

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания
для обучающихся по организации и проведению занятий
по дисциплине «МАТЕМАТИКА»
для студентов специальности 30.05.01 «Медицинская биохимия»

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Математика» является формирование соответствующих компетенций будущего специалиста по специальности 30.05.01 – Медицинская биохимия.
Задачи освоения дисциплины:

формирование математической культуры студентов: умения логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения практических задач;

получение базовых знаний по высшей математике в области линейной алгебры и аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления, обыкновенных дифференциальных уравнений;

овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач в профессиональной деятельности;

умение находить, анализировать и контекстно обрабатывать научно-техническую информацию.

Дисциплина «Математика» входит в блок обязательной части дисциплин.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

Основы линейной алгебры: определение линейного пространства, линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Теоретическая часть

I. Ответить на контрольные вопросы:

1. Что называется определителем 2-го порядка?
2. Сформулируйте свойства определителей.
3. Что называется определителем третьего порядка? Способы его вычисления.
4. Что называется минором?
5. Что называется алгебраическим дополнением?
6. С помощью, какой теоремы можно вычислить любой определитель, сведя его к определителю меньшего порядка?
7. Дайте определение определителя n -го порядка.

Примеры решения задач

Задача №1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1) - 3 = x^2 - 1 - 3 = x^2 - 4$$

Тогда, $x^2 - 4 = 0$ $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Задача №2. Вычислить. $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Ответ: 1.

Задача №3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ по правилу Саррюса.

Решение.

Допишем справа 1-ый и 2-ой столбцы определителя.

Произведения элементов, стоящих на главной диагонали, и параллельны ей, знаки не меняют.

Произведения элементов побочной диагонали и параллельных ей, меняют знак на противоположный.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 0 \cdot (-5) \cdot 1 = 0 - 0 + 31 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 = 29.$$

Ответ: 29.

Задача №4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам 3-ей строки.

Решение.

Используем теорему Лапласа. $\Delta = a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 1 \cdot (32 - 5) + 10 \cdot (6 - 0) = 87$$

Ответ: 87.

5. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$.

Ответ: 0 или 1.

6. Вычислить определители, разложив их по элементам: 1) первой строки; 2) любой строки или столбца:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: а) 50; б) -15.

7. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

Ответ: а) 20; б) 70.

8. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Ответ: -10 или 2.

9. Вычислите определитель четвертого порядка.

Методические рекомендации:

Вычислить определитель четвертого порядка: $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$

Решение.

В данном определителе имеются нули, и если, например, разложить его по элементам второго столбца, то в результате нам придется вычислить два определителя 3-го порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

в 1-ом и 3-ем слагаемом полученные определители так же разложим по элементам 2-го столбца, получим:

$$= -0 + 4 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 - 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 =$$

$$= -[4(9 - 4)] - 3[-2(9 - 4)] = -20 + 30 = 10.$$

Ответ: 10.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант	5 вариант
$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

6 вариант	7 вариант	8 вариант	9 вариант	10 вариант
$\begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 8 & 6 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 \\ 10 & 6 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$

ЗАДАНИЕ НА САМОСТОЯТЕЛЬНУЮ РАБОТУ

- Вычислить определитель по правилу треугольников: $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.
- Вычислить определитель, разлагая его по элементам третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

- Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} 0 & 6 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 26 \\ -3 & 8 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

Формулы перехода от одного базиса к другому Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Что называется определителем 2-го порядка?
2. Сформулируйте свойства определителей.
3. Что называется определителем третьего порядка? Способы его вычисления.
4. Что называется минором?
5. Что называется алгебраическим дополнением?
6. С помощью, какой теоремы можно вычислить любой определитель, сведя его к определителю меньшего порядка?
7. Дайте определение определителя n -го порядка.
8. Дать определение прямоугольной матрицы размера (m, n) . Её обозначение.
9. Какая матрица называется квадратной? Чему равен определитель квадратной матрицы? Как обозначается?
10. Что такое матрица-строка? Матрица-столбец?
11. Какая матрица называется диагональной? Единичной?
12. Когда две матрицы равны?
13. Какая матрица называется невырожденной?
14. Действия над матрицами.
15. Какие матрицы называются эквивалентными?
16. Дайте определение обратной матрицы. Для каких матриц существует обратная матрица?
17. Какая матрица называется транспонированной?
18. Что называется рангом матрицы?

Примеры решения задач

1. Выполнить действия над матрицами.

Методические рекомендации:

$$\begin{matrix} 0 & 2 & -1 & & 4 & 3 & 2 \end{matrix}$$

Даны матрицы $A = \begin{matrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{matrix}$ и $B = \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{matrix}$.

$$\begin{matrix} 3 & -2 & -1 & & 1 & 3 & 5 \end{matrix}$$

Найти матрицы $A+B$, $3A-B$, $A \cdot B$.

Решение.

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} 0+4 & 2+3 & -1+2 & & 4 & 5 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 6 & -3 \end{matrix} \\ A+B = & \begin{matrix} -2+3 & -1+2 & 2+1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \end{matrix} ; & 3A = \begin{matrix} -6 & -3 & 6 \end{matrix} . \\ & \begin{matrix} 3+1 & -2+3 & -1+5 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 & 1 & 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 9 & -6 & -3 \end{matrix} \end{aligned}$$

Для нахождения матрицы $3A-B$ сложим матрицы $3A$ и $-B$, получим:

$$3A - B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -5 \\ -9 & -5 & 5 \\ 8 & -9 & -8 \end{pmatrix}.$$

Произведение определено, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . Произведение матриц найдем по правилу «строка на столбец»:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 4+2 & 3+(-1) & 1 \\ (-2) & 4+(-1) & 3+2 & 1 \\ 3 & 4+(-2) & 3+(-1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3+2 & 2+(-1) & 3 \\ (-2) & 3+(-1) & 2+2 & 3 \\ 3 & 3+(-2) & 2+(-1) & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2+2 & 1+(-1) & 5 \\ (-2) & 2+(-1) & 1+2 & 5 \\ 3 & 2+(-2) & 1+(-1) & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -9 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1 вариант Для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ найти произведения AB и BA, если они существуют.	2 вариант Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ найти произведения AB и BA, если они существуют.	3 вариант Для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ найти произведения AB и BA, если они существуют.
4 вариант Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ найти произведения AB и BA, если они существуют.	5 вариант Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ найти произведения AB и BA, если они существуют.	6 вариант Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ найти произведения AB и BA, если они существуют.
7 вариант Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и	8 вариант Для матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ и	9 вариант Для матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ найти произведения AB и

$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют.	$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют.	$B \cdot A$, если они существуют.
10 вариант Для матриц $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют.		

2. Найти ранг матрицы.

Методические рекомендации:

Используя элементарные преобразования найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение.

Применяя элементарные преобразования, получим треугольную матрицу, элементы главной диагонали которой равны единице.

1. Из 2 строки вычитаем 3 строку (получаем 2).
2. Меняем местами 1 и 2 строки.
3. 1 строку умножаем на (-2) и складываем со 2 строкой (получаем 2 стр).
4. 1 строку умножаем на (-3) и складываем с 3 строкой (получаем 3 стр).
5. 2 строку умножаем на (-2) и складываем с 3 строкой (получаем 3 стр).
6. 2 строку делим на 5 (получаем 2 стр).
7. 3 строку умножаем на (-1) (получаем 3 стр).

$$\begin{array}{ccccccc}
 2 & 1 & 3 & & 2 & 1 & 3 & & 1 & -2 & -2 & & 1 & -2 & -2 \\
 4 & 2 & 5 & \sim & 1 & -2 & -2 & \sim & 2 & 1 & 3 & \sim & 0 & 5 & 7 & \sim \\
 3 & 4 & 7 & & 3 & 4 & 7 & & 3 & 4 & 7 & & 0 & 10 & 13 & \\
 1 & -2 & -2 & & & & & & & & & & & & & \\
 0 & 1 & \frac{7}{5} & & & & & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

$\text{rang} A = 3$.

Ответ: $\text{rang} A = 3$.

3. Найти обратную матрицу.

Методические рекомендации:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение.

Матрица имеет обратную, если матрица невырожденная, т.е. $\Delta \neq 0$.

1. Вычисляем определитель матрицы A :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 27 + 2 - 24 = 5, \quad \Delta \neq 0 \quad \text{матрица } A \text{ невырожденная и для нее}$$

существует обратная.

2. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы и записываем их в транспонированном виде (поменяем местами строки на столбцы):

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Записываем союзную матрицу $A^* = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ Следовательно, } A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Вариант 1	Вариант 2	3 вариант
1. Вычислить ранг матрицы	1. Вычислить ранг матрицы	1. Вычислить ранг матрицы

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & -6 \\ 2 & -3 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & -12 & -12 \\ 2 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & -9 & -8 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -9 & 21 & -3 & -12 \\ -4 & 6 & -14 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
4 вариант 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & 19 & -4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	5 вариант 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -7 & 34 & -16 \\ -3 & 0 & -2 \\ -2 & 11 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	6 вариант 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -2 & -1 & -5 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
7 вариант 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 13 & 18 \\ 2 & -5 & 13 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \\ 3 & -4 & 8 & 14 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	8 вариант 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 4 & -6 & -3 & 13 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & -3 & 11 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	9 вариант 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

10 вариант

1. Вычислить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3**Элементы аналитической геометрии. Определители второго порядка. Определители третьего порядка****СИСТЕМЫ n ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С n НЕИЗВЕСТНЫМИ.****Теоретическая часть**

Система уравнений вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (1)$$

называется **системой n линейных уравнений с n неизвестными**, где a_{ij} - **коэффициенты системы (1)**, b_n - **свободные члены**.

Система линейных уравнений (1) называется **квадратной**, так как у нее число уравнений совпадает с числом неизвестных.

Решением системы (1) называется такая совокупность чисел $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она решений не имеет.

Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

В последнем случае каждое ее решение называется **частным решением** системы. Совокупность всех частных решений называется **общим решением**.

Если система линейных уравнений (СЛУ) имеет более одного решения, то она имеет бесконечное множество решений.

Следовательно, неопределенная СЛУ имеет бесконечное множество решений.

Решить СЛУ – это значит выяснить, совместна она или нет. Если СЛУ совместна, найти ее общее решение.

Две системы линейных уравнений называются **равносильными** или **эквивалентными**, если они имеют одно и тоже множество решений.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при **элементарных преобразованиях системы**, к которым относятся:

1. перестановка уравнений;
2. умножение обеих частей одного из уравнений на число, отличное от нуля;
3. умножение какого-либо уравнения на число и прибавление его к другому уравнению.

Если в результате элементарных преобразований системы появилось уравнение вида $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$,

которое называется **тривиальным**, то его можно вычеркнуть, так как оно не влияет на решение системы.

Если в результате элементарных преобразований системы появилось уравнение вида $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b$, ($b \neq 0$)

которое называется **противоречивым**, то такая СЛУ является несовместной, т.е. решений не имеет.

Примеры решения задач

Пример 1. Решить систему по формулам Крамера:

$$2x + y + z = 6$$

$$5x + y + z = 18$$

$$2x + y + 2z = 15.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \quad 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 18 & 1 & 1 \\ 15 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 18 & 1 \\ 2 & 15 & 2 \end{vmatrix} = 33; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 18 \\ 2 & 1 & 15 \end{vmatrix} = -27;$$

тогда

$$x = \frac{-12}{-3} = 4; \quad y = \frac{33}{-3} = -11; \quad z = \frac{-27}{-3} = 9.$$

Ответ: $\{4; -11; 9\}$.

Пример 2. Решить систему уравнений, используя метод полного исключения Жордана-

$$3x + 2y + z = 5$$

Гаусса. $x + y - z = 0$

$$4x - y + 5z = 3$$

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array} \right| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array} \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 9 \end{array} \right| \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 9 \end{array} \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 0 & -11 \end{array} \right| \begin{array}{c} 5 \\ -5 \\ -22 \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \left| \begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} -1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Ответ: $x = -1, y = 3, z = 2$.

Пример 3. Решить матричным методом систему уравнений

$$2x + 3y + 2z = 9$$

$$x + 2y - 3z = 14$$

$$3x + 4y + z = 16$$

Решение.

Перепишем систему в виде $AX = B$,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения имеет вид $X = A^{-1}B$. Найдем A^{-1} .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 30 - 4 = -6. \Delta \neq 0 \text{ следовательно, матрица невырожденная и}$$

существует A^{-1} . Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, $A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Тогда

$$X = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 & 9 \\ -10 & -4 & 8 & 14 \\ -2 & 1 & 1 & 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 126+70-208 & -12 & 2 \\ -90-56+128 & -18 & 3 \\ -18+14+16 & 12 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ Следо}$$

вательно $x=2, y=3, z=-2.$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

5 вариант $x - 2y + 3z = -4$ $2x + y - z = 0$ $4x + y + 2z = 1$	6 вариант $x + 2y - 3z = 3$ $2x + y + 6z = 12$ $3x + y - z = 7$	7 вариант $2x - 4y + 3z = 1$ $x - 2y + 4z = 3$ $3x - y + 5z = 2$	4 вариант $x + 2y - 3z = 0$ $2x - y + 4z = 5$ $3x + y - z = 2$	5 вариант $2x - y + 4z = 15$ $3x - y + z = 8$ $-2x + y + z = 0$
6 вариант $x + 2y + z = 4$ $3x - 5y + 3z = 1$ $2x + 7y - z = 8$	7 вариант $x - 2y + 3z = -4$ $2x + y - z = 0$ $4x + y + 2z = 1$	8 вариант $x + 2y - 3z = 3$ $2x + y + 6z = 12$ $3x + y - z = 7$	9 вариант $2x - 4y + 3z = 1$ $x - 2y + 4z = 3$ $3x - y + 5z = 2$	10 вариант $x + 2y - 3z = 0$ $2x - y + 4z = 5$ $3x + y - z = 2$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

Основные свойства определителей 3-го порядка Определители высших порядков

СИСТЕМЫ m ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С n НЕИЗВЕСТНЫМИ.

Теоретическая часть

О.1.1. Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется совокупность m линейных уравнений с n неизвестными, которая имеет вид;

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

Сопоставим системе (1) две матрицы : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, которую называют матрицей

системы (1) и матрицу

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

которую называют расширенной матрицей системы (1)

Матрица A состоит из коэффициентов при неизвестных, а $\overline{A}$ содержит ещё столбец из свободных членов.

В данном случае $m \neq n$ и формулы Крамера не применимы.

Первый вопрос, который возникает при изучении систем m линейных уравнений с n неизвестными, является вопрос о её совместности. Ответ на этот вопрос даёт теорема Кронекера – Капелли.

Т.1.1. (**Теорема Кронекера – Капелли**) Система m линейных уравнений с n неизвестными совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы системы.

$$\text{т. е.} \quad r(A) = r(\overline{A}) = r$$

Примеры решения задач

Пример 1: Исследовать решение системы.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Составим матрицу $\overline{A}$ и приведем ее к ступенчатой форме:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

поменяем местами 1 и 2 строки

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Умножим 1 строку на 2 и выпишем её из второй к третьей плюс первая строка ко второй прибавим третью,

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 3; r(\overline{A}) = 3 \quad \text{Система совместна.}$$

Она имеет единственное решения, которое вычисляется по формулам Крамера т. к в этом случае $r = n$.

Пример 2. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 0 & -24 & 21 & -75 & 12 \\ 0 & -32 & 28 & 100 & 16 \\ 0 & -16 & 14 & -50 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 0 & -8 & 7 & -25 & 4 \\ 0 & -8 & 7 & -25 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 0 & -8 & 7 & -25 & 4 \end{pmatrix} \quad rang = 2$$

В результате получим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} x_1 + 11x_2 &= -5 + 12x_3 - 34x_n \\ -8x_2 &= 4 - 7x_3 + 25x_n \end{aligned}$$

Пример 3. Исследовать систему

$$2x_1 + x_2 - x_3 = -1$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$

$$\bar{A} = \begin{array}{cccc|cccc|cccc} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -5 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & -1 & 4 & -1 & 3 & -1 & 0 & 3 & -5 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 0 \\ \sim 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$r(A) = r(\bar{A}) = 2 < m.$$

Система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от $3 - 2 = 1$ свободных переменных.

Для нахождения решения, перепишем систему по той матрице к которой приведена матрица системы:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$3x_2 - 5x_3 = -1$$

Запишем в виде системы двух уравнений с двумя неизвестными при условии $\Delta \neq 0$, $M_r \neq 0$

$$x_1 - x_2 = -2x_3$$

$$3x_2 = -1 + 5x_3$$

Определитель системы называется базисным минором.

Здесь x_1, x_2 - базисные переменные, соответствующие базисному минору $M_r \neq 0$, x_3 - произвольная переменная (параметр).

Пусть $x_3 = t$

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &= -2t & x_1 &= x_2 - 2t \\
3x_2 &= -1 + 5t & x_2 &= \frac{-1 + 5t}{3} \\
x_3 &= t & x_3 &= t \\
x_1 &= \frac{-1 + 5t}{3} - 2t = \frac{-1 + 5t - 6t}{3} = \frac{-1 - t}{3} \\
x_2 &= \frac{-1 + 5t}{3} \\
x_3 &= t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 = \frac{-1 - t}{3} \\
\text{Ответ: } & x_2 = \frac{-1 + 5t}{3} \\
& x_3 = t
\end{aligned}$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Исследовать системы по теореме Кронекера-Капелли

$$\begin{aligned}
& x + 2y - 4z = 1 \\
\text{а) } & 2x + y - 5z = -1 . \\
& x - y - z = -2
\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } r_A = r_B = 2 .$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } & 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\
& 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 = 0 .
\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } r = 2 .$$

$$\begin{aligned}
& x - y + 2z = 1 \\
\text{в) } & 2x - 2y + 4z = 2 . \\
& 8x - 8y + 16z = 3
\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: несовместна.}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

Введение в анализ. Предел функции в точке. Предел функции на бесконечности.

Непрерывность функции. Определение производной

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ.

Теоретическая часть

Вектор $\vec{a}$ называется *направляющим* вектором прямой l , если $\vec{a}$ параллелен l . Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным* к прямой l или *вектором нормали*, если $\vec{n} \perp l$, т.е. $\vec{n} \perp \vec{a}$.

Любая прямая в аффинной системе координат может быть задана уравнением первой степени (линейным уравнением):

$$Ax + By + C = 0, \quad (1)$$

где (x, y) - координаты точек прямой, A, B, C - коэффициенты, причем A и B не равны нулю одновременно.

Любое уравнение первой степени в аффинной системе координат определяет прямую.

Уравнение (1) называется *общим уравнением* прямой. Для прямой, заданной общим уравнением (1) в прямоугольной декартовой системе координат, вектор $\vec{a} = (-B, A)$ является направляющим, а $\vec{n} = (A, B)$ - вектором нормали.

Прямая l , заданная уравнением (1), разбивает плоскость на две полуплоскости. Координаты точек, лежащих по одну сторону от прямой l удовлетворяют неравенству $Ax + By + C > 0$, а координаты точек, лежащих по другую сторону от прямой l , - неравенству $Ax + By + C < 0$.

1. **Каноническое уравнение прямой.** Прямая l задана точкой $M_0(x_0, y_0)$ и направляющим вектором $\vec{a}(a, b)$. Если $a \neq 0, b \neq 0$, то каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

2. **Параметрическое уравнение прямой.** Если прямая l задана точкой $M_0(x_0, y_0)$ и направляющим вектором $\vec{a}(a, b)$, то ее параметрическое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at, \\ y &= y_0 + bt, \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ здесь } t - \text{параметр.}$$

3. **Уравнение прямой, проходящей через две точки.** Пусть $M_1(x_1, y_1) \in l, M_2(x_2, y_2) \in l$. Если $x_2 - x_1 \neq 0, y_2 - y_1 \neq 0$, то уравнение прямой l имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

4. **Уравнение прямой в отрезках.** Пусть прямая l пересекает ось Ox в точке $A(a, 0)$, а ось Oy в точке $B(0, b)$, где $a \neq 0, b \neq 0$. Говорят, что прямая l отсекает от осей Ox, Oy отрезки $|a|, |b|$ соответственно (знак чисел a и b показывает с какой стороны от начала координат на оси Ox и Oy отсекается отрезок). Уравнение прямой в этом случае имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Замечание. Все сказанное выше справедливо для плоскости, как с аффинной, так и с прямоугольной декартовой системой координат.

5. **Уравнение прямой с угловым коэффициентом.** Пусть на плоскости Oxy задана

прямоугольная декартова систем координат, прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и образует угол φ с положительным направлением оси Ox . Число $k = \operatorname{tg} \varphi$ называется *угловым коэффициентом прямой*. Тогда уравнение прямой l имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \text{или} \quad y = kx + b, \text{ где } b = y_0 - kx_0.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Задайте ту полуплоскость, в которую попадает точка $M(1, 2)$ относительно прямой $l: 5x - 3y + 7 = 0$.

Решение. Подставим координаты точки M в левую часть уравнения прямой l , получим неравенство $5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 7 = 5 - 6 + 7 = 6 > 0$. Этому же неравенству будут удовлетворять все точки рассматриваемой полуплоскости.

Ответ: $5x - 3y + 7 > 0$.

Задача 2. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b = -3$ и образующий с положительным направлением оси абсцисс угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Построить прямую.

Решение. Угловой коэффициент прямой $k = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Так как прямая отсекает от оси ординат отрезок $b = -3$, то она проходит через точку $B(0, b)$, т.е. $B(0, -3)$. Уравнение прямой имеет вид $y - (-3) = 1(x - 0)$, т.е. $y = x - 3$ или $x - y - 3 = 0$ - общее уравнение прямой. Для построения достаточно двух точек. Одна точка известна - это точка B . Пусть ордината другой точки равна нулю, подставляя $y = 0$ в общее уравнение прямой, получим $x = 3$, т.е. прямая проходит через точку $A(3, 0)$.

Ответ: $x - y - 3 = 0$ - общее уравнение прямой.

Задача 3. Дан треугольник $ABC: A(0, 1), B(6, 5), C(12, -1)$.

1) Составить уравнение медианы AM .

Решение. M - середина BC , поэтому координаты точки M $x_M = \frac{6 + 12}{2} = 9$; $y_M = \frac{5 + (-1)}{2} = 2$. Запишем уравнение прямой AM как уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x - 9}{0 - 9} = \frac{y - 2}{1 - 2}, \quad \frac{x - 9}{-9} = \frac{y - 2}{-1},$$

$x - 9 = 9y - 18$, $x - 9y + 9 = 0$ - общее уравнение AM .

Ответ: $x - 9y + 9 = 0$.

2) Составить уравнение высоты CH .

Решение. $CH \perp AB$, поэтому направляющий вектор $\overrightarrow{AB}(6, 4)$ прямой AB является нормальным для прямой CH . Пусть прямая CH задана общим уравнением $ax + by + c = 0$, тогда $\vec{n}(a, b) \perp CH$, поэтому $a = 6$, $b = 4$, т.е. $6x + 4y + c = 0$. Так как $C \in CH$, то координаты точки C удовлетворяют уравнению прямой, подставляя координаты точки C в уравнение прямой CH , найдем коэффициент c : $6 \cdot 12 + 4 \cdot (-1) + c = 0$, $c = -68$, т.е. $6x + 4y - 68 = 0$ или $3x + 2y - 34 = 0$ - уравнение прямой CH .

Ответ: $3x + 2y - 34 = 0$.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

ЗАДАНИЯ

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, 3)$:
а) параллельно оси Ox ;
б) параллельно оси Oy ;
в) составляющей с осью Ox угол 45° .
Построить данные прямые.
Ответ: а) $y = 3$; б) $x = 2$; в) $y = x + 1$.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(4, 3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью, равной 3 кв.ед.
Ответ: $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3/2} = 1$ или $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$.
3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$, $8x + 4y + 9 = 0$ и параллельной прямой $x + 3y = 0$. Построить данную прямую.
Ответ: $x + 3y - 2 = 0$.
4. Дан треугольник с вершинами $A(-2, 0)$, $B(2, 4)$ и $C(4, 0)$. Написать уравнения сторон треугольника, высоты AD и найти величину угла A .
Ответ: 1) $AC: y = 0$, $AB: x + 2 = y$, $BC: 2x + y - 8 = 0$; 2) $AD: x - 2y + 2 = 0$; 3) $A = 45^\circ$.
5. Среди прямых $3x - 2y + 7 = 0$, $6x - 4y - 9 = 0$, $6x + 4y - 5 = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$ указать параллельные и перпендикулярные.
6. Определить угол между прямыми:
а) $y = 2x - 3$ и $y = \frac{1}{2}x + 1$; б) $5x - y + 7 = 0$ и $2x - 3y + 1 = 0$.
Ответ: а) $\varphi = \arctg \frac{3}{4}$; б) 45° .

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Дано общее уравнение прямой: $12x - 5y - 65 = 0$. Написать: 1) уравнение с угловым коэффициентом; 2) уравнение в «отрезках».
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, 3)$ под углом 60° к оси Ox . Построить данную прямую.
3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, 5)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b = 7$.
4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$ перпендикулярно к прямой $y = 2x$.
5. Составить уравнение прямой, проходящей через центр окружности $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 15 = 0$ параллельно прямой $x + y = 0$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6

Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Понятие производной

ВЕКТОРЫ.

Цель: решение задач на выполнение аксиом векторного (линейного) пространства, изучить нелинейные операции над векторами

Знать: нахождение модуля вектора и направляющих косинусов.

Уметь: применять аппарат векторной алгебры для решения различных практических задач на скалярное произведение векторов, приложения скалярного произведения.

Владеть: алгебраическими методами решения геометрических задач.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:

ОПК-1. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.

Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение векторными величинами такими как сила, скорость, ускорение, которые определяются не только своим числовым значением, но и направлением - векторные величины.

Теоретическая часть

Пусть $L = \{x, y, \dots\}$ - линейное пространство.

О. Скалярным произведением векторов в линейном пространстве L с элементами произвольной природы называется правило, по которому любым двум элементам $(x; y)$ этого пространства ставится в соответствие действительное число, называемое скалярным произведением элементов x и y и обозначаемое символом $(x; y)$, при условии, что это правило удовлетворяет аксиомам:

- 1) $(x; x) \geq 0$, причем $(x; x) = 0$, если $x = 0$
- 2) $(x; y) = (y; x)$ скалярное произведение симметрично;
- 3) $(x_1 + x_2; y) = (x_1; y) + (x_2; y)$ дистрибутивный закон;
- 4) $(\lambda x; y) = \lambda (x; y)$ для $\lambda \in R$

О. Линейное пространство в котором введено скалярное произведение называется евклидовым пространством.

Отметим, что перечисленные аксиомы позволяют векторные множества перемножать скалярно по правилам умножения обычных многочленов.

Примеры:

1) n - мерное арифметическое пространство R^n , элементами которого служат системы из n действительных чисел $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ с обычными операциями сложения и умножения на число и скалярным произведением, определенным по правилу

$$(x; y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$
$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n); y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

В R^n все аксиомы выполняются, следовательно оно является евклидовым пространством.

Т. Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими прямоугольными декартовыми координатами, равно сумме произведений их соответствующих координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

где $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Следствия.

1. Для того чтобы векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ были ортогональными (перпендикулярными), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

2. Длина вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ выражается формулой: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

3. Угол φ между векторами $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ выражается формулой:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}},$$

где $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{1, -2, 2\}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.

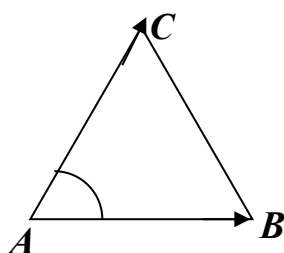
Решение: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) = 4$.

Задача 2. Вычислит какую работу производит сила $\vec{F} = \{2, -1, -4\}$ когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M(1, -2, 3)$ в положение $N(5, -6, 1)$.

Решение: известно $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$, где $\vec{S}$ - вектор пути $\overline{MN}$
 $\vec{S} = \{4, -4, -2\}$, $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-4) + (-4) \cdot (-2) = 20$ (ед. раб.)

Задача 3. Дан треугольник с вершинами $A(-3, 5, 6)$, $B(1, -5, 7)$, $C(8, -3, -1)$. Найти внутренний угол при вершине A .

Решение: Угол при вершине A образован векторами $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$, найдем их координаты $\vec{AC} = \{11, -8, -7\}$, $\vec{AB} = \{4, -10, 1\}$



$$A = 45^\circ.$$

$$\begin{aligned} \cos \angle A &= \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \\ &= \frac{4 \cdot 11 + (-10) \cdot (-8) + 1 \cdot (-7)}{\sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2} \sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-7)^2}} = \frac{117}{\sqrt{117} \sqrt{234}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Задача 4. Найти проекцию вектора $\vec{a} = 5\vec{i} + \vec{j}$ на ось, имеющую направление вектора $\vec{b} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$.

Решение: из определения скалярного произведения
 $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| np_{\vec{b}} \vec{a} :$

$$np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{5 \cdot 5 - 12}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = \frac{13}{13} = 1$$

Задача 5. Определить перпендикулярны или нет векторы:

- 1) $\vec{a} = \{2, 3, -1\}$ и $\vec{b} = \{-1, 2, 1\}$
- 2) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$

Решение:

- 1) найдем $\vec{a}\vec{b} = 2(-1) + 3 \cdot 2 + (-1)(1) = 3 \neq 0$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не перпендикулярны
- 2) $\vec{a}\vec{b} = 3 \cdot 2 + 4(-5) + 7 \cdot 2 = 6 - 20 + 14 = 0 \quad \vec{a} \perp \vec{b}$

Задача 6. Даны векторы $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$. При каком значении эти векторы перпендикулярны?

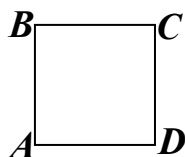
Решение: найдем скалярное произведение этих векторов

$$\vec{a}\vec{b} = 4m + 3m - 28 = 0, \text{ т.к. } \vec{a} \perp \vec{b}, \text{ откуда } 7m - 28 = 0, \quad m = 4$$

б) Решение задач самостоятельно.

Задача 7. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5, 3, 4)$, $B(-1, -7, 5)$, $C(6, -5, -3)$, $D(2, 5, -4)$ есть квадрат.

Решение:



$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \{4, -10, 1\}; \quad \overline{BC} = \{7, 2, -8\}; \\ \overline{DC} &= \{4, -10, 1\}; \quad \overline{AD} = \{7, 2, -8\} \end{aligned}$$

Сравнивая координаты, видим, что $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{BC} = \overline{AD}$.

$$\text{Так как } |\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2} = \sqrt{117}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{117}, \text{ откуда } |\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{DC}| = |\overline{AD}|.$$

Так как $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 4 \cdot 7 + (-10) \cdot 2 + 1 \cdot (-8) = 0$, то $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ $ABCD$ - квадрат.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Найти $(\vec{a} + 2\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: 242.

2. Определить, при каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

Ответ: -6.

3. Проекция перемещения $\vec{S}$ движущейся точки на оси координат равны $S_x = 2\text{ м}$, $S_y = 1\text{ м}$ и $S_z = -2\text{ м}$. Проекция действующей силы $\vec{F}$ на оси координат равны $F_x = 50\text{ Н}$, $F_y = 40\text{ Н}$ и $F_z = 30\text{ Н}$. Вычислить работу A силы $\vec{F}$ и угол между силой $\vec{F}$ и перемещением $\vec{S}$.

Ответ: 1) 80 Дж; 2) $\arccos \frac{4\sqrt{2}}{15}$.

4. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (2, 1, 0)$ и $\vec{b} = (0, -1, 1)$.

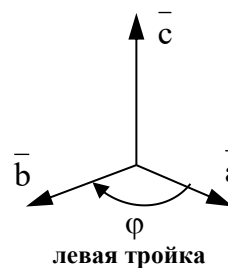
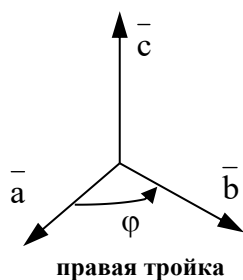
Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7
Основные правила и формулы дифференцирования. Понятие дифференциала
функции, его свойства и геометрический смысл.

ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ.

Теоретическая часть
Правые и левые тройки векторов

0. Упорядоченная тройка некопланарных векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ называется **правой** (**левой**), если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму вектору виден совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).



Определение и свойства векторного произведения векторов

0. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
 - 2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
 - 3) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку векторов.
- Обозначения: $\vec{a} \times \vec{b}$; $[\vec{a}; \vec{b}]$.

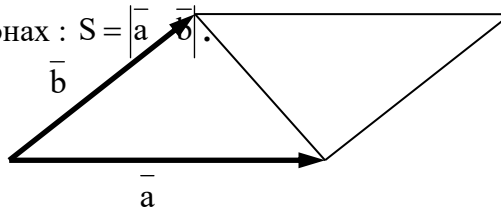
Геометрические свойства векторного произведения

1. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно $\vec{0}$:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad (\vec{a} = \vec{0}, \vec{b} = \vec{0}).$$

Следствие. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$.

2. Модуль векторного произведения двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ численно равен площади S параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$.



Следствие. Площадь $S_{\text{тр}}$ треугольника, построенного на приведенных к общему началу неколлинеарных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна половине модуля векторного произведения этих векторов:

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Алгебраические свойства векторного произведения

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Данные свойства имеют фундаментальное значение. Они позволяют при векторном перемножении векторных многочленов выполнять действия почленно и производить сочетание числовых множителей (но при этом необходимо либо сохранять порядок векторных множителей, либо при изменении этого порядка менять знак на противоположный).

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ с ортонормированным базисом $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Для векторов этого базиса справедливы соотношения:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

I. Векторное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими прямоугольными декартовыми координатами, выражается формулой:

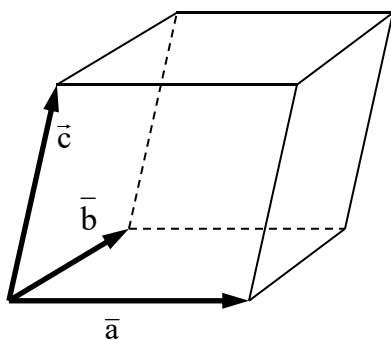
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

где $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Следствие. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, т.е. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

0. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Обозначение: $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$, $[\vec{a} \vec{b}] \vec{c}$.



Таким образом, $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Смешанное произведение $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ равно объему V параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятому со знаком «+», если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – правая, и со знаком «-», если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – левая.

Следствия.

1. Объем V параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, определяется по формуле $V = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$.

2. Объем $V_{\text{пир}}$ треугольной пирамиды, построенной на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, определяется по формуле $V = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$.

3. Справедливо равенство $\vec{a} (\vec{b} \vec{c}) = (\vec{a} \vec{b}) \vec{c}$.

4. Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$.

5. Смешанное произведение трех векторов, два из которых совпадают, равно 0.

Алгебраические свойства смешанного произведения

1. При циклической перестановке векторов смешанное произведение не меняется т.е.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{c} \vec{a} \vec{b}.$$

2. При перестановке двух сомножителей знак смешанного произведения меняется на противоположный:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a}.$$

Выражение смешанного произведения в координатах

Т. Смешанное произведение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, заданных своими прямоугольными декартовыми координатами, определяется формулой:

$$\overline{\overline{abc}} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

где $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\overline{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Следствие. Для того чтобы векторы $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\overline{c} = (c_1, c_2, c_3)$

были компланарны необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

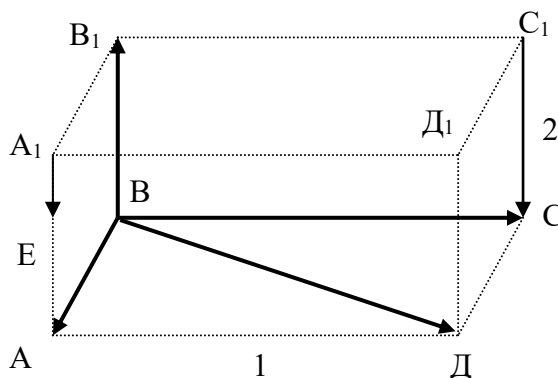
Примеры решения задач

Задача 1. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 5 кв.ед. Верно ли утверждение $\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AD} = 5$?

Ответ: нет; $\left| \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AD} \right| = 5.$

Задача 8. $ABCD$ - квадрат,

$$|BB_1| = 2; \quad |\overrightarrow{AD}| = 1; \quad |\overrightarrow{A_1E}| = |\overrightarrow{EA}|.$$



Какой из векторов $\vec{BB_1}$; $\vec{CC_1}$; $\vec{A_1E}$; $\vec{BD}$ является векторным произведением $\vec{BC}$ $\vec{BA}$?

Ответ: $\vec{A_1T}$.

1. Что происходит с векторным произведением при перестановке его сомножителей?
2. В наших случаях векторное произведение равно нулю?
3. Чему равен векторный квадрат?

Задача 2. Сила $\vec{F} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ приложена к точке $M(1; 2; -1)$. Найти момент силы относительно точки $A(2; 1; -3)$.

Решение

Из механического смысла векторного произведения

$$m_A \vec{F} = \vec{AM} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Найдем $\vec{AM}$; $\vec{AM} = \{-1; 1; 2\}$, а $\vec{F} = \{3; -1; 2\}$, тогда

$$m_A \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}.$$

А как найти величину момента силы?

Задача 3. Даны точки $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$.

Вычислить $S_{\Delta ABC}$ и h_B .

Решение

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\square} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|, \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \{-12; -24; 8\}.$$

$$\Delta S = \frac{1}{2} \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 14 \text{ кв.ед.}$$

$$h_B = \frac{2S_{\Delta}}{|\vec{AC}|} = \frac{28}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 6^2}} = \frac{28}{2\sqrt{13}} = \frac{14\sqrt{13}}{13}.$$

1. Дайте определение смешанного произведения. Что является результатом: вектор, скаляр?
2. Рассказать по плакату о геометрическом смысле смешанного произведения.

Задача 4. Лежат ли точки

$$A(-4; 0; 1), B(9; -2; 1), C(1; 3; -1), D(3; 0; 5)$$

в одной плоскости?

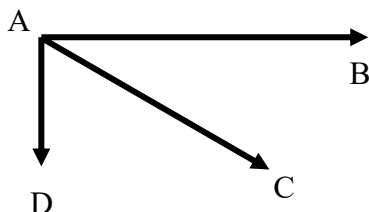
Решение

Условие компланарности $\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD} = 0$. Найдем

$$\vec{AB} = \{13; -2; 0\},$$

$$\vec{AC} = \{5; 3; -2\},$$

$$\vec{AD} = \{8; 0; 4\}.$$



Подсчитаем смешанное произведение

$$\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} —$$

одной плоскости, а следовательно **A, B, C, D** принадлежит одной плоскости.

Резерв. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами в точках

$$D(3; -1; 2), A(3; 2; 0), B(-1; 2; 3), C(2; 1; -3).$$

Ответ: $V = 8\frac{5}{6} \text{ед}^3.$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

- Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, для которых $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=6$ и $\varphi = (\vec{a} \ \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$. Найти:
 а) $|\vec{a} \ \vec{b}|$; б) $|(2\vec{a} + 3\vec{b}) \ (\vec{a} - 4\vec{b})|$.
 Ответ: а) 6; б) 66.
- Найти площадь и высоту BD треугольника с вершинами A(1, -2, 8), B(0, 0, 4) и C(6, 2, 0).
 Ответ: $S = 7\sqrt{5}$, $BD = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.
- Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$. Выяснить, правой или левой является тройка векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.
 Ответ: $V = 51$, тройка векторов левая.
- Построить пирамиду с вершинами O(0, 0, 0), A(5, 2, 0), B(2, 5, 0) и C(1, 2, 4). Вычислить:
 а) объем пирамиды;
 б) площадь грани ABC;
 в) высоту пирамиды, опущенную на грань ABC.
 Ответ: а) 14; б) $6\sqrt{3}$; в) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.
- Вычислить произведение $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} - \vec{c})(\vec{c} - \vec{a})$.
 Ответ: 0.
- Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках A(2, 1, -1), B(3, 0, 1), C(2, -1, 3). Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.
 Ответ: D(0, 8, 0) или D(0, -7, 0).
- Дано: $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, \varphi = (\vec{a} \ \vec{b}) = 2\pi/3$. Найти: $|\vec{a} \ \vec{b}|, |(\vec{a} + 2\vec{b}) \ (-\vec{a} + 3\vec{b})|$.
- Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (8, 4, 1)$ и $\vec{b} = (2, -2, 1)$.
- При каком значении λ векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \lambda\vec{k}, \vec{b} = (0, 1, 0)$ и $\vec{c} = (3, 0, 1)$ компланарны?
- Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (1, -2, 1), \vec{b} = (3, 2, 1), \vec{c} = (1, 0, -1)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №8
Основные теоремы о дифференцируемых функциях

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.

Решение типовых задач

Задача 1. Найти уравнение плоскости параллельной оси Oz и проходящей через точки $A = (2; 3; -1)$, $B(-1; 2; 4)$

Решение

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точки A и B , то координаты этих точек удовлетворяют уравнению плоскости. Получим

$$2A + 3B + D = 0$$

$$-A + 2B + D = 0.$$

Методические указания. Вспомнить метод решения систем однородных линейных уравнений, метод Крамера. Обратит внимание курсантов на множество решений данной системы.

$$\begin{array}{l} 2A + 3B = -D \\ -A + 2B = -D, \end{array} \quad \text{пусть} \quad \begin{array}{l} D = t \\ \Delta = 0. \end{array}$$

Используем формулы Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7,$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} -t & 3 \\ -t & 2 \end{vmatrix} = -2t + 3t = t; \quad \Delta B = \begin{vmatrix} 2 & -t \\ -1 & -t \end{vmatrix} = -2t - t = -3t.$$

$$A = \frac{t}{7}; \quad B = -\frac{3t}{7}; \quad D = t.$$

Тогда уравнение плоскости примет вид: $\frac{t}{7}x - \frac{3t}{7}y + t = 0$, после преобразований разделим на $t \neq 0$,

$$tx - 3ty + 7t = 0,$$

$$x - 3y + 7 = 0.$$

Ответ: $x - 3y + 7 = 0$.

Задача 2. Какие отрезки на координатных осях отсекает плоскость

$$2x + 3y - 5z + 30 = 0?$$

Проблема: Какое из известных уравнений плоскости выбрать для решения задачи?

Ответ: уравнение в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Решение

$$2x + 3y - 5z + 30 = 0;$$

$$\frac{2x}{-30} + \frac{3y}{-30} + \frac{-5z}{-30} = 1;$$

$$\frac{x}{-15} + \frac{y}{-10} + \frac{z}{6} = 1.$$

Ответ: $a = -15; b = -10; c = 6$.

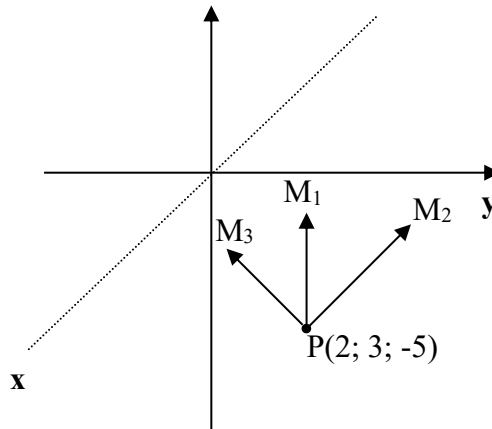
Задача 3. Из точки $P(2; 3; -5)$ на координатные плоскости опущены перпендикуляры. Найти уравнение плоскости, проходящей через их основания.

Проблема. Какими будут координаты точек, через которые нужно провести плоскость?

Какое уравнение плоскости взять для решения задачи?

Решение

Точка M_1 лежит на координатной плоскости xOy , следовательно, координата $z = 0$. $M_1(2; 3; 0)$.



Аналогично: $M_2(2; 0; -5)$, $M_3(0; 3; -5)$. Используем уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Методические указания

Сначала записать это уравнение в общем виде, затем использовать координаты точек $M_1; M_2; M_3$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1-1 & 0-2 & 4+1 \\ -2-1 & -1-2 & 1+1 \end{vmatrix} = 0.$$

Какие методы вычисления определителей вы знаете?

Вычислим определитель одним из них.

Ответ: $x - y + 1 = 0$.

Задача 4. Через точку $M(2; 3; -1)$ провести плоскость параллельно плоскости

$$2x - 3y + 5z - 4 = 0.$$

Решение

Уравнение связки плоскостей, проходящих через точку **M** имеет вид:

$$A(x - 2) + B(y - 3) + C(z + 1) = 0.$$

Используем условие параллельности плоскостей

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{-3} = \frac{C}{5} = k; \quad A = 2k; \quad B = -3k; \quad C = 5k; \quad 2k(x - 2) - 3k(y - 3) + 5k(z + 1) = 0;$$

после преобразований получим $2x - 3y + 5z + 10 = 0$.

Ответ: $2x - 3y + 5z + 10 = 0$.

Задача 5. Найти угол между плоскостями

$$x + 2z - 6 = 0 \quad \text{и} \quad x + 2y - 4 = 0.$$

Решение

$$\cos \phi = \frac{1 + 0 + 0}{\sqrt{1 + 4} \sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\phi = \pm \arccos \frac{1}{5}$.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Типовой вариант самостоятельной работы по теме

«Аналитическая геометрия в пространстве».

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(4, -4, 2)$ и параллельной плоскости Oxz .
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5, 4, 3)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, -3, 1)$, параллельно векторам $\vec{a} = (-3, 2, 1)$ и $\vec{b} = (1, 2, 3)$.
4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0, 2, 0)$, $M_2(2, 0, 0)$ и образующей угол 60° с плоскостью $x = 0$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(7, 6, 7)$, $M_2(5, 10, 5)$ и $M_3(-1, 8, 9)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №9

Комплексные числа. Определение комплексного числа. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Тригонометрическая форма комплексного числа.

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Дайте определение функции одной переменной.
2. Что называется областью определения и областью значений функции одной переменной.
3. Дать сравнительный анализ способов задания функции.
4. Дайте определение обратной функции.
5. Какая функция называется заданной параметрически?
6. Что понимается под множеством?
7. Дайте определение интервала, сегмента, окрестности точки. Какова их геометрическая интерпретация.
8. Каков геометрический смысл:
а) $|x| < R$, б) $|x| > R$, в) $|x| = R$, г) $|x - a| < R$, д) $|x - a| > R$, ж) $|x - a| = R$.

Примеры решения задач

1. Найти область определения функции.

Методические рекомендации:

1. Найти область определения функции: $y = \frac{1}{\ln(1-x)} + \sqrt{x+2}$;

Решение.

$$y = \frac{1}{\ln(1-x)} + \sqrt{x+2}; \quad \begin{array}{llll} 1-x > 0, & x < 1, & x < 1, \\ \ln(1-x) \neq 0, & 1-x \neq 1, & x \neq 0, \\ x+2 \geq 0. & x \geq -2. & x \geq -2. \end{array}$$
$$x \in [-2; 0) \cup (0; 1).$$

2. Найти область определения функции: $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-9}$.

Решение.

В данном примере – радикал четной степени, поэтому область определения задается системой неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq 9; \end{cases} \quad x \geq 9.$$

Ответ: $[9; +\infty)$.

3. Найти область определения функции: $f(x) = \sqrt{\frac{3x+14}{3x-1}}$.

Решение.

$$\frac{3x+14}{3x-1} \geq 0, \quad \frac{x+\frac{14}{3}}{x-\frac{1}{3}} \geq 0. \text{ Методом интервалов находим } x > \frac{1}{3}, \quad x \neq -\frac{14}{3}.$$

Ответ: $-\frac{14}{3}; -\frac{1}{3} \cup \frac{1}{3}; +\infty$.

4. Найти область определения функции: $f(x) = \lg(x+7) - \frac{1}{2}\lg(2x-1)$.

Решение.

Область определения данной функции задается системой неравенств

$$\begin{cases} x+7 > 0, \\ 2x-1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -7, \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases} \quad x > \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}; +\infty$.

5. Найти область определения функции: $f(x) = \log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3$.

Решение.

Область определения данной функции задается системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+5} > 0, \\ \frac{x-1}{x+5} \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -5, x > 1, \\ x - \text{любое}; \end{cases} \quad x < -5, x > 1.$$

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$.

6. Найти область определения функции: $f(x) = \lg(x-1) - \arcsin \frac{x}{3}$.

Решение.

Область определения данной функции задается системой неравенств

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ -1 \leq \frac{x}{3} \leq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ -3 \leq x \leq 3; \end{cases} \quad 1 < x \leq 3.$$

Ответ: $(1; 3]$.

2. Определить четность функции..

Методические рекомендации:

1. Определить четность функции $f(x) = \frac{x^2}{\cos 2x}$.

Решение.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\cos(-2x)} = \frac{x^2}{\cos 2x} = f(x), \text{ т.к. } f(-x) = f(x), \text{ следовательно функция четная.}$$

2. Определить четность или нечетность функции: $y = 2^x$.

Решение.

$$y = 2^x; \quad y(-x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} \quad \begin{matrix} y(x) \\ -y(x) \end{matrix} \text{ -- ни четная, ни нечетная.}$$

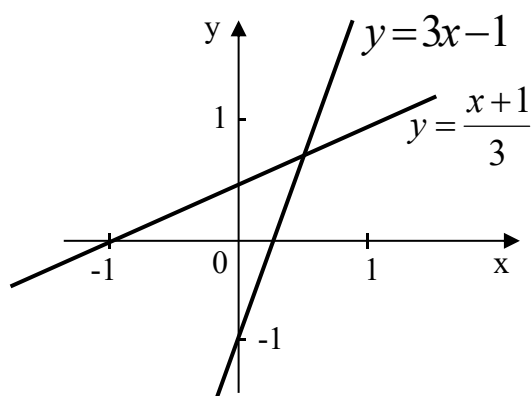
3. **Найти функцию обратной данной и построить график.**

Методические рекомендации:

1. Найти функцию обратной данной $y = 3x - 1$ и построить график.

Решение

$$x = \frac{y+1}{3} \quad \text{или} \quad y = \frac{x+1}{3}.$$



2. Найти обратные функции:

1) $y = x^3$;

Решение.

Выразим x из функции, а затем обозначим аргумент через x , а функцию через y , получим функцию обратную данной $x = \sqrt[3]{y}$; $y = \sqrt[3]{x}$;

2) $y = e^x$;

Решение.

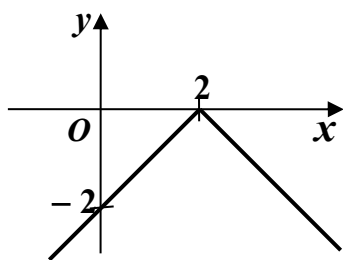
$$y = e^x; \quad x = \ln y; \quad y = \ln x.$$

4. Построить график функции $y = -|x - 2|$.

Решение.

1) если $x - 2 \geq 0$ то $|x - 2| = x - 2$ и $y = -x + 2$ для $x \geq 2$;

2) если $x - 2 < 0$ то $|x - 2| = -(x - 2)$ и $y = x - 2$ для $x < 2$.



5. Определить при каких **X** будут справедливы неравенства:

а) $|x| > 2$, б) $|x - 1| \leq 3$, в) $|x - 3| < 2$, д) $|x^2 + 6x + 8| > 0$.

4. Найти период функции.

Методические рекомендации:

1. Найти период функции: $f(x) = 10 \sin 3x$.

Решение.

$$10 \sin(3x + 2\pi) = 10 \sin 3x + \frac{2\pi}{3}; \quad T = \frac{2\pi}{3}.$$

Для функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ наименьший положительный период $T = 2\pi$, а для $y = \tan x$ и $y = \cot x$ наименьший положительный период $T = \pi$.

2. Найти период функции: $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{3x}{2}$.

Решение.

$$\operatorname{ctg} \frac{3x}{2} = \operatorname{ctg} \left(\frac{3x}{2} + \pi \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{3}{2}x + \frac{2\pi}{2} \right); \quad T = \frac{2\pi}{3},$$

3. $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$.

Решение.

Область определения функции – вся числовая ось Ox , кроме точек $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, если точка x принадлежит области определения данной функции, то точки $x + 2\pi, x - 2\pi$ также принадлежат этой области определения;

$$f(x + 2\pi) = \frac{\cos(x + 2\pi)}{1 + \sin(x + 2\pi)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} = f(x).$$

Ответ: наименьший период данной функции $T = 2\pi$.

4. $f(x) = |\sin x|$.

Решение.

Областью определения функции $f(x)$ является вся числовая ось Ox ; для любого x точки $x + \pi$ и $x - \pi$ принадлежат этой области определения,

$$f(x + \pi) = |\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x).$$

Ответ: данная функция является периодической с периодом π .

5. $f(x) = 3\sin x + \sin 2x$.

Решение.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что число π не является периодом данной функции.

Возьмем

$$T = 2\pi, f(x + 2\pi) = 3\sin(x + 2\pi) + \sin 2(x + 2\pi) = 3\sin x + \sin 2x = f(x).$$

Ответ: $T = 2\pi$ – наименьший положительный период данной функции.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант	5 вариант
Задача 1. Определить при каких X будут справедливы неравенства:				
$ x - 5 \geq 2$	$ x - 1 \leq 3$	$ x - 3 < 2$	$ x - 4 > 2$	$ x^2 - 5x + 6 > 0$
Задача 2. Найти область определения функции:				
$y = \frac{1}{\sqrt[4]{5-x}}$	$y = \frac{5}{1-x}$	$y = \frac{2}{\sqrt{x+5}}$	$y = \frac{1}{\ln(3-x)}$	$y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$
Задача 3. Определить четность:				
$y = 2^x + \frac{1}{2}^x$	$f(x) = x^3 + 2x$	$f(t) = \lg \frac{1-t}{1+t}$	$f(x) = \frac{x^2}{\cos 2x}$	$f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$

Задача 4. Найти период функции:

$$y = \cos \frac{x}{3}$$

$$f(x) = \operatorname{tg} \frac{3x}{2}$$

$$y = \sin 3x \cos 3x;$$

$$y = 2 \cos \frac{x}{4}$$

$$f(x) = \operatorname{ctg} \frac{3x}{2}$$

Задача 5 . Найти обратные функции:

$$y = x^3 + 3$$

$$y = 2e^x$$

$$y = 2^x - 7$$

$$y = 5^{-x} + 5$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №10

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Определение предела функции в точке и его геометрический смысл.
2. Теорема единственности предела.
3. Свойства функции, имеющей конечный предел в точке.
4. Односторонние пределы и их геометрическая интерпретация.
5. Теорема о необходимом и достаточном условиях существования предела функции в точке.
6. Предел функции на бесконечности.
7. Определение бесконечно малой величины, примеры.
8. Свойства бесконечно малых величин.
9. Определение бесконечно больших величин.
10. Сравнение бесконечно малых величин.

Примеры решения задач

1. Найти предел функции.

Методические рекомендации:

Задача 1. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{3x} = \frac{2}{3}$.

Доказательство

$$\frac{2x+3}{3x} - \frac{2}{3} = \frac{2x+3-2x}{3x} - \frac{1}{x}; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ т.е. разность } \frac{2x+3}{3x} - \frac{2}{3} \text{ бесконечно}$$

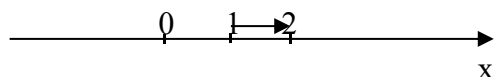
малая величина $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{3x} = \frac{2}{3}$.

Задача 2. Найти предел функции:

а) $y = \frac{5}{2-x}$ при $x \rightarrow 2^-$ (слева).

Решение:

Переменная стремится к точке $x = 2$, оставаясь все время меньше 2, следовательно,

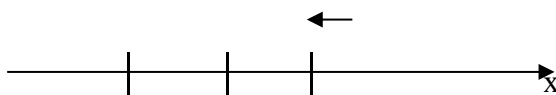


разность $2-x > 0$ и сама дробь положительна. Тогда по свойству

знакопостоянства, получим, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5}{2-x} = \infty$.

б) $y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5}{2-x}$ при $x \rightarrow 2^+$ (справа).

Решение:



Переменная стремится к точке $x = 2$, оставаясь все время больше 2, следовательно, разность $2 - x < 0$ и сама дробь отрицательна. Тогда по свойству знакопостоянства, получим,

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{5}{2-x} = -$$

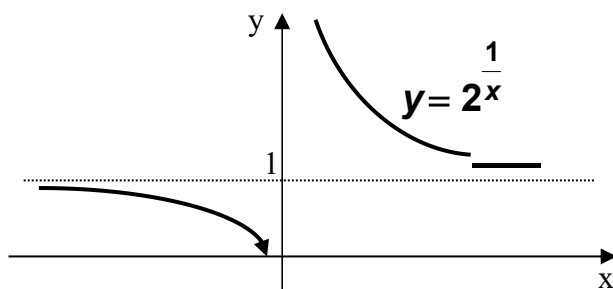
Задача 3. Найти предел функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$ при $x \rightarrow 0-; x \rightarrow 0+$.

1) При $x \rightarrow 0-$ переменная $x < 0$, следовательно, $\frac{1}{x} < 0$. Преобразуем функцию

таким образом, чтобы показатель степени был положительным, получим $\frac{1}{2^{-\frac{1}{x}}}$. В

этом случае, дробь $-\frac{1}{x} > 0$, т.е. показатель степени положителен и $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{2^{-\frac{1}{x}}} = 0$,

$$2) \lim_{x \rightarrow 0+} 2^{\frac{1}{x}} = .$$



2. Найти пределы функций при $x \rightarrow x_0$.

Методические рекомендации:

Задача 1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 7x + 2}{x - 1}$.

Решение:

Замечаем, что при $x \rightarrow 1$ знаменатель $x - 1$ и числитель дроби стремятся к нулю. Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности нужно

числитель и знаменатель дроби разложить на простейшие сомножители и сократить дробь на нулевой множитель $(x - 1)$.

Чтобы числитель разложить на множители, надо решить квадратное уравнение $5x^2 - 7x + 2 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 7x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1) x - \frac{2}{5}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (5x - 2) = 3.$$

Задача 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x};$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{x+1})(x + \sqrt{x+1})}{x(1 + \sqrt{x+1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1 + \sqrt{x+1}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Найти пределы функций при $x \rightarrow$:

Методические рекомендации:

Задача 1. $\lim_{x \rightarrow} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + 2x};$ Решение.

$$\lim_{x \rightarrow} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + 2x} = \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow} \frac{3 - 0}{5 + 0} = \frac{3}{5}$$

Числитель и знаменатель дроби нужно разделить почленно на степень x наибольшую в числителе и знаменателе и воспользоваться тем, что величина обратная бесконечно большой является бесконечно малой.

4. Вычислить пределы, используя первый замечательный предел

Методические рекомендации:

Задача 1. Использовать первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3;$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} (1-t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{t} = \frac{\pi}{2}; \quad 1-x=t; x=1-t; t \rightarrow 0.$

в) $\lim_{x \rightarrow} x \operatorname{arctg} x =$ ПОЛОЖИМ: $\operatorname{arctg} x = \alpha; x = \operatorname{ctg} \alpha; \alpha \rightarrow 0.$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} \cos \alpha = 1.$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы (1-3)

Вариант 1	
Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6};$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2};$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+x}-1};$ 4. $\lim_{x \rightarrow} (1 + \frac{3}{x})^{x+5}.$	
Вариант 2	

Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} tg 7x \ ctg 2x$; 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} \frac{1+4x}{3+4x}^{2x}$
Вариант 3 Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} \frac{x+8}{x-2}^x$.
Вариант 4 Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^3 - 8}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{3x^2 + 2x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg 7x}{\sin 3x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} \frac{2x-1}{2x+1}^{4x}$
Вариант 5 Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 12x}{tg 4x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} (1 - \frac{5}{x})^{3x+2}$.
Вариант 6 Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 3x^3}{5x^4 + 2x^3}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} ctg 2x \sin 3x$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt{1+x} - 1}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} \frac{3x+1}{3x-2}^{2x+5}$
Вариант 7 Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + x - 6}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{5}}{3x^2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{9+x} - 3}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} (1 - \frac{3}{2x})^{x+5}$
Вариант 8 Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{18x^2 - 9x + 1}{27x^3 - 1}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ctg 7x}{ctg 2x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{(x+1)\sqrt{2+x}}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} \frac{3-4x}{1-4x}^{2x-3}$
Вариант 9 Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 + x^2 - 2x - 8}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{tg 5x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{2x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} \frac{7x-8}{7x+2}^{x+1}$
Вариант 10 Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x + 2}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt[3]{8-x} - \sqrt[3]{8+x}}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{1 - \cos x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} \frac{2x-3}{2x+4}^{4x+1}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №11

Интегральное исчисление функции одной переменной. Таблица интегралов.

Свойства интегралов. Интегрирование подстановкой. Вычисление интегралов от рациональных дробей.

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ИХ РАСКРЫТИЕ

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

- 1) Определение бесконечно малой величины, примеры.
- 2) Свойства бесконечно малых величин.
- 3) Определение бесконечно больших величин.
- 4) Сравнение бесконечно малых величин.
- 5) Какие виды неопределенности вы знаете?
- 6) Как раскрыть неопределенности.

Примеры решения задач

Задание 1. Раскрытие неопределенностей вида $\infty - \infty$:

а)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x})(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x})}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x}} = 1. \end{aligned}$$

Задание 2. Раскрытие неопределенностей вида $0 \cdot \infty$:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} &= \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \\ &= 1 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin \frac{\pi}{2}(1-x)} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin \frac{\pi}{2}(1-x)} = \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4} - x}{\sin \frac{3}{4}\pi + x} = \quad \text{положим } \frac{\pi}{4} - x = \alpha; x = \frac{\pi}{4} - \alpha; \alpha \rightarrow 0.$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sin \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{4} - \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(\pi - \alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{arctg} x = \quad \text{положим: } \operatorname{arctg} x = \alpha; x = \operatorname{ctg} \alpha; \alpha \rightarrow 0.$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} \cos \alpha = 1.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} x \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x = \quad \text{положим: } \operatorname{arctg} x = \alpha; x = \operatorname{tg} \alpha; \alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \alpha \frac{\pi}{2} + \alpha = \lim_{\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{\cos \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \lim_{\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{\cos \alpha} = \\ &-1 \lim_{\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{\sin \frac{\pi}{2} + \alpha} = -1 \cdot 1 = -1. \end{aligned}$$

Задача 3. Использовать второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{x}^x = e; \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e; \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{k}{x}^x = e^k; \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + k\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^k.$$

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = e^2;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (-4x))^{\frac{1}{-4x} \cdot \frac{-4x(1-x)}{1-x}} = e^{-4};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{2x+1}^{2x} = \{1\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1-2}{2x+1}^{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{-2}{2x+1}^{2x} =$$

$$\text{в) } = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{-2}{2x+1}^{\frac{-2}{2x+1} \cdot 2x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x}{2x+1}} = e^{-2}$$

Задача 4. Показать, что $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \rightarrow 0$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \frac{x}{2} \rightarrow 0}} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1 \cdot 1 = 1$$

Задача 5. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

Решение.

Обозначим $\arcsin x = t$. Тогда $x = \sin t$ и $t \rightarrow 0$. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Следовательно, $\arcsin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$.

Задача 6. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$.

Решение. Т.к. $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$, $\sin 3x \sim 3x$ при $x \rightarrow 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$

1)	$\sin x \sim x$.
2)	$\arcsin x \sim x$.
3)	$\operatorname{tg} x \sim x$.
4)	$\operatorname{arctg} x \sim x$.
5)	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.
6)	$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$.
6')	$\ln(1+x) \sim x$.
7)	$a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$.
7')	$e^x - 1 \sim x$.

Решить самостоятельно:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3}{2};$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2+4}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4};$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{2}.$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Вариант 1	
Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+x}-1}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} (1 + \frac{3}{x})^{x+5}.$	
Вариант 2	
Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 7x \operatorname{ctg} 2x$; 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} \frac{1+4x}{3+4x}^{2x}$	
Вариант 3	
Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} \frac{x+8}{x-2}^x.$	
Вариант 4	
Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^3 - 8}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{3x^2 + 2x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 3x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} \frac{2x-1}{2x+1}^{4x}$	
Вариант 5	
Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 12x}{\operatorname{tg} 4x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} (1 - \frac{5}{x})^{3x+2}.$	
Вариант 6	
Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 3x^3}{5x^4 + 2x^3}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \sin 3x$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt{1+x}-1}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} \frac{3x+1}{3x-2}^{2x+5}$	
Вариант 7	
Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + x - 6}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{5}}{3x^2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{9+x}-3}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} (1 - \frac{3}{2x})^{x+5}$	
Вариант 8	
Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{18x^2 - 9x + 1}{27x^3 - 1}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 7x}{\operatorname{ctg} 2x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{(x+1)\sqrt{2+x}}$; 4. $\lim_{x \rightarrow} \frac{3-4x}{1-4x}^{2x-3}$	

Вариант 9

Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 + x^2 - 2x - 8}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 5x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{2x}$; 4.

$$\lim_{x \rightarrow} \frac{7x - 8}{7x + 2}^{x+1}$$
Вариант 10

Вычислить: 1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x + 2}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt[3]{8-x} - \sqrt[3]{8+x}}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{1 - \cos x}$; 4.

$$\lim_{x \rightarrow} \frac{2x - 3}{2x + 4}^{4x+1}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №12

Метод неопределенных коэффициентов. Вычисление интегралов, содержащих иррациональные выражения

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Дайте определения непрерывной функции
2. Классификация точек разрыва
3. Непрерывность сложной функции
4. Действия над непрерывными функциями
5. Сформулировать необходимое и достаточное условия непрерывности функции в точке.
6. Сформулировать свойства функции, непрерывной на отрезке

Примеры решения задач

Задача 1. Построить график функции и исследовать на непрерывность.

$$y = \frac{x+1}{|x+1|}.$$

Какие из условий непрерывности выполнены и какие нет?

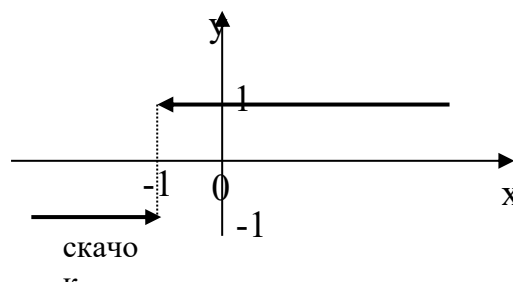
Решение: При $x = -1$ функция не определена (не выполнено).

$$\lim_{x \rightarrow -1-} y = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x+1}{|x+1|} = -1 \quad (\text{выполнено}).$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} y = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x+1}{|x+1|} = 1 \quad (\text{выполнено}).$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} y \neq \lim_{x \rightarrow -1+} y \quad (\text{не выполнено}).$$

$$r = \lim_{x \rightarrow -1+} y - \lim_{x \rightarrow -1-} y = 1 - (-1) = 2.$$



Ответ: Разрыв I-го рода со скачком.

Задача 2. Построить графики функций:

$$1) y = 2^{\frac{1}{x-5}}, \quad 2) y = \begin{cases} x^2, & x \leq 3 \\ 2x+1, & x > 3 \end{cases}, \quad 3) y = \begin{cases} 1-x^2, & x < 0 \\ (x+1)^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4-x, & x > 2 \end{cases}$$

$$4) y = \frac{\sin x}{|x|} \text{ исследовать на непрерывность и вычислить скачок.}$$

Ответ: $x = 0$ точка разрыва I-го рода, $r = 2$.

Задача 3. Как показать непрерывность функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ 3x - 1, & x > 1 \end{cases} \quad \text{в точке } x = 1?$$

Задача 4. Исследовать функцию $y = x^2 - 2x + 3$ на непрерывность в $\forall$ точке " x " (по определению $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$).

Решение

$$D(f) = \mathbb{R}; \quad x + \Delta x; \quad y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 3;$$

$$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 2x - 2\Delta x + 3 - x^2 + 2x - 3;$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2 - 2\Delta x;$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x\Delta x + \Delta x^2 - 2\Delta x) = 0$$

$y = x^2 - 2x + 3$ - непрерывна в любой точке " x ".

Задача 5. Указать точку разрыва функции $y = \frac{4}{x-2}$, найти $\lim_{x \rightarrow 2-} ; \lim_{x \rightarrow 2+}$ и построить кривую.

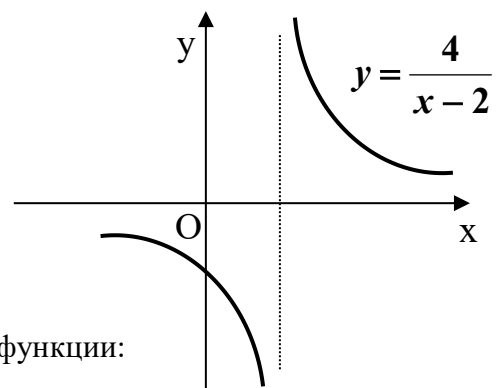
Решение

1) $x = 2$ - точка разрыва,

$$2) \lim_{x \rightarrow 2-; (x < 2)} \frac{4}{x-2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2+; (x > 2)} \frac{4}{x-2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x-2} = 0.$$

X	-2	0	1	3	4	6
Y	-1	-2	-4	4	2	1

Разрыв II рода.



Задача 6. Найти точки разрыва и построить графики функции:

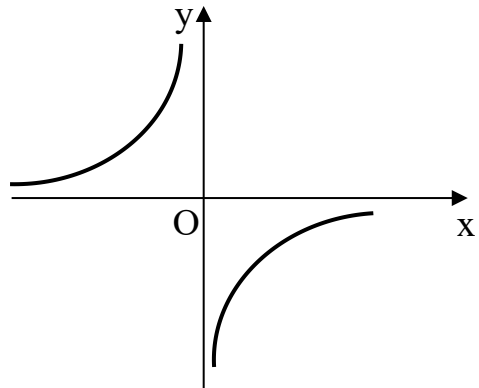
$$1) y = -\frac{6}{x}; \quad y = \operatorname{tg} x.$$

Решение

$$1) y = -\frac{6}{x}; \quad x = 0 - \text{точка разрыва.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} y = \lim_{x \rightarrow 0-} -\frac{6}{x} = + \quad ;$$

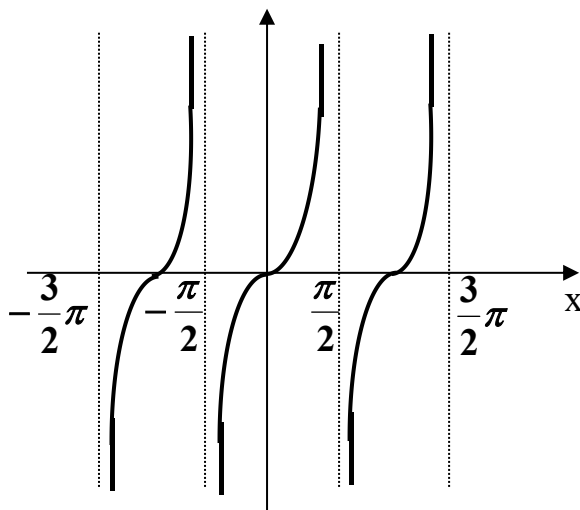
$$\lim_{x \rightarrow 0+} y = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{6}{x} = - \quad ;$$



$x = 0$ - точка разрыва II рода.

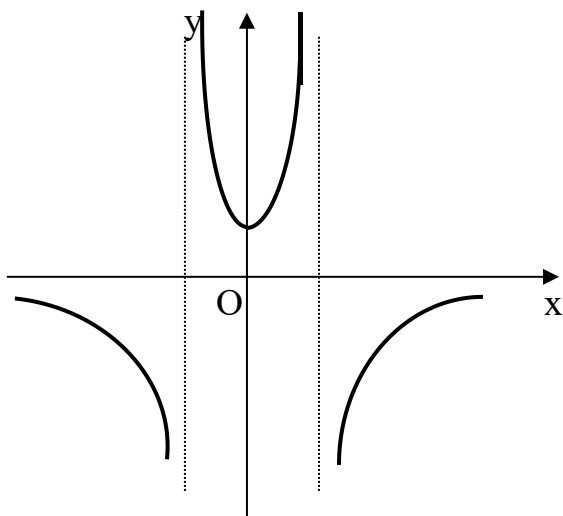
$$2) y = \operatorname{tg} x; \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} - \text{точка разрыва.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = + \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = - \quad ; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k - \text{точки разрыва II рода.}$$



Задача 7. Найти точки разрыва и построить график функции

$$y = \frac{4}{4-x^2}; \quad x = \pm 2 - \text{точки разрыва.}$$



$$1) \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{4}{4-x^2} = -; \quad \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{4}{4-x^2} = +.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{4}{4-x^2} = -; \quad \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{4}{4-x^2} = -;$$

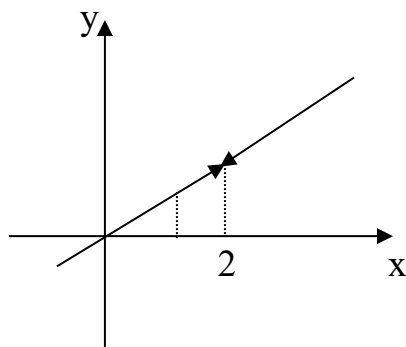
$x = \pm 2$ – точки разрыва II рода.

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm} \frac{4}{4-x^2} = 0.$$

$$4) \text{ При } x = 0; \quad y = 1.$$

Задача 8. Построить график функции $y = \frac{x}{2}, \quad x \neq 2$ и указать точку разрыва. Какие из условий непрерывности в этой точке выполнены и какие не выполнены?

Решение



1) Функция определена $\forall x$;

$$2) \lim_{x \rightarrow 2-} y = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x}{2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2+} y = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x}{2} = 1.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2-} y = \lim_{x \rightarrow 2+} y.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} y = f(2).$$

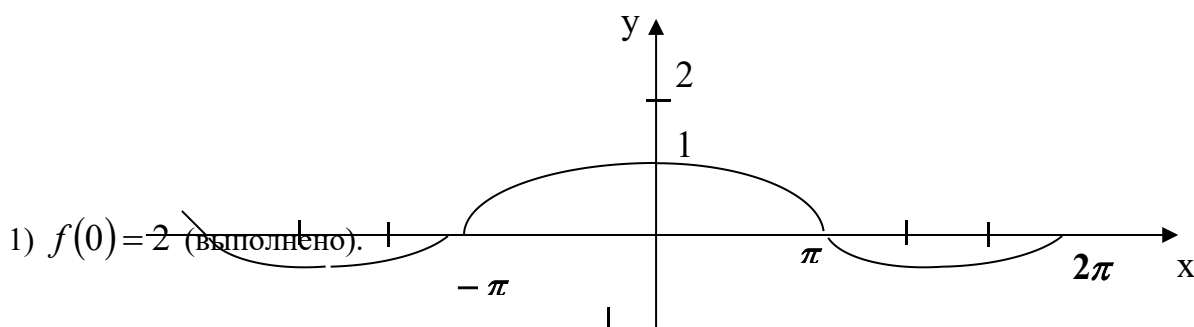
Первые два условия выполняются, а 3-е – нет. Разрыв I рода. Достаточно положить $f(2) = 1$ и получим непрерывную функцию (устранимый разрыв).

Задача 9. Построить график функции

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 2 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Указать точки разрыва, какие условия непрерывности выполняются и какие нет.

Решение



$$1) f(0) = 2 \text{ (выполнено).}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{выполнено}).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{выполнено}).$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \quad f(0) \quad (\text{не выполнено}).$$

3-ье условие не выполнено, разрыв I-го рода.

Задача 10. Указать точку разрыва функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

Найти $\lim_{x \rightarrow 0-} y$; $\lim_{x \rightarrow 0+} y$; $\lim_{x \rightarrow \pm} y$.

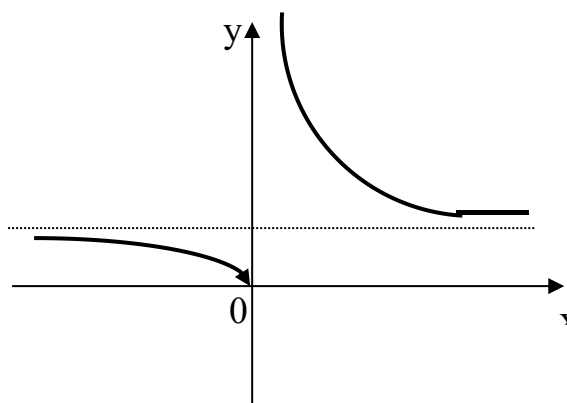
Решение

$$\lim_{x \rightarrow 0-} y = \lim_{x \rightarrow 0-} 2^{\frac{1}{x}} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} y = \lim_{x \rightarrow 0+} y = \lim_{x \rightarrow 0+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm} y = \lim_{x \rightarrow \pm} 2^{\frac{1}{x}} = 1.$$

$x = 0$ точка П рода.

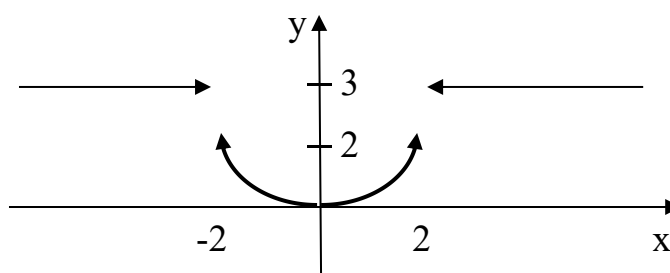


Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Построить график функции

$$y = f(x) = \begin{cases} 0,5x^2; & |X| < 2 \\ 2,5 & ; \quad |X| = 2 \\ 3 & ; \quad [X] > 2. \end{cases}$$

Построение



$x = \pm 2$ точки разрыва I рода.

2. Исследовать на непрерывность функцию $y = 5^{\frac{1}{x+5}}$ и построить ее график.
3. Построить график функции

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 2 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Указать точки разрыва, какие условия непрерывности выполняются и какие нет.

4. Функция $y = f(x)$ задана различными аналитическими выражениями в различных областях изменения независимой переменной. Найти точки разрыва функции, если они существуют, и построить ее график.

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < -1 \\ 2 - 2x, & -1 \leq x < 1 \\ \ln x, & 1 \leq x \end{cases}$$

5. Задана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента. Установить: является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных аргументов; в случае разрыва функции найти ее пределы при приближении к точке разрыва справа и слева и определить тип точки разрыва.

$$f(x) = 10^{\frac{1}{x-3}}, x_1 = 3,5, x_2 = 3$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №13

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Понятие функции нескольких переменных. Частные производные.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Дать определение производной функции.
2. Сформулировать геометрический смысл.
3. Сформулировать физический смысл производной функции.
4. Записать уравнение касательной, нормали к кривой.
5. Сформулировать необходимое условие дифференцируемости.
6. Записать формулу для производной сложной функции.
7. Дифференцирование функций, заданных неявно.
8. Дифференцирование функций заданных параметрически.
9. Дифференцирование степенно-показательной функции

Примеры решения задач

- 1. Найти производные функций, применяя таблицу производных и правила дифференцирования:**

1) $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$;

Решение.

$$\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5 = \frac{1}{3}(x^3) - 2(x^2) + 4x - 5 = x^2 - 4x + 4;$$

2) $x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$;

Решение.

$$x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5} = x + (x^{-2}) - \frac{1}{5}(x^{-5}) = 1 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}.$$

3) $(x^2 \cos x)$;

Решение.

$$(x^2 \cos x) = (x^2) \cos x + x^2(\cos x) = 2x \cos x - x^2 \sin x.$$

$$4) \frac{x^2}{x^2 + 1} ;$$

Решение.

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{(x^2)(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Методические рекомендации:

Обратить внимание на то, что таблицу производных надо знать наизусть, чтобы свободно ею пользоваться.

1.	$C = 0$	15.	$(\sin u) = \cos u \cdot u$
2.	$x = 1$	16.	$(\cos u) = -\sin u \cdot u$
3.	$(u + v - w) = u + v - w$	17.	$(\operatorname{tg} u) = \frac{u}{\cos^2 u} = \sec^2 u \cdot u$
4.	$(u \cdot v) = u \cdot v + uv$	18.	$(\operatorname{ctg} u) = -\frac{u}{\sin^2 u} = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u$
5.	$(c \cdot u) = c \cdot u$	19.	$(\sec u) = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot u$
6.	$\frac{u}{v} = \frac{u \cdot v - uv}{v^2}.$	20.	$(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{ctg} u \cdot u$
7.	$\frac{c}{v} = -\frac{cv}{v^2};$	21.	$(\arcsin u) = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}; u < 1$
8.	$\frac{u}{c} = \frac{u}{c};$	22.	$(\arccos u) = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}; u < 1$
9.	$(u^n) = n \cdot u^{n-1} \cdot u$	23.	$(\operatorname{arctg} u) = \frac{u}{1+u^2}$
10.	$(\sqrt{u}) = \frac{u}{2\sqrt{u}}$	24.	$(\operatorname{arcctg} u) = -\frac{u}{1+u^2}$
11.	$(a^u) = a^u \ln a \cdot u$	25.	$(\operatorname{sh} u) = \operatorname{ch} u \cdot u$
12.	$(e^u) = e^u \cdot u, (e^x) = e^x$	26.	$(\operatorname{ch} u) = \operatorname{sh} u \cdot u$
13.	$(\log_a u) = \frac{u}{u \ln a}$	27.	$(\operatorname{th} u) = \frac{u}{\operatorname{ch}^2 u}$
14.	$(\ln u) = \frac{u}{u}; (\ln x) = \frac{1}{x}$	28.	$(\operatorname{cth} u) = -\frac{u}{\operatorname{sh}^2 u}$

2. Найти производные функций с помощью теоремы о производной сложной

функции:

Методические рекомендации:

1) $\left((1-5x)^4\right);$

Решение.

$$\left((1-5x)^4\right)' = 4(1-5x)^3(1-5x)' = -20(1-5x)^3.$$

2) $\left(\ln(x^2 + 2x)\right);$

Решение.

$$\left(\ln(x^2 + 2x)\right)' = \frac{(x^2 + 2x)'}{x^2 + 2x} = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x}.$$

3) $\left(a^{\sin x}\right);$

Решение.

$$\left(a^{\sin x}\right)' = a^{\sin x} \ln a \cos x.$$

4) $\arcsin \frac{x}{a};$

Решение.

$$\arcsin \frac{x}{a}' = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Найти производную следующих функций:

1) $y = x \ln x;$

2) $y = \frac{1 + \ln x}{x};$

3) $y = \lg(5x);$

4) $y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2};$

5) $y = \ln(x^2 + 2x);$

6) $y = \ln(1 + \cos x);$

7) $y = \ln \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x;$

8) $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1});$

9) $y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2};$

10) $y = \ln \frac{x^2}{1 - x^2};$

11) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2};$

12) $y = \ln \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}};$

13) $y = \ln x + \sqrt{a^2 + x^2};$

14) $y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2 + \sqrt{x});$

$$15) y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$16) y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1 - ax^4}}.$$

1. Найти производные обратных тригонометрических функций

$$1) y = \sqrt{1 - x^2} + \operatorname{arc} \sin x;$$

$$2) y = x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x;$$

$$3) y = \operatorname{arc} \sin \sqrt{1 - 4x};$$

$$4) y = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a};$$

$$5) y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a};$$

$$6) y = \operatorname{arc} \cos(1 - 2x);$$

$$7) y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{1+x}{1-x};$$

$$8) y = x\sqrt{1 - x^2} + \operatorname{arc} \sin x;$$

$$9) y = \operatorname{arc} \sin(e^{3x});$$

$$10) y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$11) y = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$12) y = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(x^2 + a^2).$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 14

Дифференцирование сложных функций. Неявные функции и их дифференцирование

ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Дать определение производной функции.
2. Сформулировать геометрический смысл.
3. Сформулировать физический смысл производной функции.
4. Записать уравнение касательной, нормали к кривой.
5. Сформулировать необходимое условие дифференцируемости.
6. Записать формулу для производной сложной функции.
7. Дифференцирование функций, заданных неявно.
8. Дифференцирование функций заданных параметрически.
9. Дифференцирование степенно-показательной функции

Примеры решения задач

1. Найти производную функции заданной неявно, пользуясь нужным правилом.

Методические рекомендации:

Дифференцирование функций, заданных неявно.

$$y_x = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$x^2 + y^2 - 4xy - 10y + 4 = 0.$$

Решение.

I способ. $2x + 2yy' - 4y - 4xy' - 10y' = 0$, $yy' - 2xy' - 5y' = 2y - x$,

$$y' = \frac{2y - x}{y - 2x - 5}.$$

II способ. $F_x = 2x - 4y$, $F_y = 2y - 4x - 10$, $y_x = -\frac{2x - 4y}{2y - 4x - 10} = \frac{2y - x}{y - 2x - 5}.$

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

Методические рекомендации:

$$x = a(\cos t + t \sin t)$$

$$y = a(\sin t - t \cos t)$$

$$x_t = a(-\sin t + \sin t + t \cos t) = at \cos t$$

$$y_t = a(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t$$

$$y_t = \frac{y_t}{x_t} = \frac{at \sin t}{at \cos t} = \operatorname{tg} t.$$

3 Найдите производные степенно-показательных функций, используя логарифмическое дифференцирование: $y = x^x$.

Методические рекомендации:

Решение. $\ln y = x \ln x$, $\frac{y}{y} = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$, $y = (\ln x + 1)x^x$.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант	5 вариант
$y = (x^2 + 1)^3$	$y = (3x^5 - x^2 + 2)^2$	$y = \sqrt{x^3 - 2}$	$y = \sqrt{x^2 + x + 1}$	$y = (2x^2 - 3x)^3$
$y = x^2 \cdot 2^x$;	$y = x^2 \cdot e^x$;	$y = \frac{1 + \sin 2x}{x^2}$;	$y = x e^{\sin x}$;	$y = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$;
$y = \ln \frac{e^x}{x^2 + 1}$;	$y = \ln \frac{x^2}{1 - x^2}$;	$y = \ln \frac{x^3 - 3}{2 + x^2}$;	$y = \ln \sqrt{\frac{1 - 2x}{1 + 2x}}$;	$y = \ln \frac{x^2 + 3}{x^2}$;
$5x^2 + 3y - 2y^2 + 2 = 0$.	$2x^3 + 4y^2 - 7y + 5 = 0$.	$3xy + 2y^3 + 7 = 0$.	$x^4 + 3x^2y + 4y^2 - 2 = 0$.	$4x^3 + 3xy - 2y^2 - 8 = 0$.
$r = (\cos \alpha)^{\sin 2\alpha}$	$x^y = y^x$, $y_x = ?$	$y = (\sin x)^{\cos x}$	$r = (\cos 2\alpha)^{\sin \alpha}$	$y = (\sin 2x)^{\cos 2x}$
$x = t^2$ $y = t^3$	$x = 2t^2$ $y = t^3 - 1$	$x = t^3$ $y = t^2 - 2$	$x = 4t^3$ $y = t^4 + 2$	$x = 3t^2$ $y = 2t^3 - 4$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 15

Числовые и степенные ряды. Основные понятия. Прогрессии. Обобщенный гармонический ряд. Признак сходимости Даламбера. Основные понятия.

Сходимость степенных рядов.

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Цель: приложения дифференциального исчисления.

Знать: раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталья и исследование функций по полной схеме.

Уметь: находить исследование функций на экстремум, находить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции, асимптот графика функции.

Владеть: техникой исследования функций и построения графика.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы (семинара), формируемые компетенции или их части:

ОПК-1. Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности

Актуальность: для решения задач профессиональной деятельности необходимо владение техникой исследования функций и построения графика.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

- 1) Какая функция называется убывающей, возрастающей, монотонной?
Примеры.
- 2) Сформулировать признаки монотонности.
- 3) Что называется максимумом (минимум) функции в точке?
- 4) Что значит «функция имеет в точке экстремум»?
- 5) Сформулировать необходимый признак экстремума.
- 6) Какие точки называются стационарными, критическими, подозрительными на экстремум.
- 7) Сформулировать второе правило исследования на экстремум
- 8) Для какого вида неопределённости применяется правило Лопиталья?
- 9) Сформулируйте правило Лопиталья, укажите основные условия его применения.
- 10) Какая функция называется убывающей (возрастающей)?
- 11) Что называется *max (min)* функции?
- 12) Что можно узнать о функции и ее графике, используя элементарное исследование?
- 13) Что можно узнать о функции и ее графике, используя исследование с помощью 1-ой производной?

- 14) В каком случае график функции называется выпуклым, вогнутым?
 15) Что называется точкой перегиба графика функции?
 16) Что можно знать о функции и ее графике, используя исследование с помощью 2-ой производной?

Примеры решения задач

1. Найти пределы по правилу Лопиталя

Задача № 1. Неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} 3x^3 = 3.$$

Задача № 2. Неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x}{2x - 5} = \frac{8}{3}.$$

Задача № 3. Неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x) \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2$$

Здесь правило Лопиталя применили 1 раз.

Задача № 4. Неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + b}{cx^2 + d} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}$$

Задача № 5. Неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Здесь правило Лопиталя применили 2 раза.

Задача № 6. Неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x + x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Задача № 7. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

Задача № 8. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec \varphi - \operatorname{tg} \varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos \varphi}{-\sin \varphi} = 0.$$

2. Определить промежутки монотонности функции

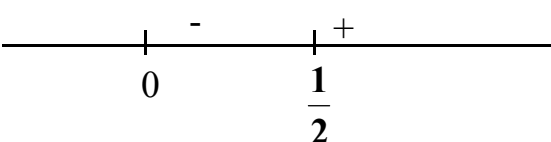
Задача №9 $f(x) = 2x^2 - \ln x$.

Решение

1. $D(f) =]0; +\infty[$.

2. $f'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$.

3. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2} \notin D(f)$; $x = \frac{1}{2}$ - критическая точка.
 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$; но $0 \notin D(f)$.

4) 

Ответ: на $0; \frac{1}{2}$ - функция убывает, $y' < 0$;

на $\frac{1}{2}; +\infty$ - функция возрастает, т.к. $y' > 0$.

3. Исследовать на экстремум

Задача № 10. Дана функция $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

Решение

$D(f) =]-\infty; +\infty[$;

$y' = 2 - 2x^{-\frac{1}{3}} = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 2 \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x}}$;

$$y = 0; \quad \sqrt[3]{x} - 1 = 0 \quad x = 1$$

$$y = \quad; \quad \sqrt[3]{x} = 0 \quad x = 0$$

критические точки.

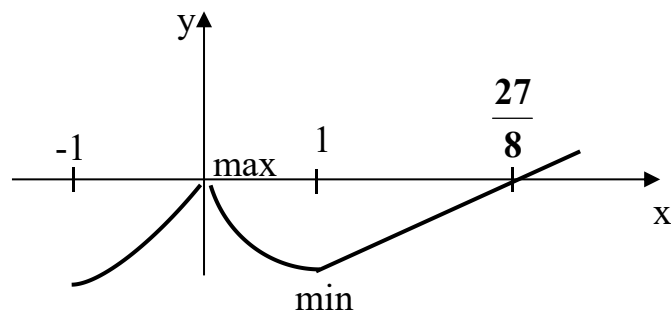
x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; 1[$	1	$]1; +\infty[$
y	+	не сущ.	-	0	+
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$
		max		min	

Нули функции:

1) Ось **OY**; $x = 0$; $y = 0$.

2) Ось **OX**; $y = 0$; $2x - 3\sqrt[3]{x^2} = 0$; $\sqrt[3]{x^2}(2\sqrt[3]{x} - 3) = 0$;
 $2\sqrt[3]{x} = 3$; $x = \frac{27}{8}$.

Построение графика.



2. Исследовать на экстремум

Задача № 11. Найти интервалы вогнутости (выпуклости) и точки перегиба графика функции: $y = x^4 - 6x^2 + 5$.

Решение. Найдем вторую производную. $D(y) = R$.

$$y = 4x^3 - 12x, \quad y' = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$$

Решим уравнение $12(x^2 - 1) = 0$, $x_{1,2} = \pm 1$.

Исследуем знак второй производной в окрестности точек $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Составим таблицу.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y	+	0	-	0	+
y		m. n 0		m. n 0	

$$y(-1) = 0; \quad y(1) = 0.$$

Задача 12. Найти интервалы вогнутости (выпуклости) и точки перегиба графика функции:

$$y = x^{\frac{4}{3}}.$$

Решение. $D(y) = R$. Найдем вторую производную.

$$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}; \quad y'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}.$$

Производная y'' нигде в нуль не обращается. Приравнявая знаменатель дроби к нулю, получаем $9\sqrt[3]{x^2} = 0; \quad x = 0$. В точке $x = 0$ вторая производная не существует ($y'(0) =$). Исследуем знак второй производной в окрестности этой точки:

$$y'(-; 0) > 0; \quad y'(0; +) > 0.$$

Точек перегиба нет.

На интервале $(-; +)$ вогнутость кривой направлена вверх.

3. Найти асимптоты

Задача 13. Найти асимптоты функции $y = \frac{x^2 - x - 6}{x - 2}$.

Решение. $D(y) = R$, кроме $x = 2$. Данная функция имеет вертикальную асимптоту $x = 2$. Найдем односторонние пределы.

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = +; \quad \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = -.$$

Определим наклонную асимптоту $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm} (f(x) - kx).$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm} \frac{x^2 - x - 6}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow \pm} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} - x = \lim_{x \rightarrow \pm} \frac{x - 6}{x - 2} = 1$$

$$y = x + 1.$$

4. Исследовать по полной схеме и построить график функции

Задача 14. Исследовать по полной схеме и построить график функции

$$y = \sqrt[3]{x^2} e^x.$$

1) $D(f) = R$;

2) ни четная, ни нечетная, симметрии графика нет;

3) функция положительна, график весь над осью OX .

$$4). y = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{x^2} \quad e^x = e^x \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = e^x \frac{3x+2}{3\sqrt[3]{x}};$$

$$y = 0_x \quad \text{при} \quad x = -\frac{2}{3};$$

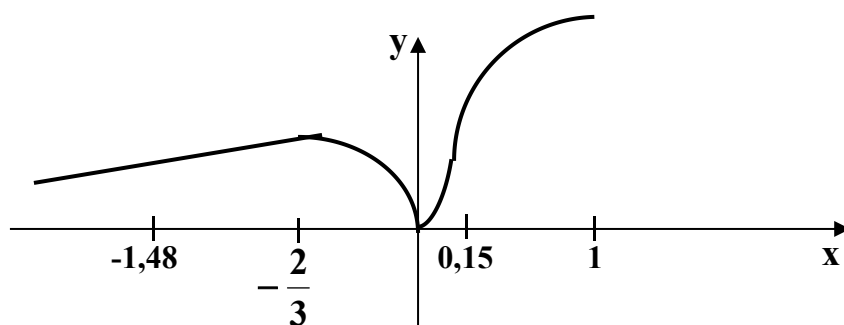
$$y = \quad \text{при} \quad x = 0.$$

$$5) y = e^x \frac{9x^2 + 15x - 1}{9x\sqrt[3]{x}} = e^x \frac{9(x - 0,15)(x + 1,48)}{9x\sqrt[3]{x}};$$

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0,15 \quad \text{и} \quad x_2 = -1,48.$$

	$]-1,48[$	$-1,48$	$-1,48; -\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}; 0$	0	$]0; 0,15[$	$0,15$	$]0,15; +\infty[$
y	+	+	+	0	-		+		+
y	+	+	-		0		-	0	+
y		Перегиб и б $y = 0,26$		max  $y = 0,39$ 18		min  $y = 0$		Перегиб $y = 0,327$ 99	

Строим график функции



Ось OX - горизонтальная асимптота.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 16

Дифференциальные уравнения. Простейшие типы обыкновенных

дифференциальных уравнений первого порядка.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Ответить на контрольные вопросы:

1. Определение дифференциала функции.
2. Геометрический смысл дифференциала.
3. Свойства дифференциала.
4. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.

Задача 1. Сравнить приращение и дифференциал функции $y = 2x^3 + 5x^2$.

$$\Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 2x^3 - 5x^2 = (6x^2 + 10x)\Delta x + (6x + 5)\Delta x^2 + 2\Delta x^3,$$
$$dy = (6x^2 + 10x)dx.$$

Вывод: $\Delta y \approx dy$.

Задача 2. Найти дифференциал функции $y = x^3 - x^2 + 3x - 1$.

1-й способ решения:

$$dy = y' dx. \quad dy = (x^3 - x^2 + 3x - 1)' dx = (3x^2 - 2x + 3)dx.$$

2-й способ решения. Находим непосредственно

$$dy = d(x^3 - x^2 + 3x - 1) = (3x^2 - 2x + 3)dx.$$

Задача 3. $y = x^4 - 3$. $dy(4x^3 - 3^x \ln 3)dx$.

Задача 4. $y = \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

$$dy = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

Задача 5. Вычислить dz для функции $z = \ln(1 + e^{10x}) + \operatorname{arctg} e^{5x}$, если $x = 0$, $dx = 0,1$.

$$dz = \frac{-5 e^{5x}}{1 + e^{10x}} + \frac{10e^{10x}}{1 + e^{10x}} dx = \frac{5(-e^{5x} + 2e^{10x})}{1 + e^{10x}} dx = \frac{5e^{5x}(2e^{5x} - 1)}{1 + e^{10x}} dx;$$

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0} = \frac{5 e^0 (2e^0 - 1)}{1 + e^0} \quad 0,1 = 0,25.$$

Задача 6. $y = \sqrt{x}$, найти $d^2 y$.

$$d^2 y = y dx^2, \quad y = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad d^2 y = \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}} dx^2.$$

Задача 7. $y = x^2 \sin 2x$, найти $d^3 y$.

$$d^3 y = y dx^3.$$

$$y = 2x \sin 2x + x^2 \cdot 2 \cos 2x;$$

$$y = 2 \sin 2x + 4x \cos 2x + 4x \cos 2x - 4x^2 \cos 2x = 2 \sin 2x + 8x \cos 2x - 4x^2 \cos 2x;$$

$$y = 4 \cos 2x + 8 \cos 2x - 16x \cos 2x - 8x \cos 2x + 8x^2 \sin 2x =$$

$$= 12 \cos 2x - 24x \cos 2x + 8x^2 \sin 2x.$$

$$d^3 y = (16 \cos 2x - 24x \cos 2x + 8x^2 \sin 2x) dx^3.$$

Задача 9. Резерв. $y = x^3 e^x$, найти $d^4 y$.

$$d^4 y = y^{(IV)} dx^4,$$

$$y = 3x^2 e^x + x^3 e^x,$$

$$y = 6x e^x + 3x^2 e^x + 3x^2 e^x + x^3 e^x = 6x^2 e^x + 6x e^x + x^3 e^x = e^x (6x^2 + 6x + x^3),$$

$$y = e^x (6x^2 + 6x + x^3) + e^x (12x + 6 + 3x^2) = e^x (9x^2 + 18x + 6 + x^3),$$

$$y^{(IV)} = e^x (9x^2 + 18x + 6 + x^3) + e^x (18x + 18 + 3x^2) = e^x (12x^2 + 36x + 24 + x^3),$$

$$d^4 y = e^x (12x^2 + 36x + 24 + x^3) dx^4.$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

Задача 1. $y = \frac{x-1}{x+1}.$

$$dy = \frac{1(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} dx = \frac{2}{(x+1)^2} dx.$$

Задача 2. $S = a \cos(\omega t + \varphi).$

$$dS = -a \sin(\omega t + \varphi) \omega dt.$$

Задача 3. $y = \sin^2 \sqrt{x}.$

$$dy = 2 \sin \sqrt{x} \cos \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin 2\sqrt{x} dx.$$

Задача 4. $y = x^3 \ln(1+x)$.

$$dy = 3x^2 \ln(1+x) + \frac{x^3}{1+x} dx.$$

Задача 5. Найти dy . а) $y = 2^{\lg^2 x}$; б) $y = \sqrt{1 + \sin^2 x}$; в) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Задача 6. Найти $d^2 y$, если $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Задача 7. Найти $d^3 y$, если $y = \ln x$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №17

Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

Теоретическая часть

Ответить на контрольные вопросы:

1. Дать понятие комплексного числа в алгебраической форме.
2. Дать геометрическую интерпретацию комплексных чисел, объяснить смысл числовой сферы и стереографической проекции.
3. Модуль и аргумент комплексного числа.
4. Чем удобно определение комплексного числа как упорядоченной пары действительных чисел?
5. Какие комплексные числа называются равными, сопряженными?
6. Произведение каких комплексных чисел дает действительное число?
7. Как найти частное двух комплексных чисел?
8. Сколько существует различных значений корня степени n из комплексного числа?
9. Какие комплексные числа называются равными, сопряженными?
10. Произведение каких комплексных чисел равно действительному числу?

Примеры решения задач

Задача 1. Указать точки и построить векторы, изображающие комплексные числа:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + i; & z_2 &= 1 - i; & z_3 &= 1 - 2i; & z_4 &= -3 - 4i; & z_5 &= 2i; \\ z_6 &= 2; & z_7 &= -3; & z_8 &= 2 + 2i; & z_9 &= -1 - i; & z_{10} &= -i. \end{aligned}$$

Задача 2. Выполнить сложение комплексных чисел:

$$z_1 = -3 + 2i; \quad z_2 = 13 - i.$$

$$z_1 = 2 + i; \quad z_2 = 1 + 3i; \quad z_3 = -1 + 2i.$$

$$z_1 = 3 + i; \quad z_2 = -2 + 3i; \quad z_3 = -3 - 2i; \quad z_4 = 4 - 3i.$$

$$(0,4 - 4,2i) + (1,5 + 0,6i) + (1,1 - 0,2i).$$

Решение.

$$z_1 + z_2 = (-3 + 2i) + (13 - i) = (-3 + 13) + (2 - 1)i = 10 + i.$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = (2 + i) + (1 + 3i) + (-1 + 2i) = (2 + 1 - 1) + (1 + 3 + 2)i = 2 + 6i.$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = (3 + i) + (-2 + 3i) + (-3 - 2i) + (4 - 3i) = (3 - 2 - 3 + 4) + (1 + 3 - 2 - 3)i = 2 - i.$$

$$(0,4 - 4,2i) + (1,5 + 0,6i) + (1,1 - 0,2i) = (0,4 + 1,5 + 1,1) + (-4,2 + 0,6 - 0,2)i = 3 - 3,8i.$$

Задача 3. Найти комплексное число z из равенства $2 + 3i = z + 4 + i$.

Решение.

Пусть $z = x + yi$. Тогда $2 + 3i = x + yi + 4 + i$ или

$$2 + 3i = (x + 4) + (y + 1)i.$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда соответственно равны их действительные и мнимые части. Следовательно,

$$x + 4 = 2, \quad y + 1 = 3.$$

Решив эту систему, найдем $x = -2, y = 2$. Таким образом, $z = -2 + 2i$.

Задача 4. Найти разность комплексных чисел:

$$z_1 = -5 + 2i; \quad z_2 = 10 - i$$

$$z_1 = -3 - 2i; \quad z_2 = 13 - i.$$

Решение.

$$z_1 - z_2 = (-5 + 2i) - (10 - i) = (-5 - 10) + (2 + 1)i = -15 + 3i.$$

$$z_1 - z_2 = (-3 - 2i) - (13 - i) = -16 - i.$$

Задача 5. Найти произведение комплексных чисел:

$$z_1 = 3 + 2i; \quad z_2 = -1 - i.$$

$$z_1 = -3 + 2i; \quad z_2 = 13 - i.$$

Решение. Нужно помнить, что $i^2 = -1$

$$z_1 z_2 = (3 + 2i)(-1 - i) = -3 - 3i - 2i - 2i^2 = -1 - 5i.$$

$$z_1 z_2 = (-3 + 2i)(13 - i) = -39 + 3i + 26i + 2 = -37 + 29i.$$

Задача 6. Найти частное от деления комплексного числа z_1 на число z_2 :

$$z_1 = 13 - i; \quad z_2 = -3 + 2i$$

$$z_1 = 2 + 3i; \quad z_2 = 2 - i.$$

$$z_1 = 5 + i; \quad z_2 = 1 + i.$$

$$z_1 = 10 - i; \quad z_2 = -5 + 2i.$$

Решение. Числитель и знаменатель дроби умножаем на число, сопряженное знаменателю. В результате в знаменателе получается действительное число, на которое и делим числитель

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{13-i}{-3+2i} = \frac{(13-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)} = \frac{-39-26i+3i-2}{9+4} = \frac{-41-23i}{13} = -\frac{41}{13} - \frac{23}{13}i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+2i+6i-3}{4+1} = \frac{1+8i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+i}{1+i} = \frac{(5+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{5+i-5i+1}{1+1} = \frac{6-4i}{2} = 3-2i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10-i}{-5+2i} = \frac{(10-i)(-5-2i)}{(-5+2i)(-5-2i)} = \frac{-50+5i-20i-2}{25+4} = \frac{-52-15i}{29} = -\frac{52}{29} - \frac{15}{29}i.$$

Задача 7. Записать комплексное число $z = \frac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$ в алгебраической форме.

Решение.

$$\begin{aligned} z &= \frac{5+i}{(1+i)(2-3i)} = \\ &= \frac{5+i}{2+2i-3i+3} = \frac{5+i}{5-i} = \frac{(5+i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{24+10i}{26} = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i. \end{aligned}$$

Задача 8. Найти значение i^{59}, i^{318} .

Решение.

При делении числа 59 на 4 имеем: $59 = 14 \cdot 4 + 3$, поэтому $i^{59} = i^{14 \cdot 4 + 3} = (i^4)^{14} i^3 = 1(-i) = -i$.

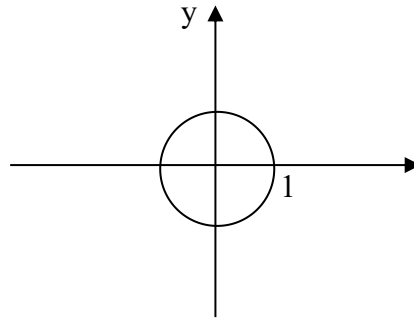
При делении числа 318 на 4 имеем: $318 = 79 \cdot 4 + 2$, поэтому $i^{318} = i^{79 \cdot 4 + 2} = (i^4)^{79} i^2 = 1(-1) = -1$.

Задача 9. Дать геометрическое описание множества всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям

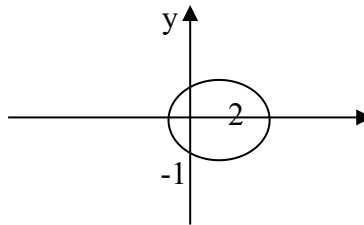
1)

$$|z| = 1; \quad |x + i y| = 1 \sqrt{x^2 + y^2} = 1;$$

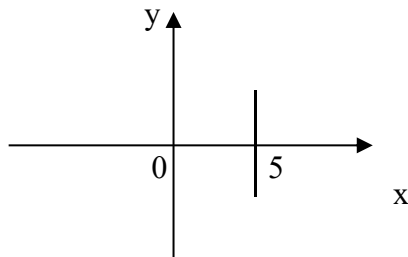
$$x^2 + y^2 = 1$$



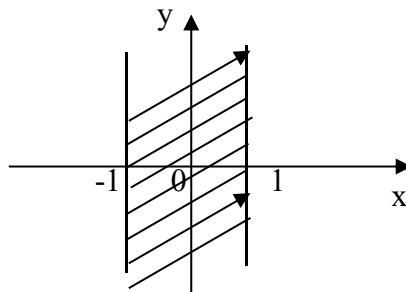
2) $|z - 2 + i| = 3; \quad |z - (2 - i)| = 3$ - окружность с центром в точке $(2; -1)$, радиуса **3**.



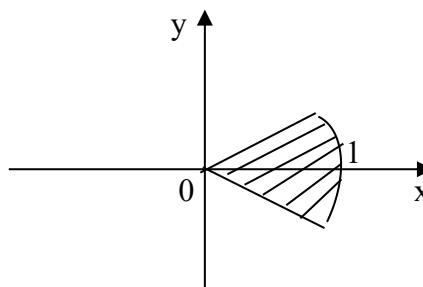
3) $\operatorname{Re} z = 5; \quad z = x + i y \quad x = 5.$



4) $|\operatorname{Re} z| < 1 \quad |x| < 1 \quad -1 < x < 1.$



5) $|z| < 1; -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}.$



Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Вычислить в алгебраической форме $\frac{1+i}{2+3i}.$
2. Вычислить в алгебраической форме $\frac{2-4i}{3+i}.$
3. Вычислить в алгебраической форме $\frac{2-5i}{-1-2i}.$

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы:

1. Баврин, И. И. Высшая математика для химиков, биологов и медиков : учебник и практикум для вузов / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 397 с.
2. Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2026. — 520 с. — ISBN 978-5-507-49866-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/451232> (дата обращения: 31.01.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Канарейкин, А. И. Высшая математика : учебник / А. И. Канарейкин. — Вологда : Инфра-Инженерия, 2024. — 224 с. — ISBN 978-5-9729-1828-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/429098> (дата обращения: 31.01.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

Перечень дополнительной литературы:

1. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд., испр. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2015. - 816 с
2. Математика : учебное пособие / Н. И. Головкин, Т. В. Беспалова, Т. А. Жук [и др.]. — Находка : Дальрыбвтуз, 2023. — 136 с. — ISBN 978-5-88871-772-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/388886> (дата обращения: 31.01.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Высшая математика : методические указания / составитель Т. А. Черняк. — Санкт-Петербург : СПбГУ ГА им. А.А. Новикова, 2024. — 165 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/438716> (дата обращения: 31.01.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Бельчикова, О. Г. Математика : учебно-методическое пособие / О. Г. Бельчикова. — Барнаул : АГАУ, 2021. — 84 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/197218> (дата обращения: 31.01.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
5. Шулика, Н. А. Высшая математика : учебное пособие / Н. А. Шулика. — Хабаровск : ДВГУПС, 2023. — 57 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/433640> (дата обращения: 31.01.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
6. Соловьев, И. А. Стохастическая математика : учебное пособие для вузов / И. А. Соловьев. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 164 с. — ISBN 978-5-8114-8911-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/208595> (дата обращения: 31.01.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
по дисциплине**

Математика

Специальность

30.05.01 Медицинская биохимия

Форма обучения очная

Год начала обучения 2026

Реализуется в 1-2 семестрах

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа как важнейшая форма учебного процесса.

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования - "подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности".

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:

- изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;
- подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ;
- участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.

Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.

Цели и основные задачи СРС

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой специалиста и бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3. Виды самостоятельной работы

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации, содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.):

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателей являются:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание рефератов;

- подготовка к семинарам и лабораторным работам, их оформление;
- составление аннотированного списка статей из соответствующих журналов по отраслям знаний (педагогических, психологических, методических и др.);
- подготовка рецензий на статью, пособие;
- выполнение микроисследований;
- подготовка практических разработок;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов.

(В зависимости от особенностей факультета перечисленные виды работ могут быть расширены, заменены на специфические).

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

- текущие консультации;
- коллоквиум как форма контроля освоения теоретического содержания дисциплин: (в часы консультаций, предусмотренных учебным планом);
- прием и разбор домашних заданий (в часы практических занятий);
- прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р);
- выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин (руководство, консультирование и защита курсовых работ (в часы, предусмотренные учебным планом);
- выполнение учебно-исследовательской работы (руководство, консультирование и защита УИРС);
- прохождение и оформление результатов практик (руководство и оценка уровня сформированности профессиональных умений и навыков);
- выполнение выпускной квалификационной работы (руководство, консультирование и защита выпускных квалификационных работ) и др.

Организация СРС

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Организацию самостоятельной работы студентов обеспечивают: факультет, кафедра, учебный и методический отделы, преподаватель, библиотека, ТСО, ИВТ, издательство и др.

Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя студент должен:

- освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем в соответствии с Государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования (ГОС ВПО/ГОС СПО) по данной дисциплине.

- планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем.

- самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя.

- выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

студент может:

- сверх предложенного преподавателем (при обосновании и согласовании с ним) и минимума обязательного содержания, определяемого ФГОС ВО по данной дисциплине:

- самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;

- предлагать дополнительные темы и вопросы для самостоятельной проработки;

- в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;

- предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;

- использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;

- использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего специалиста, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий.

Общие рекомендации по организации самостоятельной работы

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;
б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как

только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы – это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления исследователя и специалиста

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не только к моральным, нравственным свойствам человека, но и в особенности, постоянно возрастающие требования в области образования – обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной мыслью и языком науки является необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для реализации этой задачи. Ибо во время учебы в вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этого пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения (лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контролирования за их деятельностью. Отметим, что нельзя ограничиваться только приобретением знаний предусмотренных программой изучаемой дисциплины, надо постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т.е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность методов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать его, чтобы изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебы с будущей профессиональной деятельности

Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы.

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно – выучу!»), а когда приходит пора экзаменов, материала, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться в оставшийся промежуток времени.

Работа с книгой.

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги. Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой – это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода). При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;
2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;
3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;
4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;
5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;
2. Выделите главное, составьте план;
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;
4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.
5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

Практические занятия.

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка.

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он

испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Матрицы и действия над ними. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы. Определители, их свойства и вычисление. Обратная матрица. Системы линейных уравнений и методы их решения: метод Гаусса, метод Крамера, матричный метод.

В рамках темы 1 предусмотрено проведение двух самостоятельных работ, выполнение двух индивидуальных домашних заданий и сдача коллоквиума.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$. Найти $-3A^T + 4B^T$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Типовой вариант самостоятельной работы №2

Решить систему линейных уравнений матричным методом и по формулам Крамера:

$$2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0,$$

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0.$$

Индивидуальное домашнее задание №1 (примерный вариант)

Задание №1. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

Задание №2. Найти произведение матриц A и B, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание №3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найти A^{-1} и установить, что $AA^{-1}=E$.

Задание №4. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Индивидуальное домашнее задание №2 (примерный вариант)

Решить данную систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 = -2, \\ 14x_1 + 13x_2 + 16x_3 + 10x_4 = -5, \\ 25x_1 + 24x_2 + 30x_3 + 20x_4 = -9. \end{cases}$ тремя методами:

1) по формулам Крамера; 2) с помощью обратной матрицы; 3) методом Гаусса.

Вопросы для подготовки к коллоквиуму

1. Понятие матрицы. Виды матриц.
2. Операции над матрицами и их свойства.
3. Элементарные преобразования матриц.
4. Ранг матрицы. Ступенчатый вид матрицы.
5. Определители малых порядков и их вычисление.
6. Свойства определителей.
7. Миноры и алгебраические дополнения.
8. Разложение определителя по строке или столбцу.
9. Обратная матрица. Критерий обратимости матрицы.
10. Способы вычисления обратной матрицы.
11. Основные понятия и определения систем линейных уравнений.
12. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
13. Теорема Крамера.
14. Теорема Кронекера-Капелли и следствия из нее.
15. Метод Гаусса.

Задачи для самостоятельного решения

4. Найти произведение матриц ABC, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Вычислить матрицу $P = ABC - 3E$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, E-
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

единичная матрица соответствующего порядка.

6. Найти ранги матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

7. Вычислить определитель по правилу треугольников: $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

8. Вычислить определитель, разлагая его по элементам третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 6 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 26 \\ -3 & 8 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

10. Найти обратную матрицу A^{-1} : а) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

11. Решить системы линейных уравнений матричным методом и по формулам Крамера:

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$, $2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0$, $5x + 2y + 5z = 4$,
а) $-2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5$, б) $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 = 0$, в) $3x + 5y - 3z = -1$,
 $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10$, $x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0$; $-2x - 4y + 3z = 1$.

12. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3$, $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3$,
а) $3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8$, б) $2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -3$,
 $x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6$, $x_1 - x_2 + x_3 = -2$,
 $-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3$; $2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4$;

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 &= 9, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= -1, \\ \text{в) } 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 &= 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 9; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 12, \\ \text{а) } 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 &= 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 6x_5 &= 3. \end{aligned}$$

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Векторы. Линейные операции над векторами Координаты вектора. Проекция вектора на ось. Системы координат. Скалярное произведение векторов. Векторное и смешанное произведение векторов. Виды уравнений прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Виды уравнений плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей. Виды уравнений прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Линии второго порядка. Окружность, эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения.

В рамках темы 2 предусмотрено проведение трех самостоятельных работ, выполнение трех индивидуальных домашних заданий, проведение контрольной работы и сдача коллоквиума.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

Найти вектор $\bar{x}$, зная, что $\bar{x} \perp \bar{a}$, $\bar{a} = (1, 0, 1)$, $\bar{x} \perp \bar{b}$, $\bar{b} = (0, 2, -1)$, проекция вектора $\bar{x}$ на вектор $\bar{c} = (1, 2, 2)$ равна 1.

Типовой вариант самостоятельной работы №2

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$ и $8x + 4y + 9 = 0$ параллельно прямой $x + 3y = 0$.
2. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что он проходит через точку $M(-4, \sqrt{21})$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = 3/4$. Построить эллипс.

Типовой вариант самостоятельной работы №3

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, 3, 4)$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a = 1$ и $b = -1$.
2. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1, 3, -2)$ и образующей с осями Ox , Oy и Oz углы 120° , 60° и 45° соответственно.

Типовой вариант контрольной работы № 1 (темы 2 и 3)

1. Даны стороны треугольника: $x - y + 2 = 0 (AB)$, $x = 2 (BC)$, $x + y - 2 = 0 (AC)$. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину B и через точку на стороне AC , делящую ее, считая от вершины A , в отношении $1 : 3$.
2. Решить систему по формулам Крамера и методом Жордана-Гаусса.

$$x - 2y + 3z = -4$$

$$2x + y - z = 0$$

$$4x + y + 2z = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

3. Решить систему однородных уравнений: $5x - y + 2z = 0$

$$x + y - 2z = 0$$

Индивидуальное домашнее задание №3 (примерный вариант)

Задание №1. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Необходимо:

- вычислить смешанное произведение трех векторов $\vec{a}$, $3\vec{b}$, $\vec{c}$;
- найти модуль векторного произведения $3\vec{a}$, $2\vec{c}$;
- вычислить скалярное произведение двух векторов $\vec{b}$, $-4\vec{c}$;
- проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\vec{a}$, $\vec{c}$;
- проверить, будут ли компланарны три вектора $\vec{a}$, $2\vec{b}$, $3\vec{c}$.

Задание №2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3,4,5)$, $B(1,2,1)$, $C(-2,-3,6)$, $D(3,-6,-3)$. Вычислить:

- площадь грани ACD ;
- площадь сечения, проходящего через середину ребра AB и две вершины пирамиды C и D ;
- объем пирамиды $ABCD$.

Индивидуальное домашнее задание №4 (примерный вариант)

Даны вершины треугольника ABC : $A(-2, 4)$, $B(3,1)$, $C(10,7)$. Найти:

- уравнение стороны AB ;
- уравнение высоты CH ;
- уравнение медианы AM ;
- точку P пересечения медианы AM и высоты CH ;
- уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB ;
- расстояние от точки C до прямой AB .

Индивидуальное домашнее задание №5 (примерный вариант)

Даны четыре точки: $A_1(3,1,4)$, $A_2(-1,6,1)$, $A_3(-1,1,6)$, $A_4(0,4,-1)$.

Составить уравнения:

- плоскости $A_1A_2A_3$;
- прямой A_1A_2 ;
- прямой A_4M , перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;
- прямой A_3N , параллельной прямой A_1A_2 ;
- плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2 .

Вычислить:

- синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

2) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Вопросы для подготовки к коллоквиуму

1. Основные понятия векторной алгебры.
2. Линейные операции над векторами и их свойства.
3. Линейная зависимость векторов.
4. Линейная зависимость векторов на плоскости и в пространстве.
5. Понятие базиса. Координаты вектора.
6. Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме.
7. Проекция вектора на ось. Основные свойства проекций.
8. Аффинная система координат.
9. Прямоугольная декартова система координат.
10. Скалярное произведение векторов и его свойства.
11. Выражение скалярного произведения векторов в координатах.
12. Длина вектора и направляющие косинусы.
13. Векторное произведение векторов и его свойства.
14. Выражение векторного произведения векторов в координатах.
15. Приложения векторного произведения векторов.
16. Смешанное произведение векторов и его геометрический смысл.
17. Свойства смешанного произведения векторов и его выражение в координатах.
18. Приложения смешанного произведения векторов
19. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору.
20. Общее уравнение прямой. Неполные уравнения прямой.
21. Уравнение прямой в отрезках.
22. Каноническое и параметрические уравнения прямой на плоскости.
23. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки.
24. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
25. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
26. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору.
27. Общее уравнение плоскости. Неполные уравнения плоскости.
28. Уравнение плоскости в отрезках.
29. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.
30. Взаимное расположение двух плоскостей.
31. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве.
32. Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки.
33. Общие уравнения прямой в пространстве. Переход от общих уравнений прямой к каноническим.
34. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
35. Взаимное расположение прямой и плоскости.
36. Пересечение прямой и плоскости.
37. Окружность.
38. Эллипс. Исследование формы и расположения эллипса по его каноническому уравнению.
39. Гипербола. Исследование формы и расположения гиперболы по ее каноническому уравнению.
40. Равносторонняя и сопряженная гиперболы.
41. Парабола. Исследование формы и расположения параболы по ее каноническому уравнению.

42. Виды парабол.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти длину вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$ и его направляющие косинусы.
2. Даны модули векторов $|\vec{a}| = 11, |\vec{b}| = 23, |\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Найти $|\vec{a} + \vec{b}|$.
3. На плоскости даны три вектора $\vec{a} = 2\vec{i}, \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
4. Даны четыре вектора $\vec{a} = (2, 1, 0), \vec{b} = (1, -1, 2), \vec{c} = (2, 2, -1), \vec{d} = (3, 7, -7)$. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
5. Дано: $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, \varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$. Найти модуль вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.
6. Найти длины сторон и углы треугольника с вершинами $A(-1, -2, 4), B(-4, -2, 0), C(3, -2, 1)$.
7. Дано: $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = 2\pi/3$. Найти: $|\vec{a} - \vec{b}|, |(\vec{a} + 2\vec{b}) - (-\vec{a} + 3\vec{b})|$.
8. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (8, 4, 1)$ и $\vec{b} = (2, -2, 1)$.
9. При каком значении λ векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \lambda\vec{k}, \vec{b} = (0, 1, 0)$ и $\vec{c} = (3, 0, 1)$ компланарны?
10. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (1, -2, 1), \vec{b} = (3, 2, 1), \vec{c} = (1, 0, -1)$.
11. Составить уравнение множества точек, сумма расстояний каждой из которых от точек $F_1(2, 0)$ и $F_2(-2, 0)$ равна $2\sqrt{5}$.
12. Дано общее уравнение прямой: $12x - 5y - 65 = 0$. Написать: 1) уравнение с угловым коэффициентом; 2) уравнение в «отрезках».
13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, 3)$ под углом 60° к оси Ox . Построить данную прямую.
14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, 5)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b = 7$.
15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$ перпендикулярно к прямой $y = 2x$.
16. Составить уравнение прямой, проходящей через центр окружности $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 15 = 0$ параллельно прямой $x + y = 0$.
17. Эллипс проходит через точку $M(-4, \sqrt{21})$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = 3/4$. Написать уравнение эллипса. Найти его полуоси и координаты фокусов.
18. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точки $A(2, 1)$ и $B(-4, \sqrt{7})$.
19. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если известно, что парабола проходит через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 4y = 0$ и симметрична относительно оси Oy .
20. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(4, -4, 2)$ и параллельной плоскости Oxz .

21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5,4,3)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.
22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2,-3,1)$, параллельно векторам $\vec{a} = (-3,2,1)$ и $\vec{b} = (1,2,3)$.
23. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0,2,0)$, $M_2(2,0,0)$ и образующей угол 60° с плоскостью $x=0$.
24. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(7,6,7)$, $M_2(5,10,5)$ и $M_3(-1,8,9)$.
25. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1,-5,3)$ и образующей с осями координат углы $\alpha=\pi/4$, $\beta=\pi/3$ и $\gamma=2\pi/3$.
26. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(3,-2,4)$ перпендикулярно плоскости $5x+3y-7z+1=0$.
27. Даны вершины треугольника $A(-3,2,8)$, $B(-7,0,3)$, $C(3,4,5)$. Составить параметрические уравнения медианы, проведенной из вершины A .
28. Найти угол между прямыми $\frac{x}{-1} = \frac{y+30}{5} = \frac{z-2.5}{4}$ и $\frac{x+1}{6} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+4}{-1}$.
29. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2,3,4)$ и перпендикулярной прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}$.
30. При каком значении m прямая $\frac{x+10}{m} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+2}{-6}$ параллельна плоскости $5x-3y+4z-1=0$?

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Определение и способы задания функции. Область определения, область значения, график функции. Предел функции. Односторонние и бесконечные пределы. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции. Непрерывные функции и их свойства. Точки разрыва и их классификация.

В рамках темы 3 предусмотрено проведение одной самостоятельной работы.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

Задание №1. Найти область определения функции $y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2^x(x-6)} + \ln(x+10)$.

Задание №2. Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{4x^2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 2}{4x^2 - 1}^{5x^2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5 + 5}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5};$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти области определения функций:

$$\text{а) } y = \frac{\log_5(x^2 + 4x)}{\sqrt{25 - x^2}}; \quad \text{б) } y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt[3]{x+2}; \quad \text{в) } y = \sqrt{4-5x} + 3\arccos \frac{2x+3}{6x}.$$

2. Найти области значений функций:

$$\text{а) } y = \frac{1}{x} + 4; \quad \text{б) } y = \frac{3}{(\sin x + \cos x)^2 + 2}; \quad \text{в) } y = 3^{x^2 + 4x - 12}.$$

3. Выяснить четность (нечетность) функций:

$$\text{а) } y = \frac{\lg(1-x^2)}{\sqrt[3]{\cos x}} e^{-x^2}; \quad \text{б) } y = \frac{x^3}{x^2 + 1} + x + \operatorname{tg} x; \quad \text{в) } y = \frac{x^3 \cos x}{2x^2} + \sin^2 x.$$

4. Найти наименьший период функций:

$$\text{а) } y = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right); \quad \text{б) } y = \sin 3x \cos 3x; \quad \text{в) } y = \sin \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x.$$

5. С помощью преобразований построить графики функций:

$$\text{а) } y = (x-5)^2 - 5(x-5) + 6; \quad \text{б) } y = 2 \log_2(x+1); \quad \text{в) } y = 2 \sin(-3x - \pi) + 1.$$

6. Найти пределы последовательностей:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - n^2}{3 - n^2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 5n^2 - 1}{10n^3 - 3n + 2}; \quad \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n); \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n}}{3 + n}.$$

7. Найти пределы функций при $x \rightarrow x_0$:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 3x - 4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 27}{x^2 - 9}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x+1}}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}.$$

8. Найти пределы функций при $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 2x^3 - 1}{3x^2 - 2x^4 + x}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x}); \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2}{1-x^2} + 4^{\frac{1}{x}} \right); & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{4x-2}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{16x^2 - x}}. \end{aligned}$$

9. Вычислить пределы с помощью первого замечательного предела:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 5} (x-5) \sin\left(\frac{1}{x-5}\right); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \operatorname{tg} 2x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

10. Вычислить пределы с помощью второго замечательного предела:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{5x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x^2 - 5}\right)^{x^2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 3}\right)^{x^3 - 5}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{2x}}; \\ \text{д) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\ln x - \ln 4}{2x - 8}. \end{aligned}$$

11. Найти пределы: а) $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{3}{4-2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3}{4-2x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{4-2x}$.

12. Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, найти пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{e^{5x} - 1}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{\sin^2 3x}.$$

13. Пользуясь определением непрерывности функции, доказать непрерывность

следующих функций в произвольной точке $x_0 \in R$:

а) $y = 4x^2 + 3$; б) $y = \cos x$.

14. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функций. Указать характер разрыва:

а) $y = \frac{1}{1 + e^x}$; б) $y = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$; в) $y = \begin{cases} x - 2, & x < 2, \\ x + 2, & x \geq 2. \end{cases}$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Понятие производной и ее геометрический и механический смысл. Производная сложной функции. Правила дифференцирования. Таблица основных производных. Дифференциал функции. Производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Возрастание и убывание функции, необходимое и достаточные условия. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба: определение, необходимые и достаточные условия. Асимптоты плоских кривых. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

В рамках темы 4 предусмотрено проведение двух самостоятельных работ, выполнение одного индивидуального домашнего задания, проведение контрольной работы и сдача коллоквиума.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

Пользуясь определением, найти производную функции $y = 6x^3 + 4x - 1$.

Типовой вариант самостоятельной работы №2

Найти производные функций:

а) $y = \frac{x \ln x}{1 + x}$; б) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}^4$; в) $y = \ln \sqrt[3]{\frac{1 - 3x}{1 + 3x}^2}$;

Индивидуальное домашнее задание №6 (примерный вариант)

Задание №1. Применяя правило Лопиталя, вычислить пределы.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^2 x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1}$.

Задание №2. Исследовать функции и построить их графики.

$$a) y = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1};$$

$$б) y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x.$$

Типовой вариант контрольной работы № 2 (темы 4 и 5)

1. Найти область определения функции $y = \sqrt{x-5} + \sqrt{2-x}$.
2. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x}$.
3. Используя определение, найти производную функции $y = 5x^3$ в точке x .
4. Найти производную Y , если $y = 5x^4 + 2^x$.
5. Найти дифференциал функции $y = 3x \arctg \frac{x}{3} - \frac{1}{9+x^2}$.
6. Показать, что функция $y = x + \sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y' + 4y = 4x$.

Вопросы для подготовки к коллоквиуму (темы 4 и 5)

1. Понятие функции, способы задания функции.
2. Основные характеристики функции.
3. Сложная и обратная функции.
4. Основные элементарные функции и их графики.
5. Предел функции в точке и на бесконечности.
6. Односторонние пределы.
7. Основные теоремы о пределах. Признаки существования пределов.
8. Замечательные пределы.
9. Бесконечно большие функции и их свойства.
10. Бесконечно малые функции и их свойства.
11. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные функции.
12. Непрерывность функции в точке, интервале и на отрезке.
13. Классификация точек разрыва.
14. Основные теоремы о непрерывных функциях.
15. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
16. Определение производной. Общее правило дифференцирования.
17. Геометрический, физический и химический смысл производной.
18. Понятие дифференцируемости функции. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности.
19. Правила дифференцирования.
20. Производные сложной и обратной функций.
21. Производные основных элементарных функций. Таблица производных.
22. Производные высших порядков.
23. Определение дифференциала функции. Основные теоремы о дифференциалах.
24. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
25. Дифференциалы высших порядков.
26. Основные теоремы дифференциального исчисления.
27. Правило Лопиталя.
28. Признаки монотонности функции.
29. Экстремумы функции. Необходимое условие экстремума.

30. Достаточные условия существования экстремума.
 31. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
 32. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.
 33. Асимптоты графика функции.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь определением, найти производные функций:

а) $y = 6x^3 + 4x - 1$; б) $y = \sqrt{x}$.

2. Найти производные функций:

а) $y = x^7 - 2x^5 + 5 - \frac{8}{x^3} + \frac{5}{6}x^5\sqrt{x}$; б) $y = \frac{x \ln x}{1+x}$; в) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}^4$;
 г) $y = \ln \sqrt[3]{\frac{1-3x}{1+3x}^2}$; д) $y = \frac{\operatorname{arccctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$; е) $y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

3. Дана кривая $y = x^2 - 2x$. Составить уравнения касательных:

- а) в точке пересечения ее с прямой $3x + y - 2 = 0$;
 б) параллельной и перпендикулярной этой прямой;
 в) проходящей через точку $M(1, -5)$.

4. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{4t+3}{t+4}$, где s измеряется в метрах, а t - в секундах. Найти его скорость и ускорение в момент $t = 6$.

5. Найти производные указанных порядков для следующих функций:

а) $y = \ln \cos x, y' = ?$ б) $y = xe^x, y' = ?$ в) $y = \cos \varphi, y^{IV} = ?$

6. Показать, что функция $y = x^3$ удовлетворяет уравнению

$$y^V + y^{IV} + y''' + y'' + y' + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 6.$$

7. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 - 3x + 1$ в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0.1$.

8. Найти дифференциалы первого порядка функций:

а) $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$; б) $y = \frac{1}{2}\sqrt{49-x^2} + \frac{49}{2}\arcsin \frac{x}{7}$.

9. Найти дифференциалы указанных порядков:

а) $y = \cos(4x+1), d^3y = ?$ б) $y = \sqrt[3]{x+2}, d^4y = ?$

10. Вычислить приближенно: а) $\ln 1.02$; б) $\operatorname{tg} 44^\circ$.

11. Найти пределы, используя правила Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2} - 2}{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln(e^{x^2} + 1)}$; в)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x$;

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x \ln x);$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x};$$

е)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}.$$

12. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 4)$.

13. Найти экстремумы функций:

$$\text{а) } y = x^3 - 9x^2 + 15x;$$

$$\text{б) } y = \frac{\ln x}{x};$$

$$\text{в) } y = \frac{e^{2x}}{1+x}.$$

14. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 2x\sqrt{x} + x - 4$ на отрезке $[0; 4]$.

15. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графиков функций:

$$\text{а) } y = 0.5x^3 + 3x^2 - 18x + 20;$$

$$\text{б) } y = xe^x;$$

$$\text{в) } y = x - \ln x.$$

16. Найти асимптоты графиков функций:

$$\text{а) } y = \frac{3x^5}{2+x^4};$$

$$\text{б) } y = \frac{x^2+3}{x^2-9};$$

$$\text{в) } y = xe^x.$$

17. Исследовать функции и построить их графики:

$$\text{а) } y = \frac{x^3}{4-x^2};$$

$$\text{б) } y = \frac{x^3}{2(x+1)^2};$$

$$\text{в) } y = (x-1)e^x;$$

$$\text{г) } y = x \ln x.$$

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Первообразная функция, неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных интегралов. Методы интегрирования: непосредственное, метод замены переменной, интегрирование по частям. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования, интегралы от неограниченных функций.

В рамках темы 5 предусмотрено проведение двух самостоятельных работ, выполнение одного индивидуального домашнего задания и сдача коллоквиума.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

Задание №1. Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

$$\text{а) } \frac{(2\sqrt[3]{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad \text{б) } \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} dx; \quad \text{в) } \frac{x^5 + x^3 - 1}{x^2 + 1} dx.$$

Задание №2. Применяя метод подстановки (метод замены переменной), найти интегралы:

$$\text{а) } \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx; \quad \text{б) } \sqrt[3]{2+\cos 3x} \sin 3x dx.$$

Типовой вариант самостоятельной работы №2

Задание №1. Преобразуя дифференциал, вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_2^5 \frac{dx}{2x-3};$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Задание №2. Используя метод интегрирования по частям, найти определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_1^e x^2 \ln x dx;$$

$$\text{б) } \int_0^2 (3-2x) e^{-3x} dx.$$

Индивидуальное домашнее задание №7 (примерный вариант)

Задание №1. Преобразуя дифференциал, вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{(4x+3)^5};$$

$$\text{б) } \int \frac{x^2}{x^6+1} dx.$$

Задание №2. Используя метод интегрирования по частям найти интегралы:

$$\text{а) } \int x^3 e^{2x} dx;$$

$$\text{б) } \int x^2 \arctg 3x dx$$

Задание №3. Найти интегралы от рациональных функций:

$$\text{а) } \int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx;$$

$$\text{б) } \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx.$$

Задание №4. Используя непосредственное интегрирование, вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_1^2 \frac{3x^4-5x^2+7}{x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} dx.$$

Задание №5. Используя подстановку, найти определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}.$$

Вопросы для подготовки к коллоквиуму

1. Первообразная функция. Теорема об общем виде первообразной.
2. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.
3. Таблица основных интегралов.
4. Метод непосредственного интегрирования.
5. Внесение под знак дифференциала.
6. Метод интегрирования подстановкой.
7. Метод интегрирования по частям.
8. Правильные и неправильные рациональные дроби.
9. Интегрирование рациональных дробей.
10. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций.
11. Определенный интеграл как предел интегральной суммы.

12. Необходимое и достаточное условие существования определенного интеграла. Классы интегрируемых функций.
13. Геометрический, физический и химический смысл определенного интеграла.
14. Свойства определенного интеграла.
15. Оценки определенного интеграла. Теорема о среднем.
16. Определенный интеграл как функция верхнего предела.
17. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
18. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
19. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
20. Несобственные интегралы от неограниченных функций.
21. Геометрические приложения определенного интеграла.

Задачи для самостоятельного решения

1. Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \quad (2\sin x - 3^{x+2} + 5)dx; & \text{б)} \quad \frac{(2\sqrt[3]{x} + 1)^2}{\sqrt[3]{x}} dx; & \text{в)} \quad \frac{x^5 + x^3 - 1}{x^2 + 1} dx; \\ \text{г)} \quad \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx; & \text{д)} \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} dx. & \end{array}$$

2. Преобразуя дифференциал, вычислить интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \quad \frac{dx}{(4x + 3)^5}; & \text{б)} \quad \frac{x^2}{x^6 + 1} dx; & \text{в)} \quad x \sin(1 - x^2) dx; \\ \text{г)} \quad \sin^3 6x \cos 6x dx. & & \end{array}$$

3. Применяя метод подстановки (метод замены переменной), найти интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \quad \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx; & \text{б)} \quad \sqrt[3]{2 + \cos 3x} \sin 3x dx; & \text{в)} \quad \frac{e^{-x}}{1 - e^{-2x}} dx. \end{array}$$

4. Используя метод интегрирования по частям найти интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \quad x^3 e^{2x} dx; & \text{б)} \quad x^2 \arctg 3x dx; & \text{в)} \quad e^{3x} \sin 2x dx. \end{array}$$

5. Найти интегралы от рациональных функций:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \quad \frac{dx}{x^2 + x + 1}; & \text{б)} \quad \frac{x - 4}{(x - 2)(x - 3)} dx; & \text{в)} \quad \frac{x + 2}{x^2 + 5x - 6} dx; & \text{г)} \quad \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx. \end{array}$$

6. Найти интегралы от тригонометрических функций:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \quad \sin^3 x dx; & \text{б)} \quad \cos^4 x \sin^3 x dx; & \text{в)} \quad \sin x \sin 3x dx; & \text{г)} \quad \frac{dx}{4 - 5 \sin x}. \end{array}$$

7. Найти интегралы с помощью тригонометрических подстановок:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \quad x^2 \sqrt{4 - x^2} dx; & \text{б)} \quad \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}. \end{array}$$

8. Найти интегралы от иррациональных функций:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + 1}} dx; & \text{б)} \quad \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x + 1)^2} - \sqrt{2x + 1}}; & \text{в)} \quad \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}; & \text{г)} \quad \frac{(x - 2)dx}{\sqrt{x^2 - 10x + 29}}. \end{array}$$

9. Используя непосредственное интегрирование, вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_1^2 \frac{3x^4 - 5x^2 + 7}{x} dx ; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} dx .$$

10. Преобразуя дифференциал, вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_2^5 \frac{dx}{2x-3} ; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx .$$

11. Используя подстановку, найти определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} ; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x \, dx}{\cos^4 x} .$$

12. Используя метод интегрирования по частям, найти определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_1^e x^2 \ln x \, dx ; \quad \text{б) } \int_0^2 (3-2x) e^{-3x} dx .$$

13. Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

а) $y = \ln x$, $x=e$, $y=0$;

б) $x^2 + y^2 = 16$;

в) $y = x^3$, $y = -2x^2 + 3x$ (фигура расположена в первой четверти);

г) $xy=1$, $y = x^2$, $x=3$, $y=0$.

14. Найти длину дуги кривой $y=2\sqrt{x}$ от $x=0$ до $x=1$.

15. Найти площадь поверхности вращения, полученной при вращении вокруг оси Ox кривой $y = x^3$, где $x \in [0; \sqrt[4]{1/3}]$.

16. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг осей Ox и Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y=0$, где $x \in [0; \pi]$.

17. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9} ; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^0 \sin 3x \, dx ; \quad \text{в) } \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} ; \quad \text{г) } \int_0^1 \ln x \, dx ; \quad \text{д) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} .$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные первого и более высоких порядков. Полный дифференциал. Производная сложной функции. Экстремум функции двух переменных. Двойной интеграл: определение, свойства, вычисление, замена переменных, переход к полярной системе координат. Тройной интеграл: определения, свойства, вычисление.

В рамках темы 6 предусмотрено проведение трех самостоятельных работ, выполнение одного индивидуального домашнего задания, проведение контрольной работы и сдача коллоквиума.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

Задание №1. Найти предел функции $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.

Задание №2. Найти полный дифференциал функции $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Типовой вариант самостоятельной работы №2

Задание №1. Найти d^2z , если $z = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

Задание №2. Найти экстремумы функции $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$.

Типовой вариант самостоятельной работы №3

Задание №1. Вычислить $\int_1^2 \int_x^{x^2} (2x - y) dy dx$.

Задание №2. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\int_D (x^2 + y^2) dx dy$, где D – круг $x^2 + y^2 = 4$.

Задание №3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $4y = x^2$, $x = 2$, $x = -2$.

Типовой вариант контрольной работы №3

1. Найти и построить линии уровня функции $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

2. Используя определение непрерывности, показать, что функция $z = xy^2$ непрерывна в любой точке плоскости.

3. Найти y от неявной функции, заданной уравнением $x^3 + y^3 = 3xy$.

4. Найти экстремумы функции $z = 2x^2 + 5y^2 + 6xy - x + 4y + 5$.

5. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\int_D 1 - \frac{x^2}{y^2} dx dy$, где D – круг $x^2 + y^2 = \pi^2$.

Индивидуальное домашнее задание №8 (примерный вариант)

Задание №1. Найти область определения, сделать чертеж $z = \arcsin(2x - y)$.

Задание №2. Найти двойной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$.

Задание №3. Вычислить значения частных производных $f_x(M_0)$, $f_y(M_0)$, $f_z(M_0)$ для данной функции $f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой

$$f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad M_0(0, -1, 1).$$

Задание №4. Найти вторые частные производные функции $z = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$. Убедиться в том, что $z_{xy} = z_{yx}$.

Задание №5. Проверить, удовлетворяет ли уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{4y^2}{x^2 + y^2} \frac{\partial u}{\partial x}$ функция $u = \ln(x^2 + y^2)$.

Задание №6. Исследовать на локальный экстремум функцию $z = xy(x + y - 2)$.

Вопросы для подготовки к коллоквиуму

1. Функции нескольких переменных.
2. Функции двух, трех переменных и области их определения.
3. Линии уровня.
4. Понятие области. Открытая и замкнутая область.
5. Предел функции нескольких переменных.
6. Непрерывность функции нескольких переменных.
7. Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области.
8. Частные приращения и частные производные функции нескольких переменных.
9. Полное приращение функции.
10. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
11. Полный дифференциал. Инвариантность полного дифференциала.
12. Производная сложной функции нескольких переменных.
13. Полная производная.
14. Задача, приводящая к понятию двойного интеграла.
15. Понятие двойного интеграла как предела интегральных сумм.
16. Свойства двойного интеграла.
17. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
18. Замена переменных в двойном интеграле.
19. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
20. Приложения двойного интеграла к геометрии.
21. Приложения двойного интеграла к физике.

22. Задача, приводящая к понятию тройного интеграла.
23. Понятие тройного интеграла и его свойства.
24. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
25. Замена переменных в тройном интеграле.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти области определения данных функций:

$$\text{а) } z = \frac{1}{x+y}; \quad \text{б) } z = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}; \quad \text{в) } z = \sqrt{xy}; \quad \text{г) } z = \arcsin x + \arccos x.$$

2. Найти уравнения и построить линии уровня следующих функций:

$$\text{а) } z = xy; \quad \text{б) } z = \frac{x}{y}; \quad \text{в) } z = e^{xy}; \quad \text{г) } z = (1+x+y)^2.$$

3. Вычислить пределы, полагая, что независимые переменные произвольно стремятся к своим предельным значениям:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x^2 + 4y}{2xy - 1}; & \text{в) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}; \\ \text{б) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(2xy)}{xy}; & \text{г) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} (1 + xy^2)^{y/(x^2 + xy^2)}. \end{array}$$

4. Показать, что функция $z = \frac{x-y}{x+y}$ не имеет в точке $O(0,0)$ предела.

5. Используя определение непрерывности, показать, что функция $z = x^2 y$ непрерывна в любой точке плоскости.

6. Найти точки разрыва следующих функций:

$$\text{а) } z = \frac{\sin x \sin y}{xy}; \quad \text{б) } z = \sin \frac{1}{x+y}; \quad \text{в) } z = \cos \frac{1}{x^2 + y^2 - 4}; \quad \text{г) } z = \frac{x}{|y|}.$$

7. Найти частные производные следующих функций:

$$\text{а) } z = x^3 + 3x^2 y - y^3; \quad \text{б) } z = \frac{5x + 3y}{9x - 2y}; \quad \text{в) } z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad \text{г) } u = e^{\frac{z}{xy}} \operatorname{tg} \frac{x}{y+z}.$$

8. Показать, что функция $z = \sqrt{x} \cos \frac{x}{y}$ удовлетворяет уравнению $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}$.

9. Найти полные дифференциалы следующих функций:

$$\text{а) } z = x e^{-xy}; \quad \text{б) } z = \sqrt{\operatorname{tg}^3 x + 3e^y}.$$

10. Найти z'_t , если $z = \frac{y}{x}$; $x = e^t$; $y = 1 - e^{2t}$.

11. Используя формулу полной производной, найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = x^2 y$; $y = \cos x$.

12. Найти z'_u и z'_v , если $z = \ln(x^2 + y^2)$; $x = uv$; $y = \frac{u}{v}$.

13. Найти y от неявной функции, заданной уравнением $\ln \operatorname{tg} \frac{y}{x} - \frac{y}{x} = 5$.
14. Найти z'_x и z'_y от неявной функции, заданной уравнением $z^3 - 3xyz = 16$.
15. Найти частные производные второго порядка от функций:
 а) $z = x^3 - 4x^2y + 5y^2$; б) $z = e^{-y/x}$.
16. Для функции $z = xy \ln(x + y)$ проверить, что $z'''_{yx^2} = z'''_{xyx}$.
17. Найти дифференциалы второго порядка от следующих функций:
 а) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; б) $z = \sin x \sin y$.
18. Найти d^3z , если $z = x^2y$.
 Исследовать на экстремум следующие функции:
 а) $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$;
 б) $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;
 в) $z = 3x + 6y - xy - x^2 + y^2$.
20. Вычислить повторные интегралы:
 а) $\int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x + \sin^2 y) dy$; б) $\int_1^3 dx \int_{x^3}^x (x - y) dy$.
21. Вычислить двойные интегралы по указанным прямоугольникам D :
 а) $\int_D xy^2 dx dy$, где $D: 2 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1$;
 б) $\int_D \frac{3y^2}{1+x^2} dx dy$, где $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
22. Вычислить двойные интегралы по областям D , ограниченным указанными линиями:
 а) $\int_D (x + y) dx dy$, где $D: 0 \leq x \leq \sin y, 0 \leq y \leq \pi$;
 б) $\int_D \frac{x}{y^2 + x^2} dx dy$, где D – область, ограниченная параболой $y = \frac{1}{2}x^2$ и прямой $y = x$;
 в) $\int_D (\cos 2x + \sin y) dx dy$, где D – область, ограниченная линиями $x=0, y=0, 4x+4y-\pi=0$.
23. Переходя к полярным координатам, вычислить интегралы:
 а) $\int_D e^{x^2+y^2} dx dy$, где D – круг $x^2 + y^2 \leq 1$;
 б) $\int_D (x^2 + y^2)^2 dx dy$, где D – круг $x^2 + y^2 \leq 4$.
24. С помощью двойных интегралов найти площади плоских фигур, ограниченных заданными линиями:
 а) $y = x^2, 4y = x^2, x = 2, x = -2$; б) окружностью $x^2 + y^2 = y$

25. С помощью двойного интеграла найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

а) $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$; б) $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1, z = 0$

26. Вычислить тройные интегралы по областям V , ограниченным указанными линиями:

а) $\int_V (x + y) dx dy dz$ где $V: x = 1, y = 1, z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$;

б) $\int_V xy dx dy dz$ где $V: x^2 + y^2 = 1, z = 1, z = 0 (x \geq 0, y \geq 0)$.

27. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл $\int_V z dx dy dz$, где область V ограничена поверхностями: $x^2 + y^2 = 1, z = a (a > 0), z = 0$.

РЯДЫ

Числовые ряды: основные понятия, необходимые условия сходимости ряда. Остаток ряда. Ряды с положительными членами и признаки их сходимости: признаки сравнения, Даламбера, Коши. Знакопередающиеся ряды, признак Лейбница. Ряды с членами любых знаков, абсолютная и условная сходимость.

В рамках темы 7 предусмотрено проведение одной самостоятельных работ и выполнение одного индивидуального домашнего задания.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

Задание №1. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Задание №2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти формулу общего члена ряда:

а) $1 + \frac{4}{2} + \frac{9}{6} + \frac{16}{24} + \frac{25}{120} + \dots;$

б) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$

2. Выяснить вопрос о сходимости и найти суммы рядов:

а) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots;$

б) $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots;$

в) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots$

3. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости для рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} 1 + \frac{1}{n}.$$

4. Показать, что ряд $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{n+10} + \dots$ расходится.

5. Используя признаки сравнения, исследовать сходимость следующих рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n(n+1)}}.$$

6. Используя признаки Даламбера или Коши, исследовать сходимость следующих рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(3n)^n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}.$$

7. Пользуясь интегральным признаком, исследовать сходимость следующих рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}.$$

8. Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n!}.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение дифференциального уравнения, его порядка, общего и частного решений дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, сводящиеся к однородным, линейные, в полных дифференциалах. Дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков, случаи понижения порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка: однородные и неоднородные, структура их общих решений. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение, построение общего решения.

В рамках темы 8 предусмотрено проведение двух самостоятельных работ, выполнение одного индивидуального домашнего задания и сдача коллоквиума.

Типовой вариант самостоятельной работы №1

Задание №1. Решить уравнение $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$.

Задание №2. Решить уравнение $(x + 2y)dx - xdy = 0$.

Типовой вариант самостоятельной работы №2

Задание №1. Решить уравнение $y' + 2y = e^{-x}$.

Задание №2. Решить уравнение $y'' + 3y' = 18x + 9$.

Индивидуальное домашнее задание №10 (примерный вариант)

Задание №1. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

а) $x\sqrt{1+y^2} + yy\sqrt{1+x^2} = 0$; б) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$.

Задание №2. Решить однородные дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $x(x+2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$; б) $2xyy' = x^2 + y^2$.

Задание №3. Решить линейные дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $xy' - 2y = x^3 \cos x$; б) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

Задание №4. Решить дифференциальные уравнения высших порядков. Найти частное решение, если заданы начальные условия:

а) $y' = \frac{1}{1+x^2} + x - \sin x$; б) $y'' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$, $y \frac{\pi}{4} = 1$, $y' \frac{\pi}{4} = 0$.

Задание №5. Решить однородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка:

а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' + 24y' + 144y = 0$; в) $y'' - 4y' + 20y = 0$.

Задание №6. Решить неоднородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка:

а) $y'' - 9y = 2 - x$; б) $y'' + 3y' + 2y = 3e^{2x}$; в) $y'' + 10y' = \sin 2x$.

Вопросы для подготовки к коллоквиуму

1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия.
3. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения.
4. Уравнения с разделяющимися переменными.
5. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
7. Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия.
8. Уравнения, допускающие понижение порядка.
9. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.
10. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений.
11. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
12. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что заданная функция является решением данного дифференциального уравнения:

а) $y = (x+C)e^x$, $y' - y = e^x$; б) $y = -\frac{2}{x^2}$, $xy^2 dx - dy = 0$.

2. Составить дифференциальное уравнение семейства линий:

а) $Cy = x^2 + y^2$; б) $y = C e^{2x}$.

3. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

- а) $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 0$; б) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$.
4. Найти частное решение дифференциального уравнения $y \sin x - y \ln y = 0$, удовлетворяющее заданному начальному условию $y \frac{\pi}{2} = 1$.
5. Решить однородные дифференциальные уравнения первого порядка:
а) $(xy+y^2)dx - x^2dy = 0$; б) $2xyy' = x^2 + y^2$.
6. Решить линейные дифференциальные уравнения первого порядка:
а) $xy' - 2y = x^3 \cos x$; б) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.
7. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения:
 $x^2 + xy' = y$, $y(1)=0$.
8. Решить уравнения Бернулли:
а) $xy' + y = \frac{y^2}{2} \ln x$; б) $y' - \frac{1}{x}y = -y^2$, $y(1)=-1$.
9. Решить дифференциальные уравнения высших порядков. Найти частное решение, если заданы начальные условия:
а) $y' = \frac{1}{1+x^2} + x - \sin x$; б) $y'' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$, $y \frac{\pi}{4} = 1$, $y' \frac{\pi}{4} = 0$;
в) $y' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$.
10. Решить однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка:
а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' + 24y' + 144y = 0$; в) $y'' - 4y' + 20y = 0$.
11. Решить неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка:
а) $y'' - 9y = 2 - x$; б) $y'' + 3y' + 2y = 3e^{2x}$; в) $y'' + 10y' = \sin 2x$.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Контрольные работы, коллоквиумы, самостоятельные работы, индивидуальные задания оцениваются по пятибалльной системе. На практических занятиях контроль осуществляется при ответе у доски и при проверке выполнения домашних заданий.

Содержание и объем материала, подлежащего проверке на экзамене, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты, прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

Экзаменационный билет состоит из теоретических вопросов и задачи.

Оценка "отлично" выставляется, когда студент показывает глубокое и всестороннее знание предмета, обязательной и дополнительной литературы; аргументировано и логически стройно излагает материал, пользуясь математической символикой; может применять знания для анализа конкретных ситуаций, свободно ориентируется в междисциплинарных связях.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях предмета, обязательной литературы, знакомстве с дополнительной литературой, аргументированном изложении материала, умении применять знания для анализа конкретных ситуаций, профессиональных проблем. Студент незначительно нарушает последовательность изложения материала, дает недостаточно полное, хотя и верное определение понятий.

Оценка «удовлетворительно» ставится, когда студент в основном знает предмет, обязательную литературу, может практически применять свои знания, но программный материал излагает фрагментарно и непоследовательно, допускает отдельные ошибки и погрешности при доказательстве теорем и решении задач, применении математической символики и понятий, слабо ориентируется в межпредметных связях.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, когда студент не усвоил основного содержания предмета и слабо знает рекомендованную литературу, обнаруживает незнание большей части учебного материала, допускает грубые ошибки при формулировании и доказательстве теорем, в определении понятий, неправильно использует математическую символику.

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы:

1. Баврин, И. И. Высшая математика для химиков, биологов и медиков : учебник и практикум для вузов / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 397 с.
2. Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2026. — 520 с. — ISBN 978-5-507-49866-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/451232> (дата обращения: 31.01.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Канарейкин, А. И. Высшая математика : учебник / А. И. Канарейкин. — Вологда : Инфра-Инженерия, 2024. — 224 с. — ISBN 978-5-9729-1828-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/429098> (дата обращения: 31.01.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

Перечень дополнительной литературы:

1. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд., испр. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2015. - 816 с
2. Математика : учебное пособие / Н. И. Головкин, Т. В. Беспалова, Т. А. Жук [и др.]. — Находка : Дальрыбвтуз, 2023. — 136 с. — ISBN 978-5-88871-772-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/388886> (дата обращения: 31.01.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Высшая математика : методические указания / составитель Т. А. Черняк. — Санкт-Петербург : СПбГУ ГА им. А.А. Новикова, 2024. — 165 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/438716> (дата обращения: 31.01.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Бельчикова, О. Г. Математика : учебно-методическое пособие / О. Г. Бельчикова. — Барнаул : АГАУ, 2021. — 84 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/197218> (дата обращения: 31.01.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
5. Шулика, Н. А. Высшая математика : учебное пособие / Н. А. Шулика. — Хабаровск : ДВГУПС, 2023. — 57 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/433640> (дата обращения: 31.01.2026). — Режим доступа: для авториз. пользователей.