

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ
по дисциплине «Комплексный анализ»
для студентов направления подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Ставрополь
2026

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Комплексные числа и действия над ними
2. Возведение в степень комплексного числа и извлечение из него корня
3. Основные понятия функции комплексного переменного
4. Основные элементарные функции комплексного переменного
5. Дифференцирование функций комплексного переменного
6. Гармонические функции
7. Интеграл от функции комплексного переменного по кривой
8. Теорема Коши
9. Интегральная формула Коши
10. Числовые ряды в комплексной плоскости
11. Степенные комплексные ряды
12. Ряды Тейлора
13. Ряды Лорана
14. Нули аналитической функции
15. Изолированные особые точки функции
16. Вычет аналитической функции в особой точке
17. Вычет функции в бесконечно удаленной особой точке
18. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов

Введение

Настоящие методические указания к практическим занятиям полностью освещают содержание учебной дисциплины «Комплексный анализ» в соответствии с рабочей программой для студентов университета, обучающихся по направлению подготовки **01.03.02 Прикладная математика и информатика**, профиль подготовки «Вычислительная математика и математическое моделирование».

Актуальность и значимость дисциплины «Комплексный анализ». Курс комплексного анализа расширяет и дополняет знания о функциях, изученные в рамках дисциплины математического анализа, рассматривая функции комплексного переменного. Теория функций комплексного переменного дала замечательный аппарат для решения задач, выдвинутых различными областями физики (гидродинамикой, электродинамикой и др.) техники; на неё широко опираются общие вопросы теории дифференциальных уравнений и специальные методы их решения; она естественно вошла в теорию интегральных уравнений и общую теорию линейных операторов. Эти связи теории функций комплексного переменного с определенными разделами математики и физики утвердили ее жизненность. В настоящее время комплексный анализ используется всюду, где используются математические методы. Отсюда объективная важность комплексного анализа как средства изучения функций комплексного переменного.

Роль и место учебной дисциплины «Комплексный анализ» в структуре учебного курса. Дисциплина «Комплексный анализ» является базовой в первом блоке дисциплин. Ее освоение происходит в 5 семестре.

Цель и задачи освоения дисциплины «Комплексный анализ». Целью освоения дисциплины является формирование общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, путем изучения основ комплексного анализа.

Задачи освоения дисциплины:

- формирование систематизированных знаний в области теории функций комплексного переменного;
- расширение на комплексную область основных понятий, используемых в действительном анализе: функция, предел, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость;
- ознакомить студентов с практическими приложениями методов комплексного анализа в различных разделах математики и физики.

Характеристика междисциплинарных связей. Понятия дисциплины «Комплексный анализ» служат основной моделью, источником и отправным пунктом для дисциплин: «Дифференциальные уравнения», «Основы вычислительной математики, математического и информационного моделирования» и др.

Реализуемые компетенции. ОПК-1 – применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности; ОПК-3 – применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

1. Комплексные числа и действия над ними (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 1. Построить точки $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 5$.

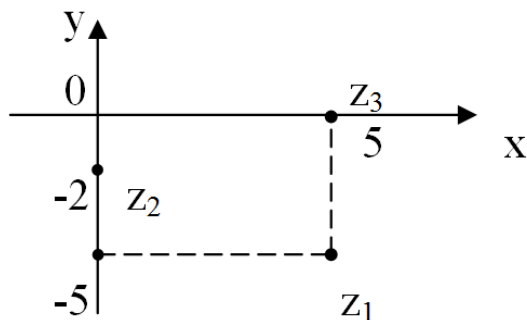


Рисунок 1 – К примеру 1

Пример 2. Найдите модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел: а) $z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$; б) $z_2 = -3i$.

Решение:

$$\text{а) } z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad |z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg z_1 = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4} \quad - \quad \text{главное значение}$$

аргумента, т.к. $-\pi < -\frac{\pi}{4} < \pi$.

$$\text{б) } z_2 = -3i = 0 - 3i, \quad |z_2| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Из изображения числа z_2 следует, что $\arg z_2 = -\frac{\pi}{2}$ – главное значение,

т.к. $-\pi < -\frac{\pi}{2} < \pi$.

Пример 3. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = -1 + i$.

Решение. Изобразим комплексное число $z = -1 + i$.

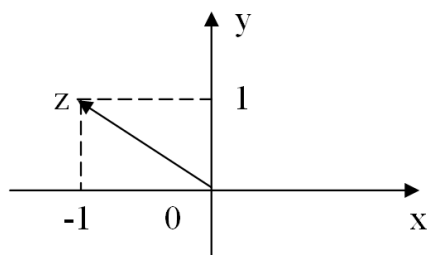


Рисунок 2 – К примеру 3

По формуле (1.1) $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Для нахождения аргумента отметим, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = -1$, точка находится во второй четверти. Тогда,

используя соотношения (1.2), получим $\arg z = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi$.

Отсюда, принимая во внимание (1.3), $z = \sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)$.

Пример 4. Представить в показательной форме комплексное число $z = -1 - i$.

Решение. Изобразим комплексное число $z = -1 - i$

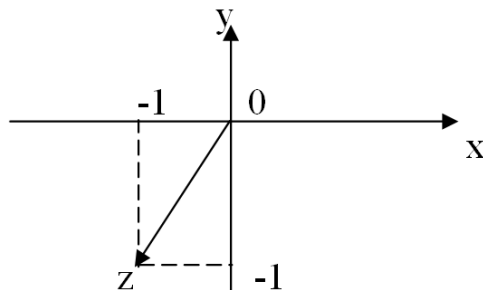


Рисунок 3 – К примеру 4

По формуле (1.1) $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Для нахождения аргумента отметим, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = 1$, точка находится в третьей четверти. Тогда, используя

соотношения (1.2), получим $\arg z = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$. Отсюда, принимая во

внимание (1.5), $z = \sqrt{2} e^{-\frac{3}{4}\pi i}$.

Пример 5. Выполните деление $\frac{1+3i}{2+i}$.

Решение:
$$\frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+6i+3}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i.$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение комплексного числа (алгебраическая форма записи). Что такое мнимая единица, действительная и мнимая часть комплексного числа?
2. Что называется комплексной плоскостью? Почему комплексное число называют вектором или точкой на комплексной плоскости?
3. Что такое модуль и аргумент комплексного числа, как их найти?
4. Что называют алгебраической формой комплексного числа?
5. Что называют тригонометрической формой комплексного числа?
6. Что называют показательной формой комплексного числа?
7. Перечислить основные свойства модуля комплексных чисел.
8. Охарактеризуйте арифметические операции над комплексными числами.
9. Дайте определение комплексно-сопряженному числу.

Задачи

1.1. Изобразите геометрически комплексные числа и им сопряженные:

$$z_1 = 2; \quad z_2 = -i; \quad z_3 = -2; \quad z_4 = 3 - 2i; \quad z_5 = 3 + 2i; \quad z_6 = -3 - 2i.$$

1.2. а) Найдите сумму и произведение комплексных чисел z_1 и z_2 , если:

1) $z_1 = 4 + 5i; \quad z_2 = 3 - 2i.$

2) $z_1 = 0,5 - 3,2i; \quad z_2 = 1,5 - 0,8i.$

3) $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i; \quad z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i.$

б) Найдите разность и частное комплексных чисел z_1 и z_2 , если:

1) $z_1 = 3 + 4i; \quad z_2 = 0,4 - 0,2i.$

2) $z_1 = 1 - 2i; \quad z_2 = 0,6.$

$$3) z_1 = \sqrt{5} - i; \quad z_2 = \sqrt{5} - 2i.$$

1.3. Найдите мнимую часть комплексного числа z , если:

$$z_1 = (2-i)^3 \cdot (2+11i), \quad z_2 = \frac{2-3i}{1+4i} + i^6, \quad z_3 = \frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i} - \frac{1}{i}.$$

1.4. Выполните действия:

$$\text{а) } i^7 + i^8 + i^9 + i^{10} \quad \text{б) } 2i \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad \text{в) } \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$$

$$\text{г) } \frac{13+12i}{6i-8} + \frac{(1+2i)^2}{2+i} \quad \text{д) } \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2} \quad \text{е) } (7+i) \cdot (2-i) - (3+5i) \cdot (-i)$$

$$\text{ё) } i(3-i) - (2+3i) \cdot (1-i) \quad \text{ж) } \frac{3}{i} + \frac{5-i}{2} - \frac{10+i}{1+i}.$$

1.5. Найдите модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел:

$$z_1 = -4; \quad z_2 = -i; \quad z_3 = -5 - 2i; \quad z_4 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i; \quad z_5 = \frac{2-i}{1+i}.$$

1.6. Представьте в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

$$1) z = -\sqrt{3} + i, \quad 2) z = -1, \quad 3) z = -\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12},$$

$$4) z = 1 + \cos \frac{10\pi}{9} + i \frac{10\pi}{9}, \quad 5) z = \operatorname{tg} 1 - i.$$

1.7. В плоскости комплексного переменного начертите линии, заданные уравнениями:

$$1) |z + 1| = 1;$$

$$4) |2i - z|^2 = 1;$$

$$2) |z - 2| + |z + 2| = 26;$$

$$5) \operatorname{Im} z^2 = 4;$$

$$3) \arg z = \frac{3\pi}{4};$$

$$6) |z|^2 + 3z + 3\bar{z} = 0;$$

1.8. Изобразите области, заданные условиями:

$$1) |z + 2i - 1| \leq 2;$$

$$4) 1 \leq |z - 1 + i|^2 \leq 4;;$$

$$\begin{array}{ll} 2) |z+i| \leq 1; & 5) \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}; \\ 3) 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 4; & 6) -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}; \end{array}$$

2. Возведение в степень комплексного числа и извлечение из него корня (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 6. Вычислить. $(\sqrt{3} - i)^9$.

Решение. Пусть $z = \sqrt{3} - i$, тогда, используя формулы (1.1) и

$$(1.2), |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2, \varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

Откуда по формуле Муавра (2.2) имеем:

$$(\sqrt{3} - i)^9 = 2^9 \left(\cos 9\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin 9\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = 512 \left(\cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 512i.$$

Пример 7. Найти все значения:

$$\text{а) } \sqrt[4]{-16} = w; \text{ б) } \sqrt[3]{i} = w; \text{ в) } \sqrt{\sqrt{3} - i} = w.$$

Решение: а) запишем число $z = -16$ в тригонометрической форме

$$z = -16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Согласно формуле (2.3) получаем

$$w_k = 2 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} k \right) \right), \text{ где } k=0,1,2,3.$$

Следовательно,

$$w_0 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$w_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$w_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$w_3 = 2 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

б) Модуль числа i равен единице, а аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$w_k = \sqrt[3]{1} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right), \text{ где } k=0,1,2.$$

Получаем

$$w_0 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

$$w_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

$$w_2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -i.$$

в) Пусть $z = \sqrt{3} - i$, тогда $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, $\varphi = \arctg \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$.

По формуле (2.3) имеем

$$w_k = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2} \right) \right), \text{ где } k=0,1.$$

$$w_0 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right) = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} - \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} i,$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi}{2} \right) \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} + \pi \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} + \pi \right) \right) = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2} \left(-\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} + \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} i.$$

Вопросы для самопроверки

1. Сколько значений могут принимать целые положительные степени мнимой единицы i ?
2. Запишите значения первых восьми степеней i .
3. Как в общем виде записываются натуральные степени i ?
4. Как возвести комплексное число в степень n ?
5. Запишите формулу Муавра. Какой вид она имеет при $r=1$?
6. Как извлекается корень n -ой степени из комплексного числа?
7. Сколько значений имеет корень n -ой степени из комплексного числа?
8. Запишите n различных значений корня n -ой степени из комплексного числа в тригонометрической форме.
9. Как геометрически изображаются различные значения корня n -ой степени из комплексного числа в тригонометрической форме?

Задачи

2.1. Записать комплексное число z в алгебраической форме:

$$\begin{aligned} 1) \quad z &= \left(\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{12}, & 2) \quad z &= (\cos 31^\circ + i \sin 31^\circ)^{-10}, \\ 3) \quad z &= -\frac{(2i)^7}{(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^6}, & 4) \quad z &= \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}. \end{aligned}$$

2.2. Записать комплексное число z в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} 1) \quad z &= (\sqrt{3} - i)^{100}, 2) \quad z = \left(\frac{\sqrt{3}i + 1}{i - 1} \right)^6, 3) \quad z = \frac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}, n \in \mathbb{N}, \\ 4) \quad z &= (\operatorname{tg} 2 - i)^4, 5) \quad z = \left(\sin \frac{6\pi}{5} + i \left(1 + \cos \frac{6\pi}{5} \right) \right)^5. \end{aligned}$$

2.3. Найти значения $\sqrt[n]{z}$ если:

- 1) $z = -1, n = 3$, 2) $z = 8i, n = 3$, 3) $z = 1, n = 5$, 4) $z = 1 + i, n = 8$.

2.4 . Решить уравнения:

- 1) $z^3 = 1 + i$, 2) $z^4 + 1 = 0$, 3) $z^5 = 1 + \sqrt{3}i$, 4) $z^6 + 64 = 0$.

2.5. Записать в показательной форме все значения $\sqrt[n]{z}$:

- 1) $z = 1, n = 3$, 2) $z = -1, n = 5$, 3) $z = -4 + \sqrt{48}i, n = 3$, 4) $z = -1 - \sqrt{3}i, n = 4$.

3. Основные понятия функции комплексного переменного (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 8. Найти значение функции $f(z) = z^3 - 2z^2 + 5z$ при следующих значениях аргумента: 1) $z = i$; 2) $z = 1 - i$; 3) $z = 2 + i$.

Решение. 1) Принимая во внимание формулы (2.1) получим:

$$f(i) = i^3 - 2i^2 + 5i = -i + 2 + 5i = 2 + 4i.$$

- 2) $f(1-i) = (1-i)^3 - 2(1-i)^2 + 5(1-i)$. Поскольку

$$(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$$

$$(1-i)^3 = (1-i)^2(1-i) = -2i(1-i) = -2i + 2i^2 = -2 - 2i,$$

$$\text{то } f(1-i) = -2 - 2i - 2(-2i) + 5(1-i) = -2 - 2i + 4i + 5 - 5i = 3 - 3i.$$

$$\begin{aligned} 3) \quad f(2+i) &= (2+i)^3 - 2(2+i)^2 + 5(2+i) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 - \\ &- 2(4 + 2i + i^2) + 5(2+i) = 8 + 12i - 6 - i - 8 - 8i + 2 + 10 + 5i = 6 + 8i. \end{aligned}$$

Пример 9. Вычислить предел функции $\lim_{z \rightarrow 1-i} \frac{z^2 + z}{1 - z}$.

Решение:

$$\lim_{z \rightarrow 1-i} \frac{z^2 + z}{1 - z} = \frac{\lim_{z \rightarrow 1-i} (z^2 + z)}{\lim_{z \rightarrow 1-i} (1 - z)} = \frac{(1 - 2i - 1) + (1 - i)}{1 - (1 - i)} = \frac{1 - 3i}{i} = \frac{i(1 - 3i)}{i^2} = -(i + 3) = 3 - i.$$

Пример 10. Доказать, что функция является $f(z) = z^2$ непрерывной

при любом значении z .

Доказательство. Зафиксируем значение z_0 и рассмотрим разность $z^2 - z_0^2 = (z - z_0)(z + z_0)$. Когда $z \rightarrow z_0$, то существует такое положительное число M , при котором выполняется неравенства $|z| < M, |z_0| < M$, поэтому

$$|z^2 - z_0^2| = |z - z_0| |z + z_0| < |z - z_0| \cdot (|z| + |z_0|) < 2M |z - z_0|.$$

В качестве δ выберем число $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, где $\varepsilon > 0$. Из неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует, что

$$|z^2 - z_0^2| < 2M\delta = 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \quad |z^2 - z_0^2| < \varepsilon.$$

Поскольку выполняется неравенство (3.2), то $\lim_{z \rightarrow z_0} z^2 = z_0^2$. Так как выполняется равенство (3.3), то функция $f(z) = z^2$ непрерывна в точке z_0 . Точка z_0 была выбрана произвольно; значит, функция $f(z) = z^2$ непрерывна в любой точке.

Пример 11. Исследовать непрерывность функции $f(z) = \bar{z}$.

Решение. Так как $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$. Тогда $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$. Эти функции непрерывны всюду в R^2 , поэтому функция $f(z) = \bar{z}$ непрерывна на всей комплексной плоскости C .

Вопросы для самопроверки

1. Дать определение функции комплексной переменной.
2. Что понимают под образом, прообразом точки?
3. Какую функцию называют однозначной (многозначной)?
Приведите примеры.
4. Что понимают под однолистной функцией?
5. Как найти действительную и мнимую части функции $w = f(z)$?

6. Что понимают под окрестностью точки z_0 на плоскости комплексной переменной z ?
7. Как определяется предел функции комплексной переменной в точке?
8. Сформулировать признак существования предела функции комплексного переменного в точке и основные свойства пределов.
9. Что понимают под бесконечно малой величиной?
10. Какую функцию называют бесконечно большой величиной?
11. Каково определение непрерывности функции $w = f(z)$ в точке z ?
12. Сформулировать признак непрерывности функции комплексного переменного в точке.

Задачи

3.1. Для следующих функций найти действительную и мнимую части:

а) $w = \bar{z} - iz^2$; б) $w = z^3 - i \cdot \bar{z}$; в) $w = z^2 + i$; г) $w = i - z^3$;

д) $w = \frac{1}{\bar{z}}$; е) $w = \frac{iz + 1}{1 + \bar{z}}$; ё) $w = \frac{\bar{z}}{z}$.

3.2. Найдите образы данных точек при указанных отображениях:

а) $z_0 = -i$, $w = z^2$; б) $z_0 = 1 - i$, $w = (z - i)^2$; в) $z_0 = 1$, $w = \frac{1}{z - i}$;

г) $z_0 = 2 + 3i$, $w = \frac{\bar{z}}{z}$.

3.3. При каких значениях z функция $f(z) = z^3 - 2z^2 + 2z$ равна нулю?

3.4. Является ли число $z = 1 + i$ корнем уравнения $z^3 + 3z^2 - 8z + 10 = 0$?

3.5. Найти значение функции $f(z) = z^4 - z^3 + z^2 - z$ при следующих значениях аргумента: 1) $z = i$; 2) $z = 2 + i$; 3) $z = 2 - i$.

3.6. Вычислить предел функции:

$$\text{а) } \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{2z+1}{z+2}; \quad \text{б) } \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 3iz - 2}{z-i}.$$

3.7. Докажите, что при любом значении непрерывны следующие функции:

$$\text{а) } f(z) = |z|; \quad \text{б) } f(z) = az + b; \quad \text{в) } f(z) = z^3.$$

4. Основные элементарные функции комплексного переменного (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 12. Найти: 1) $\operatorname{Ln}(-1)$; 2) $\ln(-1)$; 3) $\ln 2i$.

Решение. Для числа $z = -1$ имеем: $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$; $\arg z = \pi$.

По формуле (4.3) найдем

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i(\pi + 2k\pi) = i(\pi + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В соответствии с формулой (4.5) получим $\ln(-1) = \ln|-1| + i\pi = i\pi$.

Для числа $z = 2i$ имеем: $|z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$; $\arg z = \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\ln 2i = \ln 2 + \frac{\pi}{2}i.$$

Пример 13. Найти значение функции $w = i^i$.

Решение. В соответствии с формулой (4.6) при $a = i, z = i$ и с учетом того, что $\operatorname{Ln} i = \ln|i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ получим

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i \cdot i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}, \quad \text{где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

При $k = 0$ имеем: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Пример 14. Докажите тождество $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

Доказательство:

$$\begin{aligned}\sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 = - \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1.\end{aligned}$$

Пример 15. Найдите $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$, если $w = chz$.

Решение. Используя соотношения (4.9) и формулы суммы (разности) аргументов, получим

$$\begin{aligned}w = chz &= \cos iz = \cos i(x + iy) = \cos(ix - y) = \cos ix \cdot \cos y + \sin ix \cdot \sin y = \\ &= \cos y \cdot chx + ish x \cdot \sin y.\end{aligned}$$

Поэтому $\operatorname{Re} w = \cos y \cdot chx$ и $\operatorname{Im} w = shx \cdot \sin y$.

Пример 16. Найдите $\operatorname{Arcsin} 3i$.

Решение. С помощью формул (4.3) и (4.10) находим:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin} 3i &= -i \operatorname{Ln} \left(i \cdot 3i + \sqrt{1 - (3i)^2} \right) = -i \operatorname{Ln} \left(-3 \pm \sqrt{1 + 9} \right) = -i \operatorname{Ln} \left(-3 \pm \sqrt{10} \right) \\ &= -i \operatorname{Ln} \left(-3 - \sqrt{10} \right) = -i \left(\ln |-3 - \sqrt{10}| + i \left(\arg(-3 - \sqrt{10}) + 2\pi k \right) \right) = \\ &= -i \left(\ln(3 + \sqrt{10}) + i(\pi + 2\pi k) \right) = -i \ln(3 + \sqrt{10}) + \pi + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ &= -i \operatorname{Ln} \left(-3 + \sqrt{10} \right) = -i \left(\ln |-3 + \sqrt{10}| + i \left(\arg(-3 + \sqrt{10}) + 2\pi k \right) \right) = \\ &= -i \left(\ln(\sqrt{10} - 3) + i(0 + 2\pi k) \right) = -i \ln(\sqrt{10} - 3) + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется показательная функция $f(z) = e^z$?
2. Каковы основные свойства показательной функции $f(z) = e^z$?
3. Как определяется логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$?
4. Запишите формулу для функции $w = \operatorname{Ln} z$.
5. Что называют главным значением логарифмической функции $w = \operatorname{Ln} z$?
6. Каковы основные свойства логарифмической функции $w = \operatorname{Ln} z$?

7. Как определяется степенная функция $w = z^n$, если а) $n \in N$; б) $n = \frac{1}{q}$ ($q \in N$); в) $n = \frac{p}{q}$ ($p, q \in N$)?
8. Как определяется степенная функция $w = z^a$ с произвольным комплексным показателем $a = \alpha + i\beta$?
9. Как определяются тригонометрические функции $f(z) = \sin z$, $f(z) = \cos z$, $f(z) = \operatorname{tg} z$, $f(z) = \operatorname{ctg} z$?
10. Как определяются гиперболические функции?
11. Запишите формулы, связывающие тригонометрические и гиперболические функции.
12. Как определяются обратные тригонометрические и гиперболические функции?

Задачи

4.1. Найдите все значения следующих логарифмов:

- а) $\operatorname{Ln}(2 - 2i)$, $\ln(2 - 2i)$; б) $\operatorname{Ln}(-2)$, $\ln(-2)$;
 в) $\operatorname{Ln} e$, $\ln e$; г) $\operatorname{Ln}(-3 + 4i)$, $\ln(-3 + 4i)$.

4.2. Вычислите значения функций:

- а) $\cos(\pi + i)$; б) $\sin\left(1 + \frac{\pi}{2}i\right)$; в) $\cos\left(2 + \frac{3\pi}{4}i\right)$; г) $\sin(\pi i)$; д) chi ;
 е) $\operatorname{sh}(1 + i)$; ё) $\operatorname{sh}(2i)$; ж) $\operatorname{ch}(2i)$; з) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}i$.

4.3. Докажите тождества:

- а) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$;
 б) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;
 в) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$;
 г) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$.

4.4. Найдите все значения обратных тригонометрических функций:

- а) $\operatorname{Arcsin} i$; б) $\operatorname{Arccos} 1$; в) $\operatorname{Arcctg}(1 + i)$; г) $\operatorname{Arctg} 1$.

4.5. Найдите $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$, если:

а) $w = \sin 2z$; б) $w = \cos z$; в) $w = \cos 2z$; г) $w = \operatorname{sh} z$.

4.6. Найдите модуль $|z|$ и $\arg z$, если $z = i \sin^2 \frac{1}{i}$.

4.7. Найдите модуль и аргумент числа $f(i)$, если $f(z) = \operatorname{tg} z$.

5. Дифференцирование функций комплексного переменного (1.5 ч.)

Пример 17. Исходя из определения, найти производную функции $f(z) = z^2$.

Решение. В этом случае $f(z + \Delta z) = (z + \Delta z)^2 = z^2 + 2z \cdot \Delta z + (\Delta z)^2$;

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = 2z \cdot \Delta z + (\Delta z)^2; \quad \frac{\Delta w}{\Delta z} = 2z + \Delta z;$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

Таким образом, эта функция дифференцируема в любой точке, и её производная равна $2z$.

Пример 18. Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти производную функции $w = e^{2z}$.

Решение. $w = e^{2z} = e^{2(x+iy)} = e^{2x} \cdot e^{i2y} = e^{2x} \cdot (\cos 2y + i \sin 2y) = e^{2x} \cos 2y + i e^{2x} \sin 2y$. Отсюда $u(x, y) = e^{2x} \cos 2y$ и $v(x, y) = e^{2x} \sin 2y$. Находим частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x} \cos 2y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x} \sin 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x} \sin 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x} \cos 2y.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{условия Коши-Римана} \quad (5.2)$$

выполнены, т.е. функция $w = e^{2z}$ дифференцируема. Найдём её производную, используя формулу (5.3):

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x} \cos 2y + i 2e^{2x} \sin 2y = 2e^{2x} \cdot (\cos 2y + i \sin 2y) = \\ = 2e^{2x} \cdot e^{i2y} = 2e^{2z}.$$

Пример 19. Выяснить, являются ли аналитическими функции: а) $w = e^z$; б) $w = \bar{z}$; в) $w = z \operatorname{Re} z$?

Решение: а) $w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$. Отсюда $u(x, y) = e^x \cos y$ и $v(x, y) = e^x \sin y$. Находим частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{условия Коши-Римана (5.2)}$$

выполнены для всех точек плоскости Oxy . Тогда функция $w = e^z$ является аналитической на всей плоскости.

б) $w = \bar{z} = x - iy$. Отсюда $u(x, y) = x$ и $v(x, y) = -y$;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Следовательно, первое из условий (5.2) не выполняется. Функция $w = \bar{z}$ не имеет производной ни в одной точке плоскости и поэтому не является аналитической.

в) $w = z \operatorname{Re} z = (x + iy)x = x^2 + ixy$. Отсюда $u(x, y) = x^2$ и $v(x, y) = xy$;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

Равенства (5.2) выполняются только для $x = 0$ и $y = 0$. Таким образом, функция $w = z \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в точке $z = 0$ и нигде не является аналитической (так как она не дифференцируема в окрестности некоторой точки).

Пример 20. Найти угол поворота и коэффициент растяжения при отображении $w = z^3$ в точке $z_0 = 1 + i$.

Решение. Так как $f'(z) = 3z^2$, то $f'(z_0) = 3(1+i)^2 = 6i$, $|f'(z_0)| = 6$,
 $\arg f'(z_0) = \frac{\pi}{2}$.

Поэтому угол поворота равен $\frac{\pi}{2}$, а коэффициент растяжения равен 6.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют производной функции $w = f(z)$ в точке z ?
2. Какую функцию называют дифференцируемой в точке?
3. Сформулируйте критерий дифференцируемости в точке.
4. Как найти производную функции комплексного переменного?
5. По каким формулам находят производные функций z^n , $\ln z$, e^z ?
6. По каким формулам находят производные тригонометрических и обратных тригонометрических функций?
7. Сформулируйте правила дифференцирования функции комплексного переменного.
8. Какую функцию называют аналитической в точке (области)?
9. Что называют дифференциалом аналитической функции?
10. Каков геометрический смысл модуля производной?
11. Каков геометрический смысл аргумента производной?
12. Что называют конформным отображением?

Задачи

5.1. Исходя из определения, найти производную функции $f(z) = z^2 - 3z + 2$.

5.2. Для данной функции $f(z)$ указать точки, в которых существует производная $f'(z)$, и найти производную в этих точках:

а) $f(z) = i \cdot \bar{z}$; б) $f(z) = z + 2i$; в) $f(z) = iz^2 - 3z + 1$; г) $f(z) = z^4 + 1$;

д) $f(z) = \frac{1}{z^3}$; е) $f(z) = \ln(z^2)$; ё) $f(z) = L n(z^2)$; ж) $f(z) = ch z$;

з) $f(z) = \sin \bar{z}$; к) $f(z) = \sin(z + 2i)$; л) $f(z) = \cos(iz)$.

5.3. Выяснить, являются ли аналитическими функции:

а) $w = \operatorname{Im} z$; б) $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$; в) $w = z^3 + 2i$; г) $f(z) = |z|$; д) $f(z) = ish \bar{z}$.

5.4. Показать, что в области $\operatorname{Re} z > 0$ функция $w = \ln z$ – аналитическая.

5.5. Показать, что при переходе от декартовых координат (x, y) к полярным (ρ, φ) условия Коши-Римана (5.2) принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

6. Гармонические функции (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 21. Доказать, что функция $\varphi(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ является

гармонической на всей плоскости, кроме точки $(0, 0)$.

Решение. Найдем частные производные функции:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) \cdot 2x(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{-2x^3 - 2xy^2 - 4xy^2 + 4x^3}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 + 2xy \cdot 2(x^2 + y^2) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{-2x^3 - 2xy^2 + 8xy^2}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Эти функции непрерывны всюду, кроме точки $(0, 0)$, причем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Значит, функция $\varphi(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ является гармонической на всей плоскости, кроме точки $(0, 0)$.

Пример 22. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если её действительная часть $u(x, y) = x^2 - y^2 - x$.

Решение. Поскольку $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$, то используя условия Коши-Римана (5.2) получим

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y.$$

Из первого уравнения находим

$$v = \int (2x - 1) dy = 2xy - y + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция.

Для определения функции $\varphi(x)$ находим $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x)$ и подставляем во второе условие Коши-Римана: $2y + \varphi'(x) = 2y$. Откуда $\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = C$, поэтому $v = 2xy - y + C$. Значит

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y + C) = \\ &= x^2 - y^2 + i2xy - (x + iy) + iC = (x + iy)^2 - (x + iy) + iC. \end{aligned}$$

$$\text{или } f(z) = z^2 - z + Ci.$$

Отыскание функции $f(z)$ по её мнимой части $v(x, y)$ проводится аналогично.

Пример 23. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если её мнимая часть $v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + x$.

Решение. Поскольку $\frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -4y$, то используя условия Коши-Римана (5.2) получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 1.$$

Из первого уравнения находим

$$u = \int -4y dx = -4xy + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция.

Для определения функции $\varphi(y)$ находим $\frac{\partial u}{\partial y} = -4x + \varphi'(y)$ и

подставляем во второе условие Коши- Римана: $-4x + \varphi'(y) = -4x - 1$. Откуда $\varphi'(y) = -1 \Rightarrow \varphi(y) = -y + C$, поэтому $u = -4xy - y + C$. Значит

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = -4xy - y + C + i(2x^2 - 2y^2 + x) = \\ &= 2i(x^2 - y^2 + 2ixy) + i(x + iy) + C. \end{aligned}$$

$$\text{или } f(z) = 2iz^2 + iz + C.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется гармонической?
2. Что можно сказать о действительной и мнимой частях функции, аналитической в области?
3. Какие функции называются сопряженными гармоническими?
4. Что называют односвязной областью?
5. Как по действительной части аналитической функции восстановить саму аналитическую функцию?
6. Как по мнимой части аналитической функции восстановить саму аналитическую функцию?

Задачи

6.1. Найти аналитическую функцию $f(z)$, для которой заданы условия:

а) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 3x + y, \quad f(0) = i;$

б) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2, \quad f(0) = 2 + i;$

$$\text{в)} v(x, y) = 2e^x \cos y, \quad f(0) = 2(1+i);$$

$$\text{г)} v(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3y^2x - 2y^3, \quad f(0) = 0;$$

$$\text{д)} v(x, y) = x^2 - y^2 + xy, \quad f(0) = 0;$$

$$\text{е)} v(x, y) = e^{-y} \sin x + y, \quad f(0) = 1;$$

$$\text{ё)} u(x, y) = e^{-y} \cos x, \quad f(0) = 1;$$

$$\text{ж)} v(x, y) = 3x^2y - y^3, \quad f(0) = 1;$$

$$\text{з)} u(x, y) = 1 - \sin y \cdot e^x, \quad f(0) = 1+i.$$

6.2. При каком условии трехчлен $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ является гармонической функцией?

6.3. Показать, что функция $\varphi(x, y) = x^2y$ не является действительной или мнимой частью аналитической функции.

7. Интеграл от функции комплексного переменного по кривой (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 24. Вычислить интеграл $\int_L (z + 2\bar{z}) dz$, где L – отрезок прямой от точки $z = 0$ до $z = 1 - i$.

Решение. Уравнение прямой L , проходящей через точки $z = 0$ и $z = 1 - i$ имеет следующий вид: $y = -x$, где $0 \leq x \leq 1$. С учетом (7.3) и того, что $z = x + iy$; $\bar{z} = x - iy$, получим

$$\int_L (z + 2\bar{z}) dz = \int_L (x + iy + 2x - 2iy)(dx + idy) = \int_L (3x - iy)(dx + idy) =$$

$$\int_L 3xdx + ydy + i \int_L 3xdy - ydx = \left| \begin{array}{l} y = -x \\ dy = -dx \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right| = \int_0^1 3xdx + xdx + i \int_0^1 -3xdx + xdx =$$

$$4 \int_0^1 xdx + i \int_0^1 -2xdx = 4 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - 2i \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 2 - i.$$

Пример 25. Вычислить интеграл $\int_L \bar{z} dz$, где L – верхняя полуокружность $|z|=1$, направление обхода по часовой стрелки.

Решение. Верхнюю полуокружность $|z|=1$ можно задать уравнением $z = e^{it}$, где $0 \leq t \leq \pi$, причем t убывает от π до 0 (направление обхода по часовой стрелки). Так как $z = e^{it}$, $\bar{z} = e^{-it}$, $dz = ie^{it} dt$, то

$$\int_L \bar{z} dz = \int_{\pi}^0 e^{-it} ie^{it} dt = i \int_{\pi}^0 dt = -i\pi.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называют интегралом от функции $w = f(z)$ комплексного переменного z по кривой L ?
2. Сформулируйте и докажите теорему об интегрировании непрерывной функции по гладкой кривой L .
3. По какой формуле вычисляется интеграл от однозначной функции комплексной переменной z по кривой L ?
4. По какой формуле вычисляется интеграл от однозначной функции комплексной переменной z по кривой L , заданной в параметрическом виде?
5. Сформулируйте основные свойства интеграла от функции комплексного переменного.

Задачи

7.1. Вычислить интеграл $\int_L (z + 2\bar{z})dz$, где L – дуга окружности

$$|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0, \operatorname{Re} z \geq 0.$$

7.2. Вычислить интеграл $\int_L (z + \operatorname{Re} z)dz$, где L – дуга параболы

$$x = y^2 \text{ от точки } z_1 = 0 \text{ до точки } z_2 = 4 + 2i.$$

7.3. Вычислить интеграл $\int_L (\bar{z} + i)dz$, где L – дуга параболы

$$y = x^2 + 1 \text{ от точки } z_1 = i \text{ до точки } z_2 = 1 + 2i.$$

7.4. Вычислить интеграл $\int_L z \cdot \operatorname{Re} z^2 dz$, где L – отрезок прямой,

$$\text{соединяющий точки } z_A = 0, z_B = 1 + 2i.$$

7.5. Вычислить интеграл $\int_L z \operatorname{Im} z dz$, где L – отрезок прямой $-y=2$,

$$\text{соединяющей точки } z_1 = 2 \text{ и } z_2 = 5 + 3i.$$

7.6. Вычислить интеграл $\int_L \operatorname{Im}(\bar{z} + i)dz$, где L – дуга параболы $y = x^2$

$$\text{от точки } z = 0 \text{ до точки } z = 3i + 1.$$

7.8. Вычислить интеграл $\int_L z \bar{z} dz$, где L – отрезок прямой $x+y=0$,

$$\text{соединяющий точки } z_1 = -2 + 2i \text{ и } z_2 = 1 - i.$$

7.9. Вычислить интеграл $\int_L \operatorname{Im}(\bar{z} + i)dz$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от

$$\text{точки } z = 0 \text{ до точки } z = -2 + 4i.$$

7.10. Вычислить интеграл $\int_L \operatorname{Re}(iz)dz$, где L – дуга окружности $|z|=2$,

$$\operatorname{Im} z \geq 0.$$

7.11. Вычислить интеграл $\int_L \operatorname{Im}(z-i)dz$, где L – дуга окружности

$$|z|=1, \operatorname{Im} z \leq 0.$$

7.12. Вычислить интеграл $\int_L \operatorname{Re}(iz^2)dz$, где L – дуга окружности $|z|=1$,

$$\operatorname{Im} z \geq 0.$$

8. Теорема Коши (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 26. Вычислить интеграл $\int_L \frac{dz}{z^2-1}$, где L – окружность $|z-2i|=1$.

Решение. Функция $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ – аналитична во всех точках комплексной плоскости, кроме точек $z=1$ и $z=-1$. Так как эти точки лежат вне контура L , представляющего собой окружность с центром в точке $z=2i$ и радиусом равным 1, то функция является аналитической в области, ограниченной контуром, и по теореме Коши $\int_L \frac{dz}{z^2-1} = 0$.

Пример 27. Вычислить интеграл $\int_{-1}^i z^2 dz$.

Решение. Используя аналог формулы Ньютона-Лейбница (8.1) получим:

$$\int_{-1}^i z^2 dz = \left. \frac{z^3}{3} \right|_{-1}^i = \frac{1}{3}(i^3 + 1) = \frac{1}{3}(1-i).$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называют односвязной областью (приведите пример)?

2. Что называют многосвязной областью (приведите пример)?
3. Сформулируйте интегральную теорему Коши для односвязной области? Каковы следствия из неё?
4. Сформулируйте интегральную теорему Коши для многосвязной области? Каковы следствия из неё?
5. Дайте определение первообразной от функции комплексного переменного. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

Задачи

Используя теорему Коши, вычислить интеграл:

$$8.1. \oint_L \frac{z^2}{z-2i} dz, \quad L: \text{а) } |z|=3, \text{ б) } |z|=1.$$

$$8.2. \oint_{|z+1|=4} \frac{dz}{z^2 + 2z - 8}$$

$$8.3. \int_L \frac{\cos z}{z(z - \frac{\pi}{2})} dz, \quad L: |z|=2.$$

$$8.4. \int_L \frac{dz}{(z^2 - 1)^2}, \quad L: |z-1|=1.$$

$$8.5. \int_L \frac{\operatorname{tg} z}{z \left(z - \frac{\pi}{4} \right)^2} dz, \quad L: |z|=1.$$

$$8.6. \int_L \frac{dz}{z^2 + 9}, \quad L: |z+2i|=3.$$

$$8.7. \int_L \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)}, \quad L: |z-1| = \frac{3}{4}.$$

$$8.8. \oint_L \frac{dz}{(z^2 + 9)^2}, \quad L: |z + 2i| = 4.$$

$$8.9. \oint_L \frac{z^2 dz}{z - 2i}, \quad L: |z| = 3.$$

$$8.10. \oint_L \frac{e^z dz}{z^2 \cdot (z + 4)}, \quad L: |z - 2i| = 3.$$

9. Интегральная формула Коши (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 28. Вычислить интеграл $\int_L \frac{e^z}{z - 3} dz$, где L – окружность $|z - 1| = 4$.

Решение. Функция $f(z) = e^z$ является аналитической в круге $|z - 1| = 4$, точка $z_0 = 3$ принадлежит этому кругу, поэтому в соответствии с формулой (9.3) получим

$$\int_L \frac{e^z}{z - 3} dz = 2\pi i e^3.$$

Вопросы для самопроверки

1. Запишите интегральную формулу Коши.
2. Какие интегралы можно вычислить с помощью интегральной формулы Коши.

Задачи

Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$9.1. \oint_L \frac{z^2}{z - 2i} dz, \quad L: \text{а) } |z| = 3, \text{ б) } |z| = 1.$$

$$9.2. \oint_{|z+1|=4} \frac{dz}{z^2 + 2z - 8}$$

$$9.3. \int_L \frac{\cos z}{z(z - \frac{\pi}{2})} dz, \quad L: |z| = 2.$$

$$9.4. \int_L \frac{dz}{(z^2 - 1)^2}, \quad L: |z - 1| = 1.$$

$$9.5. \int_L \frac{\operatorname{tg} z}{z \left(z - \frac{\pi}{4} \right)^2} dz, \quad L: |z| = 1.$$

$$9.6. \int_L \frac{dz}{z^2 + 9}, \quad L: |z + 2i| = 3.$$

$$9.7. \int_L \frac{dz}{(z - 1)^2 (z + 1)}, \quad L: |z - 1| = \frac{3}{4}.$$

$$9.8. \oint_L \frac{dz}{(z^2 + 9)^2}, \quad L: |z + 2i| = 4.$$

$$9.9. \int_L \frac{z^2 dz}{z - 2i}, \quad L: |z| = 3.$$

$$9.10. \oint_L \frac{e^z dz}{z^2 \cdot (z + 4)}, \quad L: |z - 2i| = 3.$$

10. Числовые ряды в комплексной плоскости (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 29. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n - i}$.

Решение. Преобразуем данный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+i}{4n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n^2+1} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+1}.$$

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n^2+1}$ воспользуемся предельным признаком сравнения, выберем гармонический расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n \cdot n}{4n^2+1} \right| = \frac{1}{2} \neq 0, \text{ следовательно, оба ряда ведут себя одинаково в смысле}$$

сходимости, поэтому данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-i}$ расходится.

Пример 30. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!(e-i)^n}$.

Решение. Поскольку $|(e-i)^n| = (\sqrt{e^2+1})^n$, то по признаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n! (\sqrt{e^2+1})^n}{(n+1)! (\sqrt{e^2+1})^{n+1} \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n \cdot \sqrt{e^2+1}} = \frac{e}{\sqrt{e^2+1}} < 1.$$

Таким образом, исходный ряд сходится, причем абсолютно.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение числового ряда с комплексными членами.
2. Какой ряд называется сходящимся (расходящимся)?
3. Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда с комплексными числами.
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условие сходимости числового ряда с комплексными числами.
5. Перечислите основные свойства сходящихся рядов.
6. Дайте понятие абсолютно сходящегося числового ряда с комплексными числами. Перечислите их основные свойства.

Задачи

Исследуйте на сходимость следующие числовые ряды:

1). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}$

2). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}}$

3). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$

4). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + i}$

5). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$

6). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$

11. Степенные комплексные ряды (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 31. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} (z-i)^n$.

Решение. Для ряда, составленного из модулей исходного, применим признак Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot |z-i|^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n \cdot |z-i|^n} = \frac{|z-i|}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{|z-i|}{3}.$$

Если $|z-i| > 3$, то ряд расходится, если $|z-i| < 3$, то ряд сходится, то есть областью сходимости ряда является круг с центром в точке $z_0 = i$ и радиусом $R = 3$.

Пример 32. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (z-1)^n$.

Решение. Здесь $c_n = 3^n$, тогда $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{3}$ и $|z-1| < \frac{1}{3}$ - круг

сходимости ряда.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение функционального ряда с комплексными членами.
2. Дайте определение сходящегося (расходящегося) функционального ряда.

3. Сформулируйте определение равномерной сходимости функционального ряда.
4. Сформулируйте признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
5. Какой функциональный ряд называется степенным рядом?
6. Сформулируйте теорему Абеля.
7. Каким может быть множество сходимости степенного ряда?
8. Запишите формулу Коши-Адамара для определения радиуса сходимости степенного ряда.
9. Перечислите основные свойства степенного ряда.

Задачи

Исследуйте на сходимость следующие функциональные ряды:

1). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$

2). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n!}$

3). $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(in) \cdot z^n$

4). $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot z^n$

5). $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi i}{n} z^n$

6). $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i} \right)^n$

12. Ряды Тейлора (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 33. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \frac{1}{7-5z}$ в окрестности точки $z_0 = 1$.

Решение. Воспользуемся разложением б), для чего преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{7-5z} = \frac{1}{7-5(z-1)-5} = \frac{1}{2-5(z-1)} = \frac{1}{2\left(1-\frac{5}{2}(z-1)\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{2}(z-1)}.$$

Тогда $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{2}(z-1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{5}{2}(z-1) + \frac{5^2}{2^2}(z-1)^2 + \frac{5^3}{2^3}(z-1)^3 + \dots\right),$ и

окончательно $\frac{1}{7-5z} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2^2}(z-1) + \frac{5^2}{2^3}(z-1)^2 + \dots + \frac{5^n}{2^{n+1}}(z-1)^n + \dots$

Полученный ряд сходится при $\left|\frac{5}{2}(z-1)\right| < 1$ или $|z-1| < \frac{2}{5}$.

Пример 34. Разложить рациональную функцию $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$ в

ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$.

Решение. Раскладывая исходную функцию на сумму простых дробей, используем разложения 6), 7), будем иметь:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot z^n, \quad |z| < 2.$$

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)(z-2)} &= \frac{1}{3} \left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \right) = -\frac{1}{3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \right) = \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n \right) \cdot z^n, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

Пример 35. Функцию $f(z) = \ln(2+3z)$ разложить в ряд Тейлора по степеням $z-1$.

Решение. Преобразуем исходную функцию и применим разложение 9), получим

$$\ln(2+3z) = \ln(5+3(z-1)) = \ln\left(5\left(1+\frac{3(z-1)}{5}\right)\right) = \ln 5 + \ln\left(1+\frac{3(z-1)}{5}\right) =$$

$$= \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \left(\frac{3(z-1)}{5} \right)^n = \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^n}{n 5^n} \cdot (z-1)^n.$$

Ряд сходится при условии, что $\left| \frac{3(z-1)}{5} \right| < 1$, то есть $|z-1| < \frac{5}{3}$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение ряда Тейлора.
2. Сформулируйте теорему Тейлора о разложении голоморфной функции в степенной ряд.
3. Всегда ли на границе круга сходимости ряд Тейлора данной функции, имеются особые точки функции?
4. Приведите алгоритм разложения рациональной функции в ряд Тейлора.

Задачи

Следующие функции разложить в ряд Тейлора и указать область их сходимости:

1). $f(z) = \ln(3 - 2z - z^2)$ по степеням z .

2). $f(z) = \frac{z}{z^2 + 3}$ по степеням z .

3). $f(z) = \cos z$ по степеням $z - \frac{\pi}{4}$.

4). $f(z) = \frac{z+1}{z^2 + 4z - 5}$ по степеням z .

13. Ряды Лорана (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 36. Найти множества точек z , в которых сходится ряд Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}.$$

Решение. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$. Найдём радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 1}{3^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{n+1}}\right)}{3^n \cdot \left(1 + \frac{1}{3^n}\right)} = 3, \quad R = 3 \quad |z| < 3.$$

Исследуем на сходимость ряд:

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1} = \left| \begin{matrix} m = -n \\ n = -m \end{matrix} \right| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{-m}}{3^{-m} + 1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3^m}{1 + 3^m} \cdot \frac{1}{z^m} = \left| \frac{1}{z} = w \right| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3^m}{1 + 3^m} \cdot w^m.$$

Найдём радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^m \cdot (1 + 3^{m+1})}{3^{m+1} \cdot (1 + 3^m)} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{m+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{m+1}}\right)}{3^m \cdot \left(1 + \frac{1}{3^m}\right)} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1, \quad |w| < 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| < 1 \Rightarrow \Rightarrow |z| > 1.$$

Таким образом, данный ряд Лорана сходится в кольце $1 < |z| < 3$.

Выписанные в теореме Лорана формулы для коэффициентов ряда Лорана мало удобны для их вычисления. На практике, как и в случае рядов Тейлора, часто применяют различные искусственные приёмы. При этом используется тот факт, что разложение в ряд Лорана функции, в данном кольце, является единственным. При разложении рациональных дробей, как и в случае рядов Тейлора, выделяется целая часть неправильной дроби, а правильная записывается в виде суммы элементарных дробей, для разложения которых используется формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Разложение других элементарных функций часто сводится к разложению в ряд Тейлора с последующим использованием известных разложений 1) – 9) темы 10.

Пример 37. Разложить функцию $f(z) = z^3 \cdot e^{1/z}$ в ряд Лорана в кольце $0 < |z| < \infty$.

Решение. $z^3 \cdot e^{1/z} = z^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = z^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n \cdot n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n-3} \cdot n!}.$

Пример 38. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{(z-i)(z+3)}$ в ряд Лорана в кольце $1 < |z| < 3$.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z \left(1 - \frac{i}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}}; |z| > 1.$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3 \left(1 + \frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{3}\right)^n \cdot (-1)^n; |z| < 3.$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{z}{(z-i)(z+3)} = \frac{z}{3+i} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^n}{3^{n+1}} \right).$$

Вопросы для самопроверки

1. Какой функциональный ряд называется рядом Лорана?
2. Сформулируйте теорему Лорана.
3. Каким может быть множество точек сходимости ряда Лорана?
4. Выделите в ряде Лорана правильную и главную части.
5. Может ли в условиях теоремы Лорана кольцо вырождаться в круг или в круг с выколотым центром?
6. Существуют ли функции, ряд Лорана которых сходится на всей комплексной плоскости с выколотой точкой ∞ ?
7. Приведите пример функции, в разложении которой отсутствует правильная часть ряда Лорана.

Задачи

1. Разложить функцию $f(z) = z^4 \cdot \cos \frac{1}{z}$ в ряд Лорана в точке $z_0 = 0$.
2. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ в ряд Лорана в точке $z_0 = 0, 0 < |z| < 1$.
3. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ в ряд Лорана в точке $z_0 = 1, 2 < |z-1| < \infty$.
4. Разложить функцию $f(z) = \frac{z^4}{(z-2)^2}$ в ряд Лорана в точке $z_0 = 2$.
5. Разложить функцию в ряд Лорана $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 8}$, $1 < |z+2| < 4$ в указанном кольце.

14. Нули аналитической функции (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 39. Для функции $f(z) = \sin z - z + \frac{z^3}{6}$ определить порядок ее нуля.

Решение. Точка $z_0 = 0$ – нуль этой функции, так как $f(0) = 0$. Найдём порядок нуля:

$$f'(z) = \cos z - 1 + \frac{z^2}{2}; \quad f'(0) = 0;$$

$$f''(z) = -\sin z + z; \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(z) = -\cos z + 1; \quad f'''(0) = 0;$$

$$f^{(4)}(z) = \sin z; \quad f^{(4)}(0) = 0;$$

$$f^{(5)}(z) = \cos z; \quad f^{(5)}(0) = 1 \neq 0.$$

Первая отличная от нуля производная функции в точке $z_0 = 0$ – пятая, поэтому эта точка – нуль пятого порядка функции $f(z) = \sin z - z + \frac{z^3}{6}$.

Пример 40. Найти нули функции $f(z) = (z^2 + 4)^3(z - 1)$ и определить их порядок.

Решение. Функция $f(z) = (z^2 + 4)^3(z - 1)$ имеет три нуля $z = 2i$, $z = -2i$, $z = 1$. Разложим функцию $f(z)$ на множители: $f(z) = (z - 2i)^3(z + 2i)^3(z - 1)$. Поскольку для данной функции возможно ее представление тремя способами:

$$f(z) = (z - 2i)^3 \varphi_1(z), \text{ где } \varphi_1(z) = (z + 2i)^3(z - 1), \quad \varphi_1(2i) \neq 0,$$

$$f(z) = (z + 2i)^3 \varphi_2(z), \text{ где } \varphi_2(z) = (z - 2i)^3(z - 1), \quad \varphi_2(-2i) \neq 0,$$

$$f(z) = (z - 1) \varphi_3(z), \text{ где } \varphi_3(z) = (z + 2i)^3(z - 2i)^3, \quad \varphi_3(1) \neq 0,$$

то $z = 2i$, $z = -2i$, нули третьего порядка, а $z = 1$ нуль первого порядка.

Пример 41. Определить порядок нуля $z = 0$ функции $f(z) = 2 \cos z^3 + z^6 - 2$.

Решение. Используем разложение в ряд для функции $\cos z$:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots,$$

тогда

$$f(z) = 2 \cos z^3 + z^6 - 2 = 2 \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) + z^6 - 2 = z^{12} \left(\frac{1}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right),$$

то есть $f(z)$ представима в виде (1):

$$f(z) = z^{12} \varphi(z), \quad \text{где } \varphi(0) = \left(\frac{1}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{4!} \neq 0.$$

Поэтому $z = 0$ является для функции $f(z) = 2 \cos z^3 + z^6 - 2$ нулем порядка 12. Следует отметить, что для отыскания нуля по порядку первой отличной от нуля производной потребовалось бы дифференцировать $f(z)$ 12

раз.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют простым нулем функции $f(z)$?
2. Что называют нулем порядка k функции $f(z)$?
3. Каково необходимое и достаточное условие того, что точка является нулем функции $f(z)$?

Задачи

Найти нули следующих функций и определить их тип:

- | | |
|------------------------------------|--------------------------|
| 1). $f(z) = (z^2 - 4)^3 \cdot e^z$ | 2). $f(z) = (z^2 + 9)^2$ |
| 3). $f(z) = z \cdot \sin z$ | 4). $f(z) = 1 - e^z$ |
| 5). $f(z) = \frac{\sin^3 z}{z}$ | 6). $f(z) = z^4 + 4z^2$ |

15. Изолированные особые точки функции (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 41. Найти изолированные особые точки функции $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z - \pi)}$ и определить их тип.

Решение. Функция $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z - \pi)}$ имеет две конечные изолированные особые точки $z_1 = \pi$ и $z_2 = 0$. Исследуем точку $z_1 = \pi$:

$$\lim_{z \rightarrow \pi} \frac{\sin z}{z^2(z - \pi)} = -\lim_{z \rightarrow \pi} \frac{\sin(z - \pi)}{z^2(z - \pi)} = -\frac{1}{\pi^2},$$

следовательно, точка $z_1 = \pi$ является устранимой особой точкой. Для точки $z_2 = 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z^2(z - \pi)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z(z - \pi)} = \infty,$$

то есть точка $z_2 = 0$ является полюсом и, поскольку

$$\lim_{z \rightarrow 0} (f(z) \cdot z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z(z - \pi)} = -\frac{1}{\pi} \neq 0,$$

то точка $z_2 = 0$ есть простой полюс.

Пример 42. Найти изолированные особые точки функции $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^4}$ и определить их тип.

Решение. Функция $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^4}$ имеет единственную особую точку $z_0 = 0$. Запишем разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$$\frac{\cos z - 1}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots - 1 \right) = -\frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4!} - \frac{z^2}{6!} + \dots$$

гл. часть правильн. часть

Таким образом, так как главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых и $c_{-2} = \frac{1}{2} \neq 0$, то точка $z_2 = 0$ есть полюс второго порядка.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение изолированной особой точки аналитической функции.
2. Какая изолированная особая точка называется устранимой точкой, полюсом, существенно-особой точкой?
3. Запишите разложение функции в ряд Лорана в окрестности полюса.
4. Запишите разложение функции в ряд Лорана в окрестности существенно-особой точкой.

Задачи

Найти изолированные особые точки следующих функций и определить их тип:

$$1). \quad f(z) = \frac{\cos z}{(z^2 - \pi^2)^3}.$$

$$2). \quad f(z) = \frac{1}{e^z - 2}.$$

$$3). \quad f(z) = \frac{1}{1 - \sin z}.$$

$$4). \quad f(z) = e^{\frac{1}{z+2}}.$$

$$5). \quad f(z) = \operatorname{tg}^2 z.$$

$$6). \quad f(z) = \operatorname{tg} \frac{1}{z-1}.$$

16. Вычет аналитической функции в особой точке (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 43. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - z^2}$ в конечных особых точках.

Решение. Особые точки данной функции $z_1 = 0$, $z_2 = 1$.

В точке $z_1 = 0$ имеем:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z^2}{z^2(z-1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z-1} = -1,$$

следовательно $z_1 = 0$ - устранимая особая точка и $\operatorname{res} f(0) = 0$.

Точка $z_2 = 1$ - простой полюс, так как

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin z^2}{z^2(z-1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z-1} = \infty,$$

и в точке $z_2 = 1$ числитель дроби $\frac{\sin z^2}{z^2(z-1)}$ в нуль не обращается, а

знаменатель имеет в этой точке нуль первого порядка, тогда согласно

формуле (16.3) имеем $\operatorname{res} f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} [f(z) \cdot (z-1)] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin z^2}{z^2} = \sin 1$.

Пример 44. Найти вычеты функции $f(z) = z \sin \frac{1}{z^2}$ в конечных особых точках.

Решение. Единственной конечной особой точкой функции $f(z)$ является точка $z_0 = 0$. Лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности этой точки имеет вид

$$z \sin \frac{1}{z^2} = z \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} - \dots \right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^5} + \frac{1}{5!z^9} - \dots$$

Поскольку главная часть содержит бесконечно много слагаемых, то $z_0 = 0$ - существенно особая точка. Коэффициент при z_{-1} равен 1, следовательно $\operatorname{res} f(0) = 1$.

Пример 45. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ в конечных особых точках.

Решение. Функция имеет две конечные особые точки $z_1 = i$, $z_2 = -i$, которые являются простыми полюсами, поэтому в соответствии с формулой (16.4), получим вычеты функции:

$$\operatorname{res} f(i) = \frac{1}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2z} \Big|_{z=i} = -\frac{i}{2},$$

$$\operatorname{res} f(-i) = \frac{1}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=-i} = \frac{1}{2z} \Big|_{z=-i} = \frac{i}{2}.$$

Пример 46. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}$ в конечных особых точках.

Решение. Особые точки функции $f(z)$ $z_1 = 1$, $z_2 = -2$.

В точке $z_1 = 1$ выполняются условия $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)} = \infty$ и

$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-1)^2}$, $\varphi(z) = \frac{e^z}{(z+2)}$, $\varphi(1) \neq 0$, то есть данная точка является полюсом

второго порядка, тогда, согласно формуле (16.5) получим

$$\operatorname{res} f(1) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} [f(z) \cdot (z-1)^2] = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{e^z}{z+2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z(z+1)}{(z+2)^2} = \frac{2e}{9}.$$

В точке $z_2 = -2$ выполняются условия $\lim_{z \rightarrow -2} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)} = \infty$ и

$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z+2}$, $\varphi(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$, $\varphi(-2) \neq 0$, то есть данная точка является

простым полюсом в силу чего по формуле (16.3) получим

$$\operatorname{res} f(-2) = \lim_{z \rightarrow -2} [f(z) \cdot (z+2)] = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{1}{9e^2}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение вычета в конечной изолированной особой точке.
2. Сформулируйте теорему Коши о вычетах.
3. Запишите формулу для вычисления вычета в устранимой особой точке.
4. Запишите формулы для вычисления вычета в простом полюсе.
5. Запишите формулу для вычисления вычета в полюсе k -го порядка.

Задачи

Найти вычеты данных функций в конечных особых точках:

1. $f(z) = \frac{e^{-z} - 1 + z}{z^5},$
2. $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z-2)},$
3. $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^3 - z^2},$
4. $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{4z^2 - \pi z},$
5. $f(z) = \frac{z}{z^5 + 2z^4 + z^3},$
6. $f(z) = z \cos \frac{1}{z + \pi}.$

17. Вычет функции в бесконечно удаленной особой точке (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 47. Вычислить интеграл $\oint_{|z-1|=2} \sin\left(1+\frac{1}{z}\right) dz$.

Решение. Единственной конечной особой точкой для функции $f(z)$ является точка $z=0$ - существенно особая точка, принадлежащая области, ограниченной контуром интегрирования. Так как $\operatorname{res}_0 f(z) = \cos 1$, то по формуле

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$$

получим

$$\cos 1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-1|=2} \sin\left(1+\frac{1}{z}\right) dz$$

или

$$\oint_{|z-1|=2} \sin\left(1+\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \cos 1.$$

Пример 48. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$.

Решение. Функция $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ имеет единственную особую точку $z=0$, которая является существенно особой и принадлежит области, ограниченной контуром интегрирования. Найдем вычет $f(z)$ для чего выполним разложение этой функции в степенной ряд

$$z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \dots \right) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \dots$$

Отсюда

$$\operatorname{res}_0 f(z) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24},$$

следовательно

$$\oint_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz = \frac{\pi i}{12}.$$

Пример 49. Для функции $f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}}$ определить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет.

Решение. Используя известное разложение для функции e^z , получим ряд Лорана $f(z)$ в окрестности $z = \infty$

$$z^4 e^{\frac{1}{z}} = z^4 + z^3 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!z} + \frac{1}{6!z^2} \dots, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

Поскольку главная часть ряда Лорана содержит конечное число членов и старшая степень z равна 4, то точка $z = \infty$ есть полюс четвертого порядка, а вычет функции $f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}}$ в этой точке равен

$$\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1} = -\frac{1}{5!} = -\frac{1}{120}.$$

Пример 50. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^9 + 1}$.

Решение. Функция $f(z)$ имеет девять изолированных особых точек, принадлежащих области, ограниченной контуром интегрирования. Чтобы не вычислять вычеты во всех девяти точках, используем теорему о сумме вычетов, то есть

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^9 + 1} = 2\pi i \sum_{k=1}^9 \operatorname{res} f(z_k) = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty).$$

Для нахождения $\operatorname{res} f(\infty)$ разложим $f(z) = \frac{1}{z^9 + 1}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки $|z| > 1$

$$\frac{1}{z^9 + 1} = \frac{1}{z^9} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z^9}} = \frac{1}{z^9} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{9n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{9(n+1)}},$$

откуда очевидно $c_{-1} = 0$, следовательно $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^9 + 1} = 0$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте основную теорему теории вычетов (теорему Коши).
2. В чем заключается практическая значимость основной теоремы теории вычетов.
3. Дайте определение вычета в бесконечности.
4. Сформулируйте теорему о полной сумме вычетов.

Задачи

1. Применяя теорему Коши вычислить следующие интегралы:

$$1). \int_{|z|=2} \frac{\sin z \, dz}{(z+1)^3}$$

$$2). \int_{|z|=2} \frac{z \, dz}{1 - 2 \sin^2 z}$$

$$3). \int_{|z|=2} z \cdot \operatorname{tg} \pi z \, dz$$

$$4). \int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4 + 1}$$

$$5). \int_{|z|=3/2} \frac{z \, dz}{(z-1)^2 (z+2)}$$

$$6). \int_{|z|=2} \frac{e^z \, dz}{z^3 (z+1)}$$

2. Определить характер точки $z = \infty$ и найти вычет в этой точке:

$$1). f(z) = \frac{3z^4 - z^3 + 5z^2 + 2}{z^3}$$

$$2). f(z) = \frac{e^z - 1}{z^5}$$

$$3). f(z) = \cos \frac{\pi}{z}$$

$$4). f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$$

3. Используя теорему о сумме вычетов, вычислить интегралы:

$$1). \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^3 - z^2}$$

$$2). \oint_{|z|=3} \frac{z^2 + 4}{z^3 + 1} \, dz$$

18. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов (1.5 ч.)

Типовые задания

Пример 51. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}$.

Решение. Рассмотрим следующую функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)(z^2 + 9)} = \frac{1}{(z + 2i)(z - 2i)(z + 3i)(z - 3i)}.$$

Особые точки $z = \pm 2i$, $z = \pm 3i$ функции являются простыми полюсами, из них в верхней полуплоскости расположены точки $z_1 = 2i$ и $z_2 = 3i$.

Определим вычеты функции $f(z)$ в этих точках

$$\operatorname{res} f(2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{(z + 2i)(z^2 + 9)} = -\frac{i}{20},$$

$$\operatorname{res} f(3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{1}{(z + 3i)(z^2 + 4)} = \frac{i}{30}.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} = 2\pi i \left(-\frac{i}{20} + \frac{i}{30} \right) = \frac{\pi}{30}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Как теория вычетов позволяет вычислять интегралы от функций действительного аргумента?
2. Приведите примеры определенных интегралов, вычисляемых с помощью вычетов.

Задачи

Вычислить с помощью вычетов интегралы:

$$1). \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2} \quad 2). \int_0^{\infty} \frac{x \cdot \cos x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

$$3). \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$4). \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)} dx$$

$$5). \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 20)^2} dx \quad 6). \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

$$7). \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)(x^2 + 16)} dx \quad 8). \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx$$

$$9). \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx$$

$$10). \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 4x + 5)^2} dx$$

$$11). \int_0^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 4} dx \quad 12). \int_0^{\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 + 4} dx$$

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

1.1. Перечень основной литературы:

- 1 Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. - Изд. 6-е, стер. - М. : Лань, 2002. - 688с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 681-684. - Предм. указ.: с. 685-688. - ISBN 5-9511-0014-3
- 2 Леонтьева, Т. А. Задачи по теории функций комплексного переменного : Учебное пособие / Т.А. Леонтьева, В.С. Панфёров, В.С. Серов. - М. : Изд-во МГУ, 1992. - 255 с. : ил.
- 3 Пантелеев, А. В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах : [учеб. пособие] / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. - 2-е изд., стер. - М. : Высшая школа, 2007. - 445 с. : ил. - (Прикладная математика для ВТУЗов). - На учебнике гриф: Рек.УМО. - Библиогр.: с. 443-445. - ISBN 978-5-06-004135-4
- 4 Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учебник для вузов / И. И. Привалов. - 14-е изд., стер. - М. : Высшая школа, 1999. - 432 с. : ил., рис. - Предм. указ.: с. 429-432
- 5 Шабунин, М. И. Теория функций комплексного переменного : учебник для вузов / М. Шабунин, Ю. Сидоров. - М. : ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. - 248 с. : ил. - (Технический

университет. Математика). - Библиогр. с. 247. - ISBN 5-94774-005-2

1.2. Перечень дополнительной литературы:

- 1 Попов, В. Н. Прикладные вопросы теории функций комплексного переменного / В.Н. Попов. - Архангельск : ИПЦ САФУ, 2013. - 164 с. - ISBN 978-5-261-00850-7
- 2 Щедрина, Р. Н. Теория функций комплексного переменного : метод. пособие для студ. спец. прикладная математика, энергетических и инж.-техн. спец. : [учеб. пособие] / Р. Н. Щедрина ; Став. гос. техн. ун-т. - Ставрополь : Ст. гос. техн. ун-т, 2000(1999). - 97 с. - Библиогр.: с. 95 (10 назв.)

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля):

- 1 <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
- 2 <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
- 3 <http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет со-бой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России. Основные разделы: журналы, персоналии, организации, конференции, семинары, видеотека, библиотека.
- 4 <http://www.mcsme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.