

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ
по дисциплине «**Комплексный анализ**»
для студентов направления подготовки
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
направленность (профиль)
«Анализ данных и искусственный интеллект»

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Тема 1. Комплексные числа и действия над ними	4
Тема 2. Функции комплексного переменного	10
Тема 3. Дифференцирование функций комплексного переменного	15
Тема 4. Интегрирование функций комплексного переменного	22
Тема 5. Числовые и функциональные комплексные ряды	31
Тема 6. Ряды Тейлора Лорана	37
Тема 7. Нули функции. Изолированные особые точки	43
Тема 8. Элементы теории вычетов	47

Введение

Целью практических занятий является формирование общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, путем изучения основ комплексного анализа.

Задачи освоения дисциплины:

- формирование систематизированных знаний в области теории функций комплексного переменного;
- расширение на комплексную область основных понятий, используемых в действительном анализе: функция, предел, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость;
- ознакомить студентов с практическими приложениями методов комплексного анализа в различных разделах математики и физики.

В результате изучения дисциплины у обучающихся формируются следующие компетенции (в соответствии с образовательным стандартом):

ОПК-1 Способность консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности;

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

ЗНАТЬ

основные положения комплексной арифметики, свойства основных элементарных функций комплексного переменного;

основные теоремы и свойства дифференцирования и интегрирования в комплексной области;

основные положения теории функциональных рядов с комплексной переменной и теории вычетов.

УМЕТЬ

решать основные задачи комплексной арифметики, на вычисление пределов функции комплексного переменного, их дифференцирование и интегрирование, на разложение функции комплексного переменного в ряды Тейлора и Лорана;

находить вычеты и с их помощью вычислять интегралы;

определять возможности применения теоретических положений и методов комплексного анализа для постановки и решения конкретных прикладных задач.

ВЛАДЕТЬ

навыками решения задач комплексной арифметики; вычисления пределов функции комплексного переменного, их дифференцирования и интегрирования, и разложения в ряды;

методами комплексного анализа и готов их применять к решению прикладных задач.

Тема 1. Комплексные числа и действия над ними

Практическое занятие №1

Основные понятия, формы записи комплексных чисел

Цель: сформировать основные представления о комплексных числах, их геометрическом изображении; формах записи комплексного числа; операциях сложения, разности, произведения и частного в различных формах записи.

Знания и умения, приобретаемые обучающимся: изображать комплексные числа на координатной плоскости; вычислять модуль и аргумент комплексного числа; осуществлять переход к различным формам записи; находить сумму, разность произведения и частного комплексных чисел.

Актуальность темы: необходимость ознакомиться с основными понятиями и определениями; приобретение начальных знаний и умений по дисциплине.

Теоретическая часть:

Комплексным числом называется упорядоченная пара действительных чисел $z = (x, y)$. Первая компонента x этой пары называется действительной частью, а вторая компонента y - мнимой частью (или коэффициентом при мнимой части) комплексного числа z , и для них приняты обозначения: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

При $y = 0$ комплексное число $z = (x, 0)$ отождествляется с действительным числом x . При $x = 0$ комплексное число $z = (0, y)$ называется мнимым. Числа $(0, 0) = 0$, $(1, 0) = 1$ и $(0, 1) = i$ называются нулём, единицей и мнимой единицей соответственно.

По определению, комплексные числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ равны, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, а их *произведением* - комплексное число $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Непосредственная проверка показывает, что введённые операции коммутативны: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 z_2 = z_2 z_1$. Для произвольных трёх комплексных чисел z_1, z_2, z_3 справедливы равенства $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$, т.е. выполняется закон ассоциативности соответственно по отношению к сложению и умножению. Операции подчинены закону дистрибутивности: $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

Из определений операций сложения и умножения следуют равенства $z + 0 = z$, $z \cdot 0 = 0$, $z \cdot 1 = z$, $i \cdot i = i^2 = -1$.

На основе легко проверяемого равенства $(0, 1) \cdot (y, 0) = (0, y)$ заключаем, что комплексное число $z = (x, y)$ может быть представлено в декартовой (алгебраической) форме $z = x + iy$. В самом деле,

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy.$$

Вычитание определяется как операция, обратная сложению, т.е. разностью $z_1 - z_2$ называется комплексное число z_3 , обладающее свойством $z_2 + z_3 = z_1$. Если $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, то $z_1 - z_2 = z_3 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

Комплексное число $x - iy$ называется *сопряжённым* с комплексным числом $z = x + iy$, и для него принято обозначение $\bar{z}$. Переход от данного комплексного числа к сопряжённому называется операцией сопряжения. Очевидно, что

$$(\bar{z}) = z, \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, z + \bar{z} = 2x, z - \bar{z} = 2iy.$$

Деление на комплексное число, отличное от нуля, определяется как операция, обратная умножению, т.е. под числом $\frac{z_1}{z_2}, z_2 \neq 0$, понимается комплексное число z_4 , обладающее свой-

ством $z_2 \cdot z_4 = z_1$. Для представления z_4 в виде $x_4 + iy_4$ следует провести простое вычисление

$$z_4 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Воспользовавшись связью декартовых и полярных координат

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi,$$

получим так называемую *тригонометрическую форму* записи комплексного числа $z = x + iy$:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1)$$

При этом ρ обычно называют модулем, а φ - аргументом комплексного числа и обозначают $\rho = |z|, \varphi = \text{Arg} z$.

Используя известную формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

и равенство (1), получим так называемую *показательную форму* записи комплексного числа

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Вопросы и задания:

1. Дайте определение комплексного числа.
2. Какое комплексное число называется сопряжённым с комплексным числом $z = x + iy$?
3. Какие из следующих равенств являются справедливыми: $\overline{(\bar{z})} = z, \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, z + \bar{z} = 2xi, z - \bar{z} = 2y$?
4. Запишите в показательной форме комплексное число $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
5. Найти множества точек комплексной Z - плоскости, удовлетворяющие соотношениям:
 - 1) $\text{Re} z^2 = 0$.
 - 2) $|z - 1| > |z - i|$.
 - 3) $\arg(z - 1) = \pi$.

6. Найти значение выражения

$$1). \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^4 \quad 2). \left(\frac{2+5i}{2-5i} \right)^3 \quad 3). \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$$

7. На координатной плоскости изобразить множество точек $z = x + iy$, удовлетворяющих указанным условиям:

- 1). $|z - 1| \leq 1, |z + 1| > 2$.
- 2). $|z - i| \leq 1, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

3). $|z + i| < 3, \quad 0 < \operatorname{Re} z \leq 1$.

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>
2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>
2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Практическое занятие № 2

Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел

Цель: освоить операцию возведения комплексных чисел в натуральную степень, научиться извлекать корни n -ой степени из комплексного числа.

Знания и умения, приобретаемые обучающимися: применение формулы Муавра для различных форм записи комплексного числа; решение уравнений с комплексным неизвестным.

Актуальность темы: приобретение навыков возведения комплексных чисел в натуральную степень, извлечения корней n -ой степени.

Теоретическая часть:

Формула Бинома Ньютона: для любых комплексных чисел a, b и натурального n справедливо

$$\text{равенство } (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}.$$

Возведение в степень, формула Муавра: если $z = re^{i\varphi}$, то при $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Пример. Вычислить. $(\sqrt{3} - i)^9$.

Решение. Пусть $z = \sqrt{3} - i$, тогда $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, откуда по формуле Муавра имеем:

$$(\sqrt{3} - i)^9 = 2^9 (\cos 9(-\frac{\pi}{6}) + i \sin 9(-\frac{\pi}{6})) = 512 (\cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2}) = 512i.$$

Корнем n -ой степени из комплексного числа Z называется такое комплексное число W , удовлетворяющее равенству $W^n = Z$, т.е. $\sqrt[n]{Z} = W$, если $W^n = Z$.

При нахождении корня n -ой степени из комплексного числа нужно записать это число в тригонометрической форме $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ и воспользоваться следующей формулой:

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \text{ где } k=0,1,2,\dots,n-1.$$

Геометрически эти n значений корня представляют собой вершины правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат.

Пример. Найти все значения: а) $\sqrt[4]{-16}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt{\sqrt{3} - i}$.

Решение: а) запишем число $Z = -16$ в тригонометрической форме

$$Z = -16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Согласно формуле получаем:

$$W_k = 2 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} k \right) \right), \text{ где } k=0,1,2,3.$$

Следовательно,

$$W_0 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$W_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$W_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$W_3 = 2 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

б) Модуль числа i равен единице, а аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$W_k = \sqrt[3]{1} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right), \text{ где } k=0,1,2.$$

Получаем

$$W_0 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

$$W_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

$$W_2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -i.$$

в) Пусть $Z = \sqrt{3} - i$, тогда $|Z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$,

$$\varphi = \arctg \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

По формуле имеем

$$W_k = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2} \right) \right), \text{ где } k=0,1.$$

$$W_0 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right) = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} - \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} i,$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi}{2} \right) \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} + \pi \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} + \pi \right) \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(-\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} + \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} i. \end{aligned}$$

Вопросы и задания:

1. Сколько значений могут принимать целые положительные степени мнимой единицы i ?
2. Запишите значения первых восьми степеней i .
3. Как в общем виде записываются натуральные степени i ?
4. Как возвести комплексное число в степень n ?
5. Что называется квадратным корнем из комплексного числа?
6. Как извлечь квадратный корень из комплексного числа?
7. Решить уравнение
 - 1). $z^2 - 20z + (92 + 6i) = 0$.
 - 2). $z^5 - 1 - i\sqrt{3} = 0$.

3). $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>

2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>

2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Тема 2. Функции комплексного переменного

Практическое занятие № 3

Основные элементарные функции комплексного переменного

Цель:изучить основные определения, свойства функций комплексного переменного.

Знания и умения, приобретаемые обучающимися:выполнение исследования функций комплексного переменного, нахождение действительной и мнимой части функции комплексного переменного.

Актуальность темы: приобретение навыков к исследованию функций комплексного переменного.

Теоретическая часть:

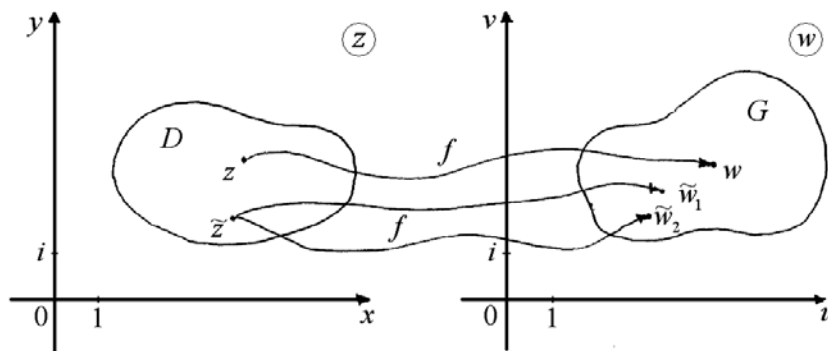
Пусть D – некоторое подмножество множества комплексных чисел C ($D \subset C$), в частности, D может совпадать со всем C .

Определение 1. Функцией комплексного переменного называется отображение f некоторого комплексного числового множества D в комплексное числовое множество G .

Если каждому $z \in D$ соответствует одно $w \in G$, то функция $w = f(z)$ называется *однозначной*. Если хотя бы одному $z \in D$ соответствует более одного w , то функция $w = f(z)$ называется *многозначной*.

Множество D называется *областью определения функции* $w = f(z)$, множество $G = \{w \in C \mid w = f(z), z \in D\}$ – её *множеством (областью) значений*.

Будем изображать значения аргумента z на комплексной плоскости Z , а значения функции $w = f(z)$ на комплексной плоскости W .



Геометрически функцию $w = f(z)$ можно понимать как *отображение множества D комплексной плоскости Z на множество G комплексной плоскости W* . При этом говорят, что множество G является *образом множества D при отображении f* и записывают: $G = f(D)$.

Пусть z_0 – произвольная фиксированная точка из D , тогда соответствующее значение $w_0 = f(z_0)$ называется *образом точки z_0 при отображении f* .

Если отображение f однозначное, то образ любой точки $z \in D$ состоит из одной точки. В случае многозначности отображения f образ хотя бы одной точки $z \in D$ состоит более чем из одной точки.

Пусть w_0 – произвольная фиксированная точка из G . *Прообразом точки w_0* при отображении f называется любая точка $z \in D$, которая отображается в точку w_0 : $f(z) = w_0$.

Пример 1. Рассмотрим функцию $w = z^2$, $z \in \mathbb{C}$. Эта функция является однозначной, так как каждому $z \in \mathbb{C}$ соответствует только одно значение $w = z^2$. Например, при $z_0 = 2 + 3i$ получаем $w_0 = (2 + 3i)^2 = 4 - 9 + 12i = -5 + 12i$.

Точка $w_0 = -5 + 12i$ является образом точки $z_0 = 2 + 3i$ при отображении $w = z^2$. Из формулы для извлечения корня натуральной степени из комплексного числа следует, что $\sqrt{w_0}$ имеет два значения: одно из них: $z_0 = 2 + 3i$; другим значением является $z_1 = -2 - 3i$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $w = \sqrt{z}$, $z \in \mathbb{C}$. Эта функция является многозначной, а именно двузначной. Заметим, что образом точки $z_0 = 0$ при отображении $w = \sqrt{z}$ является одна точка $w_0 = 0$. Среди однозначных функций комплексного переменного выделяют однолистные функции.

Определение 2. Функция $w = f(z)$ называется однолистной на множестве $D \subset \mathbb{C}$, если она взаимно однозначно отображает множество D на множество $G \subset \mathbb{W}$ (т.е. каждая точка $z \in D$ имеет единственный образ $w \in G$, и обратно, каждая точка $w \in G$ имеет единственный прообраз $z \in D$).

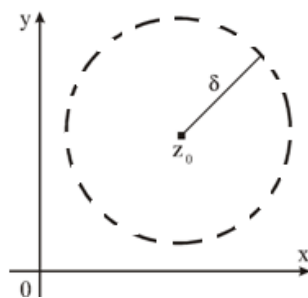
Отображение, осуществляемое однолистной функцией, называется однолистным (взаимно однозначным) отображением. В дальнейшем будем рассматривать только однозначные функции.

Пусть задана функция комплексного переменного $w = f(z)$. Представляя z и w в алгебраической форме: $z = x + iy$, $w = u + iv$, получаем, $u + iv = f(x + iy)$ т.е. $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Следовательно, функцию $w = f(z)$ можно представить в виде $w = u(x, y) + iv(x, y)$.

Вещественные функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ двух вещественных переменных x, y называются соответственно *действительной частью* и *мнимой частью функции* $w = f(z)$. Например, функцию $w = z^2$ можно записать в виде $w = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, т.е. $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.

Пусть однозначная функция определена в некоторой окрестности точки z_0 , исключая, может быть, саму точку z_0 .

Определение 3. Окрестностью точки z_0 плоскости комплексной переменной z называется всякая область, содержащая эту точку; δ -окрестностью точки z_0 называется множество всех точек z , лежащих внутри круга радиуса δ с центром в точке z_0 , т.е. множество всех точек z , удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$.



Геометрическая иллюстрация окрестности точки z_0

Определение 4. Комплексное число A называется пределом комплексной функции $f(z)$ в точке z_0 , (или при $z \rightarrow z_0$), если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ су-

существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое что для любого $z \in D$ из условия $0 < |z - z_0| < \delta$ следует, что $|f(z) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall z \in D : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Другими словами, для всех точек z из круга с центром z_0 и радиуса δ ($z \neq z_0$) точки функции $f(z)$ находятся в круге с центром A и радиуса ε .

Теорема (*признак существования предела функции комплексного переменного в точке*). Существование предела $A = \alpha + \beta i$ функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ равносильно существованию предела α её действительной части $u(x, y)$ и предела β её мнимой части $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0) .

Для функций комплексного переменного $f(z)$ и $g(z)$ справедливы следующие свойства:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \\ \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}; \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0. \end{aligned}$$

Определение. Функция $f(z)$ называется *бесконечно малой величиной* (б.м.в.) в точке z_0 (или при $z \rightarrow z_0$), если её предел в этой точке равен нулю: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$, т.е. по определению предела,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall z \in D : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| < \varepsilon.$$

Это условие означает, что $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0$. Таким образом, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0$.

Определение. Несобственное комплексное число ∞ называется *пределом функции* $f(z)$ в точке z_0 (или при $z \rightarrow z_0$), если для любого сколь угодно большого положительного числа E найдётся положительное число δ , определяемое в зависимости от взятого числа E , такое что для любого $z \in D$, не равного z_0 и отличного от z_0 по модулю на величину, меньшую δ , модуль соответствующего значения функции $f(z)$ больше взятого числа E .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists \delta = \delta(E) \mid \forall z \in D : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > E.$$

Такую функцию называют *бесконечно большой величиной* (б.б.в.) при $z \rightarrow z_0$. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$. Если $f(z)$ – б.м.в. в точке z_0 , то $1/f(z)$ – б.б.в. в этой точке (и обратно).

Определение. Функция $w = f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0 , если существует предел этой функции в точке z_0 , равный её значению в данной точке: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Пусть функция $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0 , т.е. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ или $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - f(z_0)| = 0$. Положим $\Delta z = z - z_0$, $\Delta w = w - w_0 = f(z) - f(z_0)$. Комплексное число Δz называется *приращением независимого переменного z в точке z_0* , а комплексное число Δw – *приращением функции $w = f(z)$ в точке z_0* , соответствующим приращению Δz . В этих обозначениях предыдущее равенство принимает вид $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0$ и определение непрерывности функции в точке можно сформулировать следующим образом.

Определение. Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 , если приращение Δw этой функции в данной точке, соответствующее приращению Δz независимого переменного z , является б.м.в. при $\Delta z \rightarrow 0$. Функция $w = f(z)$ называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Теорема (признак непрерывности функции комплексного переменного в точке). Непрерывность функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ равносильна непрерывности её действительной и мнимой частей в точке (x_0, y_0) .

Вопросы и задания:

1. Что называют комплексной переменной?
2. Что называют комплексной плоскостью?
3. Какое множество точек называют областью?
4. Что понимают под функцией комплексного переменного?
5. Чему равносильно задание функции комплексного переменного $f(z) = u + iv$?
6. Каково определение непрерывности функции в точке?
7. Что называют односвязной областью?
8. Как определяется показательная функция $w = e^z$? Каковы ее основные свойства?
9. Чему равен модуль показательной функции $w = e^z$?
10. Дайте определение логарифмической функции.
11. Запишите формулу для вычисления значений логарифмической функции.
12. Является ли однозначной логарифмическая функция на комплексной плоскости? Какая ветвь логарифмической функции называется главной?
13. Как определяется степенная функция $w = z^n$ $w = e^z$? Каковы ее основные свойства?
14. Как определяются тригонометрические функции комплексного аргумента $z = x + iy$?
15. Как определяются гиперболические функции комплексного аргумента $z = x + iy$?
16. Как определяются обратные тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента $z = x + iy$?
17. Вычислить значение функции $f(z)$ в указанной точке:
 - 1). $f(z) = z^2 + 3\bar{z} - 2i$, $z_0 = 1 - 3i$.
 - 2). $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$, $z_0 = -2 + i$.
 - 3). $f(z) = e^{\bar{z}}$, $z_0 = \ln 4 - 15\pi$.
18. Вычислить:
 - 1). e^{-3+2i} .
 - 2). $\cos(3+2i)$.
 - 3). $sh(1+i\pi/4)$.
 - 4). $Ln(2-3i)$.
 - 5). $(-1+i\sqrt{3})^{4i}$.
 - 6). $\text{Arc} \cos i$.
19. Найти действительную и мнимую часть заданной функции:
 - 1). $w = (1-i)^{3-3i}$.
 - 2). $w = sh z$.
 - 3). $w = tg(2-z)$.
 - 4). $w = ze^z$.
 - 5). $w = \cos(5-i)$.
 - 6). $w = \text{Arctg} \frac{i}{3}$.

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>

2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>

2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Тема 3. Дифференцирование функций комплексного переменного

Практическое занятие № 4

Критерий дифференцируемости в точке. Аналитические функции

Цель: освоить определение дифференцируемой, аналитической функций комплексного переменного, научиться находить область аналитичности функции комплексного переменного.

Знания и умения, приобретаемые обучающимися: нахождение производной функции комплексного переменного.

Актуальность темы: приобретение навыков к нахождению области аналитичности функции комплексного переменного, ее производной.

Теоретическая часть:

Определение 1. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой или моногенной в точке z_0 , если при любом достаточно малом $|\Delta z|$, её приращение в точке z_0 допускает представление

$$\Delta f(z_0) = A\Delta z + \eta\Delta z,$$

где число $A, A \neq \infty$, не зависит от $\Delta z, \eta \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$; A называется производной функции

$f(z)$ в точке z_0 и обозначается $f'(z_0), \frac{df(z_0)}{dz}, f'$.

Определение 1 эквивалентно следующему определению.

Определение 2. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой или моногенной в точке z_0 , если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = A.$$

Функция $f(z)$ называется дифференцируемой или моногенной в области $D \subset C_z(\overline{C}_z)$, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Дифференциалом $f(z)$ в точке z называется линейная относительно Δz часть $f'(z)\Delta z$ приращения $\Delta f(z)$ функции в точке z и обозначается $df(z)$:

$$df(z) = f'(z)\Delta z.$$

Теорема (Коши - Римана). Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z = x + iy$, определена в области $D, D \subset C_z$. Для дифференцируемости (моногенности) $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции двух вещественных переменных x, y и чтобы, кроме того, в этой точке выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1)$$

При этом производная $f'(z_0)$ может быть вычислена по одной из формул

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Замечание 1. Равенства (1) называют условиями Коши-Римана или условиями Даламбера-Эйлера.

Функция $f(z)$ называется *аналитической* в точке z_0 , если она дифференцируема в окрестности $\bigcup(z_0)$ этой точки и называется *аналитической в области*, если она аналитична в каждой точке этой области.

Примеры. Найти все точки, в которых дифференцируемы функции:

1) $f(z) = \operatorname{Re} z$.

Решение. $f(z) = \operatorname{Re} z = x, \Rightarrow u = x, v = 0$. Найдём частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Ответ: нигде не дифференцируема.

2) $f(z) = x^2 + iy^2, \quad z = x + iy$.

Решение. $u = x^2; v = y^2$.

Найдём частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y.$$

$$\begin{cases} x = y \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = x.$$

Ответ: функция дифференцируема на прямой $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$.

Вопросы и задания:

1. Дайте определение дифференцируемой (или моногенной) функции в точке z_0 .
2. Запишите условия Коши-Римана.
3. Сформулируйте теорему Коши-Римана.
4. Какая функция называется *аналитической* в точке, в области?
5. Может ли функция, аналитическая в области D , быть суммой (произведением) двух функций, не аналитических в этой области?
6. Доказать, что не существует аналитической функции, для которой функция $u = x^2 - y$ являлась бы действительной частью.
7. Для следующих функций определить область аналитичности. Найти производную, если она существует:

1). $w = z \cdot e^z$.

2). $w = e^{z^2}$.

3). $w = \frac{(3i + z)^2}{\bar{z}}$.

4). $w = z^2 \cdot \bar{z}$.

5). $w = \cos z$.

6). $w = \sin \frac{z}{3}$.

7). $w = |z| \operatorname{Im} z$.

8). $w = \bar{z} \cdot \operatorname{Re} z$.

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>

2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>

2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Практическое занятие № 5

Гармонические функции. Восстановление аналитической функции

Цель: освоить определение гармонической функции комплексного переменного, научиться восстанавливать аналитическую функцию комплексного переменного по известной ее действительной или мнимой части.

Знания и умения, приобретаемые обучающимися: использовать определение гармонической функции к восстановлению аналитической функции комплексного переменного.

Актуальность темы: приобретение навыков к решению задачи восстановления аналитической функции комплексного переменного.

Теоретическая часть:

Определение. Действительная функция $\varphi(x, y)$ называется *гармонической* в области в области D , если в области D существуют непрерывные частные производные первого и второго порядков функции $\varphi(x, y)$, удовлетворяющих условию:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \equiv 0.$$

Теорема. Если функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – аналитическая в области D , то ее действительная и мнимая части $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются гармоническими в области D функциями. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Две гармонические в области D функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие в этой области условиям Коши-Римана, называются сопряженными гармоническими функциями.

Область D называется *односвязной областью*, если для любого простого замкнутого контура, целиком лежащего в области D , ограниченная этим контуром область также целиком лежит в области D . *Простой контур* – это некоторой плоской области.

Теорема. Для всякой функции, гармонической в односвязной области, можно найти сопряженную с ней гармоническую функцию, определенную с точностью до постоянного слагаемого.

Эта теорема позволяет по действительной (мнимой) части аналитической функции восстановить саму функцию с точностью до мнимой (действительной) постоянной.

Пусть $f(z)$ – однолиственная голоморфная (аналитическая) в области $D \subset C_z$ функция. Пусть γ – проходящая через точку $z_0 \in D$ гладкая кривая Жордана с уравнением $z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta$, причём $z(t_0) = z_0, t_0 \in (\alpha, \beta)$ и $z'(t_0) \neq 0$ (так как γ – гладкая кривая в точке z_0).

Будем считать, что $f'(z_0) \neq 0$. Обозначим через Γ образ γ при отображении $w = f(z)$. Уравнение кривой Γ имеет вид

$$w = f(z(t)) = w(t), \alpha \leq t \leq \beta.$$

Кривая Γ – жорданова кривая (так как из условия $f'(z_0) \neq 0$ вытекает, что функция $f(z)$ однолистна в некоторой окрестности точки z_0), имеющая касательную в точке $w_0 = f(z_0)$. Последнее следует из равенства

$$w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0) \neq 0. \quad (1)$$

Из (1) получаем $\operatorname{Arg} w'(t_0) = \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg} z'(t_0)$, откуда имеем

$$\operatorname{Arg} f'(z_0) = \operatorname{Arg} w'(t_0) - \operatorname{Arg} z'(t_0). \quad (2)$$

Отсюда, учитывая, что $\operatorname{Arg} w'(t_0)$ и $\operatorname{Arg} z'(t_0)$ есть углы, образованные касательными к кривым Γ и γ в точках w_0 и z_0 соответственно, приходим к следующему выводу: аргумент вели-

чины $f'(z_0)$, т.е. $\text{Arg}f'(z_0)$, равен углу поворота кривой γ в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. В этом и выражается геометрический смысл аргумента производной комплексной функции комплексного переменного.

Рассмотрим наряду с γ ещё одну гладкую кривую Жордана γ_1 с уравнением $z = z_1(\tau), \alpha_1 \leq \tau \leq \beta_1$, проходящую через точку $z_0, z_1(\tau_0) = z_0, \tau_0 \in (\alpha_1, \beta_1)$. Обозначим через $\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, угол между кривыми γ и γ_1 в точке z_0 (т.е. угол между касательными к кривым γ и γ_1 в точке z_0), отсчитываемый от положительного направления кривой γ в точке z_0 против хода часовой стрелки до положительного направления кривой γ_1 в точке z_0 . Имеем

$$\varphi = \text{Arg}z'_1(\tau_0) - \text{Arg}z'(t_0). \quad (3)$$

Пусть Γ_1 - образ γ_1 при отображении $w = f(z)$. Обозначим $f(z_1(\tau)) = w_1(\tau)$. Дифференцируя это неравенство по τ , получаем $w'_1(\tau) = f'(z_1(\tau)) \cdot z'_1(\tau)$, откуда при $\tau = \tau_0$ с учётом, что $z_1(\tau_0) = z_0$, находим

$$\text{Arg}w'_1(\tau_0) = \text{Arg}f'(z_0) + \text{Arg}z'_1(\tau_0)$$

или

$$\text{Arg}f'(z_0) = \text{Arg}w'_1(\tau_0) - \text{Arg}z'_1(\tau_0). \quad (4)$$

Обозначим через $\psi, 0 \leq \psi \leq 2\pi$, угол между кривыми Γ и Γ_1 в точке $w_0 = f(z_0)$ отсчитываемый относительно направления кривой Γ в точке w_0 против хода часовой стрелки до положительного направления кривой Γ_1 в точке w_0 .

Имеем

$$\psi = \text{Arg}w'_1(\tau_0) - \text{Arg}w'(t) \quad (5)$$

Сопоставив равенства (2) и (4), находим

$$\text{Arg}w'_1(\tau_0) - \text{Arg}z'(t_0) = \text{Arg}w'_1(\tau_0) - \text{Arg}z'_1(\tau_0), \text{ т.е.}$$

$$\text{Arg}w'_1(\tau_0) - \text{Arg}w'(t_0) = \text{Arg}z'_1(\tau_0) - \text{Arg}z'(t_0).$$

Приняв к этому во внимание формулы (3) и (5), определяющие φ и ψ , замечаем, что $\varphi = \psi$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема. В каждой точке $z_0 \in C_z$, в которой $f'(z_0) \neq 0$, при отображении голоморфной (однолистной) в точке z_0 функцией $w = f(z)$ имеет место сохранение (консерватизм) углов как по величине, так и по направлению их отсчёта.

Выясним теперь геометрический смысл величины $|f'(z_0)|$. Замечаем, что при $z \neq z_0, z \in \gamma$,

величина $\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$ представляет собой коэффициент растяжения хорды дуги кривой γ с концами в точках z и z_0 при отображении $w = f(z)$.

Совершая предельный переход при $z \rightarrow z_0, z \in \gamma$, ввиду равенства

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}, \quad z \in \gamma, \quad (6)$$

получаем, что $|f'(z_0)|$ представляет собой коэффициент искажения масштаба вдоль кривой γ в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. Этот коэффициент одинаков для всех кривых, проходящих через точку z_0 , так как величина предела в правой части равенства (6) по определению производной $f'(z_0)$ не зависит от пути стремления точки z к z_0 . Теперь уместно дать понятие конформного отображения.

Определение. Непрерывное отображение области $D \subset C_z$, при котором в каждой точке $z_0 \in D$ имеет место консерватизм углов и независимость коэффициента искажения масштаба в точке от направления, называется *конформным*.

Теорема. *Отображение, осуществляемое голоморфной функцией (в частности, однолистной) является конформным в окрестности каждой точки z , в которой $f'(z) \neq 0$.*

Пример 1. Найти угол поворота и коэффициент линейного растяжения при отображении $w = z^2$ в точке $z_0 = i$.

Решение. $w'(z) = 2z$ (z – фиксирована). Найдём коэффициент линейного растяжения и угол поворота: $k = |w'(i)| = 2$; $\alpha = \arg 2 + \arg i = \frac{\pi}{2}$.

Пример 2. Найти множества всех тех точек z_0 , в которых коэффициент линейного растяжения при отображении $w = z^2$, равен единице.

Решение. Найдём коэффициент линейного растяжения и приравняем единице: $k = |w'(z)| = 2|z| = 1$. Отсюда $|z| = \frac{1}{2}$.

Пример 3. Найти множества всех тех точек z_0 , в которых угол поворота при отображении $w = \frac{i}{z}$, равен нулю:

Решение. Найдём угол поворота и приравняем нулю:
 $\alpha = -\frac{\pi}{2} - 2 \arg z = 0$; $2 \arg z = -\frac{\pi}{2}$. Отсюда $\arg z = -\frac{\pi}{4}$; $(-\pi < \arg z < \pi)$.

Вопросы и задания:

1. Какая функция называется однолистной?
 2. В чём состоит геометрический смысл аргумента производной однолистной аналитической функции?
 3. В чём состоит геометрический смысл модуля производной однолистной аналитической функции?
 4. Какое отображение называется конформным?
 5. Является ли конформным отображение, осуществляемое голоморфной однолистной?
 6. Какая функция называется гармонической?
 7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части:
- 1). $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$.
 - 2). $u = 3xy^2 - x^3$.
 - 3). $u = 2e^x \cos y$.
 - 4). $v = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$.
 - 5). $v = x^2 - y^2 - 1$.
 - 6). $v = \ln(x^2 - y^2) + x - 2y$.

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>

2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>

2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Тема 4. Интегрирование функций комплексного переменного

Практическое занятие № 6

Интегралы в комплексной области, их свойства

Цель: освоить понятие интеграла для функции комплексного переменного, изучить его основные свойства.

Знания и умения, приобретаемые обучающимися: вычисление интеграла для функции комплексного переменного по кривой через сведение к двум криволинейным интегралам второго рода от действительных функций действительных переменных.

Актуальность темы: приобретение навыков к вычислению интеграла от функции комплексного переменного по кривой.

Теоретическая часть:

Пусть на Γ задана комплексная дуга $f(z)$. Выберем на каждой дуге γ_k произвольно по одной точке $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ и рассмотрим сумму

$$S_\Gamma = S_\Gamma(f, T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k).$$

Эту сумму называют интегральной суммой, для функции $f(z)$ по кривой Γ , соответствующей ее разбиению T .

Определение. Функция $f(z)$ называется *интегрируемой по кривой Γ* , если существует число $I \in \mathbb{C}$, обладающее следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что при каждом разбиении T кривой Γ с диаметром $\alpha(T) < \delta$ выполняется неравенство: $|I - S_\Gamma(f, T)| < \varepsilon$.

Число I называется при этом *интегралом* от функции $f(z)$ вдоль кривой Γ и обозначается $\int_\Gamma f(z)dz$.

Теорема. Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, непрерывна на спрямляемой кривой Γ , причем справедливо равенство

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma udx - vdy + i \int_\Gamma vdx + udy, \quad (1)$$

где в правой части равенства (1) есть криволинейные интегралы (II-рода, по координатам).

Непосредственно по определению интеграла проверяются следующие свойства интегралов:

а) $\int_{-\Gamma} f(z)dz = - \int_\Gamma f(z)dz$;

б) $\int_\Gamma cf(z)dz = c \int_\Gamma f(z)dz$, $c = const$;

в) $\int_{\bigcup_{j=1}^m \Gamma_j} f(z)dz = \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} f(z)dz$.

Пусть Γ -гладкая кривая с уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt.$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} z^2 dz$, где Γ – радиус-вектор точки $z = 2 + i$.

Решение. Подынтегральная функция имеет вид

$$f(z) = z^2 = x^2 + i2xy - y^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Построим прямую $y = \frac{1}{2}x$. Воспользуемся формулой (1), получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z^2 dz &= \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{4} - 2x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) dx + i \int_0^2 \left[2x \cdot \frac{x}{2} + \left(x^2 - \frac{x^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} \right] dx = \\ &= \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \right) dx + i \int_0^2 \left(x^2 + \frac{3x^2}{8} \right) dx = \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx + i \int_0^2 \frac{11x^2}{8} dx = \frac{x^3}{12} \Big|_0^2 + i \frac{11}{8} \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \\ &= \frac{8}{12} + i \frac{11}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2}{3} + i \frac{11}{3} = \frac{1}{3}(2 + 11i). \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$, где Γ – окружность $|z| = r$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int_{\Gamma} \frac{dz}{z} &= \int_{\Gamma} \frac{dx + i dy}{x + iy} = \int_0^{2\pi} \frac{-r \sin \varphi + ir \cos \varphi}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{r(-\sin \varphi + i \cos \varphi)}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} d\varphi = i \int_0^{2\pi} d\varphi = i\varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i. \end{aligned}$$

Вопросы и задания:

1. Дайте определение интеграла по комплексному переменному.
2. Запишите формулу, устанавливающую связь между интегралом по комплексному переменному и криволинейными интегралами.

3. Перечислите основные свойства интеграла по комплексному переменному.

4. Запишите формулу для вычисления интеграла по гладкой кривой.

5. Вычислить интегралы:

1). $\int_L z \cdot \operatorname{Im} z^2 dz$, $L: |z| = 1, -\pi \leq \arg z \leq 0$

2). $\int_L z \cdot \operatorname{Re} z dz$, $L: |z| = 1$

3). $\int_L |z| dz$, L : отрезок, соединяющий $z_1 = -1, z_2 = 1$

4). $\int_L \operatorname{Im} z dz$, L : отрезок, соединяющий $z_1 = 0, z_2 = 1 + i$

5). $\int_L \operatorname{Im} z dz$, L : отрезок, соединяющий $z_1 = 0, z_2 = i$

$$6). \int_L (z^2 - 6i) dz, \quad L : \text{отрезок, соединяющий } z_1 = 1 + i, z_2 = 2i$$

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>
2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>
2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Практическое занятие № 7

Интегрирование аналитических функций

Цель: освоить теоремы Коши интегрирования аналитических функций комплексного переменного для случая односвязной и многосвязной областей.

Знания и умения, приобретаемые обучающимся: вычисление интеграла от аналитических функций комплексного переменного (односвязная, многосвязная области), использование формулы Ньютона-Лейбница.

Актуальность темы: приобретение навыков к вычислению интеграла от аналитической функции комплексного переменного.

Теоретическая часть:

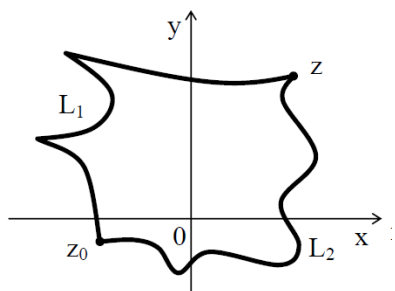
Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей. Область, обладающая свойством: какую бы замкнутую непрерывную кривую, лежащую в этой области, мы не взяли, множество точек, ограниченных этой кривой, также принадлежит данной области, называется *односвязной*.



Теорема Коши для односвязной области. Интеграл от аналитической функции в односвязной области по любому замкнутому контуру, лежащему внутри этой области, равен нулю:

$$\oint_L f(z) dz = 0.$$

Следствие. Для всех кусочно-гладких кривых, лежащих внутри области D , в которой аналитична функция $f(z)$, и имеющих общие начальную и конечную точки, интеграл $\int_L f(z) dz$ имеет одинаковое значение.



$$\int_{L_1} f(z) dz = \int_{L_2} f(z) dz$$

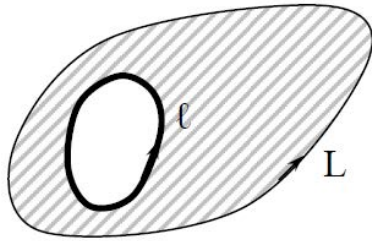
Справедлива и обратная *теорема Морера*: если функция $w = f(z)$ непрерывна в односвязной области D и интеграл по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру, лежащему в D , равен нулю, то функция аналитична в области D .

Теорема Коши для многосвязной области. Пусть D – многосвязная область, граница L которой состоит из внешнего контура L_0 и внутренних контуров $l_1, \dots, l_n$. Если функция $f(z)$ аналитична в области D , то

$$\int_{L_0^+} f(z) dz = \int_{l_1^+} f(z) dz + \dots + \int_{l_n^+} f(z) dz$$

(контуры при интегрировании обходятся в одном направлении положительном (против часовой стрелки) или отрицательном).

Следствие. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и L, l – лежащие в этой области контуры, ограничивающие кольцообразную область D . Тогда интегралы по контурам L и l равны:



$$\int_{L^+} f(z) dz = \int_{l^+} f(z) dz$$

Формула Ньютона-Лейбница. Пусть функция $f(z)$ задана в области D .

Определение. Функцию $F(z)$, заданную в области D , назовем первообразной для функции $f(z)$, если для всех $z \in D$ выполняется равенство:

$$F'(z) = f(z).$$

Из теоремы Коши вытекает следующая важная теорема:

Теорема. Пусть функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема в односвязной области D . Тогда в этой области существует первообразная $F(z)$ для функции $f(z)$.

Определение. Совокупность всех первообразных функций $f(z)$ называют неопределенным интегралом от функции $f(z)$:

$$\int f(z) dz = F(z) + C, \quad \text{где} \quad F'(z) = f(z).$$

Для аналитической функции комплексного переменного справедлив аналог формулы Ньютона-Лейбница, и основные приёмы интегрирования (замена переменного и интегрирования по частям)

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0) = F(z) \Big|_{z_0}^{z_1}.$$

Вопросы и задания:

1. Сформулируйте теорему Коши для односвязной области.
2. Сформулируйте теорему Коши для многосвязной области.
3. Дайте определение первообразной функции.
4. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
5. Запишите формулу интегрирования по частям для функции комплексного переменного.
6. Какой общий вид имеют первообразные для голоморфной функции?
7. Вычислить интегралы:

1). $\int_0^{i+1} z^3 dz$

2). $\int_1^i z \cdot e^z dz$

$$3). \int_{1+i}^{-1-i} (2z+1) dz$$

$$4). \int_0^{i+1} z \cos z dz$$

$$5). \int_0^i (z-i)e^{-z} dz$$

$$6). \int_i^1 z^2 \cos z dz$$

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>

2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>

2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Практическое занятие № 8

Интегральная формула Коши

Цель: научиться применять интегральную формулу Коши для вычисления интегралов от функций комплексного переменного.

Знания и умения, приобретаемые обучающимися: использование интегральной формулы Коши для вычисления интегралов от функций комплексного переменного.

Актуальность темы: приобретение навыков к решению задач, связанных с интегрированием функций комплексного переменного.

Теоретическая часть:

Теорема (интегральная формула Коши). Пусть $f(z)$ -голоморфная функция в ограниченной области $D \subset C_z$ и Γ -замкнутая спрямляемая жорданова кривая, принадлежащая D вместе со своей внутренностью G . Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta, \quad \forall z_0 \in G.$$

Теорема (о бесконечной дифференцируемости голоморфной функции). Если функция $f(z)$ голоморфна в области $D \subset C_z$, то $f(z)$ имеет в D производные любого порядка, причем

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad (n \in N),$$

где Γ -любая спрямляемая замкнутая Жорданова кривая, лежащая вместе со своей внутренностью G в D , и z -любая точка G .

Пример. Вычислить интегралы:

$$1) \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz.$$

Решение.

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz = \int_{\Gamma_1} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz$$

$$\int_{\Gamma_1} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)} dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^z}{z+1} \right)_{z=1} = 2\pi i \cdot \frac{e}{2} = \pi i e.$$

$$\int_{\Gamma_2} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)} dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^z}{z-1} \right)_{z=-1} = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{-2} = -\pi i e^{-1}.$$

$$\text{Итак, } \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz = \pi i e - \pi i e^{-1} = \pi i (e - e^{-1}).$$

$$2) \int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz.$$

Решение. Вычислим интеграл

$$\int_{|z-i|=1} \frac{\cos z dz}{(z-i)^3} = \frac{2\pi i}{2!} (\cos z)''_{z=i} = -\pi i \cos i = -\pi i \operatorname{ch} 1.$$

Определение. Функция $\Phi(z)$ называется *первообразной* для данной функции $f(z)$ в области D , если $\Phi(z) = f(z)$ всюду в D . Согласно теореме о голоморфности интеграла как функции верхнего предела для любой голоморфной функции в односвязной области D функции $f(z)$ существует первообразная функция, причем одной из первообразных является функция

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(t) dt, \quad z_0 \in D, z \in D.$$

Теорема. *Общий вид первообразной для голоморфной в односвязной области D функции $f(z)$ выражается формулой*

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(t) dt + C, \quad C = \text{const}, \quad z_0, z \in D.$$

Теорема. *Если $f(z)$ есть голоморфная в односвязной области функция, то*

$$\int_{z_0}^z f(t) dt = \Phi(z) - \Phi(z_0), \quad z_0, z \in D, \quad (1)$$

где $\Phi(z)$ -любая первообразная функции $f(z)$ в D .

Вопросы и задания:

1. Сформулируйте интегральную теорему Коши.
2. Запишите интегральную формулу Коши.
3. Запишите формулу для n -ой производной голоморфной функции.
4. Дайте определение первообразной функции.
5. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
6. Какой общий вид имеют первообразные для голоморфной функции?
7. Вычислить следующие интегралы, используя интегральную формулу Коши:

$$1). \int_{L^+} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz, \quad L: |z-2|=5$$

$$2). \int_{L^+} \frac{z}{(z-2)^3(z+4)} dz, \quad L: |z|=2$$

$$3). \int_{L^+} \frac{\operatorname{tg} z}{z \cdot e^{\frac{1}{z+2}}} dz, \quad L: |z|=1$$

$$4). \int_{L^+} \frac{e^{iz} z}{z^2 + 1} dz, \quad L: |z-i|=1$$

$$5). \int_{L^+} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z^2 + 2z - 3} dz, \quad L: |z-1|=2$$

$$6). \int_{L^+} \frac{\sin iz}{z^2 - 4z + 3} dz, \quad L: |z|=2$$

$$7). \int_{L^+} \frac{1}{(z-2)^2} dz, \quad L: |z-3|=2$$

$$8). \int_{L^+} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz, \quad L: |z|=1$$

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>

2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>

2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Тема 5 Числовые и функциональные комплексные ряды

Практическое занятие № 9

Числовые ряды в комплексной плоскости

Цель: освоить основные понятия и определения о числовых рядах с комплексными членами, необходимый и достаточные признаки исследования их сходимости.

Знания и умения, приобретаемые обучающимся: исследование сходимости числовых рядов с комплексными членами (признак сравнения, предельный признак сравнения, признак Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши).

Актуальность темы: приобретение навыков к исследованию сходимости числовых рядов с комплексными членами.

Теоретическая часть:

Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots, \quad (1)$$

где $z_n = x_n + iy_n$ – комплексные числа, называется числовым комплексным рядом (рядом в комплексной области).

Числовые ряды с комплексными членами обладают свойствами аналогичными многим свойствам числовых рядов с действительными членами.

Частичные суммы ряда:

$$S_1 = z_1; \quad S_2 = z_1 + z_2; \quad \dots; \quad S_n = z_1 + \dots + z_n; \quad \dots$$

образуют числовую комплексную последовательность $\{S_n\}$.

Определение 1. Ряд (1) называется сходящимся, если соответствующая ему последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ сходится, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S. \quad (2)$$

Число S называется суммой данного ряда. Если предел (2) не существует или бесконечен, то ряд (1) называется *расходящимся*.

Теорема 1. Для того, чтобы ряд (1) был сходящимся и чтобы его суммой было число $S = S' + iS''$ необходимо и достаточно, чтобы числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ были сходящимися и чтобы их суммами были соответственно S', S'' . При этом $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n = S' + iS'' = S$.

С помощью этой теоремы многие важные свойства и утверждения, справедливые для рядов с действительными членами, сразу переносятся на ряды с комплексными членами. Перечислим некоторые из этих свойств:

1°. *Необходимый признак сходимости.* Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ (Обратное

утверждение неверно: из того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$, не следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится).

Отсюда следует, что если общий член ряда (1) не стремится к нулю, то ряд расходится (*достаточное условие расходимости*).

2°. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ с комплексными членами сходятся и их суммы равны S и Q соответственно. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n)$ тоже сходится и его сумма равна $S \pm Q$.

3°. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится и его сумма равна S . Тогда при любом комплексном l ряд $\sum_{n=1}^{\infty} l z_n$ тоже сходится и его сумма равна lS .

4°. Если отбросить или добавить к сходящемуся ряду конечное число членов, то получится также сходящийся ряд.

Наряду с рядом (1) рассмотрим ряд, составленный из модулей его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots, \quad (3)$$

который является числовым рядом с действительными членами.

Теорема 2. Если сходится ряд (3), то сходится и ряд (1), который в этом случае называется *абсолютно сходящимся*.

Сходящиеся, но не абсолютно ряды называются *условно сходящимися*.

Замечание 1. Если ряды сходятся абсолютно, то при любой перестановке его членов новый ряд так же будет абсолютно сходящимся, причем к той же сумме.

Замечание 2. Исследование сходимости ряда (3) как положительного числового ряда можно проводить с помощью известных достаточных признаков Даламбера, Коши и т.д.:

1) Признак Даламбера. Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при $l < 1$ – ряд сходится, а при $l > 1$ – расходится.

2) Признак Коши. Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то при $l < 1$ – ряд сходится, а при $l > 1$ – расходится.

3) Предельный признак сравнения. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – ряды с положительными членами и существует конечный предел отношения их общих членов: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$, то ряды сходятся или расходятся одновременно. (В качестве эталонного ряда часто берут обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, который при $\alpha > 1$ – сходится, а при $\alpha \leq 1$ – расходится).

Вопросы и задания:

1. Дать понятие числового ряда с комплексными числами.
2. Какой ряд называется сходящимся (расходящимся)?
3. Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда с комплексными числами.
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условие сходимости числового ряда с комплексными числами.
5. Перечислите основные свойства сходящихся рядов.

6. Дать понятие абсолютно сходящегося числового ряда с комплексными числами. Перечислите их основные свойства.

7. Исследовать на сходимость следующие числовые ряды:

1). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}$

2). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}}$

3). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$

4). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+i}$

5). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$

6). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>

2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>

2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Практическое занятие № 10

Степенные комплексные ряды

Цель: научиться исследовать функциональные и степенные ряды с комплексными членами, находить область их сходимости.

Знания и умения, приобретаемые обучающимся: исследование сходимости степенных рядов с комплексными членами (теорема Абеля, формула Коши - Адамара).

Актуальность темы: приобретение навыков к исследованию сходимости степенных рядов с комплексными членами.

Теоретическая часть:

Рассмотрим ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots, \quad (4)$$

где $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$ – функции комплексного переменного z , определенные в некоторой области D .

Ряд (4) называется *функциональным рядом*. При фиксированном значении $z = z_0$ ряд (4) превращается в числовой ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0) = f_1(z_0) + f_2(z_0) + \dots + f_n(z_0) + \dots \quad (5)$$

Определение 2. Функциональный ряд (4) называется сходящимся в точке $z_0 \in D$, если сходится соответствующий ему числовой ряд (5). Точка z_0 называется точкой сходимости ряда (4). В противном случае ряд называется расходящимся в точке z_0 .

Предположим, что ряд (4) сходится во всех точках некоторой области G , $G \subset D$. Тогда говорят, что ряд (4) сходится в области G , а сама область G называется областью сходимости ряда.

Каждой точке $z \in G$ соответствует определенное значение суммы ряда (4), т.е. в области G определена функция $S(z)$, которая называется суммой ряда (4).

Рассмотрим частичные суммы ряда (4)

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z),$$

которые образуют функциональную последовательность $\{S_n(z)\}$. Сходимость ряда (4) в области означает существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z). \quad (6)$$

Равенство (6) означает, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon, z): \quad n > N \Rightarrow |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon.$$

Определение 3. Функциональный ряд (4) называется равномерно сходящимся в области G , если последовательность его частичных сумм сходится в G равномерно, т.е. если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n > N \Rightarrow |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon \text{ для всех } z \in G.$$

Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости). Если все члены ряда (4) области D удовлетворяют условию $|f_n(z)| \leq a_n$, где a_n – действительные положительные числа, и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то данный ряд (4) сходится равномерно (и при этом абсолютно) в области D .

Равномерно сходящиеся ряды обладают весьма важными свойствами:

1) Если члены функционального ряда (4) непрерывны в некоторой области D и ряд равномерно сходится в этой области к функции $S(z)$, то $S(z)$ также непрерывна в D .

2) Если функции $f_n(z)$ являются аналитическими в некоторой области D , а ряд (4) равномерно сходится в любой замкнутой подобласти $\bar{G}$ области D к функции $S(z)$, то $S(z)$ является аналитической функцией в области, при этом

$$f_1^{(k)}(z) + f_2^{(k)}(z) + \dots = S^{(k)}(z),$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно в $\bar{G}$.

Пример 1. Найти радиуссходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$.

Решение. Найдём радиуссходимости $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$; $R = 3$.

Пример 2. Найти кругсходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$.

Решение. Найдём радиуссходимости по формуле Коши-Адамара

$$R = \frac{1}{l}, \quad l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n} = 2, \quad \Rightarrow R = \frac{1}{2} \Rightarrow |z| < \frac{1}{2}.$$

Вопросы и задания:

- Какой функциональный ряд называется степенным рядом?
- Сформулируйте теорему Абеля.
- Каким может быть множество сходимости степенного ряда?
- Запишите формулу Коши-Адамара для определения радиуса сходимости степенного ряда.
- Найти радиус сходимости степенного ряда:

1). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$

2). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n!}$

3). $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(in) \cdot z^n$

4). $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot z^n$

5). $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi i}{n} z^n$

6). $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i} \right)^n$

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>

2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>

2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Тема 6.Ряды Тейлора Лорана

Практическое занятие № 11

Ряды Тейлора

Цель: научиться решать задачи комплексного анализа, связанные с разложением функции в ряд Тейлора.

Знания и умения, приобретаемые обучающимися: научиться раскладывать функции комплексного переменного в ряд Тейлора в окрестности указанной точки (в круге) по заданным степеням; использовать разложения элементарных функций.

Актуальность темы: приобретение навыков к разложению функций комплексного переменного в ряд Тейлора.

Теоретическая часть:

Определение. Пусть функция $f(z)$ имеет производные любого порядка (бесконечно дифференцируема) в некоторой точке $z_0 \in C_z$. Рядом Тейлора функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Общая постановка задачи разложения функции в ряд Тейлора в комплексной области формулируется так же, как и в действительной области: для данной функции $f(z)$ аналитической в области D требуется найти ряд Тейлора, сходящийся к $f(z)$ в некотором круге. Эта задача решается с помощью следующей теоремы.

Теорема (о разложении голоморфной функции в степенной ряд; Тейлор). Голоморфная в области $D \subset C_z$ функция $f(z)$ в окрестности каждой точки $z_0 \in D$ представима в виде суммы степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (1)$$

сходящегося в круге $\cup (z_0, d) = \{z : |z - z_0| < d\}$ с радиусом d , равным расстоянию от точки z_0 до границы ∂D области D . Коэффициенты a_n ряда (1) выражаются формулами

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

где γ_ρ - произвольная окружность $\{\zeta : |\zeta - z_0| = \rho\}$, $0 < \rho < d$.

Пример. Разложить рациональную функцию $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot z^n, \quad |z| < 2.$$

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)(z-2)} &= \frac{1}{3} \left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \right) = -\frac{1}{3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \right) = \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n \right) \cdot z^n, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n \right] \cdot z^n, \quad |z| < 1.$$

Вопросы и задания:

1. Дайте определение ряда Тейлора.
 2. Сформулируйте теорему Тейлора о разложении голоморфной функции в степенной ряд.
 3. Всегда ли на границе круга сходимости ряд Тейлора данной функции, имеются особые точки функции?
 4. Приведите алгоритм разложения рациональной функции в ряд Тейлора.
 5. Следующие функции разложить в ряд Тейлора и указать область их сходимости:
- 1). $f(z) = \ln(3 - 2z - z^2)$ по степеням z .
 - 2). $f(z) = \frac{z}{z^2 + 3}$ по степеням z .
 - 3). $f(z) = \cos z$ по степеням $z - \frac{\pi}{4}$.
 - 4). $f(z) = \frac{z+1}{z^2 + 4z - 5}$ по степеням z .

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>
2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>
2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Практическое занятие № 12

Ряды Лорана

Цель: научиться решать задачи комплексного анализа, связанные с разложением функции в ряд Лорана.

Знания и умения, приобретаемые обучающимися: научиться раскладывать функции комплексного переменного в ряд Лорана в окрестности указанной точки (в кольце) по заданным степеням; использовать разложения элементарных функций.

Актуальность темы: приобретение навыков к разложению функций комплексного переменного в ряд Лорана.

Теоретическая часть:

Ряды Тейлора приспособлены для представления голоморфных функций в круге. Теперь мы рассмотрим более общие ряды по положительным и отрицательным степеням $(z - a)$. Такие ряды представляют голоморфные функции в концентрических кольцах $V = \{z \in C_z : r < |z - a| < R\}$, $r \geq 0, R \leq \infty$.

Особенно важны разложения в кольцах с нулевым внутренним радиусом ($r = 0$), т.е. в проколотых окрестностях точек, где функции теряют голоморфность (особых точек).

Теорема (Лорана). Любую функцию $f(z)$, голоморфную в кольце $V = \{r < |z - a| < R\}$, можно в этом кольце представить как сумму сходящегося ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (1)$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (2)$$

где $r < \rho < R$.

Определение. Ряд (1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (2), называется *рядом Лорана* функции $f(z)$ в кольце V . Совокупность членов этого ряда с неотрицательными степенями $(z - a)$ называется *правильной частью*, а совокупность членов с отрицательными степенями $(z - a)$ называется *главной частью*:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=-1}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Пример. Найти множества точек z , в которых сходится ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$.

Решение. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$. Найдём радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 1}{3^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{n+1}}\right)}{3^n \cdot \left(1 + \frac{1}{3^n}\right)} = 3, \quad R = 3 \quad |z| < 3.$$

Исследуем на сходимость ряд:

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1} = \left| \begin{matrix} m = -n \\ n = -m \end{matrix} \right| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{-m}}{3^{-m} + 1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3^m}{1 + 3^m} \cdot \frac{1}{z^m} = \left| \frac{1}{z} = w \right| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3^m}{1 + 3^m} \cdot w^m.$$

Найдём радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^m \cdot (1 + 3^{m+1})}{3^{m+1} \cdot (1 + 3^m)} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{m+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{m+1}}\right)}{3^m \cdot \left(1 + \frac{1}{3^m}\right)} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1, \quad |w| < 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| < 1 \Rightarrow |z| > 1.$$

Ответ: данный ряд Лорана сходится в кольце $1 < |z| < 3$.

Выписанные в теореме Лорана формулы для коэффициентов ряда Лорана мало удобны для их вычисления. На практике, как и в случае рядов Тейлора, часто применяют различные искусственные приёмы. При этом используется тот факт, что разложение в ряд Лорана функции, в данном кольце, является единственным. При разложении рациональных дробей, как и в случае рядов Тейлора, выделяется целая часть неправильной дроби, а правильная записывается в виде суммы элементарных дробей, для разложения которых используется формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Разложение других элементарных функций часто сводится к разложению в ряд Тейлора с последующим использованием известных разложений:

$$\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + \dots + w^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \quad |w| < 1;$$

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n = 1 - w + w^2 - \dots, \quad |w| < 1;$$

$$\sin w = w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \frac{w^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos w = 1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} - \frac{w^6}{6!} + \frac{w^8}{8!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{w^{2n}}{(2n)!};$$

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}.$$

Пример 1. Разложить функцию $f(z) = z^3 \cdot e^{1/z}$ в ряд Лорана в кольце $0 < |z| < \infty$.

$$\text{Решение. } z^3 \cdot e^{1/z} = z^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = z^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n \cdot n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n-3} \cdot n!}.$$

Пример 2. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{(z-i)(z+3)}$ в ряд Лорана в кольце $1 < |z| < 3$.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z \left(1 - \frac{i}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}}; \quad |z| > 1.$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3 \left(1 + \frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n \cdot (-1)^n; \quad |z| < 3.$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{z}{(z-i)(z+3)} = \frac{z}{3+i} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^n}{3^{n+1}} \right).$$

Вопросы и задания:

1. Какой функциональный ряд называется рядом Лорана?
2. Сформулируйте теорему Лорана.
3. Каким может быть множество точек сходимости ряда Лорана?
4. Выделите в ряде Лорана правильную и главную части.
5. Может ли в условиях теоремы Лорана кольцо вырождаться в круг или в круг с выколотым центром?
6. Существуют ли функции, ряд Лорана которых сходится на всей комплексной плоскости с выколотой точкой ∞ ?
7. Приведите пример функции, в разложении которой отсутствует правильная часть ряда Лорана.
8. Разложить функцию $f(z) = z^4 \cdot \cos \frac{1}{z}$ в ряд Лорана в точке $z_0 = 0$.
9. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ в ряд Лорана в точке $z_0 = 0, 0 < |z| < 1$.
10. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ в ряд Лорана в точке $z_0 = 1, 2 < |z-1| < \infty$.
11. Разложить функцию $f(z) = \frac{z^4}{(z-2)^2}$ в ряд Лорана в точке $z_0 = 2$.
12. Разложить функцию в ряд Лорана $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 8}$, $1 < |z+2| < 4$ в указанном кольце.

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>

2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>

2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Тема 7. Нули функции. Изолированные особые точки

Практическое занятие № 13

Нули аналитической функции

Цель: научиться находить нули аналитической функции, определять их порядок.

Знания и умения, приобретаемые обучающимся: способность к нахождению нулей аналитической функций комплексного переменного и определения их порядка.

Актуальность темы: приобретение навыков нахождения нулей аналитической функций комплексного переменного и определения их порядка.

Теоретическая часть:

Определение 1. Точка z_0 называется нулём порядка k (или кратности k) аналитической функции $f(z)$, если выполняются условия

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Если $k = 1$, то z_0 называется простым нулём.

Пример 1. Пусть $f(z) = \sin z - z + \frac{z^3}{6}$. Точка $z_0 = 0$ – нуль этой функции, так как $f(0) = 0$. Найдём порядок нуля:

$$f'(z) = \cos z - 1 + \frac{z^2}{2}; \quad f'(0) = 0;$$

$$f''(z) = -\sin z + z; \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(z) = -\cos z + 1; \quad f'''(0) = 0;$$

$$f^{(4)}(z) = \sin z; \quad f^{(4)}(0) = 0;$$

$$f^{(5)}(z) = \cos z; \quad f^{(5)}(0) = 1 \neq 0.$$

Первая отличная от нуля производная функции в точке $z_0 = 0$ – пятая, поэтому эта точка – нуль пятого порядка функции $f(z) = \sin z - z + \frac{z^3}{6}$.

Теорема. Для того, чтобы аналитическая в точке z_0 функция $f(z)$ имела в этой точке нуль k -го порядка, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности этой точки функция $f(z)$ представлялась в виде

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot \varphi(z), \quad (1)$$

где $\varphi(z)$ – аналитическая в точке z_0 функция, и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Вопросы и задания:

1. Что называют простым нулем функции $f(z)$?
2. Что называют нулем порядка k функции $f(z)$?

3. Каково необходимое и достаточное условие того, что точка является нулем функции $f(z)$?

4. Найти нули следующих функций и определить их тип:

1). $f(z) = (z^2 - 4)^3 \cdot e^z$

2). $f(z) = (z^2 + 9)^2$

3). $f(z) = z \cdot \sin z$

4). $f(z) = 1 - e^z$

5). $f(z) = \frac{\sin^3 z}{z}$

6). $f(z) = z^4 + 4z^2$

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>

2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>

2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Практическое занятие № 14

Изолированные особые точки функции

Цель: научиться находить особые точки для функции комплексного переменного, выполнять их классификацию.

Знания и умения, приобретаемые обучающимися: способность к нахождению особых точек функции комплексного переменного и определению их типа.

Актуальность темы: приобретение навыков нахождения особых точек функции комплексного переменного и определения их типа.

Теоретическая часть:

Определение 1. Точка $a \in \overline{C}$ называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует такая проколотая окрестность этой точки (т.е. множество $\{0 < |z - a| < R\}$, если точка a конечна, или множество $\{R < |z| < \infty\}$, если $a = \infty$), в которой функция $f(z)$ голоморфна.

В зависимости от поведения $f(z)$ при приближении к такой точке различают три типа особых точек.

Определение 2. Изолированная особая точка a функции $f(z)$ называется

(I) *устранимой* точкой, если существует конечный

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \neq \infty;$$

(II) *полюсом*, если существует

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty;$$

(III) *существенно особой* точкой, если $f(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z \rightarrow a$.

Теорема. *Изолированная особая точка $a \in C$ функции $f(z)$ является устранимой в том и только в том случае, если лорановское разложение $f(z)$ в окрестности a не содержит главной части:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Теорема. *Изолированная особая точка $a \in C$ функции $f(z)$ является полюсом в том и только в том случае, если главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки a содержит лишь конечное (и положительное) число отличных от нуля членов:*

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z - a)^n = \frac{c_{-N}}{(z - a)^N} + \frac{c_{-N+1}}{(z - a)^{N-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, c_{-N} \neq 0. \quad (1)$$

Определение 3. Номер N старшего члена главной части лорановского разложения (1) функции $f(z)$ в проколотой окрестности полюса называется *порядком полюса*.

Теорема. *Изолированная особая точка a функции $f(z)$ является существенно особой в том и только в том случае, если главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки a содержит бесконечно много отличных от нуля членов.*

Вопросы и задания:

1. Дайте определение изолированной особой точки аналитической функции.

2. Какая изолированная особая точка называется устранимой точкой, полюсом, существенно-особой точкой?
3. Запишите разложение функции в ряд Лорана в окрестности полюса.
4. Запишите разложение функции в ряд Лорана в окрестности существенно-особой точкой.
5. Найти особые точки следующих функций и определить их тип:

- | | |
|--|---|
| 1). $f(z) = \frac{\cos z}{(z^2 - \pi^2)^3}.$ | 2). $f(z) = \frac{1}{e^z - 2}.$ |
| 3). $f(z) = \frac{1}{1 - \sin z}.$ | 4). $f(z) = e^{\frac{1}{z+2}}.$ |
| 5). $f(z) = \operatorname{tg}^2 z.$ | 6). $f(z) = \operatorname{tg} \frac{1}{z-1}.$ |

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>
2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>
2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Тема 8. Элементы теории вычетов

Практическое занятие № 15

Вычет аналитической функции в особой точке

Цель: научиться находить вычеты аналитической функции комплексного переменного в конечных особых точках, использовать теорему о вычетах к решению интегралов.

Знания и умения, приобретаемые обучающимися: умение находить вычеты аналитической функции комплексного переменного, вычислять интегралы с помощью вычетов.

Актуальность темы: приобретение знаний в области интегрирования функций комплексного переменного с использованием теории вычетов.

Теоретическая часть:

Определение. Вычетом функции $f(z)$ в конечной точке a называется величина $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz$,

где γ_ρ - окружность с центром в точке a достаточно малого радиуса ρ (столь малого, чтобы внутри окружности γ_ρ не было других особых точек $f(z)$, кроме a).

Вычет обозначается одним из следующих символов: $\operatorname{res}_{z=a} f(z)$, $\operatorname{Res}_{z=a} f(z)$, $[f(z); a]$. Мы будем писать $\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz$.

Теорема (Коши, о вычетах или основная теорема о вычетах). Пусть функция $f(z)$ голоморфна всюду в области D , за исключением не более чем счетного множества изолированных особых точек. И пусть область G , лежащая в D вместе со своей границей ∂G , не содержащей особых точек, тогда

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a_v \in G} \operatorname{Res}_{z=a_v} f(z),$$

где a_v - особые точки $f(z)$, лежащие в G (их конечное число).

Вопросы и задания:

1. Дайте определение вычета в конечной изолированной особой точке.
2. Сформулируйте теорему Коши о вычетах.
3. Чему равен вычет функции в устранимой особой точке?
4. Дайте определение вычета в бесконечности.
5. Сформулируйте теорему о полной сумме вычетов.
6. Найти вычеты в особых точках функций:

$$1). f(z) = \frac{z}{(z^2 + 16)^2}. \quad 2). f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z - 1)}.$$

$$3). f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2 + 9)}. \quad 4). f(z) = \sin \frac{1}{z}.$$

$$5). f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)^2}. \quad 6). f(z) = \frac{\sin 2z}{(z + 1)^4}.$$

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>

2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>

2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Практическое занятие № 16

Вычет функции в бесконечно удаленной особой точке. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов

Цель: научиться находить вычеты аналитической функции в бесконечно удаленной особой точке, применять теорию вычетов к вычислению определенных интегралов.

Знания и умения, приобретаемые обучающимся: умение находить вычеты аналитической функции комплексного переменного во всех особых точках, вычислять интегралы от функций действительного переменного с помощью теории вычетов.

Актуальность темы: приобретение знаний в области интегрирования функций действительного переменного с использованием теории вычетов.

Теоретическая часть:

Теорема. Вычет функции f изолированной особой точке $a \in \mathbb{C}$ равен коэффициенту при $z - a$ в её лорановском разложении в окрестности a :

$$\operatorname{res}_a f(z) = c_{-1}.$$

Определение. Пусть функция f имеет бесконечность своей изолированной особой точкой; её вычетом в бесконечности называется величина

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} f(z) dz,$$

где γ_R^- - окружность $\{|z| = R\}$ достаточно большого радиуса, проходимая по часовой стрелке.

Теорема (о полной сумме вычетов). Пусть функция f голоморфна всюду в плоскости $\mathbb{C}_z$, за исключением конечного числа точек a_ν ($\nu = 1, \dots, n$); тогда сумма её вычетов во всех конечных особых точках и вычета в бесконечности равна нулю:

$$\sum_{\nu=1}^n \operatorname{res}_{a_\nu} f(z) + \operatorname{res}_\infty f(z) = 0.$$

Пример. Вычислить вычеты функции $f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^3 - z}$ относительно каждой из их особых точек.

Решение. Преобразуем функцию

$$f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^3 - z} = \frac{z^2 + z - 1}{z(z-1)(z+1)}.$$

Воспользуемся формулой

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z).$$

Имеем

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{z^2 + z - 1}{z(z-1)(z+1)} = \frac{-1}{-1} = 1;$$

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{z^2 + z - 1}{z(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \cdot \frac{z^2 + z - 1}{z(z-1)(z+1)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{Res} f(z) = 1; \operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{2}; \operatorname{Res} f(z) = -\frac{1}{2}.$$

Вычеты позволяют вычислять не только интегралы от функций комплексного переменного, но и интегралы от функций действительного аргумента. Рассмотрим некоторые их типы.

I. Интегралы вида $I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$, где R – рациональная функция, вычисляются с по-

мощью замены $z = e^{ix}$. Их в некоторых случаях удастся преобразовать в интеграл по замкнутому контуру от функций комплексного переменного, к которому применима теорема о вычетах.

II. Пусть функция $f(z)$ есть функция аналитическая всюду в верхней полуплоскости, включая действительную ось, за исключением конечного числа особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n$, лежащих в верхней полуплоскости. Кроме того, бесконечно удаленная точка есть нуль не ниже второго порядка для функции $f(z)$, т. е. $f(\infty) = 0, f'(\infty) = 0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z).$$

III. Если функция $f(z) = e^{itz} \cdot F(z)$ ($t > 0$), причем $F(z)$ аналитична всюду в верхней полуплоскости, включая действительную ось, за исключением конечного числа особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n$, лежащих в верхней полуплоскости, кроме того, бесконечно удаленная точка является нулем функции $F(z)$, т. е. $F(\infty) = 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z).$$

Вопросы и задания:

1. Дайте определение вычета в конечной изолированной особой точке.
2. Сформулируйте теорему Коши о вычетах.
3. Чему равен вычет функции в устранимой особой точке?
4. Дайте определение вычета в бесконечности.
5. Сформулируйте теорему о полной сумме вычетов.
6. Как теория вычетов позволяет вычислять интегралы от функций действительного аргумента?
7. Привести примеры определенных интегралов, вычисляемых с помощью вычетов.
8. Вычислить следующие интегралы (применить теорему о вычетах):

$$1). \int_{|z|=2} \frac{\sin z dz}{(z+1)^3}$$

$$2). \int_{|z|=2} \frac{z dz}{1-2\sin^2 z}$$

$$3). \int_{|z|=2} z \cdot \operatorname{tg} \pi z dz$$

$$4). \int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1}$$

$$5). \int_{|z|=3/2} \frac{z dz}{(z-1)^2(z+2)}$$

$$6). \int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)}$$

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>

2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>

2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «**Комплексный анализ**»
для студентов направления подготовки
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
направленность (профиль)
«**Анализ данных и искусственный интеллект**»

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Общая характеристика самостоятельной работы

План – график выполнения самостоятельной работы

Контрольные точки и виды отчетности по ним

Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Методические указания по видам работ, предусмотренных рабочей программой дисциплины

Методические указания по подготовке к экзамену

Список рекомендуемой литературы

Введение

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студента).

Самостоятельная работа студента является важным видом учебной и научной деятельности студента. Федеральным государственным образовательным стандартом предусматривается значительный объем времени из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу. В связи с этим, обучение включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому самостоятельная работа должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования – подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности.

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

Самостоятельная работа студента предполагает, прежде всего, его научно-исследовательскую и практическую деятельность, поскольку именно эти виды учебной работы в первую очередь готовят к самостоятельному выполнению профессиональных задач. Конечной целью самостоятельной работы является организация самостоятельной познавательной деятельности, формирование умения самостоятельно анализировать информацию, выделять главное и второстепенное.

Основными формами самостоятельной работы студентов по дисциплине **«Комплексный анализ»** является подготовка к практическим занятиям, написание контрольных работ, подготовка к экзамену.

В результате изучения дисциплины у обучающихся формируются следующие компетенции (в соответствии с образовательным стандартом):

ОПК-1 Способность консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности;

Знать: основные положения комплексной арифметики, свойства основных элементарных функций комплексного переменного; основные теоремы и свойства дифференцирования и интегрирования в комплексной области; основные положения теории функциональных рядов с комплексной переменной и теории вычетов.

Уметь: решать основные задачи комплексной арифметики, задачи дифференцирования и интегрирования функции комплексного переменного, разложения функции комплексного переменного в ряды Тейлора и Лорана находить вычеты и с их помощью вычислять интегралы; определять возможности применения теоретических положений и методов комплексного анализа для постановки и решения конкретных прикладных задач.

Владеть: навыками решения задач комплексной арифметики; дифференцирования и интегрирования функции комплексного переменного, их разложения в ряды методами комплексного анализа и применять их к решению прикладных задач.

Общая характеристика самостоятельной работы обучающегося при изучении дисциплины «Комплексный анализ»

Самостоятельная работа проводится в виде выполнения двух аудиторных контрольных работ по темам дисциплины **«Комплексный анализ»** и подготовки к экзамену в 6 семестре. Первая контрольная работа ориентирована на проверку качества знаний, приобретенных студентами по темам 1 – 3, вторая – по темам 4 – 8. Основной целью этих видов самостоятельной работы является улучшение профессиональной подготовки бакалавров высшей квалификации, направленное на формирование действенной системы фундаментальных и профессиональных знаний, умений и навыков, которые они могли бы свободно и самостоятельно применять в практической деятельности.

Цели самостоятельной работы:

- научить студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свою квалификацию.
- закрепление, расширение и углубление знаний, умений и навыков, полученных студентами на аудиторных занятиях под руководством преподавателей;
- изучение студентами дополнительных материалов по изучаемым дисциплинам и умение выбирать необходимый материал из различных источников; воспитание у студентов самостоятельности, организованности, самодисциплины, творческой активности, потребности развития познавательных способностей и упорства в достижении поставленных целей.

Предлагаемый подход к освоению материала усиливает мотивацию к аудиторной и внеаудиторной активности, что обеспечивает необходимый уровень знаний по изучаемым дисциплинам и позволяет повысить готовность студентов к сдаче экзаменов.

Приступая к изучению учебной дисциплины **«Комплексный анализ»**, студенты должны ознакомиться с учебной программой, учебной, научной и методической литературой, имеющейся в библиотеке, получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками. В ходе лекционных занятий вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций. В ходе подготовки к семинарам изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях: журналах, газетах и т.д. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой. Подготовить тезисы для выступлений по всем учебным вопросам, выносимым на семинар. Готовясь к докладу или реферативному сообщению, обращаться за методической помощью к преподавателю. Составить план-конспект своего выступления. Принимать активное участие в обсуждении учебных вопросов: выступать с докладами, рефератами, обзорами научных статей, отдельных публикаций периодической печати, касающихся содержания темы занятия. В ходе своего выступления использовать технические средства обучения, доску и мел. С целью более глубокого усвоения изучаемого материала задавать вопросы преподавателю. После подведения итогов семинара устранить недостатки, отмеченные преподавателем. При подготовке к экзамену (в конце семестра) повторять пройденный материал в строгом соответствии с учебной программой, примерным перечнем учебных вопросов, выносящихся на зачет и содержащихся в данной программе. Использовать конспект лекций и литературу, рекомендованную преподавателем. Обратить особое внимание на темы учебных занятий, пропущенных студентом по разным причинам. При необходимости обратиться за консультацией и методической помощью к преподавателю.

В ходе организации самостоятельной работы **решаются следующие задачи:**

- углублять и расширять их профессиональные знания;
- формировать у них интерес к учебно-познавательной деятельности;
- развивать у бакалавров самостоятельность, активность, ответственность;
- развивать познавательные способности специалистов.

Учебный процесс в высшем учебном заведении в значительной степени строится на самостоятельной работе студентов, без которой трудно в полной мере овладеть сложным программным материалом и научиться в дальнейшем постоянно совершенствовать приобретенные знания и умения. Самостоятельная работа является внеаудиторной и предназначена для самостоятельного ознакомления студента с определенными разделами дисциплины **«Комплексный анализ»** по рекомендованным преподавателем материалам и подготовки к выполнению индивидуальных заданий.

План – график выполнения самостоятельной работы

Вид деятельности студентов	Итоговый продукт самостоятельной работы	Средства и технологии оценки	Примерные сроки выполнения
Изучение лекционного материала, рекомендуемой литературы по темам 1 – 3, подготовка к практическим занятиям	Выполнение текущих домашних заданий	Контрольная работа № 1	7 неделя
Изучение лекционного материала, рекомендуемой литературы по темам 4 – 8, подготовка к практическим занятиям	Выполнение текущих домашних заданий	Контрольная работа № 2	16 неделя

Контрольные точки и виды отчетности по ним

Подготовка к написанию студентом контрольных работ осуществляется на **практических занятиях**. Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка. После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации. Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

Типовые варианты контрольной работы № 1

Вариант 1

1. Найти значение выражения $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$.
2. Решить уравнение и изобразить на чертеже его корни $z^8 = 1 + i$.
3. На координатной плоскости изобразить множество точек $z = x + iy$, удовлетворяющих указанным условиям: $|z + i| \leq 2$, $|z - i| > 2$.
4. а) Найти действительную и мнимую часть заданной функции $w = z^{-1}$;

б) Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти производную функции: $w = z \cdot e^z$.

5. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = x^2 + y^2 + xy$.

Вариант 2

1. Найти значение выражения $\left(\frac{2+5i}{2-5i}\right)^3$.

2. Решить уравнение и изобразить на чертеже его корни $z^7 = -1$.

3. На координатной плоскости изобразить множество точек $z = x + iy$, удовлетворяющих указанным условиям: $|z+1| < 1$, $|z-i| \leq 1$.

4. а) Найти действительную и мнимую часть заданной функции $w = ch(z-i)$;

б) Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти производную функции: $w = e^{z^2}$.

5. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части:
 $v = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$.

Типовые варианты контрольной работы № 2

Вариант 1

1. Вычислить интеграл: $\int_L z \cdot \operatorname{Im} z^2 dz$, $L: |z|=1, -\pi \leq \arg z \leq 0$.

2. Вычислить интеграл (применить теорему Коши или интегральную формулу Коши)

$$\int_{L^+} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz, \quad L: |z|=1.$$

3. Найти радиус сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in} \cdot z^n$.

4. Разложить функцию $f(z) = \sin \frac{z}{z-1}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$.

5. Найти вычеты в особых точках функций $f(z) = \frac{z^2}{z-2}$.

6. Вычислить интеграл (применить теорему о вычетах) $\int_{|z|=2} \frac{\sin z dz}{(z+1)^3}$.

Вариант 2

1. Вычислить интеграл: $\int_L z \cdot \operatorname{Re} z dz$, $L: |z|=1$.

2. Вычислить интеграл (применить теорему Коши или интегральную формулу Коши)

$$\int_{L^+} \frac{1}{(z-2)^2} dz, \quad L: |z-3|=2.$$

3. Найти радиус сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot z^n$.
4. Разложить функцию $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$.
5. Найти вычеты в особых точках функций $f(z) = \frac{1}{\sin z}$.
6. Вычислить интеграл (применить теорему о вычетах) $\int_{|z|=2} \frac{z dz}{1 - 2 \sin^2 z}$.

Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Как уже отмечалось, самостоятельная работа по изучению теоретического материала (а также самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях) – это важнейшее условие формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

- Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать».

- Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

- Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).

- Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.

- При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...

- Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

- Если книга – Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора (это очень хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).

- Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать), и это может занять немалое время (у кого-то – до нескольких недель и даже месяцев); опыт показывает, что после этого студент каким-то «чудом» начинает буквально заглатывать книги и чуть ли не видеть «сквозь обложку», стоящая это работа или нет...

- «Либо читайте, либо перелистывайте материал, но не пытайтесь читать быстро... Если текст меня интересует, то чтение, размышление и даже фантазирование по этому поводу сливаются в единый процесс, в то время как вынужденное скорочтение не только не способствует качеству чтения, но и не приносит чувства удовлетворения, которое мы получаем, размышляя о прочитанном», – советует Г. Селье (Селье, 1987. – С. 325-326).

- Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент (или молодой ученый) будет как бы искать аргументы «за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Проблема лишь в том, как найти «свою» идею...

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют четыре основные установки в чтении научного текста:

1. **информационно-поисковый** (задача – найти, выделить искомую информацию)
2. **усваивающая** (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)
3. **аналитико-критическая** (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)
4. **творческая** (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких видов чтения:

1. **библиографическое** – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;

2. **просмотровое** – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;

3. **ознакомительное** – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;

4. **изучающее** – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

5. **аналитико-критическое и творческое чтение** – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

Методические указания по видам работ, предусмотренных рабочей программой дисциплины

Проверка знаний материала лекционных и практических занятий проводится в виде экзамена (по всем темам). Предполагается, что отдельные вопросы тем дисциплины изучаются студентами самостоятельно. Знания указанных вопросов проверяется наличием конспектов и собеседованием. Ниже приведены вопросы для собеседования по всем темам дисциплины «**Комплексный анализ**». Ответы на теоретические вопросы в рамках каждого практического занятия (собеседование) показывают умения и навыки студентов анализировать теоретический материал и готовность к применению теоретических знаний в практической деятельности.

Предлагаемые студенту задания позволяют проверить компетенции:

ОПК-1 Способность консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности;

Данное оценочное мероприятие проводится на каждом практическом занятии на основании материалов и знаний, полученных на лекциях, а также при изучении основной и дополнительной литературы.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования материалами лекций, основной и дополнительной литературы, а также интернет-ресурсов.

При проверке задания оцениваются:

- правильность ответов;
- чёткое знание терминологии;
- умение грамотно, четко и последовательно излагать материал;
- использование дополнительной литературы при подготовке;
- умение анализировать теоретический материал и сопоставлять его с практикой;
- умение приводить конкретные примеры.

В процессе самостоятельного изучения отдельных вопросов тем дисциплины рекомендуется работа с литературой, перечень которой приведен в конце методических указаний. При подготовке к собеседованию предлагается следующая литература.

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>

2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>

2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Вопросы для собеседования

Тема 1. Комплексные числа и действия над ними

1. Основные понятия комплексного числа. Геометрическое изображение комплексных чисел.
2. Формы записи комплексных чисел. Формула Эйлера.
3. Действия над комплексными числами.
4. Свойства модуля комплексных чисел.
5. Сфера Римана. Бесконечно удаленная точка.

Тема 2. Функции комплексного переменного

6. Основные определения функции комплексного переменного.
7. Предел и непрерывность функции комплексного переменного.
8. Показательная функция комплексного переменного, ее основные свойства.
9. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного, их основные свойства.
10. Логарифмическая функция комплексного переменного, ее основные свойства.
11. Степенная функция комплексного переменного, ее основные свойства.

Тема 3. Дифференцирование функций комплексного переменного

12. Производная функции комплексного переменного. Правила дифференцирования функции комплексного переменного.
13. Производная функции комплексного переменного. Критерий дифференцируемости в точке.
14. Аналитические функции. Дифференциал функции комплексного переменного.
15. Гармонические функции. Восстановление аналитической функции по ее действительной (мнимой) части.
16. Производная функции комплексного переменного. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Тема 4. Интегрирование функций комплексного переменного

17. Интеграл функции комплексного переменного по кривой.
18. Основные свойства интеграла от функции комплексного переменного.
19. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей.
20. Первообразная и неопределенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.
21. Интегральная формула Коши и следствия из неё.

Тема 5. Числовые и функциональные комплексные ряды

22. Числовые ряды с комплексными числами.
23. Ряды функций комплексного переменного.
24. Степенные комплексные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда.

Тема 6. Ряды Тейлора Лорана

25. Ряд Тейлора. Примеры разложений некоторых элементарных функций.
26. Ряд Лорана и его область сходимости.

Тема 7. Нули функции. Изолированные особые точки

27. Нули аналитической функции.
28. Классификация изолированных особых точек.
29. Бесконечно удаленная точка как особая точка.

Тема 8. Элементы теории вычетов

30. Вычет аналитической функции в особой точке.
31. Теорема Коши о вычетах.

- 32. Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки.
- 33. Теорема о сумме вычетов.
- 34. Приложение вычетов к вычислению интегралов.

Методические указания по подготовке к экзамену

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается экзаменом. Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

Экзаменационная сессия - это серия экзаменов, установленных учебным планом. Между экзаменами интервал 3-4 дня. Не следует думать, что 3-4 дня достаточно для успешной подготовки к экзаменам.

В эти 3-4 дня нужно систематизировать уже имеющиеся знания. На консультации перед экзаменом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к экзаменам те же, что и при занятиях в течение семестра, но соблюдаться они должны более строго. Во-первых, очень важно соблюдение режима дня; сон не менее 8 часов в сутки, занятия заканчиваются не позднее, чем за 2-3 часа до сна. Оптимальное время занятий, особенно по математике - утренние и дневные часы. В перерывах между занятиями рекомендуются прогулки на свежем воздухе, неумотительные занятия спортом. Во-вторых, наличие хороших собственных конспектов лекций. Даже в том случае, если была пропущена какая-либо лекция, необходимо во время ее восстановить (переписать ее на кафедре), обдумать, снять возникшие вопросы для того, чтобы запоминание материала было осознанным. В-третьих, при подготовке к экзаменам у студента должен быть хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Правила подготовки к экзамену:

- Лучше сразу сориентироваться во всем материале и обязательно расположить весь материал согласно экзаменационным вопросам (или вопросам, обсуждаемым на семинарах), эта работа может занять много времени, но все остальное – это уже технические детали (главное – это ориентировка в материале!).

- Сама подготовка связана не только с «запоминанием». Подготовка также предполагает и переосмысление материала, и даже рассмотрение альтернативных идей.

- Готовить «шпаргалки» полезно, но пользоваться ими рискованно. Главный смысл подготовки «шпаргалок» – это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету, что само по себе прекрасно – это очень сложная и важная для студента работа, более сложная и важная, чем простое поглощение массы учебной информации. Если студент самостоятельно подготовил такие «шпаргалки», то, скорее всего, он и экзамены сдавать будет более уверенно, так как у него уже сформирована общая ориентировка в сложном материале.

- Как это ни парадоксально, но использование «шпаргалок» часто позволяет отвечающему студенту лучше продемонстрировать свои познания (точнее – ориентировку в знаниях, что намного важнее знания «запомненного» и «тут же забытого» после сдачи экзамена).

- Сначала студент должен продемонстрировать, что он «усвоил» все, что требуется по программе обучения (или по программе данного преподавателя), и лишь после этого он вправе высказывать иные, желательно аргументированные точки зрения.

Критерии оценивания компетенций

Оценка *«отлично»* выставляется студенту, если он исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно отвечает на вопросы базового и повышенного уровней, умеет тесно увязывать теорию с практикой, не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал дополнительной литературы, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.

Оценка *«хорошо»* выставляется студенту, если он твердо знает материал как базового, так и повышенного уровней, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками сопоставления теории и практики.

Оценка *«удовлетворительно»* выставляется студенту, если он имеет знания только материала базового уровня, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при сопоставлении теории и практики.

Оценка *«неудовлетворительно»* выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Отметка *«неудовлетворительно»* выставляется также, если обучающийся отказался отвечать на вопросы.

Описание шкалы оценивания

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным **55**. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	88-100
Хороший	72-87
Удовлетворительный	53-71
Неудовлетворительный	<53

Перечень основной литературы:

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]; под редакцией А. Н. Сесекина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018. - 128 с. - ISBN 978-5-7996-2472-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/106793.html>
2. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. - Минск: Вышэйшая школа, 2019. - 432 с. - ISBN 978-985-06-3071-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120076.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Гриценко, Л. В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / Л. В. Гриценко, В. Н. Ефименко, Г. С. Костецкая. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 73 с. — ISBN 978-5-4497-1687-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122227.html>
2. Каибханов, К. Э. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / К. Э. Каибханов, В. В. Ершов, Е. В. Тетруашвили. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. - 123 с. - ISBN 978-5-4486-0739-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/83816.html>

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
- <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
- <http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.
- <http://www.mathedu.ru/> Электронная библиотека по математике и вопросам ее преподавания. Включает [популярные книги и пособия](#), [методические руководства](#), [учебники](#), [журналы](#), [исторические работы](#), [авторефераты](#), [диафильмы](#).
- <http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.
- <http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).
- <http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.