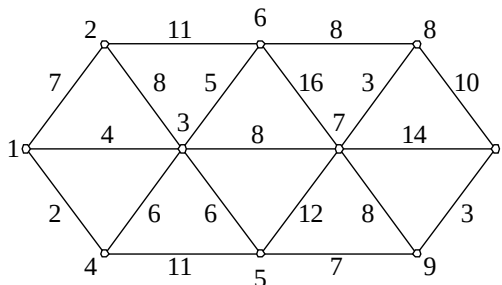
1.



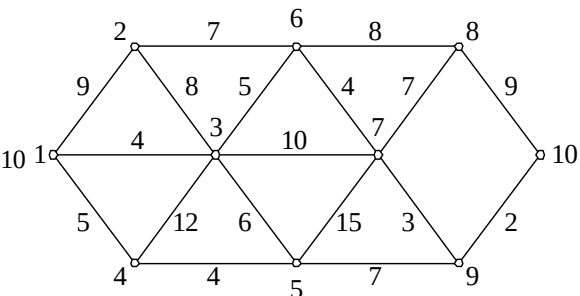
2.



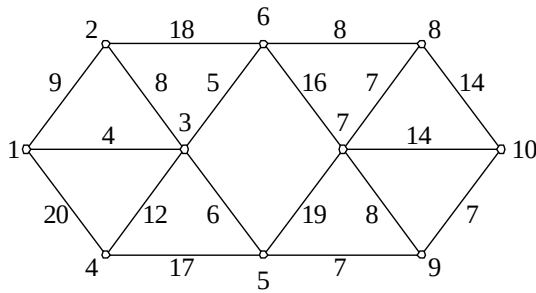
3.



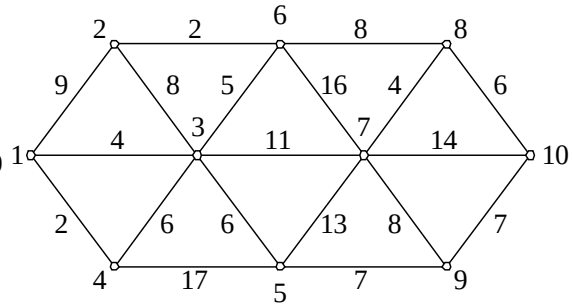
4.



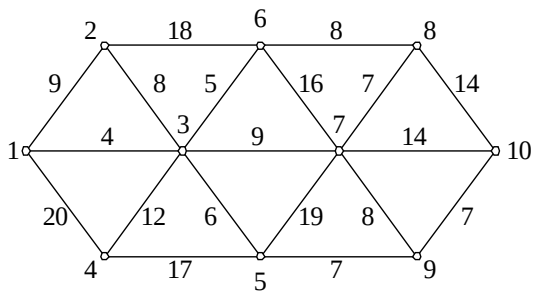
5.



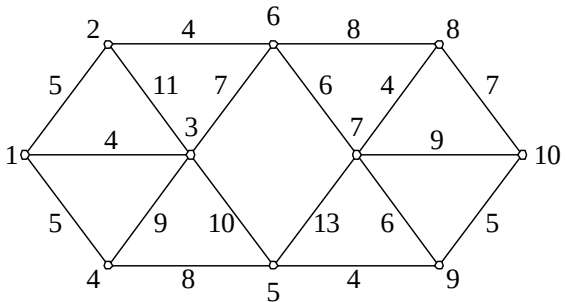
6.



7.



8.



4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 4.1. Какие ограничения предъявляются к графам при решении задачи о кратчайшем пути?
- 4.2. Какие особенности графа следует учитывать при выборе алгоритма решения задачи о кратчайшем пути?
- 4.3. Опишите алгоритм Дейкстры.
- 4.4. Опишите алгоритм Форда.
- 4.5. Опишите алгоритм Флойда.
- 4.6. Как применяется данная теория в сетевом планировании и управлении?

Практическое занятие 4. Размещение центров и медиан в графах

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучить и исследовать алгоритмы нахождения центров и медиан в графах.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Разделения графа

Для любой вершины

Матрица расстояний графа имеет вид:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	5	6	9	9	13
x_2	9	0	1	4	4	8
$D(G)=x_3$	12	7	0	3	5	9
x_4	9	4	5	0	2	6
x_5	7	2	3	6	0	4
x_6	3	8	9	12	10	0

с учетом вектора весов вершин

(т.е. все вершины графа G достижимы из

Число внешнего разделения абсолютного внешнего центра называется абсолютным внешним радиусом

лученные при решении этих задач места размещения пунктов обслуживания называются центрами графа.

2.6. Медиана графа

Пусть дан граф

x_3	60	35	0	15	25	45
x_4	18	8	10	0	4	12
x_5	28	8	12	24	0	16
x_6	9	24	27	36	30	0
	142	85	64 [*]	105	89	123

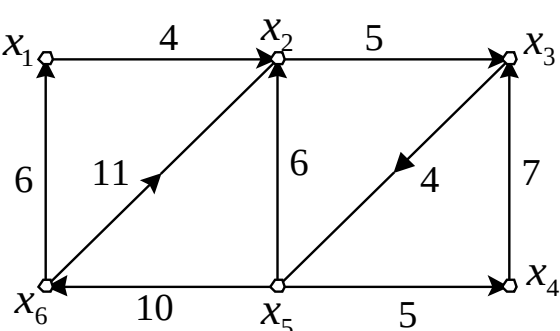
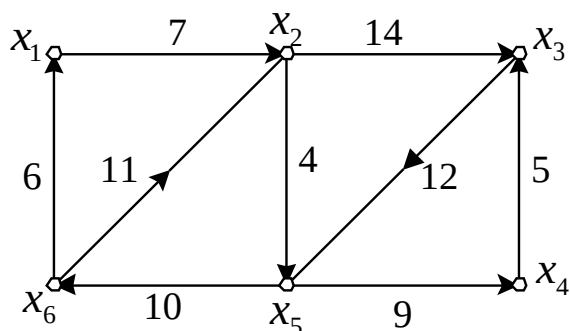
По полученным передаточным числам видно, что внешней медианой является

Шаг 2. Взять произвольную «неопробованную» вершину и для каждой вершины

11	5	[7,9,1,4,4,8]
12	6	[9,1,3,1,7,6]

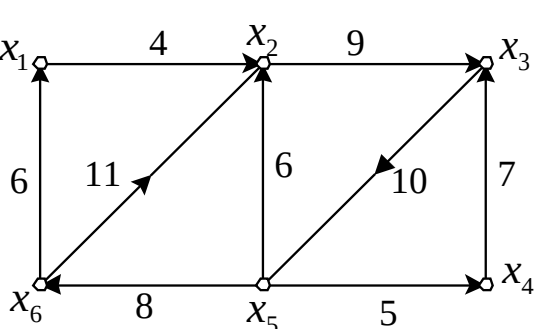
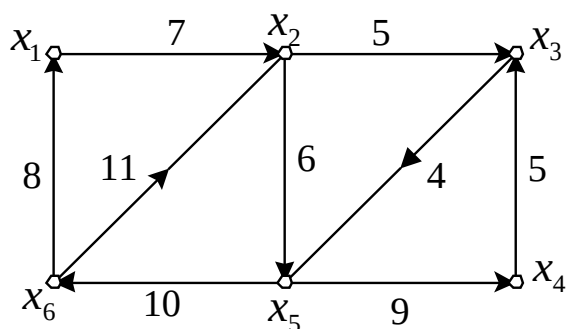
1.

2.



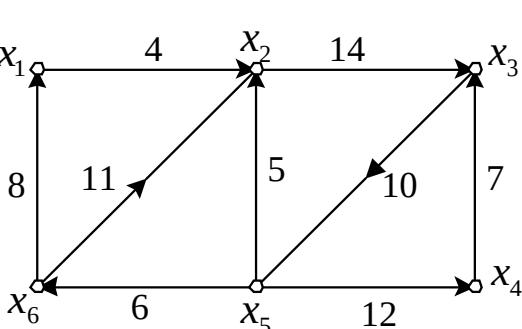
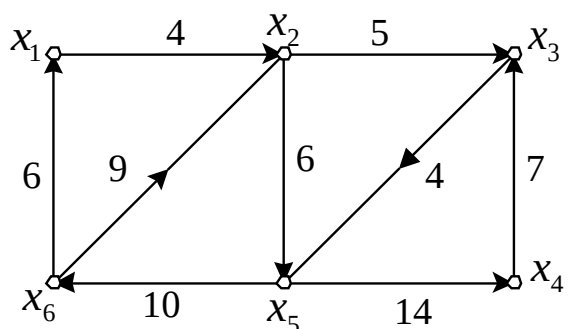
3.

4.



5.

6.



4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 4.1. Что называется центром графа, абсолютным центром графа?
- 4.2. Как находится центр и абсолютный центр графа?
- 4.3. Что называется кратным центром графа?
- 4.4. Что называется медианой графа?
- 4.5. Как находится медиана графа?
- 4.5. Что называется кратной медианой графа?
- 4.7. Как находится кратная медиана графа?
- 4.8. Какое практическое применение имеет решение задачи о размещении центров и медиан?

Практическое занятие 5. Планарность и раскраска

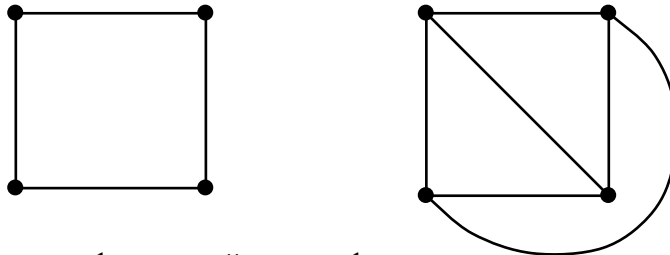
Цель работы: приобретение практических навыков в определении планарности графов, построении плоских укладок, раскраски графов

Теоретическая справка

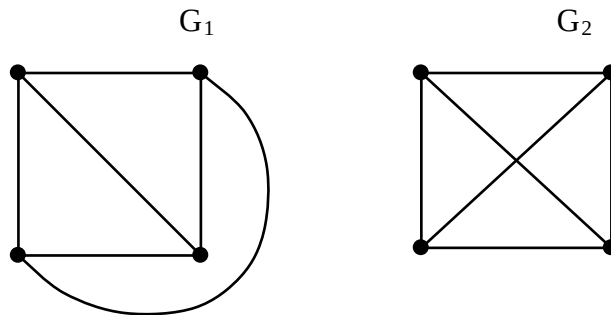
Плоские и планарные графы. Планарность

Плоским - называется такой граф G у которого, вершины – точки плоскости, а ребра – непрерывные плоские линии без пересечений и самопересечений, причем соединяющие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентных им обоим вершин.

Пример:

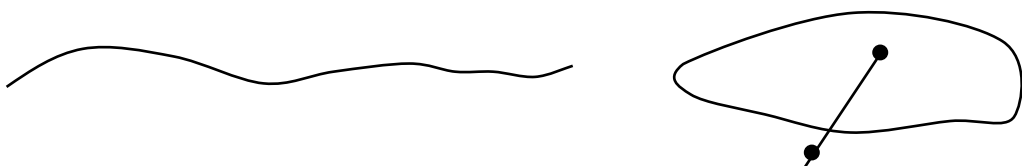


Планарный – это граф, который изоморфен плоскому.



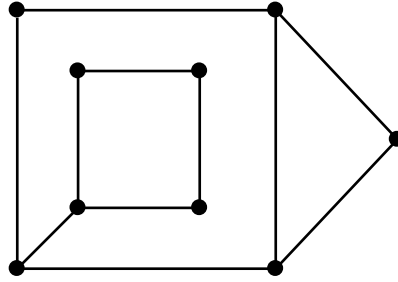
G1

Замкнутая Жорданова кривая L на плоскости делит область на две области, так, что любая линия, соединяющая точки в различных подобластях пересекает Жорданову кривую.



Гранью плоского графа называется максимальное по включению количество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена Жордановой кривой, не пересекающей ребра графа.

Пример:



Граница грани – это множество вершин и ребер, принадлежащих грани.

$\Gamma_1 = \{2, 3, 4\}$ или $\{23, 24, 34\}$ верш. ребра

$\Gamma_4 = \{6, 7, 8, 9\} \rightarrow \{67, 68, 79, 89\}$

$\Gamma_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{12, 23, 34, 45, 15\}$

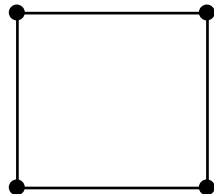
$\Gamma_3 = 1)\{1, 2, 4, 5\} \rightarrow \{12, 24, 45, 15\}$

2) $\{5, 6, 7, 8, 9\} \rightarrow \{57, 67, 68, 79, 89\}$

Теорема Эйлера для плоского графа.

Для любого связного графа G , являющегося плоским справедливо соотношение: $p - q + f = 2$, где p – количество вершин, q – количество ребер, f – количество граней плоского графа.

Пример:

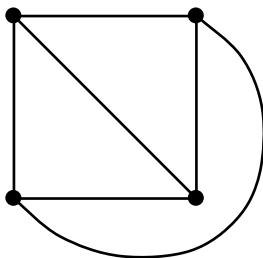


$$p = 4$$

$$q = 4$$

$$f = 2$$

$$4 - 4 + 2 = 2$$



$$p = 4$$

$$q = 6$$

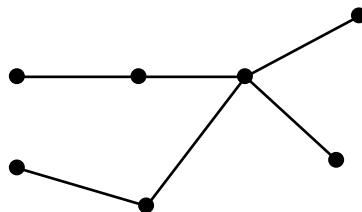
$$f = 4$$

$$4 - 6 + 4 = 2$$

$$p = 7$$

$$q = 6$$

$$f = 1$$



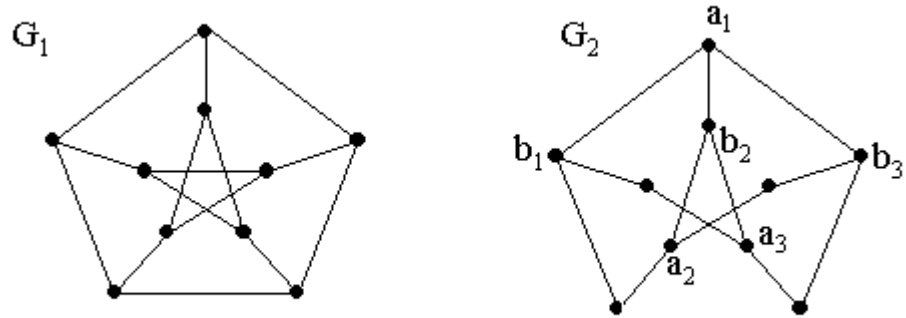
$$7 - 6 + 1 = 2$$

Критерии планарности

Критерий Понтрягина-Куратовского (критерий планарности). Граф планарен тогда, когда он не содержит подграфов гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

Критерий Вагнера. Граф планарен тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых K_5 или $K_{3,3}$ (по методу операции стягивания).

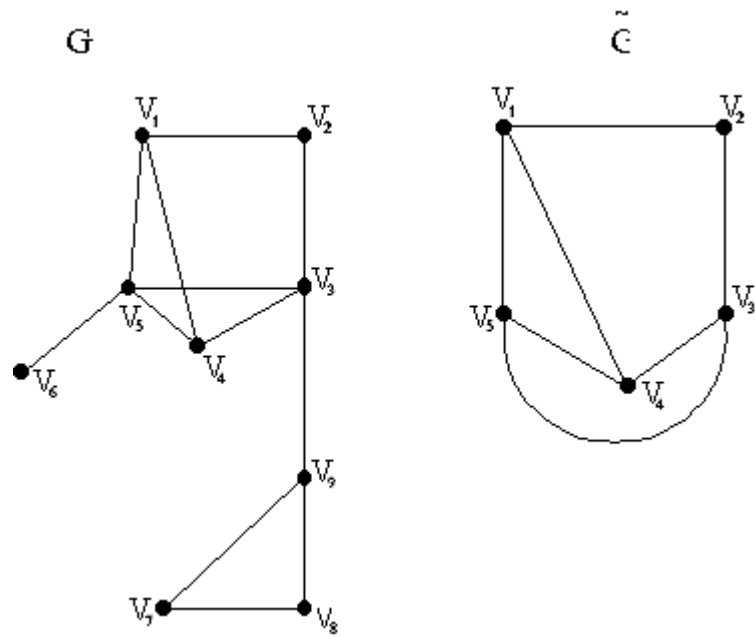
Примеры: Граф Петерсена



Граф G_1 – не планарен, т. к. он содержит подграф G_2 , гомеоморфный $K_{3,3}$

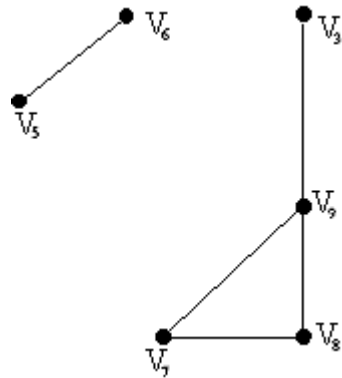
Алгоритм плоской укладки графа

Алгоритм γ графа G представляет собой процесс последовательного присоединения к некоторому уже уложенному графу

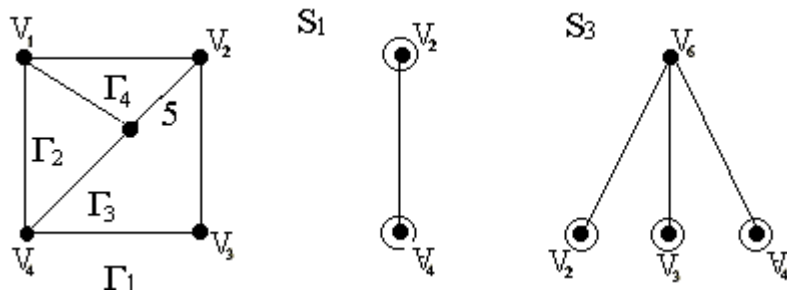


ребра $e = uv$ исходного графа G такие, что $e \notin$ плоской укладке, но вершины uv уже есть в плоской укладке.

связная компонента графа G -

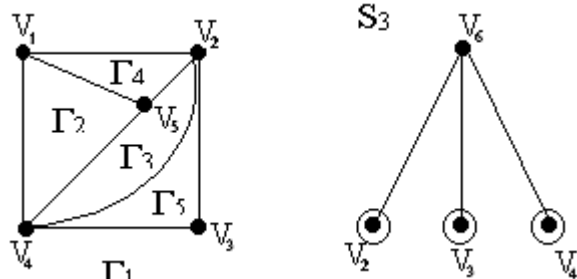


Найдем грани графа



$S2: \alpha\text{-цепь} = \{1, 5\}$ в Γ_2

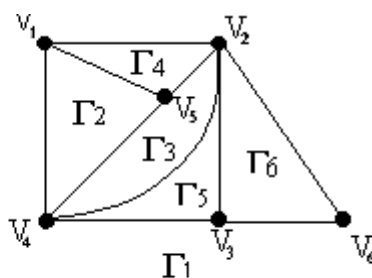
$\Gamma(S1) = \{\Gamma_1, \Gamma_3\}, \Gamma(S3) = \{\Gamma_1, \Gamma_3\}$



$S1: \alpha\text{-цепь} = \{2, 4\}$ в Γ_3

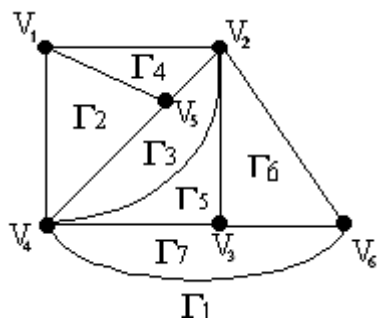
$\Gamma(S3) = \{\Gamma_1, \Gamma_5\}$

$S:$



$S3: \alpha\text{ цепь: } \{2, 6, 3\}$ в Γ_1

$\Gamma(S) = \{\Gamma_1\}$



$S: \alpha\text{-цепь} = \{4, 6\}$ в Γ_1

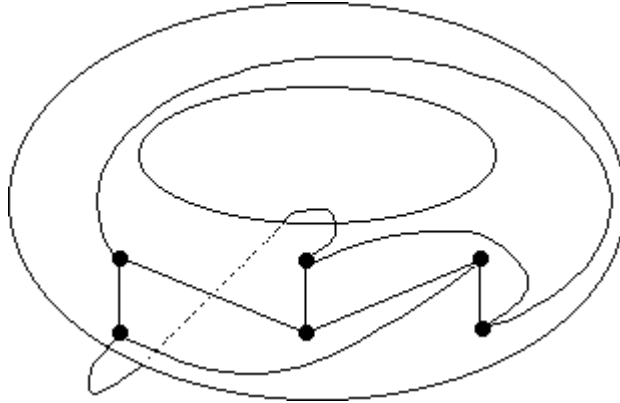
Характеристики не планарных графов

Число скрещиваний графа G — это $\min$ число пересечений двух ребер при изображении графа G на плоскости (обозначают

Род графа G — это минимальное число ручек, которые необходимо добавить к сфере, чтобы можно было уложить граф G без пересечений, самопересечений ребер.

Граф $3,3$ укладывается на торе без пересечений и самопересечений ребер. Такие графы называются **ториальными**, род равен 1, относятся графы K_5 , K_7 , $K_3, 3$, $K_4, 4$.

Пример укладывания графа $K_3, 3$ на торе:



Раскраска графов

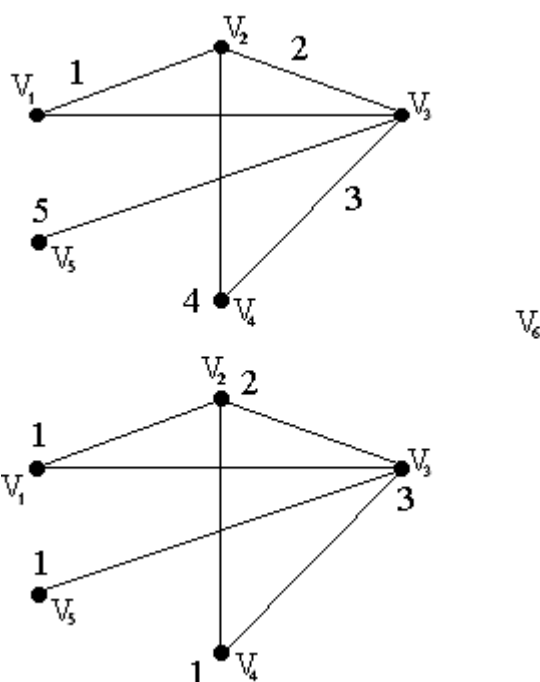
Пусть имеется некоторый граф G неор. и пусть k — натуральное число. Тогда **k -раскраской** графа G называется произвольная функция f , отображающая множество вершин графа G в некоторое k -элементное множество:

$$f: V_G \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_k\} = A$$

В качестве элементов множества A чаще всего используется отрезок натурального ряда $\{1, 2, \dots, k\}$ либо $\{a, b, \dots, n\}$ или краски типа {синий, красный, ..., черный}.

Раскраска называется **правильной**, если $f(u) \neq f(v)$ для любых смежных вершин u и v графа G (или концевые вершины любого ребра окрашены в разные цвета).

Граф, для которого существует правильная k -раскраска, называется **k -раскрашиваемым**.



Пример:

граф 5-раскрашиваемый
(раскраска правильная)

правильная раскраска
граф 3-раскрашиваемый

Хроматическое число графа G —это минимальное число красок, при котором граф имеет правильную раскраску. Если хроматическое число равно k , то граф называется **k -хроматическим**. (обозначают $\chi(G) = k$).

Правильную k -раскраску графа G можно рассматривать как разбиение множества вершин графа G на не более чем, k непустых множеств, которые называются **цветными классами**.

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_k$$

Каждый цветной класс является независимым множеством, т. е. разбиение множества вершин (эквивалентны, транзитивность не является сюръективной).

Для полного графа K_n хроматическое число равно:

$$\chi(K_n) = n,$$

для цикла с четным числом вершин: $\chi(C_{2n}) = 2$

С нечетным числом вершин:

$$\chi(C_{2n+1}) = 3$$

Для пустого: $\chi(0n) = 1$

Граф, у которого $\chi = 2$ называются **бихроматическим**.

Теорема Кёнига

Непустой граф является бихроматическим тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

Следствие 1. Любое дерево бихроматично.

Следствие 2. Любой двудольный граф бихроматичен.

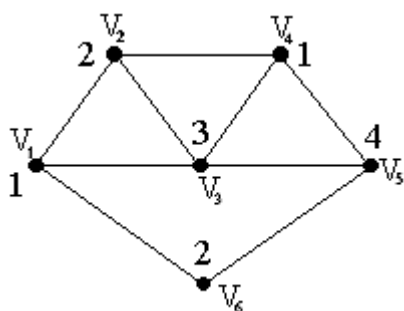
Алгоритм последовательной раскраски

Произвольной вершине графа G приписываем цвет 1.

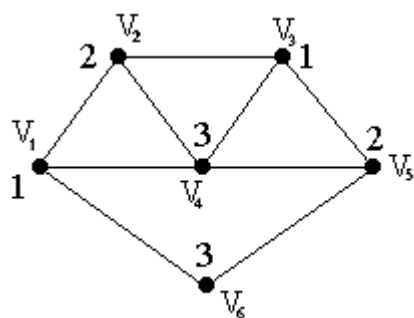
Пусть раскрашены i вершин графа G в цвета от 1 до l , где $l \leq i$. Произвольной неокрашенной вершине v_{i+1} приписываем минимальный цвет неиспользованной при раскраске смежных вершин.

Пример:

Алгоритм последовательной раскраски зависит от способа перебора вершин.



Пример: последовательность раскраски такова: $(v_1, v_2, v_6, v_3, v_5, v_4)$

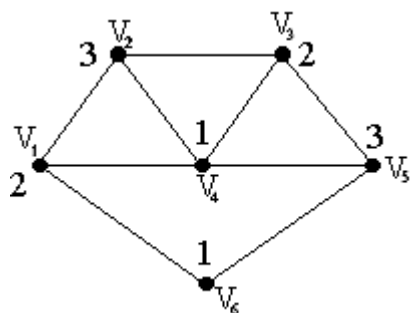


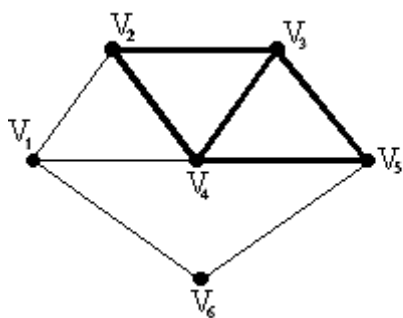
Последовательность: (v1, v2, v4, v3, v5, v6)

Последовательная раскраска, основанная на методе упорядочивания вершин «наибольшее – первыми».

«наибольшее – первыми»

Упорядочиваем вершины графа G в порядке не возрастания их степеней, т.е. НП-упорядочивание. Если 2 вершины имеют одинаковые степени, то вычисляем двухшаговые степени вершины v_i ($\deg$





(v4, v3, v5, v2, v1, v6)

Раскраска ребер

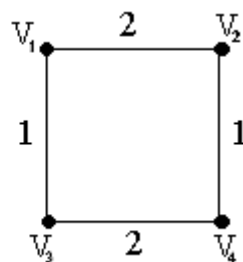
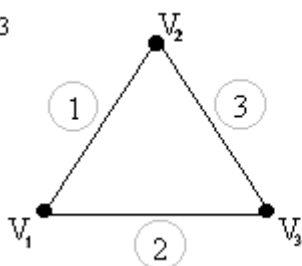
Пусть есть $G = (V, E)$, где $|V| = p$, $|E| = q$. Тогда реберной k -раскраской называется некоторая функция φ , задающая отображения множества E , т. е. $\varphi: E \rightarrow A = \{a_1, \dots, a_k\}$

Граф называется k -раскрашиваемым, если существует правильная раскраска ребер.

Минимальное число k , при котором существует правильная реберная k -раскраска называется реберным хроматическим числом или индексом.

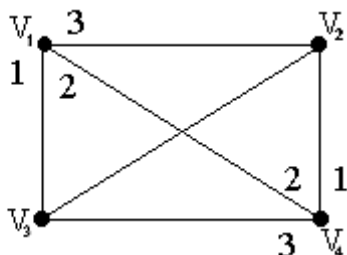
Граф G называется реберно k -хроматическим, если хроматический индекс равен k .

K_3



Хроматический индекс для полного графа с четным числом вершин равен:

K_4



Если исходный граф был планарен добавить минимальное число ребер до непланарности. Планарный граф обозначить G_1 (исходный или преобразованный), непланарный - G_2 .

Для непланарного графа G_2 , определить характеристики графа: толщину, число скрещиваний, искаженность.

Раскраска. Последовательно раскрасить граф G_1 и G_2 ; найти хроматическое число, хроматический индекс. Привести пример графа, у которого число красок будет зависеть от порядка обхода вершин.

Контрольные вопросы

1. Какой граф называется плоским, планарным?
2. Сформулировать теорему Эйлера для плоского графа, критерии планарности.
3. Дать определение жордановой кривой, теоремы Жордана, грани плоского графа.
4. Какая раскраска называется правильной?
5. Сформулировать определение хроматического числа, хроматического индекса
6. Сформулировать теорему Кенига

Учебно-методическое обеспечение дисциплины «Прикладная теория графов»

Перечень основной литературы:

1. Зайцева О.Н. Математические методы в приложениях. Дискретная математика: учебное пособие / О.Н. Зайцева, А.Н. Нуриев, П.В. Малов; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань: Издательство КНИТУ, 2014. - 173 с: табл., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7882-1570-9; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428299>

2. Окулов С. М. Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике: учебное пособие / Окулов С. М. - 4-е изд. - Москва: Лаборатория знаний, 2020. - 425 с. Систем. требования: Adobe Reader XI; экран 10". (Педагогическое образование) - ISBN 978-5-00101-684-7. - Текст: электронный // ЭБС "Консультант студента": [сайт]. - URL: <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785001016847>.

Перечень дополнительной литературы:

1. Хаггарт Р. Дискретная математика для программистов: учебное пособие / Р. Хаггарт; пер. англ. под ред. С.А. Кулешов; пер. с англ. А.А. Ковалева, В.А. Головешкина, М.В. Ульянова. - изд. 2-е, испр. - Москва: РИЦ "Техносфера", 2012. - 400 с: табл., схем. - (Мир программирования). - ISBN 978-5-94836-303-5; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=89024>

2. Основы дискретной математики: учебное пособие / Дехтярь М. И. Издатель: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016 - 184 с. ISBN 978-5-8265-1074-2 URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=428981&sr=1

3. Дискретная математика: учебное пособие / Б.М. Веретенников, В.И. Белоусова - Екатеринбург, Изд-во Урал. ун-та, - 2014, Ч.1. - 132с. ISBN 978-5-7996-1199-6 URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=276013

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

<http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

<http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

<http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.

<http://www.mathedu.ru/> Электронная библиотека по математике и вопросам ее преподавания. Включает [популярные книги и пособия](#), [методические руководства](#), [учебники](#), [журналы](#), [исторические работы](#), [авторефераты](#), [диафильмы](#).

<http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

<http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).

<http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.

<http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).

<http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания
по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине
«ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ»
для студентов направления подготовки
02.03.01 Математика и компьютерные науки
направленность (профиль)
«Анализ данных и искусственный интеллект»

Общие положения

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

К основным видам самостоятельной работы студентов относятся:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание докладов;
- подготовка к семинарам, практическим и лабораторным работам, их оформление;
- составление аннотированного списка статей из соответствующих журналов по отраслям знаний (педагогических, психологических, методических и др.);
- выполнение учебно-исследовательских работ, проектная деятельность;
- подготовка практических разработок и рекомендаций по решению проблемной ситуации;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов;
- выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин;
- выполнение выпускной квалификационной работы и др.

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Самостоятельная работа по дисциплине **«Прикладная теория графов»** направлена на формирование следующих **компетенций**:

ПК-2. Способен преподавать математику и информатику в образовательных организациях общего образования и среднего профессионального образования на основе полученного фундаментального образования и научного мировоззрения

1. Цель и задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС совпадает с целью обучения студента – формирование набора профессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки «Математика и компьютерные науки».

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

2. Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды ре-ализуе-мых ком-петенций	Вид дея-тельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе (акад.)		
			СРС	Контактная работа с преподава-телем	Всего
4 семестр					
ПК-2	Самостоя-тельное изучение литературы	Собеседование Защита реферата	34	2	36
ПК-2	Решение практиче-ских задач	Конспект	34	2	36
Итого за 4 семестр			68	4	72
Итого			68	4	72

3. Порядок выполнения самостоятельной работы студентом

3.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанно читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют **четыре основные установки в чтении научного текста:**

информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)

усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;

Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;

Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;

Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;

2. Выделите главное, составьте план;

3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;

4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

3.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим и лабораторным занятиям

Для того чтобы практические и лабораторные занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в стро-

гом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

3.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

3.4. Методические рекомендации по написанию научных текстов (докладов, рефератов, эссе, научных статей и т.д.)

Перед тем, как приступить к написанию научного текста, важно разобраться, какова истинная цель вашего научного текста - это поможет вам разумно распределить свои силы и время.

Во-первых, сначала нужно определиться с идеей научного текста, а для этого необходимо научиться либо относиться к разным явлениям и фактам несколько критически (своя идея – как иная точка зрения), либо научиться увлекаться какими-то известными идеями, которые нуждаются в доработке (идея – как оптимистическая позиция и направленность на дальнейшее совершенствование уже известного). Во-вторых, научиться организовывать свое время, ведь, как известно, свободное (от всяких глупостей) время – важнейшее условие настоящего творчества, для него наконец-то появляется время. Иногда именно на организацию такого времени уходит немалая часть сил и талантов.

Писать следует ясно и понятно, стараясь основные положения формулировать четко и недвусмысленно (чтобы и самому понятно было), а также стремясь структурировать свой текст. Каждый раз надо представлять, что ваш текст будет кто-то читать и ему захочется сориентироваться в нем, быстро находить ответы на интересующие вопросы (заодно представьте себя на месте такого человека). Понятно, что работа, написанная «сплошным текстом» (без заголовков, без выделения крупным шрифтом наиболее важным мест и т. п.), у культурного читателя должна вызывать брезгливость и даже жалость к автору (исключения составляют некоторые древние тексты, когда и жанр был иной и к текстам относились иначе, да и самих текстов было гораздо меньше – не то, что в эпоху «информационного взрыва» и соответствующего «информационного мусора»).

Объем текста и различные оформительские требования во многом зависят от принятых в конкретном учебном заведении порядков.

Реферат (доклад) - это самостоятельное исследование студентом определенной проблемы, комплекса взаимосвязанных вопросов.

Реферат не должна составляться из фрагментов статей, монографий, пособий. Кроме простого изложения фактов и цитат, в реферате должно проявляться авторское видение проблемы и ее решения.

Рассмотрим основные этапы подготовки реферата студентом.

Выполнение реферата начинается с выбора темы.

Затем студент приходит на первую консультацию к руководителю, которая предусматривает:

- обсуждение цели и задач работы, основных моментов избранной темы;
- консультирование по вопросам подбора литературы;
- составление предварительного плана.

Следующим этапом является работа с литературой. Необходимая литература подбирается студентом самостоятельно.

После подбора литературы целесообразно сделать рабочий вариант плана работы. В нем нужно выделить основные вопросы темы и параграфы, раскрывающие их содержание.

Составленный список литературы и предварительный вариант плана уточняются, согласуются на очередной консультации с руководителем.

Затем начинается следующий этап работы - изучение литературы. Только внимательно читая и конспектируя литературу, можно разобраться в основных вопросах темы и подготовиться к самостоятельному (авторскому) изложению содержания реферата. Конспектируя первоисточники, необходимо отразить основную идею автора и его позицию по исследуемому вопросу, выявить проблемы и наметить задачи для дальнейшего изучения данных проблем.

Систематизация и анализ изученной литературы по проблеме исследования позволяют студенту написать работу.

Рабочий вариант текста реферата предоставляется руководителю на проверку. На основе рабочего варианта текста руководитель вместе со студентом обсуждает возможности доработки текста, его оформление. После доработки реферат сдается на кафедру для его оценивания руководителем.

Требования к написанию реферата

Написание 1 реферата является обязательным условием выполнения плана СРС по любой дисциплине профессионального цикла.

Тема реферата может быть выбрана студентом из предложенных в рабочей программе или фонде оценочных средств дисциплины, либо определена самостоятельно, исходя из интересов студента (в рамках изучаемой дисциплины). Выбранную тему необходимо согласовать с преподавателем.

Реферат должен быть написан научным языком.

Объем реферата должен составлять 20-25 стр.

Структура реферата:

- Введение (не более 3-4 страниц). Во введении необходимо обосновать выбор темы, ее актуальность, очертить область исследования, объект исследования, основные цели и задачи исследования.

- Основная часть состоит из 2-3 разделов. В них раскрывается суть исследуемой проблемы, проводится обзор мировой литературы и источников Интернет по предмету исследования, в котором дается характеристика степени разработанности проблемы и авторская аналитическая оценка основных теоретических подходов к ее решению. Изложение материала не должно ограничиваться лишь описательным подходом к раскрытию выбран-

ной темы. Оно также должно содержать собственное видение рассматриваемой проблемы и изложение собственной точки зрения на возможные пути ее решения.

- Заключение (1-2 страницы). В заключении кратко излагаются достигнутые при изучении проблемы цели, перспективы развития исследуемого вопроса

- Список использованной литературы (не меньше 10 источников), в алфавитном порядке, оформленный в соответствии с принятыми правилами. В список использованной литературы рекомендуется включать работы отечественных и зарубежных авторов, в том числе статьи, опубликованные в научных журналах в течение последних 3-х лет и ссылки на ресурсы сети Интернет.

- Приложение (при необходимости).

Требования к оформлению:

- текст с одной стороны листа;
- шрифт Times New Roman;
- кегль шрифта 14;
- межстрочное расстояние 1,5;
- поля: сверху 2,5 см, снизу – 2,5 см, слева - 3 см, справа 1,5 см;
- реферат должен быть представлен в сброшюрованном виде.

Порядок защиты реферата:

Защита реферата проводится на практических занятиях, после окончания работы студента над ним и исправления всех недочетов, выявленных преподавателем в ходе консультаций. На защиту реферата отводится 5-7 минут времени, в ходе которого студент должен показать свободное владение материалом по заявленной теме. При защите реферата приветствуется использование мультимедиа-презентации.

Оценка реферата

Реферат оценивается по следующим критериям:

- соблюдение требований к его оформлению;
- необходимость и достаточность для раскрытия темы приведенной в тексте реферата информации;
- умение студента свободно излагать основные идеи, отраженные в реферате;
- способность студента понять суть задаваемых преподавателем и сокурсниками вопросов и сформулировать точные ответы на них.

Критерии оценки:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если в докладе студент исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает материал; свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний; использует для написания доклада современные научные материалы; анализирует полученную информацию; проявляет самостоятельность при написании доклада.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если качество выполнения доклада достаточно высокое. Студент твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопросы по теме доклада.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если материал доклада излагается частично, но пробелы не носят существенного характера, студент допускает неточности и ошибки при защите доклада, дает недостаточно правильные формулировки, наблюдаются нарушения логической последовательности в изложении материала.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он не подготовил доклад или допустил существенные ошибки. Студент неуверенно излагает материал доклада, не отвечает на вопросы преподавателя.

Описание шкалы оценивания

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставаемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

Темы рефератов

1. Изоморфизм графов.
2. Операции над графами.
3. Подграфы.
4. Способы представления графов.
5. Маршруты, цепи, циклы.
6. Связность графов, компоненты связности.
7. Связность в орграфах.
8. Эйлеровы графы.
9. Гамильтоновы графы.
10. Деревья и их свойства.
11. Остовы деревьев.
12. Ориентированные, упорядоченные и бинарные деревья.
13. Расстояния в графах.
14. Метрические характеристики графа.
15. Упорядочивание элементов орграфа.
16. Нахождение минимальных и максимальных путей в орграфах.
17. Остовы графов, фундаментальные циклы.
18. Планарные и хроматические графы.
19. Потоки в сетях.
20. Сетевые и линейные графики.

Список литературы для выполнения СРС

Перечень основной литературы:

1.Зайцева О.Н. Математические методы в приложениях. Дискретная математика: учебное пособие / О.Н. Зайцева, А.Н. Нуриев, П.В. Малов; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань: Издательство КНИТУ, 2014. - 173 с: табл., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7882-1570-9; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428299>

2.Окулов С. М. Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике: учебное пособие / Окулов С. М. - 4-е изд. - Москва: Лаборатория знаний, 2020. - 425 с. Систем. требования: Adobe Reader XI; экран 10". (Педагогическое образование) - ISBN 978-5-00101-684-7. - Текст: электронный // ЭБС "Консультант студента": [сайт]. - URL: <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785001016847>.

Перечень дополнительной литературы:

1.Хаггарт Р. Дискретная математика для программистов: учебное пособие / Р. Хаггарт ; пер. англ. под ред. С.А. Кулешов; пер. с англ. А.А. Ковалева, В.А. Головешкина, М.В. Ульянова. - изд. 2-е, испр. - Москва: РИЦ "Техносфера", 2012. - 400 с: табл., схем. - (Мир программирования). - ISBN 978-5-94836-303-5 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=89024>

2. Основы дискретной математики: учебное пособие/ Дехтярь М. И. Издатель: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016 - 184 с. ISBN 978-5-8265-1074-2 URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=428981&sr=1

3. Дискретная математика: учебное пособие / Б.М. Веретенников, В.И. Белоусова - Екатеринбург, Изд-во Урал. ун-та, - 2014, Ч.1. - 132с. ISBN 978-5-7996-1199-6 URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=276013

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

<http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

<http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

<http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.

<http://www.mathedu.ru/> Электронная библиотека по математике и вопросам ее преподавания. Включает [популярные книги и пособия](#), [методические руководства](#), [учебники](#), [журналы](#), [исторические работы](#), [авторефераты](#), [диафильмы](#).

<http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

<http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).

<http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.

<http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).

<http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.